

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

**Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADEMIQUE**
Domaine : **Sciences et Technologies**
Filière : **Génie Electrique**
Spécialité : **Machines électriques**

Présenté par
Soraya NAIT LARBI

Thème

**Contribution à la modélisation
électromagnétique par éléments finis 2D
des moteurs synchrones à aimants
permanents en régime transitoire.**

Mémoire soutenu publiquement le Jeudi 22 Septembre 2016 devant le jury composé de :

M. Farid HOCINI

Maitre de conférences B, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Président

Melle Nadia RADJA

Maitre assistante A, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Encadreur

M. M'hemed RACHEK

Maitre de conférences A, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Co-Encadreur

Me. Nacera YASSA

Maitre assistante A, Université Mohand Oulhadj de Bouira, Examineur

Me. Salma CHERIF

Maitre assistante classe B, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Examineur

REMERCIEMENTS

Le présent travail a été effectué sous la codirection entre monsieur M'hemed RACHEK, Maître de conférences A, et Mademoiselle Nadia RADJA, Maître assistante A, à l'université de Tizi-Ouzou. Je tiens à leur exprimer ma reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont accordés à ce travail, et pour leurs pertinents conseils, ainsi que les constants encouragements manifestés à mon égard.

Mes vifs remerciements s'adressent aux membres de jury de soutenance pour l'intérêt accordé à ce mémoire, et avoir bien voulu l'examiner.

M. Farid Hocini Président

Me. Salma Cherif Examinatrice

Melle. Yassa Nacera Examineurs

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à toutes personnes ayant contribué avec engagement de près et de loin à l'accomplissement de ce travail.

A mon époux M'hemed pour son soutien indéfectible durant toutes les épreuves.

A mes enfants ELYAS, et FARES

SOMMAIRE

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE	page 01
CHAPITRE I : ETAT DE L'ART SUR LES MACHINES ÉLECTRIQUES SYNCHRONES À AIMANTS PERMANENTS	
I.1. Introduction	page 03
I.2. Les principaux matériaux utilisés dans les machines électriques	page 03
I.2.1. Les aimants permanents pour les machines électriques	page 03
I.2.1.1. Caractéristiques des aimants permanents	page 03
I.2.1.2. Performances énergétiques des aimants permanents	page 04
I.2.2. Matériaux magnétiques : Les alliages ferromagnétiques	page 07
I.2.3 Les matériaux conducteurs : Bobinages	page 10
I.3. Technologies structurelles des machines synchrones à aimants	page 12
I.3.1. Présentation de la machine à aimant permanent	page 12
I.3.2. Topologies des MSAP	page 13
I.3.2.1. La position de l'inducteur par rapport à l'induit	page 13
I.3.2.2. La direction du champ par rapport à l'axe de rotation	page 13
I.3.3. Machines à aimants cylindriques à champ radial	page 15
I.3.4. Structures à aimants déposés en surface	page 16
I.3.5. Structures à aimant encastrés	page 16
I.3.6. Structures à aimants enterrés	page 16
I.3.7. Machines à aimants discoïdes à champ axial (AFPM)	page 16
I.3.8. Machines à aimants à flux transverse	page 17
I.4. Applications des machines synchrones à aimants permanents	page 18
I.5. Les modèles de conception	page 19
I.5.1. Généralités sur les modèles de conception	page 19
I.5.2. Les modèles analytiques	page 20
I.5.3. Les modèles numériques à base des éléments finis	page 20
I.5.4. Les modèles semi numériques	page 21
I.6. Conclusion	page 21
CHAPITRE II : MODÈLES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET COUPLAGE ÉLECTRIQUE-MAGNÉTIQUE EN RÉGIME TRANSITOIRE	
II.1. Introduction	page 22
II.2. Equations de Maxwell	page 23
II.3. Lois de comportement ou relations constitutives de milieu	page 23
II.3.1. Lois de comportement des matériaux de l'électrotechnique	page 23
II.3.2. Cas des milieux conducteurs	page 24
II.3.3. Cas des milieux magnétiques	page 24
II.3.3. Cas des milieux diélectriques (isolants)	page 24
II.4. Formalisme générale des équations électromagnétiques (Diagramme de Tonti)	page 25
II.5. Relations d'interfaces (conditions de passages)	page 26
II.6. Notion de conditions aux limites	page 27
II.7. Modèles électromagnétique en régime quasi-stationnaire	page 27
II.7.1 Equations de Maxwell en régime quasi-stationnaire	page 27
II.7.2. Formulation électromagnétique quasi-stationnaire en potentiel vecteur magnétique et potentiel scalaire électrique	page 28
II.7.3. Formulations des équations électriques associées aux enroulements bobinés et massifs	page 30
II.7.3.1 Equivalence électromagnétique	page 31

II.6.3.2 Equation électrique dans un conducteur.....	page 32
II.7.3.3 Equation électrique dans les enroulements bobinés du stator	page 33
II.8. Equation mécanique du mouvement	page 37
II.9. Conclusion	page 38

CHAPITRE III : FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS DU MODÈLE COUPLÉ MAGNÉTIQUE-ÉLECTRIQUE, ET CALCULS MÉCANIQUES

III.1. Introduction	page 39
III.2. Méthodes de couplage électrique-magnétique-mécanique	page 40
III.3. Modèles électromagnétiques de la (MSAP)	page 41
III.4. Démarche globale de la méthode des éléments finis.....	page 43
III.4.1. Principe de la méthode des éléments finis.....	page 43
III.4.2. Discrétisation géométrique : maillage	page 43
III.4.3. Fonctions d'approximations nodales	page 44
III.5. Formulations éléments finis des modèles électromagnétiques de la (MSAP).	page 47
III.6. Discrétisation temporelle du modèle couplé magnétique-électrique	page 53
III.7. Discrétisation temporelle du modèle mécanique	page 54
III.8. Formulation élément finis du modèle couplé électrique-magnétique dans le cas de non linéarité magnétique	page 55
III.9. Calcul de la force électromagnétique	page 56
III.9.1. Inventaire des différentes méthodes	page 56
III.9.2. Calcul de la force électromagnétique par le tenseur de Maxwell	page 57
III.10. Simulation du mouvement du rotor dans le cadre d'une modélisation par éléments finis.....	page 59
III.10.1. Inventaire des méthodes de simulation du mouvement.....	page 59
III.10.2. Méthode du Macro-Elément (Air-Gap-Element AGE)	page 60
III.11. Conclusion	page 63

CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODÈLE COUPLÉ ÉLECTROMAGNÉTIQUE – MÉCANIQUE DE LA (MSAP)

IV.1. Introduction	page 64
IV.2. Présentation de la machine étudiée	page 64
IV.2.1. Présentation de la topologie	page 64
IV.2.2. Présentation panoramique des enroulements.....	page 66
IV.2.3. Propriétés magnétiques des régions magnétiques de la (MSAP)	page 67
IV.2.4. Conditions aux limites	page 67
IV.2.5. Maillage de $\frac{1}{4}$ de la machine étudiée	page 68
IV.3 Simulation en régime statique a vitesse constante	page 69
IV.3.1. Etude en régime statique : aimants seules	page 69
IV.3.2. Etude en régime statique : aimants + enroulements.....	page 72
IV.4. Etude en régime transitoire électromagnétique a vitesse constante par le couplage électrique-magnétique en pas à pas dans le temps	page 75
IV.5. Etude en régime transitoire par couplage électromagnétique-mécanique.	page 78
IV.6. Conclusion	page 83

CONCLUSION GÉNÉRALE	page 84
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	page 86

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

Les machines électriques à courant alternatif sont utilisés dans une large gamme de puissance, allant du watt au mégawatt dans des applications aussi diverses que le positionnement, la synchronisation et l'entraînement à vitesse constante. Des évolutions importantes ont eu lieu ces dernières années grâce aux progrès réalisés dans les domaines des matériaux (magnétiques, mécaniques, thermiques...), de l'électronique de puissance (grandes puissances, grandes fréquences, nouvelles topologies...), de la commande (technologies numériques, méthodes de contrôle), des capteurs mais aussi des structures de moteurs. Tous ces progrès ont permis d'envisager des applications de hautes performances telles que la robotique, l'aérospatiale, les outils électriques, la production des sources d'énergie renouvelables, les divers équipements médicaux, les véhicules électrique et hybrides, etc.

De nos jours, il n'est plus nécessaire de démontrer que le calcul numérique du champ électromagnétique est devenu indispensable pour la conception des machines synchrones à aimants permanents. Les champs électrique et magnétique sont à l'origine du fonctionnement des dispositifs électrotechniques (machines électrique, appareils de coupure et de haute tension...), à travers les différents phénomènes qu'ils engendrent : électromagnétique, électrostatique, électrocinétique et électrothermique. Les phénomènes électromagnétique pour les machines électriques dans lesquelles l'enroulement ou l'aimant d'excitation, produisent des champs magnétiques qui peuvent étre constants ou variables dans le temps et dans l'espace.

L'objectif recherché dans ce travail, est la modélisation couplée électrique-magnétique-mécanique. Les jeux d'équations mise en jeux sont ensuite résolues numériquement en utilisant la méthode des éléments finis et en considérant une machine synchrone à aimants permanents. Dans ce cadre aussi, du fait des alimentations en tension des machines électriques, il sera question d'études en régime transitoire et ce, en tenant compte des propriétés magnétiques non linéaires. Ces non-linéarités sont prises en compte en s'appuyant sur l'algorithme itératif de Newton-Raphson. Le calcul des grandeurs électromagnétiques (inductions magnétiques, courants) permettra le calcul du couple électromagnétique source d'excitation pour la résolution des équations mécaniques du mouvement. Par ailleurs, la modélisation ne saurait être complète sans la, mise en œuvre d'une technique de simulation du mouvement du rotor par rapport au stator. Ainsi la technique du Macro-Elément est adoptée et implémentée. Le couple électromagnétique est calculé par la méthode du tenseur de Maxwell en utilisant l'expression analytique des composantes de l'induction magnétique dans l'entrefer.

Ce mémoire est scindé en quatre chapitres précédés d'une introduction générale et clôturé par une conclusion générale et des perspectives. Par ailleurs une bibliographie spécialisée à permis de contextualité le travail.

Le premier chapitre est consacré à la présentation d'un état de l'art de la machine synchrone à aimants permanent.

Le second chapitre concernera la modélisation de la machine synchrone à aimants permanents sur la base des équations électromagnétiques bidimensionnelles. Cette modélisation repose sur des paramètres électriques qui décrivent les phénomènes électromagnétiques (résistances et inductances) moyennant des hypothèses simplificatrices.

Le troisième chapitre porte sur la formulation éléments finis du couplage électrique-magnétique d'une part et sur le modèle mécanique à travers la prise en compte du mouvement par la méthode du Macro-élément et le calcul du couple électromagnétique.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à la présentation des résultats de simulation en vue de la validation des programmes mis en œuvre sous environnement Matlab PdeTool. Les simulations envisagées portent sur le régime statique, le régime transitoire électromagnétique, et le régime dynamique électromagnétique-mécanique.

CHAPITRE I

ETAT DE L'ART SUR LES MACHINES ÉLECTRIQUES SYNCHRONES À AIMANTS PERMANENTS

Sommaire

- I.1. Introduction
 - I.2. Les principaux matériaux utilisés dans les machines électriques
 - I.2.1. Les aimants permanents pour les machines électriques
 - I.2.2. Matériaux magnétiques : Les alliages ferromagnétiques
 - I.2.2 Les matériaux conducteurs : Bobinages
 - I.3. Technologies structurelles des machines synchrones à aimants
 - I.3.1. Présentation de la machine à aimant permanent
 - I.3.2. Les topologies des MSAP
 - I.4. Applications des machines synchrones à aimants permanents
 - I.5. Les modèles de conception
 - I.5.1. Généralités sur les modèles de conception
 - I.5.2. Les modèles analytiques
 - I.5.3. Les modèles numériques à base des éléments finis
 - I.5.4. Les modèles semi numériques
 - I.6. Conclusion
-

I.1. Introduction

Depuis le milieu des années 90, on observe un intérêt croissant des constructeurs de machines électriques pour les machines synchrones à aimants permanents. Cet engouement est dû à plusieurs facteurs d'ordre économique, technique et normatif. D'un point de vue économique, la baisse du coût des aimants, accompagnée de l'amélioration sensible de leurs performances ont rendu possible leur usage dans d'autres applications que celles liées à l'industrie de pointe à très haute valeur ajoutée. Techniquement, l'utilisation des aimants permanents offre une plus grande modularité dans la réalisation des machines synchrones et permet de réaliser des machines extrêmement compactes. Ainsi, ces machines ont un couple massique plus élevé que les machines asynchrones traditionnelles.

De nos jours, la compacité et la fiabilité sont très recherchées dans la quasi-totalité des applications, surtout dans celles liées au transport et aux énergies renouvelables (traction ferroviaire électrique, véhicules hybrides ou tout électrique, transport urbain, éolienne et hydrolienne, entraînements électriques directes, . . .). Les performances des machines électriques sont fortement liées aux caractéristiques des matériaux qui y sont employés. L'évolution de ces matériaux, notamment les aimants permanents et les matériaux ferromagnétiques, a contribué à l'amélioration des performances des machines électriques.

Dans ce qui suit, les propriétés de différents types d'aimants permanents et de matériaux ferromagnétiques constituant les machines synchrones à aimants permanents ainsi que leurs applications sont présentées. Un intérêt particulier est accordé aux différentes méthodes de modélisation et de résolution.

I.2. Les principaux matériaux utilisés dans les machines électriques

I.2.1. Les aimants permanents pour les machines électriques

I.2.1.1. Caractéristiques des aimants permanents

Ce sont des matériaux saturables à très forte hystérésis, c'est ce qui leur vaut l'appellation de «matériaux durs» par opposition aux matériaux ferromagnétiques et ferrimagnétiques à cycles étroits appelés «matériaux doux». Cette courbe $B(H)$ est pratiquement rectiligne pour les aimants 'modernes' tels que les ferrites ou les alliages de terres rares. Les aimants permanents sont principalement caractérisés par leurs cycles d'hystérésis et plus particulièrement par la courbe de désaimantation du deuxième quadrant pour lequel $H < 0$ et $B > 0$ du plan $B(H)$ (Figure. I.1). Cette courbe est caractérisée par [Lac 2008], [N'ts 2011] :

- l'induction rémanente \vec{B}_r , qui indique la puissance potentielle de l'aimant et détermine la section normale nécessaire au passage de flux utile pour le maintien du flux d'entrefer.
- le champ coercitif \vec{H}_{cB} , qui est le champ démagnétisant annulant l'induction ; plus sa valeur est élevée et plus l'aimant est stable, représentant le champ magnétisant capable d'annuler l'induction

- le produit d'énergie volumique $(BH)_{max}$ associé aux valeurs B_m et H_m du point de fonctionnement optimal,
- l'aimantation \vec{H}_{cJ} , champ coercitif qui annule l'aimantation intrinsèque du matériau.

D'un point de vue macroscopique, l'état magnétique d'un aimant de perméabilité magnétique relative μ_{aimant} est décrit par 3 vecteurs reliés par la relation vectorielle:

$$\vec{B}_a = \mu_0(\vec{H}_a + \vec{M}_a) = \mu_0\mu_a\vec{H}_a + \vec{B}_r \quad (I.1)$$

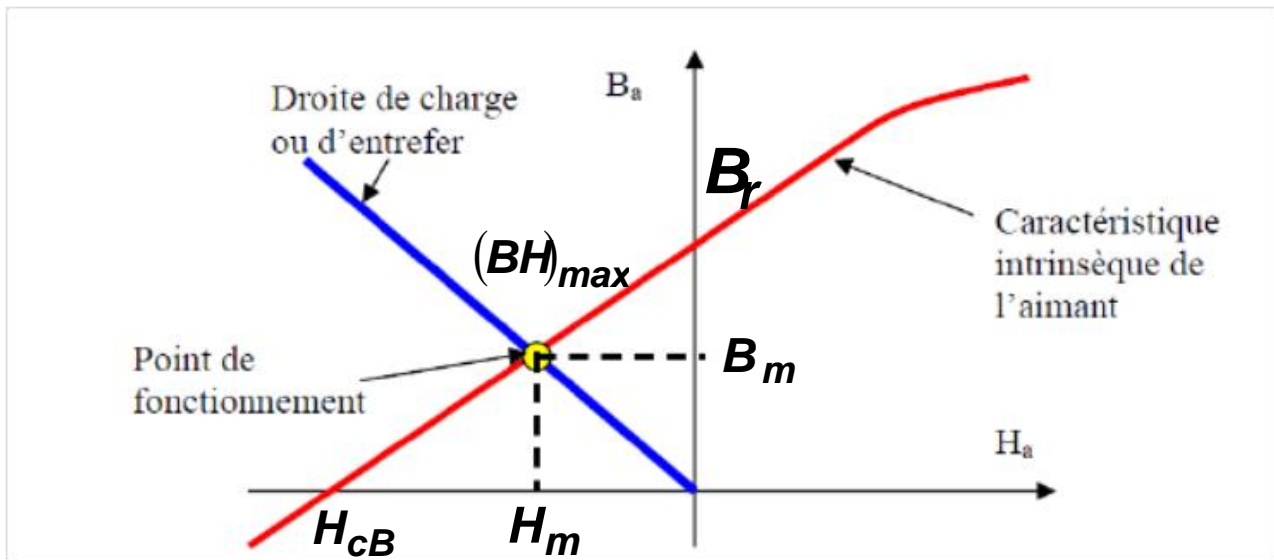


Figure. 1.1 : Illustration d'une courbe B-H des aimants et de leurs points de fonctionnement [N'ts 2011]

En plus des propriétés magnétiques, il est indispensable de connaître les propriétés mécaniques et physico-chimiques, le prix ainsi que le point de Curie (température au-delà de laquelle l'aimant perd ses propriétés magnétiques).

Le point de fonctionnement optimale de l'aimant correspondant à l'intersection d'une droite appelée «droite de charge ou droite d'entrefer» avec la caractéristique intrinsèque $\vec{B}_a(\vec{H}_a)$, permet de définir un rectangle dont l'aire (produit BH) représente la densité volumique d'énergie que l'aimant peut stocker dans l'entrefer. Cette densité volumique d'énergie étant maximale à $B = B_r/2$, d'où l'expression de l'énergie maximale:

$$(BH)_{max} \leq \frac{B_r^2}{4\mu_0}$$

1.2.1.2. Performances énergétiques des aimants permanents

Depuis un siècle, l'utilisation de nouveaux types d'aimants et l'amélioration de leurs performances, notamment en terme de densité volumique d'énergie, ont permis de trouver de nouvelles applications. Le choix de la nature des aimants d'une machine à aimants a une influence non négligeable sur son couple massique. Les caractéristiques de principaux types d'aimants utilisés dans les machines électriques sont données ci-après (Figure. 1.2).

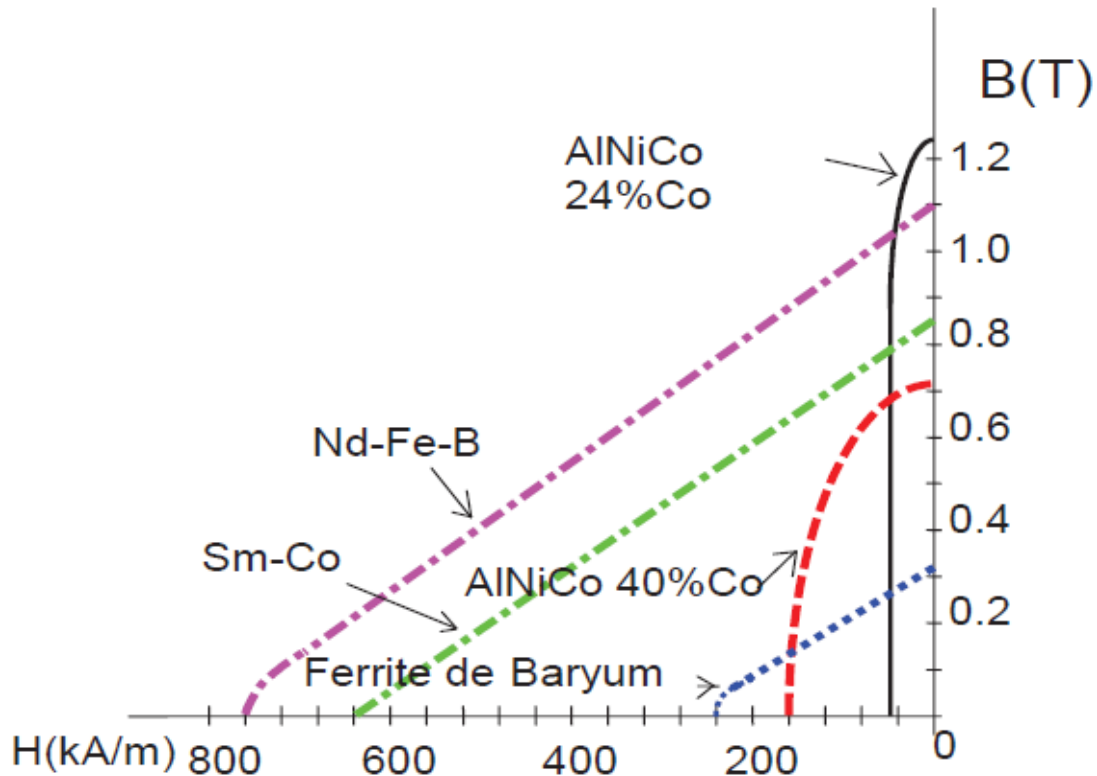


Figure. I.2 : Caractéristiques des différents types d'aimants et de leurs performances [Bom 2009], [Lat 2004]

Le choix de l'aimant est effectué en fonction de caractéristiques recherchées et du prix de l'aimant qui est très variable. Quelques propriétés magnétiques des différents types d'aimants sont données dans le tableau I.1 ci-dessous.

Tableau I.1 : Exemples de propriétés magnétiques des aimants [Bom 2009], [Lat 2006].

Type D'aimants	Densité d'énergie (BH)max (kJ/ m3)	Induction rémanente Br (T) à 25°C	Champ coercitif Hc (kA/m)	Température Tmax (°C)	Prix (€/kg)
NdFeB	200-380	1.2-1.5	900-2000	140-220	80-150
Sm Co5	140-200	1	2000	280	220
Sm2 Co17	180-240	1.05	2000	350-550	300
Alnico	50-85	1.1-1.3	130	550	45
Ferrites strontium	27-35	0.3-04	250	250	6
Ferrites barvum	8-30	0.2-04	170	100-240	4.5

En fonction de l'application, on choisit la nature des aimants à utiliser dans les machines électriques. Pour des applications a haute température, les aimants Samarium-Cobalt sont indiqués. Dans les machines a puissances élevées, compte tenu du volume d'aimants utilisé et le cout associé,

on préfère d'employer les aimants Néodyme-Fer-Bore (Nd-Fe-B). Dans les machines à faibles puissance et cout modéré les ferrites sont les candidats les plus utilisées.

Les caractéristiques de principaux types d'aimants (Figure. I.2, Figure. I.3) utilisés dans les machines électriques sont données ci-après [Lat 2006],[N'ts 2011],[Lac 2008].

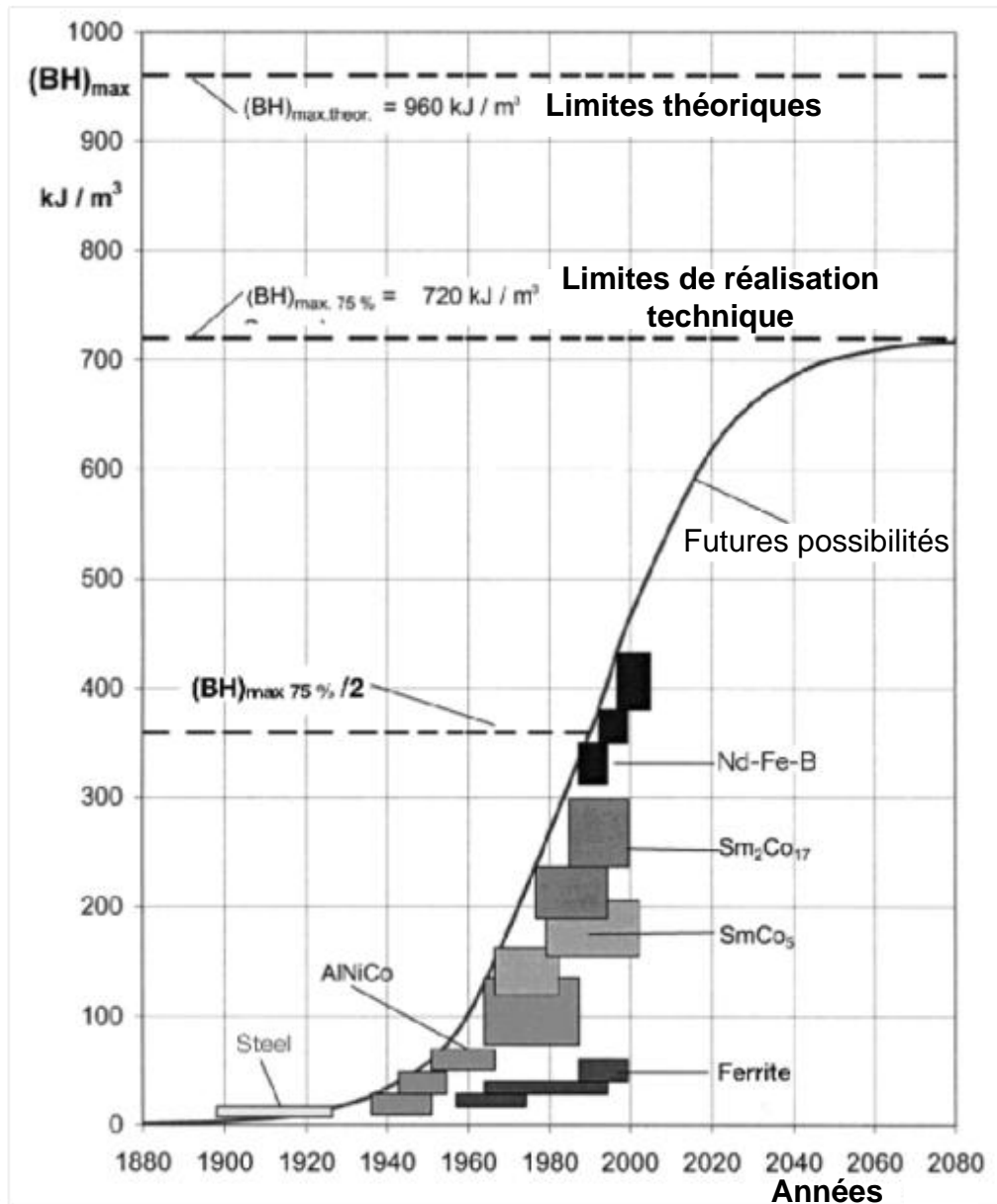


Figure. I.3 : Développement de l'énergie spécifique des aimants au cours du 20^{ème} siècle [Dog 2013].

- **Les AlNiCo**

Découverts dans les années 30 au Japon et connus aussi sous le nom générique de Ticonal, ce sont des alliages composés de fer, de cobalt, de nickel et d'aluminium. Ils peuvent être isotropes ou anisotropes avec des inductions magnétiques rémanentes de l'ordre de 0.7T et 1.2T respectivement. De nos jours, ils sont très peu utilisés à cause des modestes performances du champ coercitif de l'aimantation (H_cJ) qu'ils offrent (entre 50 à 85kJ/m³) et du cobalt, matériau coûteux qui entre dans leur constitution. En effet, le champ coercitif de ces aimants augmente en fonction du

pourcentage de cobalt utilisé, malheureusement leur polarisation rémanente décroît parallèlement. Ces aimants ont l'avantage d'être très stables du point de vue thermique, leur température de fonctionnement pouvant atteindre 550°C [Lac 2008].

- **Les ferrites**

Découvert en 1950, **les ferrites** font partie des aimants les plus utilisés à ce jour en raison de leur coût modeste et de leur rigidité magnétique élevée, et ce malgré leurs performances modestes. Cependant, ils présentent 2 inconvénients majeurs, à savoir : une faible aimantation rémanente, ce qui implique une densité volumique d'énergie limitée à 35 kJ/m³ et une décroissance de l'aimantation par rapport à la température beaucoup plus accrue que les Alnicos. **Les ferrites** sont des composés d'oxyde de fer, de baryum et de strontium. Ils sont obtenus par frittage et peuvent être isotropes ou anisotropes. En raison de leurs faibles valeurs d'aimantation rémanente (environ 0.4T), les ferrites sont utilisées plutôt dans des machines à aimants de faible puissance à faible coût. Pour atteindre des couples massiques plus élevés, les structures de machine plus complexes à concentration de flux pourraient être envisagées [Lat 2006].

- **Les terres rares**

Les Samarium cobalt (SmCo) :

Ils ont été découverts dans les années 60 et sont les premiers aimants terres rares à avoir été utilisés. Ils sont nettement plus performants que les 2 types d'aimants vus précédemment. Une densité d'énergie pouvant atteindre 270 kJ/m³ et une température maximale de fonctionnement de 550°C pour le Sm₂Co₁₇. Par contre, ils présentent 2 inconvénients, ils sont très coûteux à cause du cobalt, et leur induction magnétique rémanente est limitée à 1,0 T à la température ambiante [Lac 2008].

Les Néodymes fer bore (NdFeB) :

Découvert dans les années 80, les aimants terres rares à base de néodyme ont l'avantage d'être moins coûteux que les aimants à base de samarium. En effet, le néodyme est beaucoup plus abondant (6 à 10 fois plus) que le Samarium. Actuellement, on trouve des aimants avec une polarisation rémanente de 1,48 T à 20°C pour une densité volumique d'énergie de 422kJ/m³ et une température maximale de fonctionnement de 80°C. L'inconvénient majeur de ces aimants est leur température maximale de fonctionnement qui ne dépasse guère les 160°C. En général, l'influence néfaste de la température est beaucoup plus accrue pour les aimants à forte induction rémanente, surtout en ce qui concerne le champ coercitif. Néanmoins, ces aimants occupent aujourd'hui une grande part du marché dans les applications électriques [Lat 2006], [Lac 2008].

1.2.2. Matériaux magnétiques : Les alliages ferromagnétiques

Le rôle du circuit magnétique dans les machines électriques est de canaliser le flux magnétique et de permettre des échanges d'énergie entre les champs électriques et les champs magnétiques par l'intermédiaire de la loi de Faraday ($e = -d\phi/dt$). Ces champs variables sont à la base des courants induits qui causent des pertes, donc un échauffement et une réduction du rendement. Pour limiter le développement de ces courants, le circuit magnétique des machines doit être feuilleté, et utiliser des alliages ferromagnétiques présentant une plus grande résistivité par rapport au fer «pur massif», tout

en conservant une polarisation à saturation la plus élevée possible. Par ailleurs, l'empilage et le découpage des tôles sont d'autant plus compliqués que l'épaisseur des tôles est faible).

Pour répondre à ce besoin, 3 alliages à base de fer développés au siècle dernier existent sur le marché : les alliages Fer-Silicium, les alliages Fer-Cobalt et les alliages Fer-Nickel [Lat 2006],[N'ts 2011].

a. L'alliage fer-silicium

Constitue à ce jour l'alliage le plus utilisé aussi bien dans la conception des machines que dans celui des transformateurs et de l'actionnement électromagnétique. L'addition du silicium (moins de 3%) et d'aluminium dans les mêmes proportions est la technique la plus efficace pour obtenir une augmentation de la résistance du métal. Par contre, la conductivité thermique du métal (capacité à évacuer les pertes) décroît avec l'ajout du silicium. De par ses volumes de production et son ancienneté, l'alliage Fer-Silicium a bénéficié des plus forts développements en recherche et processus de fabrication, avec in fine, la définition de deux catégories distinctes de famille de toles fer-silicium qui se partagent sans trop de concurrence dans les marches : les tôles à **Grains Orientés (GO)** et les tôles à **Grains Non Orientés (GNO)**.

Les tôles (GNO) occupent une grande part du marché et sont utilisées dans la fabrication des circuits magnétiques des machines électriques fonctionnant en régime variable d'induction (sauf pour les noyaux des transformateurs de puissance). Aujourd'hui, les fabricants proposent des tôles de faible épaisseur et à faibles pertes massiques, afin de limiter les pertes dans les circuits magnétiques. Cependant si les pertes massiques restent acceptables à faible fréquence, elles deviennent prohibitives lorsque la fréquence augmente. Certains industriels proposent récemment des tôles spécifiquement destinées à des fréquences plus élevées (400Hz) rencontrées, notamment, en aéronautique, combinant saturation élevée et faibles pertes massiques.

Les tôles (GO) quant à elles privilégient la direction de laminage comme direction de facile aimantation, d'où une réduction des pertes, ce qui les destinent ainsi à des structures de conversion dans lesquelles le tube de flux garde une direction fixe (transformateurs). Ceci étant, ses niveaux de saturation élevés (2T) les rendent aussi attractives pour certaines machines tournantes.

a. L'alliage-fer-cobalt

Les alliages fer-cobalt présentent des propriétés tout à fait exceptionnelles. Leur aimantation à saturation est la plus élevée de tous les alliages ferromagnétiques (2,4T) pour un taux de cobalt variant de 25 à 30% et une perméabilité magnétique relative comprise entre 1000 et 8000. De plus, l'addition du cobalt relève la température de Curie du fer et permet d'atteindre des températures élevées (1050°C pour 90% de Co). Cependant, ils ne sont utilisés que dans des applications spécifiques à contraintes ambiantes sévères, application qui, en raison du prix et de la rareté du Cobalt, ces tôles ne relève pas cependant de la grande série. Elles se cantonnent donc, dans le domaine des machines tournantes, à des applications aéronautiques, ferroviaires, les matériels embarqués.

b. L'alliage fer-nickel

Les alliages Fer-Nickel sont conçus sur des taux de charge en Nickel variant de 36% à 80%. Leur structure leur confère une grande facilité de laminage à froid et de traitements thermiques qui permettent de développer leurs propriétés magnétiques (polarisation, température de curie, perméabilité) au mieux. Dans le contexte des machines tournantes fonctionnant à haute vitesse, les tôles Fer-Nickel, dont les performances globales paraissent attrayantes, restent en retrait car les caractéristiques haute perméabilité et faibles pertes sont inconciliables pour un même taux de Nickel. Leur prix les oriente vers des applications spécialisées, où souvent, on met en œuvre non seulement leurs propriétés magnétiques remarquables, mais également des propriétés complémentaires telles que la faible dilatation et la facilité de mise en forme.

On utilise souvent ces alliages pour l'électrotechnique miniaturisée (téléphonie, appareils de mesure, composants inductifs dans l'électronique de puissance).

c. Composite magnétique doux

Un autre matériau dit **composite magnétique doux** ou (SMC) en Anglais (**Soft Magnetic Compound**) a fait son apparition dans les machines électriques. Destiné à des applications de hautes fréquences, ce matériau est constitué de particules de poudre de fer enrobées de fines couches isolantes. Ces propriétés électromagnétiques et mécaniques dépendent du type de poudre et du processus de fabrication.

Le développement des (SMC) s'oriente vers une réduction des pertes massiques. Par ailleurs, la bonne conductivité thermique alliée à un transfert de chaleur tridimensionnel laisse suggérer que même si les pertes sont significatives à faible fréquence, elles sont néanmoins mieux réparties et mieux dissipées. Soulignons toutefois, la relative faiblesse des (SMC) au niveau de l'induction de saturation et de l'élasticité (aspect mécanique), comparé aux alliages.

À des fréquences en dessous de quelques centaines de Hertz (en dessous de 400 Hz), les pertes dans ce type de matériau sont très importantes comparées à celles des matériaux classiques, mais la tendance s'inverse lorsque les fréquences dépassent le kilohertz.

De manière générale, les Figures. (I.4) et (I.5) montrent le niveau de saturation et les pertes totales massiques des alliages Fe-Si existant dans le marché.

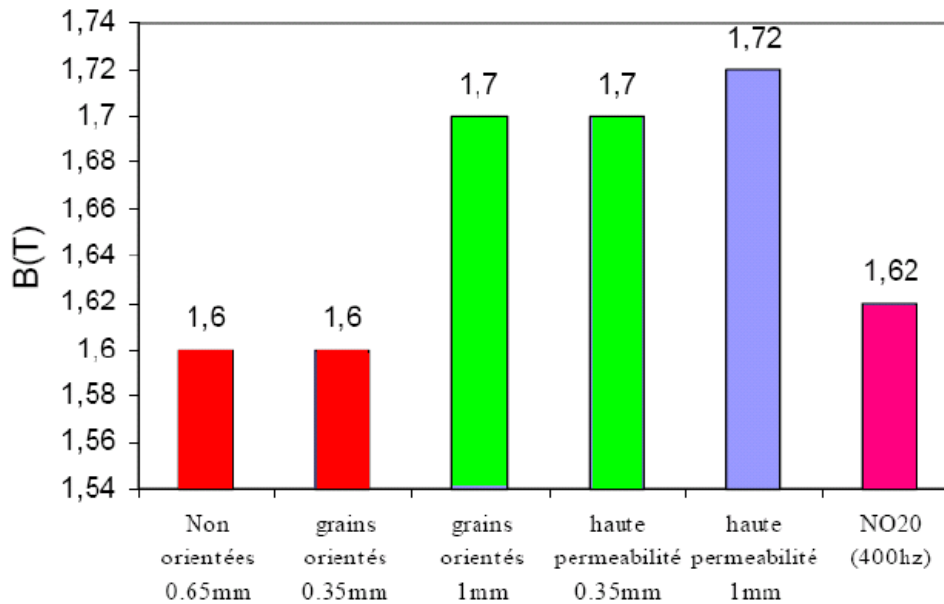


Figure. I.4. Induction de saturation des alliages Fe-Si sous un champ de 10000A/m [Lat 2006]

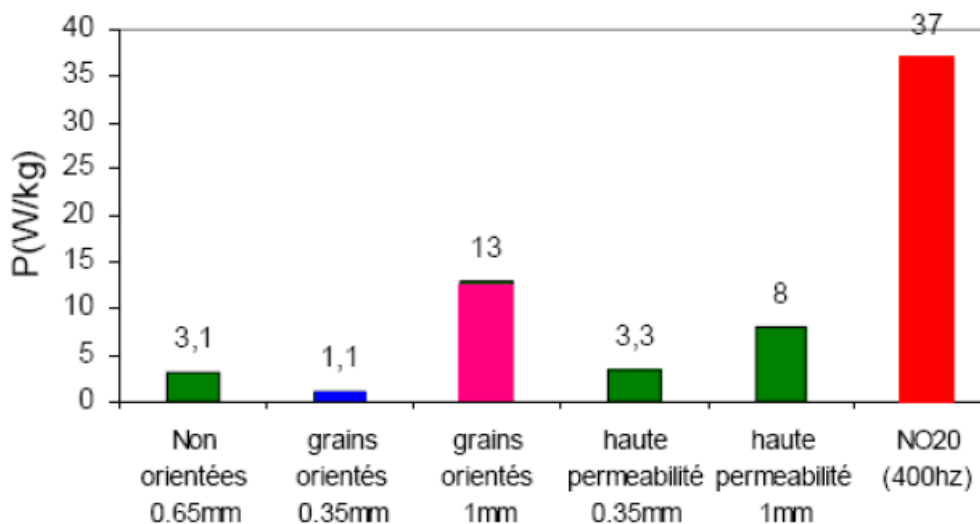


Figure. I.5. Pertes massiques des alliages Fe-Si sous une fréquence de 50Hz (à 1,5 T) [Lat 2006]

I.2.2 Les matériaux conducteurs : Bobinages

Dans la littérature scientifique, il existe trois principales façons de bobiner une machine électrique quelque soit la direction du flux: le bobinage reparti (ou distribué), le bobinage concentré (ou sur dents) et le bobinage en anneau Gramme. Le bobinage reparti (Figure 1.6.a et Figure 1.6.b) est le bobinage le plus utilise dans l'industrie. Historiquement, ce bobinage fut le premier a équiper les machines électriques. Des trois bobinages, c'est le bobinage le plus simple à modéliser analytiquement. Toutefois les têtes de bobines sont le principal inconvénient car elles sont source de pertes par effet Joule.



a)



b)

Figure. 1.6 : Bobinage réparti pour machine : a) à flux radial, b) à flux axial [Par 2005]

C'est pourquoi, les concepteurs de machines électriques ont développés le bobinage concentré (ou bobinage sur dents) (Figure 1.7.a et Figure 1.7.b). Comme son nom l'indique, la bobine n'englobe qu'une dent au lieu de plusieurs dents pour le bobinage réparti. Par cette méthode, les têtes de bobines sont réduites et par conséquent les pertes Joule diminuées.



a)



b)

Figure. 1.7 : Bobinage concentré pour machine : a) à flux radial, b) à flux axial [Bom 2009]

Pour des machines très particulières, le bobinage en anneau Gramme est réalisé (Figure 1.8.a et Figure 1.8.b). Ce bobinage est constitué de plusieurs anneaux le long du stator. Facile à concevoir, il est très adapté pour la machine axiale Torus ou la machine radiale à double entrefer. En revanche la prépondérance des pertes Joule handicape ce bobinage.

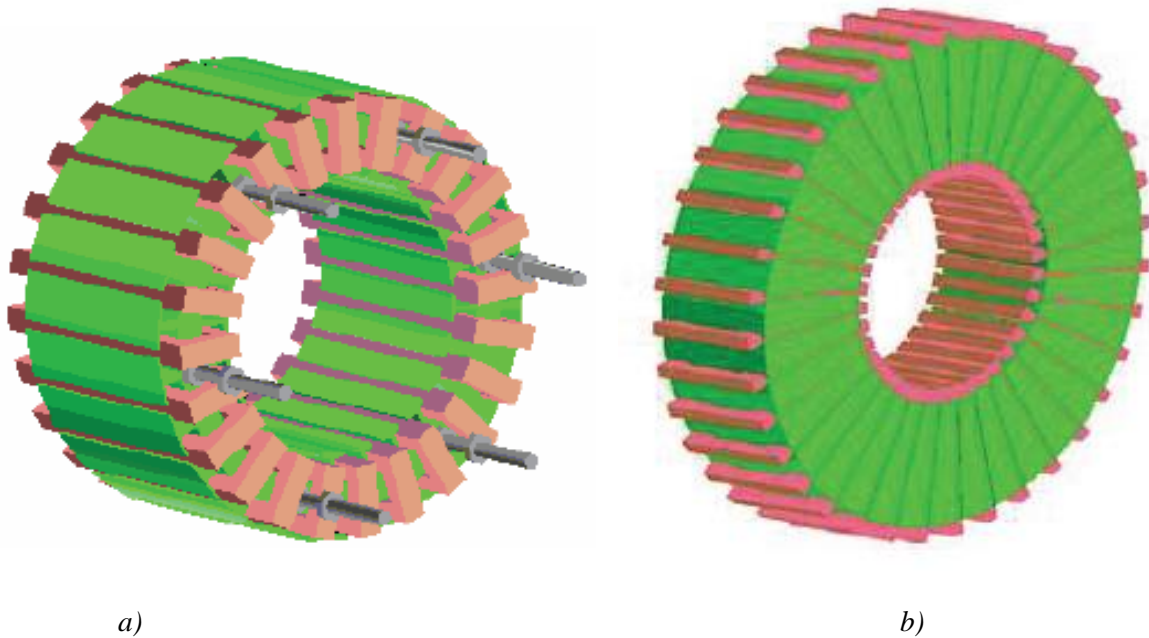


Fig. 1.8 : Bobinage Gramme pour machine : a) à flux radial, b) à flux axial [Bom 2009]

I.3. Technologies et structures des machines synchrones à aimants

I.3.1. Présentation de la machine à aimant permanent

La machine synchrone à aimants permanents est un dispositif électromécanique qui comprend un stator et un rotor. Le stator est une partie fixe où se trouvent les enroulements liés à la source. Le rotor est une partie mobile qui est monté sur l'axe de rotation. La figure. I.9, représente la structure de la machine synchrone à aimants en surface.

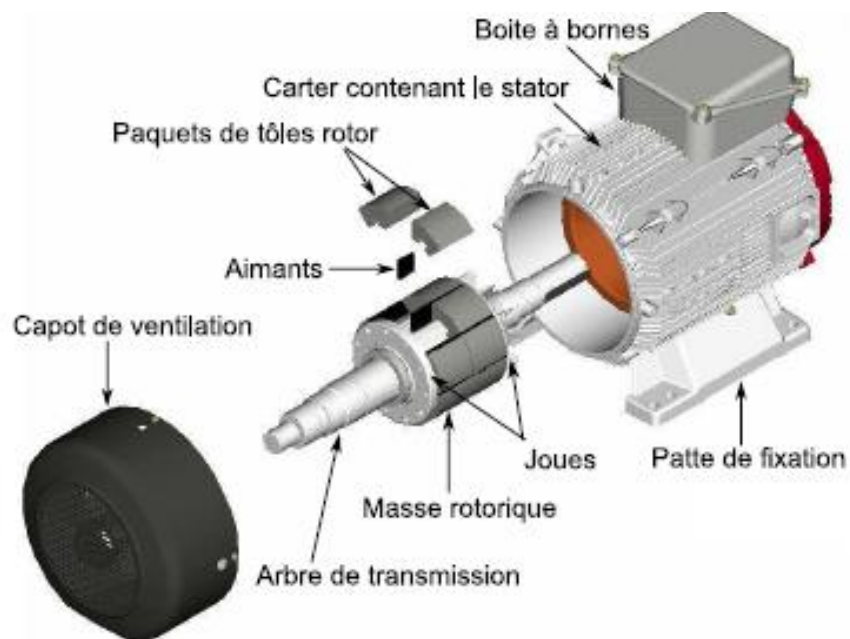


Figure I.9: Structure d'une machine synchrone à aimants permanents

Le **Stator** représente la partie fixe de la (MSAP), il est identique à celui d'une machine asynchrone, il est constitué d'un empilage de tôle magnétique qui contient des encoches dans lesquelles sont logés « m » enroulements identiques décalés entre eux de $2\pi/m$.

Le **Rotor** représente la partie mobile de la MSAP, formée d'un assemblage de tôles et d'aimants créant le flux d'inducteur.

1.3.2. Topologies des MSAP

Dans une machine synchrone, le couple est créé par l'interaction d'un champ inducteur et d'un champ d'induit. Le champ inducteur est créé par des électroaimants ou des aimants permanents, et le champ d'induit est créé par un bobinage monophasé ou polyphasé alimenté en courant alternatif. L'usage des aimants permanents permet une grande modularité dans la réalisation des machines synchrones, c'est pourquoi il existe une multitude de structures qui peuvent être classées en fonction de plusieurs critères.

1.3.2.1. La position de l'inducteur par rapport à l'induit

Ce critère permet de distinguer les machines à rotor interne (les plus répandues) et les machines à rotor externe (Figure. I.10). Les structures à rotor externe ont une inertie importante et ne sont généralement utilisées que pour les applications où la vitesse doit rester la plus constante possible. Ces structures sont aussi utilisées dans des applications particulières comme les moteurs intégrés dans une roue [Hei 2002], [Mei 2002].

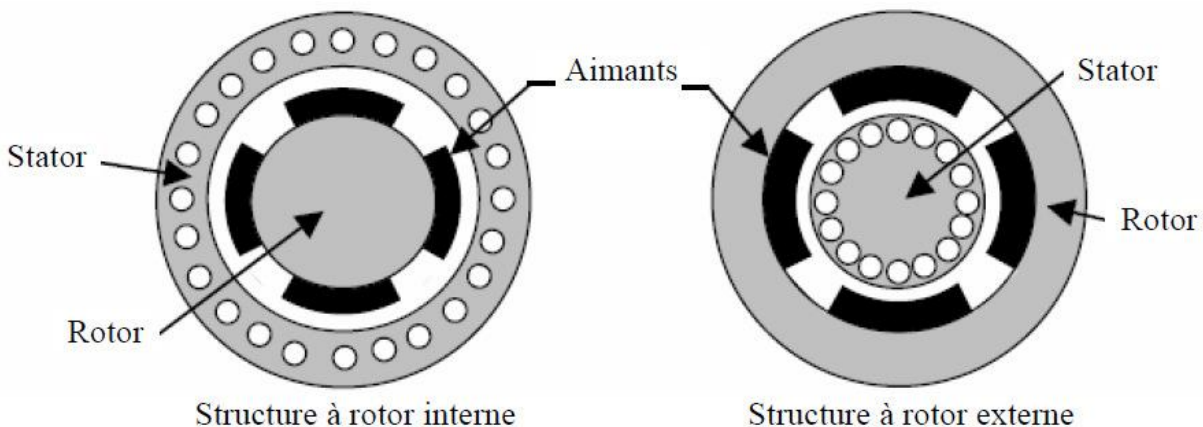


Figure I.10 : Exemple de structures à rotor interne et à rotor externe. [Mei 2002]

1.3.2.2. La direction du champ par rapport à l'axe de rotation

Les structures des machines synchrones à aimants permanents sont classées suivant la disposition des aimants sur le rotor (Figure. I.11). Leurs différentes configurations incluent les machines à flux radial (**RFPM** : **R**adial **F**lux **P**ermanent **M**agnet) et à flux axial (**AFPM** : **A**xial **F**lux **P**ermanent **M**agnet), et la structure à Flux Transverse (**TFPM**). Celles-ci peuvent être alimentées, soit par des courants sinusoïdaux dans le cas des moteurs synchrones à aimants permanents (**MSAP**) ou par des courants en créneaux dans le cas des (**BDCM**) (**B**rushless **D**irect **C**urrent **M**otors).

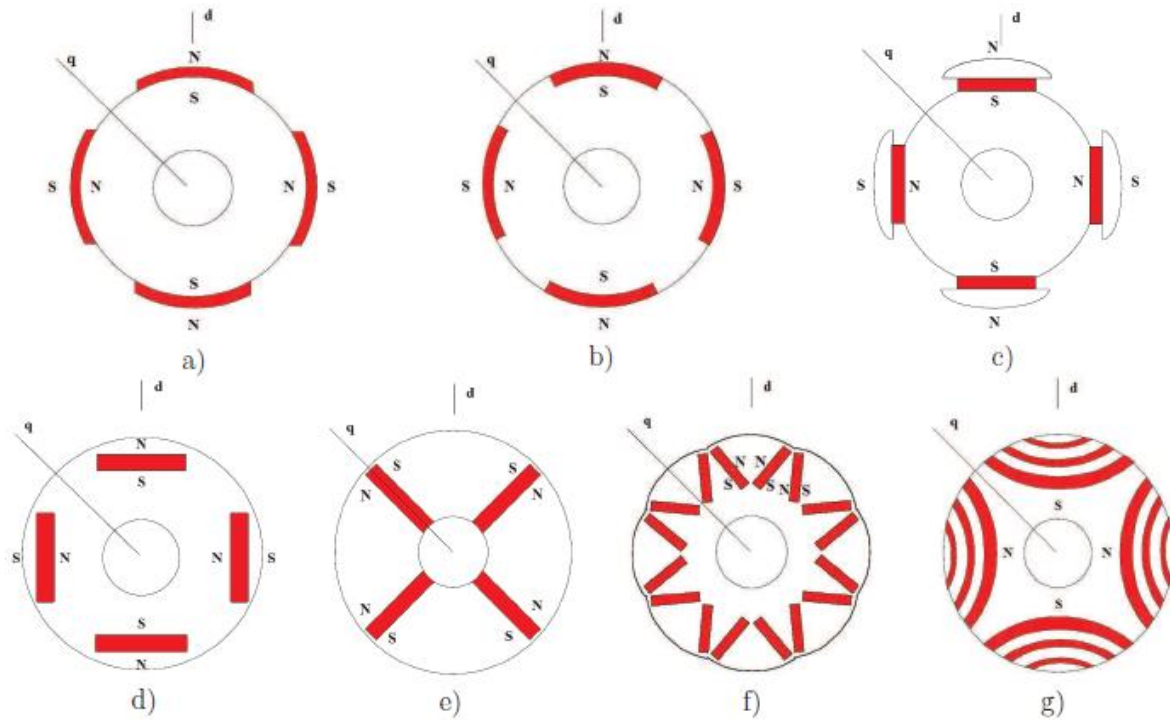
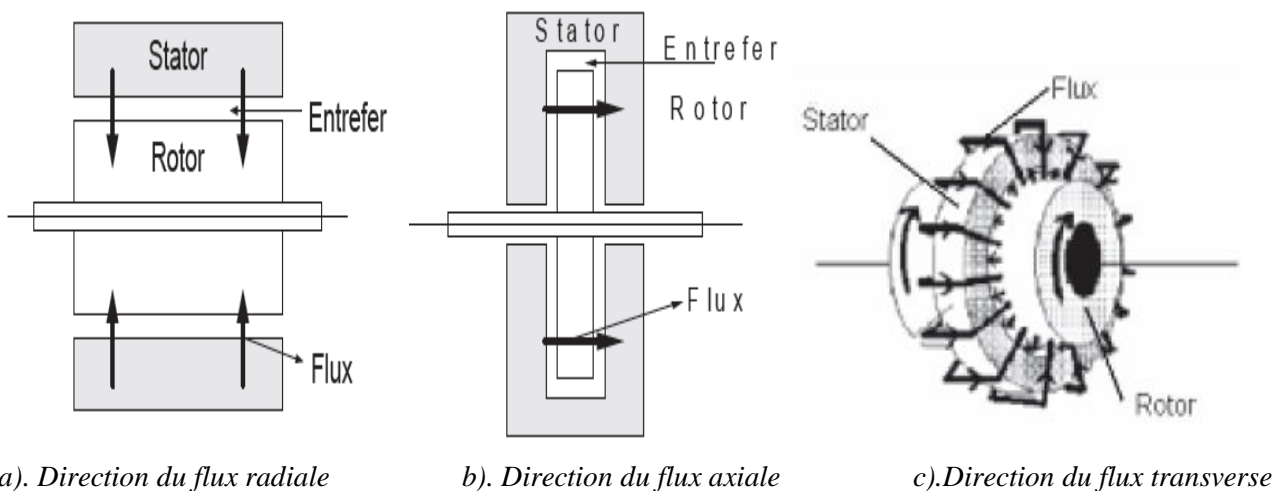


Figure.I.11 : Localisation des aimants permanents : **a)** Aimants montés en surface, **b)** Aimants insérés à la surface du rotor, **c)** Aimants montés en surface avec épanouissement polaire, **d)** Aimants enterrés tangentiels, **e)** Aimants enterrés radiaux ou à concentration de flux, **f)** Aimants enterrés en V avec entrefer variable, et **g)** Machine à réluctance variable assistée par des aimants permanents enterrés [Dog 2013].

La machine à flux radial est la plus répandue et la plus utilisée. Le flux dans l'entrefer est radial (ou perpendiculaire) à l'axe de rotation de la machine (Figure. I.12.a). Pour la machine à flux axial, le flux dans l'entrefer est axial (ou tangentiel) à l'axe de rotation de la machine (Figure. I.12.b). Pour des applications très spécifiques, telles que l'entraînement direct et les vitesses lentes, les concepteurs ont introduit la machine à flux transverse (Figure. I.12.c). Le flux est à la fois perpendiculaire et tangentiel à l'axe de rotation de la machine [Mul 1999].



a). Direction du flux radiale

b). Direction du flux axiale

c). Direction du flux transverse

Figure I.12 : Structures des (MSAP) selon la direction du flux magnétique [Mul 1999].

1.3.3. Machines à aimants cylindriques à champ radial.

Historiquement, la machine synchrone à flux radial est la première machine à aimants permanents apparue dans l'industrie. Grâce aux progrès de l'électronique de puissance et de la performance des aimants permanents, elle commence à supplanter la machine asynchrone. La première machine synchrone à flux radial à avoir été développée est une machine dont le bobinage est reparti, et les aimants placés en surface (Figure. I.13.a). L'inconvénient majeur de cette machine est l'emplacement des aimants. En effet, en les mettant en surface, les applications à haute vitesse sont difficiles. C'est pourquoi, pour diminuer le risque de décollement des aimants, le rotor de la machine peut être placé à l'extérieur du stator (Figure. I.13.c). Ainsi, les aimants en surface sont plaqués sur le rotor grâce à l'effet de la force centrifuge. [Par 2005],[Bom 2009]. La topologie à rotor externe est moins utilisée car plus difficile à réaliser et nécessite plus de volume d'aimant, présente les avantages suivants :

- ✓ Un diamètre du rotor, plus grand que pour les machines conventionnelles à flux radial, permettant d'avoir un nombre plus élevé de pôles et un couple plus grand.
- ✓ Une meilleure qualité de collage des aimants sur le rotor grâce à la force centrifuge qui pousse les aimants vers l'extérieur, rendant leur détachement presque impossible.

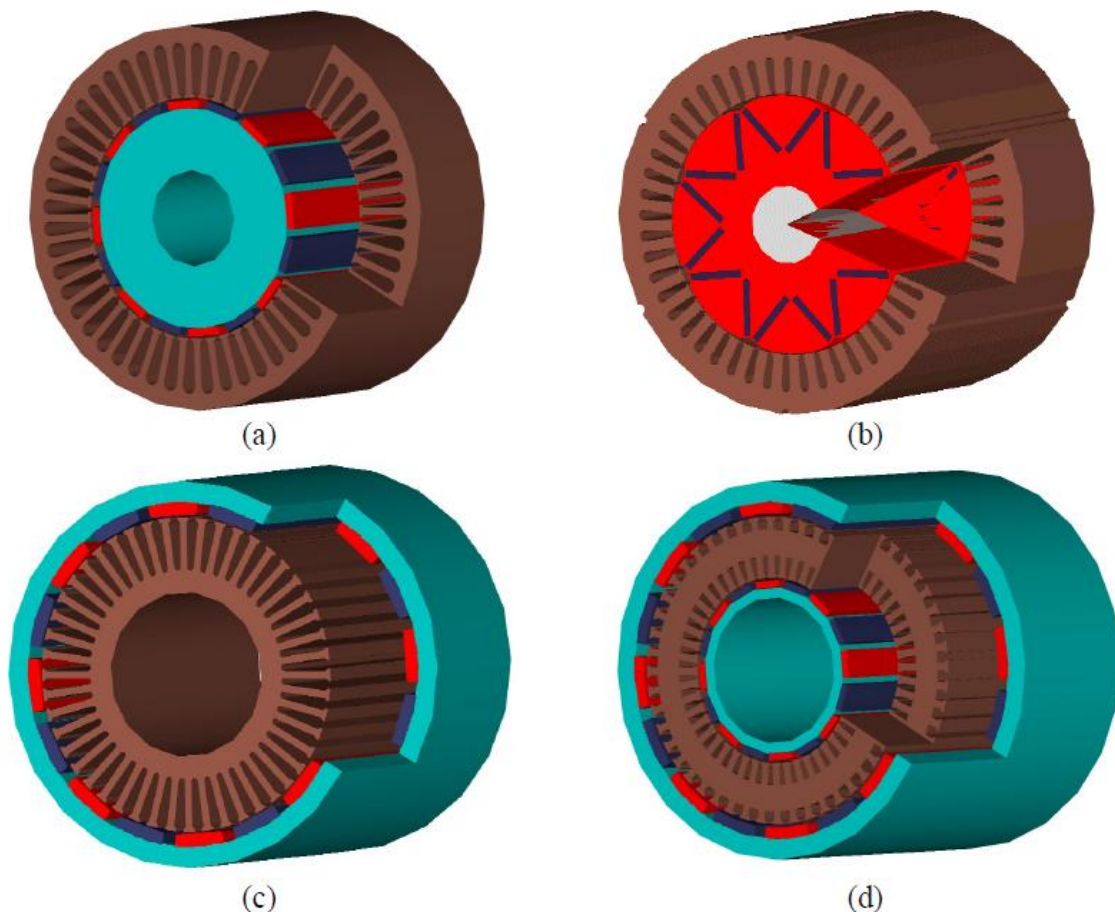


Figure I.13 : Structures radiales des (MSAP) . (a) rotor interne à aimants montés en surface, (b) rotor interne à aimants enterrés, (c) rotor externe à aimants montés en surface, (d) double rotor à aimants montés en surface [Par 2005].

I.3.4. Structures à aimants déposés en surface

Elles sont appelées machines à inducteur lisse en raison de leurs aimants disposés au niveau de l'entrefer sur un noyau ferromagnétique lisse (Figure. I.13.a,b,d). L'induction dans l'entrefer est celle des aimants Ba. Leur aimantation peut être radiale, tangentielle ou combinée. La topologie à rotor interne est généralement la plus utilisée en raison de sa simplicité et son faible coût de réalisation. Cependant elle présente quelques inconvénients. En effet, les aimants permanents sont exposés aux champs de démagnétisation et sont sujets à des forces centrifuges pouvant causer leur détachement du rotor.

I.3.5. Structures à aimant encastrés

Des aimants de forme simple sont insérés à la surface du rotor, ce qui leur permet d'avoir une bonne tenue mécanique (Figure. I.11.b,c,d). L'espace entre les aimants est couvert par des dents rotoriques créant une saillance inversée ($L_d < L_q$) entre les inductances d'axe directe L_d et en quadrature L_q . Cette saillance produit un couple de réluctance aussi important que le couple d'interaction dû aux aimants permanents.

I.3.6. Structures à aimants enterrés

L'autre alternative au décollement des aimants est d'enterrer les aimants (Figure. I.11.e,f,g). En plus de l'avantage précédent, en enterrant les aimants les flux de fuite sont diminués significativement et surtout les aimants sont utilisés en concentration de flux : l'accroissement de l'énergie magnétique délivrée y est conséquent. De plus, les aimants enterrés sont bien protégés contre la démagnétisation. Grâce à ces avantages, les machines dont le rotor est composé d'aimants enterrés sont de plus en plus étudiées. La robustesse mécanique de ce type de rotor permet d'atteindre de très grandes vitesses pour des puissances importantes.

I.3.7. Machines à aimants discoïdes à champ axial (AFPM).

Ces machines dites « discoïdales » ou (AFPM) représentent une autre solution possible pour les entraînements directs à basse vitesse. Elles comportent un ou plusieurs disques fixes bobinés et un ou plusieurs disques mobiles supportant les aimants permanents. Leur principal avantage est l'optimisation de la surface utile de génération du couple, qui se traduit par une puissance volumique importante. Comparées à la structure à flux radial, ces machines se caractérisent par un plus grand diamètre et une longueur axiale relativement plus courte. Le flux provenant des aimants est axial tandis que le courant est dans la direction radiale (Figure. I.14), [Par 2005], [Fei 2011]. La meilleure façon d'augmenter les performances des moteurs comme le couple ou la puissance est encore de multiplier le nombre d'entrefers. Différentes configurations à flux axial existent: celle à structure simple avec un seul rotor associé à un seul stator (Figure. I.14.a) et celles à double entrefer avec soit, un seul stator inséré entre deux rotors (Figure. I.14.b) ou un seul rotor inséré entre deux stators (Figure. I.14.c), ou la structure mixtes double rotor et quadruple stator (Figure. I.14.d).

Les structures discoïdes offrent également une grande modularité naturelle par juxtaposition de modules, la puissance étant déterminée par le nombre de disques pour un diamètre donné. Malgré sa puissance massique élevée, on souligne toutefois l'existence de contraintes mécaniques liées aux poussées axiales et des contraintes thermiques dues à la difficulté d'évacuation des pertes statoriques [Par 2005],[Fei 2011].

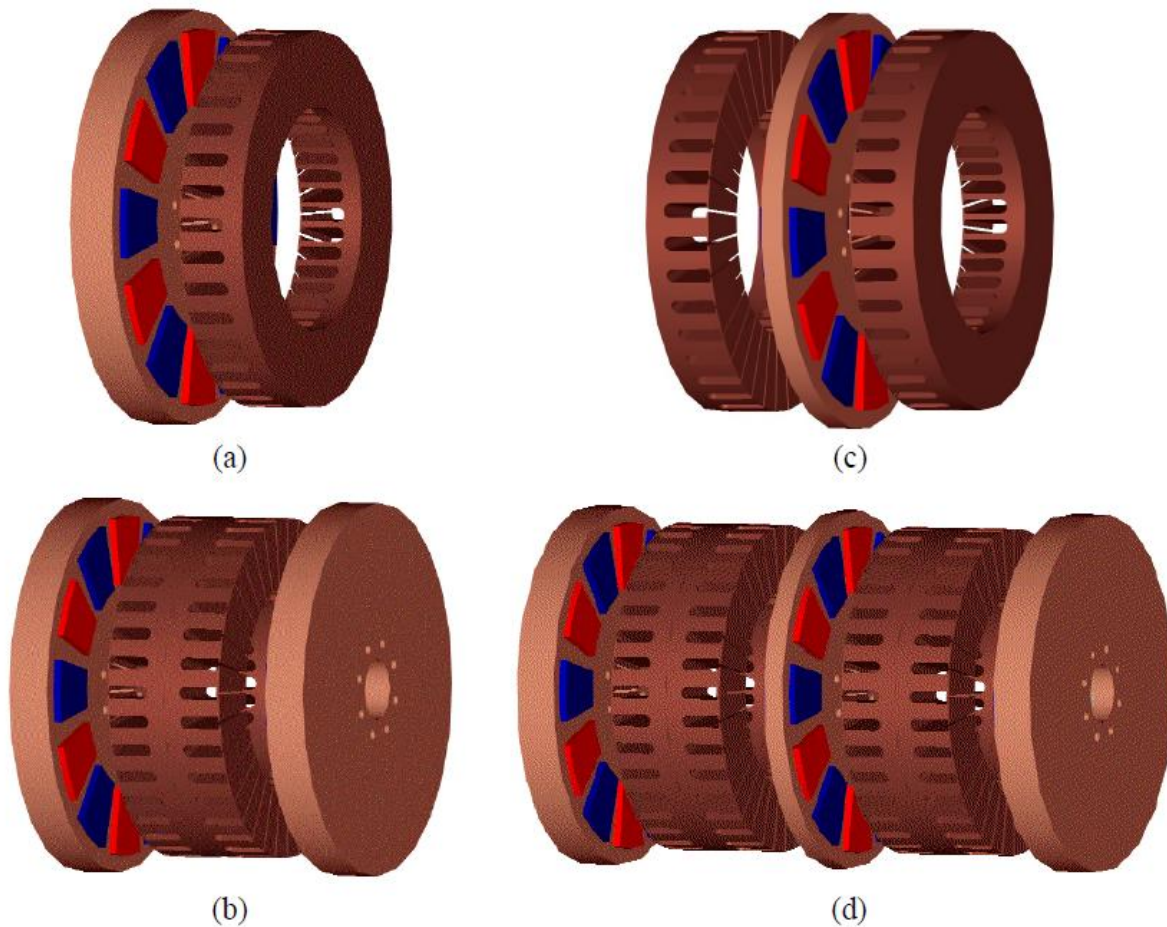


Figure I.14 : Structures à flux axial des (MSAP) . (a) simple rotor-simple stator, (b) double rotor – simple stator, (c) simple rotor – double stator, (d) structures multiblocs triple rotor-double stator [Par 2005].

1.3.8. Machines à aimants à flux transverse.

Dans cette structure, des circuits magnétiques en forme de fer à cheval régulièrement disposés et entourent le bobinage du stator de chaque phase. Un moteur à flux transverse ayant q phases comprendra alors plusieurs moteurs monophasés (circuits magnétiques) montés sur le même arbre et décalés d'un angle géométrique de $2\pi/q$ (Figure. I.15).

Ces structures sont particulièrement adaptées pour des exigences de forte densité de couple, toutefois sa complexité mécanique et son coût de réalisation font qu'elle est encore au stade de développement. Par ailleurs, on souligne de forts couples pulsatoires, des vibrations et des pertes fer excessives dues au caractère tridimensionnel du champ. Pour réduire ces pertes, on pourrait utiliser des matériaux magnétiques composites (poudre compacte) au détriment du couple volumique lié à

un niveau d'induction de saturation relativement faible de ce type de matériau. En outre, les quelques réalisations effectuées ont mis en évidence que l'achèvement d'un fort couple volumique se traduit par un surdimensionnement de la partie convertisseur [Bas et al 2009], [Lat 2006].

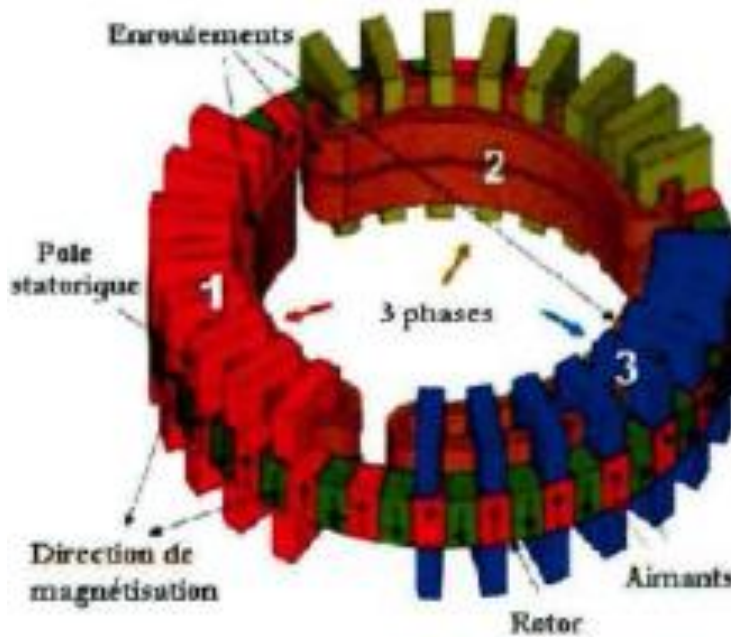


Figure I.15 : Structures à flux transverse [Bas et al 2009]

I.4. Applications des machines synchrones à aimants permanents

Les machines électriques à courant alternatif sont utilisées dans une large gamme de puissance, allant du watt au mégawatt dans des applications aussi diverses que le positionnement, la synchronisation et l'entraînement à vitesse constante. Avec l'avènement des matériaux à aimants permanents de haute énergie et les progrès réalisés dans le domaine de l'électronique de puissance, les machines à aimants permanents ont connu ces dernières années un grand essor. Elles ont été adoptées dans de nombreuses applications de hautes performances telles que la robotique, l'aérospatiale, les outils électriques, la production des sources d'énergie renouvelables, les divers équipements médicaux, les véhicules électrique et hybrides, propulsion navale, servomoteurs, équipements domestiques, etc. Pour toutes ces applications, les machines à aimants permanents sont parfois préférables aux autres machines traditionnelles, telles que les machines à courant continu, les moteurs synchrones classiques et les moteurs asynchrones et en particulier pour les applications spécifiques (servomoteur et vitesse variable). A titre d'illustration, quelques avantages des machines à aimants permanents sont cités ci-dessous [Lat 2006][N'ts 2011],[Mul 1999]:

- L'absence d'enroulement au rotor annule les pertes joules au niveau du rotor,
- Le couple volumique et la puissance massique importants permettent une meilleure compacité,
- L'absence des collecteurs et des balais simplifie la construction et l'entretien,
- La densité de flux, relativement élevée dans l'entrefer, assure une très bonne performance.

I.5. Les modèles de conception

I.5.1. Généralités sur les modèles de conception

Toute machine est définie en fonction de critères de performances et de productivité. Le concepteur s'ingénie à trouver les solutions les plus performantes, les plus économiques et les plus compétitives. Le dimensionnement des moteurs découle de ces choix. Le plus souvent, il est finalisé quand la partie mécanique a été en grande partie étudiée. Sur le plan strictement mécanique, les moteurs qui équiperont la machine doivent répondre à plusieurs critères. En premier, ils permettent le fonctionnement continu de la machine et fournissent le couple à la vitesse requise. Cette première considération détermine la puissance du moteur en régime permanent. Le concepteur doit également examiner le démarrage de la machine et déterminer le couple que le moteur devra développer pour mettre en mouvement la machine. Cela peut conduire à augmenter la puissance du moteur. Le cycle de fonctionnement est également un point capital. En effet chaque démarrage conduit à un échauffement du moteur et il est indispensable de ne pas dépasser une température limite qui, à plus ou moins long terme, se traduira par une défaillance du moteur. Enfin, la complexité de la conception des machines électriques est mise en évidence à travers les différentes interactions entre les phénomènes électriques, magnétiques, mécanique, thermique,...(Figure. I.16). [Cec 2005], [Dog 2013], [Mei 2002],[Bom 2009],[Par 2005],[Rad 2007].

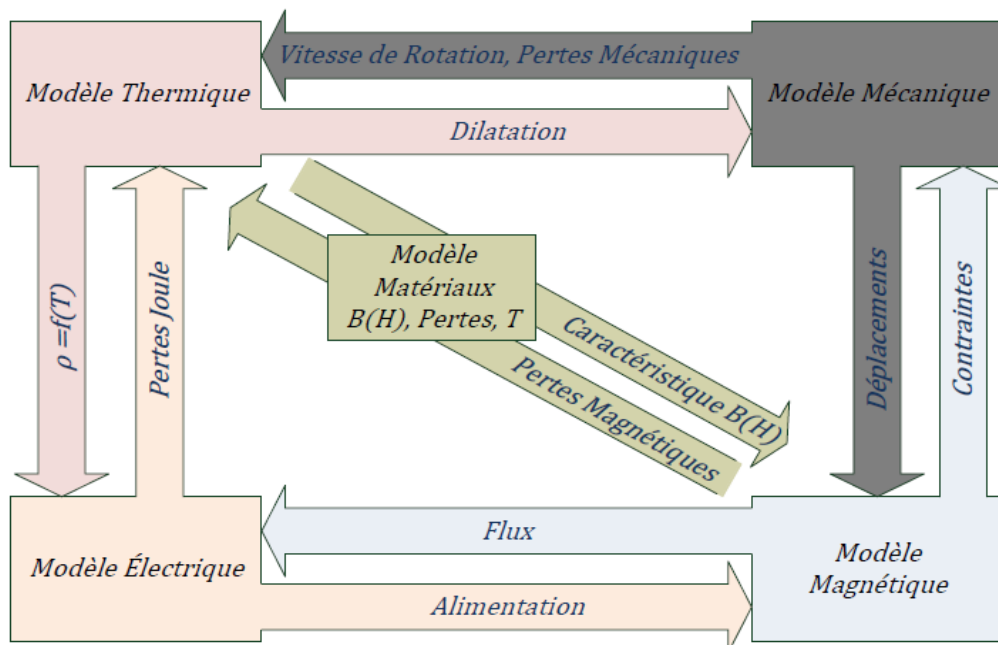


Figure I.16 : Interaction des modèles pour la conception d'une machine électrique [Rad 2007].

Le choix du modèle de conception est capital pour le concepteur. En effet, les résultats d'optimisation dépendent de l'aptitude du modèle à décrire les phénomènes physiques qui régissent le fonctionnement du dispositif à dimensionner ainsi que les différentes contraintes multi-physiques qui s'y attachent.

Nous pouvons classer les différents modèles de conception en trois groupes : Méthodes numériques, et les méthodes semi-analytiques, et les méthodes analytiques (Figure. I.17). par ailleurs, on notera qu'il revient au concepteur de faire des compromis optimaux entre l'erreur de modélisation et le cout de calcul.

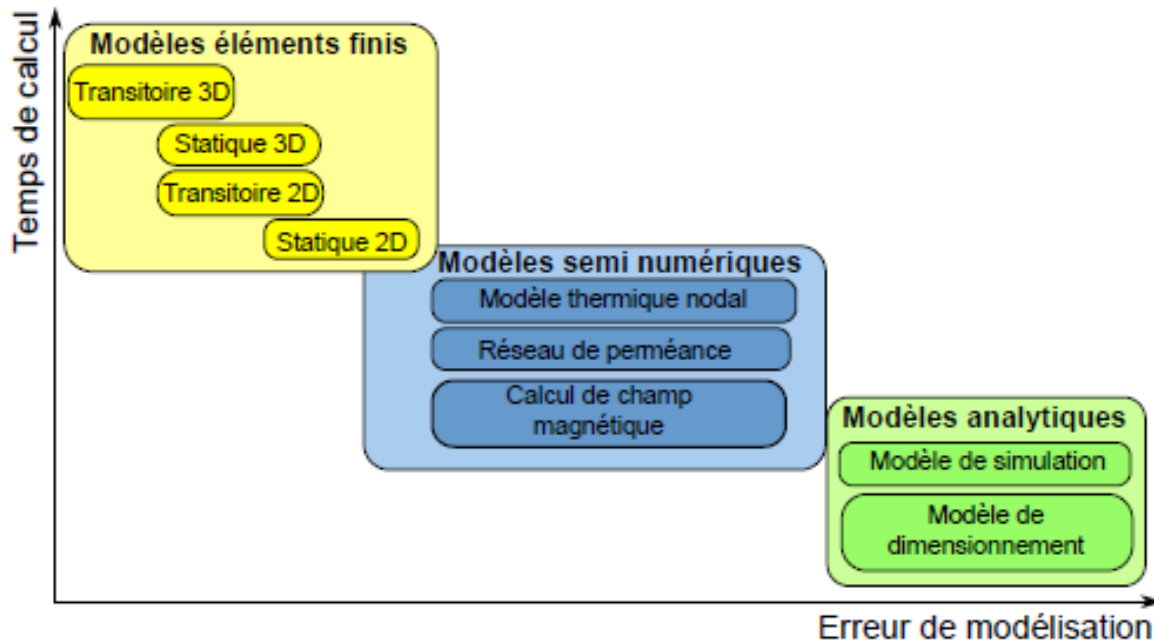


Figure I.17 : Positionnement des approches de modélisations des dispositifs électrotechniques [N'ts 2011].

1.5.2. Les modèles analytiques

Les modèles analytiques décrivent le dispositif à pré-dimensionner par un jeu d'équations liées entre elles les considérations structurelles (géométries), et les phénomènes magnétique, électrique, thermique, chimique en corrélation avec les sources d'alimentation et les spécificités des applications. Pendant très longtemps et bien avant l'apparition des ordinateurs, ils ont été les seuls outils à la disposition des concepteurs. Compte tenu de la difficulté à décrire analytiquement certains phénomènes (pertes fer, saturation ferromagnétique, coefficient d'échange...), ces modèles sont toujours soumis à des hypothèses fortes et à un certain degré d'empirisme (milieu linéaire, hypothèse au sens du 1er harmonique, ...) et seules les valeurs fondamentales des sorties sont disponibles. En contraste avec les modèles numériques, les modèles analytiques ont l'atout d'effectuer des calculs rapides et permettent une étude paramétrique assez aisée, mais leur développement est généralement long. Parce qu'il faut non seulement une bonne connaissance de la machine étudiée et de son application, mais il faut aussi recalibrer le modèle avec des prototypes à construire et à des expérimentations dont la réalisation est fastidieuse.

1.5.3. Les modèles numériques à base des éléments finis

La méthode des éléments finis a acquis des lettres de noblesse dans la conception et le dimensionnement des dispositifs électromagnétiques, notamment les machines électriques ou des

transformateurs. Dans cette méthode, le champ électromagnétique est calculé par la résolution des équations de Maxwell dans l'hypothèse des états quasi stationnaires, en tenant compte des propriétés linéaires/non-linéaires/anisotropes des matériaux. De plus, les méthodes des éléments finis sont génériques, facilement adaptable et permettent aussi la prise en compte locale et globale de phénomènes physiques différents et fortement couplés (magnétique, électrique, thermique, mécanique et vibratoire) aussi bien en régime statique que dynamique (transitoire). Toutefois, cette méthode peut-être gourmande en temps de calculs, surtout si l'on souhaite augmenter la précision des résultats et optimiser la machine. Ils sont donc davantage destinés aux étapes fines du dimensionnement qui correspondent aussi aux phases finales du design.

1.5.4. Les modèles semi numériques

Ces sont des méthodes intermédiaires entre les modèles analytiques et les éléments finis, ils permettent d'allier la puissance d'une résolution numérique fine et la rapidité de convergence d'un modèle analytique moyennant une bonne connaissance a priori des trajets des flux physiques et d'identifier les bonnes paramètres associés.

Il existe une multitude de méthodes semi numériques, parmi lesquelles on notera la méthode des réseaux de perméances magnétiques, la méthode des circuits électriques couplés, et la méthode des réseaux thermiques nodaux. Ces modèles s'appuient sur la représentation de la machine par un circuit magnétique/électrique/thermique équivalent. Pour chaque trajet du flux magnétique/courant électrique/flux de chaleur il est possible de symboliser respectivement une réluctance magnétique équivalente, une impédance électrique équivalente, et une résistance et capacité thermique équivalente pouvant dépendre de la nature du matériau ou de l'air.

Par rapport aux modèles purement analytiques, les modèles réluctants ont aussi l'avantage de prendre en compte plus de phénomènes physiques tels que la saturation magnétique, les harmoniques dans certains cas, les pertes fer, etc. En revanche, même s'il est possible d'intensifier la complexité du modèle par le rajout d'éléments supplémentaires, leur niveau de finesse reste tout de même inférieur aux modèles éléments finis. L'inconvénient est qu'avec un circuit réluctant, il n'est pas possible d'être rigoureusement précis pour chaque niveau de saturation.

1.6. Conclusion

Dans ce chapitre, la machine synchrone à aimants permanents à été présentée à travers ses différentes topologies et ses différents matériaux constitutifs siègent des phénomènes physiques a partir desquels se déclinent les équations de modélisation. Le niveau de complexité étant en corrélation avec la précision de description des phénomènes et des différents couplages multi-physiques qui se produisent.

Le chapitre suivant apportera les réponses relatives aux équations électromagnétiques de modélisation des systèmes électromagnétiques en générale et de la machine synchrone à aimants permanents en particulier.

CHAPITRE II

MODÈLES ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET COUPLAGE ÉLECTRIQUE-MAGNÉTIQUE EN RÉGIME TRANSITOIRE

Sommaire

II.1. Introduction

II.2. Equations de Maxwell

II.3. Lois de comportement ou relations constitutives de milieu

II.3.1. Notions de lois de comportement des matériaux de l'électrotechnique

II.3.2. Cas des milieux conducteurs

II.3.3. Cas des milieux magnétiques

II.3.4. Cas des milieux diélectriques (isolants)

II.4. Formalisme générale des équations électromagnétiques : (Diagramme de Tonti)

II.5. Relations d'interfaces (conditions de passages)

II.6. Notion de conditions aux limites

II.7. Modèles électromagnétique en régime quasi-stationnaire.

II.7.1 Equations de Maxwell en régime quasi-stationnaire.

II.7.2. Formulation électromagnétique quasi-stationnaire en potentiel vecteur magnétique et potentiel scalaire électrique

II.7.3. Formulations des équations électriques associées aux enroulements bobinés et massifs

II.8. Equation mécanique du mouvement

II.9. Conclusion

II.1.Introduction

De nos jours, il n'est plus nécessaire de démontrer que le calcul numérique du champ électromagnétique est devenu indispensable pour la conception des dispositifs électromagnétiques en générale et des machines synchrone à aimant permanent en particulier. La modélisation en électromagnétisme est basée sur les équations de Maxwell qui constituent le modèle de départ. En utilisant les hypothèses de l'électrotechnique, on peut extraire de ces équations les modèles statiques (magnétostatique, électrostatique,...) caractérisant les distributions des grandeurs dans l'espace, et les modèles dynamique (magnétodynamique, électrodynamique,...) caractérisant l'évolution spatio-temporelle du champ électromagnétique. Ces modèles peuvent être formulés en introduisant des variables autres que les champs physiques. On parle alors de formulations en termes de potentiels scalaires (électrique/magnétique) ou vecteurs (potentiel vecteur magnétique/électrique).

Les systèmes électromagnétiques que nous sommes amenés à résoudre sont composés dans la plupart des cas de matériaux ferromagnétiques et de conducteurs électriques filaires ou massifs. Il peut y avoir des parties qui ne soient ni conductrices ni magnétiques tel que l'air environnant limité par une frontière sur laquelle les conditions aux limites des grandeurs régissant le fonctionnement du système sont connues (Figure. II.1).

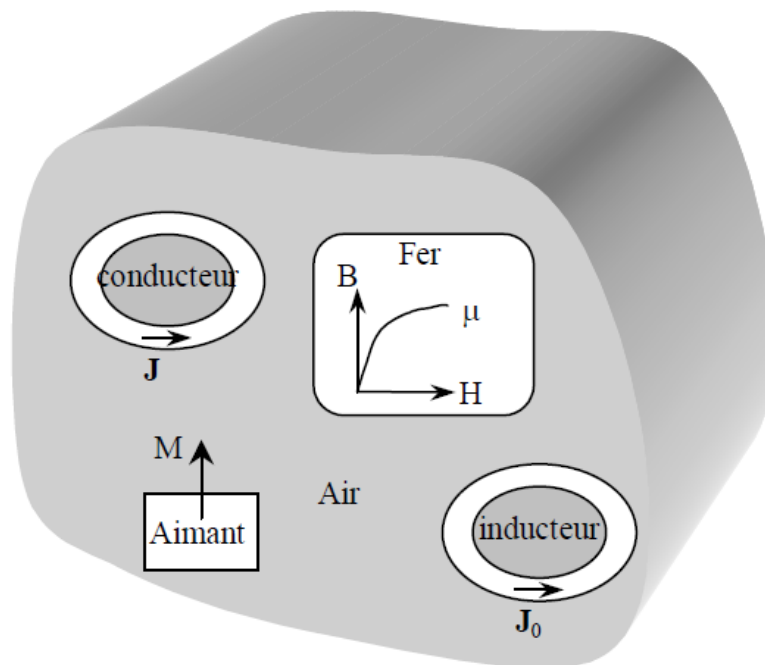


Figure. II.1. Eléments constitutifs types des problèmes électromagnétiques

Pour étudier le comportement du champ électrique et du champ magnétique dans les dispositifs électromagnétiques, nous allons dans ce chapitre, présenter les équations de base de l'électromagnétisme aussi bien dans leurs formes générales que dans le domaine de l'électrotechnique (hypothèses quasi-stationnaires). L'association des conditions aux limites ainsi que les conditions de continuité donne des modèles complets que nous avons mis en évidence à travers le diagramme de Tonti [Tonti 2001].

II.2. Equations de Maxwell

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechnique sont régis par les quatre équations aux dérivées partielles de Maxwell et par les trois relations du milieu considéré [Bastos et al 2003], [Ham et al 1999], [Sab et al].

Equations de Maxwell sous formes	
Intégrales	Différentielles
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (II.1)	$\oiint_{\partial S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \cdot dV$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (II.2)	$\oiint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (II.3)	$\oint_{\partial C} \vec{E} \cdot d\vec{C} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (II.4)	$\oint_{\partial C} \vec{H} \cdot d\vec{C} = \iint_S \left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$

L'équation de continuité (conservation de la charge) caractérisant les sources électriques est obtenue en appliquant la divergence à la L'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Comme $\vec{\nabla} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$, alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (II.5)

Cette relation exprime la conservation des charges électriques. Sachant que des charges en mouvement représentent un courant électrique et comme les charges ne sont ni-crées ni-détruites alors la densité de charge et la densité de courant satisfont toujours l'équation de continuité ou de conservation de charges.

II.3. Lois de comportement ou relations constitutives de milieu

II.3.1. Lois de comportement des matériaux de l'électrotechnique

Une loi de comportement est une fonction qui lie une grandeur physique microscopique aux variables d'état macroscopique du matériau. Les lois qui caractérisent le comportement des diélectriques $D(E)$, des matériaux magnétiques $B(H)$ ou des conducteurs $J(E)$ dépendent non seulement des champs électromagnétiques mais également de la température T , la fréquence F , et de la structure de la matière, etc. Cependant, dans un certain nombre de cas pratiques, les relations de comportement peuvent être représentées par des lois simplifiées [Cle et al], [Jing 2004]. Pour la loi de comportement qui traduit par une relation mathématique le comportement du matériau, on a ainsi :

- pour les matériaux magnétiques $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}, T, \mu, \dots)$,
- pour les matériaux diélectriques $\mathbf{D} = \mathbf{g}(\mathbf{E}, T, \varepsilon, \dots)$,
- pour les matériaux conducteurs $\mathbf{J} = \mathbf{h}(\mathbf{E}, T, \sigma, \dots)$.

II.3.2. Cas des milieux conducteurs

On définit un matériau conducteur comme un matériau où la densité de courant induite \vec{J}_{induit} ne peut être considérée comme négligeable. L'hypothèse selon laquelle le matériau est supposé conducteur dépend bien entendu du matériau lui-même mais aussi de l'application (lorsque les fréquences mises en jeu sont plus faibles, les courants induits pourront être supposés négligeables). Un conducteur est un milieu comportant des charges libres pouvant se déplacer sous l'action d'un champ électrique. Ce problème de dynamique des charges peut être simplement formalisé dans deux cas : les corps conducteurs et les générateurs (source). La loi d'Ohm généralisée valable dans les différents milieux (conducteur, générateur).

$$\vec{J}_c = \vec{J}_s + \vec{J}_{induit} = \begin{cases} \vec{J}_s & \text{terme source de courant} \\ \sigma \vec{E} & \text{terme de courants induit} \\ \sigma(\vec{v} \times \vec{B}) & \text{terme de courant induits dus au mouvement} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Avec σ est la conductivité électrique (Cu : $\sigma = 58 \cdot 10^6 \text{ S/m}$, Al : $\sigma = 36 \cdot 10^6 \text{ S/m}$, Fe : $\sigma = 5 \cdot 10^6$ à $10 \cdot 10^6 \text{ S/m}$). Dans le cas des **conducteurs mobiles la vitesse est notée \vec{v}** .

II.3.3. Cas des milieux magnétiques

Selon la nature des matériaux, la relation entre l'induction magnétique \vec{B} en fonction du champ magnétique d'excitation \vec{H} s'exprime comme suit :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_o \vec{H} & \text{milieu amagnétiques/air/vide} \\ \mu_o(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_a \vec{H} + \vec{B}_r & \text{milieu magnétiques dures (aimants)} \\ \mu \vec{H} & \text{milieu magnétique doux (ferromagnétiques)} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Avec $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ (H/m)}$ perméabilité absolue (vide).

On suppose alors le matériau homogène c'est-à-dire que l'on se place à une échelle « macroscopique » où l'aimantation est le résultat d'une moyenne de l'aimantation microscopique sur de nombreux domaines magnétique (domaines de Weiss).

II.3.3. Cas des milieux diélectriques (isolants)

Un diélectrique est un milieu dans lequel il y'a absence de charges libres. Pa conséquent lorsqu'un milieu diélectrique est soumis à un champ électrique, il se polarise. Les grandeurs utilisées pour

définir l'état électrique sont le champ électrique \vec{E} , l'induction électrique \vec{D} et la polarisation électrique \vec{P} . La relation reliant ces trois grandeurs est :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{II.8})$$

Avec $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ est la permittivité électrique, χ_e est la susceptibilité électrique.

II.4. Formalisme générale des équations électromagnétiques (Diagramme de Tonti)

Les équations de Maxwell se présentent en deux systèmes duaux : les lois de Faraday et de conservation de flux d'une part (système magnétique), les théorèmes d'Ampère-Maxwell et de Gauss d'autre part (système électrique). La dualité des deux systèmes peut être mise en évidence à l'aide du diagramme de Tonti [Tonti 2001], [Rac 2007], [LeMen 1999].

Il s'agit d'un diagramme de quatre niveaux de dérivation à deux colonnes auxquelles sont associées un système d'équations. Les deux niveaux successifs d'une colonne sont liés par les opérateurs de dérivation (gradient, rotationnel, et divergence). Les deux colonnes du même niveau sont liés par la loi de comportement. A fin de tenir compte de la dérivation temporelle, le diagramme est constitué par deux plans et est représenté en 3 dimensions. Les deux plans sont liés par l'opérateur de la dérivation dans le temps.

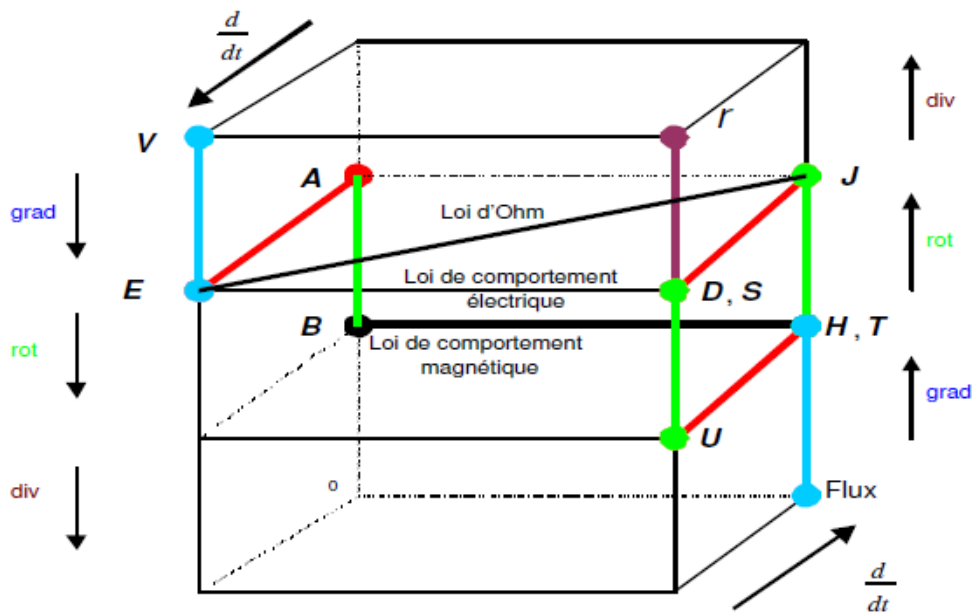


Figure. II.2. : Diagramme de Tonti de synthèse des problèmes électromagnétiques [Rac 2007]

Les différents potentiels scalaires/vecteurs électriques/magnétiques s'obtiennent comme suit :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ (potentiel vecteur magnétique) tel que : } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{II.9})$$

L'équation de Maxwell-Faraday devient
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

D'où
$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{V} \text{ (potentiel scalaire électrique) } \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{V} \quad (\text{II.10})$$

Dans le cas magnétostatique en l'absence de source électrique :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \exists \varphi \text{ (potentiel scalaire magnétique) tel que : } \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \varphi \quad (\text{II.11})$$

De plus la conservation de la densité de courant électrique permet de définir un potentiel vecteur électrique tel que :

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \exists \vec{T} \text{ (potentiel vecteur électrique) tel que : } \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{T} \quad (\text{II.12})$$

L'ensemble des grandeurs mises en jeu dans ces équations est détaillé dans le tableau ci-dessous (Tableau.II.1.). On nommera également rho la densité de charge électrique.

Tableau. II.1 : Unités et natures physiques des grandeurs électromagnétiques

Nature physique	Symboles	Noms	Unité SI
Champs	\vec{E}	Champ électrique	V/m
	\vec{H}	Champ magnétique	A/m
Densités de flux	\vec{D}	Densité de flux électrique	C/m ²
	\vec{B}	Densité de flux magnétique	Wb/m ²
	\vec{J}	Densité de courant électrique	A/m ²
Propriétés des matériaux	σ	Conductivité électrique	1/(S.m)
	μ	Perméabilité magnétique	H/m
	ε	Permittivité diélectrique	F/m

II.5. Relations d'interfaces (conditions de passages)

Lors du passage d'un milieu à un autre, les champ électromagnétiques subissent des discontinuités et ne sont par conséquent pas différentiables. Cependant, il est possible de définir des conditions de passage des champs entre deux milieux.

Considérons deux milieux Ω_1 et Ω_2 quelconques séparés par une interface Γ . la normale \vec{n} à Γ est orientée Ω_1 vers Ω_2 . Les conditions traduisant la continuité des champs à l'interface Γ sont alors définies par les relations :

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right)_{\Gamma} \times \vec{n} = 0 \quad (\text{II.13.a})$$

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right)_{\Gamma} \times \vec{n} = \mathbf{K}_s \quad (\text{II.13.b})$$

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)_{|\Gamma} \cdot \vec{n} = \rho_s \quad (\text{II.13.c})$$

$$\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right)_{|\Gamma} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.13.d})$$

Ces conditions de passage indiquent que la composante normale de \vec{B} et la composante tangentielle de \vec{E} sont continues à travers Γ . Par contre, si des densités surfacique de charges ρ_s ou linéique de courant \vec{J}_s sont présentes à l'interface Γ entre les deux milieux, la composante normale de \vec{D} et la composante tangentielle de \vec{H} sont discontinues. La densité linéique de courant étant K_s .

II.6. Notion de conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées aux grandeurs électromagnétiques sur les frontières du domaine d'étude assurent l'unicité du champ électromagnétique et donc des solutions des équations (Maxwell + Loi de comportement) régissant les phénomènes électromagnétiques. Les conditions aux limites doivent être bien adaptées sous peine de trop influencer le calcul et déformer la solution. Les conditions aux limites courantes, sont :

- Champ électromagnétique imposé nul sur les frontières (éloignement vis-à-vis des sources) ou sur les plans de symétries (Dirichlet homogène)
- Dérivée du champ imposée nulle sur les frontières ou sur les plans de symétries (Neumann homogène).

Les conditions aux limites permettent aussi de fractionner le problème selon des symétries physique diminuant ainsi l'effort de calcul et de modélisation. Les conditions aux limites possibles sont résumées comme suit :

$$\text{Condition aux limites de type DIRICHLET : } A|_{\Gamma} = A_d \quad (\text{II.14.a})$$

$$\text{Condition aux limites de type NEUMANN : } \frac{\partial A}{\partial n}|_{\Gamma} = A_n \quad (\text{II.14.b})$$

$$\text{Condition aux limites de type Mixte (ROBIN ou CAUCHY) : } \left(\alpha A + \beta \frac{\partial A}{\partial n} \right)_{|\Gamma} = A_{dn} \quad (\text{II.14.c})$$

$$\text{Condition de périodicité ou anti-périodicité : } A|_{\Gamma} = \pm A|_{\Gamma+d\Gamma} \quad (\text{II.14.d})$$

II.7. Modèles électromagnétique en régime quasi-stationnaire.

II.7.1 Equations de Maxwell en régime quasi-stationnaire.

Dans le régime quasi-stationnaire, toutes les grandeurs dépendent du temps sauf la densité de charges et le déplacement électrique. Ainsi la densité de courant de déplacement est négligée devant la densité de courant de conduction $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J}_c$.

Equations du modèle électromagnétique dynamique	Conditions du régime quasi-stationnaire (magnétodynamique)
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (II.16)	$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$ (II.15)
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (II.17)	
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (II.18)	
$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c$ (II.19)	
$div \vec{J}_c = 0$ (II.20)	

Le régime magnétodynamique harmonique s'obtient en posant : $\frac{\partial}{\partial t} \equiv j\omega$

II.7.2. Formulation électromagnétique quasi-stationnaire en potentiel vecteur magnétique et potentiel scalaire électrique

Conformément aux potentiels définis précédemment tel que : $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ et

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot V$$

L'équation magnétique en potentiel vecteur magnétique devient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) - \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_a} \vec{B}_r \right) = \vec{J}_c = \vec{J}_s + \vec{J}_{induit} \\ &= \vec{J}_s + \sigma \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot V \right) + \sigma \cdot \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right] \end{aligned}$$

(II.21)

En explicitant le potentiel électrique, on a :

$$V_{tz} = V_a - V_b = \int_a^b E_{Scale} dl = -\int_a^b \vec{\nabla} \cdot V dl = (-\vec{\nabla} \cdot V) L_z$$

(II.22)

D'où $\vec{\nabla} \cdot V = -\frac{V_{tz}}{L_z}$

Compte tenu de (II.22), la densité de courant induite s'exprime comme suit :

$$\vec{J}_{induit} = \sigma \vec{E}' = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \frac{V_{tz}}{L_z} + \sigma \vec{v} \times \vec{B}$$

(II.23)

En introduisant le terme densité de courant (II.23) dans l'équation magnétique (II.21), on aboutit à :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \sigma \vec{\mathbf{v}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \right) = \vec{\mathbf{J}}_s + \sigma \frac{V_{tz}}{l} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\mathbf{B}}_r \right) \quad (\text{II.24})$$

L'équation précédente (II.24) est l'équation fondamentale gouvernant le champ magnétique dans les problèmes électromagnétiques dans le domaine de l'électrotechnique. La résolution de cette équation entre dans le cadre dans le cadre général des problèmes transitoires incluant le mouvement mécanique et la prise en compte des non-linéarités magnétiques.

Sachant que dans le cadre des machines électriques à basses/moyennes vitesses, la densité de courant induite due à la variation temporelle est très grande devant celle due au mouvement, on a :

$$\left(-\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} \right) \gg \cdot \left[\vec{\mathbf{v}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \right) \right] \quad (\text{II.25})$$

Dans le cadre de l'analyse électromagnétique des machines électriques, l'évaluation du champ magnétique est bidimensionnelle (2D) en considérant que la densité de courant ainsi que le potentiel vecteur magnétique ne présentent qu'une seule composante dans la direction Oz. Cette démarche traduisant la non prise en compte des effets frontales est largement utilisée et avantageuse au regard de la précision de calcul en corrélation avec le cout de calcul dans les cas 3D. Par ailleurs, les effets frontales et les éventuels inclinaisons des encoches peut etres pris en compte moyennant certains facteurs correctifs, ou en utilisant les techniques multi-slices.

Dans le plan cartésien 2D (x,y), $\vec{\mathbf{J}}_s = (0 \ 0 \ J_{sz})$ et $\vec{\mathbf{A}} = (0 \ 0 \ A_z)$, le développement des différents terme de l'équation (II.24) donne :

$$\left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \right) = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{u}_x \\ - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{u}_y \\ 0 \cdot \vec{u}_z \end{vmatrix} \quad (\text{II.26})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}} \right) = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} \vec{u}_x \\ + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} \vec{u}_y \\ \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} \right) \right] \cdot \vec{u}_z \end{matrix} \quad (\text{II.27})$$

Comme les aimants sont à aimantation radiale, alors l'induction rémanente dans le plan (x,y) présente deux composantes, d'où :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu} \vec{\mathbf{B}}_r \right) = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{B}_{rx} & \mathbf{B}_{ry} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{matrix} -\frac{\partial \mathbf{B}_{ry}}{\partial z} \vec{u}_x \\ + \frac{\partial \mathbf{B}_{rx}}{\partial z} \vec{u}_y \\ \left(\frac{\partial \mathbf{B}_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{B}_{rx}}{\partial y} \right) \cdot \vec{u}_z \end{matrix} \quad (\text{II.28})$$

En introduisant les relations (II.27) et (II.28) dans l'expression (II.29), on aboutit à l'équation magnétique quasi-stationnaire en potentiel vecteur magnétique associée aux machines électriques dans le cadre d'une étude 2D dans le plan (x,y) :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} \right) = \mathbf{J}_{sz} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} + \sigma \frac{V_{tz}}{l} - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{B}_{rx}}{\partial y} \right) \quad (\text{II.29})$$

Cette équation fait intervenir d'une part une source magnétique due à la présence d'aimants permanents, et des sources électriques dues à la présence d'enroulements bobinés alimentés en tensions et d'enroulements massifs soumis à une densité de courant induite.

II.7.3. Formulations des équations électriques associées aux enroulements bobinés et massifs

L'analyse des dispositifs électrotechniques, en particulier les machines, dépend de la précision du calcul du champ magnétique souvent conditionné par les sources d'alimentation et le circuit qui les relie. La connaissance des courants est essentielle pour le calcul du champ magnétique. Comme il

est exprimé par les formulations en potentiel vecteur, le problème électromagnétique est déterminé par le courant qui circule dans les bobinages, lui même fonction de la tension appliquée sur le circuit électrique. En plus de l'inconnue potentiel vecteur magnétique, il existe une autre inconnue à déterminer qui est le courant. Le couplage entre l'équation gouvernant le champ magnétique avec sa source qui est le courant, et l'équation du circuit électrique reliant le courant à la source de tension d'alimentation est direct, c'est pourquoi nous devons résoudre simultanément les équations du champ magnétique et du circuit électrique. Par ailleurs, en plus du circuit électrique d'enroulement, l'ajout du circuit électrique connectant la machine à sa source peut être aussi ajouté. [Sab et al],[Ham et al 1999], [Oua 2006], [Lem 1999].

II.7.3.1 Equivalence électromagnétique

Dans le cas général des machines électriques et en particulier dans celui qui nous intéresse, les fréquences mises en jeu sont suffisamment basses pour que l'effet de peau puisse être négligé. La densité de courant dans les encoches est perpendiculaire à la surface et le système est alors dans une configuration transverse magnétique. Dans ce cas, le critère d'équivalence choisi peut être la valeur du champ magnétique sur le contour de l'encoche. L'application directe du théorème d'ampère permet alors de justifier le remplacement des enroulements de la machine par des conducteurs homogènes équivalents traversés par des densités de courant uniformes de manière à conserver le nombre d'ampères tours de chacun d'eux (Figure. II. 3):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad \text{avec} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_c \cdot I_c^s \quad (\text{II.30})$$

On introduisant le taux de remplissage des conducteurs dans l'encoche α , on exprime la densité de courant équivalente dans l'encoche aussi bien pour les N_c conducteurs aller (signe +), que retour (signe -):

$$\vec{J}_s^{eq} = \pm N_c \left(\frac{I_c^s}{\alpha S_{enc}} \right) \quad (\text{II.31})$$

où $N_c S_{spire} = \alpha S_{enc}$ est la section d'un fil conducteur transportant le courant I_c^s .

La perméabilité magnétique du cuivre, de l'émail isolant et de la résine étant les mêmes, la perméabilité magnétique de l'ensemble reste égale à celle du vide.

Ainsi au niveau des enroulements conducteurs, l'équation en potentiel vecteur magnétique est la suivante :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = J_{sz} = \pm N_c \left(\frac{I_c^s}{\alpha S_{enc}} \right) \quad (\text{II.32})$$

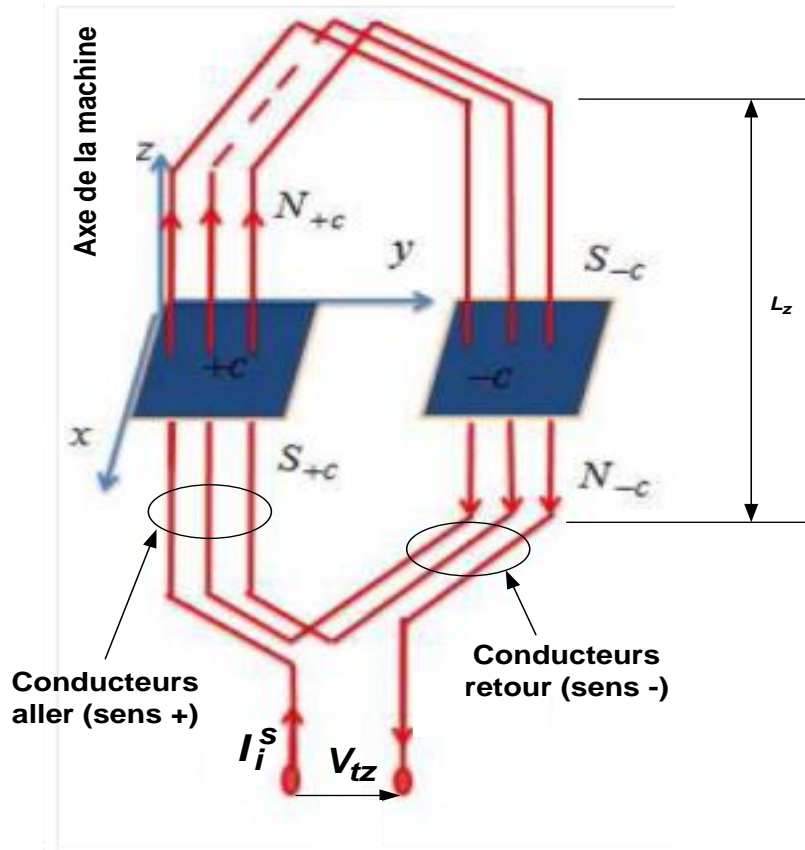


Figure. II.3. : Equivalence Courant-densités de courant des conducteurs dans l'encoche

II.7.3.2 Equation électrique dans un conducteur

Les sources du champ magnétique dans les machines électriques sont les courants dans les enroulements bobiné ou massifs. Ces enroulements peuvent être modélisés comme étant des conducteurs individuels.

On considère un conducteur de longueur L_j et de section $S_{spire} = S_j$ tel que donnée par la Figure II.4. Le courant dans le conducteur est I_{spire} et sa différence de potentiel est V_{tz} . A partir de l'expression générale de la densité de courant dans le conducteur, on peut déduire le courant dans le conducteur comme suit :

$$\vec{J}_{induit} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \frac{V_{tz}}{L_z} \quad (II.33)$$

En intégrant l'expression de la densité de courant sur la section du conducteur (Figure.II.4), on obtient le courant comme suit :

$$I_j = \iint_{S_j} \vec{J}_{induit} dxdy = -\sigma \iint_{S_j} \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{V_{tz}}{L_j} \right) dxdy = -\sigma \iint_{S_j} \frac{\partial A_z}{\partial t} dxdy + \sigma \frac{S_j}{L_j} V_{tz} \quad (II.34)$$

La différence de potentiel s'exprime alors par :

$$V_{tz} = \frac{L_i}{\sigma S_i} I_i + \frac{L_i}{S_i} \iint_{S_i} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy = R_{dci} I_i + \frac{L_i}{S_i} \iint_{S_i} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy \quad (II.35)$$

Avec

$$R_{dci} = \frac{1}{\sigma} \frac{L_i}{S_i} \quad \text{Résistance du conducteur.}$$

$$e_i = \frac{L_i}{S_i} \iint_{S_i} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy \quad \text{Force électromotrice induite du conducteur}$$

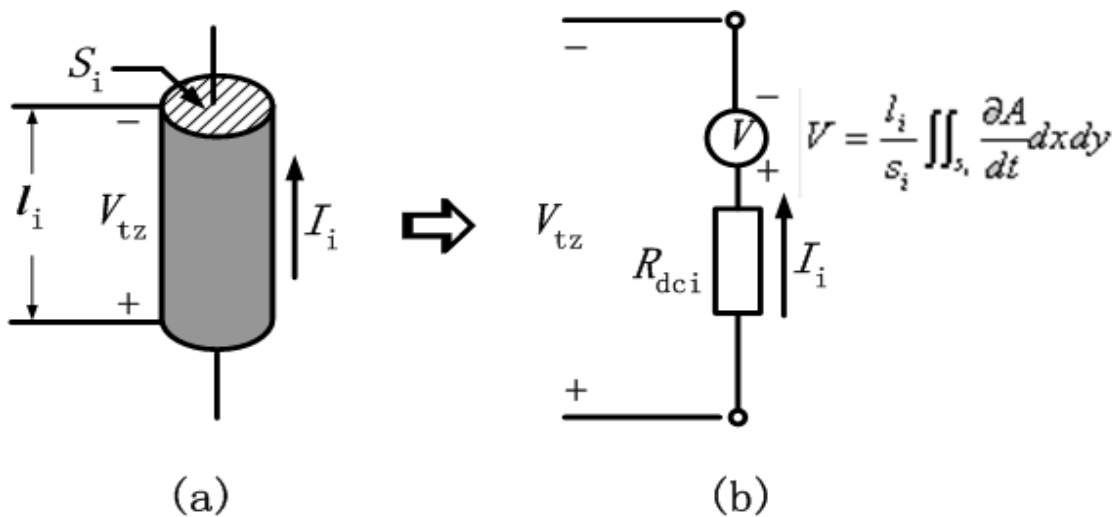


Figure.II.4 : Représentation d'un conducteur [Jing 2004].

Les conducteurs formant les enroulements sont associés soit en série, soit en parallèle. La prise en compte de ces enroulements est généralement faite en 2D lorsque les effets d'extrémités (parties frontales) ne sont pas pris en compte, particulièrement en l'absence d'inclinaison d'encoches.

II.7.3.3 Equation électrique dans les enroulements bobinés du stator

Les enroulements du stator sont formés par des spires. Chaque spire est constituée d'un conducteur « aller » et d'un conducteur « retour » complétés par les conducteurs des parties frontales non pris en compte en 2D. Les enroulements parcourus par des courants électriques sont soumis à une tension d'alimentation à travers un éventuel circuit électrique externe de résistance R_{ext} et d'inductance L_{ext} . La superposition des Figures. II.3 et II.4, conduit à la Figure. II.5 pour laquelle l'équation électrique s'écrit comme suit [Jing 2004], [Nu-Phy 2004]:

$$V_i = (V_{tz}^+)_i - (V_{tz}^-)_i + (R_{tete})_i I + (L_{tete})_i \frac{dI}{dt} \quad (II.36)$$

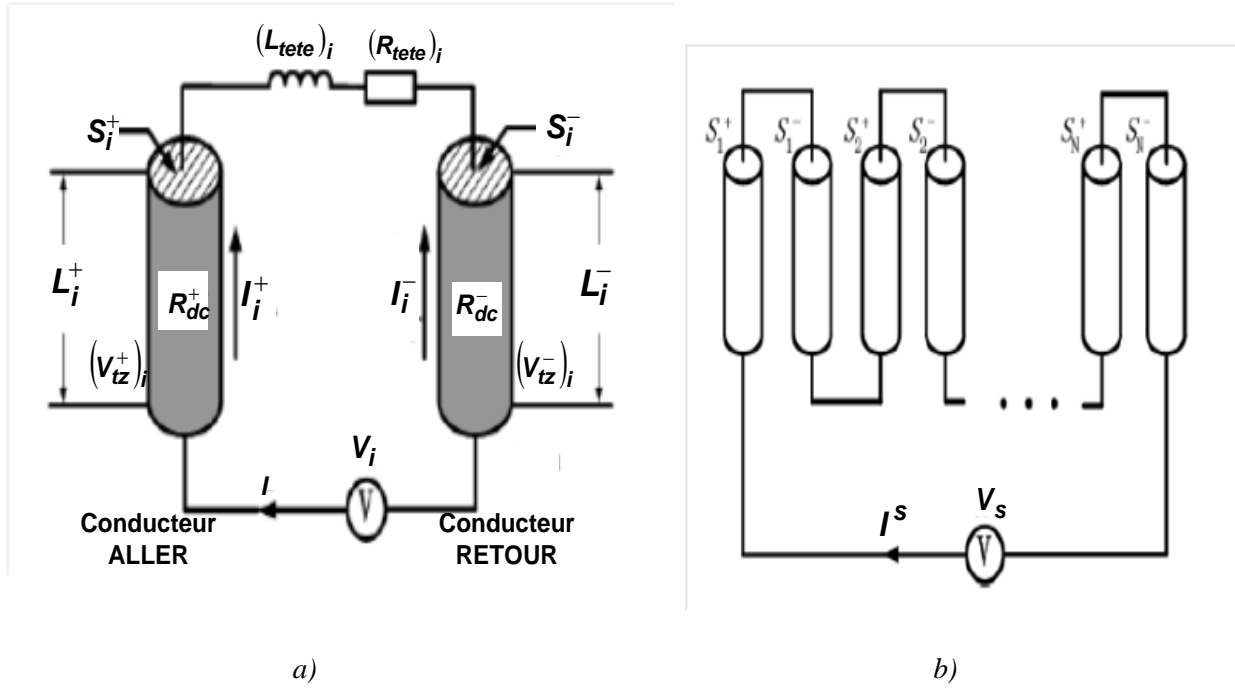


Figure. II.5: Configurations électriques des conducteurs dans une encoche : a) Une seule spire avec ses Conducteurs allers et retours, b) N_c conducteurs en séries.

En explicitant les tensions dans les conducteurs allers et retours, l'équation (II.36) devient :

$$\begin{aligned}
 V_i = & (R_{tete})_i I + (L_{tete})_i \frac{dI}{dt} + (R_{dc}^+)_i I_i^+ - (R_{dc}^-)_i I_i^- \\
 & + \frac{L_i^+}{S_i^+} \iint_{S_i^+} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy - \frac{L_i^-}{S_i^-} \iint_{S_i^-} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy
 \end{aligned} \quad (II.37)$$

Pour les N_c spires de conducteurs :

$$\begin{aligned}
 V_s = & \sum_{i=1}^{N_c} V_i = \sum_{i=1}^{N_c} (R_{tete})_i I + \sum_{i=1}^{N_c} (L_{tete})_i \frac{dI}{dt} + \sum_{i=1}^{N_c} (R_{dc}^+)_i I_i^+ - \sum_{i=1}^{N_c} (R_{dc}^-)_i I_i^- \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{L_i^+}{S_i^+} \iint_{S_i^+} \frac{\partial A}{\partial t} dx dy - \sum_{i=1}^{N_c} \frac{L_i^-}{S_i^-} \iint_{S_i^-} \frac{\partial A}{\partial t} dx dy
 \end{aligned} \quad (III.38)$$

Sachant que :

$$I_1^\pm = I_2^\pm = \dots = I_{N_c}^\pm = \pm I = \pm I^s \quad (II.39.a)$$

$$L_1^\pm = L_2^\pm = \dots = L_{N_c}^\pm = \pm L_z \quad (II.39.b)$$

$$S_1^\pm = S_2^\pm = \dots = S_{N_c}^\pm = \Omega^\pm / N_c \quad (II.39.c)$$

$$R_s = \sum_{i=1}^{N_s} \left[(R_{tete})_i + (R_{dc}^+)_i + (R_{dc}^-)_i \right] = R_{dc} + R_{tete} \quad (\text{II.39.d})$$

$$L_s = L_{tete} = \sum_{i=1}^{N_c} (L_{tete})_i \quad (\text{II.39.e})$$

Avec :

- Ω^\pm = la section totale des N_c conducteurs dans une encoche.
- S_i = la section moyenne d'un seul conducteur.
- + dénote les conducteurs « aller »
- dénote les conducteurs « retour »

Les enroulements sont logés dans des encoches du stator. Chaque encoche contient un certain nombre de conducteur en série. Une spire est formée par les conducteurs aller d'une encoche et ceux retours par une encoches lesquels sont connectés en niveau des partie frontales. Les enroulements à plusieurs voies sont aussi possibles (Figure. II.6).

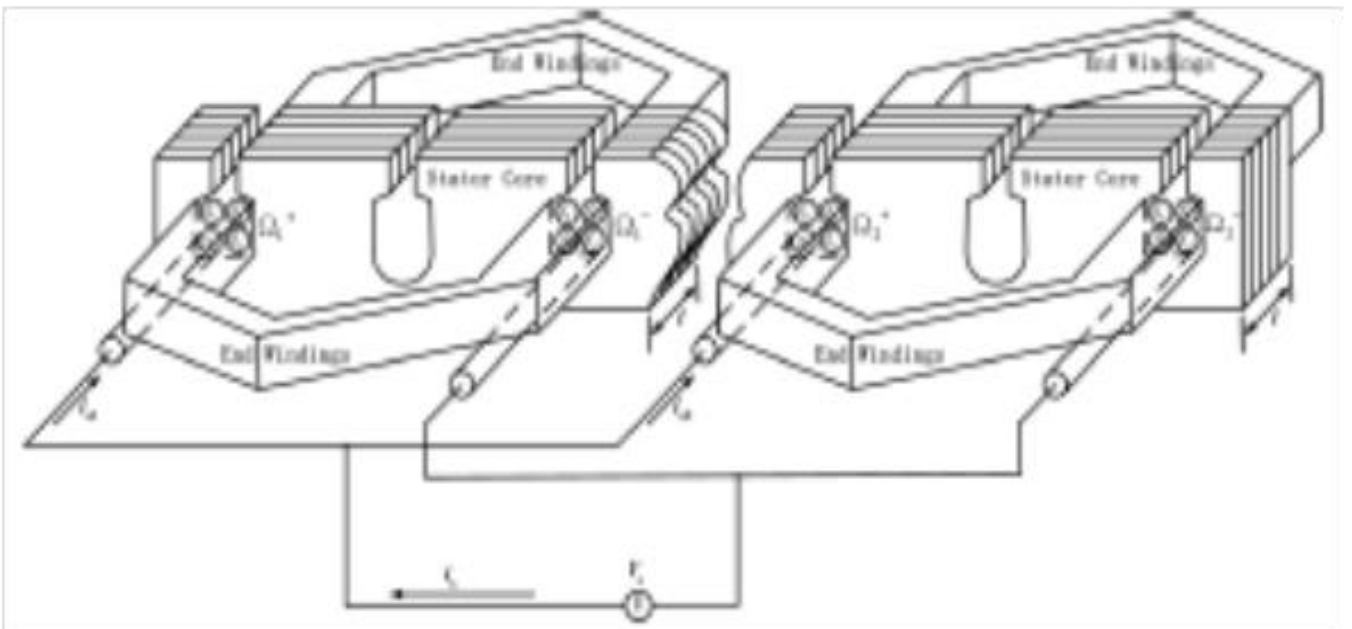


Figure. II.6 : Représentation des enroulements du stator [Jing 2004]

En introduisant les identités précédentes (II.39) dans l'expression (II.38), on obtient :

$$V_s = (R_{dc} + R_{tete}) I^s + L_{ext} \frac{dI^s}{dt} + \frac{L_z}{S} \left(\iint_{\Omega^+} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy - \iint_{\Omega^-} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy \right) \quad (\text{II.40})$$

L'équation générale des enroulements statorique des machines électriques est :

$$V_s = (R_{dc}^+ + R_{ext}) I_{ph}^s + L_{tete} \frac{dI_{ph}^s}{dt} + L_z \frac{N_c}{S} \left(\iint_{\Omega^+} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy - \iint_{\Omega^-} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy \right)$$

Comme les conducteurs sont logés dans les encoches, la section qu'ils occupent vaut αS_{enc} (α coefficient de remplissage des encoches). En additionnant les résistances, on exprime l'équation au tension pour chaque phase (ph) tel que :

$$\begin{aligned} V_s &= (R_s I_{ph}^s + L_s \frac{dI_{ph}^s}{dt} + L_z \frac{N_c}{\alpha S_{enc}} \left(\iint_{\Omega^+} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy - \iint_{\Omega^-} \frac{\partial A_z}{\partial t} dx dy \right)) \\ &= R_s I_{ph}^s + L_s \frac{dI_{ph}^s}{dt} + E_{ph} \end{aligned} \quad (II.41)$$

Avec

V_s tension d'alimentation externe appliquée sur chaque phase d'enroulement,

I_{ph}^s courant dans chaque phase,

R_s résistance totale d'une phase,

L_s inductance des tetes de d'enroulements de chaque phase,

L_z longueur des conducteurs dans la direction Oz prise identique à la longueur du circuit magnétique,

Ω^+, Ω^- section totale des conducteurs « aller » et « retour » dans une encoche,

E_{ph} force électromotrice induite par phase.

Dans les machines électriques triphasées, les enroulements du stator sont connectés selon deux types de connexions : Triangle (Delta) ou en Etoile (Star), tel que mis en évidence par la figure.II.8. A partir de la loi de Kirchhoff, il est possible d'exprimer les tensions et les courant suivant chacune des connexions Etoile ou Triangle.

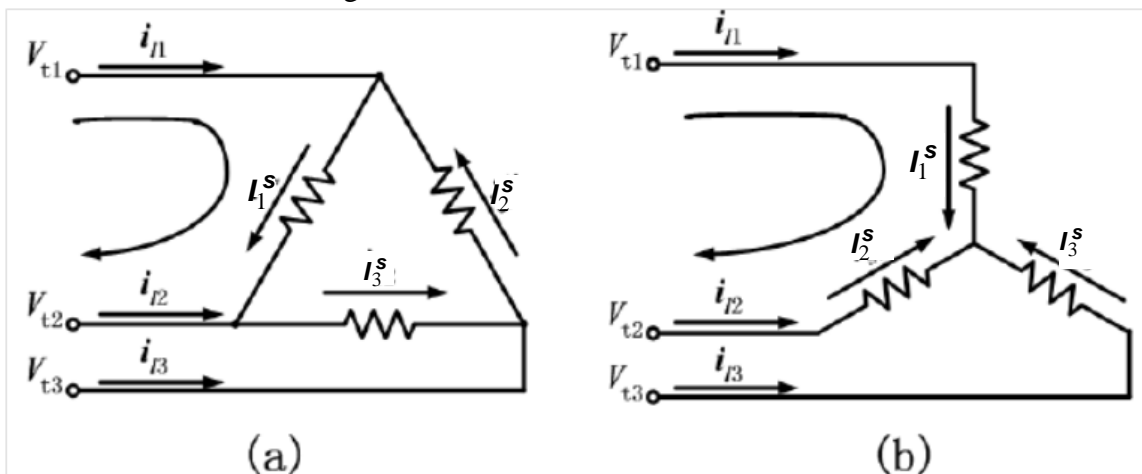


Figure. II.7: Connexions des phases du stator (a) Triangle – Connection, (b) Y-Connection

Les équations électriques deviennent dans le cas de connexion en Triangle s'écrivent comme suit :

$$V_{t1} - V_{t2} = R_{s1} I_1^s + L_{s1} \frac{dI_1^s}{dt} + E_1 \quad (\text{II.42.a})$$

$$V_{t2} - V_{t3} = R_{s2} I_2^s + L_{s2} \frac{dI_2^s}{dt} + E_2 \quad (\text{II.42.b})$$

$$V_{t3} - V_{t1} = R_{s3} I_3^s + L_{s3} \frac{dI_3^s}{dt} + E_3 \quad (\text{II.42.c})$$

Les relations entre les courants de ligne et les courants de phases sont :

$$\begin{pmatrix} I_{l1} \\ I_{l2} \\ I_{l3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1^s \\ I_2^s \\ I_3^s \end{pmatrix} \quad (\text{II.43})$$

Les équations électriques dans le cas d'une connexion en Etoile s'expriment par :

$$V_{t1} - V_{t2} = R_{s1} (I_1^s - I_2^s) + L_{s1} \frac{d(I_1^s - I_2^s)}{dt} + (E_1 - E_2) \quad (\text{II.44.a})$$

$$V_{t2} - V_{t3} = R_{s2} (I_2^s - I_3^s) + L_{s2} \frac{d(I_2^s - I_3^s)}{dt} + (E_2 - E_3) \quad (\text{II.44.b})$$

$$V_{t3} - V_{t1} = R_{s3} (I_3^s - I_1^s) + L_{s3} \frac{d(I_3^s - I_1^s)}{dt} + (E_3 - E_1) \quad (\text{II.44.c})$$

Les courants de lignes identiques aux courants de phases:
$$\begin{pmatrix} I_{l1} \\ I_{l2} \\ I_{l3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1^s \\ I_2^s \\ I_3^s \end{pmatrix} \quad (\text{II.44.d})$$

II.8. Equation mécanique du mouvement

Les machines électriques transforment l'énergie électrique en mécanique et vice versa selon respectivement un fonctionnement en moteur ou en générateur. Il y a donc un processus de conversion d'énergie. Deux parties fondamentales forment la machine électrique : le stator fixe et le rotor mobile mécaniquement. Le mouvement du rotor est provoqué par les forces électromagnétique dues à l'interaction entre des champs statorique et rotorique au niveau de l'entrefer. L'existence d'une force électromagnétique sur le rotor provoque le mouvement de celui-ci. En conséquence,

une analyse complète de la machine doit tenir compte du comportement mécanique du rotor à travers le couplage global : électromagnétique-mécanique.

$$\frac{J_r}{p} \frac{d\omega_m}{dt} = T_{em} - T_f - \frac{B_f}{p} \omega_m \quad (\text{II.45})$$

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_m \quad (\text{II.46})$$

Avec J_r moment d'inertie du rotor [Kg.m²],

θ_m position angulaire du rotor [rad],

ω_r vitesse angulaire du rotor [rad/s],

T_{em} couple électromagnétique [N.m],

T_f couple résistant ou de charge [N.m],

B_f coefficient de frottement [N.m.s].

II.9. Conclusion

Le présent chapitre exclusivement réservé a la mise en équations des phénomènes électriques, magnétiques et mécanique. Ainsi sur la base des équations de Maxwell en régime quasi-stationnaire, les équations régissant les phénomènes magnétiques sont exprimés en potentiel vecteur magnétique. La présence des circuits électriques alimentés en tension variable et sièges du flux magnétique résultant du flux induit (bobines) et inducteur (aimants) exige la prise en compte de l'interaction électrique-magnétique à travers l'équation électrique aux tensions. Les interactions entre champ magnétique induit et inducteur donnent naissance à des efforts mécaniques qui produisent le déplacement des parties mobiles (rotor).

Sur la base des équations établies, le chapitre suivant sera consacré aux couplages électrique-magnétique-mécanique en régime transitoire avec prise en compte d'éventuelles non-linéarités magnétique, ainsi qu'aux formulations éléments finis associées. Le calcul du couple électromagnétique, ainsi que la prise en compte du mouvement permettent d'établir un modèle complet électromagnétique-mécanique.

CHAPITRE III

FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS DU MODÈLE COUPLÉ MAGNÉTIQUE-ÉLECTRIQUE, ET CALCULS MÉCANIQUES

Sommaire

- III.1. Introduction
 - III.2. Méthodes de couplage électrique-magnétique-mécanique
 - III.3. Modèles électromagnétiques de la (MSAP)
 - III.4. Démarche globale de la méthode des éléments finis.
 - III.4.1. Principe de la méthode des éléments finis.
 - III.4.2. Discrétisation géométrique : maillage
 - III.4.3. *Fonctions d'approximations nodales*
 - III.5. Formulations éléments finis des modèles électromagnétiques de la (MSAP).
 - III.6. Discrétisation temporelle du modèle couplé magnétique-électrique
 - III.7. Discrétisation temporelle du modèle mécanique
 - III.8. Formulation élément finis du modèle couplé électrique-magnétique dans le cas de non linéarité magnétique
 - III.9. Calcul de la force électromagnétique
 - III.9.1. Inventaire des différentes méthodes
 - III.9.2. Calcul de la force électromagnétique par le tenseur de Maxwell
 - III.10. Simulation du mouvement du rotor dans le cadre d'une modélisation par éléments finis
 - III.10.1. Inventaire des différentes méthodes de simulation du mouvement
 - III.10.2. Méthode du Macro-Elément
 - III.11. Conclusion
-

III.1. Introduction

Les progrès récents dans la modélisation en électrotechnique sont particulièrement marqués par le développement des codes de calcul basés essentiellement sur la méthode des éléments finis permettant de calculer les champs électromagnétiques statique et dynamique dans une large gamme de structures (machines électriques, actionneurs électromagnétiques,... et d'applications industrielles (contrôle non-destructif, chauffage par induction,...). L'accroissement des possibilités de calcul par l'outil informatique ont été accompagnés par la mise en œuvre de codes de calcul éléments finis utilisant pour la plupart des modèles bidimensionnels (2-D) qui permettent d'obtenir les différentes grandeurs (champs électromagnétiques, courants, forces, pertes,...) avec une précision suffisante. Dans les cas (2-D) et les formulations en potentiel vecteur, on suppose qu'il existe une direction privilégiée pour l'établissement de l'excitation (courant), on choisit alors comme inconnue du problème la composante non nul du potentiel vecteur magnétique suivant cette direction.

L'essence des méthodes numériques et de résoudre l'Equation aux Dérivées Partielle (EDP) en des points particuliers du domaine de résolution. La substitution du domaine d'étude par des points représente la notion de **discrétisation**. En reliant les points entre eux, on forme divers types d'éléments géométriques (droite, triangle, rectangle, prisme, tétraèdre,...) que l'on nomme **sous-domaines** ou **éléments finis**. L'ensemble formé par les éléments et leurs sommets (nœuds) constituent le Maillage. L'(EDP) est approximée en chaque élément (sous-domaine) pour conduire à un système algébrique où les inconnues sont les solutions aux nœuds du maillage. Les méthodes numériques étant des méthodes de discrétisation et d'approximation, elles induisent diverses erreurs : Troncature (approximation du premier ordre pour les opérateurs de dérivation, Arrondis (ressources mémoires), et de discrétisation (recherche de la solution aux nœuds du maillage).

L'objectif de ce chapitre complément du précédent est d'établir les formulations éléments finis des équations magnétiques en terme en potentiel vecteur magnétique, et des équations électriques des conducteurs formants les enroulements. Si dans le cadre d'alimentation en courant le modèle est complet uniquement en étant formé par les seules équations magnétiques, dans les alimentations en tension, il y a une interaction forte entre les phénomènes électriques et magnétiques rendant le couplage directe entre leurs équations respectives inévitable. Par ailleurs, le couplage est d'autant plus obligatoire que les conditions de résolutions concernent les régimes transitoires en corrélation avec la nécessité de prise en compte des non-linéarités magnétiques des matériaux. La production d'efforts mécaniques suite aux interactions entre champs magnétique inducteur et induit, conduit à des déplacements des parties mobiles. Ces déplacements/mouvement affectant le maillage doivent donc être pris en compte pour assurer la continuité entre les éléments du maillage. Il est donc question d'un couplage indirecte entre le modèle électromagnétique et le modèle mécanique à travers d'une part les efforts mécaniques mis en jeu et des éventuels mouvements qu'ils produisent.

III.2. Méthodes de couplage électrique-magnétique-mécanique

Dans les dispositifs électromagnétiques et les convertisseurs électromécaniques, les phénomènes électromagnétiques sont à l'origine des phénomènes mécaniques. Dans le cas général, le mouvement relatif de la structure, la déformation des matériaux ainsi que les non-linéarités magnétiques font que les études des deux phénomènes ne peuvent être effectuées indépendamment. Le développement des modèles couplés est alors nécessaire à travers l'utilisation de l'une des méthodes suivantes : couplage paramétrique, couplage alterné (indirect) et le couplage direct (fort). Le choix du mode de couplage est dicté d'une part par les niveaux d'interaction entre les phénomènes et leurs dynamiques respectives (constantes de temps) [Rac 2007], [Oua 2006], [Ren 1997], [Ham et al 1999].

Le modèle paramétrique est basé sur la paramétrisation du système à l'aide d'un calcul du champ magnétique. En utilisant la méthode des éléments finis, il s'agira dans un premier temps de déterminer la variation de l'impédance et de la force en fonction du mouvement et du courant, et de résoudre ensuite les équations électriques et mécaniques en tenant compte de la variation de ces paramètres. C'est un modèle relativement simple dans le cas où les courants de Foucault sont absents dans les conducteurs.

Le modèle indirect est un modèle de couplage séquentiel. A chaque pas de calcul dans le temps, on calcule la force/couple électromagnétique en résolvant l'équation du champ magnétique en associant les équations du circuit électrique (si ce dernier est alimenté par une source de tension), et on résout ensuite l'équation mécanique du mouvement pour obtenir le déplacement. Ce modèle permet de modéliser des phénomènes couplés à niveau d'interaction important particulièrement électriques et magnétique aussi bien en champ statique que dynamique, et s'applique aux problèmes du déplacement rapide ou de déformation.

Dans le modèle de couplage direct (fort), les équations magnétiques et mécaniques sont résolues simultanément pour des interactions importantes entre les phénomènes magnétiques et mécaniques qui mettent en jeu des constantes de temps à ordres de grandeurs proches. La difficulté d'un tel couplage est que le système d'équations matricielles est non linéaire et non symétrique.

Dans le cadre des machines électriques tournantes, le modèle de couplage fort direct est établi entre les équations magnétiques et électriques, et dont la résolution conduit à la connaissance des grandeurs magnétiques (induction magnétique, potentiel vecteur magnétique, force, couple,...), électriques (courants), ainsi que les différentes pertes et puissances mise en jeu. Le modèle d'équations mécaniques régissant le déplacement et la vitesse est résolu séparément en utilisant la force/couple comme excitation. La nouvelle position des parties mobile est incrémentée dans le maillage à travers des méthodes spécifiques. Ce processus est répété à chaque instant jusqu'à atteindre le régime permanent avec la nécessité de tenir compte des propriétés non-linéaire des matériaux magnétiques

III.3. Modèles électromagnétiques de la (MSAP)

Classiquement, la topologie des (MSAP) se présente selon la figure. III. 1. suivante :

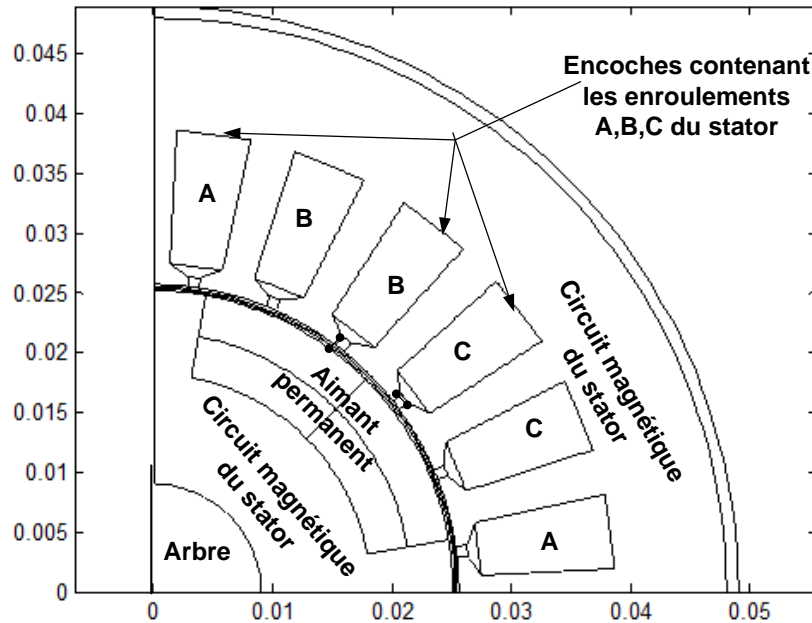


Figure.III.1. Représentation géométrique des éléments constitutifs de la (MSAP)

L'équation magnétique générale en terme de potentiel vecteur magnétique dans les différentes parties de la machines suivant Oz s'exprime comme suit :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} \right) = \mathbf{J}_{sz} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} + \sigma \frac{V_{tz}}{l} - \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{B}_{rx}}{\partial y} \right) \quad (\text{III.1})$$

La loi d'Ohm dans les enroulements conducteurs filaires devient : $\vec{\mathbf{J}} = \mathbf{J}_{sz}$

La relation magnétique dans les milieux : air, circuits magnétiques et aimants permanent est donnée par la formule (III.1) dans laquelle les termes de courants induits sont absent :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} \right) = \begin{cases} 0 & \text{entrefer/ arbre/ carcasse} \\ \mathbf{J}_{ABC}^{sz} & \text{Enroulements} \\ 0 & \text{Circuits magnétiques stator/ rotor} \\ -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{B}_{rx}}{\partial y} \right) & \text{Aimants permanents} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Du fait de la présence de régions électriquement conductrices alimentées en tensions tels que les enroulements, l'interaction entre les phénomènes électriques et magnétiques sont pris en compte travers leurs équations respectives, et ce dans le cadre de formulation éléments finis. Les conducteurs étant maillés, le terme de force électromotrice induite est exprimé en fonction du potentiel vecteur magnétique, ce qui permet le passage de grandeurs locales vers les grandeurs globales (Figure. III.2).

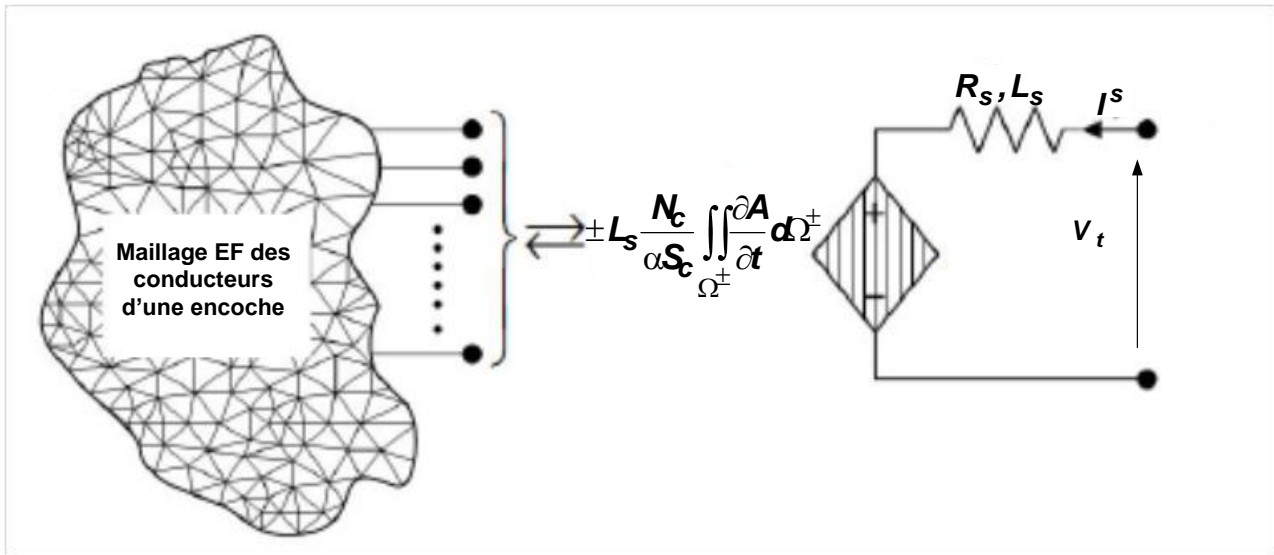


Figure.III.2. Mise en évidence des grandeurs local et global dans des conducteurs d'une encoche

Les enroulements du stator sont représentés par l'équation électrique suivante :

$$V_s = R_s i_s + L_s \frac{di_s}{dt} + L_z \frac{N_c}{\alpha S_{enc}} \left(\iint_{\Omega^+} \frac{\partial A}{\partial t} dx dy - \iint_{\Omega^-} \frac{\partial A}{\partial t} dx dy \right) \quad (III.3)$$

Dans le cas ou la machine présente N_s symétries, l'équation (III.3) devient :

$$V_s = R_s i_s + L_s \frac{di_s}{dt} + N_s L_z \frac{N_c}{\alpha S_{enc}} \left(\iint_{\Omega^+} \frac{\partial A}{\partial t} dx dy - \iint_{\Omega^-} \frac{\partial A}{\partial t} dx dy \right) \quad (III.4)$$

Les parties en mouvement sont régies par les équations mécaniques suivantes :

$$J_r \frac{d\omega_m}{dt} = T_{em} - T_f - B_f \omega_m \quad (III.5.a)$$

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_m \quad (III.5.b)$$

III.4. Démarche globale de la méthode des éléments finis.

III.4.1. Principe de la méthode des éléments finis.

Le principe de la (MEF) est de rechercher une solution approchée en des points (nœuds) de discrétisation. La liaison entre ces nœuds forme des sous domaines (éléments finis) sur lequel l'inconnue est approximée par une fonction d'interpolation dépendante de la forme de l'élément). A partir du maillage du domaine de résolution, l'EDP est transformée en une formulation intégrale que l'on exprime sur chaque élément finis. Donc la (MEF) s'applique sur une forme intégrale de l'EDP et sur la discrétisation de l'inconnue sur chaque sous-domaine. Un problème physique peut être formulé de façon équivalente en un système d'équations différentielles obtenu à partir de la méthode des résidus pondérés, ou sous une formulation variationnelle utilisant l'énergie totale du système. Nous montrons par la suite comment passer de l'une à l'autre.

III.4.2. Discrétisation géométrique : maillage

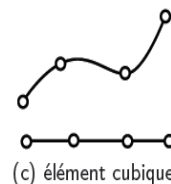
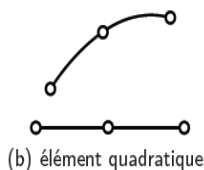
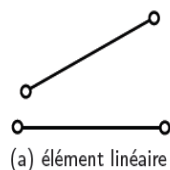
L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel Ω à étudier en « éléments » Ω_i^e de forme géométrique simple interconnecté aux nœuds de leurs frontières. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation. Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier.

$$\Omega = \Omega_1^e \cup \Omega_2^e \cup \dots \cup \Omega_N^e = \sum_{i=1}^N \Omega_i^e \quad \text{tels que} \quad \lim_{i \rightarrow 0} \left(\bigcup_i \Omega_i^e \right) = \Omega$$

Selon la dimension du problème et le niveau de précision recherché, divers types d'éléments constituant des bases polynomiales peuvent être utilisés tel que donné comme suit :

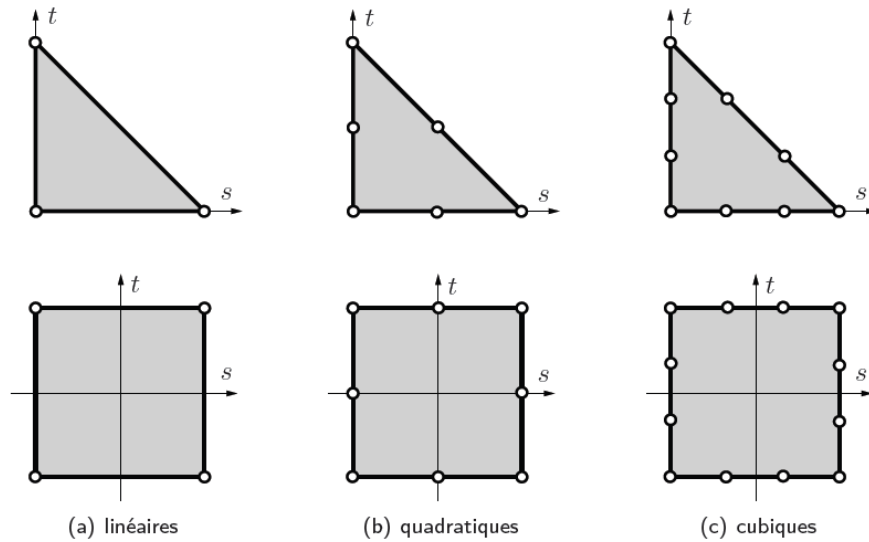
une dimension (1D)

- linéaire (1, x) : deux variables,
- quadratique (1, x, x²) : trois variables



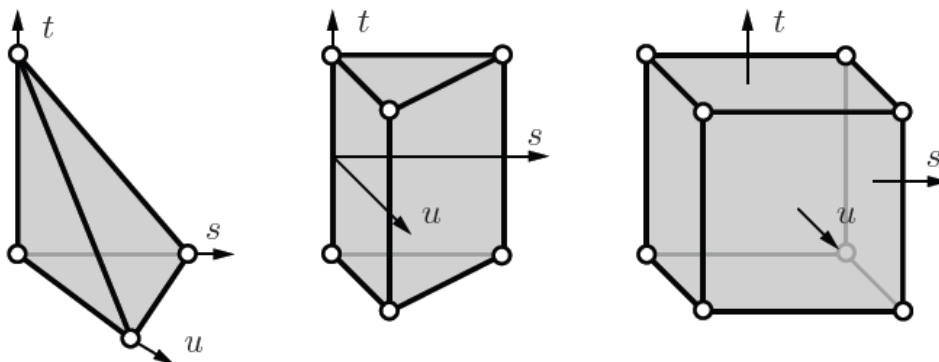
deux dimensions (2D)

- linéaire (1, x, y) : trois variables
- quadratique (1, x, y, x², xy, y²) : six variables



trois dimensions (3D)

- linéaire (1, x, y, z) : quatre variables
- quadratique (1, x, y, z, x², xy, y², xz, z², yz) : dix variables



III.4.3. Fonctions d’approximations nodales

Une fois que le domaine d’étude est discrétisé en éléments finis géométrique, on procède ensuite au développement des fonctions d’approximation des inconnues potentiels sur chacun des nœuds formant les éléments dans tous le domaine discrétisé. Habituellement, les fonctions d’approximations polynomiales sont utilisées car elles répondent aux conditions de continuité et de dérivabilité. Dans le cas 2-D, un polynôme d’approximation d’ordre « n » est établis comme suit :

$$A = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + \dots + a_mx^n \tag{III.6}$$

Le nombre de terme du polynôme d’approximation est donnée par : $m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Le polynôme d'approximation (2-D) est construit en utilisant le triangle dit de "Pascal" donné comme suit:

			a_0		
n=1-----		a_1x		a_2y	
n=2-----	a_3x^2		a_4xy		a_5y^2
n=3-----	a_6x^3	a_7x^2y		a_8xy^2	a_9y^3
n=4-----	$a_{10}x^4$	$a_{11}x^3y$	$a_{12}x^2y^2$	$a_{13}xy^3$	$a_{14}y^4$

Pour utiliser une base polynomiale complète, le nombre de termes doit être égal au nombre de variables nodales à identifier. Si l'on ne peut pas utiliser un polynôme complet, le meilleur choix consiste à respecter la symétrie des monômes conservés.

Pour une discrétisation géométrique utilisant des éléments triangulaire du 1er ordre (03 nœuds), la fonction d'approximation sur l'élément du potentiel vecteur magnétique est exprimée par :

$$\mathbf{A}_z^*(x, y) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1x + \mathbf{a}_2y = \mathbf{a} + \mathbf{b}x + \mathbf{c}y \tag{III.7}$$

Avec \mathbf{a} , \mathbf{b} and \mathbf{c} sont les coefficients du polynôme que l'on déterminera en fonction des localisations géométriques des nœuds de chaque éléments finis.

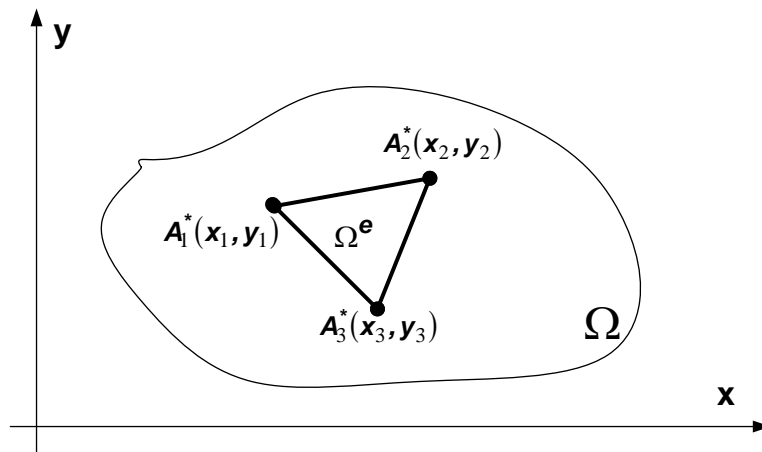


Figure.III.4. Maillage 2D en éléments finis triangulaire du 1^{er} ordre dans le plan (x,y).

Exprimons le potentiel vecteur en chacun des nœuds de l'élément

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{z1}^* &= \mathbf{a} + \mathbf{b}x_1 + \mathbf{c}y_1 \\ \mathbf{A}_{z2}^* &= \mathbf{a} + \mathbf{b}x_2 + \mathbf{c}y_2 \\ \mathbf{A}_{z3}^* &= \mathbf{a} + \mathbf{b}x_3 + \mathbf{c}y_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{z1}^* \\ \mathbf{A}_{z2}^* \\ \mathbf{A}_{z3}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \tag{III.8}$$

D'où le calcul des coefficients comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 \\ 1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2 \\ 1 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{y}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{z1}^* \\ \mathbf{A}_{z2}^* \\ \mathbf{A}_{z3}^* \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

La détermination des coefficients « $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ » conduit à établir la fonction d'approximation de l'inconnue en tous points de l'éléments finis en fonction des valeurs connues aux nœuds.

$$\left(\mathbf{A}_z^*\right)^e = \frac{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{x} + \mathbf{c}_1 \mathbf{y})\mathbf{A}_{z1}^* + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 \mathbf{x} + \mathbf{c}_2 \mathbf{y})\mathbf{A}_{z2}^* + (\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3 \mathbf{x} + \mathbf{c}_3 \mathbf{y})\mathbf{A}_{z3}^*}{2\Delta_e}$$

Sous forme condensé, la fonction d'approximation s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_z^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{N}_1 \mathbf{A}_{z1}^* + \mathbf{N}_2 \mathbf{A}_{z2}^* + \mathbf{N}_3 \mathbf{A}_{z3}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{z1}^* \\ \mathbf{A}_{z2}^* \\ \mathbf{A}_{z3}^* \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{A}_{zi}^* \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Avec les fonctions de formes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{N}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{N}_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Delta_e} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{x} + \mathbf{c}_1 \mathbf{y}) \\ \frac{1}{2\Delta_e} (\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 \mathbf{x} + \mathbf{c}_2 \mathbf{y}) \\ \frac{1}{2\Delta_e} (\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3 \mathbf{x} + \mathbf{c}_3 \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\Delta_e} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2 \mathbf{x}_3 & \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3 & \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_3 \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1 & \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.11.a})$$

Δ_e l'aire de l'élément triangulaire calculé comme suit :

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 \\ 1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2 \\ 1 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{y}_3 \end{vmatrix} \quad (\text{III.11.b})$$

Les composantes de l'induction magnétique sont obtenues à travers les dérivées spatiales du potentiel magnétique tel que :

$$B_x = + \frac{\partial A_z^*}{\partial y} \quad (\text{III.12.a})$$

$$B_y = - \frac{\partial A_z^*}{\partial x} \quad (\text{III.12.b})$$

En remplaçant les expressions du potentiel vecteur magnétique approximé (III.8) conduit aux expressions des fonctions d'approximation des composantes de l'induction magnétique.

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{2\Delta_e} (b_1 A_{z1}^* + b_2 A_{z2}^* + b_3 A_{z3}^*) \\ B_y &= \frac{1}{2\Delta_e} (c_1 A_{z1}^* + c_2 A_{z2}^* + c_3 A_{z3}^*) \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

III.5. Formulations éléments finis des modèles électromagnétiques de la (MSAP).

III.5.1. Discrétisation de la forme intégrale

La méthode des résidus pondérés démarre en assumant que l'existence d'une solution approchée A_z^* . Cette solution vérifie l'équation aux dérivées partielles moyennant un certaine erreur ou résidu donnée comme suit :

$$\mathfrak{R} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z^*}{\partial y} \right) \right] + J_{sz} - \frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial B_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial B_{rx}}{\partial y} \right) \quad (\text{III.14})$$

Pour minimiser le plus possible le résidu, on le multiplie par une fonction de pondération $W(x, y)$ de sorte que l'intégrale sur le domaine de résolution soit nulle. Comme le domaine de résolution est discrétisé en éléments finis, le résidu doit être finalement annulé sur chacun des éléments finis, ce qui revient à écrire :

$$\iint_{\Omega} (W \cdot \mathfrak{R}) dx dy = \sum_{e=1}^M \iint_{\Omega^e} [W^e \mathfrak{R}^e] dx dy \quad (\text{III.15})$$

$$\iint_{\Omega} [\mathbf{W} \cdot \mathfrak{R}] \mathbf{R} dx dy = \iint_{\Omega} [\mathbf{W}] \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{y}} \right) + \mathbf{J}_{sz} - \frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_{ry}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{B}_{rx}}{\partial \mathbf{y}} \right) \right] dx dy = 0 \quad (\text{III.16})$$

Ou encore

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [\mathbf{W}] \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{y}} \right) \right] dx dy = \\ - \iint_{\Omega} [\mathbf{W}] [\mathbf{J}_{sz}] dx dy + \iint_{\Omega} [\mathbf{W}] \left[\frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_{ry}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{B}_{rx}}{\partial \mathbf{y}} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Comme :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [\mathbf{W}] \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{y}} \right) \right] dx dy = \\ \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu} [\mathbf{W}] \left(\frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial [\mathbf{W}]}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial [\mathbf{W}]}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{y}} \right) dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

On obtient ainsi la forme intégrale complète comme suit :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial [\mathbf{W}]}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial [\mathbf{W}]}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{y}} \right) dx dy - \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu} [\mathbf{W}] \left(\frac{\partial \mathbf{A}_z^*}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \\ + \iint_{\Omega} [\mathbf{W}] \mathbf{J}_{sz} dx dy - \iint_{\Omega} [\mathbf{W}] \left[\frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_{ry}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{B}_{rx}}{\partial \mathbf{y}} \right) \right] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Le maillage étant constitué d'éléments finis triangulaire du 1^{er} ordre, la fonction d'approximation de l'inconnue sur chaque élément vaut :

$$\mathbf{A}_z^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{A}_{zi}^* \quad (\text{III.20})$$

La méthode de Galerkin consiste à poser la fonction de pondération $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ égale à la fonction d'approximation $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sur chaque élément du maillage.

$$[W^e] = [N_i^e]^{tr} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}^{tr} \quad (III.21)$$

Ainsi la forme intégrale sur le domaine complet n'est autre que la somme des formes intégrales sur chaque élément fini, tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \iint_{\Omega^e} \frac{1}{\mu^e} \left(\frac{\partial [N_i^e]}{\partial x} \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^3 N_j A_{zj}^* \right)}{\partial x} + \frac{\partial [N_i^e]}{\partial y} \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^3 N_j A_{zj}^* \right)}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu} [\alpha_i^e] \left(\frac{\partial A_{zi}^*}{\partial n} \right) d\Gamma \\ + \sum_{e=1}^M \iint_{\Omega} [N_i^e] J_{sz} dx dy - \sum_{e=1}^M \iint_{\Omega} [N_i^e] \left[\frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial B_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial B_{rx}}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (III.22)$$

En explicitant chacun des termes, on obtient :

$$\frac{\partial [N_i^e]}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial [N_i^e]}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (III.23)$$

$$\frac{\partial A_z^*}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta_e} (b_1 A_{z1}^* + b_2 A_{z2}^* + b_3 A_{z3}^*) = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{z1}^* \\ A_{z2}^* \\ A_{z3}^* \end{bmatrix} \quad (III.24)$$

$$\frac{\partial A_z^*}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta_e} (c_1 A_{z1}^* + c_2 A_{z2}^* + c_3 A_{z3}^*) = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{z1}^* \\ A_{z2}^* \\ A_{z3}^* \end{bmatrix} \quad (III.25)$$

$$\iint_{\Omega^e} dx dy = \Delta_e \quad \text{aire d'un élément triangulaire}$$

$$\iint_{\Omega^e} \frac{1}{\mu^e} \left(\frac{\partial [N_i^e]}{\partial x} \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^3 N_j A_{zj}^* \right)}{\partial x} + \frac{\partial [N_i^e]}{\partial y} \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^3 N_j A_{zj}^* \right)}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \frac{1}{4\Delta_e} \frac{1}{\mu^e} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{z1}^* \\ A_{z2}^* \\ A_{z3}^* \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Avec

$$S_{ij}^e = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_2 b_3 + c_2 c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Les conducteurs des enroulements du stator sont parcourus par un courant. Donc la densité de courant s'écrit:

$$\mathbf{J}_{sz} = \beta_s N_c \frac{I_c^s}{\alpha S_c} \Rightarrow \begin{pmatrix} J_{sz}^a \\ J_{sz}^b \\ J_{sz}^c \end{pmatrix} = \beta_s \frac{N_c}{\alpha S_c} \begin{pmatrix} I_A^s \\ I_B^s \\ I_C^s \end{pmatrix} \quad (\text{III.28})$$

$$\iint_{\Omega^e} [N_i^e] \cdot \mathbf{J}_{sz} \cdot dx dy = \iint_{\Omega} [N_i^e] \cdot \left(\beta_s \frac{N_c}{\alpha S_c} \right) [I_{ph}^s] dx dy$$

$$= \frac{\Delta_e}{3} \cdot \left(\beta_s \frac{N_c}{\alpha S_c} \right) \begin{pmatrix} I_A^s \\ I_B^s \\ I_C^s \end{pmatrix} = [D_s^e] \begin{pmatrix} I_{ph}^s \end{pmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Pour les aimants permanents dont l'aimantation est radiale, on obtient :

$$\vec{B}_r = B_{rx} \cdot \vec{u}_x + B_{ry} \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla} \times [\mathbf{N}_i^e] = -\frac{\partial [\mathbf{N}_i^e]}{\partial y} \cdot \bar{\mathbf{u}}_x + \frac{\partial [\mathbf{N}_i^e]}{\partial x} \cdot \bar{\mathbf{u}}_y \quad (\text{III.30})$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^e} \frac{1}{\mu_a} [\mathbf{N}_i^e] \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}}_r \right) dx dy &= \iint_{\Omega^e} \frac{1}{\mu_a} \bar{\mathbf{B}}_r \left(\vec{\nabla} \times [\mathbf{N}_i^e] \right) dx dy \\ &= \frac{1}{\mu_a} \iint_{\Omega^e} \left(\mathbf{B}_{rx}^* \frac{\partial [\mathbf{N}_i^e]}{\partial y} - \mathbf{B}_{ry}^* \frac{\partial [\mathbf{N}_i^e]}{\partial x} \right) dx dy = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_a} \left[\mathbf{B}_{rx} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} - \mathbf{B}_{ry} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

L'assemblage des différents termes intégraux pour un élément finis donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\Delta_e} \frac{1}{\mu^e} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{z1}^* \\ \mathbf{A}_{z2}^* \\ \mathbf{A}_{z3}^* \end{pmatrix} \\ - \frac{\Delta_e}{3} \cdot \left(\beta_s \frac{n_s}{\delta_r \mathbf{S}_c} \right) \begin{pmatrix} I_s \\ I_s \\ I_s \\ I_s \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_a} \left[\mathbf{B}_{rx} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} - \mathbf{B}_{ry} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Sous forme condensée :

$$\frac{1}{4\Delta_e} \frac{1}{\mu^e} [\mathbf{S}] [\mathbf{A}_{zi}^*]^e = [\mathbf{D}_s^e] (I_s) + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_a} \{ \mathbf{B}_{rx} [\mathbf{c}_i] - \mathbf{B}_{ry} [\mathbf{b}_i] \} \quad (\text{III.33})$$

En réalisant l'assemblage pour tout le maillage, on obtient :

$$\sum_{e=1}^M \left(\frac{1}{4\Delta_e} \frac{1}{\mu^e} [\mathbf{S}] \right) [\mathbf{A}_{zi}^*] = \sum_{e=1}^M [\mathbf{D}_s^e] (I_s) + \sum_{e=1}^M \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_a} \{ \mathbf{B}_{rx} [\mathbf{c}_i] - \mathbf{B}_{ry} [\mathbf{b}_i] \} \quad (\text{III.34})$$

Sous forme condensée, on obtient alors le système algébrique global :

$$[\mathbf{K}] \{ \mathbf{A}_{zi}^* \} = [\mathbf{D}_s] \{ I_s^{ABC} \} + [\mathbf{PM}] \quad (\text{III.35})$$

Pour les différentes parties de la machine, on aura :

$$[\mathbf{K}_s] \{ \mathbf{A}_{zi}^* \} = 0 \quad \text{Circuit magnétique du stator ou entrefer } (\mu_r=1) \quad (\text{III.36})$$

$$[K_r] \{A_{zi}^*\} = 0 \quad \text{Circuit magnétique du rotor} \quad (\text{III.37})$$

$$[K_s] \{A_{zi}^*\} = [D_s] \{I_s^{ABC}\} \quad \text{Enroulements bobinés du stator} \quad (\text{III.38})$$

$$[K_r] \{A_{zi}^*\} = [PM] \quad \text{Aimants permanents} \quad (\text{III.39})$$

Pour la discrétisation de l'équation électrique, seul le terme intégral de la force électromotrice doit être développé. En introduisant le facteur N_s qui tiens compte de la périodicité (ou anti périodicité) définissant le nombre de secteur de la machine, on obtient :

$$V_s = R_s I_{ph}^s + L_s \frac{dI_{ph}^s}{dt} + N_s L_z \frac{N_c}{\alpha S_c} \left(\sum_{e=1}^{M^+} \iint_{\Omega_e^+} \frac{\partial A_z^*}{\partial t} dx dy - \sum_{e=1}^{M^-} \iint_{\Omega_e^-} \frac{\partial A_z^*}{\partial t} dx dy \right) \quad (\text{III.40})$$

$$\text{Comme : } \frac{\partial A_z^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 N_i A_{zi}^* \right) = \sum_{i=1}^3 N_i \frac{\partial (A_{zi}^*)}{\partial t} \quad (\text{III.41})$$

$$V_s = R_s I_{ph}^s + L_s \frac{dI_{ph}^s}{dt} + N_s L_z \frac{N_c}{\alpha S_c} \left(\sum_{e=1}^{M^+} \iint_{\Omega_e^+} \sum_{i=1}^3 N_i \frac{\partial (A_{zi}^*)}{\partial t} - \sum_{e=1}^{M^-} \iint_{\Omega_e^-} \sum_{i=1}^3 N_i \frac{\partial (A_{zi}^*)}{\partial t} \right) \quad (\text{III.42})$$

On, obtient le même terme intégrale que pour le courant, d'où l'expression pour les enroulements bobinés du stator :

$$V_s^{ABC} = R_s I_{ABS}^s + L_s \frac{dI_{ABC}^s}{dt} + L_z N_s [D_s]^t \frac{\partial A_{zi}^*}{\partial t} \quad (\text{III.43})$$

III.6. Discrétisation temporelle du modèle couplé magnétique-électrique

La méthode de discrétisation pas a pas utilisée dans le résolution des problèmes transitoires consiste à discrétiser la variables temporelle en instants $t_1, t_2, t_3, \dots, (t_{k+1} = t_k + \Delta t), \dots$ régulièrement espacés et à évaluer l'inconnue pour chacun de ces instants en utilisant un schéma de discrétisation faisant intervenir les paramètres et solutions des inconnues durant les instants précédent. La précision de la solution dépend essentiellement de la discrétisation temporelle, et du pas de temps. La discrétisation temporelle générale de la dérivée est exprimée par l'expression du premier ordre respectivement pour le potentiel vecteur magnétique, et le courant électrique [Oua 2006], [Fun 2007],[Jing 2004], [Ham et al 1999], [Cle et al]:

$$\frac{(A_z^*)^{t+\Delta t} - (A_z^*)^t}{\Delta t} \cong \theta \left(\frac{\partial A_z^e}{\partial t} \right)^{t+\Delta t} + (1-\theta) \left(\frac{\partial A_z^e}{\partial t} \right)^t \quad (\text{III.44})$$

$$\frac{(I_s)^{t+\Delta t} - (I_s)^t}{\Delta t} \cong \theta \left(\frac{\partial I_s}{\partial t} \right)^{t+\Delta t} + (1-\theta) \left(\frac{\partial I_s}{\partial t} \right)^t \quad (\text{III.45})$$

Avec

Valeur de θ	0	1	1/2	2/3	0,878
Schéma de discrétisation	Euler explicite	Euler implicite	Crank-Nicholson	Galerkine	Lineger

Le système algébrique au stator et au rotor associé aux équations magnétique sont :

$$[K_s]\{A\}^{t+\Delta t} - [D_s]\{I_s\}^{t+\Delta t} = 0 \quad \text{Enroulements filaires du stator} \quad (\text{III.46})$$

$$[K_r]\{A\}^{t+\Delta t} = [PM]^{t+\Delta t} \quad \text{Aimants permanents} \quad (\text{III.47})$$

D'ou

$$\theta(V_s)^{t+\Delta t} = \theta R_s(i_s)^{t+\Delta t} + \theta L_e \left(\frac{di_s}{dt} \right)^{t+\Delta t} + \theta L_z N_p [D_s] \left(\frac{\partial [A]}{\partial t} \right)^{t+\Delta t} \quad (\text{III.48.a})$$

$$(1-\theta)(V_s)^t = (1-\theta)R_s(i_s)^t + (1-\theta)L_e \left(\frac{di_s}{dt} \right)^t + (1-\theta)L_z N_p [D_s] \left(\frac{\partial [A]}{\partial t} \right)^t \quad (\text{III.48.b})$$

La combinaison des termes des expressions (II.48.a,b), conduit à la forme algébrique finale suivante :

$$\theta(\mathbf{V}_s)^{t+\Delta t} + (1-\theta)(\mathbf{V}_s)^t + \left(-(1-\theta)\mathbf{R}_s + \frac{\mathbf{L}_e}{\Delta t} \right) (\mathbf{I}_s)^t + \mathbf{L}_z \mathbf{N}_p \frac{[\mathbf{D}_s]}{\Delta t} (\mathbf{A}_z)^t = \left(\theta\mathbf{R}_s + \frac{\mathbf{L}_s}{\Delta t} \right) (\mathbf{i}_s)^{t+\Delta t} + \mathbf{L}_z \mathbf{N}_p \frac{[\mathbf{D}_s]}{\Delta t} (\mathbf{A}_z)^{t+\Delta t} \quad (\text{III.49})$$

Le système d'équations algébrique final correspondant au couplage magnétique-électrique en régime transitoire est obtenu par l'assemblage des systèmes (III.36-39) et (III.49) donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_s] & [0] & -[\mathbf{D}_s] \\ [0] & [\mathbf{K}_r] & [0] \\ \mathbf{L}_z \mathbf{N}_p \frac{[\mathbf{D}_s]}{\Delta t} & [0] & \left(\theta\mathbf{R}_s + \frac{\mathbf{L}_s}{\Delta t} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_z^s \\ \mathbf{A}_z^r \\ \mathbf{I}_s \end{pmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ \mathbf{L}_z \mathbf{N}_p \frac{[\mathbf{D}_s]}{\Delta t} & [0] & \left(-(1-\theta)\mathbf{R}_s + \frac{\mathbf{L}_s}{\Delta t} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_z^s \\ \mathbf{A}_z^r \\ \mathbf{I}_s \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} \mathbf{CL} \\ [\mathbf{PM}] \\ \theta(\mathbf{V}_s)^{t+\Delta t} + (1-\theta)(\mathbf{V}_s)^t \end{pmatrix} \quad (\text{III.50})$$

III.7. Discrétisation temporelle du modèle mécanique

La discrétisation temporelle des dérivées des termes vitesse et déplacement donne :

$$\frac{(\omega_m)^{t+\Delta t} - (\omega_m)^t}{\Delta t} \cong \theta \left(\frac{\partial \omega_m}{\partial t} \right)^{t+\Delta t} + (1-\theta) \left(\frac{\partial \omega_m}{\partial t} \right)^t \quad (\text{III.51})$$

$$\frac{(\theta_m)^{t+\Delta t} - (\theta_m)^t}{\Delta t} \cong \theta \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial t} \right)^{t+\Delta t} + (1-\theta) \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial t} \right)^t \quad (\text{III.52})$$

D'où les formes discrètes des équations mécaniques :

$$\theta \mathbf{J}_r \left(\frac{d\omega_m}{dt} \right)^{t+\Delta t} = \theta (\mathbf{T}_{em})^{t+\Delta t} - \theta (\mathbf{T}_f)^{t+\Delta t} - \theta \mathbf{B}_f (\omega_m)^{t+\Delta t} \quad (\text{III.53})$$

$$(1-\theta) \mathbf{J}_r \left(\frac{d\omega_m}{dt} \right)^t = (1-\theta) (\mathbf{T}_{em})^t - (1-\theta) (\mathbf{T}_f)^t - (1-\theta) \mathbf{B}_f (\omega_m)^t$$

L'addition des deux termes précédents (III.53) conduit à la forme itérative suivante :

$$\left(\frac{\mathbf{J}_r}{\Delta r} + \theta \mathbf{B}_f\right)(\omega_m)^{t+\Delta t} = \left(\frac{\mathbf{J}_r}{\Delta r} - (1-\theta)\mathbf{B}_f\right)(\omega_m)^t + \theta(\mathbf{T}_{em})^{t+\Delta t} + (1-\theta)(\mathbf{T}_{em})^t - \left[\theta(\mathbf{T}_f)^{t+\Delta t} + (1-\theta)(\mathbf{T}_f)^t\right] \quad (\text{III.54})$$

La discrétisation du terme vitesse donne :

$$\theta\left(\frac{d\theta_m}{dt}\right)^{t+\Delta t} = \theta(\omega_m)^{t+\Delta t} \quad \text{et} \quad (1-\theta)\left(\frac{d\theta_m}{dt}\right)^t = (1-\theta)(\omega_m)^t \quad (\text{III.55})$$

L'addition des termes précédents (II.55) donne la forme itérative finale :

$$(\theta_m)^{t+\Delta t} = (\theta_m)^t + \Delta t \left[\theta(\omega_m)^{t+\Delta t} + (1-\theta)(\omega_m)^t \right] \quad (\text{III.56})$$

III.8. Formulation élément finis du modèle couplé électrique-magnétique dans le cas de non linéarité magnétique

Dans l'analyse des machines électriques, les problèmes électromagnétiques sont non-linéaires du fait de la présence de matériaux ferromagnétiques aussi bien dans le circuit magnétique du stator que celui du rotor. Généralement, les matériaux ferromagnétiques sont caractérisés par la relation reliant l'induction magnétique au champ magnétique à travers le paramètre caractéristique qu'est la perméabilité magnétique en tous points du domaine. Lorsque la distribution de l'induction magnétique est connue, la valeur du champ magnétique peut être déduite à partir de caractéristique B-H, ce qui permet au final de déterminer la valeur de perméabilité ou la réluctivité $\nu(\mathbf{B})$ magnétique correspondante en utilisant l'expression (II.7) tel que :

$$\nu(\mathbf{B}) = \frac{1}{\mu(\mathbf{H})} = \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{B}} \quad (\text{III.57})$$

Le processus itératif le plus simple considère que la perméabilité magnétique associée à l'itération n est exprimé en fonction des perméabilités magnétiques des itérations n et $n-1$, et que donné par l'expression suivante :

$$\mu^{n+1} = \mu^{n-1} + \rho(\mu^n - \mu^{n-1}) \quad (\text{III.58})$$

Cependant, bien que ce processus soit très simple et très attirant, il présente des inconvénients majeurs en relation avec un coût de calcul prohibitif en corrélation avec la convergence lente vers la solution acceptable d'une part, et la stabilité numérique d'autre part. Le facteur de relaxation est

comme suit $0 < \rho < 1$

La seconde méthode est dite la méthode itérative de Newton-Raphson spécifiant que la valeur de l'inconnue potentiel vecteur magnétique à l'itération (k+1) est obtenue à partir de la valeur à l'itération (k) en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k - \left[\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{A}_i \cdot \partial \mathbf{A}_j} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{A}_i} \right] = \mathbf{A}^k - [\mathbf{J}]^{-1} \cdot [\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^k] \quad (\text{III.59})$$

$[\mathbf{J}]$ est la matrice Jacobiënne, et « k » le rang de l'itération du processus itératif de Newton-Raphson. Le processus itératif ne s'arrête que lorsque la convergence est satisfaisante entre deux solutions correspondantes aux itérations « k+1 » et « k » . L'algorithme de Newton détaillé est donné dans les références [Jing 2004], [Bas et al 2003], [Ham et al 1999], [Nu-Phy 2004],[Fel 1981].

Le système algébrique itératif (III.50) devient

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \theta([\mathbf{K}_{sr}]^k + [\mathbf{K}_{sr}]_{NL}^k) & -\theta[\mathbf{D}_s] \\ L_z N_s \frac{[\mathbf{D}_s]^t}{\Delta t} & \left(\theta \mathbf{R}_s + \frac{L_s}{\Delta t} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{A}_z^{sr} \\ \Delta I_{ph}^s \end{pmatrix}_{t+\Delta t}^{k+1} \\ &= - \begin{bmatrix} \theta([\mathbf{K}_{sr}]^k) & -\theta[\mathbf{D}_s] \\ L_z N_s \frac{[\mathbf{D}_s]^t}{\Delta t} & \left(\theta \mathbf{R}_s + \frac{L_s}{\Delta t} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_z^{sr} \\ I_{ph}^s \end{pmatrix}_{t+\Delta t}^k \\ & \quad + \begin{bmatrix} -(1-\theta)([\mathbf{K}_{sr}]^k) & (1-\theta)[\mathbf{D}_s] \\ L_z N_s \frac{[\mathbf{D}_s]^t}{\Delta t} & \left(-(1-\theta)\mathbf{R}_s + \frac{L_s}{\Delta t} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_z^{sr} \\ I_{ph}^s \end{pmatrix}_t \\ & \quad + \begin{pmatrix} \mathbf{CL} + [\mathbf{PM}] \\ \theta(\mathbf{V}_s)^{t+\Delta t} + (1-\theta)(\mathbf{V}_s)^t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

III.9. Calcul de la force électromagnétique

III.9.1. Inventaire des différentes méthodes

Les efforts magnétiques exercés sur les parties mobiles d'un système électromagnétique constituent des grandeurs importantes pour l'étude de son fonctionnement. C'est le cas des forces responsables du couple électromagnétique dans les machines électriques. Sous forme globale, ces grandeurs peuvent servir à un couplage avec les équations de la mécanique en vue du calcul de la vitesse et du déplacement; aux niveaux locaux exprimés en densités de forces, elles servent à prédire les déformations que peut subir le système. Pour déterminer ces efforts au niveau local et global,

plusieurs méthodes de calcul sont employées, parmi lesquelles on trouve [Ren 1997], [Rac 2007], [LeMen 1999], [Bas et al 2003] :

- la méthode de variation de la coénergie et de l'énergie magnétique,
- la méthode des travaux virtuels,
- la méthode du tenseur de Maxwell,
- les méthodes basées sur le principe des sources équivalentes (électrique et magnétique) .

Dans cette section nous allons présenter un développement pour le calcul de la force et du couple dans une machine électrique en utilisant le tenseur de Maxwell, et on procédera ensuite au couplage électromagnétique-mécanique.

III.9.2. Calcul de la force électromagnétique par le tenseur de Maxwell

La méthode du tenseur de Maxwell permettra d'étudier la force s'exerçant sur un matériau volumique, en connaissant seulement la répartition du champ aux différents points de la surface fermée entourant le volume en question. Le système peut contenir des matériaux magnétiques (linéaire ou non-linéaires), des conducteurs ou des régions inductrices caractérisées par une densité de courant uniforme.

Partant de la force s'exerçant sur un conducteur électrique amagnétique placé dans un champ magnétique et en s'appuyant sur les équations du modèle magnétostatique on aboutit à l'expression de la force magnétique globale par l'intégrale de la densité de force champ magnétique $\vec{\tau}$ sur la surface entourant le volume du conducteur [Jing 2004], [Bas et al 2003], [Ham et al 1999] :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \iint_{S_{gap}} \vec{\tau} \cdot d\mathbf{S}_{gap} = \frac{1}{\mu_0} \iint_{S_{gap}} \left[(\mathbf{B} \cdot \vec{n})\mathbf{B} - \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 \vec{n}) \right] d\mathbf{S}_{gap} \\ &= \mu_0 \iint_{S_{gap}} \left[(\mathbf{H} \cdot \vec{n})\mathbf{H} - \frac{1}{2}(\mathbf{H}^2 \vec{n}) \right] d\mathbf{S}_{gap} \end{aligned} \quad (III.61)$$

La surface S_{gap} représente une enveloppe de l'entrefer de rayon r et de longueur L_z . Le champ et induction magnétique correspondent aux barycentres des éléments du maillage.

Le couple électromagnétique s'exprime par :

$$\mathbf{T}_{em} = \iint_{S_{gap}} (\vec{r} \times \vec{\tau}) d\mathbf{S}_{gap} = L_z \int_{\Gamma_{gap}} (\vec{r} \times \vec{\tau}) d\Gamma_{gap} \quad (III.62)$$

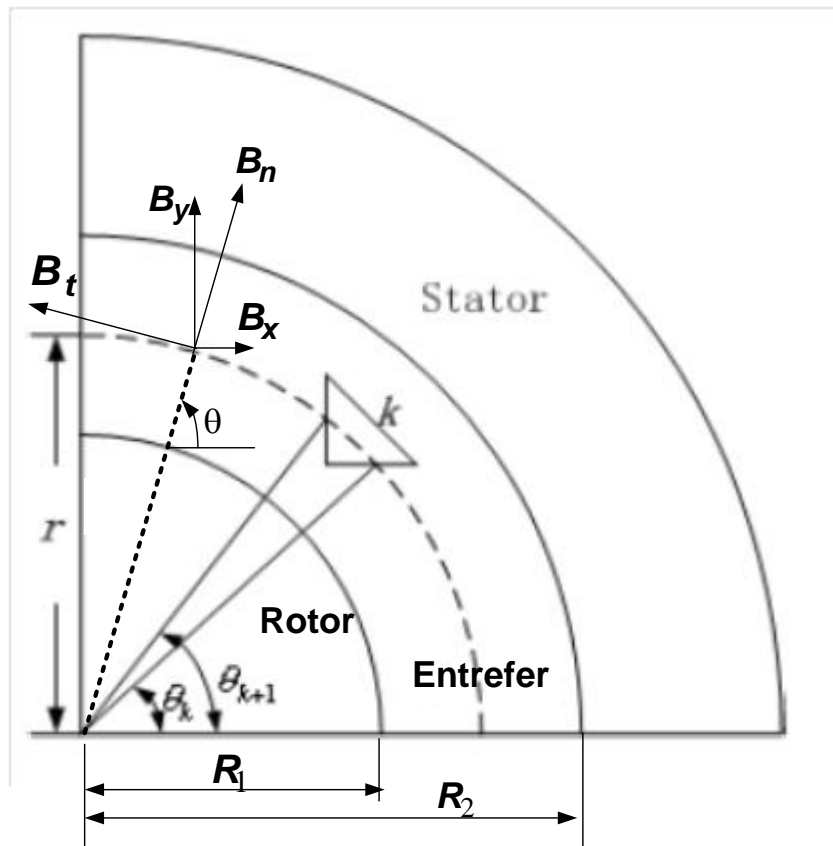


Figure.III.6 : Contour d'intégration pour le calcul du couple électromagnétique

Dans les machines électriques, le calcul de la force ou du couple est conduit habituellement en utilisant les composantes normale et tangentielle.

On sait que $\vec{B} = B_n \vec{n} + B_t \vec{t}$ et $B^2 = B_n^2 + B_t^2$ (III.64)

Alors : $\vec{\tau} = \frac{1}{2\mu_0} (B_n^2 - B_t^2) \vec{n} + \frac{1}{\mu_0} (B_n B_t) \vec{t} = \tau_t \vec{t} + \tau_n \vec{n}$ (III.65)

Il apparait que le tenseur de Maxwell présente deux composantes : l'une suivant la normale et ne contribue pas au mouvement mais aux déformations, et l'autre tangentielle qui contribue au mouvement en créant le couple électromagnétique. Notre intérêt est exclusivement porté à l'analyse mécanique, donc seule la force responsable du couple nous intéressera. La force magnétique dans l'entrefer devient :

$$F_t = \frac{Lz}{\mu_0} \int_{\Gamma_{gap}} (B_n \times B_t) d\Gamma_{gap} \quad (III.66)$$

Sachant que $B_r = B_n$, $B_\theta = B_t$, et $d\Gamma_{gap} = r \cdot d\theta$

$$\text{Alors } \mathbf{F}_t = \frac{L_z}{\mu_0} \oint_{\Gamma_{\text{gap}}} \mathbf{B}_r \mathbf{B}_\theta r d\theta \quad (\text{III.67})$$

$$\mathbf{T}_{em} = r \times \mathbf{F}_t = \frac{L_z}{\mu_0} \oint_{\Gamma_{\text{gap}}} r^2 \mathbf{B}_r \mathbf{B}_\theta d\theta = \frac{2pl}{\mu_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \mathbf{B}_r \mathbf{B}_\theta d\theta \quad (\text{III.68})$$

En s'appuyant sur le (Figure.III.6) schématisant graphiquement un élément d'intégration du contour, on peut développer le couple électromagnétique comme suit :

$$\mathbf{T}_{em} = \frac{2plr^2}{\mu_0} \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} (\mathbf{B}_r)_k (\mathbf{B}_\theta)_k d\theta \quad (\text{III.69})$$

Dans le cadre du repère 2D cartésien, les composantes radiales et tangentielles de l'induction magnétique s'expriment aisément en fonction des composantes cartésiennes. Ainsi en s'appuyant sur la (Figure.III.6), on exprime les composantes suivantes :

$$(\mathbf{B}_r)_k = (\mathbf{B}_{rx})_k \cos\theta + (\mathbf{B}_{ry})_k \sin\theta \quad (\text{III.70.a})$$

$$(\mathbf{B}_\theta)_k = (\mathbf{B}_{ry})_k \cos\theta - (\mathbf{B}_{rx})_k \sin\theta \quad (\text{III.70.b})$$

L'expression discrète du couple électromagnétique le long du contour d'intégration est donnée par :

$$\mathbf{T}_{em} = \frac{2pL_z r^2}{\mu_0} \sum_{k=1}^{N_e} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{ry}^2 - \mathbf{B}_{rx}^2)_k \sin(\theta_{k+1} + \theta_k) \sin(\theta_{k+1} - \theta_k) + \\ & (\mathbf{B}_{rx} \mathbf{B}_{ry})_k \cos(\theta_{k+1} + \theta_k) \sin(\theta_{k+1} - \theta_k) \end{aligned} \right] \quad (\text{III.71})$$

III.10. Simulation du mouvement du rotor dans le cadre d'une modélisation par éléments finis

III.10.1. Inventaire des méthodes de simulation du mouvement

Les convertisseurs électromécaniques sont des dispositifs électromagnétiques qui par définition comportent des parties en mouvement. Il peut s'agir de la rotation pour les machines électriques tournantes ou de translation pour les électroaimants, lanceurs, actionneurs linéaires, dispositifs de contrôle non-destructifs. La modélisation numérique de tels systèmes nécessite donc le développement de techniques permettant la prise en compte du mouvement rigide ou de déformations importantes des matériaux qui entraînent une déstructuration du maillage éléments

finis, d'où la nécessité d'introduire des outils qui permettent de modéliser cette déformation ou déplacement. Les méthodes de simulation du mouvement rencontrées dans le cadre de la modélisation en électrotechnique sont :

- Remaillage partiel ou total, et bande de mouvement,
- Ligne/Surface de glissement,
- Intégrales frontières-éléments finis,
- Macro-élément 2-D,
- Connexion par interpolation nodale,
- Connexion par multiplicateurs de Lagrange,
- Bande géométrique/Affectation de propriétés physiques 2D.

III.10.2. Méthode du Macro-Élément (Air-Gap-Element AGE)

Cette méthode, proposée pour la première fois dans [Fel 1982], [Raz 1981], [Fla 1994] pour les machines électriques en coordonnée polaires, à été étendue en coordonnées cylindriques, et plus récemment dans le cas cartésien (*CAGE : Cartesian-Air-Gap-Element*). Son principe est basé sur l'expression analytique du champ dans un entrefer non maillé vu comme un seul élément fini mais possédant des nœuds sur la partie fixe et mobile. L'entrefer constitue alors une sorte d'élément fini à plusieurs nœuds, d'où le nom de Macro-Élément (Figure. III.7).

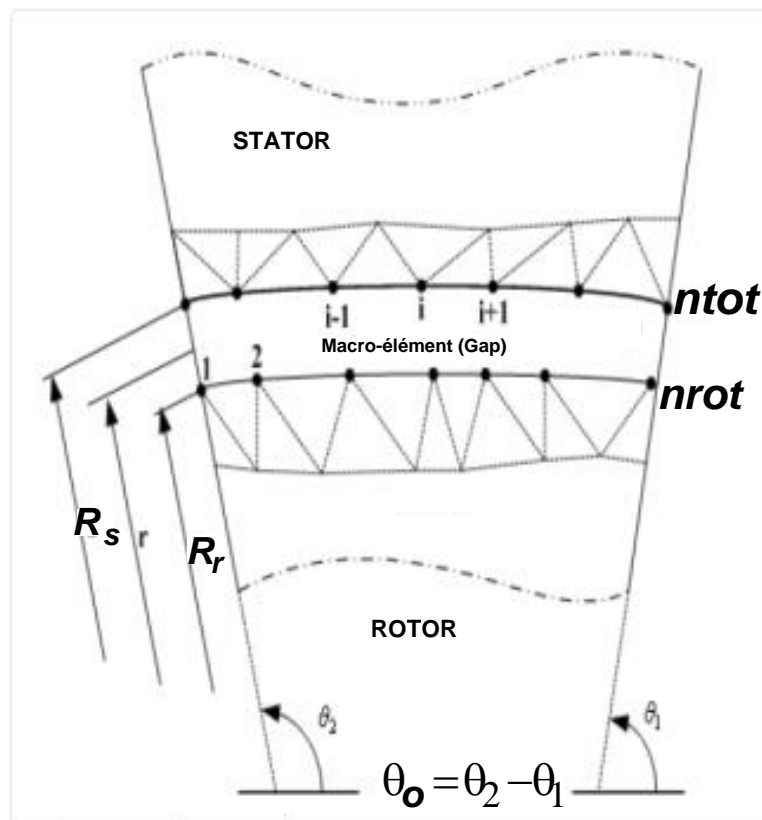


Figure.III.7 : Prise en compte du mouvement par macro-élément

En 2-D, cette méthode consiste à déterminer une solution analytique de l'équation de Laplace $\Delta_{xy} \cdot \mathbf{A}_z = 0$ dans la partie uniforme de l'entrefer. En utilisant les coordonnées polaires, cylindriques ou cartésiennes, il est possible d'intégrer cette équation avec une séparation de variables. Avec un potentiel périodique, la solution est obtenue par un développement en série de Fourier. Le couplage de cette solution avec le calcul par éléments finis est effectué en assurant la continuité du potentiel A_z aux nœuds des frontières Γ_f et Γ_m respectivement coté fixe et coté mobile du macro-élément [Fel 1981], [Raz 1981], [Fla 1994]. Cela se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(R_r, R_s, r, \theta) &= \sum_{i=1}^{ntot} (\mathbf{A}_z)_i \left[\frac{1}{2} \mathbf{a}_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbf{a}_{nj} \cos(\lambda_n \theta) + \mathbf{b}_{nj} \sin(\lambda_n \theta)] \right] \\ &= \sum_{j=1}^{ntot} \mathbf{N}_j^{ME}(R_r, R_s, r, \theta) \cdot (\mathbf{A}_z)_{\Gamma_j}^{ME} \end{aligned} \quad (III.72)$$

Avec $(\mathbf{a}_{0j}, \mathbf{a}_{nj}, \mathbf{b}_{nj}, \lambda_n)$ sont des coefficients de la série de Fourier, dépendant des coordonnées des nœuds du Macro-Elément, et nnt est le nombre de nœuds du Macro-Elément.

La simulation du mouvement est prise en compte à travers l'expression (III.72) après avoir calculé la matrice Macro-Elément définie par le terme d'intégration linéique issue de la forme intégrale (III.18). La matrice Macro-Element est donnée comme suit :

$$\oint_{\Gamma^{ME}} v_o \sum_{j=1}^{nnt} \left\{ (\mathbf{A}_z)_j^{ME} \right\} \frac{\partial}{\partial n} [\mathbf{N}_j^{ME}(r, \theta)] d\Gamma^{ME} = [\mathbf{S}^{ME}] \left\{ (\mathbf{A}_z)_j^{ME} \right\} \quad (III.73)$$

Les éléments constituant la matrice raideur du Macro-élément sont calculés par l'expression suivante [Fel 1981], [Raz 1981], [Fla 1994] :

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}^{ME}] &= \frac{\theta_o}{4} \frac{\ln\left(\frac{R_s}{c}\right) - \ln\left(\frac{R_r}{c}\right)}{\ln\left(\frac{c'}{c}\right) \cdot \ln\left(\frac{e'}{e}\right)} \mathbf{A}_{0i} \mathbf{A}_{0j} \\ &+ \frac{\theta_o}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\left[\left\{ \left(\frac{R_s}{c}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c}{R_s}\right)^{\lambda_n} \right\} \left\{ \left(\frac{R_s}{e}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{e}{R_s}\right)^{\lambda_n} \right\} - \left\{ \left(\frac{R_s}{c'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c'}{R_s}\right)^{\lambda_n} \right\} \left\{ \left(\frac{R_s}{e'}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{e'}{R_s}\right)^{\lambda_n} \right\} \right]}{\left[\left\{ \left(\frac{c'}{c}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c}{c'}\right)^{\lambda_n} \right\} \left\{ \left(\frac{e'}{e}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{e}{e'}\right)^{\lambda_n} \right\} \right]} \times \\ &\quad (\mathbf{A}_{ni} \mathbf{A}_{nj} + \mathbf{B}_{ni} \mathbf{B}_{nj}) \end{aligned} \quad (III.74)$$

Avec

$$\mathbf{c} = \begin{cases} \mathbf{R}_s & \text{et } \mathbf{c}' = \mathbf{R}_r & \text{si } i \in \{1, 2, \dots, nrot\} \\ \mathbf{R}_r & \text{et } \mathbf{c}' = \mathbf{R}_s & \text{si } i \in \{nrot + 1, 2, \dots, ntot\} \end{cases} \quad (\text{III.75.a})$$

$$\mathbf{e} = \begin{cases} \mathbf{R}_s & \text{et } \mathbf{e}' = \mathbf{R}_r & \text{si } j \in \{1, 2, \dots, nrot\} \\ \mathbf{R}_r & \text{et } \mathbf{e}' = \mathbf{R}_s & \text{si } j \in \{nrot + 1, 2, \dots, ntot\} \end{cases} \quad (\text{III.75.b})$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{\theta_o} n \quad (\text{n nombre entier positif}) \quad (\text{III.75.c})$$

Les coefficients \mathbf{a}_{oi} , \mathbf{A}_{ni} et \mathbf{B}_{ni} sont donnés comme suit :

$$\mathbf{a}_{oi} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{\theta_o} \quad (\text{III.76})$$

$$\mathbf{a}_{ni} = -\frac{4}{\theta_o} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\frac{1}{\theta_i - \theta_{i-1}} \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_i + \theta_{i-1})\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})\right) + \frac{1}{\theta_i - \theta_{i+1}} \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_i + \theta_{i+1})\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_{i+1} - \theta_i)\right) \right] \quad (\text{III.77})$$

$$\mathbf{b}_{ni} = \frac{4}{\theta_o} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\frac{1}{\theta_i - \theta_{i-1}} \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_i - \theta_{i-1})\right) \cdot \cos\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_i + \theta_{i-1})\right) + \frac{1}{\theta_i - \theta_{i+1}} \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_{i+1} - \theta_i)\right) \cdot \sin\left(\frac{\lambda_n}{2}(\theta_{i+1} + \theta_i)\right) \right] \quad (\text{III.78})$$

Pour tenir compte de la matrice issue du Macro-élément de l'entrefer, il suffit de l'ajouter à la matrice raideur initiale qui devient :

$$[\mathbf{K}_{sr}] = [\mathbf{K}_{sr}]_+ + [\mathbf{S}^{ME}] \quad (\text{III.79})$$

La matrice du Macro-élément est pleine et d'ordre $ntot$. De plus, pour obtenir une précision suffisante, il faut utiliser un grand nombre d'harmoniques pour la série de Fourier. Pour ces raisons, le Macro-élément engendre des temps de calcul élevé pour un maillage fin en 2-D. Néanmoins, il donne des résultats précis et n'impose pas de contrainte sur le choix du déplacement.

Par ailleurs, le couple électromagnétique peut être aussi évalué à travers l'expression analytique des inductions magnétiques dans l'entrefer obtenues à partir de l'expression analytique du potentiel vecteur magnétique (III.72). Ainsi, sur la base de l'expression du Macro-élément dans l'entrefer, le couple électromagnétique d'une machine à p paires de pôles est exprimé par [Fel 1981], [Raz 1981]

$$T_{em} = \rho \frac{rL_z}{\mu_0} \cdot \left[A_z^{\Gamma ME} \right]^t [tem] \left[A_z^{\Gamma ME} \right] \quad (III.80.a)$$

Avec

$$[tem] = + \frac{\theta_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \frac{\left[\left\{ \left(\frac{r}{c} \right)^{\lambda_n} + \left(\frac{c}{r} \right)^{\lambda_n} \right\} \left\{ \left(\frac{r}{e} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{e}{r} \right)^{\lambda_n} \right\} \right]}{\left[\left\{ \left(\frac{c'}{c} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{c}{c'} \right)^{\lambda_n} \right\} \left\{ \left(\frac{e'}{e} \right)^{\lambda_n} - \left(\frac{e}{e'} \right)^{\lambda_n} \right\} \right]} (A_{ni} A_{nj} - B_{ni} B_{nj}) \quad (III.80.b)$$

III.11. Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à la présentation des formulations éléments finis des équations couplées électriques et magnétiques en régime transitoire 2-D aussi bien avec des matériaux magnétiques à propriétés linéaires et non-linéaires. Un processus itératif en pas à pas dans le temps est établi incluant l'algorithme de Newton-Raphson. Les codes de calcul mis en œuvre ont été implémentés sous Matlab. Ainsi à chaque instant, les grandeurs potentiel vecteur magnétique et courants dans les enroulements sont déterminés et permettront le calcul du couple électromagnétique. Les équations itératives du modèle mécanique utiliseront le couple comme excitation et permettront l'évaluation du déplacement dont la simulation est opérée en utilisant la technique du Macro-élément. Le prochain chapitre, portera essentiellement sur l'application des modèles et outils numériques développés sur le cas d'une machine synchrone à aimants permanent montés en surface à flux radiale.

CHAPITRE IV

SIMULATION DU MODÈLE COUPLÉ ÉLECTROMAGNÉTIQUE-MÉCANIQUE DE LA (MSAP)

Sommaire

IV.1. Introduction

IV.2 Présentation de la machine (MSAP) étudiée

IV.2.1. Présentation de la topologie

IV.2.2. Présentation panoramique des enroulements

IV.2.3. Propriétés magnétiques des régions magnétiques de la (MSAP)

IV.2.4. Conditions aux limites

IV.2.5. Maillage de $\frac{1}{4}$ de la (MSAP) étudiée.

IV.3 Simulation en régime statique a vitesse constante

IV.3.1. Etude en régime statique : aimants seules

IV.3.2. Etude en régime statique : aimants + enroulements

IV.4. Etude en régime transitoire électromagnétique: couplage électrique-magnétique a vitesse constante

IV.5. Etude en régime transitoire par couplage électromagnétique-mécanique.

IV.6. Conclusion

IV.1.Introduction

Cet ultime chapitre portant sur les applications et validations intervient pour clôturer l'étude et la rattacher au but portant élaboration d'un code de calcul éléments finis pour la modélisation électromagnétique-mécanique bidimensionnelle par la méthode des éléments finis en régime transitoire avec prise en compte des non-linéarités magnétiques, dédiée à la simulation d'une **Machine Synchrone à Aimant Permanent (MSAP)**. Les codes de calcul sont implémentés sous environnement Matlab-PDETool.

Les diverses simulations effectuées sur une (MSAP) qui constitue une application directe du modèle élaboré sont en relation directes avec les modèles développés, à savoir :

- L'étude en régime statique basée sur le modèle magnétostatique en considérant, en premier que seul les aimants sont alimentés, et ensuite introduire l'alimentation en courant pour les enroulements du stator.
- L'étude en régime transitoire électromagnétique basée sur le modèle le couplage fort et direct des équations magnétiques avec les équations du circuit électriques des enroulements du stator. La vitesse étant considéré constante, seul le régime transitoire électromagnétique est étudié en considérant les cas de matériaux magnétique linéaire et non-linéaire à travers la prise en compte de la courbe B-H par l'approximation de Marrocco. L'algorithme de Newton-Raphson est utilisé pour tenir compte de l'effet de la non-linéarité à chaque pas de calcul.
- L'étude en régime dynamique transitoire basée sur le modèle à couplage fort magnétique-électrique séquentiellement couplé avec le modèle mécanique. Le couple électromagnétique est préalablement calculé par le modèle couplé magnétique-électrique avant d'être introduit dans l'équation mécanique. Le déplacement angulaire généré par la résolution de l'équation mécanique permet le déplacement du rotor en utilisant la technique de Macro-Elément.

IV.2 Présentation de la machine (MSAP) étudiée

IV.2.1. Présentation de la topologie

Le dispositif électromagnétique d'étude est une machine synchrone à aimants permanent quadripolaires. La machine présente des symétries ce qui permet de restreindre le domaine d'étude, soit à la moitié sous deux aimants, soit à $\frac{1}{4}$ sous un seule aimants. Selon les possibilités de symétrie, la configuration géométrique transversale (radiale) de la (MSAP) est donnée par la Figure. IV.1 suivante :

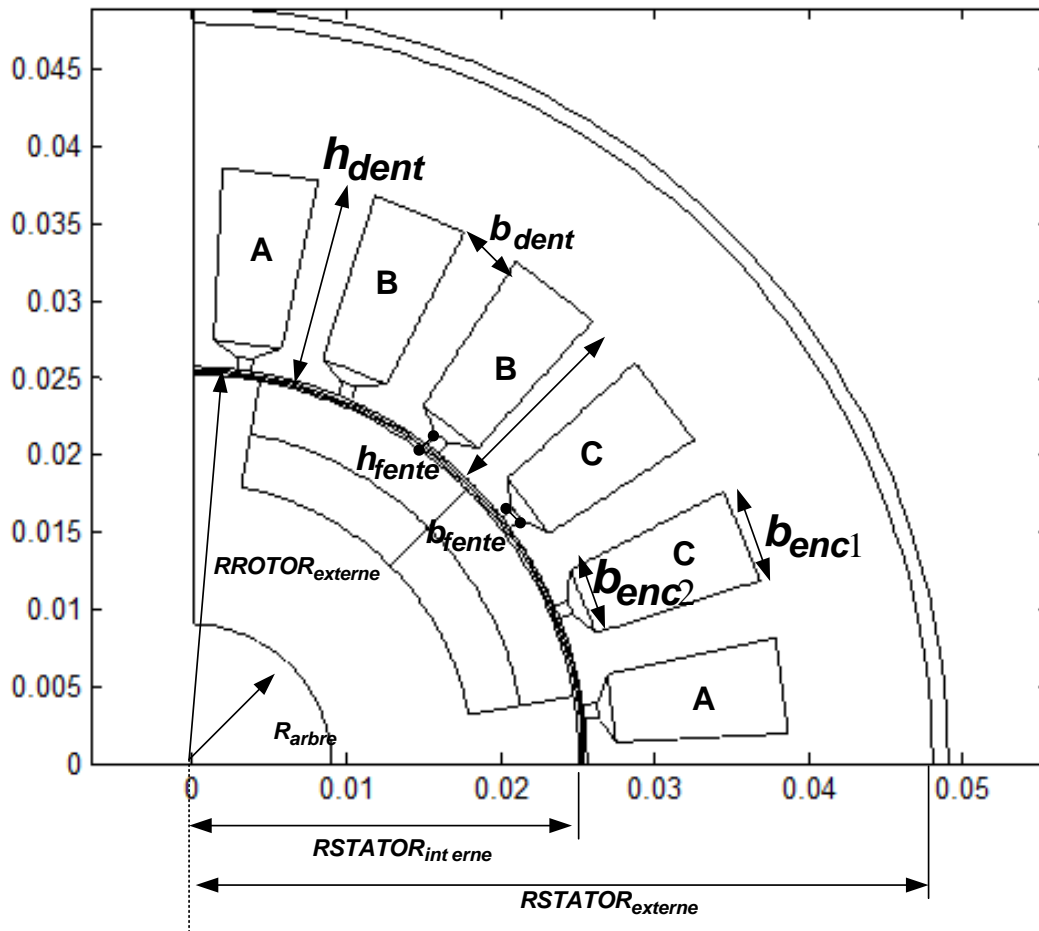


Figure. IV.1 1/4 de la configuration géométrique de la section transversale de la (MSAP)

La plaque signalétique est donnée par le Tableau. IV.1 suivant :

Grandeurs	Valeurs
Puissance absorbée	Non fournie
Courant nominal	Non fournie
Fréquence	50 Hz
Résistance d'une phase	0,141 Ω
Inductance d'une phase	31 μH
Nombre de pôles	4
Moment d'inertie	$3.8675 \cdot 10^{-5} \text{ Kg.m}^2$
Facteur de frottement	0.00009 N.m/(rd/s)
Induction rémanente (aimants)	0,47 T
Flux magnétique d'un aimant	0,175 Wb

Tableau IV.1 Grandeur physique de la MSAP [Ben 2015]

Les caractéristiques géométriques de la machine sont données par le Tableau. IV.2, comme suit :

Symboles	Désignation	Valeurs
$R_{STATOR_{externe}}$	Diamètre extérieur du stator	48 mm
$R_{STATOR_{interne}}$	Diamètre intérieur du stator	25.657 mm
$R_{ROTOR_{externe}}$	Diamètre extérieur du rotor	25,154 mm
R_{arbre}	Diamètre intérieur du rotor (arbre)	9,003 mm
L	Longueur de la machine	Non fournie
Z_1	Nombre d'encoche du stator	24
b_{dent}	Largeur de la dent du stator	2,76 mm
h_{dent}	Hauteur de la dent du stator	12,07 mm
h_{aimant}	Hauteur des aimants permanents	6,987 mm
θ_{aimant}	Envergure des aimants	75°
h_{fente}	Hauteur de la fente d'encoche	0,92 mm
b_{fente}	Largeur de la fente d'encoche	0,92 mm

Tableau. IV.2 Caractéristiques géométriques de MSAP [Ben 2015]

IV.2.2. Présentation panoramique des enroulements

Le stator constitué d'un empilement de tôles ferromagnétiques munies d'un certain nombre d'encoches dans lesquelles logent les conducteurs qui forment les enroulements des phases A,B, et C (Figure.VI.2).

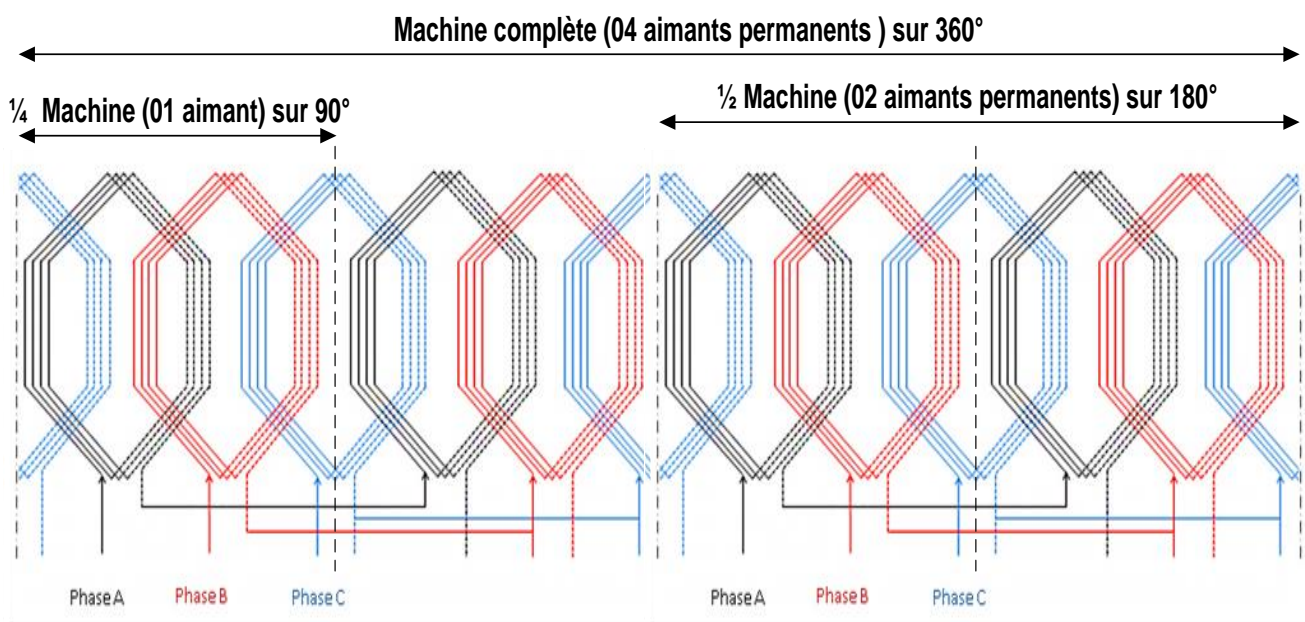
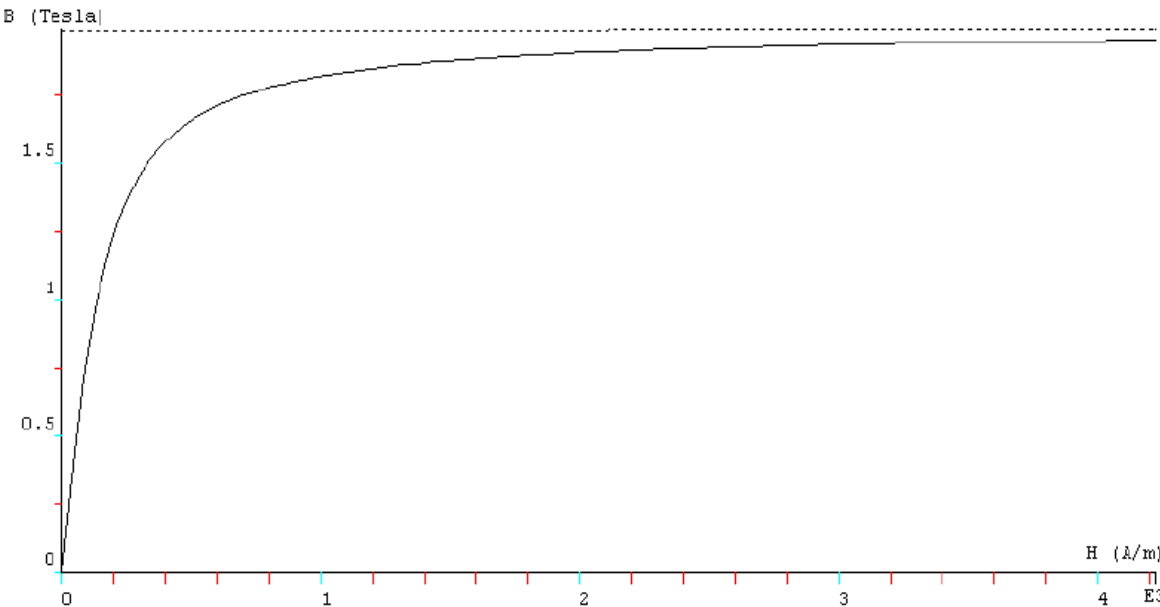


Figure. IV.2 Configuration de la répartition panoramique des enroulements dans les encoches du stator de la (MSAP)

IV.2.3. Propriétés magnétiques des régions magnétiques de la (MSAP)

Les propriétés physiques relatives aux modèles électromagnétiques sont données par le tableau IV.3 suivant [Ben 2015]:

<i>Aimant permanent avec les caractéristiques suivantes (Ferrites strontium) :</i>
Perméabilité magnétique relative de l'aimant : $\mu_{ra}=1.071$
Induction magnétique rémanente de l'aimant : $B_r=0,401$ T
<i>Matériaux magnétique modélisé par la courbe de saturation B-GH suivante :</i>
Induction magnétique à saturation : $B_s=1,99$ T
Pente initiale de la courbe B-H : $\mu_r=7500$

<i>Figure. IV.3. Courbe de saturation B-H</i>

IV.2.4. Conditions aux limites

En ce qui concerne les conditions aux limites, la machine est quadripolaire, il suffit donc de représenter un quart de la machine avec des conditions aux limites anticycliques sur les parties latérales $A(\theta=0)=-A(\theta=90^\circ)$. Pour la partie extérieure à la carcasse du stator et intérieur sur l'arbre du rotor, une condition aux limites de type Dirichlet homogène sur la variable d'état est imposée, ce qui revient à poser qu'aucun champ magnétique n'existe sur les frontières. Dans le cas du régime dynamique transitoire, la prise en compte du mouvement du rotor est faite en utilisant la technique du Macro-élément, ce qui revient à imposer une condition de type Neumann sur les frontières du Macro-élément. Le Macro-élément étant formé d'une bande non-maillée de l'entrefer. Le détail des conditions aux limites est donné sur la Figure. IV.4.

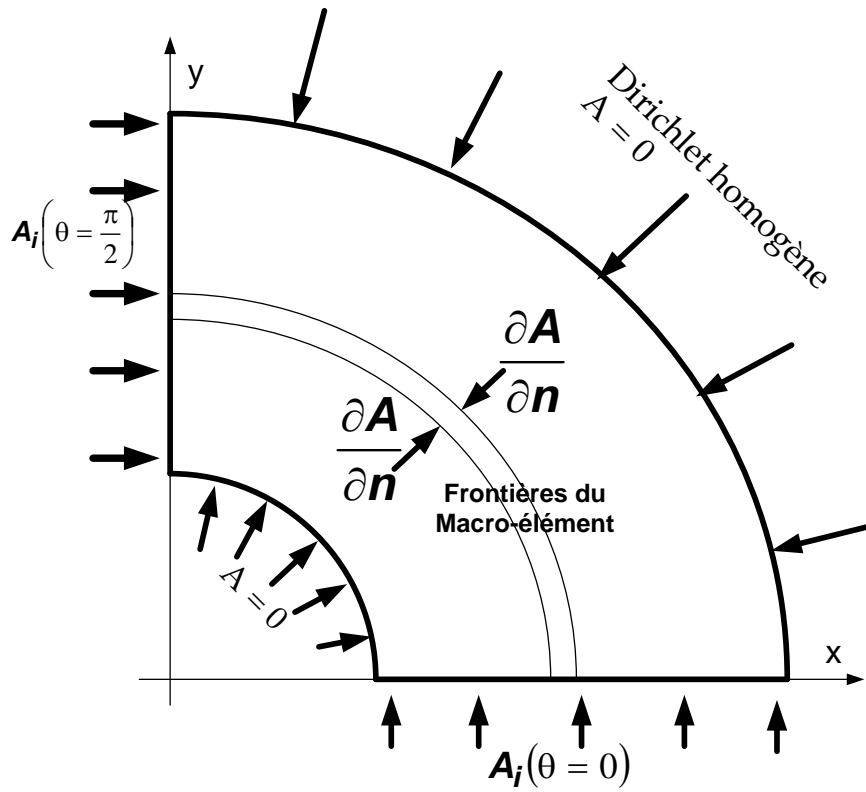


Figure. IV.4. Nature des conditions aux limites à imposer sur les frontières du domaine d'étude.

IV.2.5. Maillage de $\frac{1}{4}$ de la (MSAP) étudiée.

Le maillage de la géométrie donnée par la Figure. IV.5 a été automatiquement réalisé en utilisant le logiciel Matlab-PDETool pouvant générer une topologie de maillage optimale. Le nombre de nœuds et de triangles du premier ordre générés sont respectivement (4437) et (8738).

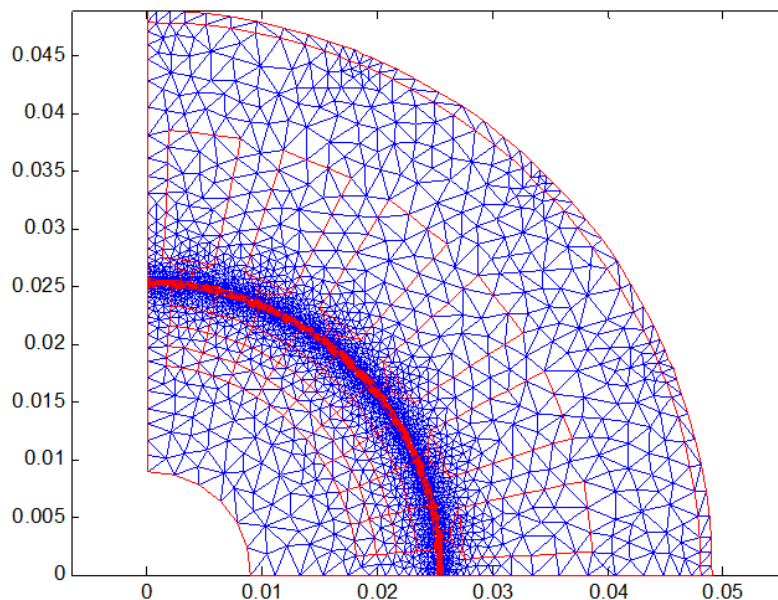


Figure IV.5 Maillage 2-D de la MSAP

IV.3 Simulation en régime statique a vitesse constante

IV.3.1. Etude en régime statique : aimants seules

Nous avons simulé le fonctionnement statique de la MSAP en utilisant le modèle magnétostatique disponible implémenté sous environnement Matlab-PDEtool. La simulation du fonctionnement de la (MSAP) régime statique concerne, d'une part l'étude du fonctionnement avec comme source uniquement les aimants : bobines non alimentées, et d'autre part l'utilisation des sources mixtes aimants+ courants dans les enroulements. Les courants dans chaque phase correspondent à ceux du régime permanent, et satisfaisant la condition d'équilibre.

Ainsi, avec les aimants seuls, le champ magnétique existant est dû essentiellement à la présence d'aimants au niveau du rotor. Par contre en alimentation mixte, le champ magnétique est essentiellement dû à la combinaison des champs dus aux aimants au rotor, et aux courants dans les enroulements du stator. Avec les aimants seuls, le niveau d'induction magnétique étant faible (inférieur à l'induction magnétique rémanente des aimants B_r), la perméabilité magnétique des circuits magnétiques du stator et du rotor correspond à la partie linéaire de la caractéristique B-H avec comme pente initiale la perméabilité magnétique relative approximative de 7500.

La Figure. IV.6. nous montre la répartition des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique dans la machine est qui est due uniquement à la présence d'aimants au rotor. Il apparait clairement que les lignes contours isovaleurs décrivent la topologie des quatre pôles de la machine.

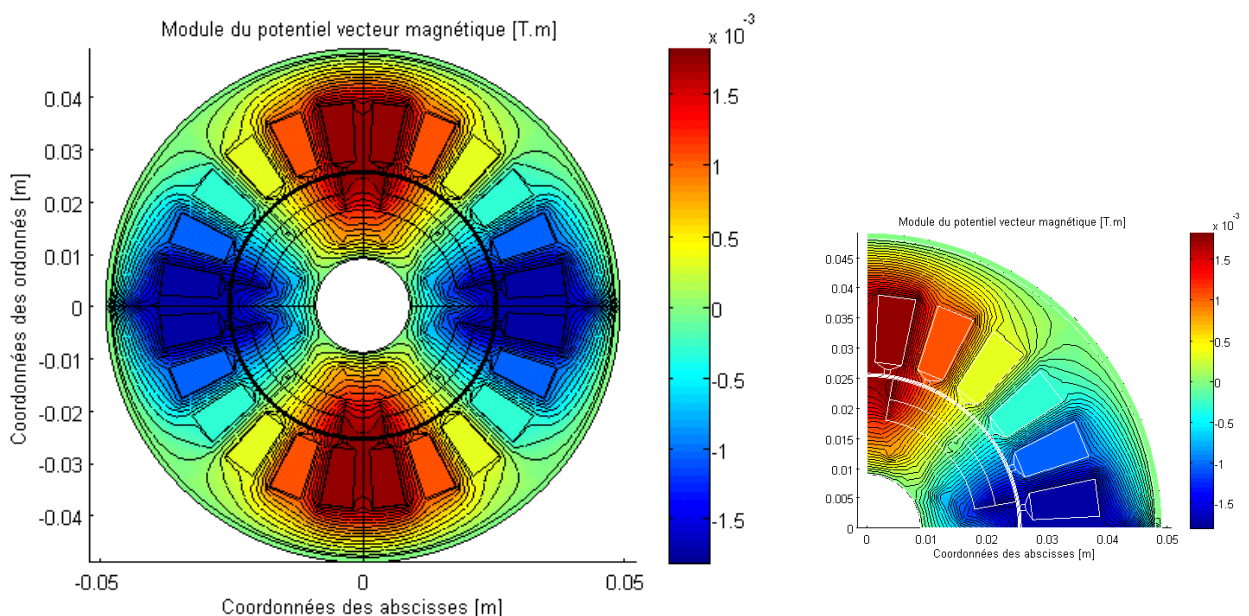


Figure. IV.6 : Isovaleurs du potentiel vecteur magnétique : Régime statique, aimants seules.

La Figure. IV.7. nous montre la distribution de la densité de flux magnétique dans la machine est qui est due uniquement à la présence d'aimants au rotor. Il apparait clairement que les lignes d'inductions magnétiques suivent la topologie des quatre pôles de la machine.

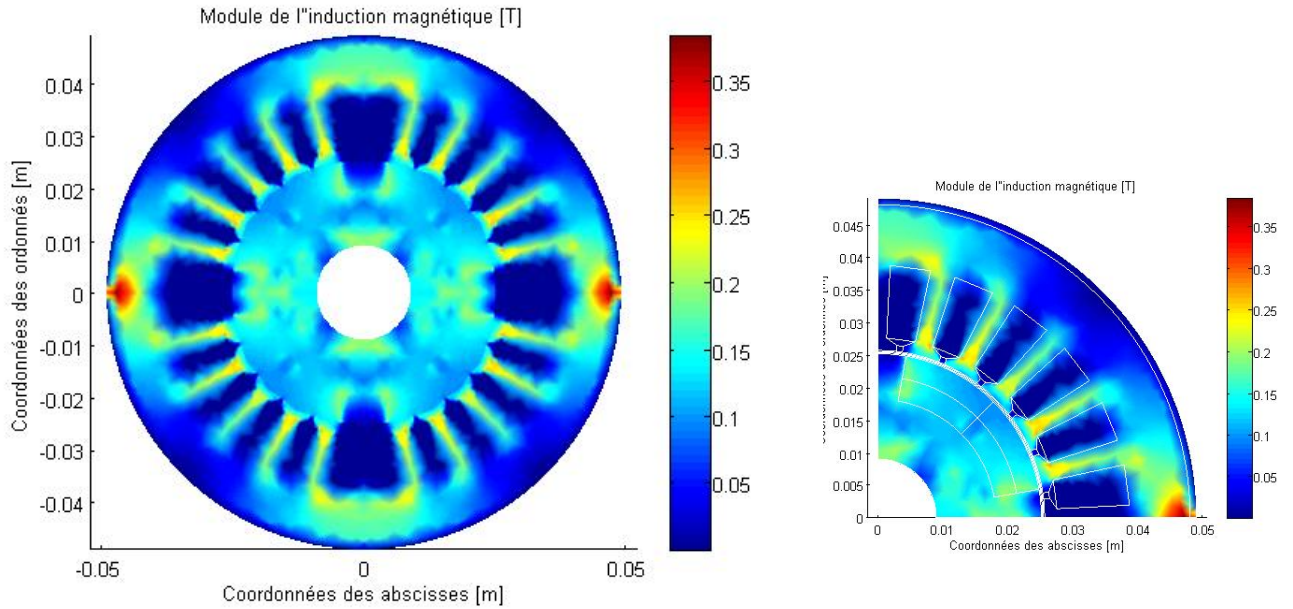


Figure. IV.7 : Carte de la distribution spatiale de l'induction magnétique : Régime statique, aimants seules

En ce qui concerne la répartition du potentiel vecteur magnétique sur la périphérie de l'entrefer est donnée par la Figure. IV.8, suivante :

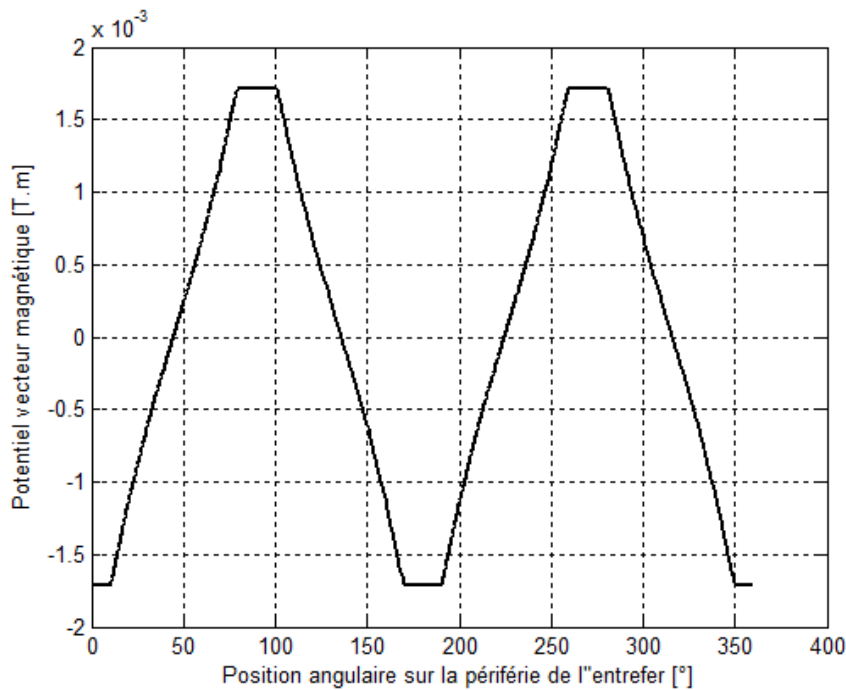


Figure. IV.8 : Répartition du potentiel vecteur magnétique le long de la périphérie de l'entrefer : Régime statique, aimants seules

Pour la répartition de l'induction magnétique dans l'entrefer, nous avons tracé son évolution en fonction de l'angle. Les Figures. IV.9 et IV.10, nous montrent la répartition des composantes normale et tangentielle respectivement..

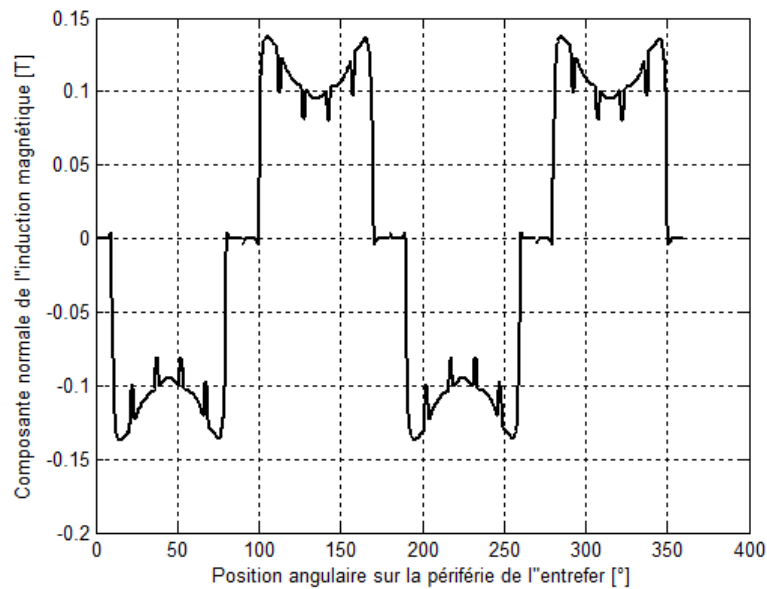


Figure. IV.9 : Répartition de la composante normale de l'induction magnétique le long de la périphérie de l'entrefer : Régime statique, aimants seules

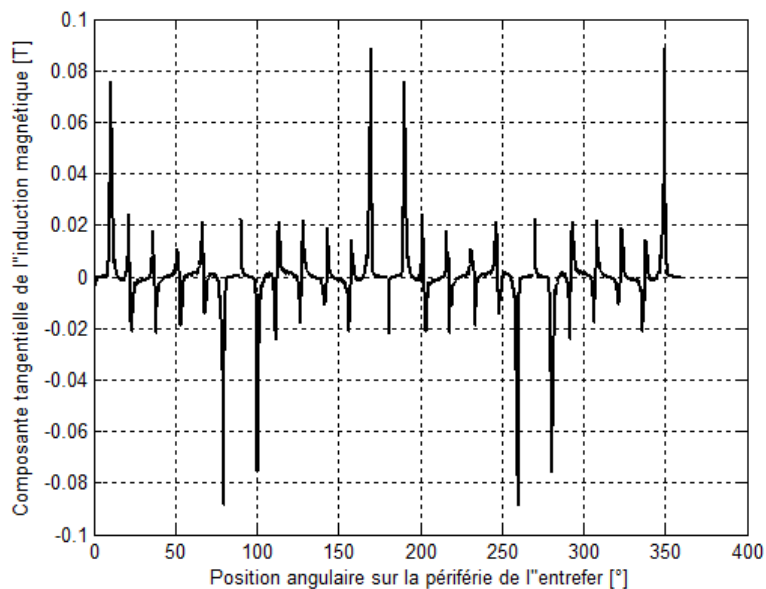


Figure. IV.10 : Répartition de la composante tangentielle de l'induction magnétique le long de la périphérie de l'entrefer : Régime statique, aimants seules

La Figure. IV.11. présente le détail du module de l'induction magnétique sur la périphérie de l'entrefer pour $\frac{1}{4}$ de la machine.

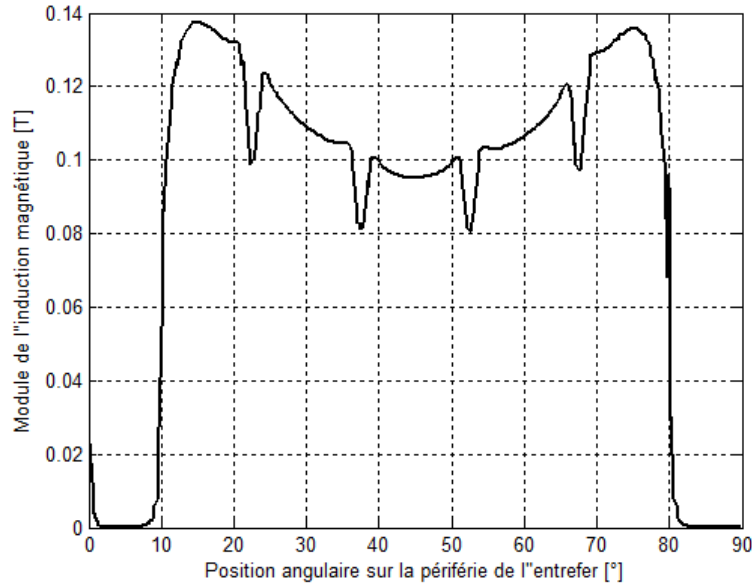


Figure. IV.11 : Répartition du module de l'induction magnétique sur la périphérie de l'entrefer : Régime statique, aimants seules

Nous remarquons que la forme de l'induction est périodique avec des fluctuations importantes aux abords des dents, ce qui renseigne sur le contenu riche en harmoniques d'espaces.

IV.3.2. Etude en régime statique : aimants + enroulements

Dans le cas d'une alimentation mixte aimants-bobines, le niveau d'induction magnétique devient important, ce qui correspond à la partie saturée de la caractéristique B-H avec une perméabilité approximative de 400. La valeur maximale du courant de la phase A étant posée égale à 7.5 A.

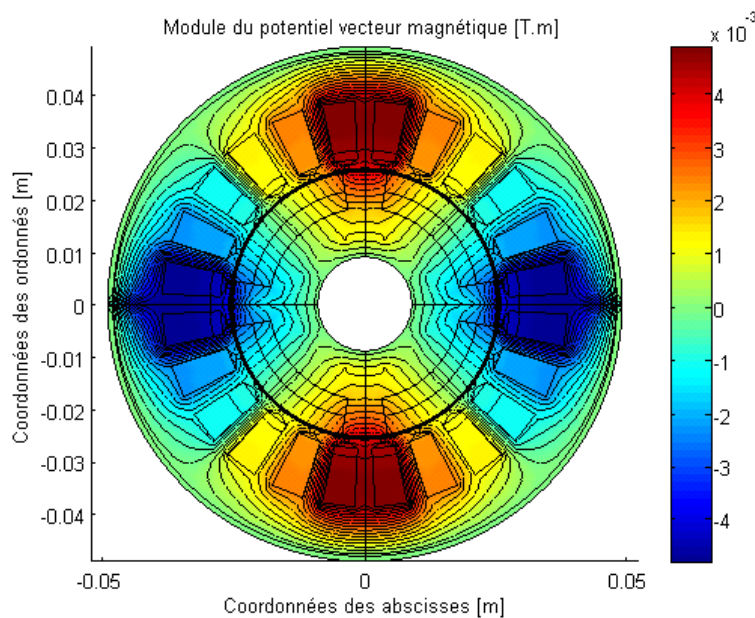


Figure. IV.12 : Isovaleurs du potentiel vecteur magnétique : Régime statique, aimants + bobines excités.

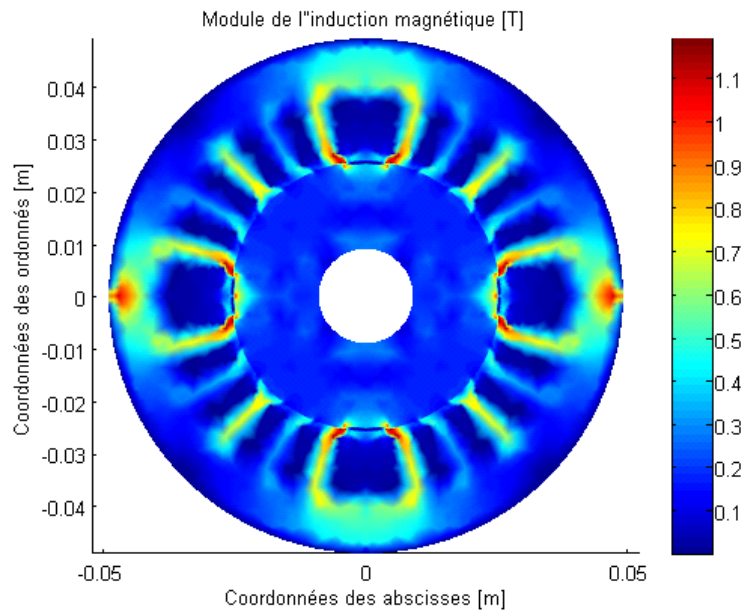


Figure. IV.13 : Carte de la distribution spatiale de l'induction magnétique : Régime statique, aimants + bobines excités

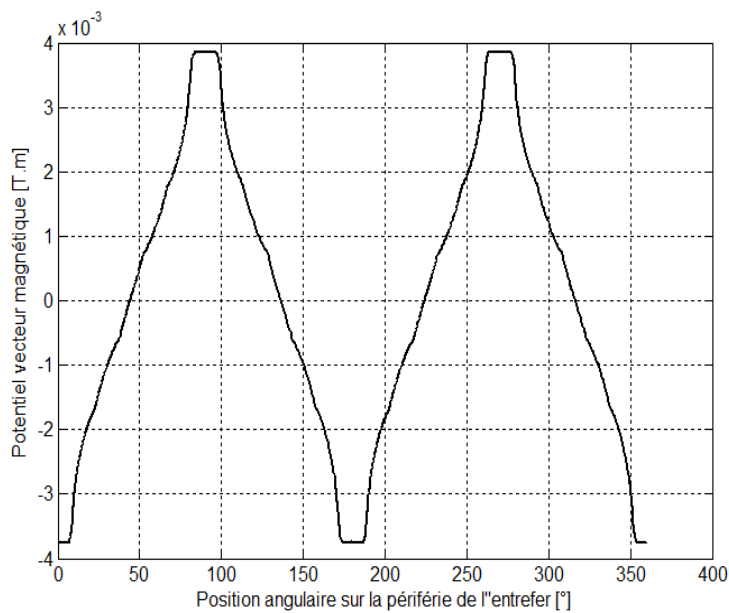


Figure. IV.14 : Répartition du potentiel vecteur magnétique le long de la périphérie de l'entrefer : Régime statique, aimants + bobines excités

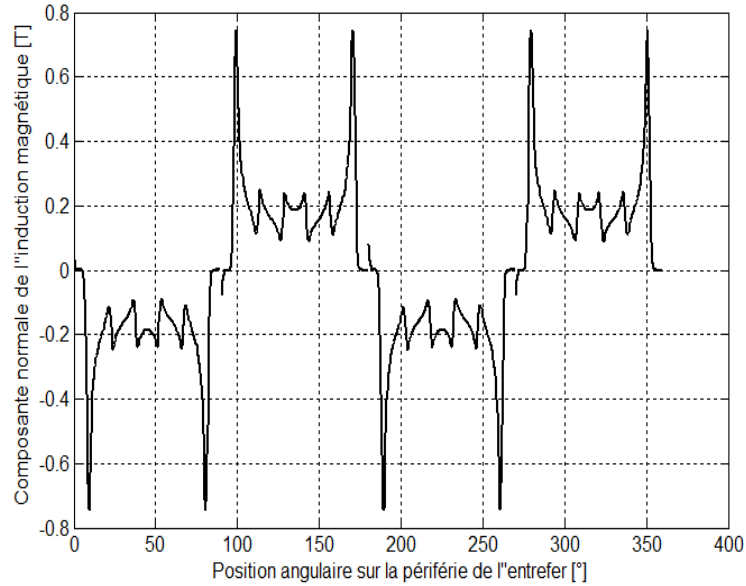


Figure. IV.15 : Répartition de la composante normale de l'induction magnétique le long de la périphérie de l'entrefer : Régime statique, aimants + bobines excités

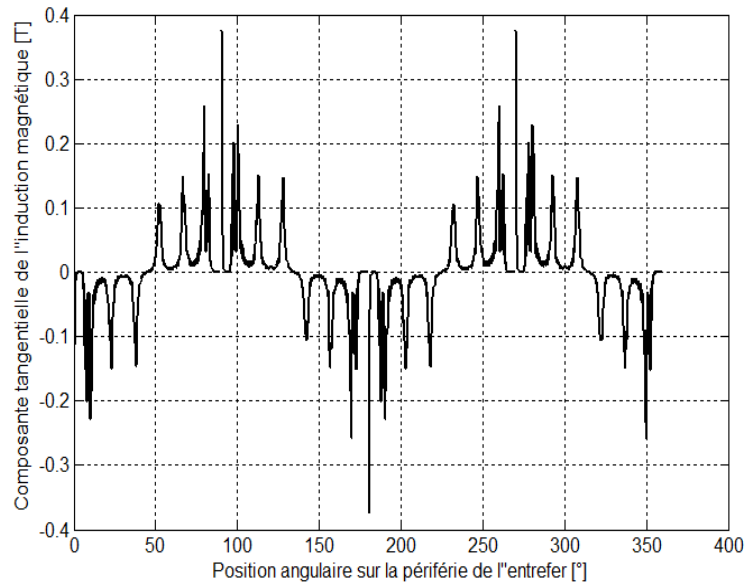


Figure. IV.16 : Répartition de la composante tangentielle de l'induction magnétique le long de la périphérie de l'entrefer : Régime statique, aimants + bobines excités

Les résultats obtenus montrent clairement, que les niveaux des valeurs des grandeurs ont augmentés du fait de la source des enroulements du stator.

IV.4. Etude en régime transitoire électromagnétique: couplage électrique-magnétique a vitesse constante

Les enroulements sont alimentés par un système de tension triphasés équilibrées, tel que :

$$\begin{cases} U_a(t) = U_m \sin(\omega t) \\ U_b(t) = U_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ U_c(t) = U_m \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Avec $\omega = 2\pi F$ (F fréquence de l'alimentation), et U_m tension simple maximale

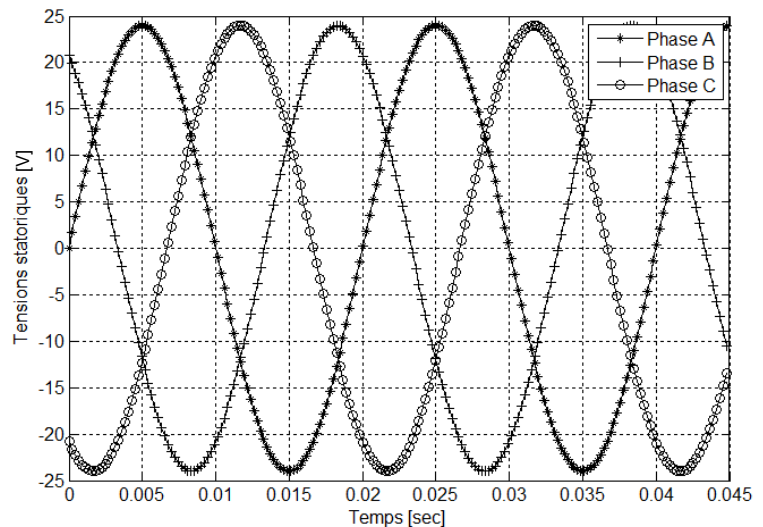


Figure. IV.17 : Allures des tensions d'alimentations triphasées : Fréquence 50 Hz

Les propriétés magnétiques sont comme suit :

Régime linéaire (propriétés magnétiques constantes), les perméabilités magnétiques adoptées sont :

$$\mu_r = 250 \text{ au stator} \qquad \mu_r = 600 \text{ au rotor}$$

Régime non-linéaire (propriétés magnétiques dépendant de la courbe B-H), les perméabilités magnétiques sont obtenues par la formule d'approximation de Marrocco.

L'approximation de Marrocco consiste à établir une expression analytique pour la courbe de magnétisation B-H par la formule suivante :

$$\nu_r = \left(\nu_j + (\nu_f - \nu_j) \frac{B^{2\alpha}}{B^{2\alpha} + \tau} \right)$$

Les paramètres sont déterminés en choisissant deux points caractéristique de la courbe B-H tel

$$\text{que : } \left(\frac{1}{\mu_1} = \nu_1, B_1 \right); \quad \left(\frac{1}{\mu_2} = \nu_1, B_2 \right)$$

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{B_1^2}{B_2^2}\right)}{\ln\left(\frac{(\nu_1 - \nu_j)(\nu_f - \nu_2)}{(\nu_2 - \nu_j)(\nu_f - \nu_1)}\right)} \quad \text{et} \quad \tau = B_2^{2\alpha} \frac{\nu_f - \nu_1}{\nu_1 - \nu_j}$$

Avec ν_j réductivité magnétique initiale (zone linéaire), et $\nu_f = 600$ réductivité magnétique finale (zone de saturation).

Les paramètres de simulation en pas à pas dans le temps sont :

Pas de temps	Nombre d'itérations	Schéma de discrétisation
$\Delta t = 0,25ms$	200	Liniger $\theta = 0,866$

Les allures de l'évolution des courants en régime transitoire électromagnétique dans les cas de propriétés magnétiques linéaires et non-linéaires sont données respectivement par les Figures. IV.18, IV.19.

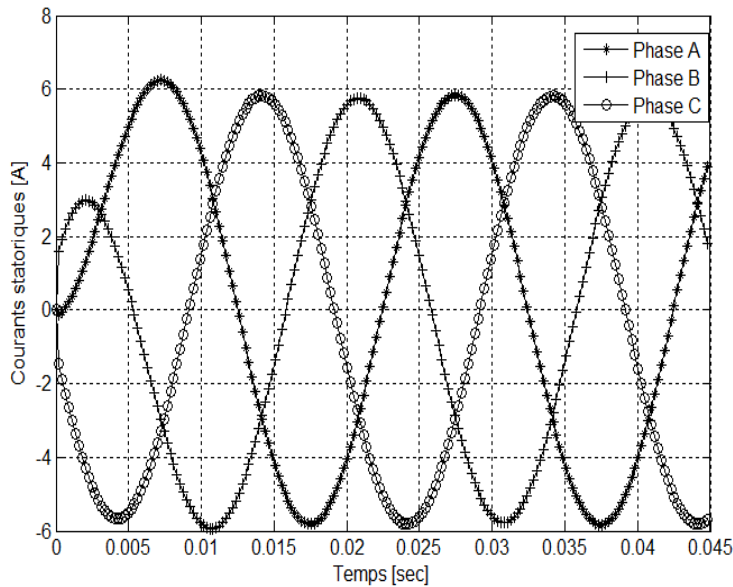


Figure. IV.18 : Allures des courants dans les enroulements A,B, et C des phases du stator : Régime transitoire électromagnétique + matériaux magnétique linéaires.

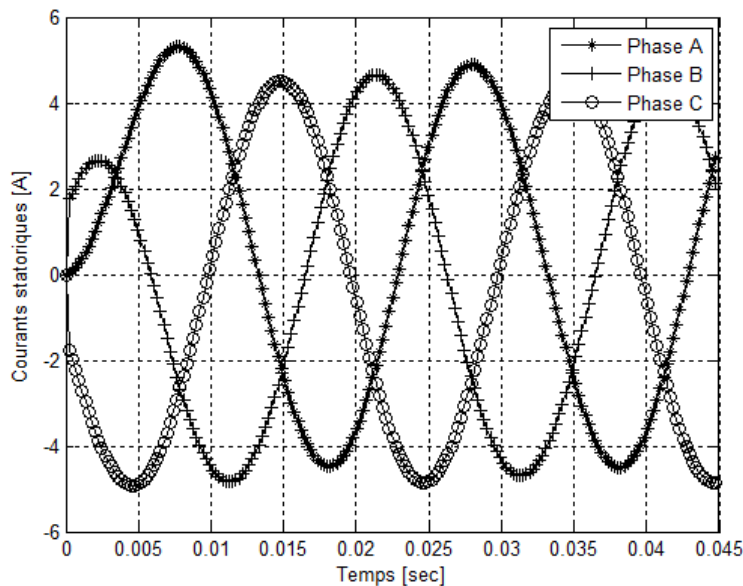


Figure. IV.19 : Allures des courants dans les enroulements A, B, et C des phases du stator : Régime transitoire électromagnétique + matériaux magnétique non-linéaires+algorithme de Newton-Raphson.

Les allures suivantes Figures. IV.20, IV.21, et IV.22 établissent les comparaisons entre les évolutions des courants en régime transitoire électromagnétique dans les cas de propriétés magnétiques linéaires et non-linéaires pour chaque phase.

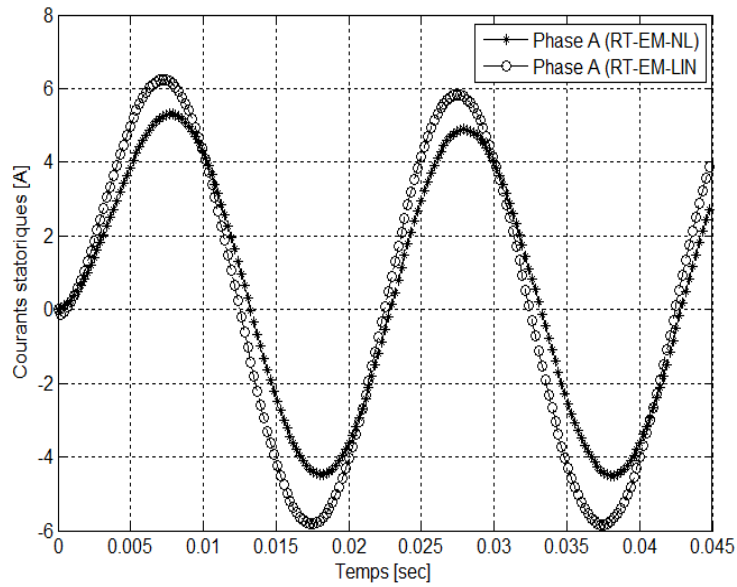


Figure. IV.20: Comparaison des courants dans la phase A : Régime transitoire électromagnétique + matériaux magnétique Lin éaires (RT-EM-LIN) et non-linéaires+algorithme de Newton-Raphson (RT-EM-

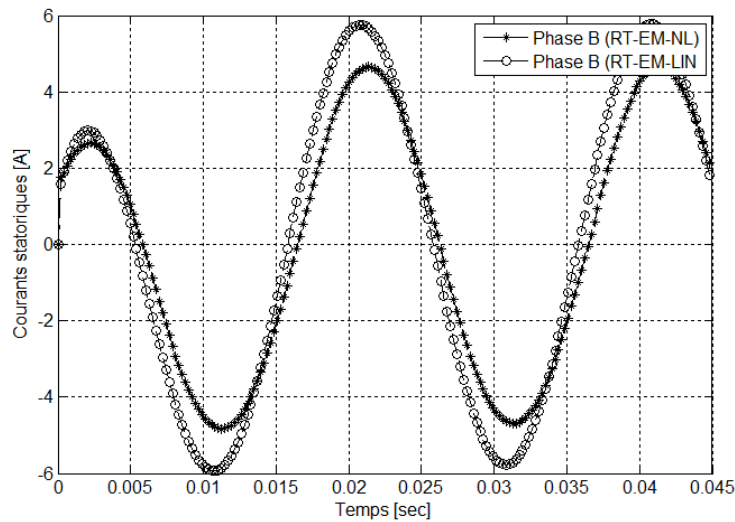


Figure. IV.21 : Comparaison des courants dans la phase B : Régime transitoire électromagnétique + matériaux magnétique Lin éaires (RT-EM-LIN) et non-linéaires+algorithme de Newton-Raphson (RT-EM-NL).

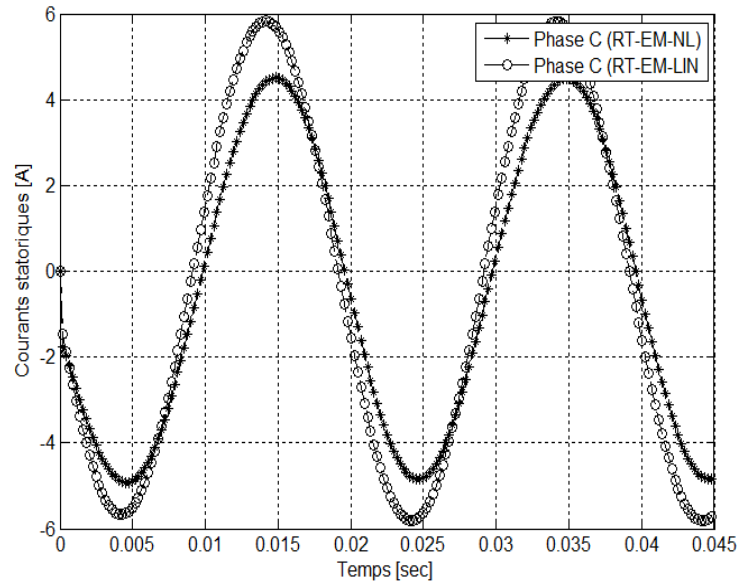


Figure. IV.22 : Comparaison des courants dans la phase C : Régime transitoire électromagnétique + matériaux magnétique Lin éaires (RT-EM-LIN) et non-linéaires+algorithme de Newton-Raphson (RT-EM-NL).

Il apparaît clairement que pour des valeurs du courant relativement faible, les résultats en linéaire et non-linéaire sont sensiblement proches, cela est essentiellement dû au fait que pour les courants faibles correspondent à des inductions magnétiques correspondantes à la zone linéaire. Par contre pour des valeurs importantes du courant (au voisinage des pics), les écarts deviennent de plus en plus significatifs. Les courants élevés sont associés aux valeurs importantes de l'induction magnétique qui correspondent aux zones de saturation.

Comme les dispositifs électromagnétiques et particulièrement les machines électriques fonctionnent au voisinage des coudes de saturation, la précision de détermination des propriétés magnétiques aura un impact direct sur la précision des courants, des pertes et des paramètres électriques. Une mauvaise estimation des paramètres électriques aura un impact majeur sur les algorithmes de commande des machines électriques.

IV.5. Etude en régime transitoire par couplage électromagnétique-mécanique.

Dans cette dernière campagne de simulation, notre intérêt c'est focalisé essentiellement sur la simulation du modèle complet : électromagnétique-mécanique en régime transitoire. Sur la base du modèle couplé magnétique-électrique mis en œuvre, la démarche adoptée consiste à calculer le couple électromagnétique, puis à l'injecter dans le modèle d'équations mécaniques dont la résolution conduit à la connaissance de la vitesse et du déplacement angulaire à chaque instant. Cependant cela sera possible qu'au terme de mise en œuvre d'une technique de prise en compte du mouvement du rotor. Ainsi, la méthode du Macro-élément a été adoptée de par son avantage majeure en relation avec la précision, et un pas de déplacement variable, bien que les temps de

résolution sont conséquents, ajoutés aux temps requis pour la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson.

Dans le cadre d'essai de la machine à vide, les allures obtenues pour les grandeurs : courants, couple, vitesse et position angulaire sont données par les figures suivantes :

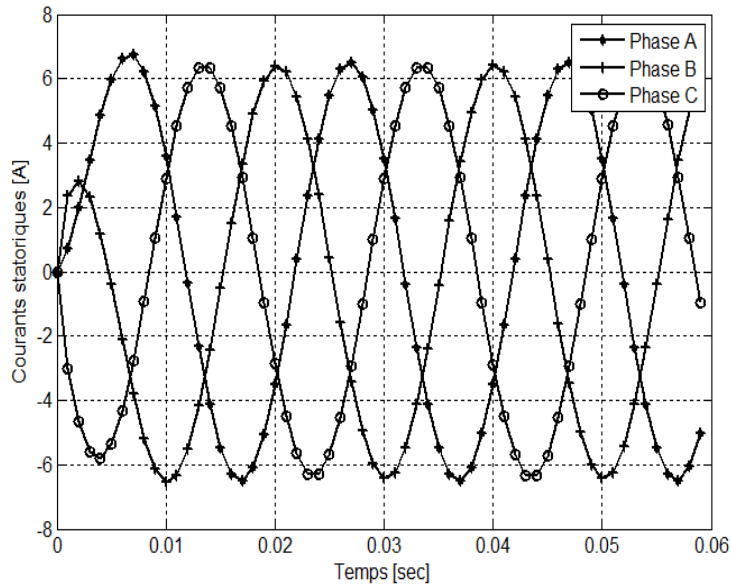


Figure. IV.23 : Courants dans les enroulements du stator à vide

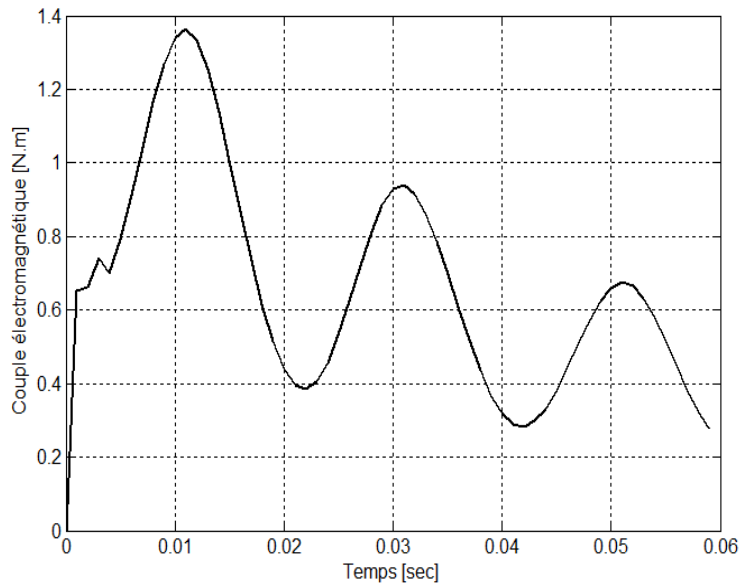


Figure. IV.24 : Couple électromagnétique de la (MSAP) à vide

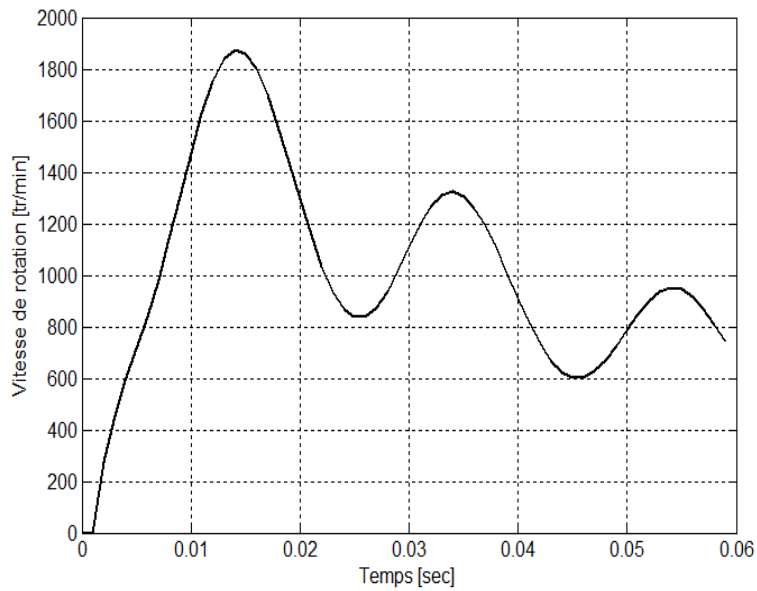


Figure. IV.25 : Vitesse angulaire de la (MSAP) à vide

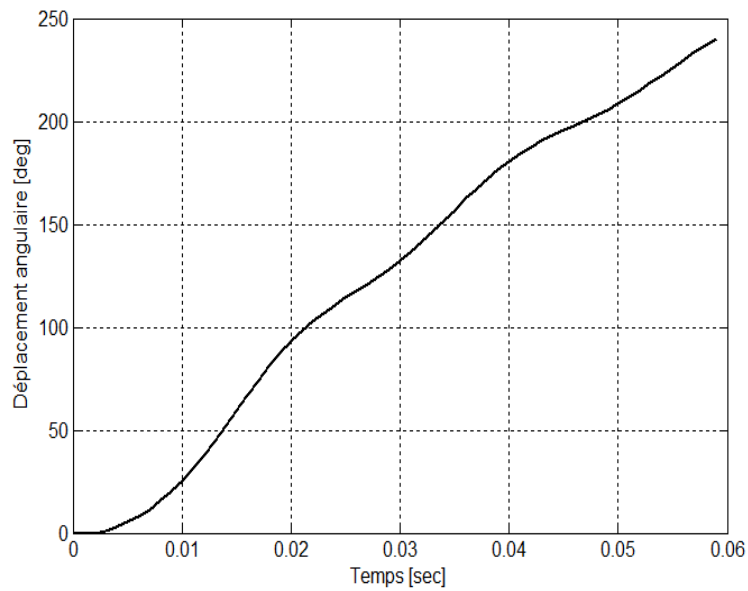


Figure. IV.26 : Déplacement angulaire de la (MSAP) à vide

L'étude de la (MSAP) en charge consiste à imposer un couple, dont la valeur a été fixée à 0,25 N.m. Ainsi les allures obtenues sont les suivantes :

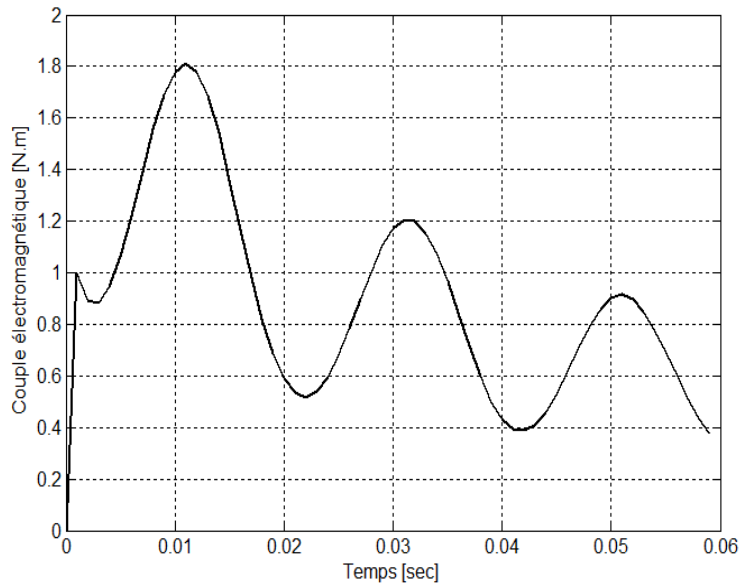


Figure. IV.27 : Couple électromagnétique de la (MSAP)

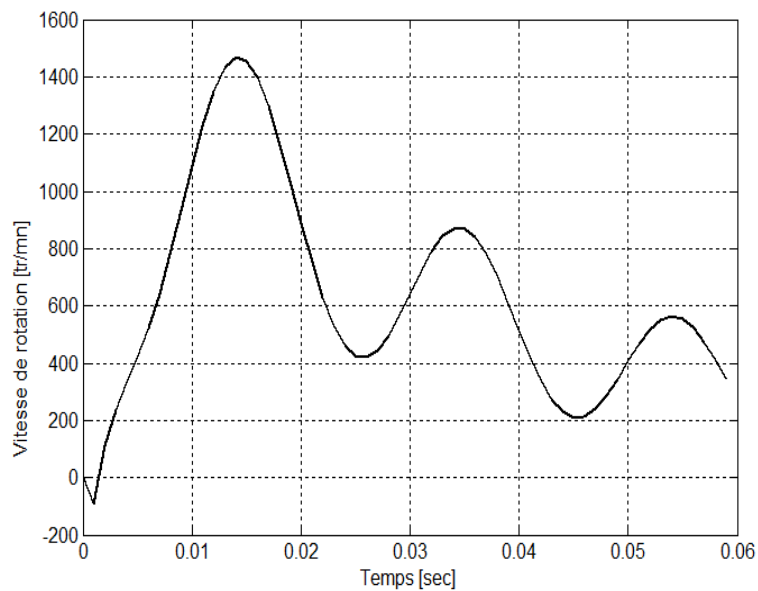


Figure. IV.28: Vitesse angulaire de la (MSAP)

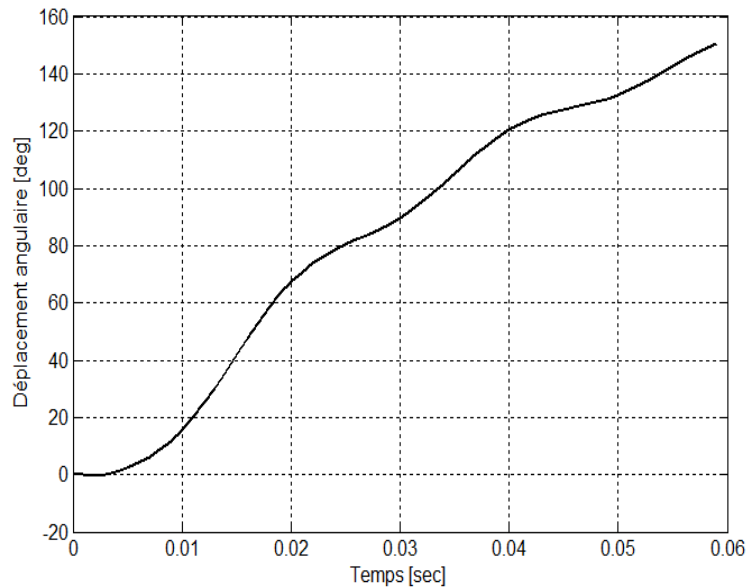


Figure. IV.29 : Déplacement angulaire de la (MSAP)

Au vue des résultats obtenus, on note les remarques suivantes :

- Les grandeurs électriques (courants dans les enroulements du stator) sont sensiblement les mêmes, bien que le courant est en moyenne 15% plus important). Cela est essentiellement du aux paramètres électriques qui présentent un régime transitoire très rapide (Figure. IV.25).
- Les allures des grandeurs mécaniques font ressortir que le régime transitoire et particulièrement influencé par les paramètres mécaniques. Les allures du couple et de la vitesse sont oscillatoires amorties. Cependant du fait de la saillance importante de la machine, et des imprécisions cruciales sur les valeurs des paramètres mécanique (moment d'inertie et coefficient de frottement), un mode oscillatoire subsiste même en régime permanent. Une identification précise des paramètres mécanique aurait certainement permit de conduire le fonctionnement jusqu'au terme d'une stabilisation des grandeurs dans une bande étroite.
- Les Figures. IV.26 et IV.29 relatives au couple électromagnétique, fait ressortir un couple plus important, aussi bien en régime transitoire qu'a l'approche du régime permanent.
- Les Figures. IV.27 et IV.30 relatives à la vitesse angulaire de rotation, fait ressortir une chute de la vitesse du fait du couple de charge, et ce aussi bien en régime transitoire qu'en régime permanent.

- Les Figures. IV.28 et IV.31 relatives au déplacement angulaire montre clairement, l'effet de ralentissement engendré par le couple de charge. n , fait ressortir une chute de la vitesse du fait du couple de charge.

Les temps de résolution très important pour un pas de temps de 1ms (15 mn en, moyenne par pas de temps), et les limitations en terme de ressources informatiques (PC : i3 CPU 2,13 GHz, 2Go RAM) sont les contraintes principales au vue desquels nous n'avons pas pu pousser les simulations vers plus de précisions avec des pas de temps relativement faibles. Des plus, on signal aussi que les incertitudes relatives aux paramètres électriques et particulièrement mécanique, ont fait que des améliorations qualitatives sont possibles.

Au final, qualitativement les résultats obtenus sont en accord avec ceux obtenus par d'autres auteurs [Ben 2015], [Jing 2004].

IV.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procéder aux simulations de la (MSAP) en régime statique, puis en régime transitoire électromagnétique, et finalement en régime dynamique Electromagnétique-mécanique. Les modèles présentés ainsi que les outils mis en œuvre sous environnement Matlab-PdeTool sont validés au regard des résultats obtenus en comparaisons avec ceux de la littérature scientifique. Les difficultés rencontrées sont essentiellement au niveau des ressources informatiques de calcul et de la connaissance précise des paramètres électriques et mécaniques.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale

Les champs électrique et magnétique sont à l'origine du fonctionnement électromagnétique des dispositifs électrotechniques en générale et des machines électrique tournante en particulier. Les phénomènes mis en jeu sont magnétostatique dans les régions non conductrices amagnétique (entrefer, arbre, carcasse,...) et ferromagnétiques (circuits magnétiques, aimants permanents,...) dont les propriétés magnétiques sont essentiellement non linéaires. Les régions conductrices alimentées en tension où sièges de courants induits peuvent êtres soit filaires permettant la non prise en compte implicite du terme induit dans l'équation magnétique, soit massifs avec terme induit. Cependant, le modèle magnétique ainsi établi présente deux inconnues : la grandeur magnétique (potentiel vecteur magnétique), et le courant électrique. Ainsi l'ajout d'une équation électrique du circuit formé par les régions conductrices (enroulements) est incontournable, ce qui conduit à résoudre simultanément le modèle couplé fort formé par les équations électriques et magnétiques. Les grandeurs annexes à calculer sont soit d'ordre énergétique, pour conduire une étude thermique de la machine, soit d'ordre mécanique à travers la résolution des équations du mouvement après la prédétermination du couple électromagnétique. Le modèle couplé électrique-magnétique est établi en utilisant la méthode des éléments finis. Ce processus de calcul séquentiel électromagnétique mécanique implémenté sous Matlab-PdeTool est conduit en pas à pas dans le temps et en régime non-linéaire.

Pour montrer la validité des modèles et outils implémentés, diverses applications sont réalisées. Les simulations en régime statique à une excitation par aimants et à excitation mixte aimants-enroulements. Pour le régime dynamique avec alimentation en tension deux cas ont été étudié : le premier cas concernant le régime électromagnétique transitoire avec a vitesse constante, le second cas finalité ultime du travail à porté sur le régime dynamique transitoire électromagnétique mécanique avec prise en compte du mouvement et des non-linéarités magnétiques. Les grandeurs d'intérêt sont : potentiel vecteur magnétique, induction magnétique, courants électriques, couples électromagnétique, vitesse de rotation et déplacement angulaire.

A la lumière des différentes applications réalisées, il ressort que :

La répartition de l'induction sur l'entrefer présente des fluctuations dus à la présence des dents. Ces fluctuations génèrent des harmoniques d'espace. Les niveaux d'inductions et donc l'état magnétique de la machine dépend de l'alimentation.

A partir de l'étude du régime transitoire électromagnétique, il apparait que même si qualitativement le comportement et les allures des courants sont similaires, quantitativement des écarts apparaissent notamment lorsque les courants deviennent importants. Par ailleurs, globalement les écarts ne sont pas significatifs pour des (MSAP) à aimants en ferrites avec des inductions rémanentes de l'ordre de 0,4. Cette constatation nous permet de s'affranchir de la lourdeur d'une résolution numérique en non-linéarité magnétique, en affectant au circuit magnétique portant les aimants une perméabilité

magnétique correspondante à l'induction rémanente des aimants, et de poser dans la région portant les enroulements une perméabilité magnétique dans la zone de saturation.

L'analyse du régime transitoire électromagnétique-mécanique fait ressortir en premier la validité du modèle mis en œuvre. Les résultats obtenus notamment pour les grandeurs mécaniques montrent l'aspect oscillatoire amorti, plus prononcé du fait des incertitudes sur les valeurs des paramètres (moment d'inertie et coefficient de frottement). La connaissance précise de ces paramètres qui impacte grandement la dynamique des transferts énergétiques permettra une amélioration des résultats.

Parmi les perspectives envisageables on peut citer :

La modélisation couplée électrique-magnétique-mécanique en vue de l'analyse du comportement électromagnétique de la MSAP en régime en régime de défauts : court-circuit inter-spines dans les enroulements du stator, fonctionnement en régime de tension déséquilibré, segmentation des aimants pour analyser les effets de la désaimantation partiel/totale locale et globale.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

**Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADEMIQUE**
Domaine : **Sciences et Technologies**
Filière : **Génie Electrique**
Spécialité : **Machines électriques**

Présenté par
Soraya NAIT LARBI

Thème

**Contribution à la modélisation
électromagnétique par éléments finis 2D
des moteurs synchrones à aimants
permanents en régime transitoire.**

Mémoire soutenu publiquement le Jeudi 22 Septembre 2016 devant le jury composé de :

M. Farid HOCINI

Maitre de conférences B, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Président

Melle Nadia RADJA

Maitre assistante A, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Encadreur

M. M'hemed RACHEK

Maitre de conférences A, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Co-Encadreur

Me. Nacera YASSA

Maitre assistante A, Université Mohand Oulhadj de Bouira, Examineur

Me. Salma CHERIF

Maitre assistante classe B, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Examineur

- [Bas, et al 2003] Jao Pedro A. BASTOS, Nelson SADOWSKI, « *ELECTROMAGNETIC MODELING BY FINITE ELEMENT METHODS.*» Marcel Dekker, Inc. All Rights Reserved. ISBN: 0-8247-4269-9, <http://www.dekker.com>
- [Ben 2015] ,Mansour BARDADI BENDAHA, « *Identification des paramètres d'une machine synchrone à aimant permanent en vue d'une intégration dans des simulateurs en temps réel.* » Mémoire de Magistère de l'Université d'Oran (USTO), 04/02 /2015, Algérie.
- [Bom 2009] Edouard BOMMÉ, « *Modélisation et Optimisation des Machines Electriques Discoïdes à Double Entrefer.* » Thèse de Doctorat de L'Institut polytechnique de Grenoble (Spécialité : Génie Electrique), 11 Décembre 2009, France.
- [Bou,et al 2016] Oussama Bouaziz, Imen Jaafar, Faouzi Ben Ammar, « *3D Finite Element Modelling of Single-Sided Axial-Flux Permanent-Magnet Synchronous Machine.*» 3rd International conference on Automation, Control, Engineering and Computer Science (ACECS 16) Proceeding of Engineering and technology, pp. 669-674, ISSN : 2356-5608
- [Cec 2005] Eric de CECCO, « *Contribution au développement d'un outil logiciel d'aide à la conception de systèmes électromagnétiques. Application aux machines synchrones à aimants permanents.* » Thèse de Docteur en sciences de l'université Paris sud XI, 13/07/2005, France.
- [Cle, et al] Stéphane CLENET, Francis PIRIOU, « *CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE EN BASSES FREQUENCES. MODELES NUMERIQUES PAR ELEMENTS FINIS.* » Editions Technique de l'Ingénieur (T.I). **D1075.**
- [Dog 2013] Hussein DOGAN, « *Méthodologie de Conception des Machines Synchrones à Aimants Permanents - Application au Véhicule Electrique avec Chargeur Rapide Embarqué.* », Thèse de Docteur de l'université de Grenoble, 11/07/2013, France.
- [Fei 2011] Weizhong FEI, « *Permanent Magnet Synchronous Machines with Fractional Slot and Concentrated Winding Configurations.* » PHD thesis, Cranfield University, Defence Academy College of Management and Technology, Dep of Eng and Applied Science, 2011.
- [Fel 1981] Mouloud FELIACHI, « *Contribution au calcul du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis en vue d'une modélisation dynamique de machines électriques.* » Thèse de Docteur Ingénieur, Conservatoire des arts et métiers, 21/01/1981, France.
- [Fla 1994] T. J. FLACK, and A. F. VOLSCHENK, « *Computational aspects of time stepping finite-element analysis using an air-gap element.*» in *Proc. Int. Conf. Electr. Mach (ICEM).*, Paris, France, 1994.
- [Fun 2007] Mariana Funieru, « *Simulation of Electromechanical Actuators Using the Finite Integration Technique.* » Doctor Ing Diss, Technischen Universitat Darmstadt, 11/06/2007
- [Ham, et al 1999] K. HAMEYER, R.BELMANS, « *NUMERICAL MODELLING AND DESIGN OF ELECTRICAL MACHINE AND DRIVES.*» WITPress 1999, ISBN 1 85312 626 8,
- [Hei 2002] Tanja HEIKKILA, « *Permanent magnet synchronous motor for industrial inverter application—analysis and design.*» PHD Dissertation. Lappeenranta University of Technology, ISBN 951-764-699-2, ISSN 1456-4491, Stockholm , 22/11/2002, Finland.
- [Jing 2004] Dong JING, « *Computational analysis of a permanent magnet synchronous machines using numerical techniques.* » PHD thesis, Department of electrical & computer engineering, National University of Singapore, 2004. Malesia.
- [Kut 2013] Sullivan KÜTTLER, « *Dimensionnement optimal de machines synchrones pour des applications de véhicules hybrides.* » Thèse de DOCTORAT de l'Université de Technologie de Compiègne, 24/05/2013, France.

- [Lac 2008] G.LACROUX, « *Les aimants permanents.*», Ed technique et documentation, 1989.
- [Lat 2006] Ramdane LATEB, « *Modélisation des machines asynchrones et synchrones à aimants avec prise en compte des harmoniques d'espace et de temps: Application à la propulsion marine par POD.* » Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 19/10/2006, France.
- [LeMen 1999] Yvonnick LE MENACH, « *Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques.* »Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1/02/1999, France.
- [Mei 2002] Stephan MEIER, « *Theoretical design of surface-mounted permanent magnet motors with field weakening capability.* » Master Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm 2001/2002
- [Mul 1999] Bernard MULTON et Jean BONAL, « *Les entraînements électromécaniques directs ; Diversité, contraintes et solutions.* » La conversion électromécanique directe. 4 février 1999 - ENS Cachan - SEE
- [N'ts 2011] Sesanga N'TSHUIKA, « *Optimisation de Gammes: Application à la Conception des Machines Synchrones à Concentration de Flux.* » Thèse de Doctorat de l'université de Grenoble, 25/03/2011, France.
- [Nu-Phy 2004] Hla NU PHYU, « *Numerical analysis of brushless permanent magnet DC motor using coupled systems.* » PHD Thesis, National University of Singapore, 2004. Malesia.
- [Oua 2006] Youcef OUAZIR, « *Contribution à la modélisation électromagnétique des machines à induction.* » Thèse de Doctorat d'Etat en Electrotechnique (Option : Machines Electriques), Ecole national polytechnique, 02/12/2006, Algérie.
- [Par 2005] Asko PARVIAINEN, « *Design of axial-flux permanent magnet low-speed machines and performance comparison between radial-flux and axial-flux machines.* » PHD Dissertation. Lappeenranta University of Technology, ISBN 952-214-030-9 (PDF), 19/04/2005, Finland
- [Pur 2006] Jussi PURANEN, « *Induction motor versus permanent magnet synchronous motor in motion control applications: a comparative study.* » PHD Dissertation. Lappeenranta University of Technology, ISBN 952-214-297-2 (PDF), ISSN 1456-4491, 5/12/2006, Finland.
- [Rad 2007] L. E. Radaorozandry, « *Conception et optimisation des machines synchrones avec des modèles analytiques en tenant compte de la saturation magnétique.*», Université Laval, Canada, 2007.
- [Rac 2007] M'hemed RACHEK, « *Modélisation par éléments finis de systèmes électromagnétiques en mouvement de structures tridimensionnelles. Application au Couplage Magnétique-Mécanique et au Contrôle Non-Destructif par Courants de Foucault.* » Thèse de Docteur es sciences de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 18/02/2007, Algérie.
- [Raz 1981] A. A. ABDEL-RAZEK, J. L. COULOMB, M. FELIACHI, and J. C. SABONNADIÈRE, « *The calculation of electromagnetic torque in saturated electric machines within combined numerical and analytical solution in the field equations.* » *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 17 (1981), pp.3250–3252.
- [Ren 1997] Zhuoxiang Ren, « *Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques tridimensionnels. Etude des formulations duales. Modélisation des systèmes électromagnétiques-mécaniques couplés.* », Habilitation à Diriger des Recherches (HDR), Université Paris Sud, le 24/03/1997, France.
- [Sab, et al] Jean-Claude SABONNADIÈRE, Jean-Louis COULOMB, « *CALCUL DES CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES.* » Editions Technique de l'Ingénieur (T.I). **D3020.**
- [Tonti 2001] Enzo Tonti, " *Finite Formulation in the of Electromagnetics Fields.* " Progress In Electromagnetics Research, PIER 32, pp. 1-44, 2001.

- [Bas, et al 2003] Jao Pedro A. BASTOS, Nelson SADOWSKI, « *ELECTROMAGNETIC MODELING BY FINITE ELEMENT METHODS.*» Marcel Dekker, Inc. All Rights Reserved. ISBN: 0-8247-4269-9, <http://www.dekker.com>
- [Ben 2015] ,Mansour BARDADI BENDAHA, « *Identification des paramètres d'une machine synchrone à aimant permanent en vue d'une intégration dans des simulateurs en temps réel.* » Mémoire de Magistère de l'Université d'Oran (USTO), 04/02 /2015, Algérie.
- [Bom 2009] Edouard BOMMÉ, « *Modélisation et Optimisation des Machines Electriques Discoïdes à Double Entrefer.* » Thèse de Doctorat de L'Institut polytechnique de Grenoble (Spécialité : Génie Electrique), 11 Décembre 2009, France.
- [Bou,et al 2016] Oussama Bouaziz, Imen Jaafar, Faouzi Ben Ammar, « *3D Finite Element Modelling of Single-Sided Axial-Flux Permanent-Magnet Synchronous Machine.*» 3rd International conference on Automation, Control, Engineering and Computer Science (ACECS 16) Proceeding of Engineering and technology, pp. 669-674, ISSN : 2356-5608
- [Cec 2005] Eric de CECCO, « *Contribution au développement d'un outil logiciel d'aide à la conception de systèmes électromagnétiques. Application aux machines synchrones à aimants permanents.* » Thèse de Docteur en sciences de l'université Paris sud XI, 13/07/2005, France.
- [Cle, et al] Stéphane CLENET, Francis PIRIOU, « *CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE EN BASSES FREQUENCES. MODELES NUMERIQUES PAR ELEMENTS FINIS.* » Editions Technique de l'Ingénieur (T.I). **D1075.**
- [Dog 2013] Hussein DOGAN, « *Méthodologie de Conception des Machines Synchrones à Aimants Permanents - Application au Véhicule Electrique avec Chargeur Rapide Embarqué.* », Thèse de Docteur de l'université de Grenoble, 11/07/2013, France.
- [Fei 2011] Weizhong FEI, « *Permanent Magnet Synchronous Machines with Fractional Slot and Concentrated Winding Configurations.* » PHD thesis, Cranfield University, Defence Academy College of Management and Technology, Dep of Eng and Applied Science, 2011.
- [Fel 1981] Mouloud FELIACHI, « *Contribution au calcul du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis en vue d'une modélisation dynamique de machines électriques.* » Thèse de Docteur Ingénieur, Conservatoire des arts et métiers, 21/01/1981, France.
- [Fla 1994] T. J. FLACK, and A. F. VOLSCHENK, « *Computational aspects of time stepping finite-element analysis using an air-gap element.*» in *Proc. Int. Conf. Electr. Mach (ICEM).*, Paris, France, 1994.
- [Fun 2007] Mariana Funieru, « *Simulation of Electromechanical Actuators Using the Finite Integration Technique.* » Doctor Ing Diss, Technischen Universitat Darmstadt, 11/06/2007
- [Ham, et al 1999] K. HAMEYER, R.BELMANS, « *NUMERICAL MODELLING AND DESIGN OF ELECTRICAL MACHINE AND DRIVES.*» WITPress 1999, ISBN 1 85312 626 8,
- [Hei 2002] Tanja HEIKKILA, « *Permanent magnet synchronous motor for industrial inverter application—analysis and design.*» PHD Dissertation. Lappeenranta University of Technology, ISBN 951-764-699-2, ISSN 1456-4491, Stockholm , 22/11/2002, Finland.
- [Jing 2004] Dong JING, « *Computational analysis of a permanent magnet synchronous machines using numerical techniques.* » PHD thesis, Department of electrical & computer engineering, National University of Singapore, 2004. Malesia.
- [Kut 2013] Sullivan KÜTTLER, « *Dimensionnement optimal de machines synchrones pour des applications de véhicules hybrides.* » Thèse de DOCTORAT de l'Université de Technologie de Compiègne, 24/05/2013, France.

- [Lac 2008] G.LACROUX, « *Les aimants permanents.*», Ed technique et documentation, 1989.
- [Lat 2006] Ramdane LATEB, « *Modélisation des machines asynchrones et synchrones à aimants avec prise en compte des harmoniques d'espace et de temps: Application à la propulsion marine par POD.* » Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 19/10/2006, France.
- [LeMen 1999] Yvonnick LE MENACH, « *Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques.* »Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1/02/1999, France.
- [Mei 2002] Stephan MEIER, « *Theoretical design of surface-mounted permanent magnet motors with field weakening capability.* » Master Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm 2001/2002
- [Mul 1999] Bernard MULTON et Jean BONAL, « *Les entraînements électromécaniques directs ; Diversité, contraintes et solutions.* » La conversion électromécanique directe. 4 février 1999 - ENS Cachan - SEE
- [N'ts 2011] Sesanga N'TSHUIKA, « *Optimisation de Gammes: Application à la Conception des Machines Synchrones à Concentration de Flux.* » Thèse de Doctorat de l'université de Grenoble, 25/03/2011, France.
- [Nu-Phy 2004] Hla NU PHYU, « *Numerical analysis of brushless permanent magnet DC motor using coupled systems.* » PHD Thesis, National University of Singapore, 2004. Malesia.
- [Oua 2006] Youcef OUAZIR, « *Contribution à la modélisation électromagnétique des machines à induction.* » Thèse de Doctorat d'Etat en Electrotechnique (Option : Machines Electriques), Ecole national polytechnique, 02/12/2006, Algérie.
- [Par 2005] Asko PARVIAINEN, « *Design of axial-flux permanent magnet low-speed machines and performance comparison between radial-flux and axial-flux machines.* » PHD Dissertation. Lappeenranta University of Technology, ISBN 952-214-030-9 (PDF), 19/04/2005, Finland
- [Pur 2006] Jussi PURANEN, « *Induction motor versus permanent magnet synchronous motor in motion control applications: a comparative study.* » PHD Dissertation. Lappeenranta University of Technology, ISBN 952-214-297-2 (PDF), ISSN 1456-4491, 5/12/2006, Finland.
- [Rad 2007] L. E. Radaorozandry, « *Conception et optimisation des machines synchrones avec des modèles analytiques en tenant compte de la saturation magnétique.*», Université Laval, Canada, 2007.
- [Rac 2007] M'hemed RACHEK, « *Modélisation par éléments finis de systèmes électromagnétiques en mouvement de structures tridimensionnelles. Application au Couplage Magnétique-Mécanique et au Contrôle Non-Destructif par Courants de Foucault.* » Thèse de Docteur es sciences de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 18/02/2007, Algérie.
- [Raz 1981] A. A. ABDEL-RAZEK, J. L. COULOMB, M. FELIACHI, and J. C. SABONNADIÈRE, « *The calculation of electromagnetic torque in saturated electric machines within combined numerical and analytical solution in the field equations.* » *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 17 (1981), pp.3250–3252.
- [Ren 1997] Zhuoxiang Ren, « *Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques tridimensionnels. Etude des formulations duales. Modélisation des systèmes électromagnétiques-mécaniques couplés.* », Habilitation à Diriger des Recherches (HDR), Université Paris Sud, le 24/03/1997, France.
- [Sab, et al] Jean-Claude SABONNADIÈRE, Jean-Louis COULOMB, « *CALCUL DES CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES.* » Editions Technique de l'Ingénieur (T.I). **D3020.**
- [Tonti 2001] Enzo Tonti, " *Finite Formulation in the of Electromagnetics Fields.* " Progress In Electromagnetics Research, PIER 32, pp. 1-44, 2001.