

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes De MASTER PROFESSIONNEL

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique Industrielle

Présenté par

Celia FETTIS

Melissa AMZIANE

Thème

Commande H_∞ Des Systèmes Non Linéaires Affines En Entrée

Mémoire soutenu publiquement le 02 / 10 / 2024 devant le jury composé de :

M F. ALMANSBA

MA, UMMTO, Présidente

M Safia YOUSFI

MA, UMMTO, Encadrante

M H. HARROUCH

MA, UMMTO, Examinatrice

Remerciement

Nous remercions en premier lieu DIEU le tout puissant de nous avoir donné la sante et la volonté d'entamer et de terminer ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude a notre promotrice madame **Yousfi Safia** pour son encadrement, sa patience et sa confiance tout au long de ce travaille. Ses précieux conseils, son expertise et son soutien inébranlable ont été d'une aide inestimable.

Merci également aux membres du jury pour avoir accepté de juger ce mémoire. Leurs remarques et suggestions seront précieuses et nous permettrons d'en améliorer la qualité.

Nous ne saurions oublier nos parents et nos familles « **FETTIS** » et « **AMZIANE** », pour leur soutient indéfectible et pour avoir toujours cru en nous. Leurs encouragements ont été notre refuge et notre motivation durant tout le parcours académique.

Un merci spécial à nos camarades et amis, pour leurs encouragements, leurs échanges intellectuels stimulants et pour tout les moments partagés.

La réussite de ce travail résulte de toutes ces années de formation. Nous tenons donc à exprimer notre respect et notre gratitude à tout nos enseignants.

Dédicace

Du profond de mon cœur, je dédie ce travail à tous qui me sont chers

A mes chers parents FARIDA ET AMAR

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.

Je vous remercie pour tous le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Mama, reposez votre cœur, votre rêve est devenu réalité, enfin votre fille est devenue diplômée comme que tu as tant imaginée et désirée.

A mon unique et cher frère YANIS

A mes adorables sœurs MAROUA et SARA et mon neveux AKSIL

A mes chères amies NESRINE et HINDA

Une dédicace spéciale à mon binôme de mémoire et de vie CELIA FETTIS, pour ta patience et ta présence à chaque étape de ce parcours. Ce travail et aussi le tien, et je te remercie de tout cœur pour tout ce que nous avons partagé et construit ensemble

*Cette dédicace est pour vous, mes chers proches, toute la famille
« AMZIANE » et « HAMMOUDI »*

AMZIANE Melissa

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents, MALIKA et SI OMAR, qui m'ont toujours soutenu avec amour, patience et bienveillance. Leur confiance et leurs encouragements m'ont permis d'aller au bout de ce projet.

A mes sœurs LIZA et FETTA, mes frères YAHIA et AMIR, qui ont été à mes cotes à chaque étape et m'ont inspiré par leur force et leur soutien indéfectible.

A mon oncle MOUHAMMED AREZKI et ma tante FARIDA, qui ont toujours cru en moi et m'ont guidé avec sagesse.

A mon petit bébé AYDEN, source de bonheur et de motivation chaque jour.

A mes chères amies, HINDA, OUIZA, MAISSA, ZAZI ET WAHIBA pour leurs amitiés sincère et leurs présences inestimables.

A ma chère binôme MELISSA, qui était toujours là, pendant le bien et le pire, tout au long de notre parcours universitaire.

A toute ma famille, A tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment.

FETTIS Celia

NOTATIONS

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m}$ Respectivement, ensemble des réels et ensemble des matrices de dimensions $n \times m$ à coefficients dans \mathbb{R} .

s la variable de laplace .

$G(s)$ Le modèle nominal

$\Delta(s)$ Le modèle d'incertitude

$\|\Sigma\|_{\infty}$ la norme H_{∞} d'un système dynamique Σ

σ_{max} Valeur singulière structuré maximale.

$\|\Sigma\|_{\infty} = L_2$

I_n Matrice identité de dimension n .

$\rho()$ rayon spectral

S_y Fonction de sensibilité en sortie.

T Fonction de sensibilité complémentaire en sortie.

S_u Fonction de sensibilité en entrée.

HJE Équation Hamilton-Jacobi.

$W(s)$ Filtre de pondération.

$F_b(P, K)$ Transformation Linéaire Fractionnaire Inférieure.

MPC : Model Predictive Control

MBPC : Model-Based Predictive Control

PFC: Predictive Functional Control .

QFT: Quantitative Feedback Theory

LMI : Inégalité matricielle linéaire.

LFT : Transformation Fractionnaire Linéaire inférieure.

NLMI : Non Inégalité matricielle linéaire.

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur la commande robuste	
I.1. Introduction	3
I.2. Généralités sur la commande robuste	3
I.2.1. Système de commande	3
I.2.2. Propriétés d'un système commandé	4
I.3. La robustesse et la commande robuste... ..	4
I.3.1. La robustesse.....	4
I.3.2. Type de robustesse.....	4
A. Robustesse en stabilité	4
B. Robustesse en performances	4
I.3.3. Modèle nominal.....	5
I.3.4. Fonction de sensibilité.....	5
A. Fonction de sensibilité en entrée.....	6
B. Fonction de sensibilité en sortie.....	6
I.3.5. Les incertitudes	6
I.3.5.1. Les incertitudes non structurées	6
A. Incertitudes additives.....	7
B. Incertitudes multiplicatives.....	7
I.3.5.2. Les incertitudes structurées.....	8
I.3.6. La commande robuste.....	8
I.3.7. Les commandes robustes les plus utilisées.....	9
I.3.7.1. La méthode de synthèse robuste (QFT).....	9
I.3.7.2. La commande prédictive.....	9
I.3.7.3. La commande adaptative.....	9
I.3.7.4. commande h-infini.....	9

Sommaire

I.4.Conclusion.....	10
---------------------	----

Chapitre II : Le principe de la commande H_∞

II.1. Introduction	11
II.2.Principe de la commande H_∞ pour les systèmes linéaires.....	11
II.3. Problème H_∞ standard	12
II.3.1.Problème H_∞ optimal.....	13
II.3.2.Problème sous-optimal.....	13
II.3.3.Introduction des fonctions de pondérations	14
II.3.4.Choix des fonctions de pondérations.....	15
II.3.5.Problème de sensibilité mixte.....	16
II.4.Résolution du problème de commande H_∞	17
II.4.1.Résolution du problème standard H_∞ par les équations de riccati.....	17
II.4.2. γ -iteration (méthode de dichotomie).....	20
□.5.Application de la commande H_∞ linéaire sur un modèle de pendule inversé.....	21
□.6.Conclusion	27

Chapitre III : La commande des systèmes non linéaire

III.1.Introduction.....	28
III.2.Généralités sur les systèmes non linéaires.....	28
III.2.1.Représentation des systèmes linéaires	28
III.2.2.Représentation des systèmes non linéaires.....	28
III.3.La commande H_∞ non linéaire.....	29
III.3.1. Norme H_∞ non linéaire.....	29
III.3.2. Gain L_2	30
III.3.3.Définition d'un système dissipatif.....	30
III.4. Problème de commande H_∞ non linéaire.....	30
III.4.1.Formulation mathématique du problème.....	30
III.4.2. Objectif de la commande.....	31

Sommaire

III.5. Hypothèses d'existence de la commande H_∞ non linéaire.....	32
III.6. Solution du problème H_∞ des systèmes non linéaire.....	34
III.6.1. Résolution du problème H_∞ par la méthode des approximations successives.....	35
III.6.1.1. Algorithme des approximations successives.....	36
III.7. Application de la commande H_∞ non linéaire sur un modèle de pendule inversé...37	
III.8. Conclusion.....	42
Conclusion générale.....	43
Annexe A.....	44
Annexe B.....	47
Référence bibliographique.....	49

Liste des figures

Figure I-1: un processus commandé.....	3
Figure I-2 : Schéma d'asservissement.....	4
Figure I-3 : Représentation additive des incertitudes non structurées.....	6
Figure I-4-a : Représentation multiplicatives en entrées des incertitudes non structurées.....	7
Figure I-4-b : Représentation multiplicative en sorties des incertitudes non structurées.	7
Figure I-5-a : Représentation des incertitudes structurées par blocs.....	8
Figure I-5-b : Représentation des incertitudes structurées.....	8
Figure II-1 : asservissement en boucle fermée.....	11
Figure II -2 : problème H_∞ standard.....	12
Figure II -3 : Introduction des fonctions de pondérations.....	14
Figure II-4: Schéma du système pondéré.....	22
Figure III-1 : problème standard H_∞	31

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

L'automatique est un domaine essentiel de l'ingénierie qui se concentre sur la création et la gestion des systèmes capables de contrôler et de réguler des processus dynamiques de manière autonome. Grâce à des principes comme la régulation et la commande, elle permet de surveiller et d'ajuster les systèmes pour atteindre des objectifs précis, optimiser leur fonctionnement et garantir leur efficacité. Ce domaine joue un rôle important dans l'amélioration des processus industriels en réduisant les erreurs humaines, en optimisant l'utilisation des ressources, et en gérant des systèmes de plus en plus complexes. L'automatique est aussi indispensable pour le développement des technologies avancées telles que les véhicules autonomes, les robots et les systèmes énergétiques intelligents. En dehors du secteur industriel, elle impacte également la qualité de vie en facilitant la gestion des infrastructures et des dispositifs médicaux. Grâce à sa capacité à réduire les coûts et les risques tout en favorisant le développement durable, l'automatique est cruciale pour relever les défis technologiques actuels.

Cependant, avec l'évolution rapide des technologies et la complexité croissante des systèmes, plusieurs problématiques émergent. L'une des plus importantes concerne la gestion des systèmes non linéaires, souvent complexes et imprévisibles, nécessitant des approches robustes pour garantir la stabilité et la performance. Dans ce contexte, la commande robuste joue un rôle essentiel en s'assurant que les systèmes restent stables malgré les incertitudes et perturbations. Parmi les méthodes les plus utilisées, on retrouve la commande H_∞ , qui permet d'optimiser la performance des systèmes tout en minimisant les impacts des erreurs de modélisation et des perturbations extérieures. Cette technique garantit que les systèmes fonctionnent de manière fiable, même dans des conditions difficiles.

Le choix du thème de la commande H_∞ pour les systèmes non linéaires affines en entrée se justifie par l'importance croissante de ces systèmes dans les applications modernes, où la robustesse, la stabilité et la performance sont des exigences critiques. Les systèmes non linéaires sont courants dans la nature et l'industrie, qu'il s'agisse de robots, de véhicules autonomes ou de systèmes énergétiques. Leur comportement imprévisible et complexe rend cependant difficile l'utilisation des méthodes de commande classiques, d'où la nécessité d'approches robustes comme la commande H_∞ . Cette méthode est capable de gérer les incertitudes et perturbations, minimisant ainsi leur impact sur la performance globale du système. Elle est particulièrement adaptée aux systèmes non linéaires où garantir la stabilité est un véritable défi. En se concentrant sur les systèmes non linéaires affines en entrée, ce thème aborde une problématique pratique, car ces systèmes représentent une classe commune dans l'ingénierie.

Introduction générale

Le problème à résoudre dans ce travail est de concevoir un contrôleur H_∞ capable d'assurer la stabilité et la performance d'un système non linéaire affine en entrée, malgré les incertitudes et perturbations externes. L'objectif est de réduire l'impact des perturbations tout en garantissant un suivi précis de la consigne. Les non-linéarités du système compliquent l'usage des méthodes classiques, rendant nécessaire l'application des techniques robustes. La commande H_∞ permettra de gérer ces non-linéarités tout en assurant une robustesse face aux variations imprévues des paramètres du système et aux perturbations, tout en minimisant une fonction de coût qui évalue l'effet de ces perturbations. L'objectif est de développer une solution robuste et adaptable à diverses conditions.

La commande robuste ont prouvé leur efficacité dans de nombreux problèmes de régulation ou de poursuite pour les systèmes linéaires mais lorsque le système entaché à des incertitudes, des perturbations ou des exigences sur les performances, dans ce cas, la commande robuste classique devient insuffisante pour répondre aux performances exigées. Pour surmonter ces obstacles, l'utilisation des méthodes de commande avancées comme (La méthode de synthèse QFT (Quantative Feedback Theory), la commande prédictive, la méthode de synthèses multi-objectives, la commande H_∞) est nécessaire. Dans le cadre de notre travail, on s'intéressera particulièrement à la dernière commande c'est-à-dire à la commande H_∞ car elle présente une solution plus performante aux problèmes cités auparavant.

Le mémoire est structuré en trois chapitres, chacun contribue à résoudre la problématique générale de la commande H_∞ pour les systèmes non linéaires affines en entrée.

Le premier chapitre traite des généralités sur la robustesse et la commande robuste, en exposant les principes de base nécessaires à la gestion des incertitudes et perturbations.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation de la théorie de la commande H_∞ appliquée aux systèmes linéaires. Il aborde le problème H_∞ standard et détaille sa résolution à l'aide de la méthode basée sur les équations de Riccati, en finissant par appliquer cette dernière sur un exemple de pendule inversé.

Le troisième chapitre présente la théorie de la commande H_∞ pour les systèmes non linéaires. Il explore le problème H_∞ dans un contexte non linéaire et expose sa résolution en utilisant la méthode des approximations successives avec un exemple d'application de la commande H_∞ non linéaire sur un modèle d'un pendule inversé.

Ce mémoire est clôturé par une conclusion générale sur ce qui a été fait et des perspectives pour d'éventuelles améliorations de ce travail.

CHAPITRE I:
GENERALITES SUR LA COMMANDE
ROBUSTE

I.1. Introduction :

L'Automatique est une discipline scientifique qui vise à conférer à un dispositif donné, appelé système, des propriétés souhaitées et ce, sans nécessité d'une intervention humaine. Une telle discipline requiert d'attribuer un modèle au comportement du dit système (phase de modélisation) et de l'utiliser afin, d'une part, de mieux comprendre son comportement (phase d'analyse) et d'autre part, d'agir sur le système dans le but d'améliorer ses propriétés (phase de commande). La robustesse des systèmes asservis est une notion importante en automatique. Les systèmes sont soumis à des perturbations externes et aux bruits de mesure, à ceux-ci vient s'ajouter le fait que la notion de la fonction de transfert n'est qu'un modèle mathématique décrivant le système à étudier, ce modèle n'est pas toujours fidèle au système à cause, des incertitudes paramétriques et des dynamiques négligées. Ce chapitre traite quelque notion sur la robustesse et la commande robuste.

I.2. Généralités sur la commande robuste :

I.2.1. Système de commande :

Les processus étudiés en générale sont des systèmes physiques qui évoluent au cours du temps, sous l'effet d'influences internes et externes, et sur lesquels on peut faire des mesures. Les signaux qui nous intéressent sont appelées *variables de sortie*. Les grandeurs agissant sur le processus, et donc sur ses sorties, sont appelées *variables d'entrée*. Le processus est affecté par deux types de variables d'entrée : les commandes, sur lesquelles on peut agir, et les perturbations, sur lesquelles on n'a pas d'action. Parmi ces dernières, on distingue les perturbations mesurées et les perturbations non mesurées.

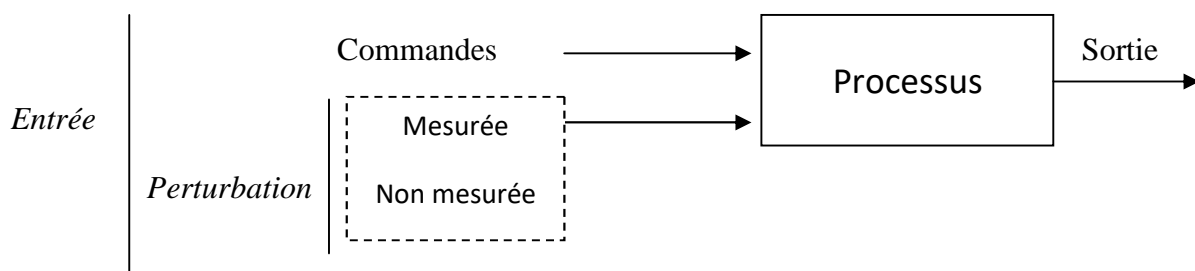


Figure I-1: un processus commandé.

Commander un processus, c'est déterminer les commandes à lui appliquer, de manière à assurer aux variables d'état ou aux sorties un comportement précisé par un cahier des charges. Ces commandes sont délivrées par un organe de commande ; le processus et son organe de commande constituent le système commandé.

I.2.2. Propriétés d'un système commandé :

Un système commandé doit être STABLE, PRECIS et RAPIDE :

- **Stabilité** : la grandeur de sortie doit converger vers une valeur finie si le signal d'entrée est limité.
- **Précision** : l'erreur entre la mesure et la valeur désirée doit être la plus petite possible.
- **Rapidité** : il doit répondre rapidement à une excitation.

I.3. La robustesse et la commande robuste :

I.3.1. La robustesse :

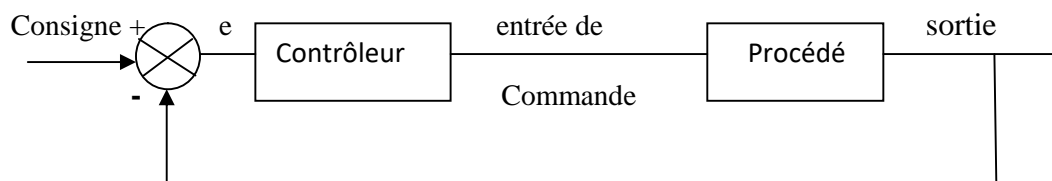


Figure I-2 : Schéma d'asservissement.

La robustesse fait référence à la capacité d'un système, à résister aux contraintes, aux perturbations ou aux conditions défavorables sans subir de dommages significatifs ou sans perdre ses fonctionnalités essentielles. C'est une qualité importante dans de nombreux domaines, y compris l'ingénierie, la technologie, l'informatique...ect

Dans le contexte de l'ingénierie et de la technologie, la robustesse est souvent mesurée par la capacité d'un système à maintenir ses performances malgré les variations dans son environnement ou dans les conditions d'utilisation.

I.3.2. Type de robustesse :

A. Robustesse en stabilité :

Un système est robuste en stabilité s'il demeure stable en présence d'incertitudes comme les erreurs de modélisation. La stabilité d'un système linéaire ne dépend pas des signaux exogènes, elle dépend des éléments de la structure du système [30], elle est obtenue si le procédé bouclé par la commande reste stable même si le modèle utilisé dans les calculs ne correspondent pas parfaitement à la réalité.[10][31]

B. Robustesse en performances :

Un système est robuste en performances si ses performances sont conservées malgré les perturbations, les performances peuvent se mesurer en termes de temps de réponse du système, d'amortissements des modes ...

L'analyse de la robustesse en performance cherche à établir si le système maintient les performances prévues pour les variations attendues des paramètres.

I.3.3. Modèle nominal :

Nous nous intéressons au contrôle d'un système multi-variable et son fonctionnement est défini par une classe de modèles. Ces modèles prennent la forme d'un système d'équation différentielle linéaire à coefficients constant pour définir le comportement nominal du processus et le modèle d'incertitude. Le modèle nominal $G(s)$ et le modèle d'incertitude incluent toutes les dynamiques de processus possible en fonctionnement normal.

Le modèle nominal(ou de référence) admet une réalisation dans l'espace d'état. Il est possible d'écrire le modèle d'état sous la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (I-1)$$

$$y = Cx + Du \quad (I-2)$$

Où

x : vecteur d'état

y : vecteur d'observation

A, B, C, D : modèle d'état

Le modèle nominal peut également prendre une représentation fréquentielle, sous la forme d'une matrice de transfert $G(s)$, obtenue par l'expression ci-dessous

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D \quad (I-3)$$

I.3.4. Fonction de sensibilité :

Les fonctions de sensibilité constituent l'outil mathématique permettant à l'automaticien d'interpréter les clauses d'un cahier de charges, exprimées en littérature, en fonctions mathématiques en vue de les optimiser. Le comportement entrée-sortie fait intervenir les fonctions de sensibilité S et de sensibilité complémentaire T :

$$T = \frac{y}{r} = \frac{GK}{1+GK}; \quad S = \frac{y}{d} = \frac{1}{1+GK} \quad (I-4)$$

Tel que y est la sortie du système, r est la consigne et d est une perturbation exogène (comme une perturbation extérieure ou un bruit).

S et T sont complémentaire, c'est-à-dire : $S+T=1$

La fonction de sensibilité joue un rôle prépondérant pour quantifier l'amplification des perturbations par la boucle fermée. [29]

On considère 2 types de sensibilités :

A. Fonction de sensibilité en entrée :

$$S_u(s) = (1 + K(s)G(s))^{-1} \quad (I-5)$$

B. Fonction de sensibilité en sortie :

$$S_y(s) = (1 + G(s)K(s))^{-1} \quad (I-6)$$

I.3.5. Les incertitudes:

Les modèles utilisés pour la commande robuste sont constitués d'un modèle nominal $G(s)$ et d'un modèle pour les incertitudes $\Delta(s)$. Le modèle mis en place traduit les relations existantes entre les commandes et les sorties. La qualité du modèle dépend du faible écart avec les dynamiques du régime réel. Les origines de provenances des incertitudes sont multiples : incertitudes sur des paramètres physiques, dynamiques négligées, fonctionnements sous des conditions extrêmes

Les incertitudes sont représentées par deux types : non structurées et structurées.

I.3.5.1. Les incertitudes non structurées :

Les incertitudes non structurées ont pour origine la non prise en compte de certaines dynamiques dans la modélisation, ou la linéarisation autour d'un point de fonctionnement.

Les perturbations peuvent être rassemblées sous forme d'un seul et unique bloc Δ , qui représente les dynamiques en hautes fréquences. Ceci est dû au fait que des dynamiques sont négligées au cours de la modélisation.

Dans le cas des systèmes linéaires, le bloc d'incertitudes est symbolisé sous la forme d'une matrice de transfert. On représente cette matrice de transfert en fonction du procédé réel $G_p(s)$ et du modèle nominal $G(s)$. Les différents types d'incertitudes non structurées sont au nombre de trois : additives, multiplicatives en entrée et multiplicatives à la sortie.

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LA COMMANDE ROBUSTE

A. Incertitudes additives: Elles représentent, en général, des incertitudes absolues par rapport au modèle nominal. Cette représentation est souvent utilisée pour modéliser des dynamiques ou des non linéarités négligées

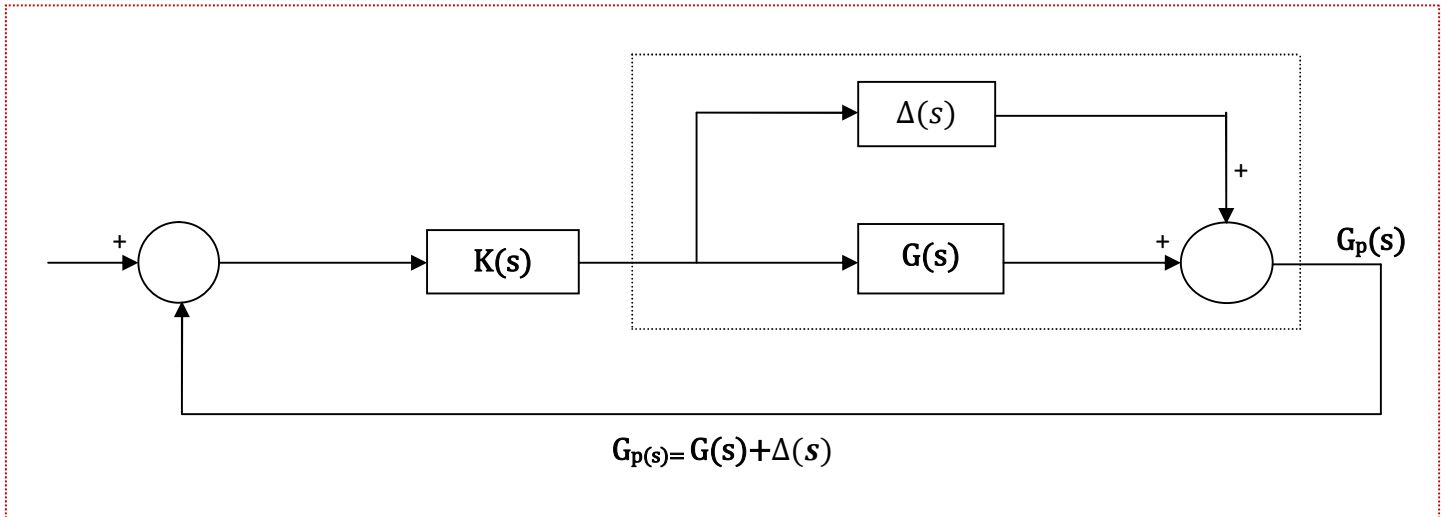


Figure I-3 : Représentation additive des incertitudes non structurées.

B. Incertitudes multiplicatives : Elles permettent de définir les écarts en termes de variation par rapport au modèle nominal. Elles peuvent être introduites sous forme multiplicative en entrée ou en sortie. Elles peuvent être prises en considération sous forme directe ou inverse. Les formes multiplicatives en entrée sont généralement utilisées pour prendre en compte les erreurs de modélisation des actionneurs ou du convertisseur alimentant la machine. Les incertitudes multiplicatives en sortie modélisent généralement les défauts des capteurs de mesure.

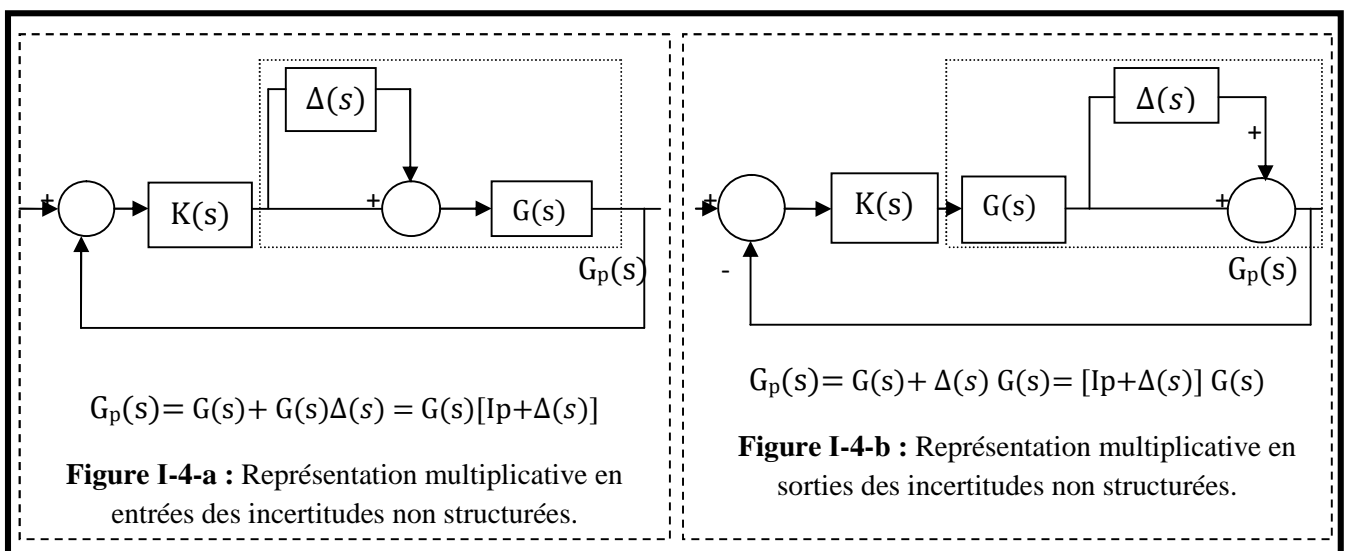


Figure I-4-a : Représentation multiplicative en entrées des incertitudes non structurées.

Figure I-4-b : Représentation multiplicative en sorties des incertitudes non structurées.

I.3.5.2. Les incertitudes structurées :

Les incertitudes structurées concernent les variations paramétriques des dynamiques des procédés et les coefficients des équations différentielles du procédé, elle engendre une forme de structuration dans la matrice des incertitudes Δ .

En général, un système possède des incertitudes multiples et localisées. Le problème d'analyse de la stabilité robuste avec ce type d'incertitudes peut alors se ramener à une matrice d'incertitudes sous forme diagonale formée de blocs réels ou complexes, parfois répétés.

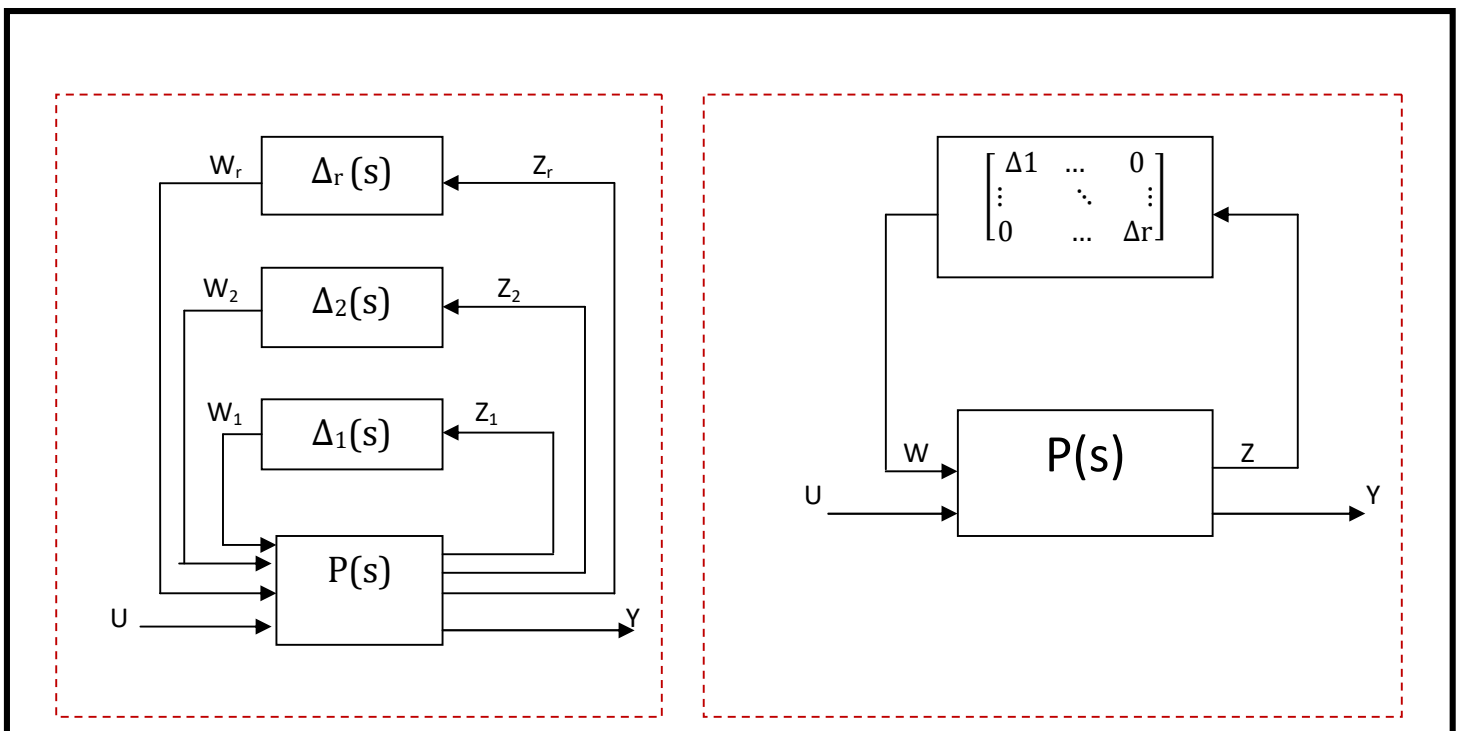


Figure I-5-a : Représentation des incertitudes structurées par blocs.

Figure I-5-b: Représentation des Incertitudes Structurées.

I.3.6. La commande robuste :

La commande robuste est un type de commande qui vise à garantir les performances et la stabilité d'un système face à des perturbations du milieu et les incertitudes du modèle. En effet, le modèle mathématique qui modélise un système réel est une représentation qui vise à approximer au mieux, avec des hypothèses simplificatrices, le système qu'on veut commander. Il existe donc un écart entre le comportement observé du système réel et son modèle interne. La commande robuste vise à déterminer une loi de commande qui soit capable de garantir des critères de performance et stabilité pour un système dont le modèle varie autour du modèle théorique ou nominal. Par la même approche, on peut rendre le système robuste face aux perturbations extérieures (par

exemple, une rafale de vent sur un avion de ligne) qui en somme peuvent être considérées comme une modification du modèle interne.

I.3.7. Les commandes robustes les plus utilisées :

Dans la littérature il existe plusieurs commandes robustes notamment :

I.3.7.1. La méthode de synthèse robuste QFT (Quantitative Feedback Theory) :

Cette commande initialement développée par le professeur Isaac Horowitz dans les années 1970 est une approche fréquentielle qui permet de prendre en compte l'incertitude portant sur le procédé par des domaines d'incertitudes fréquentiels

nommés « gabarits » et construits pour un ensemble de fréquences sur le diagramme de Black-Nichols. Cette modélisation totalement structurée de l'incertitude permet d'obtenir des commandes à la fois robustes et aussi performantes que possible.

I.3.7.2. La commande prédictive:

La commande prédictive est une technique de commande avancée de l'automatique. Le principe de cette technique est d'utiliser un modèle dynamique du processus à l'intérieur du contrôleur en temps réel afin d'anticiper le futur comportement du procédé. La commande prédictive fait partie des techniques de contrôle à modèle. En anglais on utilise le terme **MPC** ou **MBPC** pour qualifier la commande prédictive : *Model Predictive Control* ou aussi PFC: "Predictive Functional Control". Cette méthode a été inventée par un Français, J. Richalet, en 1978 et généralisée par D.W. Clarke en 1987.

La commande prédictive peut être utilisée pour commander des systèmes complexes comportant plusieurs entrées et sorties où le simple régulateur PID est insuffisant. Cette technique est particulièrement intéressante lorsque les systèmes possèdent des retards importants, des réponses inverses et de nombreuses perturbations.

I.3.7.3. La commande adaptative :

La commande adaptative est une approche de contrôle qui ajuste dynamiquement les paramètres du contrôleur en fonction des variations du système ou de l'environnement. Elle est particulièrement utile lorsque le système à contrôler est sujet à des changements non prévisibles ou lorsque les caractéristiques du système ne sont pas bien connues a priori.

I.3.7.4. commande H_∞ :

La synthèse H_∞ propose un cadre général pour le calcul d'un correcteur, en manipulant des concepts fréquentiels. Il permet de prendre en compte des objectifs de stabilité, marges de stabilité et de performances, à savoir les objectifs de robustesse par retour dynamique de sortie.

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LA COMMANDE ROBUSTE

La commande H_∞ est Conçue pour minimiser l'effet des perturbations et des incertitudes du système sur la performance.

I.4. Conclusion :

Dans le cadre d'une approche améliorée de la conception d'une commande robuste, ce chapitre a permis de définir les concepts relatifs à la robustesse et aux incertitudes, ainsi que les principales directions de la robustesse d'un système bouclé : robustesse en performance et robustesse en stabilité. Cela nous conduit à rechercher une commande robuste adéquate qui prenne en compte à la fois la robustesse et les performances souhaitées en boucle fermée. L'une des meilleures commandes robustes, issue des efforts pour intégrer les objectifs de robustesse dès la synthèse, est la commande H_∞ , qui sera abordée dans les chapitres suivants.

CHAPITRE II :

LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_{∞}

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_{∞}

II.1. Introduction :

La commande H_{∞} est considérée comme une méthode permettant de modéliser les matrices de transfert de la boucle fermée et d'intégrer ainsi différents objectifs de performance et de robustesse dans la procédure de synthèse de correcteur.

Dans ce chapitre, nous étudierons les notions de base de la commande H_{∞} linéaire, et une méthode de résolution qui est la méthode basée sur les équations de Riccati.

II.2. Principes de la commande H_{∞} pour les systèmes linéaires

La commande H_{∞} apporte une solution au problème de contrôle avec un certain nombre de contraintes. Elle permet de prendre en compte des spécifications données par le cahier de charge qui peut contenir les spécifications suivantes:

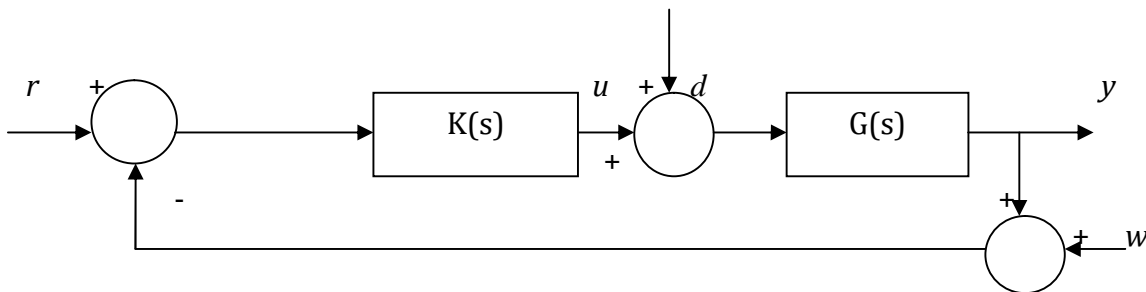


Figure II-1 : asservissement en boucle fermée

- Le signal de référence ou la consigne r représente la valeur souhaitée pour le système.
- Le signal de commande u est calculé par la régulation H_{∞} pour minimiser l'effet des perturbations et suivre la référence.
- d c'est la perturbation.
- Le signal de sortie y est la réponse du système aux signaux de référence et de perturbation.
- w est le bruit.

$K(s)$ est le contrôleur et $G(s)$ est le système.

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

II.3. Problème H_∞ standard :

Sous la forme la plus fondamentale, le problème H_∞ est un problème de réjection de perturbation. Il comporte à minimiser l'effet d'une perturbation d sur le comportement du système. Le signal w est supposé d'énergie finie. On peut agir sur le système par une commande u et on dispose d'une observation y . Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande :

$$u=K(s)y \quad (\text{II-1})$$

qui minimise l'impact de d sur y . On mesurera cet impact par le rapport :

$$\frac{\|y\|^2}{\|d\|^2} \quad (\text{II-2})$$

La stabilité interne du système bouclé devra bien sûr être assurée.

La figure (II -2) représente le problème standard de la commande H_∞ :

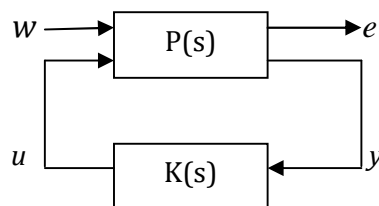


Figure II -2 : problème H_∞ standard

- w : représente les entrées extérieures, telles que les signaux de référence, les perturbations et les bruits
- u : représente les commandes élaborées par le correcteur $K(s)$
- e : représente le vecteur des erreurs que l'on veut maintenir à 0, ou du moins minimiser entre les sorties désirées et les sorties mesurées.
- y : représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

Dans cette figure $P(s)$ représente le modèle augmenté, et $K(s)$ le correcteur. Le système $P(s)$ est formé des quatre transferts multi variables existant entre les entrées u (commande du système) et w (entrées exogènes: consignes, perturbations,...) et les sorties y (mesures) et z (sorties régulées, ou grandeurs à surveiller) :

La matrice de transfert $P(s)$ peut être partitionnée comme suit :

$$\begin{bmatrix} e(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II-3})$$

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

Donc :

$$\begin{aligned} e &= P_{11} w + P_{12} u \\ y &= P_{21} w + P_{22} u \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

avec :

$$u = Ky$$

En éliminant u et y de ces équations, nous obtenons :

$$e(s) = (P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21})w(s) \quad (\text{II-5})$$

Si nous considérons

$$F_b(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (\text{II-6})$$

Alors

$$e(s) = F_b(P, K)w(s) \quad (\text{II-7})$$

On appelle $P(s)$ le système et on le supposera propre. Lorsque ce système est rebouclé sur la commande $u = Ky$, la matrice de transfert entre w et e du système bouclé, est donné par la transformation fractionnaire linéaire (LFT: Linear Fractionnel Transformation) inférieure:

$$F_b(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \quad (\text{II-8})$$

II.3.1. Problème H_∞ optimal:

Le problème H_∞ optimal est de minimiser $\|F_b(P(s), K(s))\|_\infty$ sur l'ensemble des compensateurs $K(s)$ qui stabilisent le système de manière interne.

Le minimum est noté γ_{opt} appelé « gain H_∞ optimal ». Le problème sous-optimal associé joue également un rôle important.

II.3.2. Problème sous-optimal :

Consiste, pour un réel positif γ donné, trouver un correcteur $K(s)$ telle que :

- ✓ Le système bouclé $F_b(P, K)$ soit stable (tous les pôles du système en boucle fermée sont à partie réelle négative).
- ✓ $\|F_b(P, K)\|_\infty < \gamma$

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

II.3.3. Introduction des fonctions de pondération :

On définit les fonctions de pondération comme des outils pour atteindre les objectifs de stabilité et de performance. Elles sont appliquées aux différents signaux sous forme de filtres.

La Figure II -3 représente les différents signaux avec leurs fonctions de pondération, Nous considérons dans cette figure que l'erreur ε est pondérée par $W_1(s)$; la commande u par $W_2(s)$; l'entrée de perturbation d par $W_3(s)$.

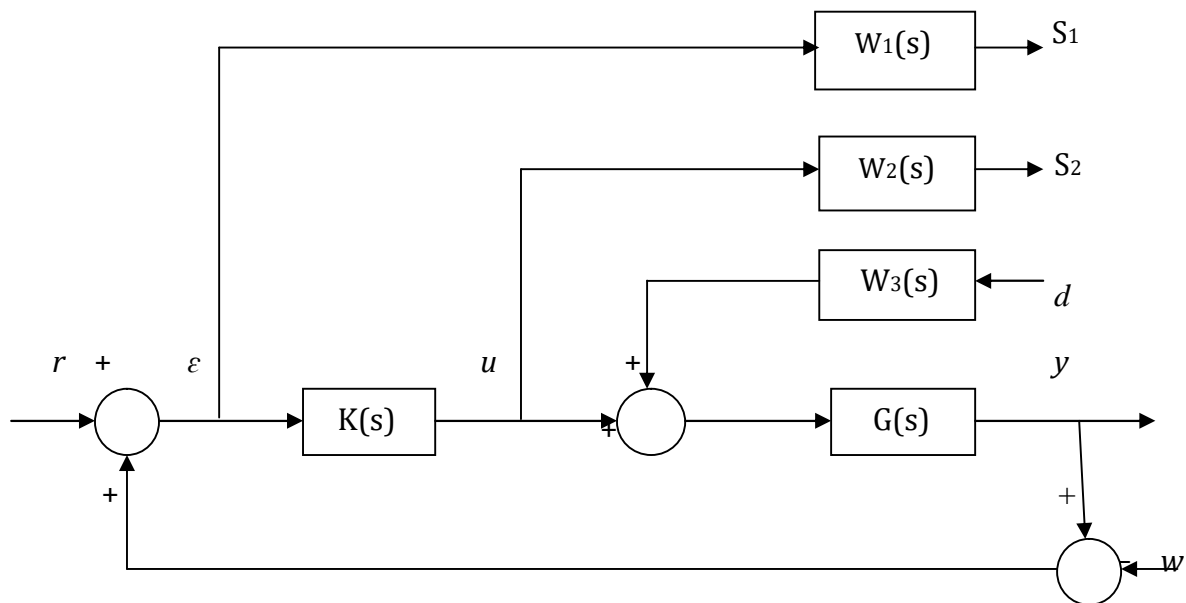


Figure II -3 : Introduction des fonctions de pondérations

- r la consigne
- ε l'erreur
- u la commande
- d la perturbation
- y la sortie
- w le bruit

En considérant r et d comme entrées et $S1$ et $S2$ comme signaux à surveiller nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} S1(s) \\ S2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s)S_y(s) & W_1(s)S_y(s)G(s)W_3(s) \\ W_2(s)K(s)S_y(s) & W_2(s)K(s)S_y(s)G(s)W_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II-9})$$

Avec : $S_y(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}$ est la fonction de sensibilité en sortie.

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

Le problème H_∞ correspondant consiste à la détermination d'une valeur de $\gamma > 0$, et d'un contrôleur $K(s)$ qui stabilise le système bouclé et assurant la condition suivante :

$$\left\| \begin{array}{cc} W_1(s)S_y(s) & W_1(s)S_y(s)G(s)W_3(s) \\ W_2(s)K(s)S_y(s) & W_2(s)K(s)S_y(s)G(s)W_3(s) \end{array} \right\|_\infty < \gamma \quad (\text{II-10})$$

L'avantage de considérer ce problème c'est qu'il permet de modéliser plus facilement les transferts $S_y(s)$; $K(s)S_y(s)$; $S_y(s)G(s)$; $K(s)S_y(s)G(s)$ par les filtres $W_1(s)$; $W_2(s)$ et $W_3(s)$. [19]

Si l'équation (II-10) est vérifiée alors les propriétés suivantes le sont aussi ; [19]

$$\|W_1(s)S_y(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |S_y(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|} \quad (\text{II-10a})$$

$$\|W_2(s)K(s)S_y(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |K(j\omega)S_y(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|} \quad (\text{II-10b})$$

$$\|W_1(s)W_3(s)S_y(s)G(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |S_y(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)W_3(j\omega)|} \quad (\text{II-10c})$$

$$\|W_2(s)W_3(s)K(s)S_y(s)G(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |K(j\omega)S_y(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)W_3(j\omega)|} \quad (\text{II-10d})$$

D'après les relations précédentes on remarque que la réponse fréquentielle de chacune des Fonctions $S_y(j\omega)$; $K(j\omega)S_y(j\omega)$; $S_y(j\omega)G(j\omega)$; $K(s)S_y(s)G(s)$ est forcée par un gabarit qui dépend des filtres choisis $W_1(j\omega)$; $W_2(j\omega)$ et $W_3(j\omega)$.

II.3.4. Choix des fonctions de pondération :

Le choix des fonctions de pondération $W_1(j\omega)$; $W_2(j\omega)$ et $W_3(j\omega)$ permis à l'utilisateur d'agir sur les réponses fréquentielles des transferts $S_y(j\omega)$; $K(j\omega)S_y(j\omega)$; $S_y(j\omega)G(j\omega)$; $K(j\omega)S_y(j\omega)G(j\omega)$.

- $S_y(j\omega)$ doit être choisi faible dans les basses fréquences a pour but d'assurer l'objectif de la précision.
- $K(j\omega)S_y(j\omega)$ doit être choisi faible dans les hautes fréquences pour éviter de solliciter inutilement la commande, ou d'exciter des dynamiques mal modélisées.
- $S_y(j\omega)G(j\omega)$ doit être choisi faible dans les basses fréquences même que les moyennes fréquences pour but d'assurer une réjection correcte de la perturbation.
- $K(j\omega)S_y(j\omega)G(j\omega)$ doit être choisi faible dans les hautes fréquences pour éviter d'exciter inutilement la commande.

On voit donc que la réponse fréquentielle de chacune des fonctions S_y $K S_y$ $S_y G$ $K S_y G$ est contrainte par un gabarit qui dépend des filtres choisis.

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

Pour assurer les hypothèses restrictives de résolution du problème H_∞ , généralement on choisit les fonctions des filtres comme suit :

- Pour $W_1(s)$:

$$W_1(s) = \frac{1}{M\varepsilon} \frac{s + \omega\varepsilon M\varepsilon}{s + \frac{\omega\varepsilon}{\varepsilon}} \quad (\text{II-11})$$

On choisit $M\varepsilon$ de sorte à garantir une erreur statique faible mais non nulle. $\omega\varepsilon$ désigne la bande passante souhaitée, elle est choisie proche de la bande passante minimale désirée. ε représente l'erreur statique autorisée.

- Pour $W_2(s)$:

$$W_2(s) = \frac{1}{\mu} \frac{1+s}{1+s} \frac{\omega u}{\omega u \mu} \quad (\text{II-12})$$

μ est choisi très faible. ωu est choisi de sorte à régler la décroissance du gain du correcteur en hautes fréquences.

- Pour $W_3(s)$: selon le type de perturbation et du bruit à rejeter.

Les fonctions de pondération ne sont pas nécessairement des fonctions du premier ordre. Elles peuvent être constantes, ou d'ordre supérieur, suivant les contraintes du cahier de charges et les besoins du concepteur pour la réalisation du correcteur. Le choix de ces fonctions n'est pas implicite et il est sujet de quelques tâtonnements pour arriver aux « meilleures fonctions de pondération ».

II.3.5. Problème de sensibilité mixte : [32]

Le but du problème de sensibilité mixte est de trouver un correcteur $K(s)$ qui assure la stabilité interne de la boucle.

La condition qui satisfait le problème est :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1(s)S(s) \\ W_2(s)K(s)S(s) \\ W_3(s)T(s) \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{II-13})$$

- L'objectif de performance nominale est atteint si : [19]

$$\|W_1(s)S(s)\|_\infty < 1 \quad (\text{II-14})$$

- L'objectif de la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes de modèle représentées sous la forme additive non structurée est atteint si : [19]

$$\|W_2(s)K(s)S(s)\|_\infty < 1 \quad (\text{II-15})$$

- L'objectif de la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes de modèle représentées sous la forme multiplicative directe non structurée est atteint si :

$$\|W_3(s)T(s)\|_\infty < 1 \quad (\text{II-16})$$

T est la fonction de sensibilité complémentaire.

$K(s)S_y(s)$ et $T(s)$ jouent des rôles semblables; donc il suffit de résoudre l'un des deux problème suivant:

$$\left\| \begin{array}{c} W_1(s)S_y(s) \\ W_3(s)T(s) \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad \text{Ou} \quad \left\| \begin{array}{c} W_1(s)S_y(s) \\ W_2(s)K(s)S_y(s) \end{array} \right\|_\infty < 1$$

Ces deux problèmes sont désignés dans la littérature sous le nom de problème de sensibilité mixte. La commande H_∞ a trouvé de nombreuses applications dans des domaines diversifiés. Ces dernières années, elle est devenue l'une des méthodes les plus efficaces de la « commande robuste ». Sa présentation théorique est exposée dans de nombreux ouvrages [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28].

II.4. Résolution du problème de commande H_∞ :

Il existe plusieurs méthodes de résolution du problème de commande de H_∞ on cite a titre d'exemple : méthode de Youla, la méthode des inégalités matricielles (LMI) et la méthode de Riccati.

Dans ce mémoire nous allons exposer la méthode basée sur la résolution des équation de Riccati .

II.4.1. Résolution du problème standard H_∞ par les équations de Riccati:

Cette méthode, aussi connue sous le nom d'algorithme de Glover-Doyle, est apparue à la fin des années 1980 [03], [04], [05], et en générale mise en œuvre numériquement sur un ordinateur et elle repose sur la résolution d'une série d'équation de Riccati [08]. Elle reste aujourd'hui la méthode de résolution la plus utilisée et la plus fiable numériquement [06], [07] [08], [09], [11].

Cette méthode utilise une représentation d'état de la matrice d'interconnexion $P(s)$, que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II-17})$$

- x : l'état du système
- e : l'erreur
- y : la sortie du système
- w : représente les entrées extérieures, telles que les signaux de référence, les perturbations et les bruits
- u : la commande

L'équation de Riccati étant donnée par : [10], [12]

$$XA + A^T X - PXP + Q = 0 \quad (\text{II-18})$$

Avec : $P = \gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T$ et $Q = C_e^T C_e$

La solution stabilisante, si elle existe, sera une matrice symétrique telle que $(A - PX)$ est une matrice stable (ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative). Une telle solution sera notée :

$$X = Ric \begin{bmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (\text{II-19})$$

Pour résoudre le problème H_∞ standard, on suppose satisfaites les hypothèses suivantes : [19]

a) Les hypothèses :

Hypothèse 1 (H1) : La paire (A, B_u) est stabilisable et la paire (C_y, A) est détectable.

- ✓ Cette hypothèse classique de toute méthode utilisant les variables d'état. Elle garantit l'existence d'une loi de commande $K(s)$ qui stabilise le système en boucle fermée.

Hypothèse 2 (H2) : $\text{rang}(D_{eu}) = n_u$ et $\text{rang}(D_{yw}) = n_y$

- ✓ Ce sont des conditions suffisantes pour assurer que la loi de commande du correcteur soit propre.

Hypothèse 3 (H3) : $\forall \omega \in \mathbb{R} \text{ rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_u & D_{eu} \end{bmatrix} = n + n_u$

- ✓ Cette hypothèse garantit que le transfert P_{12} n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

Hypothèse 4 (H4) : $\forall \omega \in \mathbb{R} \text{ rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = n + n_y$

- ✓ Cette hypothèse garantit que le transfert P_{21} n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

n est l'ordre du système, n_u est l'ordre de la commande, n_y est l'ordre de la sortie

b) Hypothèses simplificatrices :

Pour simplifier le calcul de la solution du problème de commande H_∞ par la méthode basée sur les équations de Riccati, les hypothèses suivantes sont considérées [33]:

$$\begin{aligned}
 & \checkmark D_{ew} = 0 \quad D_{yu} = 0 \\
 & \checkmark D_{eu}^T [C_e \quad D_{eu}] = [0 \quad I_{nu}] \\
 & \checkmark \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} D_{yw}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{ny} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{II-20}$$

Le théorème suivant permet de décrire la solution du problème standard :

Théorème 1 :[9]

Sous les hypothèses H1 à H4 et les conditions (II-20). Le problème H_∞ standard à une solution si et seulement si les cinq conditions suivantes sont remplies:

- i) La matrice $H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_e^T C_e & -A \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe Imaginaire.
- ii) Il existe une matrice symétrique $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$
- iii) La matrice $J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_e^T C_e - C_y^T C_y \\ -B_w B_w^T & -A \end{bmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire
- iv) Il existe une matrice symétrique $Y_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0$ solution de l'équation de Riccati

$$Y_\infty A^T + A Y_\infty + Y_\infty (\gamma^{-2} C_e^T C_e - C_y^T C_y) Y_\infty + B_w B_w^T = 0 \tag{II-21}$$

$$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \tag{II-22}$$

Où $\rho()$ désigne le module de la plus grande valeur propre (rayon spectral).

La recherche du γ optimal est effectuée par dichotomie présentée plus loin. en testant, à chaque itération, l'existence d'une solution $K(s)$ pour le γ défini. Les algorithmes couramment implantés fournissent une solution appelée « correcteur central » défini ci-dessous. Cependant, il existe une infinité de solutions au problème sous optimal, pour γ fixé. [13]

Ce théorème nécessite donc la solution de deux équations de Riccati et la dernière condition introduit un lien entre les deux solutions. Enfin la solution du problème standard est donnée par le théorème suivant :

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

Théorème 2 : [9] [13] [14]

Sous les conditions du théorème 1, les correcteurs $K(s)$ stabilisant le système et satisfaisant $\|F_b(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$ sont décrits par la représentation suivante :

$$K(s) = F_b(K_a(s), \phi(s)) \quad (\text{II-23})$$

F_b est la transformation fractionnaire linéaire inférieure (LFT), $\phi(s) \in \mathbb{R} H_\infty$ est une matrice de transfert de dimensions $n_u \times n_y$ arbitraire vérifiant $\|\phi(s)\|_\infty < \gamma$ et $K_a(s)$ est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ u(t) \\ u_a(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T & Z_\infty B_u \\ -B_u^T X_\infty & 0 & I_{nu} \\ -C_y & I_{ny} & 0 \end{bmatrix}}_{K_a(s)} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ y(t) \\ y_a(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II-24})$$

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_w B_w^T X_\infty - B_u B_u^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_y^T C_y \quad (\text{II-25})$$

$$Z_\infty = (I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (\text{II-26})$$

En particulier, le correcteur correspondant à $\phi(s)=0$ appelé **correcteur central**, admet la représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T \\ -B_u^T X_\infty & 0 \end{bmatrix}}_{K_\theta(s)} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

La mise en œuvre de cette solution consiste à utiliser, tout d'abord, les résultats du théorème 1, pour approcher la valeur optimale de γ par dichotomie (appelée aussi « γ -itération »), calculer, ensuite, le correcteur central en appliquant le théorème 2.

II.4.2. γ -itération (méthode de dichotomie):

γ -itération est un algorithme permettant d'approcher par dichotomie la valeur optimale de γ , en suivant les étapes suivantes :

- Choix d'un niveau de tolérance η sur le calcul de la valeur γ_0 et de deux valeurs γ_{min} et γ_{max} telle que, pour $\gamma = \gamma_{max}$, le problème H_∞ standard admet une solution et que pour $\gamma = \gamma_{min}$, le problème H_∞ standard n'admet pas de solution.
- Tester les conditions pour $\gamma = \frac{\gamma_{inf} + \gamma_{sup}}{2}$. Si elles sont vérifiées, poser $\gamma = \gamma_{sup}$ sinon poser $\gamma = \gamma_{inf}$.
- Si $\gamma_{max} - \gamma_{min} > \eta$, retourner à la deuxième étape.
- Calculer le correcteur central pour la dernière valeur de γ vérifiant les conditions.

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

II.5. Application de la commande H_∞ linéaire sur un modèle de pendule inversé : [19]

Pour tester la robustesse de cette commande, une application sur un pendule inversé sera effectuée.

Nous considérons un système de pendule inversé décrit dans l'annexe B, dont la dynamique est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u \quad (\text{II-27})$$

$$y = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (\text{II-28})$$

Nous rappelons que les états du système sont :

$x_1 = r$ est le déplacement

$x_2 = \dot{r}$ est la vitesse linéaire

$x_3 = \theta$ est l'angle (déplacement angulaire)

$x_4 = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire

Le déplacement est en mètre (m), et l'angle est en (rad).

Notre objectif est de stabiliser le système en position verticale, tout en assurant une réjection efficace des perturbations et une atténuation adéquate des bruits.

Pour concevoir un contrôleur H_∞ , il est nécessaire de définir au préalable des gabarits qui fixent les spécifications du système (temps de réponse en boucle fermée, erreurs statiques, etc.). Dans notre cas, les spécifications à respecter sont les suivantes :

- Bon suivi de la consigne avec une erreur d'ordre 10^{-6} sur la deuxième et la dernière sortie.
- Rejection de toutes les perturbations et tous les bruits.
- Minimisation de l'effort de commande.

Pour se faire, nous introduisons les fonctions de pondération suivante :

W_x sur l'erreur de poursuite.

W_u sur la commande pour la contrainte sur les actionneurs.

W_d et W_n sur les entrées exogènes (perturbations et bruits respectivement).

Notre système devient alors sous la forme suivante :

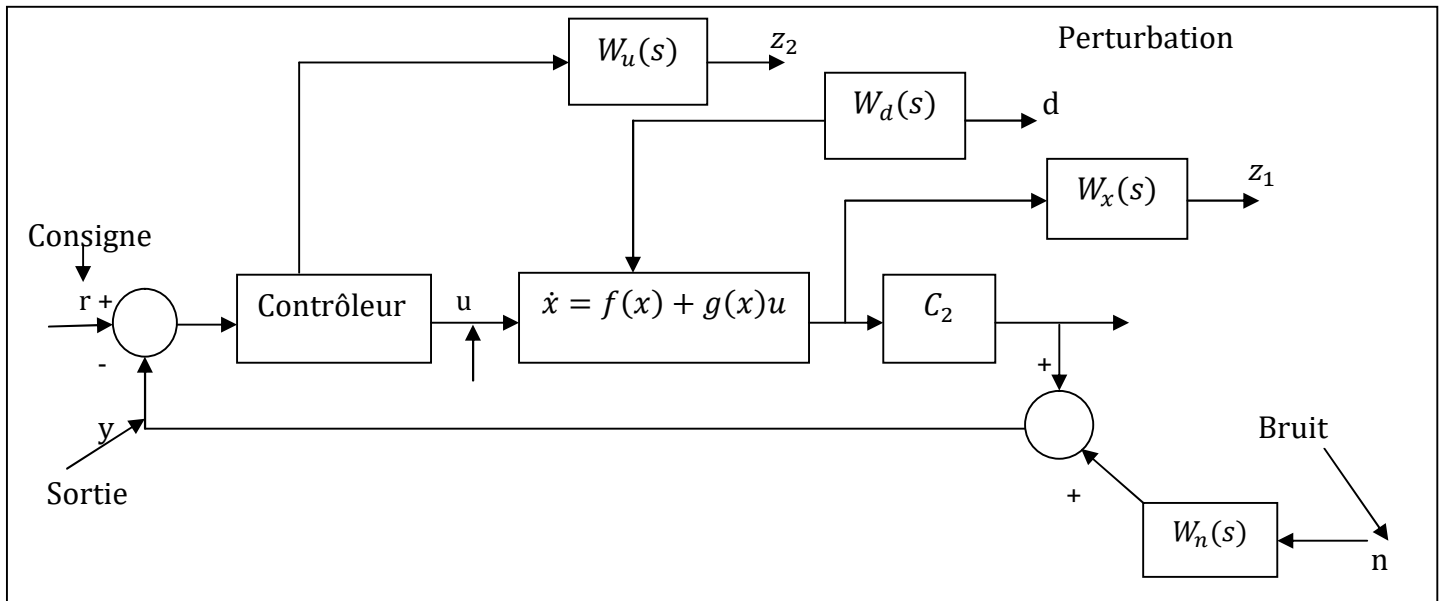


Figure II -4 : Schéma du système pondéré

Les fonctions de pondérations qui répondent au cahier de charge et vérifient les contraintes (II-9), sont les suivantes :

$$W_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, W_d = I_4, W_n = I_4, W_u = 1 \quad (\text{II-29})$$

Dans notre cas tous les gabarits ont une forme diagonale, ce qui permet de spécifier des performances pour chaque variable du système MIMO (Multi Inputs Multi Outputs).

En introduisant toutes ces fonctions de pondérations, la représentation d'état du pendule inversé devient :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u + [W_d \quad 0]w \quad (\text{II-30})$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + [0 \quad w_n]w \quad (\text{II-31})$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_n \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ W_n \end{bmatrix} u \quad (\text{II-32})$$

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

- w représente les bruits et les perturbations

La première étape est de linéariser le système. En linéarisant ce système, nous aboutirons au système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 24.1314 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{array} \right. \quad (\text{II-33})$$

Nous considérons $\gamma = 50$. Calculer par Matlab

La solution de l'équation de Riccati (II.18) est égale à:

$$X = \begin{bmatrix} 1.8237 & 1.6630 & 5.3125 & 1.0822 \\ 1.6630 & 2.4911 & 8.6063 & 1.7536 \\ 5.3125 & 8.6063 & 69.4446 & 14.1114 \\ 1.0822 & 1.7536 & 14.1114 & 2.8717 \end{bmatrix}$$

Nous appliquons la commande H_∞ , calculée à l'aide de la méthode basée sur les équations de Riccati, par simulation sur ce système, en considérant différentes conditions initiales et perturbations. L'objectif est de tester la robustesse de cette commande.

Résultats de simulations:

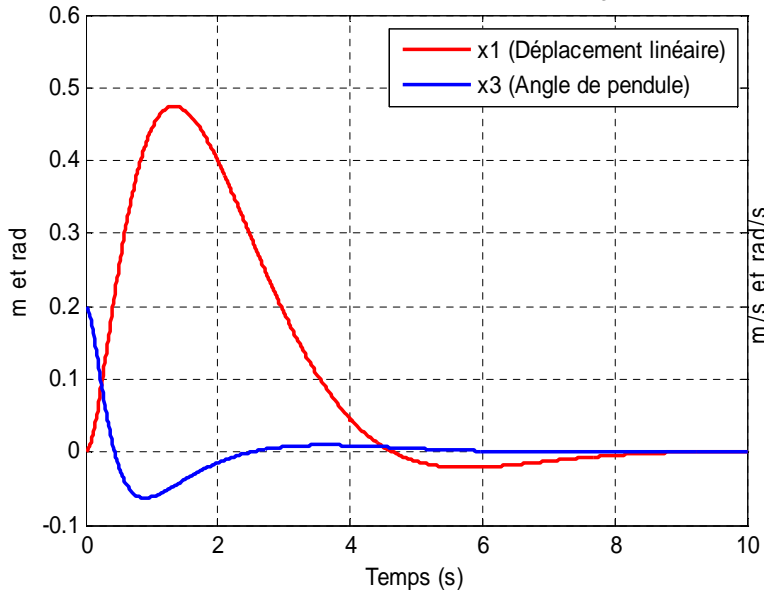
En appliquant la commande H_∞ linéaire calculée par la méthode basée sur les équations de Riccati sur le pendule inversé, nous aboutissons aux résultats de simulation suivants:

Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène nulle.

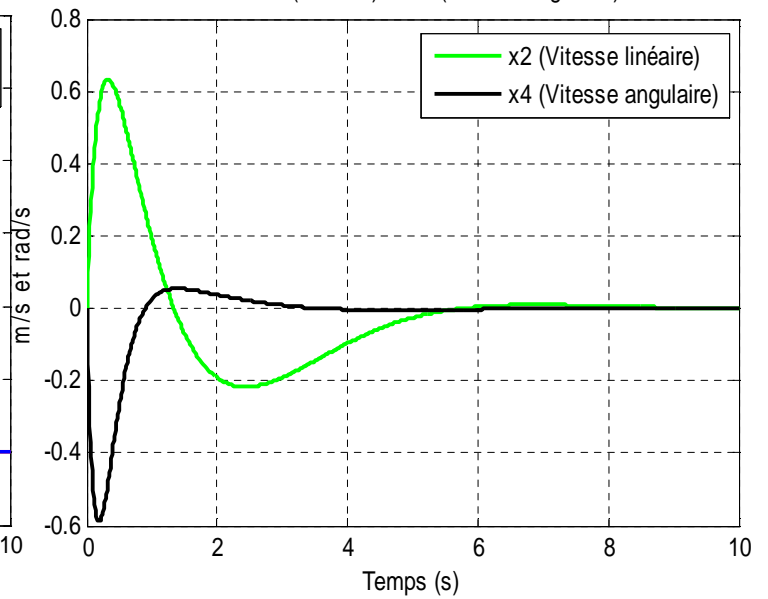
$w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0 * [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, et appliquée à $t=0s$, nous avons les résultats des figures suivantes:

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

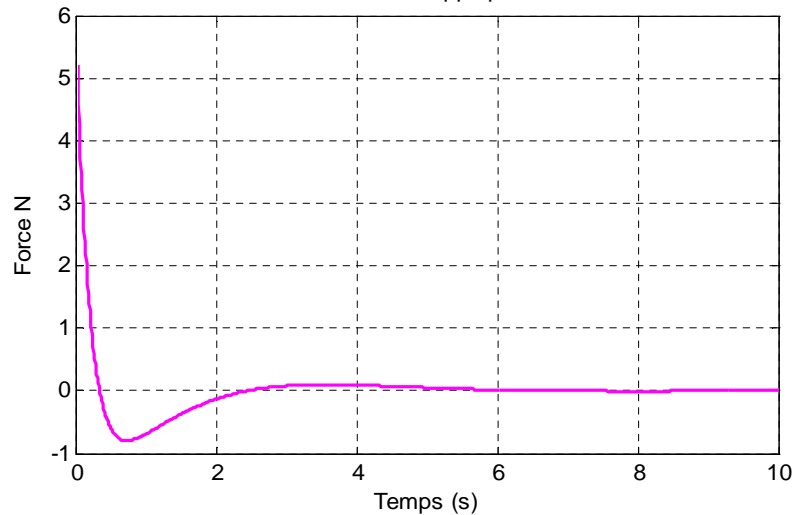
États x_1 (Déplacement linéaire) et x_3 (Angle)



États x_2 (Vitesse) et x_4 (Vitesse angulaire)



Commande appliquée u



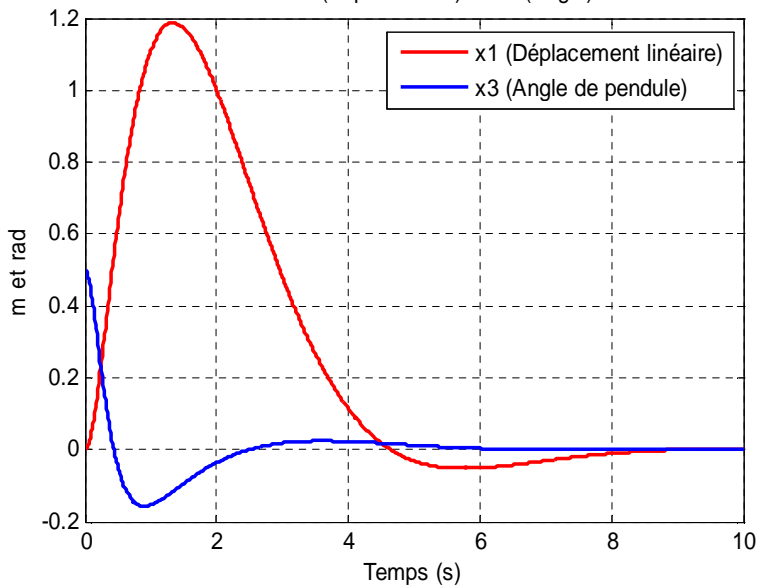
La commande représente la force qu'il faut appliquée pour maintenir le pendule à la position verticale.

Pour une valeur initiale $x_3 = \theta = 0.2 \text{ rad}$, et sans perturbation, le système commandé se stabilise à la position vertical après 8 secondes. Ayant une erreur maximale de 0.47 m sur r et une erreur maximale de 0.06 rad dans le sens négatif de θ .

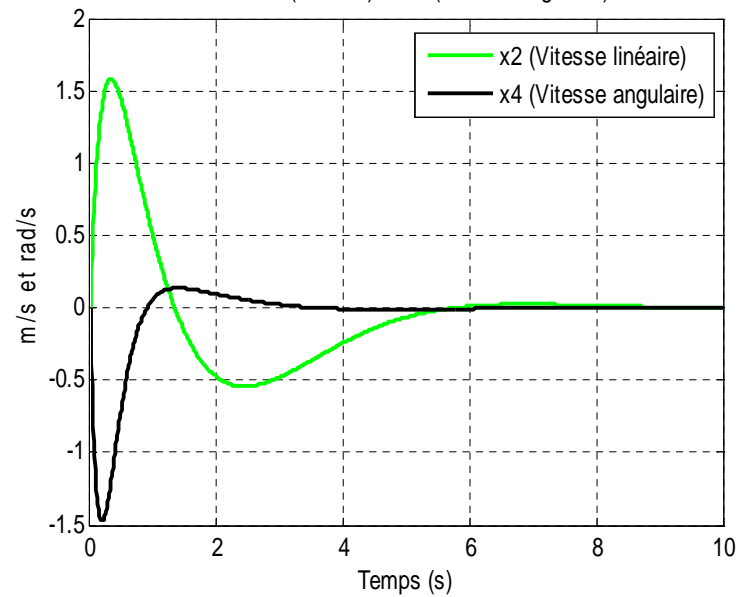
Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène nulle $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0 * [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, et appliquée a $t=0s$, nous avons les résultats des figures suivantes:

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

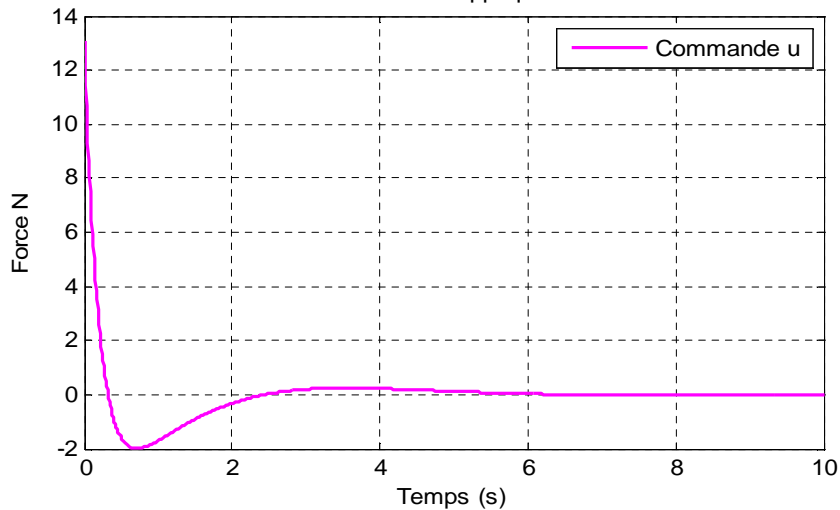
États x_1 (Déplacement) et x_3 (Angle)



États x_2 (Vitesse) et x_4 (Vitesse angulaire)



Commande appliquée u



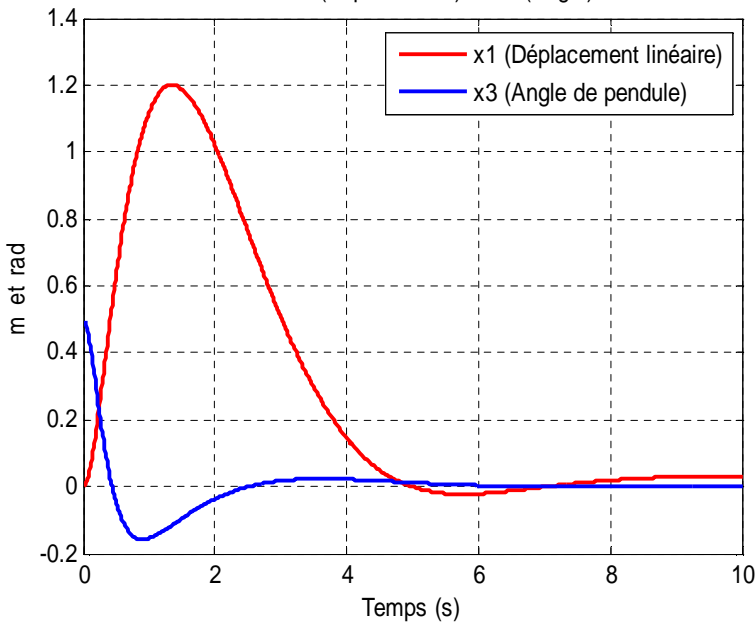
Pour une valeur initiale $x_3 = \theta = 0.5 \text{ rad}$, et sans perturbation, le système commandé se stabilise à la position vertical après 8 secondes. Ayant une erreur maximale de 1.2 m sur r et une erreur maximale de 0.16 rad dans le sens négatif de θ .

Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène

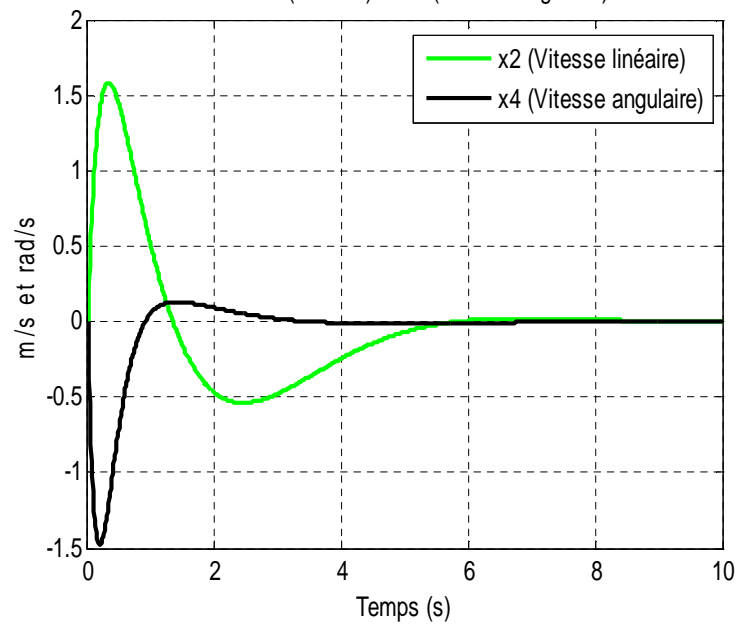
$w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.003 * [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, et appliquée à $t=0s$, nous avons les résultats des figures suivantes:

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

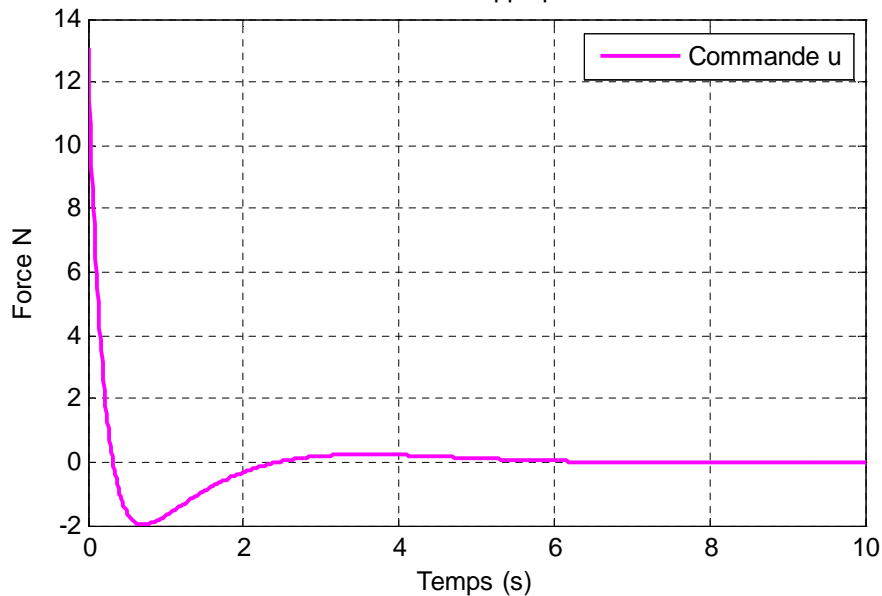
États x_1 (Déplacement) et x_3 (Angle)



États x_2 (Vitesse) et x_4 (Vitesse angulaire)



Commande appliquée u



La commande stabilise le système à la position verticale après 8 secondes. Les erreurs maximales sur r et θ sont respectivement : 1.2 m et 0.16 rad.

Avec les perturbations, la commande appliquée ramène systématiquement tous les états à 0, bien que le temps de réponse varie en fonction des conditions initiales, les valeurs des incertitudes et du moment de leur introduction. Pour différentes valeurs des perturbations, et peu importe le moment où elles sont appliquées, le pendule est maintenu à la position verticale.

CHAPITRE II : LE PRINCIPE DE LA COMMANDE H_∞

Les résultats de simulation montrent que la commande H_∞ linéaire, calculée à l'aide de la méthode basée sur les équations de Riccati, atteint les objectifs de stabilité et d'atténuation des perturbations. En effet, elle parvient à maintenir le pendule en position verticale malgré les perturbations extérieures.

II.6. Conclusion :

En conclusion, ce chapitre a présenté les principes fondamentaux de la commande H_∞ pour les systèmes linéaires. Nous avons d'abord introduit le problème H_∞ standard, qui vise à minimiser le gain maximal entre les perturbations et les performances du système. Ensuite, nous avons discuté de la résolution de ce problème par les équations de Riccati, une méthode classique qui permet d'obtenir des contrôleurs optimaux. Ces concepts constituent une base essentielle pour comprendre les défis associés à la commande H_∞ .

Etant la majorité des systèmes réels sont non linéaires, il est nécessaire de présenter la commande H_∞ des systèmes non linéaires, qui fera l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE III :

***COMMANDE H_{∞} DES SYSTEMES NON
LINEAIRES AFFINE EN ENTREES***

III.1. Introduction :

Aucun système physique n'est complètement linéaire, les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint. D'où la nécessité d'introduire la notion de la commande H_∞ des systèmes non linéaires.

III.2. Généralités sur les systèmes non linéaires :

Un système est dit non linéaire lorsque ses grandeurs caractéristiques reliées entre elles ne varient pas proportionnellement l'une par rapport à l'autre. Son comportement peut alors être décrit par une expression, un modèle ou des équations faisant intervenir les variables autrement qu'au premier degré [15].

Les conditions de proportionnalité et d'additivité ne s'appliquent plus aux systèmes non linéaires. Lors de l'étude des systèmes non linéaires on se heurte à plusieurs difficultés :

- L'analyse par des fonctions de transfert est impossible,
- La notion des pôles disparaît,
- Un système non linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et l'étude de leur stabilité est plus complexe que dans le cas linéaire pour le quel le concept de stabilité est global.

III.2.1. Représentation des systèmes linéaires :

Supposons que l'on dispose d'un modèle linéaire d'un procédé sous la forme d'une représentation d'état, la représentation d'état de ces systèmes, quand ils sont à temps continu, s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x + D.u \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

Où x , u et y représentant respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système

III.2.2. Représentation des systèmes non linéaires :

La représentation générale d'un système non linéaire est de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III-2})$$

Où x , u et y représentant respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. $f(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions non linéaire du vecteur d'état qui décrivent le système [15].

CHAPITRE III : COMMANDE H_∞ DES SYSTEMES NON LINEAIRES

On appelle système non linéaire affine par rapport à l'état, un système dont la représentation d'état prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)x(t) + B(x)u(x) \\ y = C(x)x(t) + D(x)u(x) \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

Dans la cas d'un système non linéaire affine par rapport à l'entrée, la représentation d'état est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) + B(x)u(t) \\ y = C(x) + D(x)u(t) \end{cases} \quad (\text{III-4})$$

III.3. La commande H_∞ non linéaire :

L'objectif de la commande H_∞ non linéaire, comme dans le cas linéaire, est d'assurer une stabilité asymptotique du système en boucle fermée et de minimiser le rapport entre l'énergie de sortie à réguler et l'énergie des entrées exogènes (perturbation). Ce rapport est appelé par la suite, **le gain L_2** . Sa minimisation n'est pas globale mais relative à un certain niveau d'atténuation. Ce qui qualifie la commande sous-optimale.

Le problème de commande H_∞ non linéaire consiste à concevoir un contrôleur dynamique qui assure :

- La stabilité asymptotique du système non linéaire en boucle fermée.
- L'atténuation des effets des entrées exogènes.

Et qui a comme modèle d'état :

$$\mathbb{K} : \begin{cases} \dot{\zeta} = A_K(\zeta) + B_K(\zeta)y \\ u = C_K(\zeta) \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

Avec ζ est le vecteur d'état du correcteur, y est le vecteur de sortie de système, u est la commande.

Ce contrôleur est composé d'un observateur non linéaire et d'une action de control.

III.3.1. Norme H_∞ non linéaire :

La norme H_∞ linéaire est définie comme une norme sur les matrices de transfert et ne se généralise pas directement aux systèmes non linéaires. Cependant dans le domaine de temps, la norme H_∞ n'est rien d'autre que la norme induite par la norme L_2 sur ses signaux ; alors pour un système Σ de vecteur d'entrée u et vecteur de sortie y :

$$\|\Sigma\|_\infty = \max_{u \in L_2} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \quad (\text{III-6})$$

Cette dernière norme convient également aux systèmes non linéaires, et elle est appelée « gain L_2 » d'un système non linéaire.

III.3.2. Gain L_2 : [16]

Nous considérons la forme générale d'un système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, w, u) \\ z = Z(x, u) \\ y = Y(x, u) \end{cases} \quad (\text{III-7})$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est la commande, $y \in R^p$ est la sortie de mesure,

$z \in R^s$ est la sortie objective et $w \in R^r$ est l'entrée exogène.

Le gain L_2 d'un tel système est défini comme suit :

$$\text{Gain } L_2 = \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \quad (\text{III-8})$$

T représente ici l'horizon.

Un système non linéaire avec l'état initial $x(0) = 0$ a un gain L_2 inférieur ou égale à γ ($\gamma > 0$) si pour tout $T \geq 0$ et $w(t) \in L_2 [0, T]$ (L'espace L_2 est défini dans l'annexe A)

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (\text{III-9})$$

III.3.3. Définition d'un système dissipatif : [17]

Un système non linéaire de la forme générale (III-7) est dissipatif s'il existe une fonction $V(x)$ non négative telle que $V(0) = 0$ et

$$\int_0^T \{\|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2\} dt \leq V(0) - V(T) \leq -V(T) \quad (\text{III-10})$$

Cette dernière inégalité signifie que la norme H_∞ du système, pour $T \rightarrow \infty$, est inférieure ou égale à γ [18].

Pour $\gamma = 1$, cette inégalité signifie que l'énergie en entrée est plus grande ou égale à l'énergie de la sortie. En d'autre terme, l'énergie a été dissipée d'où le nom système dissipatif [18].

III.4. Problème de commande H_∞ non linéaire :

III.4.1. Formulation mathématique du problème:

Nous considérons la forme générale d'un système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, w, u) \\ z = Z(x, u) \\ y = Y(x, u) \end{cases} \quad (\text{III-11})$$

Où $x \in R^n$ est le vecteur d'état de système, $z \in R^s$ est la sortie objective, $w \in R^r$ l'entrée exogène, $y \in R^p$ est la sortie de mesure et $u \in R^m$ est la commande. Les fonctions F, Z et

CHAPITRE III : COMMANDE H_∞ DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Y sont supposées lisse (fonction classe C^k , avec K suffisamment grand) et définies au voisinage de l'origine de $(R^n \times R^r \times R^m)$

Il est impossible d'aboutir à une loi de commande explicite du a la nature générale de fonction F , Z et Y . Dans cette section nous intéressons aux systèmes non linéaires de type affine. Nous appelons un système non linéaire affine (en états et en entrée un système dont la représentation d'état prend les formes suivantes :

- Affine en état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(w,u)x + g_1(w) + g_2(u) \\ z &= h_1(w,u)x + k_{11}(w) + k_{12}(u) \\ y &= h_2(w,u)x + k_{21}(w) \end{aligned} \quad \text{(III-12)}$$

- Affine en entrées :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{11}(x)w + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w \end{aligned} \quad \text{(III-13)}$$

Ou $x \in R^n$ est l'état de système, $z \in R^{p1}$ est la sortie contrôlée, $w \in R^{m1}$ est l'entrée exogène u est la commande, $y \in R^{m2}$ est la sortie mesurées. Le problème est de trouver un contrôleur.

$$K = \begin{cases} \zeta = A_k(\zeta) + B_k(\zeta)y \\ U = C_k(\zeta) \end{cases} \quad \text{(III-14)}$$

ζ est le vecteur d'état du correcteur, y est le vecteur de sortie du système et u la commande.

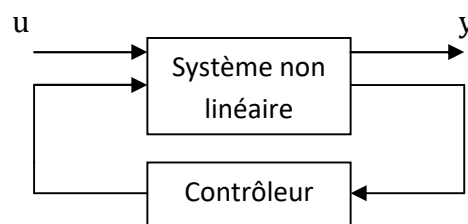


Figure III-1 : problème H_∞

III.4.2. Objectif de la commande :

Le problème de la commande H_∞ sous-optimale consiste à trouver un contrôleur (une loi de commande) ayant comme entrées les sorties mesurées du système y et produisant les entrée de commande u , tel que le système non linéaire sous la forme représentée sur la figure III.1 :

- 1- Soit stable asymptotiquement en boucle fermée.
- 2- avec un gain L_2 inférieur ou égale a un niveau γ donné, c.à.d pour tout $T \geq 0$ et $w \in L_2(0,T)$, on a :

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (\text{III-15})$$

$$\text{Avec gain } L_2 = \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \quad (\text{III-16})$$

On parle de problème d'atténuation des entrées exogène w sur la variable de pénalité z . le lien entre la dissipativité et le gain L_2 d'un système non linéaire est mise en évidence dans Van de Shaft (2000). Si le système(III.1) est localement asymptotiquement stable et localement dissipatif avec :

$$S(w, z) = \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2 \quad (\text{III-17})$$

Alors sa réponse, pour une entrée suffisamment petite et $x(0)=0$ satisfait :

$$\int_0^T (\gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2) dt > V(0) - V(T) > -V(T) \quad (\text{III-18})$$

Pour tout $t > 0$. D'ou (III-1) ait un gain L_2 inférieur ou égal à γ .

Cette inégalité signifie que la norme H_∞ du système est inférieur ou égal à γ si $T \rightarrow \infty$.

III.5. Hypothèses d'existence de la commande H_∞ non linéaire :

La résolution du problème de commande H_∞ non linéaire n'est possible que sous les hypothèses suivantes [17].

a) Hypothèse 1 :

Il existe des fonctions uniques $w_*(x, p)$ et $u_*(x, p)$ définies au voisinage de $(0,0)$ qui satisfait

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial w}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) &= 0 \\ w_*(0,0)u_*(0,0) \end{aligned} \quad (\text{III-19})$$

Tel que

$$\begin{aligned} H(x, p, w, u_*(x, p)) &\leq H(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) \\ &\leq H(x, p, w_*(x, p), u) \end{aligned} \quad (\text{III-20})$$

Ou H est la fonction hamiltonienne définit par :

$$H(x, p, w, u) = p^T F(x, w, u) + \|z(x, u)\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \quad (\text{III-21})$$

Et

$$p^T = V_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{III-22})$$

b) Hypothèse 2 :

Chaque trajectoire $x(t)$ du système $\dot{x}(t) = F(x(t), 0, u(t))$ satisfait :

$$z(x(t), u(t)) = 0, \text{ pour tout } t \geq 0, \text{ tel que } : \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Cette dernière hypothèse est la version non linéaire qu'un système linéaire ayant une entrée u et une sortie $z(w = 0)$ n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire.

Dans la littérature, le problème de commande H_∞ non linéaire est traité pour une classe particulière des systèmes non linéaires. Cette classe est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + k_{11}(x)w + k_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + k_{21}(x)w + k_{22}(x)u \end{cases} \quad (\text{III-23})$$

Où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est la commande, $y \in R^p$ est la sortie de mesure, $z \in R^s$ est la sortie objective et $w \in R^r$ est l'entrée exogène.

Les systèmes non linéaire, qui s'écrivent de cette manière, sont appelés systèmes non linéaire affins aux entrées.

Dans le but de simplifier l'analyse de la commande H_∞ non linéaire, les hypothèses suivantes ont été considérées. [19]

c) Hypothèses simplificatrices :

- $k_{11}(x) = 0$ et $k_{22}(x) = 0$ (III-24a)
- $k_{12}(x)^T [h_1(x) \ k_{12}(x)] = [0 \ 1]$ (III-24b)
- $\begin{bmatrix} g_1(x) \\ k_{21}(x) \end{bmatrix} k_{21}^T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (III-24c)
- $[h_1(x) \ f(x)]$ est détectable à l'état nul (III-24d)
- Le système nominal est atteignable à l'origine

Sous ses hypothèses, le système donné par l'équation (III.23) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + k_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + k_{21}(x)u \end{cases} \quad (\text{III-25})$$

III.6. Solution du problème H_∞ des systèmes non-linéaires :

La solution du problème de commande H_∞ non linéaire est obtenue grâce au théorème suivant.

Théorème III.1: [17] [18] [19]

Sous les hypothèses précédentes, s'il existe une fonction positive définie « V » au voisinage de $x = 0$ tel que $V(0) = 0$ qui satisfait l'inégalité (III.18) ; alors la loi de commande :

$$u = -\frac{1}{2}g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} = -g_2^T X \quad (\text{III-26})$$

résout le problème de commande H_∞ non linéaire, avec un contrôleur H_∞ non linéaire donné par :

$$K : \begin{cases} \dot{\zeta} = A_K(\zeta) + B_K(\zeta)y \\ u = C_K(\zeta) \end{cases} \quad (\text{III-27})$$

$$A_k = f(\zeta) + \gamma^{-2}g_1(\zeta)g_1^T(\zeta)X(\zeta) + g_2(\zeta)C_k(\zeta) - B_k(\zeta)h_2(\zeta)C_k(\zeta) = -g_2^T(\zeta)X(\zeta) \quad (\text{III-28})$$

$$C_k(\zeta) = -g_2^T(\zeta)X(\zeta) \quad (\text{III-29})$$

Et $B_k(\zeta)$ satisfait l'équation suivante:

$$[Y(x) - X(x)]^T B_k(\zeta) = \gamma^2 h_2^T(\zeta) \quad (\text{III-30})$$

ζ est le vecteur d'état du correcteur, et y et le vecteur de sortie de système.

$Y(\zeta)$ et $X(\zeta)$ sont les solutions de deux équations dites **équation de Hamilton Jacobi** , données par (III-31a) et (III-31b).[19]

$$H_{FI}(V, x) = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} (\gamma^{-2} g_1 g_1^T) \frac{\partial V^T}{\partial x} + h_1^T h_1 = 0 \quad (\text{III-31a})$$

$$H_{Fc}(U, x) = \frac{\partial U}{\partial x} f + \gamma^{-2} h_1^T h_1 - h_2^T h_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial x} g_1 g_1^T \frac{\partial U^T}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-31b})$$

$$\text{Ou} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2X \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2Y \quad (\text{III-31c})$$

Ces deux équations sont la version non linéaire des équations de Riccati

L'équation (III.31a) est dite de filtrage, et l'équation (III.31b) est de contrôle.

La théorie de la commande H_∞ pour les systèmes non linéaires repose sur l'analyse du gain \mathcal{L}_2 . Cependant, son application est complexe en raison des équations de Hamilton-Jacobi, dont la solution exacte est très difficile, voir impossible à calculer. Pour remédier à cette difficulté, deux approches ont été développées. La première est l'approche basée sur les inégalités matricielles non linéaires. La seconde est l'approche

utilisant un algorithme des approximations successives, pour le calcul de la solution approximée de l'équation de Hamilton Jacobi [20] [21], qui sera exposée dans la partie suivante

III.6.1. Résolution du problème H_∞ par la méthode des approximations successives :

Pour trouver un contrôleur H_∞ non linéaire, il faut résoudre l'équation de **Hamilton Jacobi** (HJE) (III.31a), dont la solution approximative peut être construite par la méthode successive de la série de puissance [23][24]. Nous présenterons un algorithme successif modifié. L'équation de Hamilton Jacobi (HJE) de (III.31a) peut être réécrite comme suit :

$$V(x)f(x)\frac{1}{4}[\gamma^{-2}g_1(x)g_1^T(x) - g_2(x)g_2^T(x)]V_x^T(x) + h_1^T(x)h_1(x) = 0 \quad (\text{III-32})$$

Ou

$$X(x) = \frac{1}{2}V_x^T(x) \quad (\text{III-33})$$

Définir

$$V(x) = \sum_{m=2}^k V^m(x) = x^T X_x + \sum_{m=2}^k V^m(x)\gamma^{-2}g_1(x)g_1^T(x) - g_2(x)g_2^T(x) \quad (\text{III-34})$$

$$f(x) = Ax + f_h(x) \quad (\text{III-35})$$

$$\frac{1}{4}(\gamma^{-2}g_1(x)g_1^T(x) - g_2(x)g_2^T(x)) = \frac{1}{4}(\gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T) + R_h(x) \quad (\text{III-36})$$

$$h_1^T(x)h_1(x) = x^T C_e^T C_e x + Q_h \quad (\text{III-37})$$

$$F_c = A + (\gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T)X \quad (\text{III-38})$$

Ou X est la solution l'équation de Riccati suivante :

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T)X + C_e^T C_e = 0 \quad (\text{III-39})$$

Ou

$$f_h(x) = O(x^2), R_h(x) = O(x), Q(x) = O(x^3) \quad (\text{III-40})$$

$O(x)$ est le symbole de landau généralisé d'ordre 1.

$O(x^2)$ est le symbole de landau généralisé d'ordre 2.

$O(x^3)$ est le symbole de landau généralisé d'ordre 3.

$(.)^k$ désigne le terme d'ordre k de la commande.

$(\cdot)^{[k]}$ est le terme d'ordre k de la commande cumulés incluant x^k .

X est le Solution stabilisante semi-défini positive de l'équation (III-38), et

$$\frac{\partial V^k}{\partial x} = 2x^T X + \sum_{m=3}^k \frac{\partial V^m}{\partial x} \quad (\text{III-41})$$

Notez que l'ordre de $\frac{\partial V^m}{\partial x}$ est m-1. L'approximation des solutions du HJE (III.32) peuvent être calculées successivement en utilisant l'équation suivante :

$$-\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c x = \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k-1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-n-m+2)}}{\partial x} R_h^{(n)} \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + Q_h^{(k)} \quad (\text{III-42})$$

Où $k \geq 3$ est un nombre entier. Un ensemble d'équations linéaires peut être Établi en comparant les coefficients pour les deux côtés de (III-41). Les solutions approximatives de HJE en (III-31a) sont obtenues par ce qui suit :

$$X^{[k-1]} = \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = Xx + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} = X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} \quad (\text{III.43})$$

III.6.1.1. Algorithme des l'approximation successives :

Etape 1 : Initialisation

- Linéarisation du modèle du système non linéaire autour de l'origine.
- Calcul de X la solution de l'équation de Riccati (III.39), et de γ optimal (voir chapitre 2).
- Initialisation de la solution de Hamilton-Jacobi $\frac{\partial V^k}{\partial x} = 2x^T X$
- Fixer : - la tolérance ε

-Le nombre d'itération N

Etape 2 : Calcul des approximations

Calcul des approximations successives, en comparant les coefficients de l'équation suivante

$$-\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c = \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k+1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-n-m+2)}}{\partial x} R_h^{(n)} \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + Q_h^{(k)}$$

Calcul de la solution approximé de l'équation de Hamilton Jacobi

$$X^{[k-1]} = \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = Xx + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} = X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x}$$

Etape 3 : Vérification

Si $X^{[k-1]}(x) - X^{[k-2]}(x) \leq \varepsilon$

Calculer la commande $u = -g_2^T(x)X^{[k-1]}(x)$

Si non $k = k + 1$

Si $k \leq N + 3$

Recommencer l'étape 2

Si non calculer la commande $u = -g_2^T(x)X^{[k-1]}(x)$

Fin

Fin

Une fois la solution approximée de l'inégalité de Hamilton-Jacobi est calculée, on la remplace par sa valeur dans les équations (III.28) et (III.29), pour calculer les matrices A_k et C_k . par contre B_k fait intervenir dans son expression la solution de la deuxième inégalité de Hamilton- Jacobi (III.31b), dont la solution est inconnue. **Lu et Chang**, dans leur travaux, proposent de considérer B_k égale à son équivalent dans le cas du correcteur linéaire.

III.7. Application de la commande H_∞ non linéaire sur le modèle du pendule inversé : [19]

Reprenons le modèle non linéaire du pendule inversé du chapitre 2.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24.1314x_3 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & w_n \end{bmatrix} w \quad \text{(III-44)}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_n \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ w_n \end{bmatrix} u$$

Nous rappelons que notre objectif est de stabiliser le système en le maintenant à la position verticale, tout en garantissant une bonne rejection des perturbations et une atténuation efficace des bruits. Pour concevoir la commande H_∞ non linéaire, il est nécessaire dans un premier temps de linéariser le système autour de l'origine.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 24.1314 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{array} \right. \quad (\text{III-45})$$

Pour nos simulations, nous considérons $\gamma=50$.

La solution de l'équation de Riccati (III-23) est égale à

$$X = \begin{bmatrix} 1.8237 & 1.6630 & 5.3125 & 1.0822 \\ 1.6630 & 2.4911 & 8.6063 & 1.7536 \\ 5.3125 & 8.6063 & 69.4446 & 14.1114 \\ 1.0822 & 1.7536 & 14.1114 & 2.8717 \end{bmatrix} \quad (\text{III-46})$$

La première solution approximative est donnée par

$$X^{[1]} = X x \quad (\text{III-47})$$

Nous avons $f_h^{(2)}(x) = R_h^{(1)}(x) = Q_h^{(3)}(x) = 0$ donc

$$X^{[2]}(x) = X^{[1]}(x) = X x \quad (\text{III-48})$$

La solution d'ordre 3 est donnée par

$$X^{[3]}(x) = X x + X^{(3)}(x) \quad (\text{III-49})$$

Ou

$$X^{(3)}(x) = \begin{bmatrix} X_1^{(3)} & X_2^{(3)} & X_3^{(3)} & X_4^{(3)} \end{bmatrix} \quad (\text{III-50})$$

Et

$$X1=0.1730 x_1 x_3^2 + 0.1300 x_2 x_3^2 + 2.3450 x_3^3 + 0.6160 x_4 x_3^2$$

$$X2= 0.1250 x_1 x_3^2 + 0.2100 x_2 x_3^2 + 3.9340 x_3^3 + 1.0068 x_4 x_3^2$$

$$X3=0.250x_1 x_2 x_3 + 11.8000x_2 + 0.2050x_3 x_2^2 + 98.5000x_3^3 + 7.0349x_1 x_3^2 + 1.2260x_1 x_3 x_4 + 37.5500x_4 x_3^2 + 2.0140x_2 x_3 x_4 + 3.9021x_3 x_4^2 + 0.0800 x_3 x_1^2 + 0.1000 x_4^2$$

$$X4=0.6173x_1 x_3^2 + 1x_2 x_3^2 + 12.5340x_3^3 + 3.606x_4 x_3^2 + 0.2858x_3 x_4^2 + 0.0509x_2 x_3 x_4$$

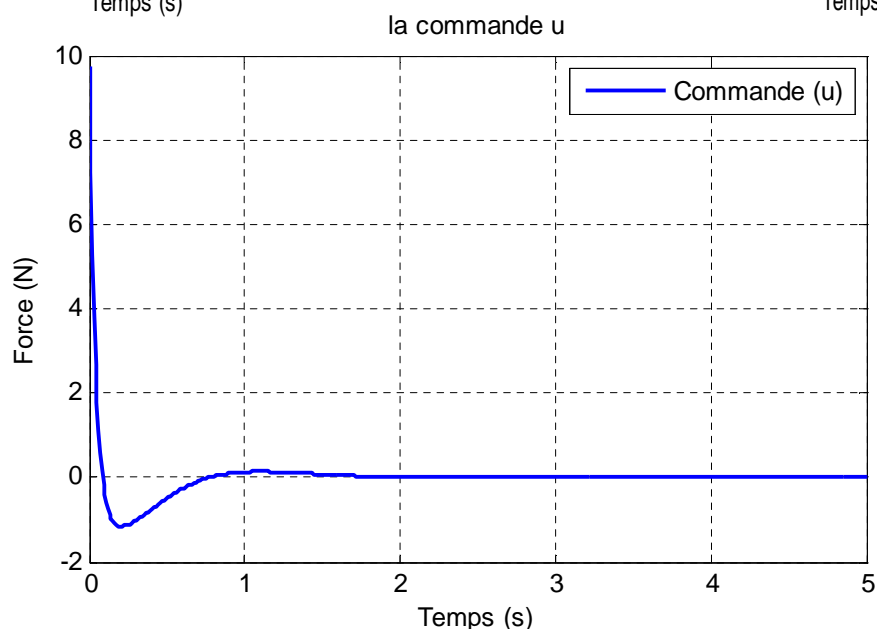
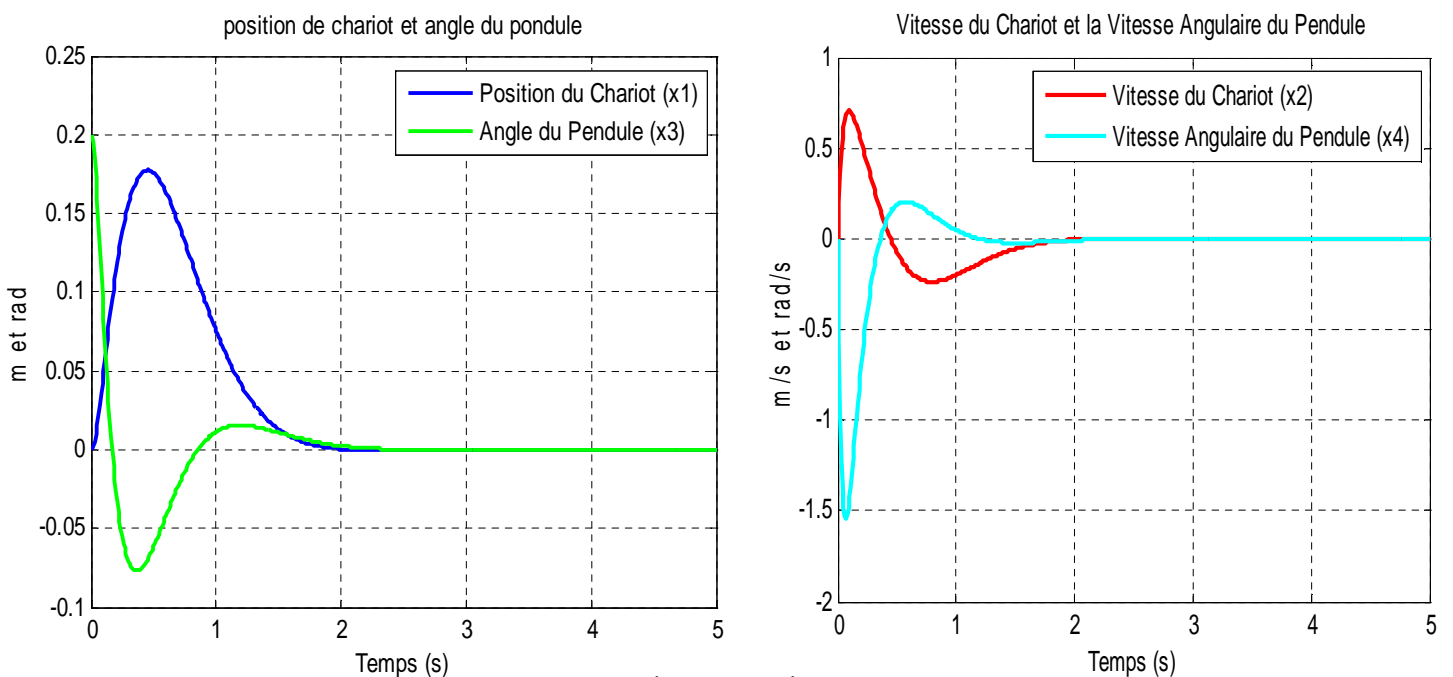
Nous avons

$$f_h^{(4)}(x) = R_h^{(3)}(x) = Q_h^{(5)}(x) = 0 \quad (\text{III-51})$$

Donc
$$X^{[4]} = X^{[3]}(x) = X x + X^{(3)}(x)$$

Nous remplaçons la solution approximée de l'équation de Hamilton-Jacobi dans les équations (III-28) et (III-29), pour calculer les matrices, et du contrôleur non linéaire.

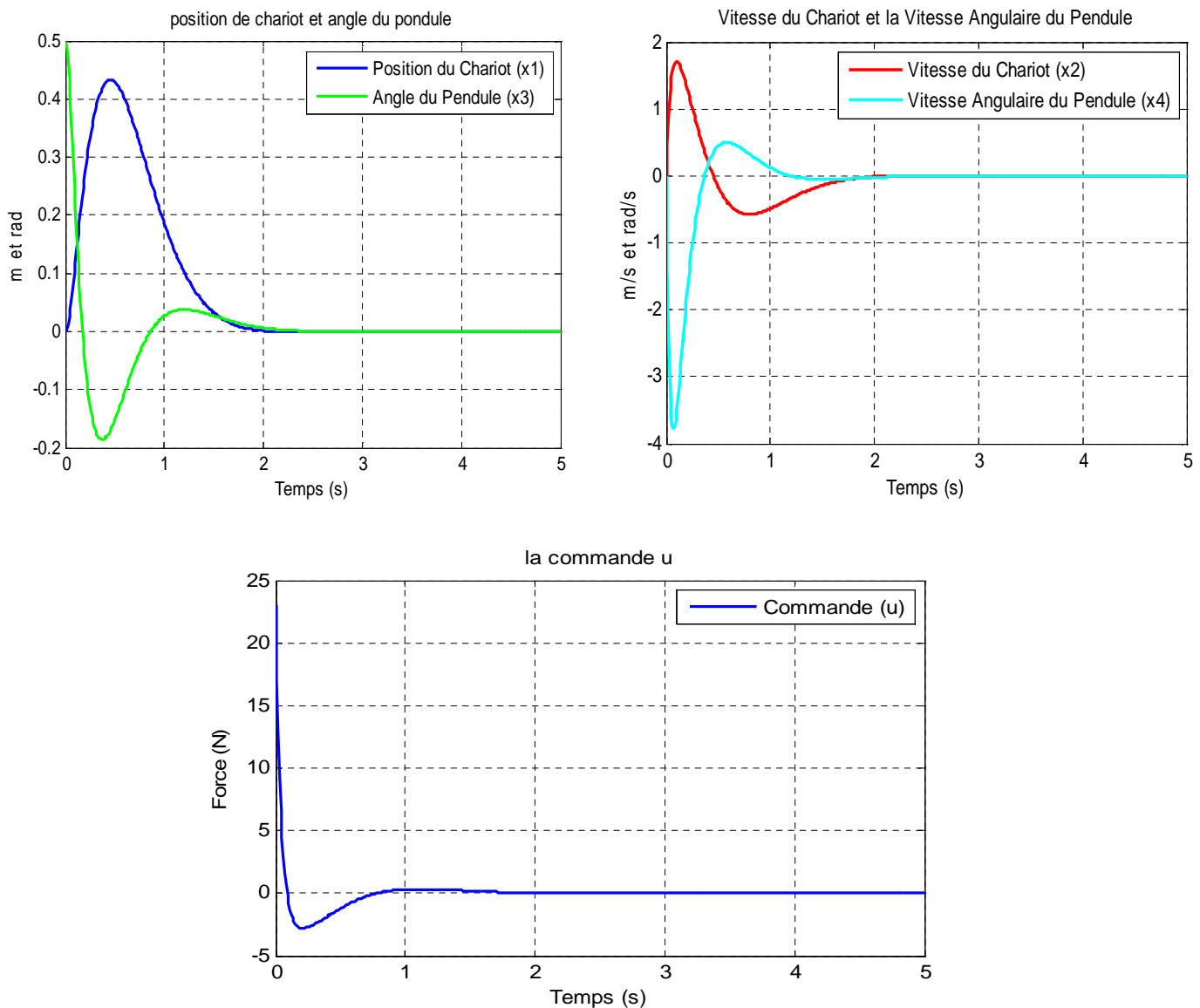
Pour les premières de simulations, nous considérons, les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]$ et une entrée exogène nulle $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0 * [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ (d représente les perturbations et n les bruits) les résultats sont, alors, donnés par les figures suivantes :



CHAPITRE III : COMMANDE H_∞ DES SYSTEMES NON LINEAIRES

La commande H_∞ non linéaire, calculée par la méthode des approximations successives, pour une perturbation nulle, et pour une valeur initiale $x_3 = \theta = 0.2 \text{ rad}$, stabilise le système après 2 secondes, puisqu'elle le maintient à la position verticale avec une erreur maximale de 0.17 m sur r et une erreur maximale de 0.07 rad dans le sens négatif des θ .

Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène $w = 0 * [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, introduite à $t=0\text{s}$ nous aboutissons aux résultats suivants :

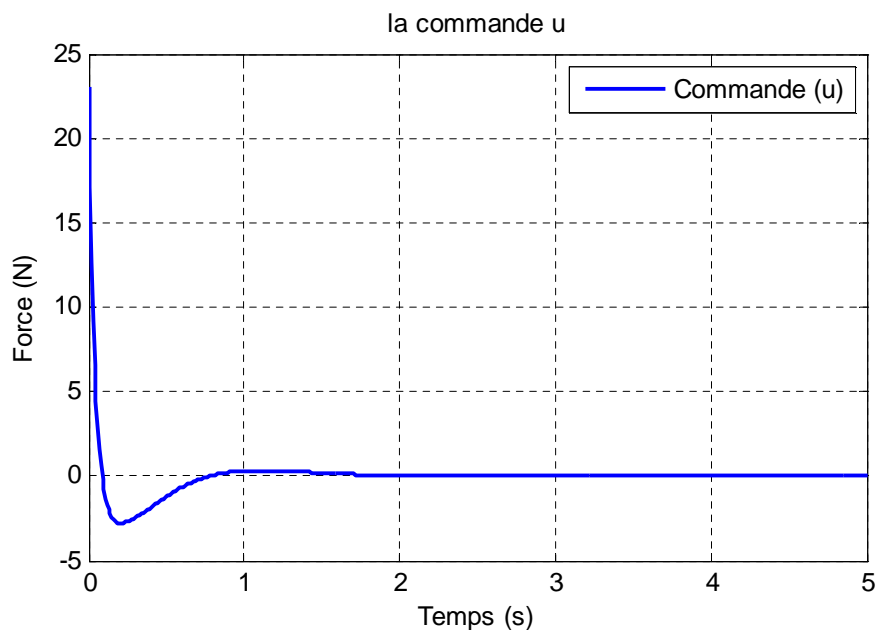
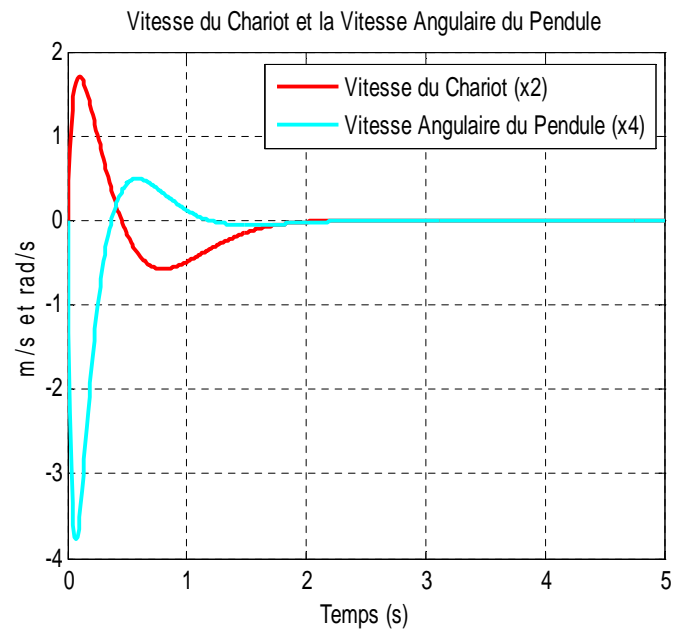
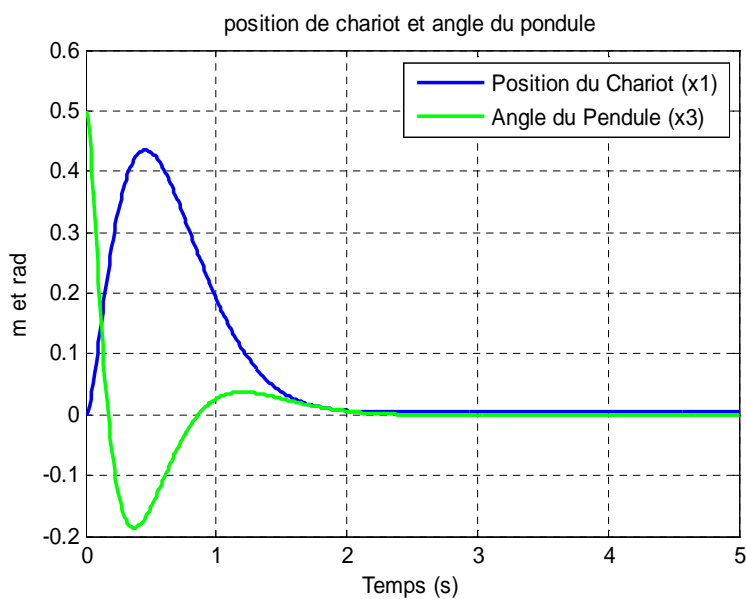


CHAPITRE III : COMMANDE H_∞ DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Pour une valeur initiale $x_3 = \theta = 0.5 \text{ rad}$, et sans perturbation, le système commandé se stabilise à la position vertical après 2secondes. Ayant une erreur maximale de 0.42 m sur r et une erreur maximale de 0.18 rad dans le sens négatif de θ .

Pour les conditions initiales $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ et pour une entrée exogène

$w = 0.003 * [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, introduite à $t=0s$ nous aboutissons aux résultats suivants :



Les erreurs, dans ce cas là, atteignent les valeurs suivant :

0.46 m pour la position et 0.18 rad pour l'angle. Le système se stabilise à l'instant $t=2s$.

La commande H_∞ non linéaire, obtenue par la méthode des approximations successives, stabilise efficacement le système du pendule inversé et atténue l'impact des perturbations. Elle permet ainsi de maintenir le pendule en position verticale, et ce, quelles que soient les valeurs des perturbations et les conditions initiales

III.8. Conclusion :

En conclusion, ce chapitre a abordé en profondeur la commande H_∞ pour les systèmes non linéaires. Nous avons commencé par établir les généralités sur ces systèmes, suivi par une introduction à la commande H_∞ non linéaire et aux problèmes qui en découlent. Les hypothèses nécessaires à l'existence d'une solution ont été examinées, ainsi que les approches pour résoudre ces défis. Nous avons également présenté la méthode des approximations successives comme une technique efficace pour traiter le problème H_∞ , en détaillant l'algorithme associé.

A la fin de ce chapitre, pour illustrer ces concepts, nous avons appliqué la commande H_∞ non linéaire à un système du pendule inversé.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons abordé les principes fondamentaux de la commande robuste et de la commande H_∞ , à la fois dans les cadres linéaire et non linéaire, en présentant les approches les plus couramment utilisées pour résoudre ces problèmes. Tant dis que la commande H_∞ offre une approche systématique pour minimiser les effets des perturbations. La commande des systèmes non linéaires, quant à elle, nécessite des techniques plus complexes pour gérer les dynamiques non linéaires, avec la possibilité d'étendre la commande H_∞ aux systèmes non linéaires. Cette étude s'applique particulièrement à des systèmes physiques réels, tels que le pendule inversé, qui présentent des comportements non linéaires complexes à contrôler.

Le premier chapitre a été dédié à l'étude de la commande robuste, on a brièvement exposés la notion de la robustesse et ses différents types (robustesse en stabilité et en performance). On a introduit aussi les incertitudes (structurées et non structurées).

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé la théorie de la commande H_∞ pour les systèmes linéaires, en abordant le problème H_∞ standard et sa résolution à l'aide de la méthode basée sur les équations de Riccati. Nous avons montré par une application sur un modèle de pendule inversé, que la commande H_∞ linéaire est robuste.

Nous avons ensuite focalisé notre étude dans le dernier chapitre sur la commande H_∞ non linéaire et ses défis, en présentant la méthode des approximations successives comme une solution à ces problématiques. Et puis on a fait une simulation sur le système étudié dans le deuxième chapitre en utilisant cette méthode, ce qui nous a confirmé la robustesse de la version non linéaire de la commande H_∞ .

Les résultats de simulation de notre application démontrent l'efficacité et la robustesse des commandes H_∞ , tant linéaire que non linéaire. De plus, la commande H_∞ non linéaire donne de meilleurs résultats que la commande H_∞ linéaire, car elle prend en compte les non-linéarités des systèmes.

D'autres méthodes existent en théorie pour la résolution des problèmes de commande H_∞ , on peut citer à titre d'exemple la Méthode des Inégalités Matricielles (LMI) et la Méthode des Inégalités Matricielles Non Linéaire (NLMI), qui peuvent servir de perspectives pour d'éventuelles améliorations de ce travail.

ANNEXE

Annexe A

A.1. Norme :

La norme-1 d'un signal $u(t)$ est l'intégrale de sa valeur absolue

$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt \quad (\text{A.1})$$

A.2. L'espace L_2 :

L'espace L_2 désigne l'ensemble des fonctions qui sont intégrables au carré sur un domaine donné. Il s'agit donc d'un espace de fonctions (ou de signaux) qui satisfont la condition suivante :

$$\int |f(x)|^2 dx < \infty \quad (\text{A.2})$$

Cette norme mesure la "taille" ou "énergie" d'une fonction dans cet espace.

A.3. Norme L_2 :

Pour un signal scalaire $v(t)$ défini pour tout $t > 0$, la norme L_2 est définie comme la racine carrée de l'intégral de $v(t)^2$,

$$\|v\|_2 = \left(\int_0^{\infty} v(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.3})$$

L'interprétation physique de cette norme revient à dire que, si $v(t)$ est un signal decourant ou de tension, $\|v\|_2^2$ est proportionnel à l'énergie totale associée à ce signal. Dans le cas où le signal $v(t)$ est un vecteur $v(t) = [v_1(t) \dots v_m(t)]^T$, la norme L_2 devient égale à

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m \|v_i\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^m v_i(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\infty} v(t)^T v(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.4})$$

Rappelons en outre, que la transformée de Laplace du signal $v(t)$ est égale à

$$V(s) = \int_0^{\infty} v(t) e^{-st} dt \quad (\text{A.5})$$

où s est la variable complexe de Laplace. Par analogie avec (A.3), on définit la norme L_2 pour cette transformée de Laplace sur l'axe imaginaire par

$$\|V\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(j\omega)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$

D'après le théorème de Parseval, les normes L_2 dans le domaine temporel et fréquentiel sont égales :

$$\|v\|_2 = \|V\|_2 \quad (\text{A.7})$$

Dans le cas d'un signal vectoriel $v(t) = [v_1(t) \dots v_m(t)]^T$, la norme L_2 de la transformée de Laplace $V(t) = [V_1(t) \dots V_m(t)]^T$ de ce signal devient:

$$\begin{aligned} \|V\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^m \|V_i\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^m |V(jw)_i|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^m V_i(-jw) V_i(jw) dw \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^m V(-jw)^T V(jw) dw \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.4. Norme H_∞ :

Considérons d'abord le cas d'un système monovarié, de fonction de transfert $G(s)$, la norme H_∞ est définie par :

$$\|G\|_\infty = \max_w |G(jw)| \quad (\text{A.9})$$

ou encore, dans le cas où le maximum n'existe pas,

$$\|G\|_\infty = \sup_w |G(jw)| \quad (\text{A.10})$$

La norme matricielle $\|G(jw)\|$ est égale à la valeur singulière maximale $\bar{\sigma}(G(jw))$ de la matrice

$\|G(jw)\|$. D'où :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w \bar{\sigma}(G(jw)) \quad (\text{A.11})$$

Cette norme est interprétée physiquement de la manière suivante. On sait que si l'on applique à l'entrée du système G un signal sinusoïdal vectoriel, composé de sinusoïdes de même pulsation mais d'amplitudes et de phases différentes, sa sortie est un signal sinusoïdal vectoriel de même pulsation, mais dont les composantes ont des amplitudes et des phases modifiées par G . La norme H_∞ est donc le facteur maximum dont le système amplifie toute entrée sinusoïdale vectorielle.

En d'autre terme la norme H_∞ est le plus grand facteur par lequel le système amplifie tout signal sinusoïdal appliqué à son entrée.

Une relation entre la norme H_∞ et les normes L_2 des signaux d'entrée-sortie du système peut être trouvée. Considérons pour cela un signal $v(t)$ de transformée de Laplace $V(s)$ ayant une norme L_2 bornée. La sortie du système $Z(s) = G(s)V(s)$ possède une norme L_2 bornée par $\|G\|_\infty \|V\|_2$ parce que :

$$\begin{aligned} \|GV\|_\infty &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[|G(jw)V(jw)|^2 dw] \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(jw)|^2 |V(jw)|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_w |G(jw)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V(jw)|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|G\|_\infty \|V\|_2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Par conséquent, pour tout $v \neq 0$,

$$\|G\|_{\infty} \geq \frac{\|GV\|_2}{\|V\|_2} \quad (\text{A.13})$$

On montre en fait que la norme H_{∞} peut être caractérisée par :

$$\|G\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{\|GV\|_2}{\|V\|_2} : v \neq 0 \right\} \quad (\text{A.14})$$

La norme H_{∞} fournit donc le facteur maximum dont le système amplifie la norme L_2 de tout signal d'entrée. C'est pourquoi $\|G\|_{\infty}$ est aussi appelé « gain » du système.

Annexe B

B.1. Modèle d'un pendule inverse:

Le pendule inversé est un système classique en ingénierie de contrôle, largement utilisé comme exemple pour illustrer les concepts de contrôle des systèmes non linéaires et instables. Il consiste en un pendule fixé à un point pivot, mais à la différence d'un pendule normal, le pendule est positionné au-dessus du point de pivot, ce qui rend son équilibre instable.

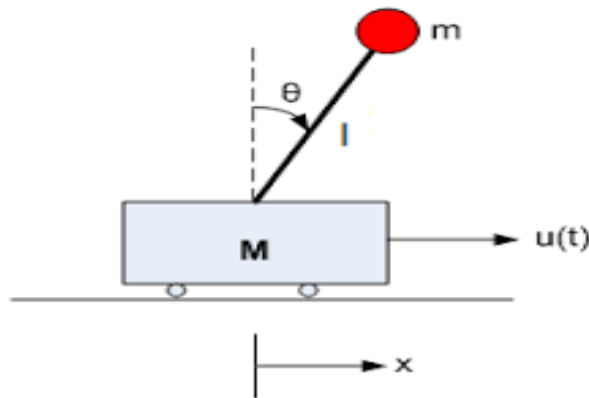


Figure B-1 : Le pendule inversé

Le système est constitué d'un chariot de masse M solidaire d'une courroie qui peut être entraînée horizontalement à l'aide d'un moteur à courant continu et d'un système à poulies. Une tige d'aluminium avec à son bout une masse (pendule) est reliée au chariot et peut pivoter dans le plan vertical (voir Figure B-1). Soit L la distance entre l'axe de rotation de la tige et le centre de gravité du pendule et m la masse du pendule, on appelle θ l'angle entre le pendule et la verticale et r la position du chariot par rapport à l'origine qui sera prise entre les deux poulies.

B.2. Modèle mathématique: Modèle dans l'espace d'état

Nous considérons un système de pendule inversé décrit par la dynamique suivante [18]

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} - mgL \sin \theta + mL \cos \theta \dot{r} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$(M + m)\ddot{r} - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta + mL\ddot{\theta} \cos \theta = f \quad (\text{B.2})$$

$$u = \dot{r} \quad (\text{B.3})$$

$$J = \frac{1}{3}mL^2 \quad (\text{B.4})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4L} \sin \theta - \frac{3}{4L} \cos \theta * u \quad (\text{B.5})$$

$$f = (M + m - 0.75m \cos^2 \theta)u - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta + 0.75mg \cos \theta \sin \theta \quad (\text{B.6})$$

$M = 0.445 \text{ kg}$ est la masse du chariot

$m = 0.21 \text{ kg}$ est la masse de la barre

$L = 0.3048 \text{ m}$ est la longueur de la barre

$g = 9.807 \text{ m/sec}^2$ est l'accélération gravitationnelle

$J = \frac{1}{3} mL^2$ est le moment d'inertie

En définissant le vecteur d'état suivant

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T = [r \quad \dot{r} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T \quad (\text{B.7})$$

Ou

$x_1 = r$ est le déplacement

$x_2 = \dot{r}$ est la vitesse linéaire

$x_3 = \theta$ est l'angle (déplacement angulaire)

$x_4 = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire

la représentation d'état non linéaire du système de pendule inversé est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ u \\ \dot{\theta} \\ \frac{3g}{4L} \sin \theta - \frac{3}{4L} \cos \theta \cdot u \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

En remplaçant les paramètres par leurs valeurs nous aboutissons à :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_3 \\ 24.1314x_4 - 4.0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2.4606 + 1.2303x_3^2 \end{bmatrix} u \quad (\text{B.9})$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (\text{B.10})$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ABDERREZEK Hadjer, " Contribution à la commande robuste des systèmes non linéaires ",
Mémoire de Magister, Université FERHAT ABBAS -SETIF-1UFAS1 (ALGERIE), 02 / 10 /1024.
- [2] BACHIRI Sara, " Commande Robuste H_∞ : Application aux Machines Electriques ",
Mémoire de fin d'étude , Université MOHAMED BOUDIAF - M'SILA, 2015/2016.
- [3] G.Duc, S. Font, "Commande H_∞ et μ -analyse", Hermès Science Publication, 1999.
- [4] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar & B.A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, N°8, pp. 831-847, 1989.
- [5] Y. Lossier, " Ajustement de lois de commande application en aéronautique", Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 24 mars 2006.
- [6] L. Palladino, " Analyse comparative de différentes lois de commande en vue du contrôle global du Châssis ", Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud XI, 04 Décembre 2006.
- [7] S. Choulak, " Modélisation et Commande D'un Procédé D'extrusion Réactive ", Thèse Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, 2004.
- [8] A. Lahmer, "Implantation expérimentale de la commande robuste par un contrôleur ", Mémoire de Magister, Université de Batna, 12 Janvier 2011.
- [9] G.Duc, S. Font, "Commande H_∞ et μ -analyse", Hermès Science Publication, 1999.
- [10] G. Sallom, "Contribution à la commande robuste de la machine asynchrone à double alimentation", Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 13 Mars 2007.
- [11] G. Scorletti, V. Fromion, "Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle H_∞ ", Cours AU32 du Master Recherche ESCI 2A UFR de Sciences, Université de Caen/Basse Normandie, France, 2007.
- [12] D. Sammier, " Sur la modélisation et la commande de suspension de véhicules automobiles " , Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 09 Novembre 2001.
- [13] T.Nakayama, H. Ohmori, A Sano, & H. Ito. A design of H_∞ stable controller. Proceedings of the European control conference, 1995.
- [14] K. Zhou, J.C. Doyle, "Essentials of Robust Control", Prentice-Hall, 1999.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [15] Dr. Hemza MEKKI, "Commande non linéaire" cours UEF 1.3.1 du Master 2 commande électrique, département génie électrique, université Mohamed BOUDIAF de M'Sila,
- [16] A.J Van der schaft., L2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear H_∞ control. IEEE
- [17] A. Isidori, W. Kang, "H ∞ Control via Measurement Feedback for Nonlinear Systems," *IEEE Trans Automatic Control* vol. 40, No. 3, pp.466-472, 1995.
- [18] Shr-Shiung Hu and Bor-Chin Chang. "Design of a Nonlinear H ∞ Controller for Inverted Pendulum system" *1998 IEEE Conference on control Applications*. Sept 1998.
- [19] Mme Yousfi safia "développement d'algorithme pour la commande H_∞ des systèmes non linéaires : application à un procédé industriel", Thèse de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi uzou, 30 mai 2010.
- [20] S. S. Hu, P. H. Yang, and B. C. Chang, "A Successive Algorithm for Solving Hamilton-Jacobi Equation," *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, June 1999.
- [21] Pao-Hwa Yang. Shr-Shing Hu. J.Y.Juang. "Design of a Nonlinear H Controller Applied to a Ship Control System". *2000 IEEE Conference on control Applications*. Sept 25-27, 2000.
- [22] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron & V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM*, Philadelphia, USA, 1994.
- [23] K. Glover & J.C. Doyle. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H ∞ -norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems and Control Letters*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.
- [24] S. Skogestad & I. Postlethwaite. Multivariable feedback control. *Addison-Wesley*, Canada, 1996
- [25] P. De Larminat. Commande des systèmes linéaires. *Hermès*, Paris, 1996.
- [26] M. Green & D.J. Limebeer. Linear Robust Control. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, New-Jersey, 1995.
- [27] G. Duc & S. Font. Commande H ∞ et μ -analyse. *Hermès*, Paris, 1999.
- [28] S.T. Clausen, P. Andersen & J. Stoustrup. Robust control. Course in robust and optimal control, *Aalborg University*, Denmark, April 2001.
- [29] H.-S. Wang, C.-F. Yung, and F.-R. Chang, "H/sub/spl infin//control for nonlinear descriptor systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47, no. 11, pp. 1919-1925, 2002.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[30] Yasmina Mamar, Lynda Benzeba, "Application de la commande H_∞ non linéaire sur un modèle d'un pendule inversé ", mémoire de fin d'étude de master académique , Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 27/09/2017.

[31] M. MAHGON, « Application de la commande H_∞ aux systèmes linéaire perturbés », mémoire magister en électrotechnique option automatique, université Ferhat Abbas Stif, 2012.

[32] BEN YAGOUB Azzeddine, BADLIS Baelhadj, "Commande robuste H_∞ des systèmes non linéaires", Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de MASTER, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou , 23/09/2020.