

*République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique*

*Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques*

*Mémoire de Master de Mathématiques
Appliquées
Option : Processus aléatoires et
Statistique de la Décision*

*Séries de variables aléatoires dans un
espace de Banach*

*sous la Direction de
Mr BOUDIBA MOHAND AREZKI*

*présenté le 08/10/2012 par,
BELKACEMI AHMED*

devant le Jury :

<i>M. Hocine FELLAG</i>	<i>: Professeur</i>	<i>UMMTO Président</i>
<i>M. Mohand Arezki BOUDIBA</i>	<i>: Maître de Conférence</i>	<i>UMMTO Rapporteur</i>
<i>M. Mohamed MAMOU</i>	<i>: Chargé de Recherche</i>	<i>UMMTO Examineur</i>
<i>Mme. Dehbia HARMIM</i>	<i>: Chargée de Recherche</i>	<i>UMMTO Examinatrice.</i>

Remerciements

J'adresse mes remerciements à Monsieur HOCINE FELLAG, Professeur à L'U.M.M.T.O, pour l'intérêt qu'il accorde à ce travail et l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.

Je remercie également Monsieur MOHAMED MAMOU, Chargé de Recherches à L'U.M.M.T.O, pour l'intérêt qu'il accorde à ce travail et l'honneur qu'il me fait de participer à ce jury.

Je tiens à remercier Madame HARMIM DEHBIA, Maître de Conférence à L'U.M.M.T.O, pour l'intérêt qu'elle accorde à ce travail et l'amabilité qu'elle a de faire partie de jury.

Mes remerciements vont ensuite à Monsieur MOHAND AREZKI BOUDIBA, Maître de Conférence à L'U.M.M.T.O, pour m'avoir confié ce travail. Je lui exprime toute ma reconnaissance pour sa disponibilité, ses remarques judicieuses et ses relectures attentives dont il sait me faire profiter, pour ses conseils et ses encouragements, pour sa confiance en moi et sa générosité.

Enfin j'adresse mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	5
1 Séries dans les espaces de Banach	7
1.1 Normes sur un espace vectoriel	7
1.2 Continuité de la norme	10
1.3 Espaces complets	12
1.4 Séries normalement convergentes	14
2 Convergence inconditionnelle de séries dans un espace de Banach	17
2.1 Base de Schauder	17
2.2 Convergence inconditionnelle	19
2.3 Bases inconditionnelles	23
3 Séries de variables aléatoires	27
3.1 Convergence de suites de var à valeurs dans un espace de Banach	27
3.1.1 Modes de convergences	27
3.1.2 Principe de symétrie de Paul-Lévy et applications . . .	37
3.1.3 Principe de contraction	41
3.1.4 Variables aléatoires symétriques dans un espace de Banach	43
3.2 Type et cotype d'un espace de Banach	43
3.2.1 Vecteur gaussiens	46
3.2.2 Variable p-stables :	52
3.2.3 Type et cotype d'un espace de Banach	56
3.2.4 Type stable d'un espace de Banach	57
3.2.5 Complements.	58

3.2.6 Exemple.	59
Conclusion	63
Bibliographie	63

Introduction

L'étude des séries de variables aléatoires dans un espace de Banach est une thématique relativement ancienne. De nombreux auteurs s'y sont intéressés : Itô, Khintchine, Paul Lévy, Kahane,... . C'est une thématique aux confins du Calcul de Probabilités et de l'Analyse fonctionnelle. Le point de vue naïf (qui était le notre au départ) est de penser que les techniques de Martingales pouvaient s'appliquer et permettre une étude de la convergence de ce type de série. En fait cela n'est pas évident du tout. Nous nous en sommes rendu compte, au fur et à mesure de l'élaboration de ce mémoire. Cette problématique revient dans l'actualité mathématique à la faveur de travaux récents qui lui sont consacrés. Ce sont par exemple les travaux de Queffélec, Pizier et autres, où les notions de type et de cotype prennent une place centrale.

L'objet de ce mémoire est de tenter de comprendre et de synthétiser ces notions et les techniques y afférentes. Le mémoire se compose de trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnons une synthèse de base sur les espaces de Banach. Dans le deuxième chapitre nous étudions les propriétés de convergence inconditionnelle (i.e convergence commutative) des séries dans les espaces de Banach. Le chapitre trois introduit les notions fondamentales de type et cotype des espaces de Banach. Il est d'usage de les définir avec les variables de Rademacheur, mais il est souvent plus intéressant d'utiliser des variables gaussiennes ou des variables stable. Nous terminons par une conclusion sur les perspectives qui en découlent.

Chapitre 1

Séries dans les espaces de Banach

1.1 Normes sur un espace vectoriel

Définition 1. Soit V un espace vectoriel réel ou complexe. On appelle norme sur V , toute application $\|\cdot\|$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et satisfaisant les axiomes suivantes :

- (0) $\forall v \in V, \quad 0 \leq \|v\| < \infty$, (positivité)
- (1) $\forall v \in V, \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$, (la séparation)
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V, \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, (homogénéité)
- (3) $\forall v, w \in V, \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (inégalité triangulaire)

Exemple.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, les applications $x \mapsto \|x\|_1$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ définies par :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur V .

En effet, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

(1)(i)

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| = 0 &\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

$$(ii) \quad \|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |x_k| = |\lambda| \|x\|_1.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) \\
&\leq \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.
\end{aligned}$$

(2) (i)

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0 &\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k| = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

$$(ii) \quad \|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda x_k| = |\lambda| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_\infty &= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| \\
&\leq \max_{1 \leq k \leq n} (|x_k| + |y_k|) \\
&\leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |y_k| \\
&= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Définition 2. Soit V un espace vectoriel réel ou complexe muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $(x_n)_n$ une suite de points dans V et $x \in V$ donné.

On dit que $(x_n)_n$ converge vers x si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$.

Définition 3. Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur V .

On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes a et b strictement positives telles que :

$$\forall v \in V, a\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq b\|v\|_2.$$

Théorème 1. les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Démonstration. Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a alors : quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, si l'on suppose que $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| = |x_{i_0}|$ on a :

$$|x_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n|x_{i_0}|.$$

On a majoré chaque terme de la somme par leur max. On en déduit que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. De la même façon, on a :

$$|x_{i_0}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{n|x_{i_0}|^2} = \sqrt{n}|x_{i_0}|.$$

Les trois normes ci-dessus sont bien équivalentes c-à-d :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

□

Proposition 1. Il existe des normes dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ qui ne sont pas équivalentes.

Démonstration. Soit $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. On considère les normes classiques : $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies pour $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

Considérons la suite (f_n) de $\mathcal{C}([0, 1])$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^2x + n & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

On a : $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = n$ et $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{2}$

D'où : $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n \rightarrow \infty$, quand $n \rightarrow \infty$

Donc il n'existe pas de réel c tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq c \|f_n\|_1$
Donc les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

□

1.2 Continuité de la norme

Définition 4. $(V, \|\cdot\|)$ et $(V', \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés.

Soit X une partie de V , $a \in X$ et $f : X \rightarrow V'$. On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur X si et seulement si f est continue en tout point de X .

Définition 5. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles sur E . On dit que f est uniformément continue sur E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \text{ tel que } \forall x, x' \in E, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Exemples.

La fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$, n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

En effet : Posons $\varepsilon = 1$. Alors on trouve des paires de points arbitrairement proches, comme n et $n + \frac{1}{n}$, tels que :

$$(n + \frac{1}{n})^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Définition 6. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles sur E . On dit que f est Lipschitzienne, de constante de k , si

$$\forall x, x_0 \in E, \|f(x) - f(x_0)\| \leq k \|x_0 - x\|.$$

Remarque 1. Une application Lipschitzienne est continue.

En effet : Si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut trouver, en utilisant les notations de la définition de la continuité, $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$, tel que l'inégalité traduisant la continuité de f .

Proposition 2. Si V est de dimension finie, alors toute norme $\|\cdot\|$ est une application continue de $(V, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Démonstration. Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans V on a :

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|e_i\| \|x\|_\infty$$

Posons $\beta = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$. ($\beta > 0$ car, les e_i étant non nuls, on a $\|e_i\| \neq 0$).
D'où :

$$\|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$$

On peut donc écrire :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } : \forall (x, y) \in V^2, \|x - y\| \leq \beta \|x - y\|_\infty$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire renversée :

$$||x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

(car, on a : $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ et

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad \textbf{(1)}$$

et d'autre part

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \quad \textbf{(2)}$$

De **(1)** et **(2)** on a : $||x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$)

On peut donc écrire :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } : \forall (x, y) \in V^2, ||x\| - \|y\|| \leq \beta \|x - y\|_\infty$$

Ce qui signifie que l'application $\|\cdot\| : (V, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est k -lipschitzienne donc continue. $\square$

1.3 Espaces complets

On note $\|\cdot\|$ la norme.

Définition 7. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans V . On dit que x_n est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Proposition 3. Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans V convergente vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $\|x_n - \ell\| < \varepsilon/2$. Alors, pour tout $p, q \geq N$,

$$\|x_p - x_q\| = \|x_p - \ell + \ell - x_q\| \leq \|x_p - \ell\| + \|\ell - x_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. $\square$

Définition 8. V est dit complet pour la norme $\|\cdot\|$ si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

Exemples.

1) $\mathbb{R}^n$, l'espace euclidien.

2) $\ell^p = \{x = (a_n)_{n \geq 1}, \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < \infty\}$, l'ensemble des suites réelles muni de la norme $\|x_n\| = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

3) $c_0 = \{x = (a_n)_{n \geq 1}, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0\}$, l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0 à l'infini muni de la norme $\|x_n\| = \sup |x_n|$.

4) $\mathcal{C}([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, l'ensembles des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$.

Proposition 4. L'espace des fonctions $\mathcal{C}([0, 1], \|\cdot\|_1)$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

Démonstration. On considère $V = C([0, 1], \|\cdot\|_1)$ normé par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, on considère la suite de fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \\ \frac{n(1-x)}{2} & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

a) Montrons d'abord que la suite (f_n) est de Cauchy.

On a :

$$f_{n+p}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{n+p-2}{2(n+p)}; \\ \frac{(n+p)(1-x)}{2} & \text{si } \frac{n+p-2}{2(n+p)} < x \leq \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Alors : $f_{n+p} - f_n$ est nulle sur $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, nulle sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et bornée par $\frac{2}{n}$ sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$ donc :

$$\|f_{n+p} - f_n\| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

Donc pour tout Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > N, \frac{2}{n} \leq \varepsilon$ alors :

$$\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \|f_{n+p} - f_n\| \leq \varepsilon$$

d'où (f_n) est une suite de Cauchy.

b) Par l'absurde, supposons que la suite (f_n) converge et notons f sa limite (qui est continue car : élément de V).

$$\int_{1/2}^1 |f - f_n| \leq \int_0^1 |f - f_n| \rightarrow 0$$

donc : $\int_{1/2}^1 |f(x)| dx = 0$.

Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive on a :

$$\forall x \in [\frac{1}{2}, 1], f(x) = 0$$

Pour $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$: $\int_0^\alpha |f - f_n| \leq \int_0^1 |f - f_n| \rightarrow 0$ donc : $\int_0^\alpha |f - f_n| \rightarrow 0$, Or pour n assez grand, on a : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq \alpha$ et

$$\int_0^\alpha |f - f_n| = \int_0^\alpha |f - 1|$$

donc à la limite $\int_0^\alpha |f - 1| = 0$

Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive on a :

$$\forall x \in [0, \alpha], \quad f(x) = 1$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue, c'est absurde.

Dans l'espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$, il existe une suite de Cauchy non convergente, donc l'espace n'est pas complet.

□

1.4 Séries normalement convergentes

Définition 9. Soit (x_n) une suite de V . On dit que la série $\sum_{n \geq 0} x_n$ est normalement convergente si la série de nombres réels positifs $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ est convergente.

Théorème 2. Soit V un espace de Banach. Si la série d'éléments de V , $\sum x_n$ est normalement convergente, alors elle est convergente dans V .

Démonstration. Considérons une série $\sum x_n$ normalement convergente. La suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est une suite de Cauchy.

En effet, pour $p \leq q$,

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{i=p+1}^q x_i \right\| \leq \sum_{i=p+1}^q \|x_i\| \leq \sum_{p+1}^{\infty} \|x_i\|.$$

Mais comme la série $\sum \|x_n\|$ converge, alors :

$$\sum_{p+1}^{\infty} \|x_i\| \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty, \text{ car c'est son reste d'ordre } p.$$

Ainsi la suite (S_n) est de Cauchy dans V complet donc convergente.
Et par suite la série $\sum x_n$ est convergente dans l'espace de Banach V . $\square$

Chapitre 2

Convergence inconditionnelle de séries dans un espace de Banach

2.1 Base de Schauder

Définition 1. Une suite de vecteurs $(e_n)_{n \geq 1}$ d'un espace de Banach $(V, \|\cdot\|)$ est une base (de Schauder) de V , si et seulement si :

$\forall x \in V$, il existe une suite de nombres, réels ou complexes $(a_n)_{n \geq 1} = (a_n(x))_{n \geq 1}$, unique, telle que :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) e_n.$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| x - \sum_{n=0}^N a_n(x) e_n \right\| = 0$$

On dit que la base est normalisée si $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \geq 1$.

On peut toujours normaliser une base en remplaçant $(e_n)_{n \geq 1}$ par $(e_n/\|e_n\|)_{n \geq 1}$.

Propriété. Si $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base de V , et si $\lambda_n, n \geq 1$ sont des scalaires non nuls, alors $(\lambda_n e_n)_{n \geq 1}$ est aussi une base de V .

car : $\exists x_n$ tel que : $\|x - \sum_{n=1}^N x_n e_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow \exists x'_n$ tel que :

$$\|x - \sum_{n=1}^N x'_n \lambda_n e_n\| \rightarrow 0 \quad \text{où} \quad x'_n = \frac{x_n}{\lambda_n},$$

alors :

$$\|x - \sum_{n=1}^N x'_n \lambda_n e_n\| = \|x - \sum_{n=1}^N x_n e_n\|$$

Exemple. Pour $1 \leq p < +\infty$, on note :

$$\ell_p = \{x = (a_n)_{n \geq 1}, \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty\} \quad \text{et} \quad c_0 = \{x = (a_n)_{n \geq 1}, \lim_{n \geq 1} a_n = 0\}$$

On définit une norme sur ℓ_p (resp. c_0) en posant :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \quad (\text{resp. } \|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |a_n|)$$

qui est un espace de Banach. Notons

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \dots) \\ e_2 = (0, 1, 0, \dots) \\ e_3 = (0, 0, 1, \dots) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

La suite $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base de ℓ_p (resp. c_0). Pour $\forall x = (a_n)_{n \geq 1} \in \ell_p$ (resp. c_0) on a $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$, vérifie

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N a_n e_n \right\|_p = \|(0, 0, \dots, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots)\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

car : $\sum_n |a_n|^p$ converge vers x par hypothèse puisque $(a_n) \in \ell_p$

donc si : R_N est le reste d'ordre N de cette série et $S = \sum_0^\infty a_n$ alors :

$$R_N = S - S_p = \sum_0^\infty a_n - \sum_0^n a_p = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \longrightarrow 0.$$

car : $S_n \rightarrow S$ si $\sum a_n$ converge

d'où $(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p)^{1/p} \rightarrow 0$ donc on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|x - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n\| = 0$
et aussi :

$$\|x - \sum_{n=1}^N a_n e_n\|_\infty = \sup_{n > N} |a_n| \leq \sup_{n \geq 1} |a_n| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Théorème 1. (*Banach*) Une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ d'éléments non nuls de l'espace de Banach V est une base si et seulement si :

- (1) $V = \overline{\text{vect}\{e_n, n \geq 1\}}$,
- (2) Il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|$$

pour tous $n \geq m$, et tous scalaires $a_1, \dots, a_n$.

Démonstration. Voir Danial Li et Hervé Queffélec (cf. [5]) $\square$

2.2 Convergence inconditionnelle

Définition 2. On dit qu'une série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est inconditionnellement convergente (commutativement convergente) si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum x_{\sigma(n)}$ converge et à même somme que la série $\sum x_n$.

Remarque 1. Si dans l'espace de Banach V , une série $\sum_n x_n$ converge commutativement, on a : $\forall x^* \in V^*$, $\sum_n x_{\sigma(n)}$ converge donc :

$$\langle x^*, \sum x_{\sigma(n)} \rangle = \sum x^*(x_{\sigma(n)})$$

$$\text{mais : } \sum x^*(x_{\sigma(n)}) = \sum x^*(x_n) = \langle x^*, \sum_n x_n \rangle$$

(car : la somme de la série dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est commutativement convergente ne change pas lorsqu'on change l'ordre des termes.)

donc si $\sum x_n$ est commutativement convergente, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ pour toute permutation } \sigma \text{ de } \mathbb{N}.$$

Théorème 2. Si une série $\sum x_n$ est normalement convergente dans un espace de Banach V , alors elle est commutativement convergente.

Démonstration. Supposons que $\sum \|x_n\|$ converge. pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^N \|x_{\sigma(n)}\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$$

On déduit que : $\sum_{n=0}^N \|x_{\sigma(n)}\|$ converge et donc la série $\sum_{n=0}^N x_{\sigma(n)}$ converge. Montrons de plus, que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_{\sigma(n)}\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$$

Soit $\varepsilon > 0$, et un entier n_0 tel que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < \varepsilon$.

Posons $n_1 = \max_{k \in \{0, \dots, n_0\}} \sigma^{-1}(k)$. On a alors $\sigma(n) > n_0$ pour $n > n_0$,

$$\left\| \sum_{n=0}^N x_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^N x_n \right\| \leq 2 \sum_{n=n_0}^{+\infty} \|x_n\| \leq 2\varepsilon$$

En faisons tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\left\| \sum_{n=0}^N x_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^N x_n \right\| \leq 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

d'où l'égalité des sommes. $\square$

Définition 3. La série $\sum_{n \geq 1} x_n$ est sommable s'il existe $x \in V$ tel que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geq 1$ tel que, pour toute partie finie $\sigma \supseteq [1, N]$ alors :

$$\left\| x - \sum_{n \in \sigma} x_n \right\| \leq \varepsilon$$

et qu'il suffit pour celà qu'elle vérifie le critère de Cauchy de sommabilité i.e : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$, tel que pour toute partie finie $\sigma \subseteq [N, +\infty[$ alors :

$$\left\| \sum_{n \in \sigma} x_n \right\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1. (Orlicz)[5]

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite dans un espace de Banach V . Les propriétés sont équivalentes :

(1) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge inconditionnellement.

(2) La série $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{n_k}$ converge pour tout choix de $n_1 < n_2 < \dots$ (converge par sous-série).

(3) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$ converge. Pour tout choix de (θ_n) avec $\theta_n = \pm 1$.

(4) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est sommable.

Démonstration. Montrons que : 1) $\iff$ 4) , 4) $\iff$ 2) , 2) $\iff$ 3)

2) $\Rightarrow$ 3). Soit $(\theta_n)_{n \geq 1}$ une suite de signe, on écrit

$$\{\theta_n = 1\} = \{n_1 < n_2 < \dots\} \quad \text{et} \quad \{\theta_n = -1\} = \{n'_1 < n'_2 < \dots\}$$

on a par hyépothèse que $\sum_{k \geq 1} x_{n_k}$ et $\sum_{k \geq 1} x_{n'_k}$ convergent, donc

$$\sum_{n \geq 1} \theta_n x_n = \sum_{n \geq 1} x_{n_k} - \sum_{n \geq 1} x_{n'_k} \text{ converge aussi.}$$

3) $\Rightarrow$ 2). Soit $n_1 < n_2 < \dots$, on pose

$$\begin{cases} \theta_j = 1 & \text{si } j \in \{n_k\}_k; \\ \theta_j = -1 & \text{si sinon.} \end{cases}$$

alors la série

$$\sum_{j \geq 1} x_{k_j} = \frac{1}{2} \left[\sum_{j \geq 1} x_j + \sum_{j \geq 1} \theta_j x_j \right]$$

converge.

4) $\Rightarrow$ 2). Soit $(n_k)_k$ une suite croissante tel que : $n_1 < n_2 < \dots$ et soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse, $\exists N \geq 1$ tel que : $\forall \sigma$ (partie finie) $\subseteq [N, +\infty[$

on a : $\|\sum_{n \in \sigma} x_n\| \leq \varepsilon$. Si on choisit que $J \geq 1$ tel que $n_J \geq N$ alors pour $j \geq J$ en prenant $\sigma = \{n_J, \dots, n_j\}$, on a :

$$\left\| \sum_{k=J}^j x_{n_k} \right\| \leq \varepsilon.$$

2) $\Rightarrow$ 4). Supposons que la série n'est pas sommable, alors il existe un $\varepsilon > 0$ et σ_n (parties finies) $\subseteq \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \geq 1$,

$$\left\| \sum_{k \in \sigma_n} x_k \right\| \geq \varepsilon$$

avec $q_n = \max \sigma_n < \min \sigma_{n+1} = p_{n+1}$, alors si on pose : $\sigma = \bigcup_{n \geq 1} \sigma_n = \{n_1 < n_2 < \dots\}$, la série $\sum_{j=1}^{+\infty} x_{n_j}$ ne converge pas.

4) $\Rightarrow$ 1). Soient I un ensemble dénombrable, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$.

Supposons que $(x_i)_{i \in I}$ soit sommable, et soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection. Pour tout n de $\mathbb{N}$, comme $\{\sigma(k), 0 \leq k \leq n\}$ est une partie finie de I , on a :

$$\sum_{k=0}^n x_{\sigma(k)} \leq \sum_{i \in I} x_i$$

et donc $\sum_{n \geq 0} x_{\sigma(k)}$ converge, et : $\sum_{k=0}^{+\infty} x_{\sigma(k)} \leq \sum_{i \in I} x_i$

1) $\Rightarrow$ 4). Supposons s'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ telle que la série $\sum_{n \geq 0} x_{\sigma(n)}$ converge. Soit J une partie finie de I . Alors : $\sigma^{-1}(J)$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, et il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\sigma^{-1}(J) \subset \{0, 1, \dots, N\}$, d'où :

$$\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{n=0}^N x_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$$

Il en résulte que $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et que : $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$ $\square$

Remarque 2. Il existe des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ inconditionnellement convergentes mais pas normalement convergentes.

Exemples.

Dans $V = c_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = e_1 = (1, 0, 0, \dots) \\ x_2 = \frac{e_2}{2} = (0, \frac{1}{2}, 0, \dots) \\ x_3 = \frac{e_3}{3} = (0, 0, \frac{1}{3}, \dots) \\ \vdots \\ x_n = \frac{e_n}{n} = (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n \text{ fois}}, \frac{1}{n}, 0, \dots). \end{array} \right.$$

alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ converge inconditionnellement (on peut, par exemple, utiliser les critères 2) ou 3) de la Proposition.1).

Mais $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ qui ne converge pas. Car ne vérifie pas le critère de Cauchy pour la convergence d'une série numérique.

2.3 Bases inconditionnelles

Définition 4. On dit qu'une base $(e_n)_{n \geq 1}$ est inconditionnelle si pour tout $x \in V$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x)e_n$ converge inconditionnellement.

Exemples.

Les bases canoniques de $c_0 = \{x = (a_n)_{n \geq 1}, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0\}$ et $\ell_p = \{x = (a_n)_{n \geq 1}, \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < \infty\}$ pour $1 \leq p < +\infty$, sont inconditionnelles, car si on note :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \dots) \\ e_2 = (0, 1, 0, \dots) \\ e_3 = (0, 0, 1, \dots) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

La suite $(e_n)_n$ est une base de ℓ_p , tout $x = (a_n)_n$ s'écrit $x = \sum_{n \geq 1} a_n e_n$ on a pour tout $x \in V$, la suite $\sum_n e_n^*(x)e_n$ converge inconditionnelle.

Lemme 1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes dans $\mathbb{L}^p(\Omega, P)$, avec $E(Y) = 0$, alors :

$$\|X + Y\|_p \geq \|X\|_p$$

Démonstration. Soit P_X et P_Y les lois de X et Y

$$\begin{aligned}
\|X + Y\|_p^p &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} |x + y|^p dP_X(x) dP_Y(y) \\
&\geq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |x + y|^p dP_Y(y) \right) dP_X(x) \\
&\geq \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} (x + y) dP_Y(y) \right|^p dP_X(x) \\
&= \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} x dP_Y(y) + \int_{\mathbb{R}} y dP_Y(y) \right|^p dP_X(x) \\
&= \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} x dP_Y(y) + E(y) \right|^p dP_X(x) \\
&= \int_{\Omega} |x|^p dP_X(x) \quad \text{car } E(y) = 0 \\
&= \|X\|_p^p.
\end{aligned}$$

□

Définition 5. On dit qu'une suite $(e_k)_{k \geq 1}$ dans un espace de Banach est une suite basique si c'est une base de l'espace vectoriel (fermé) $\overline{\text{vect}}\{e_n, n \geq 1\}$ qu'elle engendre.

Proposition 2. [5] Une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ dans V est une base inconditionnelle si et seulement si, on a la condition suivante :

Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout choix de signes $\theta = (\theta_k)_{k \geq 1} \in \{-1, 1\}$, on ait :

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k a_k e_k \right\| \leq K \|x\|$$

pour $x = \sum_{k=1}^n a_k e_k$.

Théorème 3. Toute suite $X_1, X_2, \dots$ de variable aléatoire indépendantes et centrées dans $\mathbb{L}^p$ est basique et inconditionnelle dans $\mathbb{L}^p$, de constante d'inconditionnalité est ≤ 2 .

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k a_k X_k \right\|_p \leq 2 \left\| \sum_{k=1}^n a_k X_k \right\|_p$$

pour tout scalaires a_n et tout choix de signes $\theta_k = \pm 1$.

De plus si les variables sont symétriques, la constante d'inconditionnalité est 1 c'est-à-dire : $\|\sum_{k=1}^n \theta_k a_k X_k\|_p = \|\sum_{k=1}^n a_k X_k\|_p$

Démonstration. Posons des scalaires $a_1, \dots, a_n$ et des choix de signes $\theta_k = \pm 1$, $1 \leq k \leq n$ et donnons :

$$I = \{k \in \{1, \dots, n\}, \theta_k = 1\} \quad \text{et} \quad J = \{k \in \{1, \dots, n\}, \theta_k = -1\}$$

puis :

$$X = \sum_{k \in I} a_k X_k = \sum_{k \in I} \theta_k a_k X_k \quad \text{et} \quad Y = \sum_{k \in J} a_k X_k = - \sum_{k \in J} \theta_k a_k X_k$$

puisque X et Y sont centrées. Le lemme précédent donne

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k a_k X_k \right\|_p &= \|X - Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p \\ &\leq \|X + Y\|_p + \|Y + X\|_p \\ &= 2\|X + Y\|_p \\ &= 2 \left\| \sum_{k=1}^n a_k X_k \right\|_p . \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Séries de variables aléatoires

3.1 Convergence de suites de var à valeurs dans un espace de Banach

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, dont la tribu $\mathcal{A}$ sera toujours supposée complète, et soit V un espace de Banach.

Définition 1. On dit que V est séparable si : $\exists D = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ une partie dénombrable tel que : $\overline{D} = V$ i.e :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in V, \exists x_n \in D \text{ tel que : } \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

V est de plus souvent séparable et de dimension infinie.

3.1.1 Modes de convergences

1.Espace $\mathbb{L}^0(V)$: Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de V . Une variable aléatoire à valeurs dans V est une application $X : \Omega \rightarrow V$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (a) X est $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$ -mesurable, c'est-à-dire que $X^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$
- (b) il existe un sous-espace de Banach séparable V_0 de V tel que :

$$P(X \in V_0) = 1.$$

On désigne par $\mathbb{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, P, V)$ l'espace vectoriel des classes pour la relation d'équivalence d'égale p.s de variables aléatoires à valeurs dans V .

On note $\mathbb{L}^0(V)$ cet espace. Des éléments fondamentaux de cet espace sont les variables aléatoires étagées, celles qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs :

$$X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} x_i$$

avec $A_i \in \mathcal{A}$ et $x_i \in V$, on note aussi $X = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} \otimes x_i$

2. Convergence presque sûre dans $\mathbb{L}^0(V)$: On dit qu'une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{L}^0(V)$ converge presque sûrement (en abrégé : p.s) vers $X \in \mathbb{L}^0(V)$ si :

$$P\left(\{\omega \in \Omega, X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\}\right) = 1$$

et l'on notera : $X_n \xrightarrow{p.s} X$

Proposition 1.

Soit $X \in \mathbb{L}^0(V)$ une variable aléatoire, alors :

1) X est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subseteq V$ tel que :

$$P(X \in K) \geq 1 - \varepsilon.$$

2) X est limite presque sûre d'une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables étagées telles qu'on ait de plus :

$$\|X_n(\omega)\| \leq 2 \|X(\omega)\|$$

pour tout $n \geq 1$ et presque tout $\omega \in \Omega$.

Démonstration.

1) Supposons que V est séparable et P_X désigne la loi de X . Soit $D = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ une partie dénombrable dense de V avec $x_1 = 0$, et

3.1. CONVERGENCE DE SUITES DE VAR À VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH 29

soit q un entier ≥ 1 , et si :

$$B\left(x_n, \frac{1}{q}\right) = \left\{ \|x - x_n\| \leq \frac{1}{q} \right\}$$

alors :

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, 1/q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1}^n B(x_k, 1/q)$$

(i.e V est la réunion, des boules fermées pour $n = 1, 2, \dots$).

On peut donc trouver un entier $N_q \geq 1$ tel que : $P_X(A_q) \geq 2^{-q} \varepsilon$, où $A_q = \bigcup_{n=1}^{N_q} B(x_n, 1/q)$.

Soit alors : $K = \bigcap_{q=1}^{\infty} A_q$ un compact de V et d'autre part on a :

$$P_X(K^c) = P_X(\bigcup_{q=1}^{\infty} A_q^c) \leq \sum_{q=1}^{\infty} P_X(A_q^c) \leq \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-q} \varepsilon = \varepsilon$$

ce qui prouve 1).

2) Soit :

$$T_n(\omega) = \inf \left\{ k \leq n, \|X(\omega) - x_k\| = \min_{1 \leq \ell \leq n} \|X(\omega) - x_\ell\| \right\}.$$

Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, on a : $(\|X - x_i\| < \|X - x_j\|) \in \mathcal{A}$, car $X \in L^0(V)$, donc :

$T_n \in L^0(V)$ et $X_n = x_{T_n} = \sum_{k=1}^n 1_{(T_n=k)} x_k$ est une variable étagée.

Par définition $\|X(\omega) - X_n(\omega)\| = \text{dist}(X(\omega), \{x_1, \dots, x_n\})$, alors :

$$\|X(\omega) - X_n(\omega)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{dist}(X(\omega), D) = 0.$$

On a de plus : $\|X(\omega) - X_n(\omega)\| \leq \|X(\omega) - x_1\| = \|X(\omega)\|$, d'où

$$\|X_n(\omega)\| \leq 2\|X(\omega)\|.$$

□

3. Convergence en probabilité dans $\mathbb{L}^0(V)$: On dit qu'une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{L}^0(V)$ converge en probabilité vers $X \in \mathbb{L}^0(V)$ si pour tout $t > 0$,

$$P(\|X_n - X\| > t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On notera : $X_n \xrightarrow{P} X$

On dit par fois que (X_n) converge stochastiquement vers X .

Remarque 1. Pour $X, Y \in \mathbb{L}^0(V)$ soit

$$d_p(X, Y) = \mathbb{E} \left[\frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} \right]$$

Alors d_p est une métrique sur $\mathbb{L}^0(V)$, appelée distance de la convergence en probabilité. En effet :

(1) $d_p(X, Y) \in \mathbb{R}_+$ car :

$$0 \leq \frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} \leq 1, \quad \forall X, Y \in \mathbb{L}^0$$

et donc la v.a.r $\frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|}$ est bornée par 1 donc intégrable et

$$0 \leq \mathbb{E} \left[\frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} \right] \leq \infty$$

(2) $d_p(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ p.s .

$$\mathbb{E} \left[\frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} = 0, \quad \text{car : } \frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} \geq 0$$

(si $f \geq 0$ et intégrable par rapport à μ alors : $\int f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0, \mu$ p.s)

donc :

$$\frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} = 0 \Leftrightarrow \|X - Y\| = 0 \Leftrightarrow X = Y$$

(3) $d_p(X, Y) = d_p(Y, X)$ car :

3.1. CONVERGENCE DE SUITES DE VAR À VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH 31

$$d_p(X, Y) = \frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} = \frac{\|-(Y - X)\|}{1 + \|(Y - X)\|} = \frac{\|Y - X\|}{1 + \|Y - X\|} = d_p(Y, X)$$

$$(4) \quad d_p(X, Z) \leq d_p(X, Y) + d_p(Y, Z)$$

On considère :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Alors nous avons :

$$\varphi'(x) = \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

Donc :

$$\|X - Y\| \leq \|X - Z\| + \|Z - Y\| \Rightarrow \varphi(\|X - Y\|) \leq \varphi(\|X - Z\| + \|Z - Y\|)$$

$$\begin{aligned} d_p(X, Y) = \frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} &\leq \frac{\|X - Z\| + \|Z - Y\|}{1 + \|X - Z\| + \|Z - Y\|} \\ &\leq \frac{\|X - Z\|}{1 + \|X - Z\| + \|Z - Y\|} + \frac{\|Z - Y\|}{1 + \|X - Z\| + \|Z - Y\|} \\ &\leq \frac{\|X - Z\|}{1 + \|X - Z\|} + \frac{\|Z - Y\|}{1 + \|Z - Y\|} \\ &= d_p(X, Z) + d_p(Z, Y). \end{aligned}$$

Lemme 1. (Inégalité de Tchebitcheff) Pour toute $X \in \mathbb{L}^0$, et $\varepsilon > 0$,

$$\text{Si } \mathbb{E}[\|X\|] < +\infty \quad \text{alors} \quad P(\|X\| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\|X\|]$$

Démonstration. On a immédiatement :

$$\mathbb{E}[\|X\|] \geq \int_{\{\|X\| \geq \varepsilon\}} \|X\| dP \geq \varepsilon P(\{\|X\| \geq \varepsilon\}).$$

□

Proposition 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et X dans $\mathbb{L}^0(V)$, alors :

$$d_p(X_n, X) \rightarrow 0 \quad \text{si et seulement si} \quad X_n \xrightarrow{P} X$$

Démonstration.

$\Rightarrow$) Il suffit de montrer que si, $d_p(X_n, 0) \rightarrow 0$ alors : $X_n \xrightarrow{P} 0$

En effet, la convergence pour d_p entraîne la convergence en probabilité. Par l'inégalité de Tchebychev, et la croissance de $x \mapsto \frac{x}{1+x}$, on trouve,

$$\frac{t}{1+t} \mathbf{1}_{\{\|X_n\| > t\}} \leq \frac{\|X_n\|}{1 + \|X_n\|} \mathbf{1}_{\{\|X_n\| > t\}} \leq \frac{\|X_n\|}{1 + \|X_n\|}.$$

En intégrant, les deux cotés, alors :

$$\frac{t}{1+t} P(\|X_n\| > t) \leq \mathbb{E} \left(\frac{\|X_n\|}{1 + \|X_n\|} \right).$$

Le membre de droite tendant vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, il en est de même du membre de gauche, et donc aussi que $P(\|X_n\| > t)$ puisque t est fixé.

$\Leftarrow$) Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et pour $\varepsilon > 0$, on choisit $t > 0$ tel que $\frac{t}{1+t} < \frac{\varepsilon}{2}$. Cela est possible car $\frac{t}{1+t} \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow 0$, puis $n_0 \geq 1$ tel que

$$P(\|X_n - X\| \geq t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} d_p(X_n, X) &= \int_{\Omega} \frac{\|X_n - X\|}{1 + \|X_n - X\|} dP \\ &= \int_{\{\|X_n - X\| \geq t\}} \frac{\|X_n - X\|}{1 + \|X_n - X\|} dP + \int_{\{\|X_n - X\| < t\}} \frac{\|X_n - X\|}{1 + \|X_n - X\|} dP \\ &\leq P(\|X_n - X\| \geq t) + \frac{t}{1+t} \cdot P(\|X_n - X\| < t) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\text{car } P(\|X_n - X\| < t) \leq 1). \end{aligned}$$

□

3.1. CONVERGENCE DE SUITES DE VAR À VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH 33

Proposition 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des variables dans $L^0(V)$. Alors :

1) Si la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers X , elle converge en probabilité vers X .

2) Si $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers X , alors elle admet une sous suite $(X_{n_p})_p$ qui converge presque sûrement vers X .

Démonstration.

1) On sait que $d_p(X_n, X) = \mathbb{E} \left(\frac{\|X_n - X\|}{1 + \|X_n - X\|} \right)$ et on remarque que :

$$\frac{\|X_n - X\|}{1 + \|X_n - X\|} \leq 1$$

et comme $\frac{\|X_n - X\|}{1 + \|X_n - X\|} \in \mathbb{L}^1$ alors le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{\|x_n - X\|}{1 + \|X_n - X\|} \right) = \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|x_n - X\|}{1 + \|X_n - X\|} \right) = \mathbb{E}(0) = 0.$$

Et donc la convergence en probabilité .

2) La convergence en probabilité avec $\varepsilon = 1/p$ donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \geq 1/p) = 0.$$

donc pour n assez grand, $P(|X_n - X| \geq \frac{1}{p})$ devient plus petit que $\frac{1}{2^p}$. Soit n_p tel que :

$$P(|X_{n_p} - X| \geq 1/p) \leq \frac{1}{2^p}.$$

On peut supposer la suite $(n_p)_p$ croissante.

Comme $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} < +\infty$, d'après le lemme de Borel-Cantelli, avec les événements $A_p = \{|X_{n_p} - X| \geq 1/p\}$, on a :

$$P(\overline{\lim_p A_p}) = 0 ,$$

c-à-d que p.s, seuls un nombre fini d'évènements A_p soit réalisés.

Il existe p_0 , l'évènement A_p n'est pas réalisé, c-à-d

$$|X_{n_p} - X| \leq 1/p.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient, $\lim_{p \rightarrow +\infty} X_{n_p} = X$, et ce avec probabilité 1.

Donc la sous-suite (X_{n_p}) converge p.s vers X dans $\mathbb{L}^0(V)$. $\square$

6. Convergence en loi dans $\mathbb{L}^0(V)$. Soit $\mathcal{C}_b(V)$ l'espace des fonction continues bornées de V dans $\mathbb{R}$, et soit $X, X_1, \dots, X_n, \dots \in \mathbb{L}^0(V)$.

On dit que $(X_n)_n$ converge en loi (ou en distribution) vers X , si pour toute $f \in \mathcal{C}_b(V)$, on a :

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$$

Et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

ou de façon plus probabiliste, si $P(X_n \in A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(X \in A)$

lorsque $P(X \in \partial A) = 0$, où A est un borélien de V et ∂A sa frontière topologique.

Soit (S, d) est un espace polonais (i.e. un espace topologique métrisable, complet, et séparable) muni d'une métrique $d \leq 1$, $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens de S ,

$\mathcal{P}(S)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(S, \mathcal{B})$, $\mathcal{C}_b(S)$ désigne l'espace vectoriel des fonction continues bornées de S dans $\mathbb{C}$ normé par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Enfin, si d' est une métrique sur S topologiquement équivalente à d , $\mathcal{UC}_b(S, d')$ désigne le sous-espace de $\mathcal{C}_b(S)$ formé des fonctions uniformément continues pour d' .

Définition 2. Une suite de mesure de probabilité (μ_n) sur $\mathcal{P}(S)$ converge étroitement vers une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{P}(S)$ (on note $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$) si :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(S), \quad \int f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu$$

On peut munir $\mathcal{P}(S)$ d'une métrique ρ en posant :

$$\rho(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_S f_n d\lambda - \int_S f_n d\mu \right|.$$

Proposition 4. [3] Soit $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots \in \mathcal{P}(S)$. On a l'équivalence entre :

1) $\rho(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

2) La suite (μ_n) converge étroitement vers μ ,

3) Il existe une métrique d' sur S équivalente à d telle que :

$$\int_S f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_S f d\mu, \text{ pour toute } f \in \mathcal{UC}_b(S, d')$$

4) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$, pour tout fermé F de S ,

5) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$, pour tout ouvert G de S ,

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$, pour tout borélien A de S tel que : $\mu(\partial A) = 0$. Dans ce cas, on dit que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers μ , en abrégé $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.

Démonstration. Voir Danial Li - Hervé Queffélec(cf. [5]) $\square$

Définition 3. Une partie T de $\mathcal{P}(S)$ est dite équitendue si, pour tout $\varepsilon > 0$, les éléments de T sont portés par un même compact à ε près, c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de S tel que :

$$\mu(K) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall \mu \in T.$$

Définition 4. On dit que μ_n converge faiblement vers μ si :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(V), \int_V f d\mu_n \rightarrow \int_V f d\mu.$$

Définition 5. Soit π une famille de loi de probabilité sur $V, \mathcal{A}$. On dit que π est relativement compact si de toute suite d'éléments de π , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

Théorème 1. (Théorème de Prohorov). Soit S un espace polonais, pour toute partie T de $(\mathcal{P}(S), \rho)$,

T est relativement compacte si et seulement si T est équitendue.

Démonstration. Voir (cf. dans [7])

□

Si on pose que V_r^* est le dual réel de V (espace des applications $\mathbb{R}$ -linéaires continues de V dans $\mathbb{R}$), alors on a le théorème suivant :

Théorème 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de $L^0(V)$ et $X \in L^0(V)$. Alors X_n converge en loi vers X si et seulement si :

ϕ_{X_n} converge simplement vers ϕ_X sur V_r^* , et de plus $(X_n)_{n \geq 1}$ est équitendue.

$(X_n)_{n \geq 1}$ équitendue signifiant que $(P_{X_n})_{n \geq 1}$ est équitendue.

Démonstration.

- La condition nécessaire : La suite des lois $(P_{X_n})_{n \geq 1}$ est équitendue puisqu'elle est relativement compacte (Théorème de Prohorov).

De plus, si $f \in V_r^*$, $g = e^{if}$ est bornée par 1 et continue : donc la proposition 4 montre que :

$$\mathbb{E}[g(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[g(X)] \quad \text{i.e.} \quad \phi_{X_n}(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi_X(f).$$

- La condition suffisante : Voir (cf. dans [5] p. 114) □

3.1. CONVERGENCE DE SUITES DE VAR À VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH 37

Proposition 5. *la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi*
i.e. si : $X_n \xrightarrow{P} X$ alors : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, $X, X_1, \dots, X_n, \dots \in \mathbb{L}^0(V)$

Démonstration.

On a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{E}[e^{itX_n}] - \mathbb{E}[e^{itX}]| &\leq \mathbb{E}[|e^{itX_n} - e^{itX}| \mathbf{1}_{\{\|X_n - X\| \leq \varepsilon\}}] + \mathbb{E}[|e^{itX_n} - e^{itX}| \mathbf{1}_{\{\|X_n - X\| > \varepsilon\}}] \\
 &\leq \varepsilon \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\|X_n - X\| \leq \varepsilon\}}] + \mathbb{E}[2A \cdot \mathbf{1}_{\{\|X_n - X\| > \varepsilon\}}] \\
 &\leq \varepsilon \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\|X_n - X\| \leq \varepsilon\}}] + \mathbb{E}[2A \mathbf{1}_{\{\|X_n - X\| > \varepsilon\}}] \\
 &\leq \varepsilon P[\|X_n - X\| \leq \varepsilon] + 2A P[\|X_n - X\| > \varepsilon] \\
 &\leq \varepsilon P[\|X_n - X\| \leq \varepsilon] + 2A P[\|X_n - X\| > \varepsilon] \\
 &\leq \varepsilon + 2A P[\|X_n - X\| > \varepsilon]
 \end{aligned}$$

comme par hypothèse $X_n \xrightarrow{P} X$, alors $P[\|X_n - X\| > \varepsilon] \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$,

$$P[\|X_n - X\| > \varepsilon] \leq \frac{\varepsilon}{2A}$$

donc $|\mathbb{E}[e^{itX_n}] - \mathbb{E}[e^{itX}]| \leq 2\varepsilon$, i.e $\mathbb{E}[e^{itX_n}] \xrightarrow{P} \mathbb{E}[e^{itX}]$ et par conséquent la converge en loi $\square$

3.1.2 Principe de symétrie de Paul-Lévy et applications

Définition 6. *Une variable aléatoire $X \in \mathbb{L}^0(V)$ est dite symétrique si : $(-X)$ a la même loi que X : $P_{-X} = P_X$, ou encore*

$$P(X \in A) = P(-X \in A)$$

pour tout borélien $A \in \mathcal{B}$.

Une suite $(X_1, \dots, X_n, \dots)$ dans $\mathbb{L}^0(V)$ est dite symétrique si $(\varepsilon_1 X_1, \dots, \varepsilon_n X_n, \dots)$ a la même loi que $(X_1, \dots, X_n, \dots)$ pour tout choix de signes $\varepsilon_i = \pm 1$ en abrégé : $(\varepsilon_n X_n) \sim (X_n)$.

Théorème 3. (Inégalités maximales de Paul-Lévy).

Soit $X_1, \dots, X_N \in \mathbb{L}^0(V)$, indépendantes et symétriques , et $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $1 \leq n \leq N$. Alors on a :

$$P(\max_{n \leq N} \|S_n\| > t) \leq 2 P(\|S_N\| > t), \forall t > 0.$$

$$P(\max_{n \leq N} \|X_n\| > t) \leq 2 P(\|S_N\| > t), \forall t > 0.$$

Démonstration. Voir Danial Li - Hervé Queffélec (cf. [5]) $\square$

Lemme 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoire indépendantes dans $\mathbb{L}^0(V)$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la suite de ses sommes partielles .

Si S_n converge en loi , alors $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Démonstration. Supposons que V est séparable. Son dual V^* contient une suite $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ qui sépare les points de V :

$$\varphi_j(x) = 0, \forall j \geq 1 \Rightarrow x = 0.$$

Pour toute $\varphi \in V^*$, on a $\mathbb{E}(e^{it\varphi(S_n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{it\varphi(S)})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, d'après le théorème 2. Donc

$$\varphi(S_n) = \varphi(X_1) + \dots + \varphi(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \varphi(S)$$

Les variables maintenant sont des scalaires, la série $\sum_{n \geq 1} \varphi(X_n)$ converge donc p.s. (car la convergence en loi $\Rightarrow$ la convergence p.s (cf. dans [5] p. 25)). En particulier : $\varphi(X_n) \xrightarrow{p.s} 0$

Il en resulte qu'il existe $\Omega_0 \in \Omega$ de probabilité 1 tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_j[X_n(\omega)] = 0,$$

pour toute $j \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega_0$.

D'autre part puisque $X_n = S_n - S_{n-1}$, la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est équitendue, et donc, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact $K_\varepsilon \subseteq V$ tel que :

$$\sup_{n \geq 1} P(X_n \notin K_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Alors, pour tout $t > 0$, en notant : $A(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{\|X_n\| > t, X_n \in K_\varepsilon\}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\|X_n\| > t) \leq \varepsilon + P(A(\varepsilon)) = \varepsilon + P(A(\varepsilon) \cap \Omega_0)$$

3.1. CONVERGENCE DE SUITES DE VAR À VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH 39

Par le lemme de Fatau, appliqué à l'inégalité

$$P(\|X_n\| > t) \leq P(\|X_n\| > t, X_n \in K_\varepsilon) + P(X_n \notin K_\varepsilon)$$

Montrons que : $A(\varepsilon) \cap \Omega_0 = \emptyset$

Soit $\omega \in A(\varepsilon) \cap \Omega_0$, on peut trouver une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que : $X_{n_k}(\omega) \in K_\varepsilon$ et $\|X_{n_k}(\omega)\| > t$.

Soit $x_\omega \in K_\varepsilon$ une valeur d'adhérence de $(X_{n_k}(\omega))_{n \geq 1}$. On a alors :

- 1) $\|x_\omega\| \geq t$,
- 2) $\varphi_j(x_\omega) = 0, \forall j \geq 1$ (car $\omega \in \Omega_0$).

mais $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ est séparable $\Rightarrow x_\omega = 0$ ($t \leq 0$) $\Rightarrow$ contradiction
cela prouve le lemme. $\square$

Théorème 4. (Théorème d'équivalence de Paul-Lévy)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite quelconque de variables aléatoire indépendantes dans $L^0(V)$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la suite de ses sommes partielles. Alors, on a l'équivalence entre :

- 1) S_n converge en loi (vers S) ,
- 2) S_n converge en probabilité ,
- 3) S_n converge presque sûrement.

Démonstration.

1) $\Rightarrow$ 2) Pour toute suite croissante $(n_k)_{k \geq 0}$ avec $n_0 = 0$, on pose

$$S_0 = 0 \text{ et } T_k = S_{n_k} - S_{n_{k-1}}.$$

$S_{n_k} = T_1 + \dots + T_k$ converge en loi vers S et les T_k sont indépendantes, d'après le lemme on a $T_k \xrightarrow{P} 0$ qui est vrai pour toute $(n_k)_{k \geq 0}$.

Cela signifie que $(S_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy en probabilité , et donc converge en probabilité.

2) $\Rightarrow$ 3) Supposons d'abord que les X_n symétriques et posons :

$$Y_{n,N} = \sup_{n \leq k \leq N} \|S_k - S_n\|,$$

$$Y_n = \sup_{k > n} \|S_k - S_n\| = \lim_{N \rightarrow +\infty} Y_{n,N}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $t > 0$, par hypothèse et l'inégalité de Lévy (1) donnent :

$$P(Y_{n,N} > t) \leq 2 P(\|S_N - S_n\| > t) \leq \varepsilon.$$

Si $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon, t)$, d'où $P(Y_n > t) \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$, en faisant tendre N vers $+\infty$, ce qui montre que $Y_n \xrightarrow{P} 0$ donc : S_n converge p.s d'après la proposition I.4 [5])

□

Théorème 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes symétriques, et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la suite des sommes partielles.

On suppose qu'il existe une sous-suite des entiers $p_1 < \dots < p_n < \dots$ pour laquelle $S_{p_j} \xrightarrow{p.s} S$, quand $j \rightarrow +\infty$. Alors $S_n \xrightarrow{p.s} S$

Démonstration. Si les Y_n sont indépendantes symétriques, si A est une partie infinie de $\mathbb{N}^*$ et si on pose $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$, $M = \sup_{n \geq 1} \|T_n\|$, et $M_A = \sup_{n \in A} \|T_n\|$. Alors on a, pour tout $t > 0$:

$$P(M > t) \leq 2 P(M_A > t) \quad (*)$$

En effet, si $T = \inf\{n \geq 1 : \|T_n\| > t\}$ ou $+\infty$, on voit que :

$$P(M > t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T = n)$$

et si $\lambda_n \in A$ avec $\lambda_n > n$ donc : $P(T = n) \leq P(\|T_{\lambda_n}\| > t, T = n)$ d'où, en sommant :

$$P(M > t) \leq 2 P(M_A < t, T < \infty) = 2 P(M_A > t)$$

Ensuite, posons :

$$Y_j = \sup_{k > j} \|S_{p_k} - S_{p_j}\|, \quad \text{et} \quad Z_n = \sup_{m > n} \|S_m - S_n\|$$

3.1. CONVERGENCE DE SUITES DE VAR À VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH 41

Pour $n > p_1$, désignons par $r = r(n)$ l'entier tel que : $p_r < n \leq p_{r+1}$

$$\text{Si } m > n, \text{ on a : } \|S_m - S_n\| \leq \|S_m - S_{p_r}\| + \|S_r - S_{p_r}\|$$

d'où

$$P(Z_n > t) \leq P\left(\sup_{\ell > p_r} \|S_\ell - S_{p_r}\| > \frac{t}{2}\right) \leq 2 P\left(Y_r > \frac{t}{2}\right)$$

la dernière inégalité découlant de (*) appliqué aux variables X_n d'indice $n > P_r$ et à $A = \{p_{r+1}, p_{r+2}, \dots\}$.

Pour finir, on applique alors deux fois la Proposition I.4 [5])
 $P(Y_r > \frac{t}{2}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$, donc comme $r \rightarrow +\infty$ avec, $Z_n \xrightarrow{P} 0$ et S_n converge presque sûrement.

□

3.1.3 Principe de contraction

Le principe de contraction est un outil de base en géométrie des espaces de Banach. Il se révèle en particulier important dans l'étude des séries de variables aléatoires vectorielles.

Lemme 3. *Posons que $S_0 = T_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $T_n = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n$. Alors pour tout $t > 0$ et pour tout $N \geq 1$:*

$$P(\|T_N\| > t) \leq 2 P(\|S_N\| > t).$$

Démonstration. Supposons que $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et $-1 \leq \lambda_n \leq 1$, car les suites $(\lambda_n X_n)_{n \geq 1}$ et $(|\lambda_n| X_n)_{n \geq 1}$ ont la même loi d'après la symétrie des X_n . Alors supposons que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$, donc :

$$T_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n (S_n - S_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) S_n + \lambda_N S_N$$

si donc on pose $M = \sup_{n \leq N} \|S_n\|$, on a :

$$\begin{aligned} \|T_N\| &\leq \sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \|S_n\| + \lambda_N \|S_N\| \\ &\leq M \left[\sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) + \lambda_N \right] \\ &= M \lambda_1 \leq M. \end{aligned}$$

L'inégalité maximale de Lévy donne alors :

$$P(\|T_N\| > t) \leq P(M > t) \leq 2 P(\|S_N\| > t)$$

d'où : $P(\|T_N\| > t) \leq 2 P(\|S_N\| > t)$.

□

Théorème 6. (Principe de contraction qualitatif)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes et symétriques telle que : $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge presque sûrement. Alors pour toute suite bornée $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de scalaires,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n$$

converge aussi presque sûrement.

Démonstration. On réordonne les λ_n de façon décroissante, avec une permutation σ de $\{1, \dots, N\}$ telle que : $\lambda_1^* \geq \dots \geq \lambda_N^*$, où $\lambda_n^* = \lambda_{\sigma(n)}$, et on pose : $X_n^* = X_{\sigma(n)}$.

Il suffit alors de remarquer que : $S_N = \sum_{k=1}^N X_k^*$ et $T_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k^* X_k^*$, et d'après le lemme précédant on a :

$$P(\|T_q - T_p\| > t) \leq 2 P(\|S_q - S_p\| > t), \text{ pour } p < q,$$

Ce qui montre que $(T_n)_{n \geq 1}$ est convergente en probabilité, et alors presque sûrement convergente d'après le théorème de Paul-Lévy. □

3.1.4 Variables aléatoires symétriques dans un espace de Banach

Définition 7. On dit que la suite $(X_n)_n$ est symétrique si $P_{X_n} = P_{-X_n}$, $\forall n$. Si X est une variable aléatoire, on appelle symétrisée de X la variable aléatoire X^* définie par $X^* = X - X'$ où X et X' sont des variables aléatoires indépendantes tel que $P_X = P_{X'}$.

Proposition 6. [6] Si $(X_n)_n$ est une suite de variable aléatoire (v.a) à valeurs dans V alors (X_n^*) est une suite symétrique i.e : $P_{X_n^*} = P_{-X_n^*}$, $\forall n$.

Démonstration. Soit (X_n^*) une suite de v.a symétrisée de (X_n)
Alors on a :

$$\begin{aligned}
P_{X_n^*}^{(A)} &= P[X_n^* \in A] \\
&= P[X_n - X'_n \in A] \\
&= P[X_n \in A + X'_n] \\
&= P[X_n \in A + y, X'_n \in dy] \\
&= \int P[X_n \in A + y] P[X'_n \in dy] \\
&= \int P_{X_n}(A + y) \cdot P_{X'_n}(dy) \\
&= \int P_{X'_n}(A + y) \cdot P_{X_n}(dy) \\
&= P[X'_n - X_n \in A] \\
&= P_{-X_n^*}(A).
\end{aligned}$$

D'où $P_{X^*}(A) = P_{-X^*}(A)$

Et ce qui montre que (X_n^*) est symétrisée $\square$

3.2 Type et cotype d'un espace de Banach

Définition 8. Une variable aléatoire réelle X est dite gaussienne standard ou $\mathcal{N}(0, 1)$, si elle admet une densité de la forme :

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

De façon générale, une v.a.r X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle admet une densité de la forme :

$$t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2},$$

où m et σ sont des paramètres réels.

$$\text{On a : } \mathbb{E}(X) = m, V(X) = \sigma^2$$

Proposition 7. Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors la fonction caractéristique de X est la fonction φ_X , définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{(itm - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)}$$

Démonstration. Si $m \neq 0$ et $\sigma \neq 1$

$$\text{En posant } Y = \frac{X-m}{\sigma} \Rightarrow X = \sigma Y + m.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{it(\sigma Y + m)}] = \mathbb{E}[e^{it\sigma Y} e^{itm}] = e^{itm} \mathbb{E}[e^{it\sigma Y}] \\ &= e^{itm} \varphi_Y(\sigma t) = e^{(itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}. \end{aligned}$$

□

Dans cette section toutes les variables seront centrées.

La loi gaussienne peut être également définie, d'une façon équivalente, par sa fonction caractéristique.

Définition 9. Une variable aléatoire X est gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ si sa fonction caractéristique φ_X est de la forme :

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Proposition 8. Si X est une variable aléatoire admettant une densité de probabilité f de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

alors : X admet une fonction caractéristique φ_X de la forme.

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Démonstration. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{itX}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itx)^n}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Et comme $\sum_n \|f_n\|_1 = \sum_n \left\| \frac{(itx)^n}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} \right\|_1 = e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui est convergente, donc le théorème de Lebesgue s'applique, on a alors

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itx)^n}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right).$$

Il reste à trouver les moments de la v.a $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En utilisant la définition des moments $\mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

donc

$$\mathbb{E}(X^{2k+1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

et

$$\mathbb{E}(X^{2k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Une intégration par parties, avec $u = x^{2k-1}$ et $dv = x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, donne

$$\mathbb{E}(X^{2k}) = (2k-1) \mathbb{E}(X^{2k-2}).$$

comme $\mathbb{E}(X^0) = 1$, on trouve par récurrence

$$\mathbb{E}(X^{2k}) = 1 \times 3 \times \dots \times (2k-1) \times \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!},$$

et par conséquent

$$\mathbb{E}(X^n) = \begin{cases} \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} & \text{si } n = 2k, \\ 0 & \text{si } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{itX}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^{2k}}{2k!} \mathbb{E}(X^{2k}) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(it)^{2k}}{2^k \cdot k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\frac{(it)^2}{2}\right)^k}{k!} \\ &= e^{\frac{(it)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

□

3.2.1 Vecteur gaussiens

Soit l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On note $\langle x \mid y \rangle$ le produit scalaire de x et $y \in \mathbb{R}^n$.

Définition 10. On dit qu'un vecteur aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien, si toute combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_n$ est une variable aléatoire gaussienne i.e.

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ gaussien} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i X_i \text{ gaussienne,}$$

pour tout choix des nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Propriétés 1. 1. Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$, alors chaque variable aléatoire X_k est gaussienne.

2. Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes alors, le vecteur $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est gaussien.

Démonstration.

1) Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien, alors
 $(X_1, \dots, X_n)$ gaussien $\Leftrightarrow a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ gaussienne $\forall a_1, \dots, a_n$

En particulier $a_k = 1, a_i = 0, i \neq k$
 alors la variable aléatoire $0.X_1 + \dots + X_k + \dots + 0.X_n = X_k$ est gaussienne,
 $\forall k = 1, \dots, n$

2) On doit montrer que la fonction caractéristique de la combinaison linéaire $Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n, (a_i \in \mathbb{R})$ est de la forme :

$$\phi_Y(t) = e^{it \mathbb{E}(Y) - \frac{1}{2} \text{Var}(Y) t^2}$$

Or : $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i)$ et $\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i)$ par l'indépendance des X_i . Donc on a :

$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= \mathbb{E} [e^{it(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)}] = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n e^{it a_j X_j} \right] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} [e^{it a_j X_j}] \\ &= \prod_{j=1}^n e^{(it a_j \mathbb{E}(X_j) - \frac{1}{2} \text{Var}(X_j) a_j^2 t^2)} \\ &= e^{(it \sum_j \mathbb{E}(a_j X_j) - \frac{1}{2} \sum_j \text{Var}(a_j X_j) t^2)} \\ &= e^{it \mathbb{E}(Y) - \frac{1}{2} \text{Var}(Y) t^2} \end{aligned}$$

D'où la fonction caractéristique de Y est une v.a gaussienne. $\square$

Proposition 9. *L'image de tout vecteur gaussien $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ par une application linéaire $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un vecteur gaussien.*

Démonstration. Si ϕ est linéaire et $X = \sum_{i=1}^n X_i e_i$ alors :
 $\phi(X) = X = \sum_i X_i \phi(e_i)$, tel que : $\phi(e_i) \in \mathbb{R}^m$

Soit $(f_i)_i$ une base dans $\mathbb{R}$ et $\phi(e_i) = \sum_{j=1}^m a_j^i f_j$, donc :

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{j=1}^m a_j^i f_j \right) = \sum_{j=1}^m f_j \left(\sum_{i=1}^n a_j^i X_i \right)$$

et comme $\sum_{i=1}^n a_j^i X_i$ sont gaussiens alors : $\phi(X)$ est gaussien.

□

Une autre façon de dire que le vecteur X est gaussien est de dire que le produit scalaire $\langle X | a \rangle$ est une gaussienne pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

La loi de la variable $\langle X | a \rangle$ centrée est déterminée par sa variance

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{E} [\langle X | a \rangle^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n a_i X_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j X_j \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=1}^n a_i a_j X_i X_j \right] = \sum_{i,j} a_i a_j \mathbb{E}(X_i X_j). \end{aligned}$$

qui est dépend de la matrice de covariance de X

$$C = (c_{i,j})_{i,j} = (c_{i,j}^X)_{i,j} = (\mathbb{E}(X_i X_j))_{i,j}$$

Définition 11. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, soit f une forme bilinéaire symétrique réelle et φ la forme quadratique associée sur E . On dit que f est positive si, pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x, x) = \varphi(x) \geq 0$$

On associe toute forme bilinéaire symétrique réelle par une matrice réelle symétrique A d'ordre n , tel que : $f(x, y) = X^t A Y$

Donc pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f \geq 0 \Leftrightarrow X^t A X \geq 0.$$

Proposition 10. Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$, de matrice de covariances C . Alors on a :

a) La matrice C est positive et réciproquement, toute matrice positive est la matrice de covariance d'un vecteur gaussien.

b) On a : $\mathbb{E}(e^{i\langle t|X\rangle}) = \exp(-\frac{1}{2}\langle Ct | t\rangle)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^n$.

c) Deux vecteurs gaussiens (centrés) X et Y de même covariance ont la même loi.

d) Si C est inversible, la densité de X est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle C^{-1}x | x\rangle\right).$$

Démonstration.

a) Rappelons qu'une matrice symétrique est positive si la forme bilinéaire (ou la forme quadratique) associée est une forme positive. Il faut donc voir que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a : $a^t C a \geq 0$, car :

$$\langle C.a | a \rangle = \sum_{i,j} a_i a_j c_{i,j} = \sum_{i,j} a_i a_j \mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(\langle X | a \rangle^2) \geq 0$$

Réciproquement, si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive ($C > 0$), alors : C s'écrit $C = B^2$, avec $B = (b_{i,j})_{i,j}$ symétrique.

Soit $g_1, \dots, g_n$ des variables gaussiennes standard indépendantes, le vecteur $G = (g_1, \dots, g_n)$ est gaussien, ainsi que le vecteur $X = \sqrt{C}.G = BG$ tel que : $X = (X_1, \dots, X_n)$ avec $X_j = \sum_{i,j} b_{i,j} g_j$ et comme

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \sum_{k=1}^n b_{i,k} b_{j,k} = c_{i,j},$$

la matrice C est bien la matrice de covariance de X .

b) Soit $Y = \langle t | X \rangle$, tel que : Y suit une loi $N(0, \sigma^2)$ avec

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(Y^2) = \langle Ct | t \rangle.$$

alors on a :

$$\mathbb{E}(e^{iY}) = \int_{\mathbb{R}} e^{iy} \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} e^{iy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

posons : $X = \frac{Y}{\sigma}$ donc : $\mathbb{E}(e^{iY}) = \mathbb{E}(e^{i\sigma X}) = \varphi_X(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$.

D'où :

$$\mathbb{E}(e^{i\langle t|X \rangle}) = \mathbb{E}(e^{iY}) = e^{-\sigma^2/2} = \exp(-\frac{1}{2}\langle Ct | t \rangle).$$

c) Si X et Y ont la même matrice de covariance C , et comme

$$\mathbb{E}(e^{i\langle t|X \rangle}) = \exp(-\frac{1}{2}\langle Ct | t \rangle) = \mathbb{E}(e^{i\langle t|Y \rangle}).$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, donc X et Y ont la même fonction caractéristique, et par conséquent la même loi.

d) Si C est inversible ($\det(C) \neq 0$), la fonction caractéristique de X est :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{-i\langle t|X \rangle}) = \exp(-\frac{1}{2}\langle Ct | t \rangle)$$

donc X possède une densité, donnée par la formule d'inversion de Fourier :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle t|x \rangle} \varphi_X(t) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle t|x \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle Ct|t \rangle} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle t|x \rangle} e^{-\frac{1}{2}\|Bt\|^2} dt, \end{aligned}$$

où B est symétrique positive et $B^2 = C$. Faisons le changement de variable $Bt = u$, alors $t = B^{-1}u$, et comme $\det(B^{-1}) = (\det C)^{-1/2}$, on obtient :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} (\det C)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u | B^{-1}x \rangle} e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2} du$$

Posons $y = B^{-1}x$, et séparons les variables, on obtient :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (\det C)^{-1/2} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-iu_j y_j} e^{-\frac{1}{2}u_j^2} du_j \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} (\det C)^{-1/2} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2}y_j^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(u_j + iy_j)^2} du_j \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} (\det C)^{-1/2} \prod_{j=1}^n \sqrt{2\pi} e^{-\frac{y_j^2}{2}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\det C)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\|y\|^2}.
 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat, puisque

$$\|y\|^2 = \langle B^{-1}x \mid B^{-1}x \rangle = \langle B^{-2}x \mid x \rangle = \langle C^{-1}x \mid x \rangle.$$

□

Soit E est un espace vectoriel réel, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i.e E est un espace euclidien. Soit $\mathcal{O}(E)$, l'ensemble des isométries de E i.e.

$$\mathcal{O}(E) = \{f \text{ endomorphisme de } E \text{ tel que } \forall x, y \in E : \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle\}.$$

Nous savons que $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe. Si $\dim E = n < \infty$ et $(e_i)_{i=1,2,\dots}$ est une base orthonormale de E , pour $f \in \mathcal{O}(E)$, soit $A = \text{Mat}(f, e_i)$. Alors nous avons

$$\mathcal{O}(E) \approx \{A \in M_n(\mathbb{R}), \text{ tel que } : A^t A = I_n\} = \mathcal{O}(n)$$

$\mathcal{O}(n)$ est un groupe appelé groupe des matrices orthogonales. Si $\det(A) = 1$ et $A \in \mathcal{O}(n)$, A est la matrice d'un déplacement ou rotation dans E .

Définition 12. On appelle rotation de E toute isométrie $f \in \mathcal{O}(E)$ telle que : $\det(f) = +1$.

Une rotation est dite aussi isométrie positive.

Proposition 11. (Invariance par rotation des vecteurs gaussiens)

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien, de covariance C_X . Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, et $Y = AX = (Y_1, \dots, Y_n)$, avec $Y_j = \sum_{k=1}^n A_{j,k} X_k$. Alors :

a) Y est un vecteur gaussien de covariance $AC_X A^t$.

b) Si X est standard (i.e : $C_X = I_n$) et si $A \in \mathcal{O}(n)$ et de plus $\det(A) = +1$ alors : $Y = AX$ est également standard. (c'est la propriété d'invariance par rotation des vecteurs gaussiens standards.)

Démonstration.

a) Posons $c_{k,l} = \mathbb{E}(X_k X_l)$ et $a_{j,k}^t = a_{k,j}$. On a :

$$\mathbb{E}(Y_i Y_j) = \sum_{k,l} a_{i,k} a_{j,l} c_{k,l} = \sum_{k,l} a_{i,k} c_{k,l} a_{l,j}^t = AC_X A^t$$

b) Puisque A est orthogonale et $C_X = I_n$ alors on a : $C_Y = AA^t = I_n$ ce qui montre que Y est standard. $\square$

3.2.2 Variable p-stables :

Une gaussienne $\mathbb{N}(0, 2)$ a pour fonction caractéristique e^{-t^2} . Paul-Lévy a découvert que $e^{-|t|^p}$ reste une f.c pour $0 < p < 2$.

Définition 13. Soit S un ensemble, et G un groupe abélien.

1) On dit que $\varphi : S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ est un noyau de type positif, en abrégé $\varphi \gg 0$, si : pour tous $x_1, \dots, x_n \in S$ et tous $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i,j} \varphi(x_i, x_j) c_i \bar{c}_j \geq 0$$

On dit que $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de type positif si : le noyau φ défini par $\varphi(x, y) = \phi(x - y)$ est de type positif.

2) On dit que $\psi : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ est un noyau de négatif, et on écrit $\psi \ll 0$, si :

(a) $\psi(x, x) = 0$ pour tout $x \in S$,

(b) $\psi(x, y) = \psi(y, x)$ pour tout $x, y \in S$,

(c) $\sum_{i,j} \psi(x_i, x_j) c_i \overline{c_j} \leq 0$ pour tout $x_1, \dots, x_n \in S$ et tous $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, de somme $c_1 + \dots + c_n = 0$ nulle.

Théorème 7. (Bochner)[5] Pour qu'une fonction $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ soit de type positif, il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive bornée μ sur $\mathbb{T} = [-\pi, \pi[$ telle que

$$\phi(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{in\lambda} d\mu(\lambda),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 8. Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 2$. Alors :

a/ Il existe une variable aléatoire réel X , appelée variable p -stable, telle que : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{itX}) = e^{-|t|^p}$$

.

b/ Si $X_1, \dots, X_n$ sont p -stables indépendantes, et si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{j=1}^n a_j X_j \quad \text{et} \quad \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} X_1.$$

ont même loi.

c/ Pour $0 < p < 2$, X possède une densité continue f telle que : $f(x) \sim c_p |x|^{-p-1}$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, pour une constante $c_p > 0$.

d/ Pour $p = 2$, X est une gaussienne, elle possède la densité continue

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4}.$$

Démonstration.

a/ On utilise le Théorème de *Schönberg* et Bochner (voir c.f dans [5], [8]). Une idée consiste à montrer que la fonction $t \mapsto e^{-|t|^p}$ est définie positive. D'après le théorème de Bochner, c'est une fonction caractéristique.

b/ Posons $a = (\sum_{j=1}^n |a_j|^p)^{1/p}$, on applique le Théorème d'unicité des f.c i.e si X et Y admettent une même f.c, X et Y ont même loi,

$$\mathbb{E}(e^{it \sum_{j=1}^n a_j X_j}) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}(e^{it a_j X_j}) = \prod_{j=1}^n e^{(-|t|^p |a_j|^p)} = e^{(-a^p |t|^p)} = \mathbb{E}(e^{it a X_1}),$$

ce qui donne le résultat.

c/ Comme

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|^p} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-|t|^p} dt$$

alors, on compare avec la fonction $\frac{1}{t^\alpha}$, nous avons :

$$t^\alpha e^{-|t|^p} = \frac{e^{-|t|^p}}{\frac{1}{|t|^\alpha}} \rightarrow 0,$$

En particulier, pour $\alpha > 1$,

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

converge et d'autre part pour $a > 0$ alors $\int_a^{\infty} e^{-|t|^p} dt$ converge et $\int_0^a e^{-|t|^p} dt$ existe ($p > 0$) alors, $\int_0^{\infty} e^{-|t|^p} dt$ converge

D'après la formule d'inversion de Fourier, la densité f de la var X est :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_X(t) e^{-itx} dt$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|^p} e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|^p} (\cos tx + i \sin tx) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|^p} \cos(tx) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|^p} \cos(tx) dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t^p} \cos(-tx) dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^p} \cos(tx) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-t^p} \cos(tx) dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^p} \cos(tx) dt. \end{aligned}$$

Et par le changement de variable $u = -t$ on a :

$$I_1 = \int_{+\infty}^0 e^{-u^p} \cos(-ux) - du = - \int_{+\infty}^0 e^{-u^p} \cos(ux) du = \int_0^{+\infty} e^{-t^p} \cos(tx) dt$$

D'où $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^p} \cos(tx) dt$.

Si $0 < p < 1$, une intégration par parties et un changement de variable montre que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \left[e^{-t^p} \cdot \frac{\sin(tx)}{x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x} p \cdot t^{p-1} \cdot e^{-t^p} dt \right] \\ &= \frac{p}{\pi x} \int_0^{+\infty} t^{p-1} \cdot e^{-t^p} \sin(tx) dt \\ &= \frac{p}{\pi x^{p+1}} \int_0^{+\infty} \sin u \cdot u^{p-1} e^{-\frac{u^p}{x^p}} du \end{aligned}$$

Et par la convergence dominée on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{+\infty} \sin u \cdot u^{p-1} e^{-\frac{u^p}{x^p}} du \right] &= \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin u \cdot u^{p-1} e^{-\frac{u^p}{x^p}} \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \sin u \cdot u^{p-1} du \end{aligned}$$

Le cas $p = 1$ correspond à une variable de Cauchy : $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \sim \frac{1}{\pi x^2}$. Enfin, pour $1 < p < 2$, une nouvelle intégration par parties montre que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{p}{\pi x^{p+1}} \int_0^{+\infty} \sin u \cdot u^{p-1} du \\ &= \frac{p}{\pi x^{p+1}} \left[(1 - \cos u) u^{p-1} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (p-1) u^{p-2} (1 - \cos u) du \right] \\ &= -\frac{p}{\pi x^{p+1}} \int_0^{+\infty} (p-1) u^{p-2} (1 - \cos u) du \\ &= -\frac{p(p-1)}{\pi x^{p+1}} \int_0^{+\infty} (1 - \cos u) u^{p-2} du \sim c_p x^{-p-1}. \end{aligned}$$

quand $|x| \rightarrow +\infty$,

$\mathbf{d}/X$ est une gaussienne $\mathbb{N}(0, 2)$, possède une densité de la forme suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-m)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(\sqrt{2})^2}t^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}t^2}.$$

□

Remarque 2. On a un énoncé analogue avec $\phi(t) = e^{-c|t|^p}$ ($c > 0$), le cas $p = 2$, $c = 1/2$ correspond à la gaussienne standard.

3.2.3 Type et cotype d'un espace de Banach

Définition 14. 1) On dit qu'un espace de Banach V est de type p ($1 \leq p \leq 2$), s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in V$, $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ étant une suite de v.a de Bernoulli (ou de Rademacher).

La meilleure constante C s'appelle la constante de type p de V et se note $T_p(V)$.

2) On dit que V est de cotype q , ($2 \leq q \leq +\infty$), s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(V)} \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in V$, $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ étant une suite de Bernoulli.

La meilleure constante C s'appelle la constante de cotype q de V , et se note $C_q(V)$.

Remarque 3. 1) Si un espace est de type p , il est aussi de type p' pour tout $p' \leq p$. S'il est de cotype q , il est aussi de cotype q' pour tout $q' \geq q$.

2) V est de type p , si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de V telle que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p < +\infty$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x_n$ converge presque sûrement.

3) V est de cotype q , si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de V telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x_n$ converge presque sûrement, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^q < +\infty$.

3.2.4 Type stable d'un espace de Banach

La notion de type d'un espace de Banach rencontrée précédemment est construite à l'aide de v.a. de Rademacher. On peut imaginer des notions similaires pour d'autres v.a. symétriques classiques comme les v.a. normales centrées réduites ou plus généralement les v.a. p -stables :

Définition 15. Soit $0 < p \leq 2$. Une v.a. réelle X est dite p -stable s'il existe $\sigma > 0$ telle que la fonction caractéristique de X soit de la forme :

$$\mathbb{E}(e^{itX}) = e^{-\frac{\sigma^p |t|^p}{2}}.$$

Exemples.

- 1) Les v.a. gaussiennes sont 2-stables.
- 2) Les v.a. de Cauchy sont 1-stables.

On peut remplacer les variable de Bernoulli par des variables stables, les choses sont un petit peu différentes.

Définition 16. On dit que l'espace de Banach V est de type p -stable s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\left\| \sum_{j=1}^n \theta_j x_j \right\|_{\mathbb{L}^1(V)} \leq C \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{1/p}.$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in V, (\theta_n)_{n \geq 1}$ étant une suite de variables p -stables indépendantes.

Le théorème suivant, dû à Pisier [5], précise la relation entre la notion de type (de Rademacher) et celle de type stable :

Théorème 9. (Pisier [1973]) *Pour tout espace de Banach V , et $1 < p \leq 2$, on a :*

- 1) *Si V est de type p -stable, il est de type p .*
- 2) *Si V est de type p , il est de type p' -stable pour tout $p' < p$.*

Théorème 10. (Maurey-Pisier [1976]) *Si un espace de Banach est de p -stable pour un $p < 2$, il est aussi de type p' -stable pour un $p' > p$.*

Démonstration. Voir Maurey-Pisier (cf. [5] p.172) $\square$

Remarque 4. *Les v.a. p -stables n'ont pas de très bonnes propriétés d'intégrabilité, car une v.a. p -stable pour $0 < p < 2$ n'est pas dans $\mathbb{L}^p$.*

3.2.5 Complements.

On peut remplacer les variables de Bernoulli ou les variables p -stables, par des variables gaussiennes sans altérer la valeur, ni la constante de type ou de cotype.

Théorème 11. [5] *Soit X un espace de Banach, et soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite de gaussiennes standard indépendantes. Alors :*

- 1) *Si X est de type p , ($1 < p \leq 2$) on a :*

$$\left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \right\|_2 \leq T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$.

- 2) *Si X est de cotype q ($2 \leq q < +\infty$), on a :*

$$\left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \right\|_2 \geq \frac{1}{C_q(X)} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$.

Démonstration. Voir Danial Li - Hervé Queffélec (cf. [5] p.168)

□

Plus généralement, ces relations restent valables en remplaçant $(g_n)_n$ par n'importe quelle suite de variables aléatoires symétriques et indépendantes, de norme 1 dans $\mathbb{L}^2$.

3.2.6 Exemple.

L'exemple fondamental est celui des espaces $\mathbb{L}^r = \mathbb{L}^r(\mu)$, où μ est une mesure positive sur un espace mesurable $(T, \mathcal{A})$ et $r \geq 1$.

Lemme 4. 1) Si $1 \leq r \leq 2$, la norme $\mathbb{L}^r$ est r -convexe, c'est-à-dire que, pour tous $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{L}^r$, on a :

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_r \leq \left(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_r^r \right)^{1/r}$$

2) Si $2 \leq r < +\infty$, la norme $\mathbb{L}^r$ est 2-convexe, c'est-à-dire que :

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_r \leq \left(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_r^2 \right)^{1/2}$$

pour tous $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{L}^r$.

Démonstration.

Posons $S = \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{1/2}$, S est la fonction carré associée aux f_j ,

1) Si $r \leq 2$, on a :

$$S^r = \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{r/2} \leq \sum_{j=1}^n (|f_j|^2)^{r/2} = \sum_{j=1}^n |f_j|^r = \sum_{j=1}^n \|f_j\|_r^r \quad (\text{car, } f_j \in \mathbb{L}^r)$$

d'où :

$$\int_{\Omega} S^r du \leq \sum_{j=1}^n \|f_j\|_r^r.$$

ce qui est le résultat annoncé.

2) Si $r > 2$, alors :

$$\|S^r\| = \left[\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{r/2} d\mu \right]^{1/r} = \left\| \sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right\|_{r/2}^{1/2}$$

Et d'après l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\left\| \sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right\|_{r/2}^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^n \| |f_j|^2 \|_{r/2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} |f_j|^r du \right]^{2/r} \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_r^2 \right)^{1/2}.$$

Théorème 12. (Inégalités de Khintchine)

Pour tout $p \in]0, +\infty[$, il existe des constantes a_p et $b_p > 0$ telles que, pour tous $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}$, et $X = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n u_n$ où $\varepsilon_n \in \{-1, +1\}$, on ait :

$$a_p \|X\|_2 \leq \|X\|_p \leq b_p \|X\|_2$$

Démonstration. Voir Danial Li - Hervé Queffélec (cf. [5] p.29) $\square$

Théorème 13. Soit $1 \leq r < +\infty$, alors :

1) $\mathbb{L}^r$ est de type $\inf(r, 2)$,

2) $\mathbb{L}^r$ est de cotype $\sup(r, 2)$, en particulier $\mathbb{L}^1$ est de cotype 2.

Démonstration. 1) Soit $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{L}^r$. On a par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right\|_r^r &= \mathbb{E} \left(\int_T \left| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right|^r d\mu \right) \\ &= \int_T \left[\int_{\Omega} \left| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right|^r dP \right] d\mu \\ &\leq \int_T b_r^r \left(\sum_{j \geq 1} |f_j|^2 \right)^{r/2} d\mu. \end{aligned}$$

où b_r est la constante des inégalités de Khintchine, et comme

$$\left\| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right\|_r = \left[\mathbb{E} \left\| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right\|_r^r \right]^{1/r}$$

alors,

$$\left\| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right\|_r \leq b_r \left\| \left(\sum_{j \geq 1} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_r$$

et d'autre part d'après le lemme précédant on a :

$$\left\| \left(\sum_{j \geq 1} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_r \leq \left(\sum_{j \geq 1} \|f_j\|_r^r \right)^{1/r}$$

alors :

$$\left\| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right\|_r \leq b_r \left\| \left(\sum_{j \geq 1} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_r \leq b_r \left(\sum_{j \geq 1} \|f_j\|_r^r \right)^{1/r} \leq b_r \left(\sum_{j \geq 1} \|f_j\|_r^r \right)^{1/r}$$

2) En particulier, $r = 1$ alors,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right\|_1^2 dP \right)^{1/2} &\geq \int_{\Omega} \left\| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right\|_1 dP \\ &= \int \int_{T \times \Omega} \left| \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j f_j \right| du dP \\ &\geq a_1 \int_T \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \right)^{1/2} d\mu \\ &\geq a_1 \left(\sum_{j \geq 1} \|f_j\|_1^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

où a_1 est la constante des inégalités de Khintchine, et d'après le lemme précédant on trouve $\mathbb{L}^1$ est de cotype 2

□

Conclusion

Nous avons tenté de synthétiser les matériaux de base pour l'étude de séries de variables aléatoires dans un espace de Banach. Les éléments de base sont variés et font appel à la structure de l'espaces. Ce qui amène les notions de type et de cotype, indispensable pour une caractérisation des séries de var dans ces espaces. Le piège difficile à éviter est que la richesse de ces éléments à cheval sur le Calcul de Probabilités et l'Analyse fonctionnelle prend beaucoup d'énergie et de temps et laisse très peu de marge d'initiative pour faire le point sur la problématique envisagée. Le résultat de ce travail est surtout dans la compréhension des techniques nécessaires pour étudier la convergence d'une série de var dans un espace de Banach, qui bat en brèche les techniques de Martingales, uquelles on peut penser naïvement. En fait il apparait, en liaison avec les travaux de Pizier dont nous avons pris connaissance, que cela n'est pas si naïf et que cela constitue une direction de travail prometteuse.

Bibliographie

- [1] D. Dacunha-Castelle et M. Dufo, *Probabilité et Statistique*, 2ème édition, MASSON Paris Milan Barcelone 1993.
- [2] Frédéric Paulin, *Topologie, analyse et calcul différentiel*, Version préliminaire, FIMFA, école normale supérieure, 2008-2009.
- [3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, MASSON, 1983.
- [4] L. Tzafriri, *On the type and cotype of Banach space*, Israel journal of mathematics, Vol.32, No.1, 1979.
- [5] Daniel Li-Hervé Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach*, Edition Société Mathématique de France, Cours Spécialisés 12 (2004).
- [6] J. Hoffmann-Jorgensen, *Sums of independent Banach space valued random variables*, Studia Math. **52**, p.158-186 (1974).
- [7] A.N. Shiryaev, *Probability*, Springer, Berlin, seconde édition, 1996.
- [8] F. Ladjimi, *Contribution à l'étude de l'intégrale stochastique et de mouvement brownien*, Mémoire de Magister, UMMTO, 2011.
- [9] C.Reischer- R.Lebanc, B.Rémillard- D.Larocque, *Théorie des Probabilités*, Presse de l'Université du Québec, (Canada) 2002.
- [10] Dominique Foata-Aimé Fuchs, *Calcul des Probabilités*, 2ème édition, l'Université Louis-Pasteur de Strasbourg, 2003.