

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

# **Mémoire de Fin d'Etude de MASTER ACADEMIQUE**

## **Spécialité : Automatique et Système**

*Présenté par*  
**Hocine Lazouzi**  
**Fouchal Razika**

Mémoire proposé et dirigé par **M<sup>r</sup>.Ahmed Maidi.**

### Thème

# **Commande adaptative des systèmes à paramètres localisées : application à la régulation insuline-glucose**

*Mémoire soutenu publiquement le 4 juillet 2018 devant le jury composé de :*

**M TOUAT M.A.**

MCB, UMMTO, Président

**M MAIDI A.**

Professeur, UMMTO, Encadreur

**M GUERMAH S.**

MCA, UMMTO, Examineur

**M LAGHROUCHE M.**

Professeur, UMMTO, Examineur

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

*A ma très chère mère DAHBIA qui m'a donnée la force de me battre, la force d'affronter la vie, c'est elle qui m'as couvert d'amour, c'est grâce à ses sacrifices et ses précieuse conseils que je suis ici en toute fierté, que dieu la garde à jamais.*

*A ma raison d'être, mon cher père TAHAR, qui m'a œuvré pour ma réussite et qui as pris beaucoup de sacrifices pour vivre dans les meilleures conditions, je le remercie beaucoup à ses précieuses soutiens.*

*Ainsi que mes chers frères HAKIM, DJAMAL, SAMIR, MERZOUK, RABAH, et ma petites chères sœur TASSADIT*

*A mon cher oncle AHMED je le souhaite une très longue vie.*

*A tous mes meilleurs amies notamment ma chère FARIZA, OUAHIBA, LAMIA, HEDJILA, NODMILA, DALILA, DJAHIDA, HAYAT, ZAHIA, KAHINA, CHAHINAZ....*

*Sans oublier mon binôme Hocine ainsi que toute sa famille.*

*Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous remercie de tous mon cœur.*

RAZIKA



# Table des matières

|                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction générale</b>                                                    | <b>8</b>  |
| <b>1 Généralités sur les systèmes et la commande adaptative</b>                 | <b>10</b> |
| 1.1 Introduction . . . . .                                                      | 10        |
| 1.2 Notion sur les systèmes asservis et le modèle mathématique . . . . .        | 10        |
| 1.2.1 Définition du système . . . . .                                           | 10        |
| 1.2.2 Classes des systèmes . . . . .                                            | 11        |
| 1.2.2.1 Systèmes mono entrée-mono sortie . . . . .                              | 12        |
| 1.2.2.2 Systèmes multi-entrées-multi-sorties . . . . .                          | 12        |
| 1.2.2.3 Systèmes stationnaires et systèmes non stationnaires . . . . .          | 12        |
| 1.2.2.4 Systèmes continus-systèmes discrets . . . . .                           | 13        |
| 1.2.2.5 Système statique ou système dynamique . . . . .                         | 14        |
| 1.2.2.6 Systèmes déterministes-systèmes stochastiques . . . . .                 | 14        |
| 1.2.2.7 Système non linéaire . . . . .                                          | 14        |
| 1.2.2.8 Système linéaire . . . . .                                              | 14        |
| 1.2.2.9 Systèmes à paramètres constants ou variables dans le temps<br>. . . . . | 15        |
| 1.3 Modèle mathématique . . . . .                                               | 15        |
| 1.3.1 Définition . . . . .                                                      | 15        |
| 1.3.2 Comment obtenir le modèle mathématique . . . . .                          | 15        |
| 1.3.3 But de la modélisation . . . . .                                          | 16        |
| 1.3.4 Types de modèle . . . . .                                                 | 16        |
| 1.3.4.1 Modèle de comportement-représentation externe . . . . .                 | 16        |
| 1.3.4.2 Modèle de connaissance-Représentation interne . . . . .                 | 17        |
| 1.3.5 Erreurs de modélisation . . . . .                                         | 18        |
| 1.3.5.1 Erreurs de mesure . . . . .                                             | 18        |
| 1.3.5.2 Paramètres mal connus (mal identifiés) . . . . .                        | 18        |
| 1.3.5.3 Erreurs due au modélisateur . . . . .                                   | 18        |
| 1.4 Définition de la commande adaptative . . . . .                              | 19        |
| 1.4.1 Objectifs d'un système de commande adaptative . . . . .                   | 21        |
| 1.4.2 Méthodes du commande adaptative . . . . .                                 | 22        |

|          |                                                                                              |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.4.2.1  | Commande adaptative indirecte . . . . .                                                      | 22        |
| 1.4.2.2  | Commande adaptative directe . . . . .                                                        | 23        |
| 1.5      | Conclusion . . . . .                                                                         | 24        |
| <b>2</b> | <b>Commande adaptative directe à modèle de référence</b>                                     | <b>25</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                                                       | 25        |
| 2.2      | Principe générale . . . . .                                                                  | 25        |
| 2.3      | Méthodes de synthèse . . . . .                                                               | 26        |
| 2.3.1    | Méthode de MIT . . . . .                                                                     | 27        |
| 2.3.2    | Méthode de Lyapunov . . . . .                                                                | 31        |
| 2.3.2.1  | Stabilité au sens du Lyapunov . . . . .                                                      | 31        |
| 2.3.2.2  | Point d'équilibre . . . . .                                                                  | 31        |
| 2.3.2.3  | Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .                                                      | 32        |
| 2.3.2.4  | Fonction de Lyapunov . . . . .                                                               | 33        |
| 2.3.2.5  | Commande adaptative basée sur la fonction du Lyapunov                                        | 33        |
| 2.4      | Analyse de la convergence . . . . .                                                          | 34        |
| 2.5      | Exemple de la commande adaptative à modèle de référence par la méthode<br>Lyapunov . . . . . | 35        |
| 2.6      | Conclusion . . . . .                                                                         | 39        |
| <b>3</b> | <b>Modélisation par analyse comportementale du couple insuline-glucose</b>                   | <b>40</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .                                                                       | 40        |
| 3.2      | Couples antagonistes . . . . .                                                               | 40        |
| 3.3      | Généralités sur le diabète . . . . .                                                         | 41        |
| 3.3.1    | Dynamique insuline-glucose . . . . .                                                         | 41        |
| 3.3.2    | Diabète . . . . .                                                                            | 42        |
| 3.3.3    | Types du diabète . . . . .                                                                   | 42        |
| 3.3.3.1  | Diabète du type 1 . . . . .                                                                  | 42        |
| 3.3.3.2  | Diabète du type 2 . . . . .                                                                  | 42        |
| 3.3.4    | Symptômes de diabète . . . . .                                                               | 43        |
| 3.3.5    | Causes du diabète . . . . .                                                                  | 43        |
| 3.3.6    | Diagnostic du diabète . . . . .                                                              | 43        |
| 3.3.6.1  | Critère de diagnostic . . . . .                                                              | 44        |
| 3.3.7    | Traitement du diabète . . . . .                                                              | 44        |
| 3.3.7.1  | Traitement nutritionnel . . . . .                                                            | 44        |
| 3.3.7.2  | Activité physique . . . . .                                                                  | 45        |
| 3.3.7.3  | Médicaments . . . . .                                                                        | 45        |
| 3.3.7.4  | L'auto surveillance de la glycémie . . . . .                                                 | 45        |
| 3.4      | Modélisation par analyse compartimentale . . . . .                                           | 45        |
| 3.4.1    | Analyse compartimentale . . . . .                                                            | 45        |

|          |                                                                                     |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.4.1.1  | Systèmes compartimentaux linéaires . . . . .                                        | 47        |
| 3.4.1.2  | Systèmes compartimentaux non linéaires . . . . .                                    | 48        |
| 3.4.2    | Modélisation du système insuline-glucose . . . . .                                  | 49        |
| 3.5      | Simulation en boucle ouverte . . . . .                                              | 50        |
| 3.5.1    | Cas de diabète du type 2 (non insulino-dépendant) . . . . .                         | 50        |
| 3.5.2    | Cas de diabète du type 1 (insulino-dépendant) . . . . .                             | 52        |
| 3.6      | Conclusion . . . . .                                                                | 53        |
| <b>4</b> | <b>Commande adaptative directe à modèle de référence du couple insuline-glucose</b> | <b>54</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                                              | 54        |
| 4.2      | Cahier des charges . . . . .                                                        | 54        |
| 4.3      | Calcul de la référence $r(t)$ . . . . .                                             | 55        |
| 4.4      | Choix de la structure de commande . . . . .                                         | 56        |
| 4.5      | Détermination des adaptations . . . . .                                             | 56        |
| 4.6      | Simulation et interprétation des résultats . . . . .                                | 61        |
| 4.7      | Conclusion . . . . .                                                                | 65        |
|          | <b>Conclusion générale</b>                                                          | <b>66</b> |

# Table des figures

|      |                                                                             |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Diagramme fonctionnel d'un système. . . . .                                 | 11 |
| 1.2  | Classification des systèmes. . . . .                                        | 12 |
| 1.3  | Bloqueur-échantillonneur. . . . .                                           | 13 |
| 1.4  | Bloqueur ordre1. . . . .                                                    | 13 |
| 1.5  | Échantillonneur. . . . .                                                    | 13 |
| 1.6  | Schéma fonction de transfert. . . . .                                       | 16 |
| 1.7  | Système masse ressort. . . . .                                              | 19 |
| 1.8  | Système de commande adaptative. . . . .                                     | 20 |
| 1.9  | Commande à gain programmable. . . . .                                       | 21 |
| 1.10 | Principe de la commande adaptative indirect. . . . .                        | 22 |
| 1.11 | Schéma d'une commande adaptative directe. . . . .                           | 23 |
| 2.1  | Schéma d'une commande adaptative directe à modèle de référence. . . . .     | 26 |
| 2.2  | Schéma du simulation. . . . .                                               | 30 |
| 2.3  | Stabilité au sens de Lyapunov. . . . .                                      | 33 |
| 2.4  | Schéma de simulation. . . . .                                               | 38 |
| 3.1  | Régulation insuline-glucose dans le sang chez une personne normale. . . . . | 42 |
| 3.2  | Différents échanges entre les compartiments $i$ et $j$ . . . . .            | 46 |
| 3.3  | Système compartimental ouvert. . . . .                                      | 47 |
| 3.4  | Système compartimentale fermé. . . . .                                      | 47 |
| 3.5  | Exemple d'échange de type Michaelis-Menten. . . . .                         | 48 |
| 3.6  | Modèle insuline-glucose. . . . .                                            | 49 |
| 3.7  | Modèle insuline glucose en absence de variable de contrôle. . . . .         | 50 |
| 3.8  | Évolution du glucose lorsque il y a production d'insuline. . . . .          | 51 |
| 3.9  | Évolution de l'insuline dans le sang. . . . .                               | 51 |
| 3.10 | Évolution du glucose cas insulino-dépendant. . . . .                        | 52 |
| 3.11 | Évolution de l'insuline cas insulino-dépendant. . . . .                     | 53 |
| 4.1  | Évolution de glucose dans le sang. . . . .                                  | 62 |
| 4.2  | Évolution de l'insuline dans le sang. . . . .                               | 62 |
| 4.3  | Les loi adaptations des paramètres du gain de retour $Kx$ . . . . .         | 63 |

|     |                                           |    |
|-----|-------------------------------------------|----|
| 4.4 | Les adaptations du paramètre $Kr$ .       | 63 |
| 4.5 | Les adaptations des paramètres $\Theta$ . | 64 |



# Liste des tableaux

## Notations

|                                  |                                                                 |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| MRAC                             | Commande adaptative à modèle de référence.                      |
| $t$                              | Variable de temps.                                              |
| $k$                              | Variable discrète.                                              |
| $S$                              | Variable de Laplace.                                            |
| $n$                              | Nombre d'états.                                                 |
| $x(t)$                           | Vecteur d'états.                                                |
| $x_0$                            | Condition initiale.                                             |
| $u(t)$                           | Vecteur de commande.                                            |
| $y(t)$                           | Vecteur de sortie du systèmes.                                  |
| $f$                              | Fonction vectorielle non linéaire.                              |
| $A$                              | Matrice d'états de dimension $(n \times n)$ .                   |
| $B$                              | Matrice de commande de dimension $(n \times m)$ .               |
| $C$                              | Matrice d'observation de dimension $(n \times p)$ .             |
| $D$                              | Matrice de transmission de dimension $(p \times m)$ .           |
| $a_0 \cdots a_n, b_0 \cdots b_m$ | Coefficients constants.                                         |
| $L$                              | Coefficient de raideur de ressort.                              |
| $\dot{d}$                        | La vitesse.                                                     |
| $\ddot{d}$                       | L'accélération.                                                 |
| $M$                              | La masse.                                                       |
| $F$                              | Force exercer.                                                  |
| $F_r$                            | Force de frottement.                                            |
| $e(t)$                           | Erreur de poursuite.                                            |
| $K$                              | Vecteur des paramètres de régulateur.                           |
| $\Theta$                         | Vecteur des paramètres système.                                 |
| $y_m(t)$                         | Vecteur de Sortie du modèle de référence.                       |
| $r(t)$                           | Consigne de commande.                                           |
| $\frac{dy(t)}{dK_i}$             | Fonction de sensibilité.                                        |
| $V$                              | Fonction de Lyapunov.                                           |
| $G(t)$                           | Taux de glucose.                                                |
| $I(t)$                           | Taux d'insuline.                                                |
| $x_i(t)$                         | Quantité à l'instant $t$ contenant dans le compartiment $i$ .   |
| $k_{ij}x_i$                      | Quantité allant du compartiment $i$ vers le compartiment $j$ .  |
| $u_i(t)$                         | Entrée au niveau du compartiments $i$ .                         |
| $k_{ie}$                         | Sortie vers extérieur de système à partir de compartiment $i$ . |
| $A_m$                            | Matrice d'herwitz.                                              |
| $B_m$                            | Matrice de commande de modèle de référence.                     |
| $\mu_i, k_i$                     | Constantes de Michaelis-Menten.                                 |
| $\alpha, \beta$                  | Constants réels positive.                                       |

# Introduction générale

La plupart des systèmes dynamiques présentent des non linéarités et sont caractérisés par des incertitudes paramétriques dues à la modélisation ou à l'identification. Pour la commande de tels systèmes les méthodes classiques de l'automatique ont montré leurs limites en terme de stabilisation et de performances. Suite au développement des calculateurs numériques, les automaticiens commencent à s'intéresser aux nouvelles approches de commande tels que la commande adaptative, la commande prédictive qui peuvent nous garantir un certain niveau de performances malgré la présence des incertitudes.

Pour les systèmes d'adaptations, il existe deux algorithmes de synthèse des lois de commande à modèle de référence : méthode de Lyapunov et règle de MIT. La règle de MIT est limitée dû à l'approximation de la fonction de sensibilité car la sortie de système dépend des paramètres inconnus ce qui conduit à des systèmes de contrôle dont les propriétés de stabilité sont soit faibles ou ne peut pas être établies. La méthode de Lyapunov présente une difficulté liée à la définition d'une fonction de Lyapunov. En effet pour certains systèmes, il est important de bien choisir une fonction adéquate qui peut déterminer les adaptations des lois de commande, en boucle fermée, de tel sort que la stabilité soit satisfaite.

Dans ce travail, on va s'intéresser à la commande adaptative d'une classe particulière des systèmes. L'idée consiste à calculer des lois de commande adéquates sans passer par l'estimation des paramètres du système en utilisant la commande adaptative à modèle de référence. Cette approche repose sur un modèle de référence qui caractérise les performances désirées. L'analyse de la convergence des différentes erreurs est basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov et le lemme de Barbalat. Cette technique sera appliquée pour le couple insuline-glucose afin de régler le taux de glucose à une valeur finale égale à 1 suivant une trajectoire désirée.

L'organisation de ce mémoire est faite de la manière suivante :

1. Le premier chapitre est consacré à des rappels sur des systèmes asservis et le modèle mathématique. Le chapitre présente aussi de la commande adaptative et ses différentes approches.
2. Le deuxième chapitre aborde la commande adaptative à modèle de référence. Le chapitre commence par le principe général de cette dernière et sa structure. La suite du chapitre expose les deux algorithmes les plus utilisés pour la synthèse

des lois de commande en présence des incertitudes. La fin du chapitre présente un exemple d'une commande adaptative à modèle de référence basé sur la théorie de stabilité de Lyapunov.

3. Le troisième chapitre présente des généralités sur le diabète et les principes de base de la modélisation par analyse compartimentale. Cette technique est utilisé par la suite pour déterminer le modèle du couple insuline-glucose.
4. Le quatrième chapitre est une application de commande adaptative à modèle de référence, basée sur la stabilité de Lyapunov, pour déterminer les adaptations des lois de commande en boucle fermée pour le système insuline-glucose dans le but de régler le taux du glucose dans le sang. L'algorithme d'adaptation est validé par simulation.

Le travail se termine par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes et la commande adaptative

### 1.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à des généralités sur les systèmes asservis et la commande adaptative. On commence d'abord par la définition d'un système en automatique et ses classes. Puis on va expliquer c'est quoi un modèle ? Quelles sont les étapes à suivre pour l'obtention de ce modèle ? Le but pour quand on fait la modélisation ? Quelles sont ces différentes sources d'erreur ?

Puis, on va aborder la commande adaptative qui permet de maintenir les performances lorsque les paramètres de procédé sont inconnus ou variables dans le temps. On présente aussi, les deux approches principales de la commande adaptative : commande adaptative directe et commande adaptative indirecte.

### 1.2 Notion sur les systèmes asservis et le modèle mathématique

#### 1.2.1 Définition du système

Le système est un ensemble d'objets interconnectés qui coopèrent pour réaliser une fonction. Son état est affecté par une ou plusieurs variables. Tout système est caractérisé par deux sortes de signaux [2, 3] :

##### a) signaux d'entrée

Ce sont des grandeurs indépendantes du système mais qui agissent sur son état en tant que cause. On trouvera :

- Les signaux de commande qui permettent d'agir sur le système et de le piloter vers un but spécifié.
- Les signaux de perturbations qui affectent le système. Généralement, on ne pourra pas agir sur celles ci car leur mode d'action sera difficile.

### b) signaux de sortie

Ce sont les effets des grandeurs d'entrée que l'on peut observer généralement au moyen d'un capteur.

Il est courant de représenter un système à l'aide d'un diagramme, dit diagramme fonctionnelle qui traduit la relation cause-effet des entrées et des sorties. La Figure 1.1 illustre cette représentation [2, 3] :

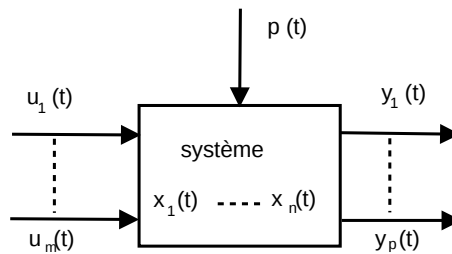


FIGURE 1.1 – Diagramme fonctionnel d'un système.

Les grandeurs appliquées à une entrée permettant de faire évaluer le système. Les grandeurs de sortie, conséquence des entrées rendent comptes de cette évolution, mais les entrées et les sorties seules suffisent pas à caractériser l'évolution du système, il faut y ajouter les états. Les états sont des variables internes, et constituant la mémoire de système. Il suffit de connaître l'état de système à l'instant initial quelconque pour prédire son comportement futur sous l'action d'entrée connue.

### 1.2.2 Classes des systèmes

les systèmes dynamiques peuvent être classés en plusieurs classes comme le montre la Figure 1.2 [3].

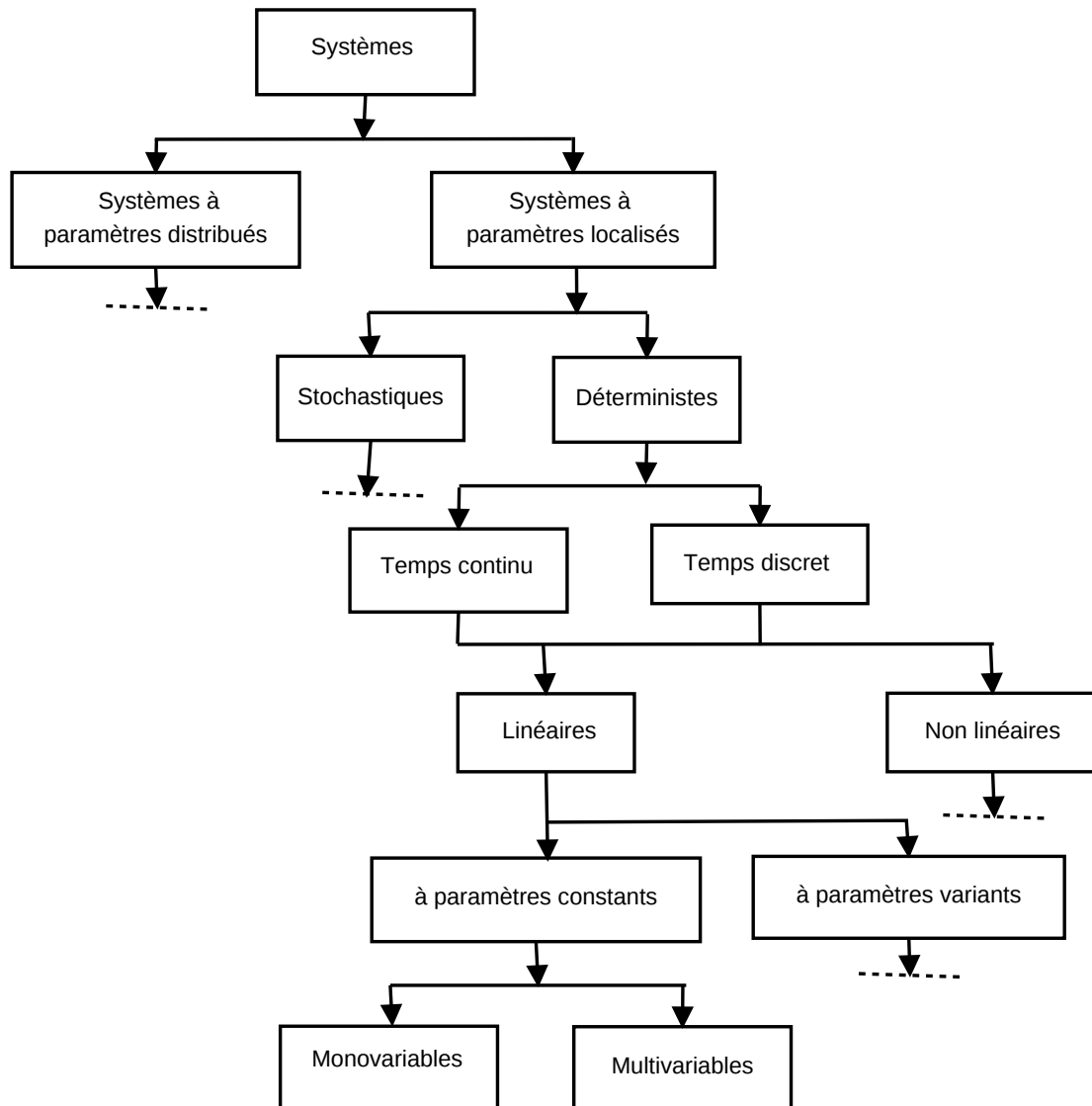


FIGURE 1.2 – Classification des systèmes.

### 1.2.2.1 Systèmes mono entrée-mono sortie

Ce sont des systèmes ne comportant qu'un seul signal d'entrée et un seul signal de sortie [2].

### 1.2.2.2 Systèmes multi-entrées-multi-sorties

Ce sont des systèmes comportant plusieurs signaux d'entrée et plusieurs signaux de sortie [2].

### 1.2.2.3 Systèmes stationnaires et systèmes non stationnaires

Les systèmes stationnaires sont des systèmes dont le modèle mathématique n'a aucun coefficient dépendant du temps. Autrement les systèmes non stationnaires où le modèle mathématique a des coefficients dépendant du temps [2].

### 1.2.2.4 Systèmes continus-systèmes discrets

On parle des systèmes continus quand tous les signaux d'entrée et les signaux de sortie sont définis à tout instant de temps «  $t$  ». Les systèmes discrets quand tous les signaux d'entrée et les signaux de sortie sont définis périodiquement dans le temps [2].

On parle également d'un système continu-discret quand on veut piloter (commander) un processus par ordinateur. On considère alors un bloqueur et un échantillonneur comme schématisé dans la Figure 1.3 :

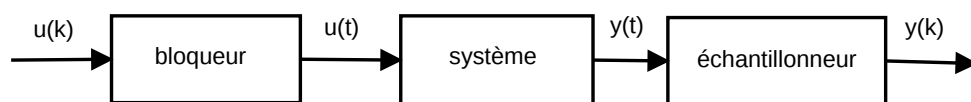


FIGURE 1.3 – Bloqueur-échantillonneur.

Le bloqueur permet de passer d'un système discret à un système continu (Figure 1.4).

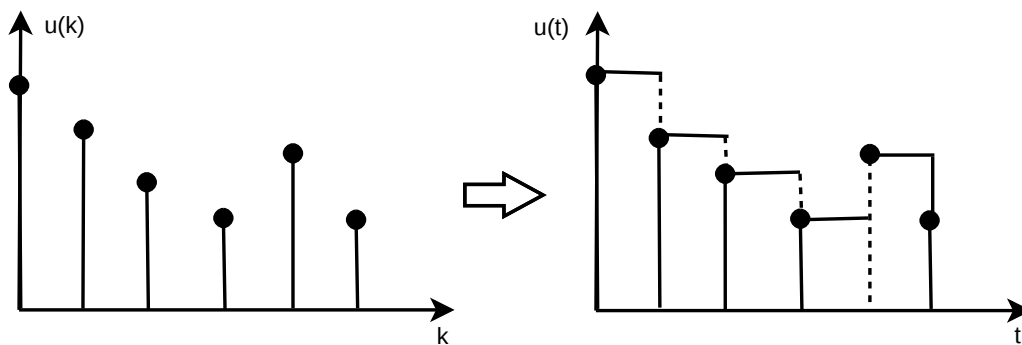


FIGURE 1.4 – Bloqueur ordre1.

L'échantillonneur permet de passer d'un système continu à un système discret (Figure 1.5).

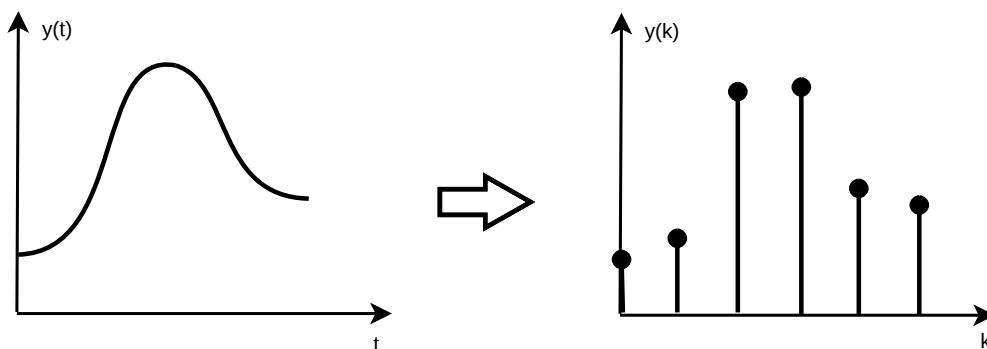


FIGURE 1.5 – Échantillonneur.

### 1.2.2.5 Système statique ou système dynamique

Un système statique est un système dont la réponse à un signal d'entrée est instantané. La variable indépendante, temps  $t$ , n'intervient pas dans le fonctionnement de ce type de système, ce système n'a pas une mémoire.

Un système dynamique est un système dont la réponse dépend simultanément d'entrée présent et des réponses passées, ce système a une mémoire [2].

### 1.2.2.6 Systèmes déterministes-systèmes stochastiques

Un système déterministe dont le comportement est parfaitement prévisible, c'est-à-dire en connaissant le signal d'entrée, on peut calculer la sortie exactement à partir de modèle du système [2].

Un système stochastique est un système à comportement aléatoire. Certains paramètres dépendent des variables aléatoires et le signal du sortie ne peut pas être déterminé exactement [2].

### 1.2.2.7 Système non linéaire

Un système est non linéaire si le signal du sortie est une fonction non linéaire par rapport au signal d'entrée [2].

En présentation interne, les systèmes non linéaires sont généralement décrits sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \quad \forall t \geq t_0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Où  $f$  est une fonction vectorielle non linéaire.

### 1.2.2.8 Système linéaire

Un système est linéaire s'il vérifie le théorème de superposition, c'est-à-dire lorsque les signaux d'entrée  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$  produisant les signaux de sortie

$y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)$ , alors le signal d'entrée  $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_p u_p(t)$  produisent le signal de sortie  $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_p y_p(t)$ . Avec  $c_1, c_2, \dots, c_p$  sont des constantes [2].

En présentation interne, les systèmes linéaires sont généralement décrits par l'équation d'état sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Avec :

$x(t) \in R^n$  vecteur d'état .

$u(t) \in R^m$  vecteur de commande.

$y(t) \in R^p$  vecteur de sortie.

$A$  : Matrice d'état de dimension  $(n \times n)$ .

$B$  : Matrice de commande de dimension  $(n \times m)$ .

$C$  : Matrice d'observation de dimension  $(p \times n)$ .

$D$  : Matrice de transmission de dimension  $(p \times m)$ .

### 1.2.2.9 Systèmes à paramètres constants ou variables dans le temps

Les systèmes à paramètres constants sont fixes, c'est-à-dire ne dépend pas de la variable de temps.

Les systèmes à paramètres variables dans le temps sont des systèmes dont leurs paramètres sont toujours inconnus, c'est-à-dire dépend de la variable de temps.

#### Remarque 1.1

Les paramètres variables dans le temps peuvent être incertains, c'est-à-dire leurs valeurs sont constantes mais inconnus (les valeurs des paramètres sont bornées).

Les paramètres variables ou incertains peuvent être classées en deux catégories :

- Paramètres prévisibles : on peut connaître toutes les valeurs possibles des paramètres.
- Paramètres non prévisibles : on peut pas connaître leurs valeurs[5].

## 1.3 Modèle mathématique

### 1.3.1 Définition

Le modèle est déterminé à partir des lois physiques ou à partir des données issues des expériences [2].

### 1.3.2 Comment obtenir le modèle mathématique

Pour obtenir un modèle mathématique, il faut passer par les étapes suivantes :

1. Définir le problème : Que cherche-t-on ? Quel est l'objectif ? Quelles sont les données ? Quelle réponse cherche-t-on ?
2. Définir le système : comprendre les relations et les interactions physiques des différents éléments constitutifs du système.
3. Construire une représentation simplifiée et idéalisée du système à modéliser.
4. Appliquer les lois décrivant les éléments constitutifs où les interactions entre ces éléments.

5. Définir les variables pertinentes (les entrées et les sorties).
6. Formuler correctement le modèle [2].

### 1.3.3 But de la modélisation

Parmi les buts d'utilisation d'un modèle nous pouvons distinguer :

1. La simulation qui constitue un moyen de reconstruire ou de prédire le comportement d'un système soumis à différentes sollicitations.
2. L'optimisation d'un procédé par la détermination des points de fonctionnement optimaux de celui-ci au sens d'un certain critère.
3. La conception de lois de commande.
4. La conception des capteurs logiciels : le modèle permet de concevoir, de construire et d'utiliser des logiciels supplétifs à des mesures manquantes parce qu'ils sont chers, dangereux, destructifs, rares, défectueux, ....etc.
5. La détection et l'isolation des pannes : le modèle peut être utilisé pour détecter un comportement normal du procédé et d'évaluer les causes et les conséquences probables.

### 1.3.4 Types de modèle

La modélisation va conduire généralement à deux formes générales de modèle. Le modèle de connaissance (où représentation interne) et le modèle de comportement (où la représentation externe) [1, 2].

#### 1.3.4.1 Modèle de comportement-représentation externe

La représentation externe des systèmes dynamiques vue comme une représentation de type boîte noire avec des signaux d'entrée et des signaux de sortie. L'objectif est simplement d'observer le comportement de cette boîte noire illustrée par la Figure 1.6 afin de trouver une relation mathématique entre l'entrée et la sortie.

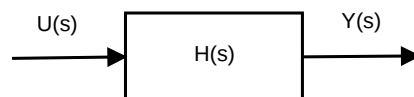


FIGURE 1.6 – Schéma fonction de transfert.

Pour cela, on applique à l'entrée des signaux pour faire apparaître des signaux de sortie. Ces signaux peuvent être déterministes ou aléatoires. Nous considérons en général des signaux déterministes.

On donne le modèle du système linéaire, autour de point de fonctionnement, par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Avec  $x(0) = x_0$  : Condition initiale donnée.

$n > m$ .

$a_0 \dots a_n$  et  $b_0 \dots b_m$  : Sont des coefficients constants.

$\frac{dy(t)}{dt} \dots \frac{d^n y(t)}{dt^n}$  : Sont les dérivées de sortie.

$\frac{du(t)}{dt} \dots \frac{d^m u(t)}{dt^m}$  : Sont les dérivées d'entrée.

Cette équation est linéaire à coefficients constants. Elle permet de modéliser la réaction de la sortie d'un système en fonction de l'action qui lui appliquée [1, 2].

#### 1.3.4.2 Modèle de connaissance-Représentation interne

La description interne d'un système suppose une connaissance assez fine de comportement et d'interaction des différents composants du système. Mathématiquement, cette description peut être représentée sous la forme standard d'un ensemble d'équations différentielles, intégrro-différentielles, et dérivées partielles dans le cas de système continu dans le temps.

Dans le cas d'un système discret, le modèle est une équation (ou un système d'équations) aux différences. Dans le cas d'un système continu, l'équation d'état est de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x) & \forall t \geq t_0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Généralement les conditions initiales  $x_0$  sont données.

Dans le cas linéaire, l'équation d'état prend une des formes suivantes (on considère souvent  $t_0 = 0$ ).

#### Systèmes linéaires continus

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= c x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

## Systèmes linéaires discrets

$$\begin{aligned}\dot{x}(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= cx(k) + Du(k)\end{aligned}\tag{1.6}$$

Avec  $x(0) = x_0$  : Condition initiale donnée.

$x \in R^n$  : Vecteur d'état de système.

$u \in R^m$  : L'entrée de commande.

$y \in R^p$  : Vecteur de sortie.

$A$  : Matrice d'état de dimension  $(n \times n)$ .

$B$  : Matrice de commande de dimension  $(n \times m)$ .

$C$  : Matrice d'observation de dimension  $(p \times n)$ .

$D$  : Matrice de transmission de dimension  $(p \times m)$ .

L'intérêt de ce modèle réside dans le fait qu'elle est introduit une description assez fine des systèmes complexes comportant plusieurs entrées et plusieurs sorties. Il est intéressant dans de nombreux problèmes relevant de l'optimisation, de la conception ou du contrôle [1, 2].

### 1.3.5 Erreurs de modélisation

La modélisation a été définie comme une démarche qui permet d'étudier un système réel en lui associée un monde virtuelle supposée équivalent (le modèle). Ce dernière n'est que l'outil de représentation de cette réalité. Il ne peut pas le décrire tel qu'il est, donc il est nécessaire de lui associé une incertitude. Cette dernière provient des :

#### 1.3.5.1 Erreurs de mesure

La différence entre la valeur mesurée et la valeur réel utilisée en identifications introduit des erreurs de modélisation puisque elle conduit à des paramètres identifiés de manière non précise.

#### 1.3.5.2 Paramètres mal connus (mal identifiés)

Certains paramètres subissent des variations dont on néglige les dynamiques dans le modèle [5].

#### 1.3.5.3 Erreurs due au modélisateur

Ces erreurs sont dues aux hypothèses simplificatrices considérées. Par exemples, négliger un phénomène introduit une erreurs de modélisation.

**Exemple 1.1**

Soit le système masse ressort donné par la Figure 1.7.

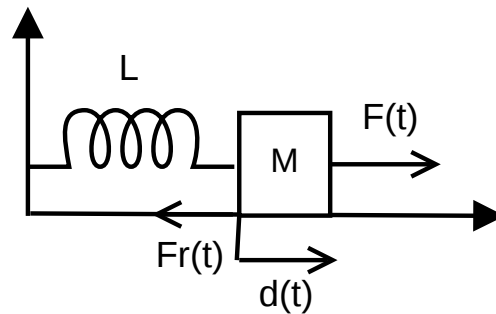


FIGURE 1.7 – Système masse ressort.

Le modèle sans frottement :

$$\ddot{d} = -\frac{L}{M} \dot{d}(t) + \frac{F}{M} \quad (1.7)$$

Le modèle avec frottement :

$$\ddot{d} = -\frac{L}{M} \dot{d}(t) - \frac{F_r}{M} + \frac{F}{M} \quad (1.8)$$

Avec :

$\ddot{d}$  : Est l'accélération.

$\dot{d}(t)$  : Est la vitesse.

$F_r$  : Est la force de frottement.

$F$  : La force exercée sur la masse.

$M$  : La masse.

On remarque que le fait de prendre ou de négliger le phénomène de frottement conduit à deux modèles différents.

## 1.4 Définition de la commande adaptative

Dans l'approche des systèmes adaptatifs, les études développées jusqu'à 1978 ont donné naissance à des applications ayant conduit à des résultats intéressants mais qui ont aussi soulevés divers problèmes qui n'avaient pas été envisagés dans les premiers travaux [7].

La « commande adaptative » est un ensemble de concepts et de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne, et en temps réel des régulateurs mise en œuvre dans la commande d'un processus, afin de réaliser ou maintenir un certain niveau des performances désirées lorsque les paramètres de ce processus sont inconnus ou variants

dans le temps [6, 7]. En effet un système de commande adaptative est composé de deux boucles :

### Une boucle de contre-réaction conventionnelle

Cette boucle permet de réduire l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler mais ses performances dynamiques vont varier sous l'effet des perturbations paramétriques [6].

### Une boucle d'adaptation des paramètres du régulateur

Cette boucle permet de maintenir les performances du système en présence des variations des paramètres du procédé. Cette boucle constituée d'un algorithme d'adaptation paramétrique et une méthode de synthèse dans le cas d'une commande adaptative indirecte [6].

Le principe de mise en œuvre d'un système de commande adaptative en boucle fermée est illustrée par la Figure 1.8 [5, 6, 7] :

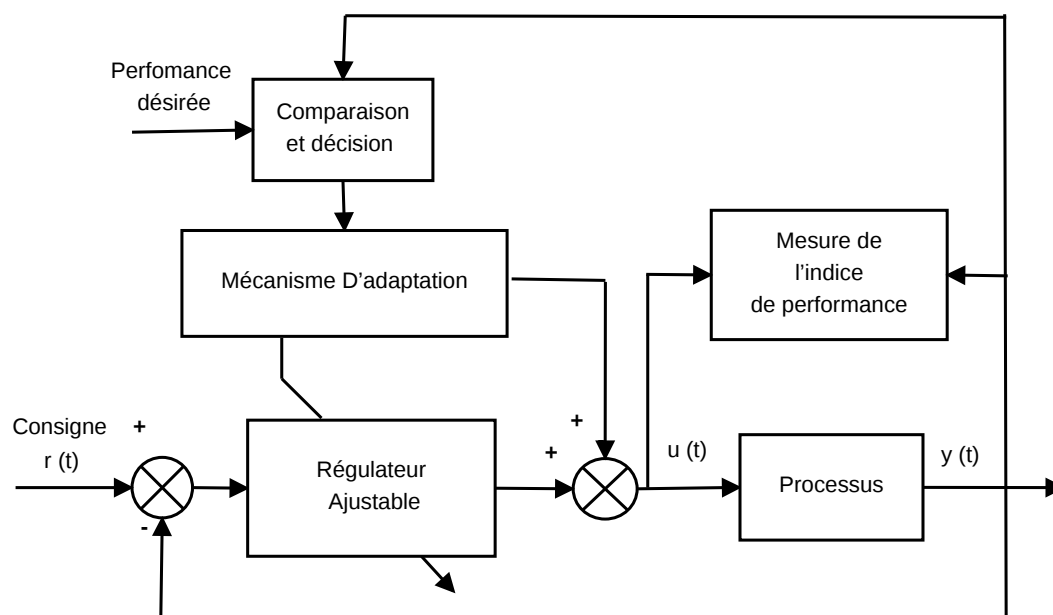


FIGURE 1.8 – Système de commande adaptative.

Une autre approche de commande adaptative est donnée par la Figure 1.9 : La commande à gain programmable. Dans ce cas, les valeurs des paramètres sont ajustées en fonction de l'évolution des variables caractéristiques de l'environnement et du processus lui-même. L'adaptation se fait alors par la lecture dans une table prédéfinissant les valeurs des réglages en fonction des mesures disponibles sur l'environnement et le processus (ce peut être le cas lorsque le régulateur est conçu à partir d'un modèle de processus formé d'un ensemble de modèles linéaires obtenus aux différents points de fonctionnement) [6, 7].

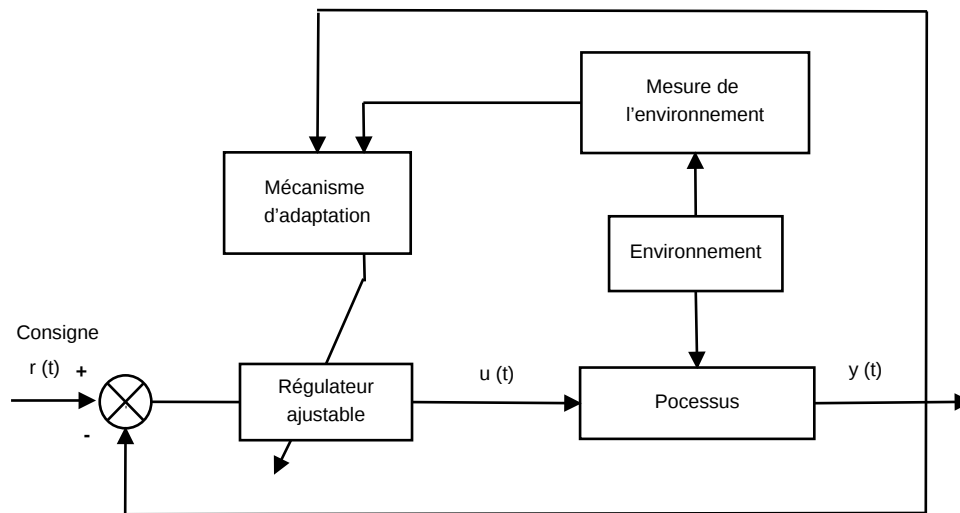


FIGURE 1.9 – Commande à gain programmable.

La synthèse d'un contrôleur adaptative passe le plus souvent par les phases suivantes :

1. Spécification des indices de performances désirées (ex : Facteur d'amortissement, temps de réponse, localisation des pôles....etc).
2. Définition de la structure de commande ou type de régulateur à utiliser pour réaliser les performances souhaitées.
3. Mesurer les indices des performances du processus et les comparer avec les indices des performances désirées. Puis traiter l'écart entre les indices des performances désirées et les indices des performances mesurés par un mécanisme d'adaptation.
4. Enfin, la sortie du « mécanisme d'adaptation » va agir sur les paramètres de régulateur ou directement sur le signal de commande afin de modifier d'une manière appropriée les performances du système [6, 7].

### 1.4.1 Objectifs d'un système de commande adaptative

1. Ajustement automatique des régulateurs (effet : Réduction du temps d'ajustement et amélioration des performances).
2. Détermination automatique des paramètres optimaux des régulateurs pour divers points de fonctionnement du procédé.
3. Le maintien des performances exigées du système de commande en cas des variations des paramètres du processus.
4. Possibilité de mise en œuvre des régulateurs plus complexes et plus performants que les PID (ceci comme conséquence de l'ajustement automatique).

5. Détection des variations anormales de caractéristiques du processus (pouvant éventuellement avoir pour origine des perturbations structurelles). Ces variations se reflètent dans les valeurs des paramètres fournies par les algorithmes d'adaptation.
6. Conception de nouveaux procédés technologiques utilisant des systèmes de commande adaptative (pour assurer le fonctionnements correct du procédé) [6, 7].

### Remarque 1.2

Dans ce qui suit, les seules perturbations envisagées sont des perturbations paramétriques et non structurelles.

L'intérêt de la commande adaptative apparaît essentiellement au niveau des perturbations paramétriques, c'est-à-dire agissent sur les caractéristiques du processus à commander. Les commandes non adaptatives s'avérant capables d'éliminer les effets des perturbations agissent sur les variables à réguler ou à commander [7].

## 1.4.2 Méthodes du commande adaptative

Les lois de commande adaptative sont souvent classifiées en deux grandes catégories : Commande adaptative directe (ou implicite) et commande adaptative indirecte (ou explicite).

### 1.4.2.1 Commande adaptative indirecte

Nommé aussi commande adaptative auto ajustable. Cette approche consiste à identifier en ligne et en temps réel des paramètres du système à partir des mesures des entrées et des sorties du processus. Ces estimations sont utilisées pour le calcul des paramètres de régulateur en utilisant des relation algébriques liant les paramètres du système et les paramètres du correcteur. Le schéma d'une commande adaptative indirecte est donné par la Figure 1.10.

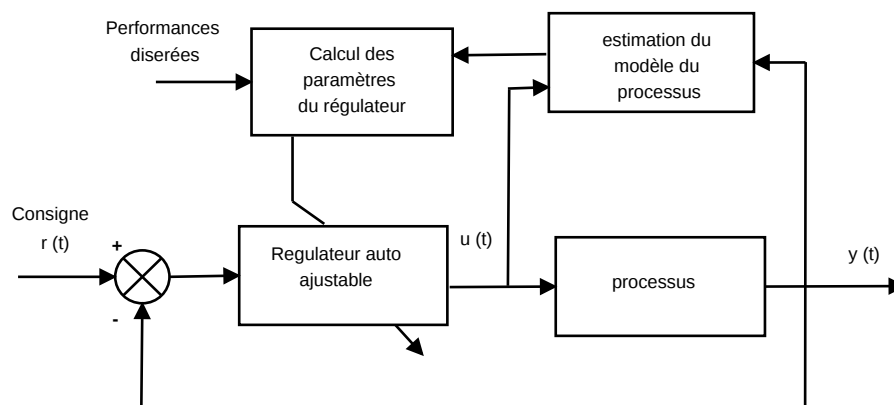


FIGURE 1.10 – Principe de la commande adaptative indirect.

— La commande adaptative indirecte se fait en deux étapes [6, 7] :

### 1. Estimation des paramètres de procédé

Comme les paramètres du système sont inconnus ou incertains, on doit les estimer à partir des mesures entrées-sorties en utilisant par exemple la méthode des moindres carrés.

### 2. Calcul des paramètres du régulateur

Les paramètres du régulateur sont calculés en fonction des paramètres du procédé en utilisant des relations algébriques liant les paramètres du modèle et les paramètres du correcteur.

#### 1.4.2.2 Commande adaptative directe

Cette approche repose sur le raisonnement suivant : Étant donnée la structure de modèle du système supposée connue et la stratégie de commande choisie, on peut déduire la structure du régulateur capable de réaliser la commande. Alors, si on est capable de reparamétriser l'ensemble de système-régulateur en fonction des paramètres du régulateur, et si le modèle obtenu est susceptible de permettre l'identification des paramètres du régulateur (par exemple est linéaire par rapport aux paramètres du régulateur), on peut calculer et ajuster directement les paramètres du régulateur en temps réel et en une seule étape mais sans identifier explicitement les paramètres du système. Le schéma de cette technique est illustrée par la Figure 1.11 [6, 8] :

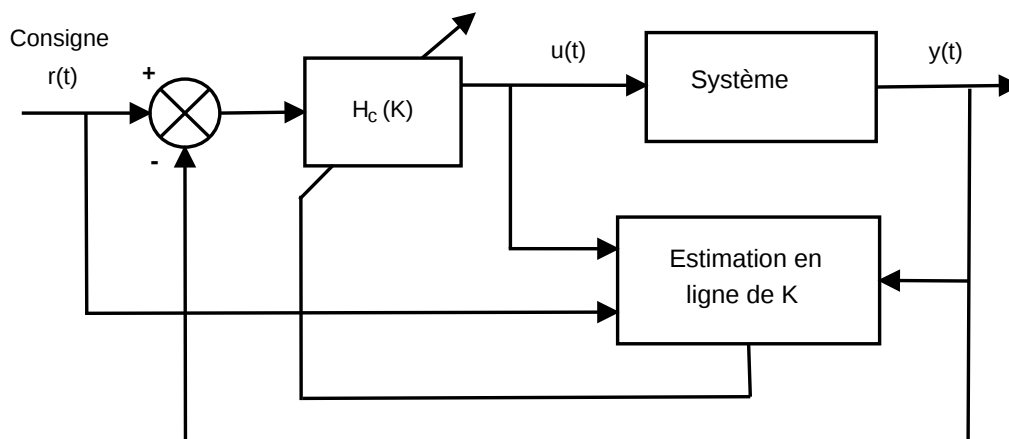


FIGURE 1.11 – Schéma d'une commande adaptative directe.

#### Remarques 1.3

Il existe un autre schéma de commande adaptative directe dite commande adaptative directe à modèle de référence. Elle sera présentée au chapitre suivant.

## 1.5 Conclusion

La classification des systèmes se fait par rapport à plusieurs concepts, la nature de la variable de temps (continu-discret), le nombre des entrées/sorties ( monovariables - multivariables) la nature de ces paramètres (constants-variables).

En outre, la modélisation est une étape nécessaire pour la commande des systèmes, la validation de ce dernière est impérative avant le calcul des lois de commande. La commande adaptative est utilisée pour le calcul et l'ajustement des paramètres du régulateur afin de maintenir certains indices de performance en présence des perturbations paramétriques. Deux approches utilisées par cette technique : commande adaptatives directe où les paramètres du régulateur sont calculés directement en une seul étape et commande adaptative indirecte où le calcul des paramètres du régulateur se fait en deux étapes.

Le deuxième chapitre sera consacrée à la commande adaptative directe à modèle de référence.

# Chapitre 2

## Commande adaptative directe à modèle de référence

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons aborder le principe d'une méthode de synthèse des lois de commande lorsque les paramètres du système ne sont pas connus. Cette technique porte le nom de commande adaptative directe à modèle de référence, puis on va présenter les deux algorithmes utilisés pour l'ajustement des paramètres du régulateur. Ces deux algorithmes sont : la règle de MIT et l'approche de Lyapunov. On s'intéresse particulièrement à l'approche de Lyapunov.

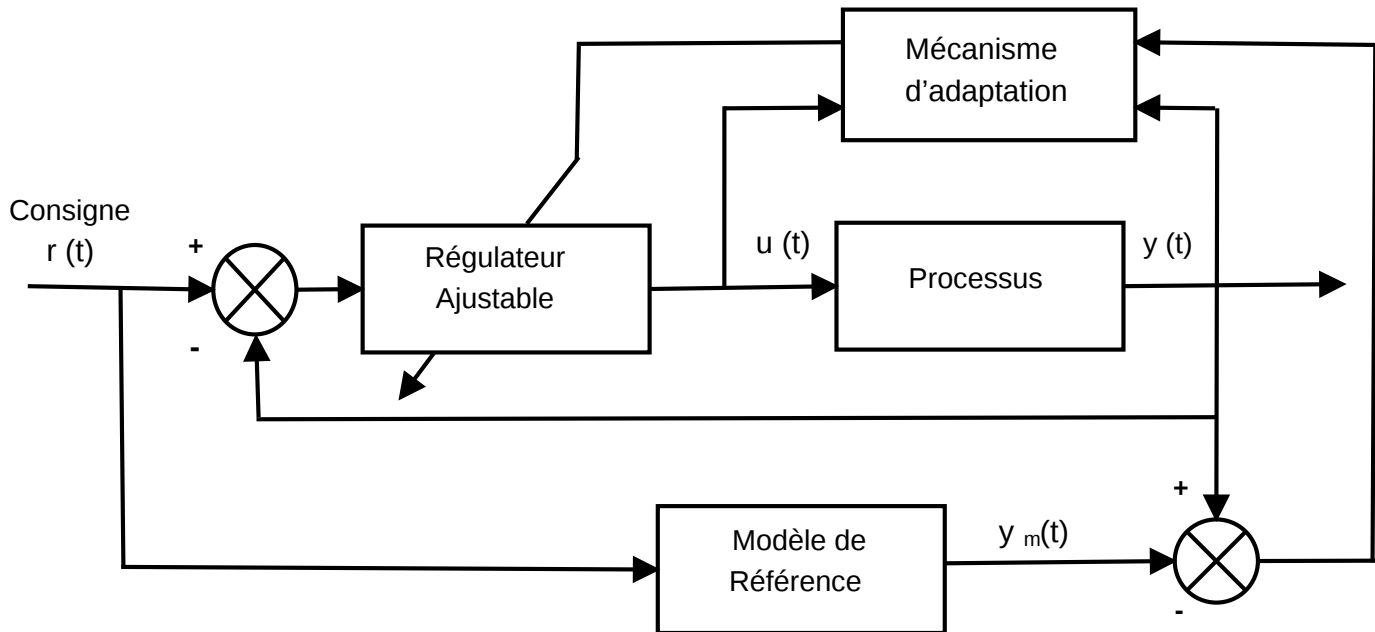
### 2.2 Principe générale

La commande adaptative directe à modèle de référence est l'une des approches de commande adaptative les plus utilisées dont laquelle les performances désirées sont spécifiées dans un modèle qui peut être imposé en boucle fermée en utilisant un correcteur. Dans ce cas, on parle d'un modèle de référence. Ce modèle donne une indication sur comment la sortie du système doit idéalement répondre à un signal de commande.

Cette technique consiste à estimer et ajuster directement les paramètres du régulateur en fonction de l'erreur entre le procédé et le modèle de référence. Ses principes de base sont les suivants [9] :

1. La sortie du système doit suivre la trajectoire de référence.
2. L'erreur de poursuite  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  représente une déviation de la sortie de système par rapport à la sortie de modèle de référence.
3. Le système en boucle fermée est basée sur une loi de commande par feedback.

- La structure d'un système d'une commande adaptative directe à modèle de référence est donnée par la Figure 2.1.



La différence entre la sortie du procédé et la sortie du modèle de référence est une mesure de la différence entre la performance réelle et la performance désirée. Cette information est utilisée par le mécanisme d'adaptation qui reçoit aussi d'autres informations (entrée de commande et la sortie du procédé) pour ajuster automatiquement les paramètres du régulateur [6].

## 2.3 Méthodes de synthèse

- Méthode basée sur la fonction du Lyapunov.
- Méthode basée sur l'algorithme du gradient (ou règle MIT) [5].

### 2.3.1 Méthode de MIT

La loi de MIT est l'approche originale pour la commande adaptative directe à modèle de référence. Le nom est dérivée de fait qu'elle a été développée au laboratoire de l'instrumentation (maintenant laboratoire de Draper) à Massachusetts Institute of Technology (MIT).

Pour appliquer la loi MIT, on considère un système en boucle fermée dans lequel le régulateur possède un vecteur des paramètres  $K$ , et la réponse désirée en boucle fermée est spécifiée par la sortie de modèle de référence  $y_m$ .

Généralement pour appliquer la méthode du gradient (règle MIT), il faut le mettre sous forme d'un problème d'optimisation où les variables de décision sont les paramètres du régulateur. L'ajustement des paramètres du régulateur se fait d'une manière à minimiser une fonction de coût quadratique définie par [5] :

$$J(K) = \frac{1}{2} e^2(t) \quad (2.1)$$

Avec  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  est l'erreur de poursuite (l'écart entre la sortie du procédé et la sortie du modèle de référence).

La résolution de ce problème se fait par l'utilisation de l'algorithme de gradient :

$$\dot{K}(t) = -\lambda \frac{dJ(K)}{dK} \quad (2.2)$$

Où  $\lambda$  est un paramètre petit.

On a :

$$\frac{dJ(K)}{dK} = \frac{d}{dK} \left( \frac{1}{2} e^2(t) \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{dJ(K)}{dK} = e(t) \frac{de(t)}{dK} \quad (2.4)$$

Comme c'est juste la sortie du système qui dépend des paramètres du régulateur  $K$  alors :

$$\frac{de(t)}{dK} = \frac{d}{dK} (y(t) - y_m(t)) \quad (2.5)$$

$$\frac{de(t)}{dK} = \frac{dy(t)}{dK} \quad (2.6)$$

Implique que l'équation (2.2) devient :

$$\dot{K}(t) = -\lambda e(t) \frac{dy(t)}{dK} \quad (2.7)$$

Où  $K = [K_1 \ K_2 \ \cdots \ K_n]^T$  est le vecteur des paramètres du régulateur.

$$\frac{dy(t)}{dK} = \left[ \frac{dy(t)}{dK_1} \quad \frac{dy(t)}{dK_2} \quad \dots \quad \frac{dy(t)}{dK_n} \right]^T \quad (2.8)$$

$\frac{dy(t)}{dK_i}$ ,  $i = 1, 2 \dots n$  est appelée fonction de sensibilité.

### Remarque 2.1

Pratiquement on ne peut pas évaluer correctement la fonction de sensibilité car la sortie du système dépend des paramètres inconnus  $K_i(t)$ , alors on doit les approximer.

Pour concevoir un contrôleur adaptative en utilisant la règle du MIT, on suit les étapes suivantes :

1. Supposant que les paramètres de modèle  $\Theta(t)$  sont constants et déterminer les paramètres du correcteur  $K(t)$ .
2. Dédire la relation entre les paramètres du procédé  $\Theta(t)$  et les paramètres du correcteur  $K(t)$ .
3. Déterminer  $K(t)$  lorsque le vecteur des paramètres  $\Theta(t)$  est inconnu.
4. Calculer la fonction de sensibilité  $\frac{dy(t)}{dK_i}$ ,  $i = 1, 2 \dots n$ .
5. Mettre le gain sous une forme qui permettant d'extraire les approximation de la fonction de sensibilité.
6. Utiliser la règle du MIT pour calculer les adaptations des paramètres du correcteur.
7. Faire le schéma du simulation (implémentation).

### Exemple 2.1

Soit le système donné par l'équation suivante :

$$\dot{y}(t) = \Theta(t) y(t) + u(t) \quad (2.9)$$

Et le modèle de référence suivant :

$$y_m(t) = -2 y_m(t) + r(t) \quad (2.10)$$

On considère la commande suivante :

$$u(t) = K(t) y(t) + r(t) \quad (2.11)$$

On veut déterminer les adaptations des paramètres du régulateur  $K$  pour que la sortie de notre systèmes suivra la sortie du modèle de référence. Pour cela, on doit suivre les étapes suivantes :

1. On suppose que  $\Theta$  est constant et on détermine  $K$

$$\dot{y}(t) = \Theta y(t) + K^* y(t) + r(t) \quad (2.12)$$

D'où :

$$\dot{y}(t) = (\Theta + K^*) y(t) + r(t) \quad (2.13)$$

Par identification avec le modèle de référence :

$$\Theta + K^* = -2 \quad (2.14)$$

Implique que :

$$K^* = -(2 + \Theta) \quad (2.15)$$

Alors l'estimation des paramètres  $\Theta$ , i.e  $\hat{\Theta}$  est donné par :

$$\hat{\Theta} = -(K^* + 2) \quad (2.16)$$

2. On considère les paramètres  $\Theta$  sont variables dans le temps et on détermine l'équation du système en boucle fermée

$$\dot{y}(t) = (\Theta(t) + K(t)) y(t) + r(t) \quad (2.17)$$

3. Calcul de la fonction de sensibilité

Pour calculer cette fonction de sensibilité, on dérive le modèle du système en boucle fermée par rapport à  $K(t)$  :

$$\frac{d}{dK(t)} (\dot{y}(t)) = \frac{d}{dK(t)} [(\Theta(t) + K(t)) y(t) + r(t)] \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dy(t)}{dK(t)} \right) = \frac{d}{dK(t)} (\Theta(t) + K(t)) y(t) + \frac{dy(t)}{dK} (\Theta(t) + K(t)) + \frac{dr(t)}{dK} \quad (2.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dy(t)}{dK(t)} \right) = 1 y(t) + \frac{dy(t)}{dK} (\Theta(t) + K(t)) + 0 \quad (2.20)$$

En appliquant la transformation de Laplace  $TL \left[ \frac{d}{dt} \right] = s$  alors :

$$s \frac{dy(t)}{dK(t)} = y(t) + \frac{dy(t)}{dK(t)} (\Theta(t) + K(t)) \quad (2.21)$$

Par conséquent :

$$\frac{dy(t)}{dK(t)} = \frac{1}{(s - (\Theta(t) + K(t)))} y(t) \quad (2.22)$$

On remplace  $\Theta(t)$  par son estimé  $\hat{\Theta}$  :

$$\frac{dy(t)}{dK(t)} = \frac{1}{(s - (-(K(t) + 2) + K(t)))} y(t) \quad (2.23)$$

Donc la fonction de sensibilité devient :

$$\frac{dy(t)}{dK(t)} = \frac{1}{(s + 2)} y(t) \quad (2.24)$$

Où  $\frac{1}{(s+2)}$  est le filtre de sensibilité.

5. Calcul des adaptations des paramètres du régulateur

En remplaçant l'équation (2.24) dans l'équation (2.7), on obtient :

$$\dot{K}(t) = -\lambda e(t) \frac{1}{(S + 2)} y(t) \quad (2.25)$$

6. Schéma du simulation :

Le schéma de simulation est illustré par la Figure 2.2.

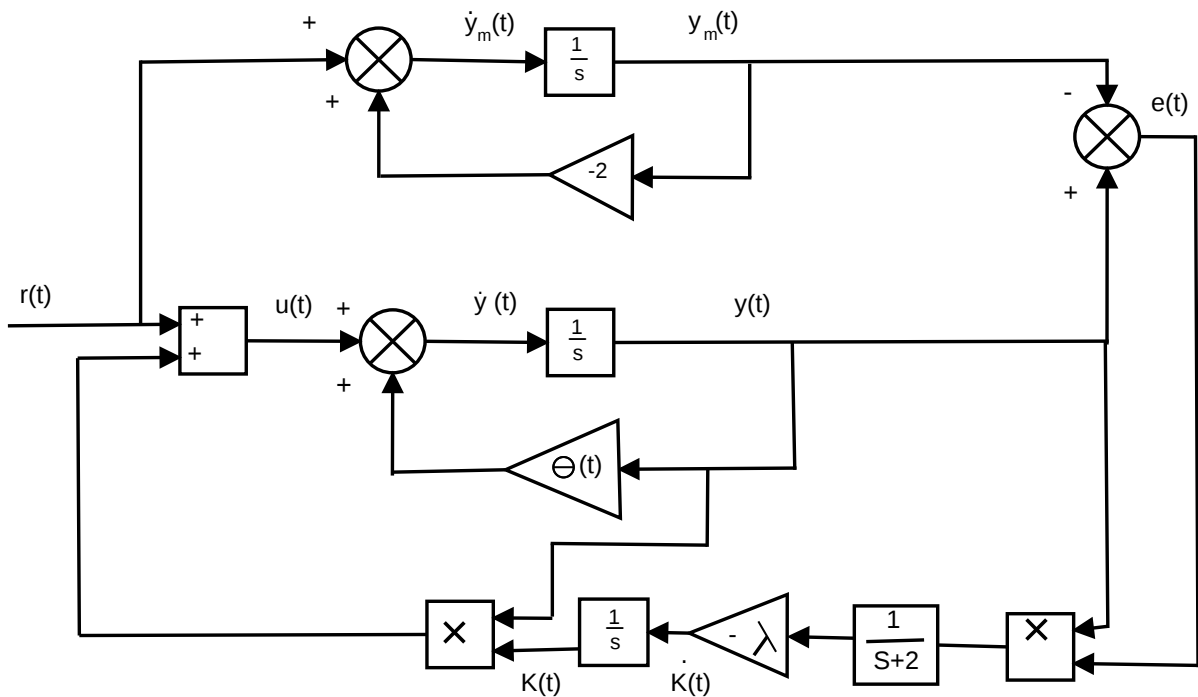


FIGURE 2.2 – Schéma du simulation.

## 2.3.2 Méthode de Lyapunov

### 2.3.2.1 Stabilité au sens du Lyapunov

Quand on donne un système, la question la plus importante concernant ses différentes propriétés est de savoir s'il est stable. Il existe diverses définitions et caractérisations de la stabilité, en particulier si le système est donné à partir d'une représentation interne ou externe. Dans le cas de représentation interne (par équations d'état), on utilise la stabilité au sens de Lyapunov.

Soit le système donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) & \forall t > 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Où  $f$  est une fonction vectorielle de dimension  $n$  et  $x$  est le vecteur d'état de dimension  $n$ .

L'équation (2.26) peut représenter un système dynamique bouclé, même si elle ne contient pas de terme de contrôle [2].

### 2.3.2.2 Point d'équilibre

De nombreux problèmes de stabilité sont naturellement formulés par rapport aux points d'équilibre. Un état  $x^*$  est un état d'équilibre (ou point d'équilibre), quand  $x(t_0)$  est égale à  $x^*$  à partir d'un certain  $t_0$ , alors  $x(t)$  reste égale à  $x^*$  pour tous  $t > t_0$ . Cela signifie que le vecteur  $x^*$  satisfait.

$$f(., x^*) = 0 \quad (2.27)$$

Et donc les points d'équilibres peuvent être déterminés en résolvant l'équation (2.27).

Dans le cas d'un système linéaire :

$$\dot{x} = Ax \quad (2.28)$$

Il n'y a qu'un seul point d'équilibre, qui est l'origine  $O$ , si  $A$  est régulière. Dans le cas où  $A$  est singulière, alors il y a une infinité de points d'équilibres appartenant au sous-espace de  $R^n$  défini par  $Ax = 0$ .

Par un changement de variable, on peut ramener l'état d'équilibre à l'origine de l'espace d'état.

Pour cela, si on note  $x^*$  l'état d'équilibre, alors il suffit d'introduire  $w = x - x^*$ .

Ainsi l'équation devient :

$$\begin{aligned}\dot{w} &= f(t, w + x^*) \\ w(0) &= x_0 - x\end{aligned}\tag{2.29}$$

La notion de domaine (ou ensemble) invariants généralise celle de point d'équilibre [2].

### 2.3.2.3 Stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité dépend, entre autres, de la donnée initiale  $x_0$ . On notera la solution de l'équation d'état (2.26) par :

$$x(t) = x(t, x_0)\tag{2.30}$$

#### Définition 2.1

Un point d'équilibre  $x = 0$  est stable au sens de Lyapunov pour le système défini par l'équation (2.26) si :

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\|x(t)\| < \delta \implies \|x(t, x_0)\| < \varepsilon\tag{2.31}$$

Pour  $t > 0$  [2].

#### Définition 2.2

Le point d'équilibre  $x = 0$  est dit asymptotiquement (ou marginalement) stable au sens de Lyapunov pour le système défini par l'équation (2.26) si :

Il est stable en plus :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0\tag{2.32}$$

.

La stabilité asymptotique signifie que le point d'équilibre est stable, et en plus les états qui évaluent à partir d'un point appartenant au voisinage de l'origine  $O$  convergent vers cette origine quand  $t \rightarrow \infty$ .

Autrement dit, les trajectoire commençant dans une boucle  $S(O, R)$ , centre à l'origine et le rayon  $R$ , convergent vers l'origine. On dit que la boucle  $S(O, R)$  est le domaine d'attraction de point d'équilibre [2].

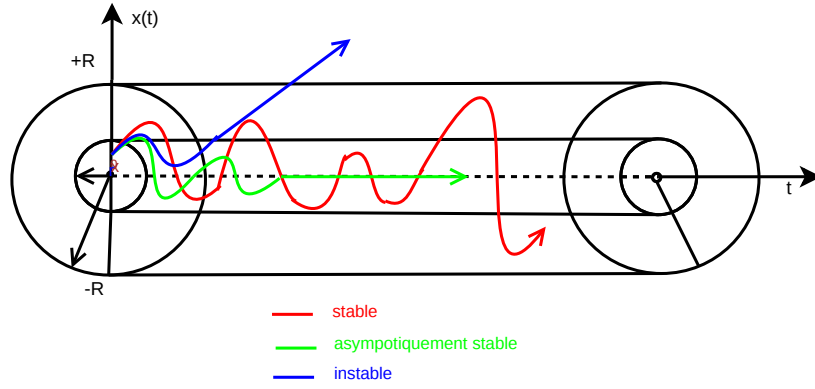


FIGURE 2.3 – Stabilité au sens de Lyapunov.

### 2.3.2.4 Fonction de Lyapunov

On donne un système :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.33}$$

$x(t) \in R^n$  est un vecteur d'état.

Soit  $V(x(t)) : R^n \rightarrow R$  une fonction qui dépend implicitement de la variable de temps «  $t$  » à travers  $x$ .

Nous dirons que  $V(x(t)) : R^n \rightarrow R$  est une fonction de Lyapunov si elle vérifie les conditions suivantes :

1.  $V(0) = 0$ ,  $V(x(t)) > 0$ ,  $\forall x \in R^n$  et  $x \neq 0$ .
2.  $V$  est de classe  $C^1$  dans  $R^n$ .
3. La dérivée de  $V$  évaluée le long de la trajectoire  $x$  donnée par l'équation (2.33) est non positive,  $\dot{V} \leq 0$  [2].

On a :

$$\dot{V} = \frac{dV}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dV}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{dV}{dx_n} \frac{dx_n}{dt}\tag{2.34}$$

### 2.3.2.5 Commande adaptative basée sur la fonction du Lyapunov

Pour concevoir un correcteur adaptative directe en utilisant la fonction de Lyapunov, on suit les étapes suivantes :

1. Exprimer le modèle en fonction de paramètres de correcteur  $K$ .

2. Supposant que les paramètres du système sont constants, déduire l'estimation de  $\Theta$ , i.e.,  $\hat{\Theta}$  en fonction de  $K$  et des paramètres du modèle de référence.
3. Déterminer l'équation de l'erreur de poursuite  $e(t) = y(t) - y_m(t)$ .
4. Choisir la fonction de Lyapunov comme une fonction dépend de l'erreur de poursuite  $e(t)$  et des erreurs d'estimations paramétriques  $\tilde{K}$ .
5. Imposer la condition de stabilité [5].

## 2.4 Analyse de la convergence

Dans le cas de la commande adaptative avec modèle de référence, l'objectif est de garantir que l'expression de l'erreur de poursuite converge vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ . C'est-à-dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ . Ce qui implique la sortie du système en boucle fermée converge vers la sortie du modèle de référence, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_m(t)) = 0$ .

L'analyse de la convergence se fait par l'utilisation de la fonction du Lyapunov et le lemme du Barbalat [5].

### 1. Fonction du Lyapunov

L'analyse de la convergence à l'aide de la fonction du Lyapunov revient à montrer que  $e(t)$  et  $\tilde{K}(t)$  sont bornées en imposant la condition suivante :

$$\dot{V}(e(t), \tilde{K}(t)) \leq 0 \quad (2.35)$$

Si cette condition est satisfaite alors  $e(t)$  et  $\tilde{K}(t)$  sont bornées [5].

### 2. Lemme du Barbalat

Si  $f(t)$  est une fonction infiniment continue et si  $\int_0^\infty f(t) dt$  existe alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  [5].

En résumé, dans notre cas, l'objectif revient à vérifier si  $e(t)$  et  $\tilde{K}(t)$  sont bornées et que l'intégrale  $\int_0^\infty e^2(t) dt$  existe. Si les deux conditions sont satisfaites, alors on conclut que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  [5].

### Exemple 2.2

Supposons que l'expression de l'erreur de poursuite est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{e}(t) = -a_m e(t) + K(t) y(t) \quad (2.36)$$

Avec  $a_m > 0$ .

Et la dérivée de la fonction du Lyapunov suivante :

$$\dot{V}(e(t), \tilde{K}(t)) = -2a_m e^2(t) \quad (2.37)$$

On a  $\dot{V}(t) \leq 0$  car  $-2 < 0$ ,  $a_m > 0$ ,  $e^2(t) > 0$ .

Comme  $\dot{V}(t) \leq 0$ , alors  $e(t)$  et  $\tilde{K}(t)$  sont bornées.

Et  $\dot{e}(t) = -2 a_m e(t) + \tilde{K}(t) y(t)$  est bornée car  $e(t)$ ,  $\tilde{K}(t)$ ,  $y(t)$  sont bornées.

On plus, on a :

$$\int_0^{\infty} \dot{V}(e(t), \tilde{K}(t)) dt = -2 a_m \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (2.38)$$

Donc :

$$-2 a_m \int_0^{\infty} e^2(t) dt = V(e(t), \tilde{K}(t)) \Big|_0^{\infty} \quad (2.39)$$

$$-2 a_m \int_0^{\infty} e^2(t) dt = V(e(\infty), \tilde{K}(\infty)) - V(e(0), \tilde{K}(0)) \Big|_0^{\infty} \quad (2.40)$$

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{V(e(\infty), \tilde{K}(\infty)) - V(e(0), \tilde{K}(0))}{-2 a_m} \quad (2.41)$$

Comme  $e(t)$ ,  $\tilde{K}(t)$  sont bornées et  $V(e(t), \tilde{K}(t))$  est une fonction décroissante, alors l'intégrale  $\int_0^{\infty} e^2(t) dt$  existe.

Les deux conditions sont satisfaites, alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

## 2.5 Exemple de la commande adaptative à modèle de référence par la méthode Lyapunov

Soit le système dynamique du seconde ordre, à deux paramètres  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  variables dans le temps, suivant :

$$\ddot{y}(t) = -\Theta_1 \dot{y}(t) - \Theta_2 y(t) + u(t) \quad (2.42)$$

où  $y(t)$  et  $u(t)$  sont respectivement la sortie et la commande du système.

On désire concevoir une commande adaptative directe à base d'un retour d'état pour imposer à la sortie  $y(t)$  une trajectoire  $y_m(t)$  définie par le modèle de référence suivant :

$$\ddot{y}_m(t) = -2 \dot{y}_m(t) - y_m(t) + r(t) \quad (2.43)$$

Où  $y_m(t)$  et  $r(t)$  sont respectivement la sortie du modèle de référence et la consigne désirée.

Pour concevoir la stratégie de commande adaptative directe par la méthode de Lyapunov, on passe par les étapes suivante :

1. Donner l'expression de la loi de commande  $u(t)$ .
2. On suppose que les paramètres  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sont constants, puis on détermine les estimés des paramètres  $\hat{\Theta}_1$  et  $\hat{\Theta}_2$  en fonction des paramètres du modèle de référence et ceux de la loi de commande  $u(t)$ .
4. Donner l'équation différentiel du système en boucle fermée lorsque les paramètres  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sont variables dans le temps.
5. Dédire l'équation différentielle caractérisent la dynamique de l'erreur de poursuite :

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (2.44)$$

6. Expliciter l'équation différentielle de l'erreur obtenue en fonction des erreurs d'estimation  $\tilde{K}_1(t) = K_1(t) - K_1^*$  et  $\tilde{K}_2(t) = K_2(t) - K_2^*$ .

7. Proposer une fonction de Lyapunov  $V(e(t), \tilde{K}_1(t), \tilde{K}_2(t))$  permettant de déterminer les adaptations des paramètres  $\tilde{K}_1$  et  $\tilde{K}_2$ .

8. Dédire les adaptations qui garantissent la convergence des différentes erreurs (stabilité en boucle fermée).

9. Donner le schéma de simulations de la stratégie de commande.

### Application

1. L'expression du commande en boucle fermée est :

$$u(t) = K_1(t) y(t) + K_2(t) \dot{y}(t) + r(t) \quad (2.45)$$

.

2. On suppose que  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sont constants et on détermine leurs estimés en remplaçant  $u(t)$  dans l'équation du système, ce qui donne :

$$\ddot{y}(t) = (K_2^* - \Theta_1) \dot{y}(t) + (K_1^* - \Theta_2) y(t) + r(t) \quad (2.46)$$

.

Par identification avec le modèle de référence, on obtient :

$$\begin{aligned} K_1^* - \Theta_2 &= -1 \\ K_2^* - \Theta_1 &= -2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

D'où

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_2 &= K_1^* + 1 \\ \hat{\Theta}_1 &= K_2^* + 2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

3. On suppose  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sont variables et on calcule l'expression de l'erreur de poursuite :

L'équation du système en boucle fermée devient :

$$\ddot{y}(t) = (K_2(t) - \Theta_1) \dot{y}(t) + (K_1(t) - \Theta_2) y(t) + r(t) \quad (2.49)$$

On remplace  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  par leur estimés  $\hat{\Theta}_1$  et  $\hat{\Theta}_2$  dans l'équation (2.49), on obtient :

$$\ddot{y}(t) = (\tilde{K}_1(t) - 1) y(t) + (\tilde{K}_2(t) - 2) \dot{y}(t) + r(t) \quad (2.50)$$

Alors l'expression de l'équation différentielle de l'erreur de poursuite est :

$$\ddot{e}(t) = \ddot{y}(t) - \ddot{y}_m(t) = -2\dot{e}(t) - e(t) + \tilde{K}_2(t) \dot{y}(t) + \tilde{K}_1(t) y(t) \quad (2.51)$$

4. Calcul des lois d'adaptation qui garantissent la convergence des différents erreurs (stabilité en boucle fermée) :

On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e(t), \dot{e}(t), \tilde{K}_1(t), \tilde{K}_2(t)) = \frac{1}{2} \dot{e}^2(t) + \frac{1}{2} e^2(t) + \frac{1}{2} \tilde{K}_1^2(t) + \frac{1}{2} \tilde{K}_2^2(t) \quad (2.52)$$

Pour assurer la stabilité (la bornitude) des erreurs de poursuite et d'estimations paramétriques, on doit imposer  $\dot{V}(t) \leq 0$ .

On a :

$$\dot{V}(t) = \frac{dV(t)}{de(t)} \frac{de(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{d\dot{e}(t)} \frac{d\dot{e}(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{d\tilde{K}_1(t)} \frac{d\tilde{K}_1(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{d\tilde{K}_2(t)} \frac{d\tilde{K}_2(t)}{dt} \quad (2.53)$$

$$\dot{V}(t) = e(t) \dot{e}(t) + \dot{e}(t) \ddot{e}(t) + \tilde{K}_1(t) \dot{\tilde{K}}_1(t) + \tilde{K}_2(t) \dot{\tilde{K}}_2(t) \quad (2.54)$$

$$\dot{V}(t) = \dot{e}(t) (e(t) + \ddot{e}(t)) + \tilde{K}_1(t) \dot{\tilde{K}}_1(t) + \tilde{K}_2(t) \dot{\tilde{K}}_2(t) \quad (2.55)$$

D'après l'équation (2.51), on a :

$$\ddot{e}(t) + e(t) = -2\dot{e}(t) + \tilde{K}_1(t) y(t) + \tilde{K}_2(t) \dot{y}(t) \quad (2.56)$$

On remplace l'équation (2.56) dans l'équation (2.55), pour avoir :

$$\dot{V}(t) = -2\dot{e}^2(t) + \tilde{K}_1 \left( y(t) \dot{e}(t) + \dot{\tilde{K}}_1(t) \right) + \tilde{K}_2(t) \left( \dot{y}(t) \dot{e}(t) + \dot{\tilde{K}}_2(t) \right) \quad (2.57)$$

Comme  $\dot{e}^2(t) \geq 0$  pour imposer  $\dot{V}(t) \leq 0$ , on doit imposer :

$$\tilde{K}_1 \left( y(t) \dot{e}(t) + \dot{\tilde{K}}_1(t) \right) + \tilde{K}_2(t) \left( \dot{y}(t) \dot{e}(t) + \dot{\tilde{K}}_2(t) \right) = 0 \quad (2.58)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} y(t) \dot{e}(t) + \dot{\tilde{K}}_1(t) &= 0 \\ \dot{y}(t) \dot{e}(t) + \dot{\tilde{K}}_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ce qui conduit aux lois d'adaptation paramétriques suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(t) &= - \int_0^t y(t) \dot{e}(t) dt + \tilde{K}_1(0) \\ \tilde{K}_2(t) &= - \int_0^t \dot{y}(t) \dot{e}(t) dt + \tilde{K}_2(0) \end{aligned} \quad (2.60)$$

## 5. Schéma de simulation

Le schéma de simulation est donné par la Figure 2.4 :

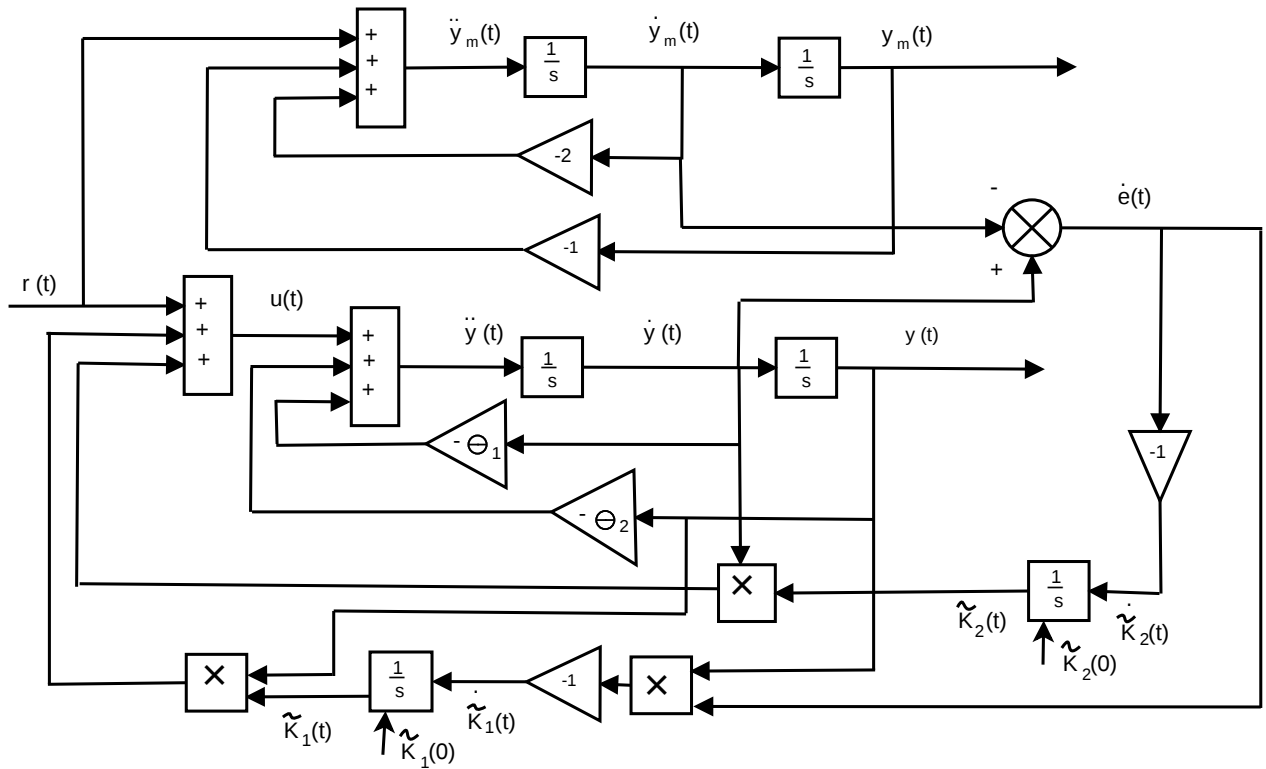


FIGURE 2.4 – Schéma de simulation.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le principe de la commande adaptative à modèle de référence et les différentes approches utilisés pour la synthèse de cette stratégie de commande. Nous avons axé l'exposé sur l'approche de la fonction de Lyapunov qui permet de garantir la convergence de l'erreur de poursuite en boucle fermée. Cette approche a été illustrée par exemple d'application.

Cette technique sera appliquée, dans ce mémoire, pour le système insuline-glucose. Ce dernière sera décrit dans le prochain chapitre.

# Chapitre 3

## Modélisation par analyse comportementale du couple insuline-glucose

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter la dynamique du système insuline-glucose, puis on va donner quelque généralités sur le diabète, les différents types de diabète, ses causes, leur symptômes et le traitement à suivre pour mieux vivre avec cette maladie. Ensuite, on va définir une méthode très utilisée en médecine et en biologie pour obtenir un modèle mathématique qui décrit les différents échanges entre les compartiments d'un système biologique (l'analyse compartimentale).

Enfin, la dernière partie de ce chapitre est consacré pour la modalisation et la simulation du système insuline-glucose.

### 3.2 Couples antagonistes

De nombreux systèmes issus de la physiologie humaine ou animale font intervenir des couples d'hormones qui agissent tantôt dans le sens contraire (action antagoniste).

D'où l'intérêt de représenter mathématiquement de tels système qui joueront le rôle de modèle source pour de nombreux phénomènes biologiques. Ce sera le cas par exemple : de la régulation « d'insuline-glucose » en physio-pathologie humaine.

Pour ce cas, on va étudier un système hormonal complexe qui joue un rôle fondamental dans l'évolution de la glycémie dans le corps humain où deux concentrations interviennent en l'occurrence le glucose ( $G$ ) et l'insuline ( $I$ ). Chez un individu sain la concentration du glucose et de l'insuline sont en équilibre ce qui est traduit par les relations suivante :

$$G + I - m = 0 \quad (3.1)$$

avec  $m$  est une constante.

Donc la présence d'une quantité d'insuline dans le sang permet de diminuer la concentration du glucose à un taux jugé optimal.

Chez les individus diabétiques, on constate toujours un déséquilibre hormonal qui se traduit par l'équation suivante :

$$G + I - m \neq 0 \quad (3.2)$$

Donc pour soigner le malade, on va lui administrer l'hormone qui manque pour tenter de rétablir l'équilibre [11].

### 3.3 Généralités sur le diabète

#### 3.3.1 Dynamique insuline-glucose

Le glucose est le carburant indispensable à la bonne marche de tout les cellules, il est en permanence disponible dans le sang et provient d'alimentations ou en dehors de repas, des réserves du foie et des muscles.

L'insuline est l'un des hormones (glucagon) qui aident à la maîtrise de la quantité de glucose dans le sang. Ces deux hormones sont fabriquées par le pancréas (une glande située derrière l'estomac). Le pancréas renferme des petits amas de cellules appelés îlots de Langerhans, ces cellules à leur tour comprennent des cellules alpha et bêta qui produisent respectivement les hormones glucagon et l'insuline.

L'insuline et le glucagon travaillent toujours de concert pour aider le corps humain à conserver une glycémie stable. Lorsque nous mangeons le taux de glucose dans le sang augmente, ce qui a pour effet d'amener les cellules bêta à libérer plus d'insuline. Dans le cas contraire, les cellules alpha libèrent du glucagon qui vont atteindre le foie et lui ordonnent de libérer du glucose [11].

La dynamique du insuline-glucose est résumée par la Figure 3.1 [11] :

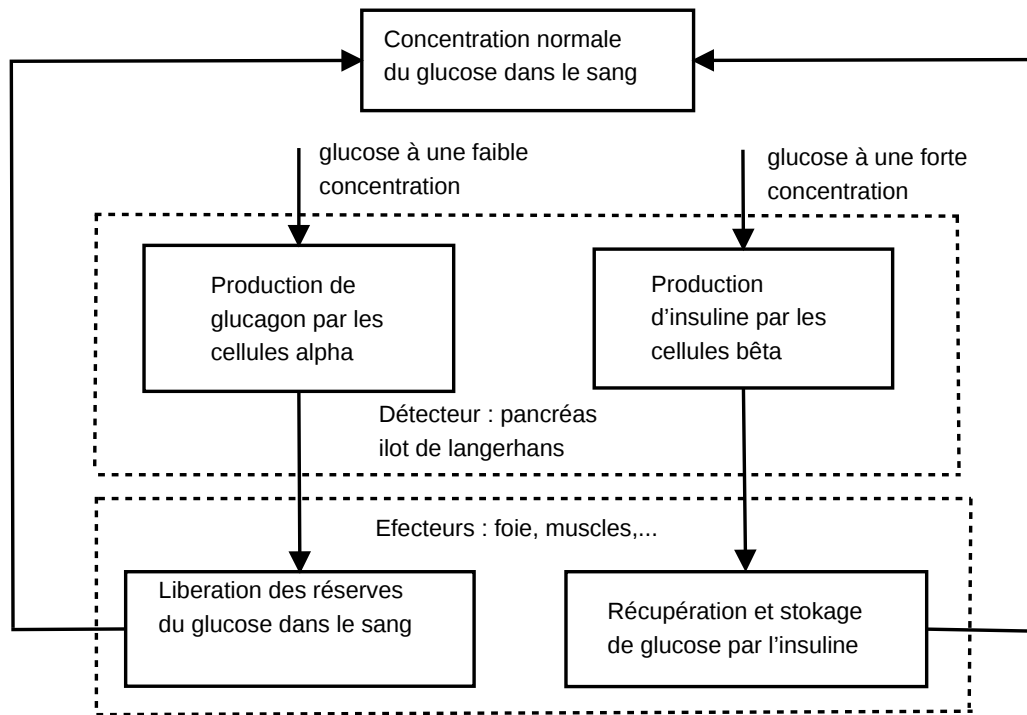


FIGURE 3.1 – Régulation insuline-glucose dans le sang chez une personne normale.

### 3.3.2 Diabète

Le diabète est une maladie chronique qui perturbe le fonctionnement de notre organisme. Cette maladie caractérisée par une production insuffisante d'insuline (diabète de type 1) ou par une diminution de la sensibilité à l'insuline (diabète de type 2). Ce phénomène provoqué par une augmentation de la concentration de glucose dans le sang (hyperglycémie) conduit à des lésions affectent plusieurs appareils ou systèmes, en particulier les vaisseaux et les nerfs [11, 12].

### 3.3.3 Types du diabète

On distingue deux types de diabète :

#### 3.3.3.1 Diabète du type 1

Il était anciennement appelé diabète insulino-dépendent. Chez les personnes ayant ce type de diabète, les cellules du pancréas sont incapable de produire l'insuline [11].

#### 3.3.3.2 Diabète du type 2

Nommée aussi diabète non insulino-dépendent. Il résulte de l'incapacité de l'organisme à réagir correctement à l'action d'insuline produit par le pancréas (fonctionnement normal de pancréas mais pour certains raisons le corps ne l'utilise pas) [11].

**Remarque 3.2**

Il y a d'autre type du diabète nommé diabète gestationnelle. C'est une augmentation de glucagon lié à un manque de production d'insuline par le pancréas qui ne dure que le temps d'une grossesse. Mais les personnes ayant ce type de diabète risque un diabète de type 2 à long terme [11].

**3.3.4 Symptômes de diabète**

Les symptômes les plus indicateurs de cette maladie sont [11] :

1. Soif intense.
2. Vision floue.
3. Fatigue et faiblesse.
4. Infection des organes génitaux.
5. Faim exagérée.
6. Perte du poids.
7. Cicatrisation lente.
8. Manque de concentration.

**3.3.5 Causes du diabète**

Nous savons cependant que le diabète de type 1 est une maladie « auto-immune », c'est-à-dire l'organisme est agressé par son propre système immunitaire qui détruit les cellules bêta du pancréas [12].

Le diabète de type 2 est causé par la diminution de sensibilité des cellules à l'action d'insuline appelé l'insulino-résistance, une production défailance d'insuline par les cellules bêta du pancréas appelé l'insulino-déficience [12].

Autres causes sont :

- \_ Age supérieur à 40 ans.
- \_ Un taux élevé du cholestérol.
- \_ Des antécédents familiaux de diabète.
- \_ Une pression artificielle élevée [11].

**3.3.6 Diagnostic du diabète**

Le diagnostic de diabète se fait sur la mesure de la glycémie au laboratoire d'analyses médicales lors d'une prise de sang.

Le niveau d'élévation du sucre dans le sang à partir duquel on parle de diabète à évolué au fil du temps, et actuellement il existe encore des controverses, on tend à retenir des élévations de plus en plus faibles [11].

### 3.3.6.1 Critère de diagnostic

1. S'il existe des symptômes de diabète (polyurie, polydipsie amaigrissement), alors une seule mesure de la glycémie au dessus de 2.00g/l n'importe quand dans la journée suffit à faire le diagnostic. En dessous de 2.00g/l, on se retrouve dans le cas qui suit [11].
2. En absence de symptômes, il faut deux mesures de la glycémie à jeun au laboratoire [11] :

**Au dessus de 1.26 g/l** diagnostic de diabète.

**En dessous de 1.26 g/l et au dessus de 1.10 g/l** diagnostic d'hyperglycémie modérée à jeun, seuil d'augmentation du risque vasculaire.

En dessous de 1.26 g/l, on peut réaliser une hyperglycémie provoquée (HGPR) au laboratoire : on va lui donner 75 g de glucose et l'on mesure la glycémie deux heures après, le diagnostic d'intolérance au glucose est retenu si la glycémie deux heures après dépasse 1.40 g/l. Si la glycémie dépasse 2.00 g/l on est dans le diagnostic de diabète [11].

### 3.3.7 Traitement du diabète

Jusqu'à maintenant le diabète ne se guérit pas, il se contrôle par le maintien du niveau du sucre de sanguin de l'organisme aussi près que possible de la normale. Le maintien de la glycémie est fait afin de réduire la gravité d'un grand nombre de complications à long terme (comme la maladie cardio-vasculaire, les accidents vasculaires ...etc) [11].

#### 3.3.7.1 Traitement nutritionnel

Le traitement nutritionnel est un outil important pour les types de diabète car cette maladie est liée d'une façon directe à l'organisme qui utilise les aliments ingérés, ce traitement doit être conçu en fonction du type de diabète et des autres problèmes médicaux à traiter par exemple :

Pour le diabète de type 1, le traitement nutritionnel vise avant tout à encourager le patient à maintenir la quantité d'aliments consommés à chaque repas. Le type de dosage d'insuline est choisi en fonction du régime alimentaire.

Pour le diabète de type 2, ce traitement vise à la normalisation de la glycémie et le maintien du poids. Il s'agit d'amener le patient à modifier ses habitudes alimentaires et ses activités [11].

### 3.3.7.2 Activité physique

L'activité physique joue un rôle important dans le contrôle du diabète. Elle favorise le contrôle du poids, chuter le niveau de sucre sanguin (glycémie) car les muscles consomme plus d'énergie, améliore la circulation et procure au diabétique le bien être [11].

### 3.3.7.3 Médicaments

Pour certaines personnes ayant le diabète du type 2 n'ont pas besoin du médicament. Le traitement nutritionnel et l'activité physique suffisent pour normaliser la glycémie. Tandis que d'autres personnes doivent avoir recours à des médicaments ou encore des injections d'insuline (l'insulinothérapie est rarement nécessaire).

Les diabétiques du type 1 doivent recourir aux injections quotidiennes d'insuline pour assurer la régulation de la glycémie puisque leur organismes ne produisent pas d'insuline [11].

#### Remarque 3.3 :

L'injection d'insuline se fait de différentes manières.

L'injection d'insuline se fait à l'aide d'un stylo à injection d'une seringue ou d'une pompe à insuline.

La pompe à insuline est un boîtier semblable à un téléphone portable, elle contient d'insuline rapide et c'est le diabétique qui détermine les doses à administrer selon divers paramètres. Cela demande de bien connaître sa maladie et un apprentissage de l'utilisation de la pompe [11].

### 3.3.7.4 L'auto surveillance de la glycémie

L'auto surveillance est une méthode qui permet d'adapter les doses de traitement sur la base de résultat obtenus. Elle permet de mesurer le taux de glucose dans le sang et de constater s'il est trop élevé ou trop bas. Elle s'effectue en prélevant par une légère piqure une goutte de sang (généralement au bout de doigt) et ensuite la déposer sur une tigette/bandelette à insérer dans un appareil qui contient un système de mesure de la glycémie [11].

## 3.4 Modélisation par analyse compartimentale

### 3.4.1 Analyse compartimentale

L'analyse compartimentale des systèmes biologiques est une technique de modélisation qui conduit à des équations différentielles [14]. On s'en sert à suivre l'évolution, soit dans

le système biologique ou autre au cours de temps, l'évolution des substance biochimiques (médicaments, hormones,...etc) et des concentrations .

Pour obtenir les équations différentielles du modèle compartimentale, il est nécessaire :

1. De définir le nombre et la qualité des compartiments.
2. De quantifier les échanges entre les différents compartiments [11].

### Définition 3.1

Les compartiments d'un système biologiques sont des classes d'équivalence définies par des propriétés physiques [11].

Soit  $x_i(t)$  et  $k_{ij}x_i(t)$  respectivement la quantité, à l'instant  $t$ , contenue dans le compartiment  $i$ , et la quantité allant du compartiment  $j$  vers le compartiment  $i$  par unité de temps [14].

Un compartiment est généralement symbolisé par un cercle, et une flèche entrante ou sortante qui signifie qu'il y a un échange dans le sens de la flèche [11].

On peut représenter les différents échanges possibles entre les compartiments  $i$  et  $j$  par la Figure 3.2 :

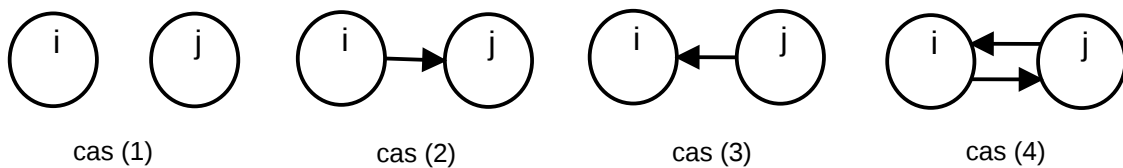


FIGURE 3.2 – Différents échanges entre les compartiments  $i$  et  $j$ .

Où la flèche signifie qu'il y a un échange dans le sens de la flèche. On distingue les cas suivants :

Cas 1 : pas d'échange entre les deux compartiments  $i$  et  $j$ .

Cas 2 : échange depuis le compartiment  $i$  vers le compartiment  $j$ .

Cas 3 : échange depuis le compartiment  $j$  vers le compartiment  $i$ .

Cas 4 : échange dans les deux sens entre les deux compartiments  $i$  et  $j$  [11].

### Remarque 3.4

S'il y a une liaison entre le système et le milieu externe, le système dans ce cas est appelé système ouvert. Et s'il n'y a pas de liaison entre eux alors le système est fermé.

Il existe d'autres types de liaison lorsque le système est ouvert comme indiqué par la Figure 3.3 :

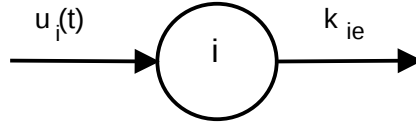


FIGURE 3.3 – Système compartimental ouvert.

Avec

$u_i(t)$  : une entrée au niveau de compartiment  $i$ .

$k_{ie}$  : une sortie vers l'extérieur du système à partir du compartiment  $i$  [11].

### 3.4.1.1 Systèmes compartimentaux linéaires

#### Définition 3.2

Soit un échange linéaire entre  $i$  et  $j$ . La quantité, par unité du temps, passant de compartiment  $i$  au compartiment  $j$  est proportionnelle à la quantité  $x_i(t)$  contenue dans le compartiment de départ [11].

#### Définition 3.3

La variation instantanée de la quantité au niveau du compartiment  $i$  exprimé par la dérivée de  $x_i(t)$  est égale à la somme des quantités entrantes dans  $i$ , par unité de temps, moins la somme des quantités sortantes de  $i$ , par unité de temps.

La modélisation d'un système compartimentale comportant  $n$  compartiments (Figure 3.4) où tous les compartiment sont reliés entre eux.

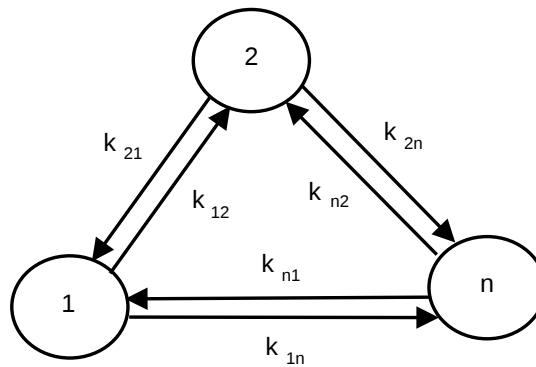


FIGURE 3.4 – Système compartimentale fermé.

Conduit à l'équation, relative au compartiment  $i$  suivante :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ji} x_j(t) - x_i(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij} \quad (3.3)$$

Avec  $i = 1 \cdots n$ .

L'équation peut être simplifiée en posant

$$k_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij} \leq 0 \quad (3.4)$$

L'équation devient

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n k_{ji} x_j(t) \quad (3.5)$$

Avec  $i = 1 \dots n$ .

Généralement, les conditions initiales du système peuvent être précisées [11].

### 3.4.1.2 Systèmes compartimentaux non linaires

On considère un échange entre deux compartiments  $i$  et  $j$ .

On peut exprimer la variation de la quantité  $x_i(t)$  dans le compartiment  $i$  pour un système fermé par :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ij} x_j^\alpha x_i^\beta - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_{ji} x_i^\alpha x_j^\beta \quad (3.6)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels positives.

Dans la réalité, on retrouve toujours le même type de la non linéarité qui sont du type Michaelis-Menten. L'échange entre deux compartiments  $i$  et  $j$  s'exprime par la relation suivante :

$$\frac{\mu_i x_i}{k_i + x_i} \quad (3.7)$$

Où  $\mu_i$  et  $k_i$  sont des constantes de Michaelis-Menten [14].

#### Exemple 3.1

On considère un modèle à un échange de type Michaelis-Menten donné par la Figure 3.5 :

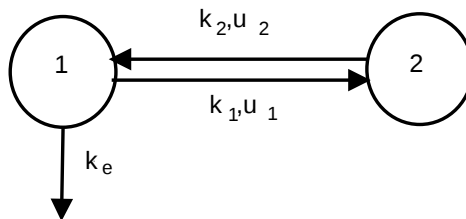


FIGURE 3.5 – Exemple d'échange de type Michaelis-Menten.

L'utilisation de l'analyse compartimentale conduit au système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= - \left( k_e + \frac{\mu_1}{k_1 + x_1} \right) x_1 + \frac{\mu_2 x_2}{k_2 + x_2} \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{\mu_1 x_1}{k_1 + x_1} - \frac{\mu_2 x_2}{k_2 + x_2}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Où apparaissent des non linéarités de type homographique [14].

### 3.4.2 Modélisation du système insuline-glucose

Les plus simples modèles qui régissent l'évolution couplée de l'insuline et glucose sont déterminés en utilisant l'analyse compartimentale du modèle donné par la Figure 3.6 :

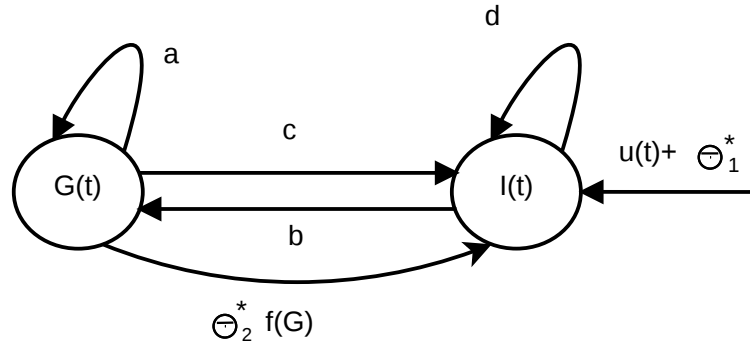


FIGURE 3.6 – Modèle insuline-glucose.

L'application de l'analyse compartimentale au modèle de la Figure 3.6 conduit au modèle différentiel suivant :

$$\begin{aligned}\dot{G}(t) &= a G(t) + b I(t) \\ \dot{I}(t) &= c G(t) + d I(t) + u(t) + \Theta_1^* + \Theta_2^* * f(G)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Où  $a, b, c, d$  sont des coefficients d'échanges.

$f(G) = G^2$ .

$G(t)$  : la concentration de glucose dans le sang.

$I(t)$  : la concentration de l'insuline dans le sang.

$u(t)$  : l'insuline exogène qui sera administrée en pratique (la variable de contrôle) [11].

Le modèle donné par l'équation (3.9) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B [u(t) + \Theta^{*T} \phi(x)] \quad (3.10)$$

Où

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{G}(t) \\ \dot{I}(t) \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} G(t) \\ I(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

et

$$\Theta^{*T} = \begin{bmatrix} \Theta_1^* & \Theta_2^* \end{bmatrix}, \phi(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ G^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.5 Simulation en boucle ouverte

La simulation se fait sans administration de l'insuline exogène, c'est-à-dire la variable de contrôle  $u(t)$  est nulle comme est montré la Figure 3.7 :

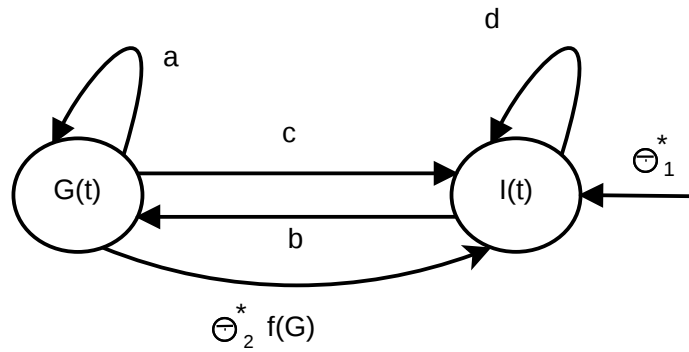


FIGURE 3.7 – Modèle insuline glucose en absence de variable de contrôle.

Dans ce modèle, il n'y a pas d'échange du comportement  $G(t)$  vers le comportement  $I(t)$  ( $c=0$ ). Le modèle obtenu dans ce cas est [11] :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\Theta^{*T}\phi(x) \quad (3.13)$$

Pour la simulation, on prend :

$$A = \begin{bmatrix} 0.0343 & -0,05 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} 0,01 & -0,04 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Les conditions initiale sont  $G(0) = 1,3$ ,  $I(0) = 10,8918$ .

#### 3.5.1 Cas de diabète du type 2 (non insulino-dépendant)

Dans ce cas, le pancréas produit une quantité insuffisante d'insuline, on va prendre  $c=0.5$  dans la matrice  $A$  de l'équation (3.10). Les résultats du simulation sont donnés par les Figures 3.8 et 3.9 [11] :

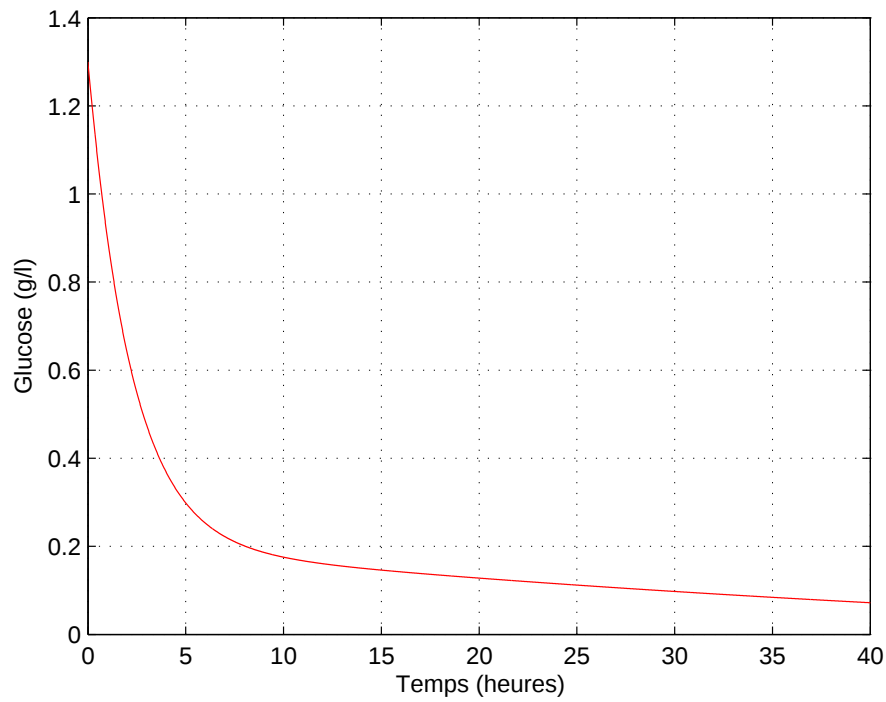


FIGURE 3.8 – Évolution du glucose lorsque il y a production d'insuline.

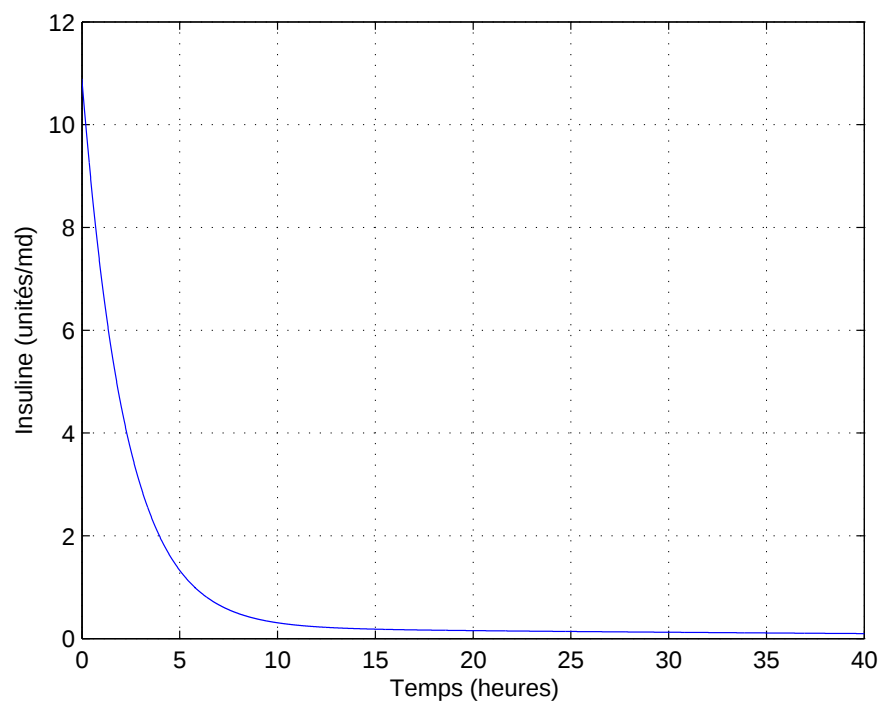


FIGURE 3.9 – Évolution de l'insuline dans le sang.

### 3.5.2 Cas de diabète du type 1 (insulino-dépendant)

Dans ce cas, le pancréas du patient ne produit pas de l'insuline, on va prendre  $c=0$  dans l'équation (3.10). Les résultats de simulation sont donnés par les Figure 3.10 et 3.11[11] :

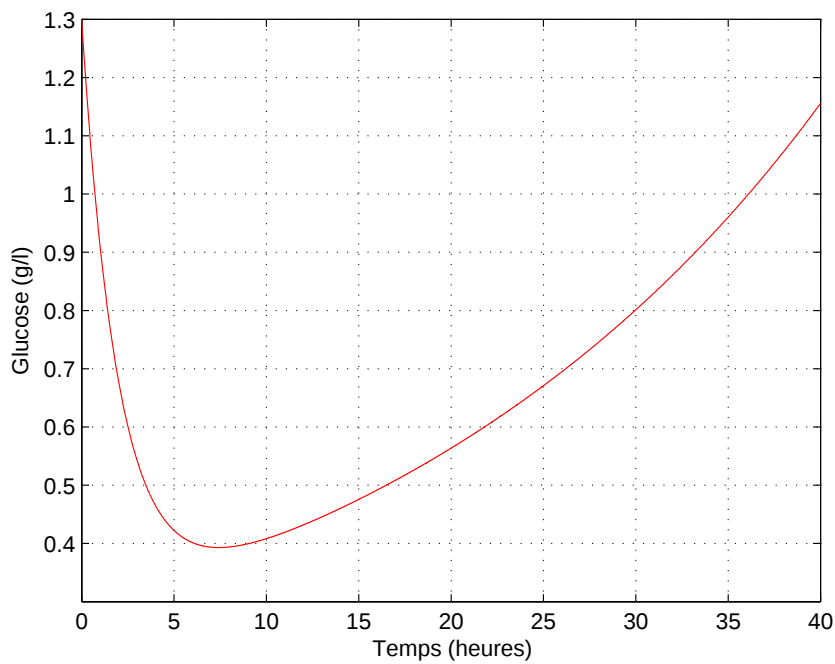


FIGURE 3.10 – Évolution du glucose cas insulino-dépendant.

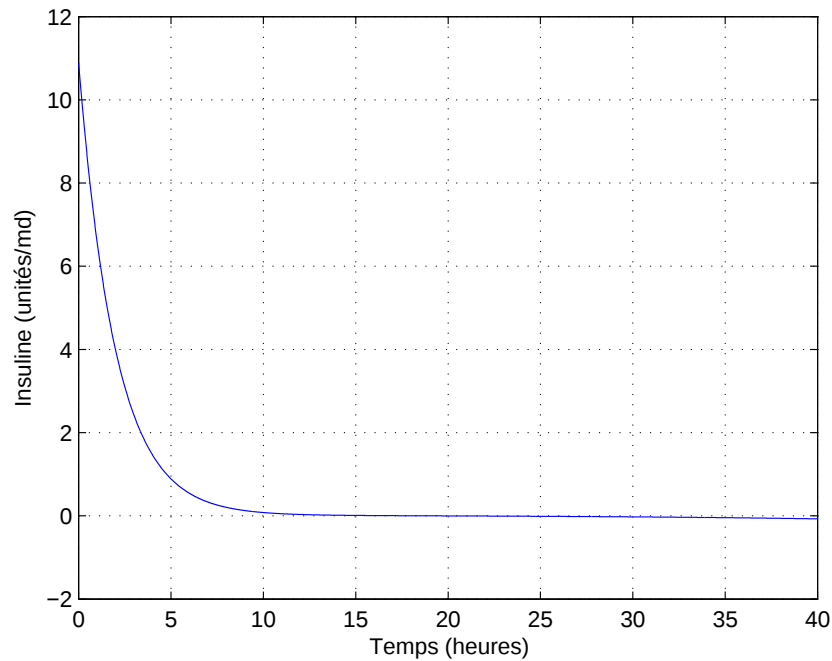


FIGURE 3.11 – Évolution de l'insuline cas insulino-dépendant.

### Interprétation des résultats

Dans le cas non insulino-dépendant (Figure 3.8 et Figure 3.9), on remarque que la présence de l'insuline sécrétée par le pancréas dans le sang permet d'assurer l'absorption du sucre par les cellules musculaires et de maintenir un taux normal de glucose dans le sang ce qui justifie la diminution de taux du glucose pendant 24 heures

Dans le cas insulino-dépendant (Figure 3.10 et la Figure 3.11), on remarque que lorsqu'il y a présence d'une quantité d'insuline, la concentration du glucose diminue mais après épuisement de cette quantité, on remarque que la concentration du glucose augmente ce qui signifie que la production d'insuline par le pancréas est nulle.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a mentionné l'existence de deux types de diabète : diabète du type 1 qui est provoqué par l'absence de la production de l'insuline, et le diabète du type 2 qui est dû à la production d'une faible quantité de l'insuline dans le sang. Et on a vu aussi, l'analyse compartimentale qui nous permet d'aboutir à un modèle d'état qui exprime les différents échanges entre les compartiments d'un système biologique. Puis, on a utilisé cette technique pour la modélisation et la simulation de couple insuline-glucose. Les tests de simulation de ce modèle sont effectués en boucle ouverte.

Dans le chapitre suivant, on va appliquer la commande adaptative à modèle de référence, basée sur l'approche de Lyapunov, pour le système insuline-glucose.

# Chapitre 4

## Commande adaptative directe à modèle de référence du couple insuline-glucose

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est une application de la commande adaptative directe à modèle de référence pour le couple insuline-glucose. On commence d'abord par le cahier des charges, où on va donner l'équation différentiel du système insuline-glucose, l'équation différentiel du modèle de référence et l'objectif de la commande. Puis, on calcule la consigne à l'aide du modèle de référence.

Ensuite, on applique la commande adaptative à modèle de référence, basée sur la fonction de Lyapunov, pour calculer les lois d'adaptation des paramètres qui réalise les performances exigées (répondant au cahier des charges) malgré les incertitudes.

### 4.2 Cahier des charges

Soit un patient ayant un diabète du type 1 dont le modèle mathématique est donné par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B [u(t) + \Theta^{*T} \phi(x)] \quad (4.1)$$

avec

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{G}(t) \\ \dot{I}(t) \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} G(t) \\ I(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0,0343 & -0,05 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\Theta^{*T} = \begin{bmatrix} \Theta_1^* & \Theta_2^* \end{bmatrix}, \phi(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ G^2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

où

$G(t)$  : est la concentration de glucose dans le sang.

$I(t)$  : est la concentration de l'insuline dans le sang.

$u(t)$  : l'insuline exogène qui sera administrée en pratique (la variable de contrôle).

L'objectif est de concevoir une loi de commande adaptative qui permet de ramener le taux du glucose dans le sang à une valeur finale égale à 1 en imposant une dynamique d'un système de deuxième ordre. Pour cela, on prend le modèle de référence identique au modèle du système, c'est-à-dire :

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t) \quad (4.4)$$

avec

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} \dot{G}_m(t) \\ \dot{I}_m(t) \end{bmatrix}, \quad x_m(t) = \begin{bmatrix} G_m(t) \\ I_m(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

où  $A_m$  est matrice d'Hurwitz connue,  $B_m$  est matrice de commande de modèle de référence connue,  $G_m(t)$  est la concentration du glucose désirée dans le sang,  $I_m(t)$  : est la concentration de l'insuline désiré dans le sang,  $r(t)$  : est la consigne du modèle de référence.

### 4.3 Calcul de la référence $r(t)$

Le calcul de la référence est une étape très importante pour réaliser l'objectif imposé par le cahier des charges. Pour cela, on utilise le modèle de référence.

Comme on veut imposer au glucose de suivre une trajectoire d'un système de seconde ordre qui converge vers une valeur finale égale à 1, alors on peut poser pour le glucose la trajectoire suivante :

$$G(t) = a_r \exp(-2t) + b_r \exp(-t) + 1 \quad (4.6)$$

Et comme le modèle de référence est identique au modèle du système, alors :

$$\begin{aligned} \dot{G}_m(t) &= 0.0343 G_m(t) + 0.5 I_m(t) \\ \dot{I}_m(t) &= -0.5 I_m(t) + r(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

De l'équation (4.7), on a :

$$I_m(t) = \frac{\dot{G}_m(t) - 0.0343 G_m(t)}{0.5} = \frac{20343 a_r}{500} \exp(-2t) + \frac{10343 b_r}{500} \exp(-t) + \frac{343}{500} \quad (4.8)$$

et

$$r(t) = \dot{I}_m(t) + 0.5 I_m(t) \quad (4.9)$$

D'où

$$r(t) = \frac{343}{1000} - \frac{10343 b_r}{1000} \exp(-t) - \frac{61029 a_r}{1000} \exp(-2t) \quad (4.10)$$

Pour l'application numérique, on prend :  $a_r = 0, 2$ ,  $b_r = 0, 5$ .

## 4.4 Choix de la structure de commande

La structure de la commande choisie est donné par l'équation suivante :

$$u(t) = K_x(t) x(t) + K_r(t) r(t) - \Theta^T \Phi(x) \quad (4.11)$$

Où  $K_x \in R^2$  et  $K_r(t) \in R$  sont des gains constants à déterminer .

Ce choix est fait selon le modèle du système donné par l'équation (4.1).

Le terme  $K_x(t) x(t) + K_r(t) r(t)$  est une commande par retour d'état qui permet d'annuler l'écart statique et de garantir la poursuite.

Le terme  $-\Theta^T \Phi(x)$  est ajouté dans le but de compenser et d'annuler le terme non linéaire du modèle du système pour avoir en boucle fermée un système linéaire du 2ème ordre.

## 4.5 Détermination des adaptations

1. Puisque les matrices  $A$  et  $B$  sont constantes alors les deux matrices  $K_x$  et  $K_r$  sont aussi constantes. On les désigne par  $K_x^*$  et  $K_r^*$  . La loi de commande dans ce cas est :

$$u(t) = K_x^* x(t) + K_r^* r(t) - \Theta^{*T} \Phi(x) \quad (4.12)$$

On remplace l'équation (4.12) dans l'équation (4.1), pour avoir l'équation du système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = (A + B K_x^*) x(t) + B K_r^* r(t) \quad (4.13)$$

Par identification avec le modèle du référence donné par l'équation (4.4), on obtient :

$$\begin{aligned} A + B K_x^* &= A_m \\ B K_r^* &= B_m \end{aligned} \quad (4.14)$$

alors

$$\begin{aligned} K_x^* &= \frac{A_m - A}{B} \\ K_r^* &= \frac{B_m}{B} \end{aligned} \quad (4.15)$$

En général, nous pouvons pas toujours supposer que les matrices  $K_x^*$  et  $K_r^*$  existent parce que  $A$ ,  $A_m$ ,  $B$  et  $B_m$  peuvent avoir des structures différentes qui ne permet pas de calculer  $K_x^*$  et  $K_r^*$ .

### Exemple 4.1

Soit le système 2ème ordre et le modèle de référence suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

En utilisant la pseudo inverse, les solutions  $K_x^*$  et  $K_r^*$  obtenues en utilisant l'équation (4.15) sont données comme suit :

$$\begin{aligned} K_x^* &= (B^T B)^{-1} B^T (A_m - A) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -15 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$K_r^* = (B^T B)^{-1} B^T B_m = 2 \quad (4.19)$$

Maintenant, si on suppose que

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -16 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Alors la solution  $K_x^*$  donnée par (4.18) ne satisfait pas la condition donné par l'équation (4.14), c'est-à-dire

$$A + B K_x^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -2 \end{bmatrix} \neq A_m \quad (4.21)$$

Initialement, on suppose qu'il existe des matrices  $K_x^*$  et  $K_r^*$  qui vérifient des conditions données par l'équation (4.14).

Pour un système du 2ème ordre, les conditions données par l'équation 4.14 sont sa-

tisfaites si les matrices du modèle de référence  $A_m$ ,  $B_m$  ont les mêmes structures que les matrices du modèle du système  $A$  et  $B$ .

2. On suppose que les matrices  $A$  et  $B$  sont variables dans le temps et on détermine l'équation différentielle du système en boucle fermée :

On remplace l'équation (4.11) dans l'équation (4.1), on obtient :

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t) K_x(t)) x(t) + B(t) K_r(t) r(t) - B \tilde{\Theta}^T(t) \Phi(x) \quad (4.22)$$

On remplace  $A$  par son estimée  $\hat{A}$  pour avoir :

$$\dot{x}(t) = \left( A_m - B \tilde{K}_x(t) \right) x(t) + B K_r(t) r(t) - B \tilde{\Theta}^T(t) \Phi(x) \quad (4.23)$$

3. L'équation différentielle de l'erreur de poursuite est :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}_m(t) - \dot{x}(t) = A_m e(t) - B \tilde{K}_x(t) x(t) - B_m r(t) - B K_r(t) r(t) + B \tilde{\Theta}^T \Phi(x) \quad (4.24)$$

On remplace  $B_m$  par son expression, on retrouve :

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) - B \tilde{K}_x(t) x(t) - B \tilde{K}_r(t) r(t) + B \tilde{\Theta}^T \Phi(x) \quad (4.25)$$

avec

$$e(t) = x_m(t) - x(t) \quad (4.26)$$

4. Proposition une fonction de Lyapunov  $V(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta})$  et détermination des adaptations qui garantissent la convergence des différentes erreurs (stabilités en boucle fermée) :

On propose la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}) = e^T P e + |b| \left( \tilde{K}_x \Gamma_x^{-1} \tilde{K}_x^T + \frac{\tilde{K}_r^2}{\gamma_r} + \tilde{\Theta}^T \Gamma_{\Theta}^{-1} \tilde{\Theta} \right) > 0 \quad (4.27)$$

Où  $\Gamma_x = \Gamma_x^T > 0 \in R^2 \times R^2$  et  $K_x(t)$  et  $P = P^T > 0 \in R^2 \times R^2$ .

Le calcul de la dérivée de  $V$  donne :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta}) &= \frac{dV}{de} \frac{de}{dt} + \frac{dV}{d\tilde{K}_x} \frac{d\tilde{K}_x}{dt} + \frac{dV}{d\tilde{K}_r} \frac{d\tilde{K}_r}{dt} + \frac{dV}{d\tilde{\Theta}} \frac{d\tilde{\Theta}}{dt} \\
&= (2P e)^T \dot{e} + |b| \left( (2\Gamma_x^{-1} \tilde{K}_x^T)^T \dot{\tilde{K}}_x + \frac{2\tilde{K}_r}{\gamma_r} \dot{\tilde{K}}_r + (2\Gamma_{\Theta}^{-1} \tilde{\Theta})^T \dot{\tilde{\Theta}} \right) \quad (4.28) \\
&= 2e^T P \dot{e} + \left( 2\tilde{K}_x \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x + \frac{2\tilde{K}_r}{\gamma_r} \dot{\tilde{K}}_r + 2\tilde{\Theta}^T \Gamma_{\Theta}^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \right)
\end{aligned}$$

On remplace  $\dot{e}(t)$  par son expression (4.25), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta}) &= 2e^T P A_m e + 2e^T P B \left( -\tilde{K}_x x(t) - \tilde{K}_r r + \tilde{\Theta}^T \phi(x) \right) \\
&\quad + |b| \left( 2\tilde{K}_x \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x^T + \frac{2\tilde{K}_r}{\gamma_r} \dot{\tilde{K}}_r + 2\tilde{\Theta}^T \Gamma_{\Theta}^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \right) \quad (4.29)
\end{aligned}$$

On a :

$$2e^T P A_m e = e^T (P A_m + A_m^T P) e \quad (4.30)$$

Et comme le modèle de référence est strictement réel positive, alors d'après le lemme de Kalman-Yakupovitch-Popov il existe une matrice  $Q = Q^T > 0$  qui vérifie :

$$P A_m + A_m^T P = -Q \quad (4.31)$$

On a aussi l'égalité suivante qui est vérifié :

$$2e^T P B = 2e^T \bar{P} b \quad (4.32)$$

avec

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Donc l'expression de  $\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta})$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta}) &= -e^T Q e + 2|b| \tilde{K}_x \left( -x(t) e^T \bar{P} \operatorname{sgn}(b) + \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x^T \right) \\
&\quad + 2|b| \tilde{K}_r \left( -r e^T \bar{P} \operatorname{sgn}(b) + \frac{\dot{\tilde{K}}_r}{\gamma_r} \right) \\
&\quad + 2|b| \tilde{\Theta}^T \left( \phi(x) e^T \bar{P} \operatorname{sgn}(b) + \Gamma_{\Theta}^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \right) \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Pour avoir  $\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{K}_r, \tilde{\Theta}) \leq 0$ , on doit imposer :

$$\begin{aligned} \left( -x(t) e^T \bar{P} \operatorname{sgn}(b) + \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x^T \right) &= 0 \\ \left( -r(t) e^T \bar{P} \operatorname{sgn}(b) + \frac{\dot{\tilde{K}}_r}{\gamma_r} \right) &= 0 \\ \left( \phi(x) \bar{P} \operatorname{sgn}(b) + \Gamma_{\Theta}^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

d'où les lois d'adaptations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{K}}_x^T(t) &= \Gamma_x x e^T \bar{P} \operatorname{sgn}(b) \\ \dot{\tilde{K}}_r(t) &= \gamma_r r e^T \bar{P} \operatorname{sgn}(b) \\ \dot{\tilde{\Theta}}(t) &= -\Gamma_{\Theta} \phi(x) e^T \bar{P} \operatorname{sgn}(b) \end{aligned} \quad (4.36)$$

## 5. Analyse de la convergence

On a

$$\dot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t)) = -e^T(t) Q e(t) = \lambda_{\min}(Q) \|e(t)\|^2 \leq 0$$

Puisque  $\dot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t)) \leq 0$ , alors  $e(t)$ ,  $\tilde{K}_x(t)$ ,  $\tilde{K}_r(t)$  et  $\tilde{\Theta}(t)$  sont bornées.

Pour montrer que  $\dot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t))$  est continue dans le temps, on doit examiner que sa dérivé est bornée.

$$\begin{aligned} \ddot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t)) &= -e^T(t) (Q A + A^T Q) e(t) \\ &\quad - 2 e^T(t) Q \left[ A_m e(t) - B \tilde{K}_x x - B \tilde{K}_r r + B \tilde{\Theta}^T \phi(x) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Comme  $e(t)$ ,  $\tilde{K}_x(t)$ ,  $\tilde{K}_r(t)$ ,  $\tilde{\Theta}(t)$  sont bornées (car  $\dot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t)) \leq 0$ ), et  $x(t)$  est bornée car  $e(t)$  et  $x_m(t)$  sont bornées.

et  $r(t)$  est la consigne de commande bornée.

et  $\phi(x)$  est bornée car  $x(t)$  est bornée.

Alors  $\ddot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t))$  est bornée.

Ce qui implique que  $\dot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t))$  est continue.

On a aussi :

$$\dot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t)) = -\lambda_{\min}(Q) \|e(t)\|^2 \quad (4.38)$$

alors

$$\int_0^{\infty} \dot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t)) dt = -\lambda_{\min}(Q) \int_0^{\infty} \|e(t)\|^2 dt \quad (4.39)$$

$$-\int_0^{\infty} \|e(t)\|^2 dt = \frac{1}{\lambda_{\min}(Q)} \int_0^{\infty} \dot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t)) dt \quad (4.40)$$

$$\int_0^{\infty} \|e(t)\|^2 dt = \frac{V(e(\infty), \tilde{K}_x(\infty), \tilde{K}_r(\infty), \tilde{\Theta}(\infty)) - V(e(0), \tilde{K}_x(0), \tilde{K}_r(0), \tilde{\Theta}(0))}{-\lambda_{\min}(Q)} \quad (4.41)$$

Cette intégral existe car  $V(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t))$  est continue.

Alors, d'après le lemme de Barbalat  $\dot{V}(e(t), \tilde{K}_x(t), \tilde{K}_r(t), \tilde{\Theta}(t)) \rightarrow 0$  et  $e(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

## 4.6 Simulation et interprétation des résultats

Pour la simulation, on considère les données suivantes :

$$A = A_m = \begin{bmatrix} 0,0343 & -0,05 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad B = B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\Theta^{*T} = \begin{bmatrix} 0,01 & -0,04 \end{bmatrix}, \quad a_r = 0,2; \quad b_r = 0,5 \quad (4.43)$$

Pour les conditions initiales, on prend des conditions nulles pour les gains des adaptations paramétriques.

et

$$\begin{bmatrix} G(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,7 \\ 18,8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} G_m(0) \\ I_m(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,7 \\ 19,1662 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Les résultats de la simulation sont données par les Figures 4.1\_4.5.

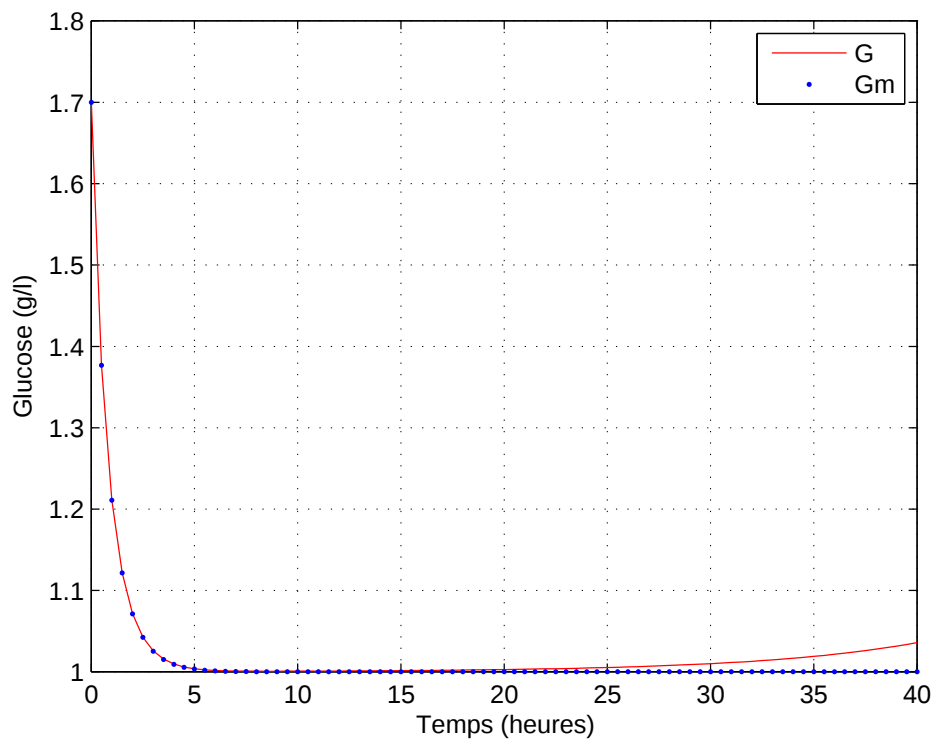


FIGURE 4.1 – Évolution de glucose dans le sang.

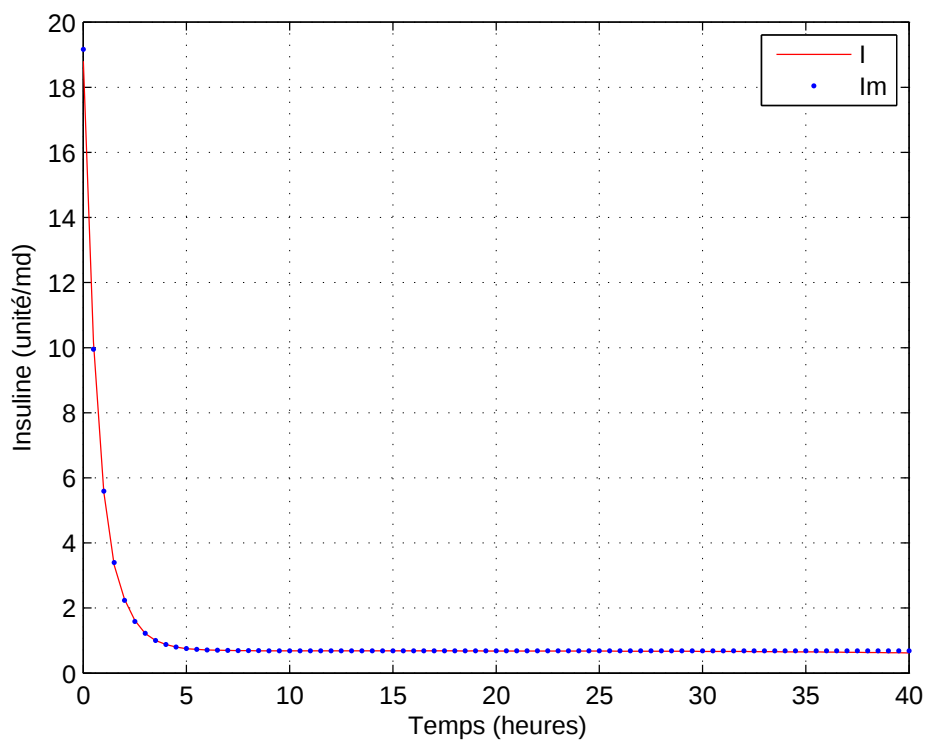
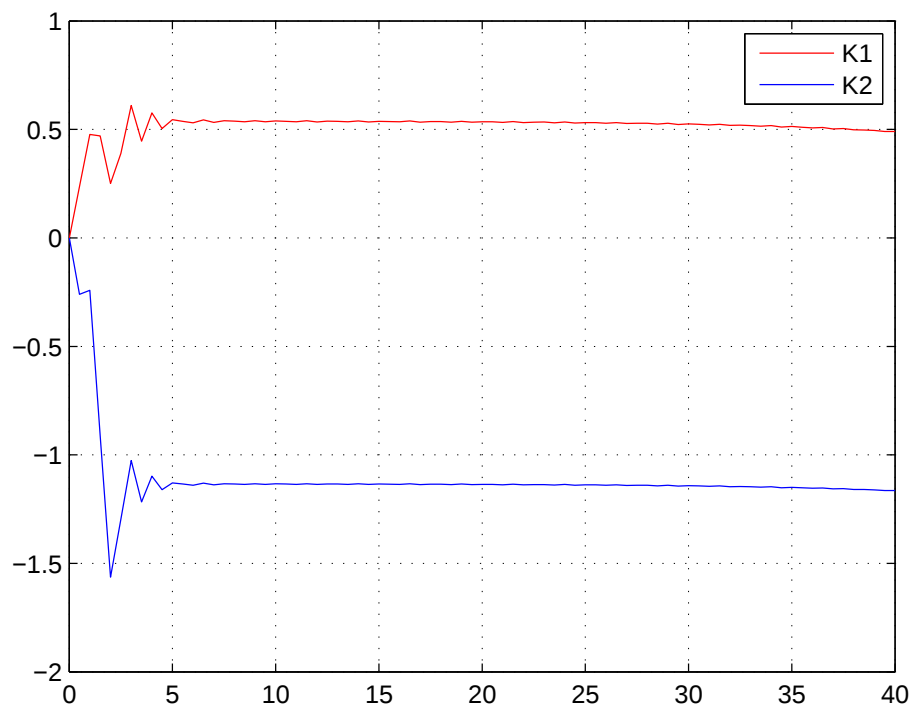
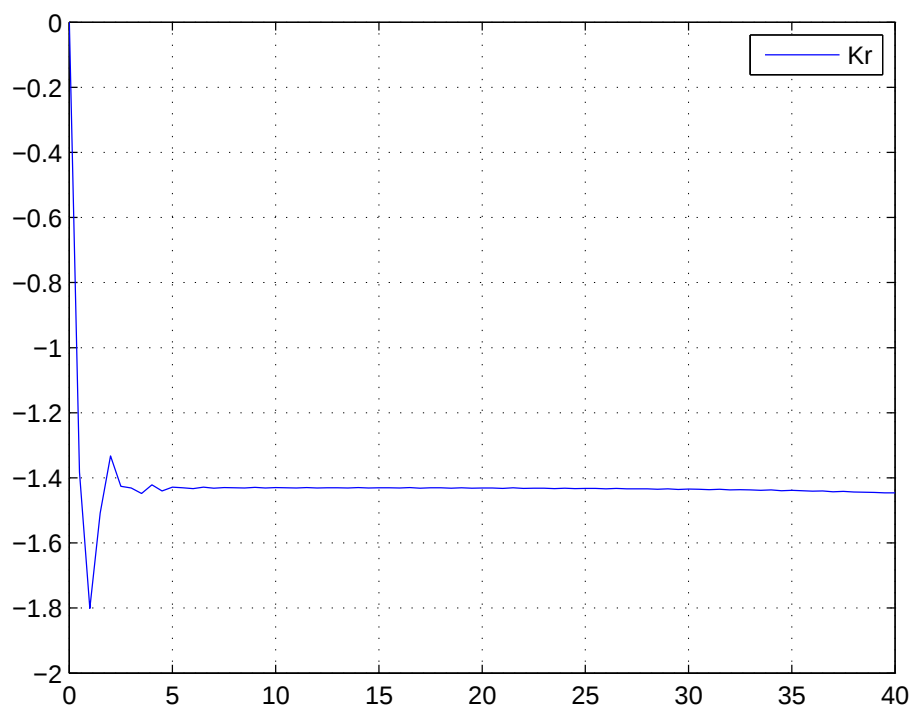
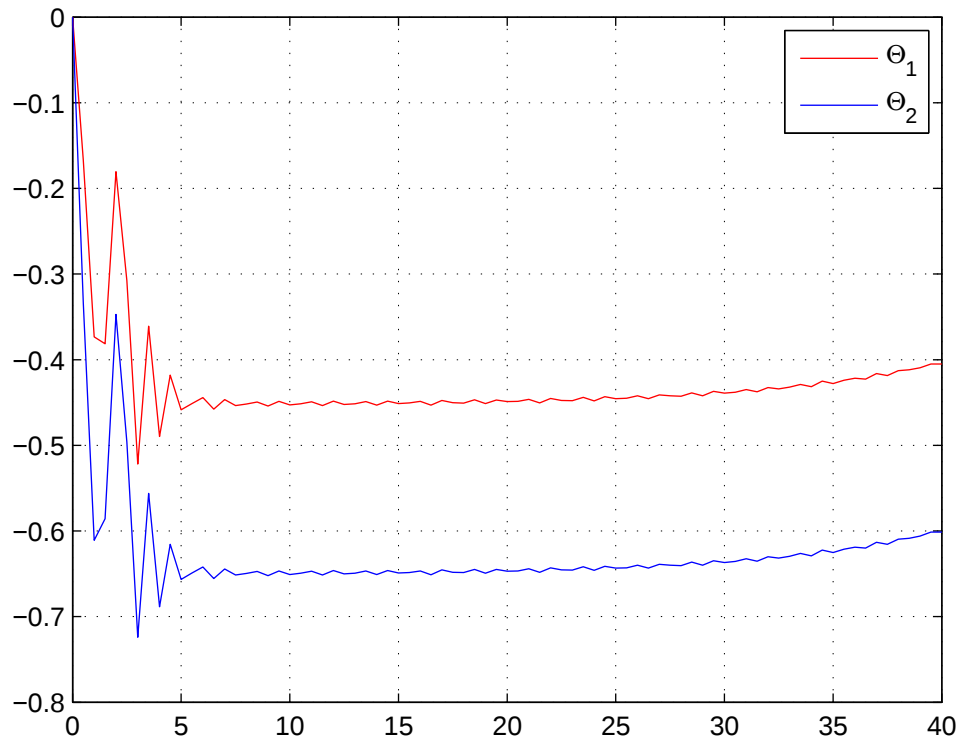


FIGURE 4.2 – Évolution de l'insuline dans le sang.

FIGURE 4.3 – Les loi adaptations des paramètres du gain de retour  $Kx$ .FIGURE 4.4 – Les adaptations du paramètre  $Kr$ .

FIGURE 4.5 – Les adaptations des paramètres  $\Theta$ .

### Interprétation des résultats

On remarque que le taux de glucose suit la trajectoire du taux de glucose désiré (celle de modèle de référence) mais cela n'est pas durable pour long temps, car l'injection de l'insuline dans le corps humain ne peut pas se faire en temps continue (l'injection de l'insuline se fait périodiquement). On remarque que le taux de glucose s'écarte de sa trajectoire désirée (le taux de glucose augment) malgré que le concentration d'insuline dans le sang reste constante. Ceci est justifié par le fait que le système l'insuline-glucose est un couple ago-antagoniste.

Les gains d'adaptation  $K_x(t)$ ,  $K_r(t)$  et les paramètres d'adaptation  $\Theta(t)$  converge plus lentement. Certain paramètres comme  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  ne convergent pas vers leurs vraies valeurs, c'est l'une des propriétés de commande adaptative à modèle de référence qui n'assure pas toujours la convergence des paramètres vers leurs vraies valeurs car réellement l'estimation se fait pas pour les paramètres  $\Theta(t)$  mais pour  $\tilde{\Theta}(t)$ , et comme  $\tilde{\Theta}(t) = \Theta(t) - \Theta^*$  alors on peut pas estimer les vraies valeurs de  $\Theta$  car la valeur de  $\Theta^*$  est inconnue.

## **4.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons appliqués la commande adaptative à modèle de référence pour le système insuline-glucose. L'objectif est d'assurer un taux de glucose dans le sang spécifié par un modèle de référence. La synthèse est affectée en utilisant l'approche de la fonction de Lyapunov. Les résultats obtenus montre que la CAMR permet d'assurer le taux désirés pour le glucose dans le sang pour une certaine période.

# Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande adaptative des systèmes dont les paramètres sont inconnus ou variables dans le temps (paramètres incertains).

L'objectif consiste à développer une loi de commande adaptative directe à modèle de référence en se basant sur l'approche de Lyapunov pour réaliser la régulation du taux du glucose dans le sang.

Dans la première partie, nous avons commencé par des généralités sur les systèmes asservis, les modèles mathématiques et la commande adaptative.

Dans la deuxième partie, nous avons abordé la commande adaptative directe à modèle de référence ainsi que les deux algorithmes utilisés pour la synthèse de CAMR (règle de MIT et méthode de Lyapunov).

Ensuite, on a donné des généralités sur le diabète et la modélisation du système insuline-glucose par l'analyse compartimentale. Puis, nous avons modélisé et simulé le couple insuline-glucose en boucle ouverte.

Dans la dernière partie, nous avons appliqué la commande adaptative à modèle de référence pour réadapter une loi de commande en boucle fermée afin d'assurer une valeur finale normale pour le taux de glucose (égale à 1).

Les résultats obtenus montrent que :

- L'analyse compartimentale est une technique très utilisée dans le domaine biologique pour étudier l'évolution, au cours de temps, des substances biochimiques (hormones, médicaments...) et de leurs métabolites.
- La commande adaptative à modèle de référence est basée essentiellement sur l'emploi de modèle de référence afin d'assurer les performances désirées.
- Le choix de commande et le calcul de la référence est une étape très importante.
- L'analyse de la convergence à base de la fonction de Lyapunov et le lemme de Barbalat permet de déterminer facilement les lois d'adaptations.

La commande adaptative à modèle de référence présente des avantages remarquables et garantit de bonne performance, alors il est intéressant de l'appliquer pour d'autre système biologique.

# Bibliographie

- [1] Jean-Marie Flaus. La régulation Industrielle. Hermes, Paris, 1994.
- [2] A. El Jai. Éléments D'analyse et de Contrôle des Systèmes. Presses Universitaires de Perpignan, Perpignan, 2008.
- [3] D. Arzelier LAAS-CNRS. Représentation et Analyse des Systèmes Linéaire, France, 2010.
- [4] Raymond Hanus. Automatique Avancée 1. Hermes, Paris, 2007.
- [5] Ahmed. Maidi. Cours Commande Avancée. UMMTO, Faculté de Génie Électrique et Informatique, 2018.
- [6] I.D Landau et L Dugard. Commande Adaptative Aspects Pratiques et Théoriques. Masson, New York, 1986.
- [7] Pierre Borne, Geneviève Dauphin-Tanguy, Jean-Pierre Richarde, Frédéric Rotella, Irène Zambettakis. Commande et Optimisation des Processus. Technip, Paris, 1990..
- [8] Jean-Jacques. Convergence des Méthodes de Commande Adaptative en Présence de Perturbations Aléatoires. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Inria, 1981.
- [9] Ahmed Chemori. Introduction à La Commande Adaptative. Laboratoire D'informatique de Robotique Microélectronique de Montpellier, France, 2015-2016.
- [10] Samir Ladaci. Contribution à La Commande Adaptative D'ordre Fractionnaire. Université Mentouri Constantine. Département D'électronique, 2007.
- [11] Farid Bakouche. Lamia Baknoun. Calcul D'une Thérapie Optimale Pour Les Diabétiques Par Programmation Non Linéaire. Mémoire de Master Université Mouloud Mameri Tizi Ouzou, Département D'automatique, 2015.
- [12] Michail Lebedev, Margarita Samsonova, Sirazhdin Isayev. Comprend Mon Diabète, Bruxelles, 2014.
- [13] Hamou Maamar. La Modélisation et Simulation en Diabétologie. Mémoire de Master, Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem, Département Mathématique et Informatique, 2013.

- [14] M.Omar Touaami. Commande Impulsive des Systèmes Dynamiques : Application Au Réacteur Biologique. Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, Département D'automatique, 2015.

# Résumé

La commande adaptative est un ensemble de techniques utilisé pour l'ajustement automatique en ligne, et en temps réel des régulateurs mise en oeuvre dans la commande d'un processus, afin de réaliser ou maintenir un certain niveau des performances désirées lorsque les paramètres de ce processus sont incertains. l'objectif principale de notre travail est d'appliqué la commande adaptative directe a modèle de référence au modèle de système insuline-glucose obtenue par l'analyse compartimentale afin de concevoir les lois de commande qui permet de régler le taux de glucose à une valeur finale égale à 1 suivant une trajectoire désirée.

L'analyse de la convergence est faite à l'aide de la fonction de Lyapunov et le lemme de Barbalat.

**Mots clés :** adaptative, modèle de référence,Mit, Lyapunov, diabète, insuline-glucose, analyse compartimental.