

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Automatique

Spécialité : Automatique et Systèmes

Présenté par

Lydia Sahmoun

Sabrina Hamama

Thème

Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire par la commande synergétique

Mémoire soutenu publiquement le 25/06/ 2024 devant le jury composé de :

M Sarah Kassim

MCB, UMMTO, Président

M Ahcene Hamoudi

MAB, UMMTO, Encadrant

M Said Djenoun

Professeur, UMMTO, Examineur

M Ouiza Adjemout

MAA, UMMTO, Examineur

Remerciements

Nous remercions ALLAH le tout puissant qui nous a donné le courage et la volonté de mener à bien notre travail.

Ainsi que nos familles de nous avoir soutenus et supporter pendant notre cursus universitaire.

Monsieur Hamoudi Ahcene

Vous nous avez fait l'honneur d'accepter de diriger et d'encadrer ce travail. Nous vous remercions pour votre disponibilité, vos conseils précieux et votre soutien pendant la réalisation de ce mémoire. Nous espérons avoir été à la hauteur de vos attentes. Nous garderons un excellent souvenir de votre extrême gentillesse. Nous n'aurons pas assez de ces quelques lignes pour vous exprimer nos sincères remerciements et notre profond respect.

Nous tenons à remercier également tous les enseignants du département Automatique qui ont assuré notre formation pendant notre cycle d'étude, et à tous les membres du jury qui ont accepté de d'examiner notre travail.

Nous souhaitons ainsi, remercier toutes les personnes et tous nos amis qui ont contribué de près et de loin à l'enrichissement de notre travail et notre épanouissement intellectuel.

Dédicaces

Je dédie ce travail

A Mes chers parents

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours. Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.

Mon très cher père, tu as toujours souhaité le meilleur pour moi, que dieu te garde pour nous. A ma très chère mère, Puisse Dieu, tout puissant, te préserver du mal, te combler de santé, de bonheur et te procurer longue vie.

A mes très chères sœurs "Samira et Mounia"

Merci pour votre présence et vos conseils pendant toutes ces années. Pour tout votre amour et pour être toujours là pour moi dans tous les domaines. Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon amour fraternel, de mon profond attachement et mes souhaits de succès et de bonheur pour chacune de vous. Jamais je n'oublierai l'appui que vous me prodiguez chaque fois que j'en ai besoin. Que Dieu vous protège.

A mes très chères amies et amis (Idris, Sarah et Yasmine)

Vous n'avez pas cessé de m'encourager, Je vous aime et que dieu vous garde pour moi .

À toutes les personnes qui me sont chères

A tous ceux dont l'oubli du nom n'est pas celui du cœur.

LYDIA

Dédicaces

Dédicace Tous d'abord je remercie Allah qui m'adonné la force et la volonté pour Accomplir ce modeste travail dieu merci. Je dédie ce travail : Aux personnes les plus chers a mon cœur maman et mon papa mes Profonds remerciement pour tout votre soutien morale et matériel ainsi Votre sacrifice indispensable pour le bon déroulement de mes études Sans votre aide je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui je vous en serai infiniment reconnaissante.

Mes sœurs

A Mes adorables sœurs "Radia, Zakia, Souad, Ourdia" d'avoir était toujours a mes coté et disponible

Mes frères

A mes frères adorées mes sources de bonheur Yousef , Rayane

A Mon Cher Mari

Un énorme merci pour ton soutien quotidien tu me donne chaque jour la Force d'avancer et tu as été toujours là au moment de détresse.

Et je remercie toute personnes qui nous à aider à réaliser ce travail de près Ou de loin

SABRINA

Résumé

La nature est intrinsèquement non linéaire. Il n'est donc pas surprenant que la plupart des systèmes que nous rencontrons dans le monde réel sont non linéaires. Et ce qui est intéressant, c'est que certains de ces systèmes non linéaires peuvent être décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire qui peuvent afficher une variété de comportements, y compris chaos

Récemment, une étude sur la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire a commencé à attirer l'attention de nombreux chercheurs et jusqu'à présent, une grande variété de techniques fractionnelles ont été utilisées pour concevoir un contrôle de synchronisation dans des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

Ce mémoire a abordé le problème de la synchronisation entre différents systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. En appliquant deux différentes méthodes de contrôle qui sont la commande par mode glissant et le contrôle synergétique. Des exemples illustratifs sont réalisés pour montrer l'efficacité de l'approche proposée.

Mots clés :

Chaos, systèmes d'ordre fractionnaire, synchronisation et contrôle synergétique.

Table des matières

Table des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Symboles et Notations	xiii
Introduction générale	1
1 Systèmes chaotiques d'ordre entier et d'ordre fractionnaire	5
1.1 Introduction	5
1.2 Historique	6
1.3 Systèmes dynamiques	6
1.3.1 Systèmes dynamiques continus	6
1.3.2 Systèmes dynamiques discrets	7
1.4 Le chaos :	7
1.4.1 Définition des systèmes chaotiques :	7
1.4.2 Exemples de systèmes chaotiques :	8
1.4.3 Propriétés des systèmes chaotiques :	11
1.5 Théorie de la dérivation non entière et systèmes chaotiques fractionnaire	15
1.5.1 Calcul fractionnaire	15
1.5.2 Fonctions spécifiques à la dérivation et l'intégration fractionnaire	16
1.5.3 Définitions des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire	17
1.5.4 Propriétés des dérivées fractionnaires et intégrales fractionnaires :	18
1.5.5 Exemple d'un système chaotique d'ordre fractionnaire continu :	19
1.5.6 Les domaines d'applications du calcul fractionnaire	20

1.5.7	Automatique	20
1.5.8	Électricité	21
1.5.9	Mécanique des milieux continus	21
1.5.10	Thermique	21
1.5.11	Traitement d'images	21
1.6	Conclusion :	21
2	Synchronisation des systèmes chaotiques	23
2.1	Introduction	23
2.2	Principe de la synchronisation	24
2.3	Synchronisation des systèmes chaotiques	24
2.4	Types de synchronisation	25
2.4.1	Synchronisation identique	25
2.4.2	Synchronisation retardée	26
2.4.3	Synchronisation couplage	26
2.4.4	Synchronisation de phase	26
2.4.5	Synchronisation inversé	27
2.5	Techniques et stratégies de synchronisation	28
2.5.1	Synchronisation basée sur des observateurs	28
2.5.2	Synchronisation basée sur la commande	31
2.6	Conclusion :	39
3	Application de la Commande Synergétique pour la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire	41
3.1	Introduction	41
3.2	Rappel de quelques propriétés des intégrales et des dérivées	42
3.3	La commande synergétique	42
3.3.1	Synthèse de la commande synergétique	42
3.3.2	Application de contrôleurs pour la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire	43
3.3.3	Comparaison entre le contrôle synergétique et le contrôle par mode glissant	54
3.4	Conclusion	56

Conclusion Générale **59**

Bibliographie **61**

Table des figures

1.1	Attracteur étrange de Lorenz	9
1.2	Attracteur étrange de Rössler	10
1.3	Sensibilité de l'état x de la fonction logistique de Lorenz aux conditions initiales .	13
1.4	L'aspect aléatoire du système de Lorenz	13
1.5	Diagramme de bifurcation de la fonction logistique	15
1.6	Évolution des états x_1 , x_2 et x_3 du système de Rössler d'ordre fractionnaire . . .	20
1.7	Sensibilité de l'état x du système de Rössler d'ordre fractionnaire aux conditions initiales	20
2.1	Système maître-esclave pour réaliser la synchronisation	25
2.2	Synchronisation par couplage	27
2.3	Synchronisation d'un système inversé	28
2.4	Principe de l'observateur	29
2.5	Modes de fonctionnement dans le plan	35
2.6	Commande appliquée au système	37
3.1	Erreurs de synchronisation avec la commande	46
3.2	La commande par mode glissant	46
3.3	Erreurs de synchronisation sans contrôle.	49
3.4	Erreurs de synchronisation avec la commande	49
3.5	Macro-variable	50
3.6	Contrôle d'entrée	50
3.7	Erreurs de synchronisation avec contrôle.	51
3.8	Macro-variable	51

3.9	Contrôle d'entrée	52
3.10	Erreurs de synchronisation sans contrôle	53
3.11	Erreurs de synchronisation avec le contrôle	54
3.12	Macro-variable	54
3.13	L'entrée de contrôle	55
3.14	Erreurs de synchronisation avec contrôle	55
3.15	Macro-variable	56
3.16	Contrôle d'entrée	56

Liste des tableaux

1.1	Exposants de Lyapunov et Dimensions	14
-----	---	----

Symboles et Notations

\mathbb{R} :	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}_+ :	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
\mathbb{R}^n :	Espace vectoriel de dimension n dans l'ensemble des réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$:	Ensemble des matrices réelles de dimensions $n \times m$
\mathbb{C} :	Ensemble des nombres complexes
t :	Variable temporelle
$x \in \mathbb{R}$:	Variable d'état
x^T :	Transposée du vecteur x
$ x $:	Valeur absolue de x
$\ x\ _2$:	Norme euclidienne de x
$\dot{x}(t)$:	Dérivée temporelle de l'état x
A^T :	Transposée de la matrice A
I_n :	Matrice d'identité de dimension $n \times n$
\mathcal{C} :	Matrice de commandabilité
\mathcal{O} :	Matrice d'observabilité
$L_f h$:	Dérivé de Lie de h dans la direction de f
τ :	Retard positif

$I^k f(t) :$	$(k \in \mathbb{N})$, L'intégration répétée k fois de la fonction $f(t)$
$I^\alpha f(t) :$	$(\alpha \in \mathbb{R})$, L'intégration non entière d'ordre α de la fonction $f(t)$
${}^{RL}D_t^\alpha f(t) :$	Dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$ selon la définition de Riemann-Liouville
${}^C D_t^\alpha f(t) :$	Dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$ selon la définition de Caputo
$D^\alpha :$	Opérateur de dérivation d'ordre non entier α
$\Gamma :$	Fonction Gamma d'Euler
$\binom{\alpha}{j} :$	$(\alpha \in \mathbb{R}_+)$, désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels
$D^\alpha f(kh) :$	désigne la valeur de la $\alpha^{\text{ème}}$ dérivée de $f(t)$ à l'instant kh
$E_\alpha :$	Fonction Mittag-Leffler
$D^\alpha x :$	$(x \in \mathbb{R}^n)$, tous les éléments du vecteur $x(t)$ sont dérivés au même ordre α
$D^{(\alpha)}(x) :$	$(\alpha \in \mathbb{R}_+^n, x \in \mathbb{R}^n)$, le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur $x(t)$ est dérivé à la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur α

Introduction Générale

Depuis des décennies, les systèmes dynamiques non linéaires suscitent un grand intérêt dans de nombreux domaines scientifiques en raison de leur capacité à révéler des comportements complexes et variés. Parmi ces comportements fascinants, le chaos se distingue particulièrement. Les concepts fondamentaux du chaos ont non seulement amélioré notre compréhension des systèmes complexes, mais ont également ouvert la voie à de nouvelles applications pratiques dans des domaines aussi divers que la physique, la biologie, l'ingénierie, et bien d'autres.

Le chaos est le concept central sur lequel se fonde ce mémoire. Depuis sa découverte, le chaos a été perçu comme un comportement incontrôlable et imprévisible. Il est considéré comme incontrôlable parce qu'une petite perturbation peut amener le système à un état complètement différent de l'initial. De plus, il est imprévisible car une légère variation des conditions initiales ou des paramètres du système entraîne une évolution distincte de la trajectoire du système. [1]

Tout comme la théorie du chaos, qui a révolutionné notre vision en permettant d'interpréter et d'exploiter différemment certains phénomènes physiques autrefois considérés comme incohérents, la théorie du calcul fractionnaire, basée sur la généralisation des dérivées d'ordres entiers à des ordres non entiers, possède un potentiel énorme pour changer la manière dont nous percevons, décrivons et contrôlons la nature qui nous entoure. La théorie du calcul fractionnaire remonte à plus de trois siècles. Elle repose essentiellement sur la théorie des systèmes d'ordre entier, avec laquelle elle partage une histoire presque aussi longue.

Actuellement, l'application des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire constitue une nouvelle direction de recherche prometteuse en sciences non linéaires, notamment dans le domaine de la communication sécurisée. Il a été démontré que des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire bien connus présentent des bifurcations complexes et des phénomènes chaotiques étranges. Par

exemple, le système chaotique d'ordre fractionnaire de Lorenz, le circuit de Chen et le circuit de Chua en sont des illustrations marquantes. [2] Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre branche des systèmes dynamiques suscite un vif intérêt parmi les chercheurs : la synchronisation.

Ce phénomène est devenu un sujet de recherche active, connaissant des avancées remarquables dès le début du *XIX*ème siècle. En 1990, Carroll et Pecora, pionniers de la synchronisation, ont proposé l'idée d'utiliser un signal chaotique entre deux systèmes dynamiques identiques. Le premier système, produisant le signal chaotique, est appelé système émetteur (maître), tandis que le second, recevant ce signal, est appelé système récepteur (esclave). [3]

La synchronisation des systèmes chaotiques représente un défi majeur en raison de leur extrême sensibilité aux conditions initiales. Deux trajectoires débutant avec des conditions initiales légèrement différentes divergent de manière exponentielle dans leur évolution à long terme [4]. Dans la littérature spécialisée, diverses approches de synchronisation ont été étudiées, parmi lesquelles la commande à mode glissant se distingue. Cette méthode est employée dans plusieurs techniques de contrôle afin d'atteindre une synchronisation efficace.

La commande par mode glissant se distingue par son mode de fonctionnement unique, caractérisé par une précision fine, une réponse dynamique rapide, une stabilité remarquable, une conception et une implémentation simples, ainsi qu'une grande robustesse face aux variations paramétriques, aux erreurs de modélisation et à certaines perturbations externes.

Cependant, malgré les avancées de cette technique de commande, sa pleine utilisation a longtemps été entravée par le phénomène de réticence, communément appelé chattering. En effet, la commande par mode glissant, bien que efficace en théorie, engendre en pratique des commutations à haute fréquence, susceptibles d'induire des dynamiques non souhaitées pouvant perturber, voire endommager le système étudié.

Une alternative robuste à cette approche, tout aussi efficace, est la commande synergétique. Conçue sur le même principe que la technique de commande par mode glissant, la commande synergétique vise à imposer une dynamique prédéfinie par le concepteur, tout en évitant les inconvénients du chattering.

Cette méthode robuste repose sur le principe de guider le système sous contrôle à suivre une trajectoire prédéterminée. En utilisant une loi de commande continue et une macro-variable, souvent une combinaison simple de variables d'état, la commande synergétique se prête mieux

à une implémentation en temps réel. Son principal avantage réside dans le fait que, une fois que le système atteint un état stable, sa dynamique demeure insensible à une certaine classe de variations de paramètres et aux perturbations externes. [5], [6]]

Ce mémoire se focalise sur l'étude de la Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire par la commande synergétique. Pour une meilleure clarté, nous avons jugé indispensable de structurer notre travail en trois chapitres, qui sont organisés comme suit :

Le premier chapitre offre une revue approfondie des systèmes dynamiques et de la théorie du chaos. Nous y définirons une série de concepts clés qui nous permettront de mieux appréhender le phénomène du chaos. Nous illustrerons également ces notions par des exemples de systèmes chaotiques, avant d'explorer en détail les propriétés caractéristiques du chaos. La deuxième partie de ce chapitre est dédiée à l'étude de la théorie du calcul fractionnaire. Nous y présentons la notion de dérivation fractionnaire, les intégrales associées ainsi que leurs propriétés, en mettant en lumière quelques exemples de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire continu.

Dans le deuxième chapitre, nous explorons la synchronisation des systèmes chaotiques, en abordant le principe général de synchronisation ainsi que ses différents types, telles que la synchronisation identique, retardée, par couplage, de phase et inversée. En outre, nous examinons les techniques et stratégies de synchronisation, notamment celles reposant sur des observateurs et des systèmes de commande. Notre attention sera particulièrement portée sur la commande par modes glissants.

Le troisième chapitre présente la conception de l'approche synergétique. À cet effet, une technique de commande synergétique ainsi qu'une approche synergétique à temps fixe sont synthétisées dans le cadre de ce travail. Ensuite, nous appliquerons cette méthode de commande à deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire identiques mais avec des conditions initiales différentes, ainsi qu'à deux autres systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire différents. Ceci dans le but d'illustrer les performances de la méthode proposée et de démontrer l'efficacité de ce travail. Nous présenterons quelques résultats de simulations réalisées et procéderons à une comparaison avec la méthode à mode glissant.

Enfin, nous conclurons par une synthèse générale et aborderons quelques perspectives futures.

Chapitre 1

Systemes chaotiques d'ordre entier et d'ordre fractionnaire

1.1 Introduction

Le terme "chaos" suscite un vif intérêt depuis une vingtaine d'années. Les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire représentent une généralisation des systèmes dynamiques classiques en introduisant le concept de dérivée et d'intégrale fractionnaire. Ils présentent des caractéristiques similaires au chaos classique, mais avec des propriétés supplémentaires liées à l'ordre fractionnaire. Le but de ce chapitre est de présenter de manière synthétique et unifiée les systèmes chaotiques, en abordant des éléments sur la théorie du calcul fractionnaire et des systèmes à dérivée d'ordre non entier. Ce travail sera donc structuré de la manière suivante :

Dans cette première partie, nous nous limitons à définir brièvement les systèmes dynamiques non linéaires. Ensuite, nous rappelons l'histoire ainsi que quelques définitions utiles à la compréhension du terme "chaos". Au cours de cet exposé, nous essaierons de faire comprendre l'origine de ce comportement, notamment en abordant les différents types de systèmes chaotiques (continus et discrets). Nous mettons un accent particulier sur les systèmes chaotiques à temps continu. Dans le but d'organiser les idées, nous développerons quelques exemples célèbres qui servent à caractériser le comportement chaotique. Enfin, nous présenterons de manière succincte quelques caractéristiques permettant de comprendre les points marquants d'un système chaotique.

Dans la deuxième partie, nous présenterons une étude des systèmes chaotiques fractionnaires,

où nous citerons certaines fonctions de base utiles. Ces dernières jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire, en passant par les différentes définitions d'intégrations et de dérivations fractionnaires. Pour clore cette deuxième partie, nous aborderons les domaines d'application du calcul fractionnaire.

1.2 Historique

La théorie du chaos a pris son essor dans les années 1980, principalement grâce aux contributions des physiciens et mathématiciens étudiant les phénomènes dynamiques tels que la turbulence des fluides et les oscillations de température. Cette science se distingue des autres en ce sens qu'elle étudie les phénomènes dans leur globalité, tentant de comprendre un phénomène dans son ensemble et son interaction avec d'autres phénomènes [7]. L'étude des phénomènes chaotiques, appelée dynamique, est assez récente, remontant seulement aux années 1960. Henri Poincaré fut le premier à s'intéresser à la non-prévisibilité des systèmes déterministes tels que le mouvement des planètes en 1899. Cependant, c'est Edward Lorenz qui, dans les années 1960, découvrit les figures cachées du chaos en modélisant un système climatique simplifié, montrant ainsi l'effet papillon. De nombreux autres chercheurs ont contribué à consolider la théorie du chaos, convergeant peu à peu vers la fin des années 1970 [8].

1.3 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système dont l'état change avec le temps. Mathématiquement, il consiste en un espace d'états et une loi appelée dynamique qui permet de déterminer l'état futur en fonction de l'état présent [9]. On distingue deux types de systèmes dynamiques : continus et discrets.

1.3.1 Systèmes dynamiques continus

Un système dynamique continu désigne un système dont l'évolution dans le temps est décrite de manière continue par des équations différentielles sans discontinuité ni saut. Les états du système varient de manière continue sur un intervalle non disjoint, déterminé par les variables d'état et les paramètres du système. Ce dernier est caractérisé par un ensemble d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, généralement sous la forme suivante :

$$\dot{X} = f(t, X) \quad (1.1)$$

où :

- $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.
- $X(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état de dimension n .
- $t \in \mathbb{R}^+$ désigne le temps.

1.3.2 Systèmes dynamiques discrets

Un système dynamique discret est un modèle mathématique décrivant l'évolution d'un système avec des pas de temps discrets :

$$X(k+1) = g(k, X(k)) \quad (1.2)$$

où :

- $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système en temps discret.

1.4 Le chaos :

Il existe plusieurs définitions possibles du chaos. Ces définitions adoptées d'une manière universelle ne sont pas toutes équivalentes, mais elles convergent vers certains points communs caractérisant ainsi le chaos. On pourrait dire que c'est un phénomène qui peut apparaître dans les systèmes dynamiques non linéaires, ou simplement linéaires par morceaux. Ils sont caractérisés par une évolution qui semble aléatoire et un aspect fondamental d'instabilité appelé sensibilité aux conditions initiales. On cherche donc si le système converge vers un état stationnaire à long terme, ou si le comportement à long terme du système dépend des conditions initiales. [10]

1.4.1 Définition des systèmes chaotiques :

Sont des systèmes dont les trajectoires évoluent dans une région bornée. Ces trajectoires qui restent denses dans cette région sont très sensibles aux conditions initiales. Les solutions des équations différentielles non linéaires ne peuvent pas être calculées avec exactitude analytiquement car il n'existe pas de méthode de résolution analytique pour ces équations sauf pour certaines classes particulières. [11]

1.4.2 Exemples de systèmes chaotiques :

Les systèmes chaotiques célèbres sont peu nombreux. Dans cette partie, nous exposons les exemples les plus connus et les plus étudiés des systèmes chaotiques.

1.4.2.1 Systèmes chaotiques à temps continu

Pour les systèmes chaotiques à temps continu, on peut considérer : le système de Lorenz, le système de Rössler et l'oscillateur de Chua.

1.4.2.1.1 Système de Lorenz :

L'équation de Lorenz est formulée par le météorologue américain du même nom pour la première fois en 1963. Elle résulte alors d'une grande simplification de l'équation de Navier-Stokes, qui décrit le mouvement des fluides newtoniens et est réputée comme étant très difficile à résoudre. Les importantes approximations réalisées pour aboutir à l'équation de Lorenz sont telles qu'elle n'en fait plus vraiment de sens physique, mais elle présente un réel intérêt pour les mathématiques. À partir de simulations numériques, Lorenz va rapidement découvrir deux caractéristiques majeures de son équation : la grande sensibilité aux conditions initiales des solutions et l'étrange forme de "papillon" prise par toutes les solutions, que l'on appellera par la suite "attracteur étrange". C'est ce qu'il publiera dès 1963 [12]. Mais l'engouement des autres mathématiciens pour cette découverte ne naîtra que en 1972, lorsqu'il tiendra une conférence devant l'American Association for the Advancement of Science au titre provocateur : « Predictability : Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas? » [13]. L'idée de ce titre est que des différences de conditions initiales d'atmosphères de l'ordre d'un battement d'aile de papillon peuvent générer des différences de l'ordre d'une tornade sur le résultat final. Le modèle mathématique auquel il a donné son nom est représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (1.3)$$

Caractéristiques générales de l'équation de Lorenz :

- x : Caractérise l'intensité du mouvement de convection.
- y : Caractérise le gradient horizontal de température.

– z : Caractérise le gradient vertical de température.

Ainsi chaque point $(x; y; z)$ de l'espace décrit les conditions dans lesquelles se situe une atmosphère donnée. Elle fait intervenir trois paramètres :

- σ : nombre de Prandtl (qui vaut le rapport entre la quantité de mouvement et la quantité de chaleur).
- ρ : Rapport entre le nombre de Rayleigh (qui caractérise le transfert de chaleur au sein d'un fluide) et le nombre de Rayleigh critique.
- β : Taille typique du système.

On applique cet exemple avec les paramètres suivants : $\sigma = 10$; $\rho = 28$; $\beta = 8/3$. Ce sont les valeurs utilisées par Lorenz lorsqu'il a observé pour la première fois un phénomène chaotique dans ce système. Avec les conditions initiales : $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $z_0 = 20$.

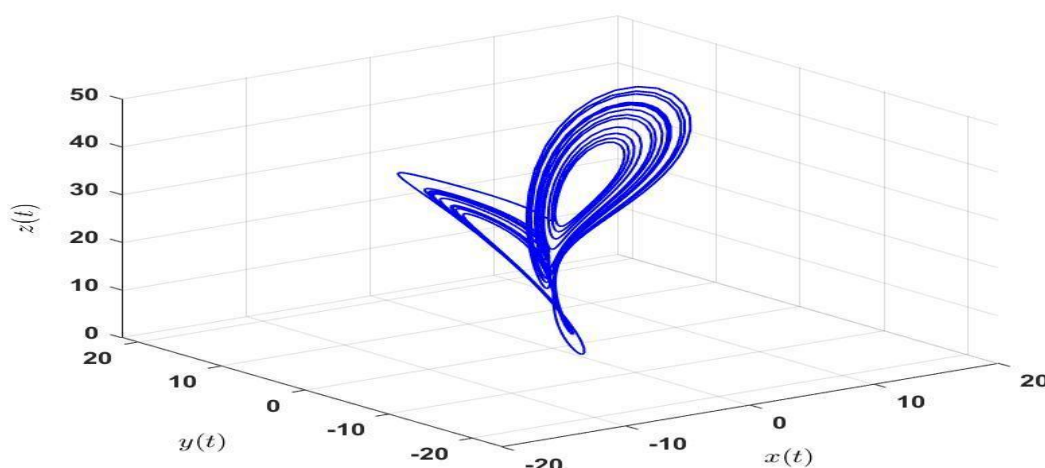


FIGURE 1.1: Attracteur étrange de Lorenz

Système de Rössler :

Ce système, qui a été proposé en 1976 par le biochimiste allemand, Otto Rössler, est lié à l'étude de l'écoulement des fluides. Ce dernier a essayé de construire un attracteur chaotique semblable à celui de Lorenz, mais plus facile à analyser. Il a tenté de concevoir le système le plus simple possible, capable de générer du chaos [14]. Le modèle dynamique résultant est donné ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_2 + x_3) \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \end{cases} \quad (1.4)$$

On applique cet exemple avec les paramètres suivants : $a = 0.5$; $b = 0.2$; $c = 10$. La figure 1.2 représente l'attracteur étrange de Rössler

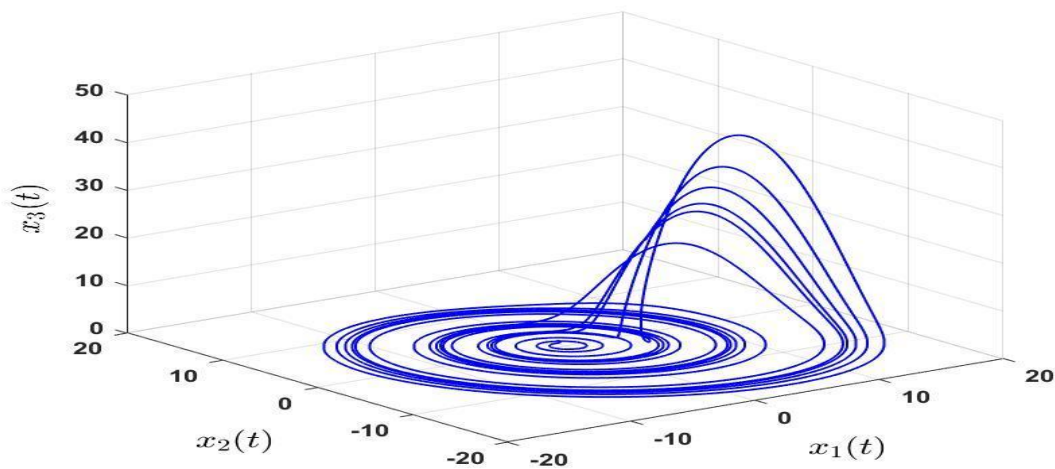


FIGURE 1.2: Attracteur étrange de Rössler

Circuit de Chua :

Le circuit de Chua est devenu célèbre au milieu des années 1980, car il constitue un générateur de chaos électronique assez simple. Il comporte deux résistances, deux condensateurs, une inductance, et une résistance non linéaire, appelée diode de Chua. Ce simple circuit électrique, développé par Leon Chua, possède une dynamique chaotique. La dynamique de ce circuit peut être décrite par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{C_1 R}(x_1 - x_2) + \frac{1}{C_1} f(x_1) \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C_2 R}(x_1 - x_2) + \frac{1}{C_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L} x_2 + \frac{R_0}{L} x_3 \end{cases} \quad (1.5)$$

Avec $f(x_1) = G_b x_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|x_1 + E| - |x_1 - E|)$ et $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ après quelques transformations simples. Le modèle sans dimension du circuit de Chua prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + \alpha y - \alpha f(x) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z \end{cases} \quad (1.6)$$

Où α , β et σ sont des constantes et f représente la fonction caractéristique de la diode de Chua, qui est donnée par :

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|)$$

Avec $a < b < 0$ qui sont deux constantes. [15]

1.4.2.2 Systèmes chaotiques à temps discret :

Système Hénon :

Le système de Hénon est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien Michel Hénon. Il s'agit d'un système qui introduit des itérations dans le plan. Ces itérations sont définies par les relations suivantes : [16]

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} &= x_k \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.4.3 Propriétés des systèmes chaotiques :

Il existe un ensemble de propriétés qui résument les caractéristiques observées dans les systèmes chaotiques. Elles sont considérées comme des critères mathématiques qui définissent le chaos. Les plus connues sont :

1.4.3.1 Non-linéarité :

L'analyse détaillée des systèmes dynamiques non linéaires démontre de manière évidente que la caractéristique fondamentale du chaos exclut la possibilité d'un système linéaire d'être chaotique.

1.4.3.2 Déterminisme :

Le déterminisme signifie que le système est non aléatoire et ne possède aucun paramètre ou entrée stochastique. Cette propriété est propre à tous les systèmes dont l'évolution est définie par un ensemble d'équations différentielles ou d'équations aux différences. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. À l'opposé, et bien qu'ils paraissent, à première vue, aléatoires, les systèmes dynamiques chaotiques sont régis par certaines équations rendant compte du phénomène, mais dont les solutions sont sensibles aux conditions initiales [17]. Le comportement irrégulier observé dans les systèmes chaotiques est dû à la non-linéarité intrinsèque du système plutôt qu'au bruit. [18]

1.4.3.3 Sensibilité aux conditions initiales :

Parmi les caractéristiques qui identifient un comportement chaotique, on a la sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales, explicitée par Lorenz dans sa célèbre citation : "l'effet papillon". Leur propriété consiste en ce qu'une légère variation des conditions initiales sur un système chaotique entraîne deux trajectoires qui sont initialement voisines, puis qui divergent exponentiellement. En d'autres termes, une petite modification des conditions initiales conduit rapidement à un état (du système) tout à fait différent, ce qui revient à dire qu'une faible incertitude sur les données initiales, ou la moindre erreur, et la simple imprécision peuvent conduire rapidement à une incertitude totale sur les résultats, et par conséquent, de faire une prédiction autre que statistique sur l'avenir à long terme du système. [19] Ce fait, peu intuitif, est d'une importance considérable car il montre qu'un système déterministe peut avoir un comportement imprévisible, et il est impossible de prévoir son comportement à long terme [20].

Illustrons ce phénomène de sensibilité aux conditions initiales par une simulation numérique du système de Lorenz. Le système de Lorenz montre un comportement chaotique pour $\sigma = 10$; $\rho = 28$; $\beta = 8/3$.

Les conditions initiales sont choisies comme ceci : $x_1(0) = 0$; $y_1(0) = 1$; $z_1(0) = 20$; $x'_1(0) = 0.01$; $y'_1(0) = 1$; $z'_1(0) = 20$.

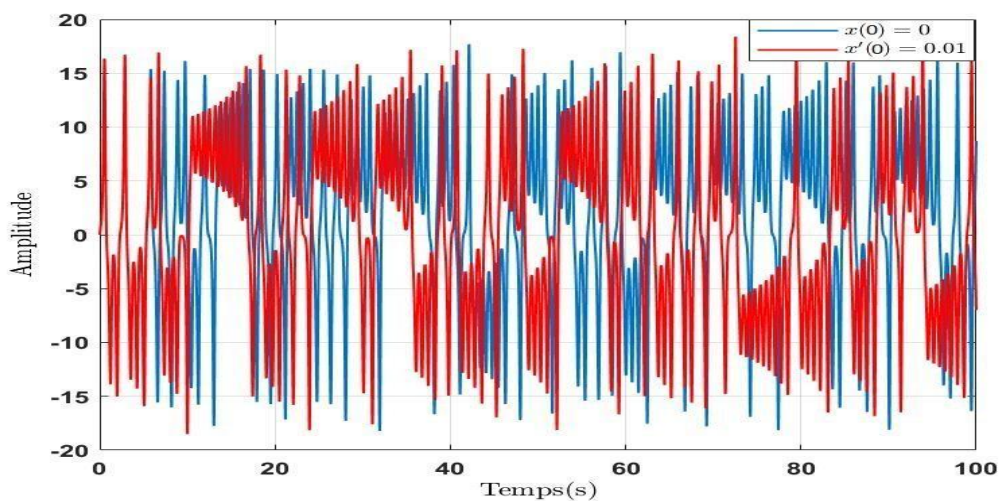


FIGURE 1.3: Sensibilité de l'état x de la fonction logistique de Lorenz aux conditions initiales

1.4.3.4 Aspect aléatoire :

Bien que les systèmes chaotiques soient déterministes, tous les états d'un système chaotique présentent des aspects aléatoires, comme on peut l'observer dans la figure suivante.

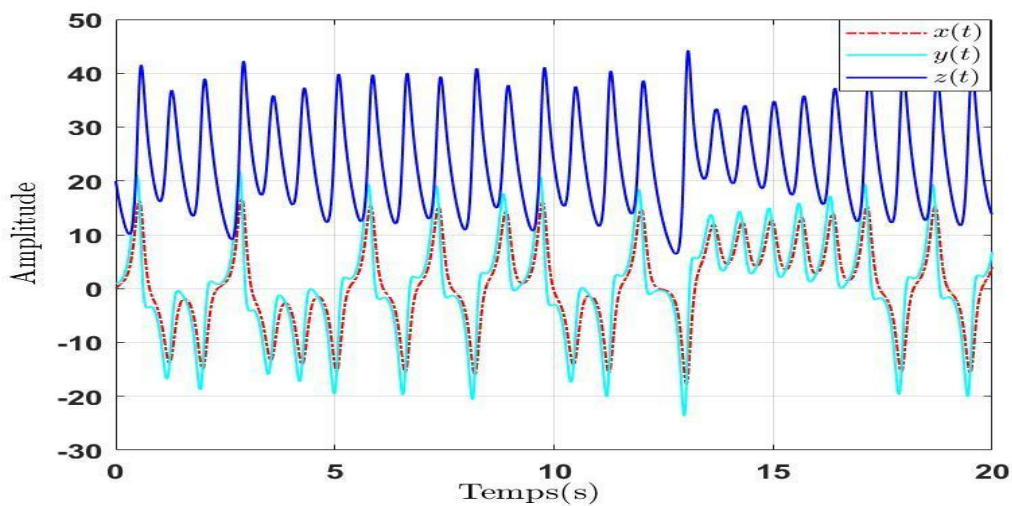


FIGURE 1.4: L'aspect aléatoire du système de Lorenz

1.4.3.5 Attracteur étrange :

Les trajectoires d'un système dynamique chaotique sont attirées vers un attracteur dit étrange [21]. Ce dernier est caractérisé par :

- Un volume nul.
- Une séparation exponentiellement rapide de trajectoires initialement proches.
- Une dimension souvent fractale (non entière). [22]

1.4.3.6 Exposants de Lyapunov :

Les exposants de Lyapunov sont des coefficients qui permettent de mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle. Par définition, un exposant de Lyapunov est le taux exponentiel moyen de divergence ou de convergence de trajectoires voisines de l'espace des phases. Il mesure le taux local d'expansion de l'espace dans lequel l'expansion est maximale, c'est-à-dire en général vers l'attracteur.

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possédera toujours au moins trois exposants de Lyapunov (voir Tableau 1.1).

État	Attracteur	Dimension	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_i \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	Cercle	1	$\lambda_i = 0; \lambda_i \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre K	K-Tore	K	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0; \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{1k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0; \sum_{k=0}^n \lambda_k < 0$
Hyper chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0; \sum_{k=0}^n \lambda_k < 0$

TABLE 1.1: Exposants de Lyapunov et Dimensions

1.4.3.7 Diagramme de bifurcation :

Le diagramme de bifurcation résume toute l'information sur la bifurcation et permet de comprendre de ce fait comment évolue le système. C'est un outil efficace pour évaluer rapidement toutes les solutions possibles d'un système en fonction des variations d'un de ses paramètres. La construction de diagramme de bifurcation d'un système autonome n'est pas très difficile, il s'agit d'un graphe dont le paramètre d'évolution du système dynamique est porté en abscisse, et dont les points d'une projection sur un axe d'une section de Poincaré associée à un plan Q

et au paramètre en abscisse sont portés en ordonnées. Puis le chaos est observé par rapport aux valeurs du paramètre d'évolution qui admettent un nombre infini de points en ordonnée. [23]

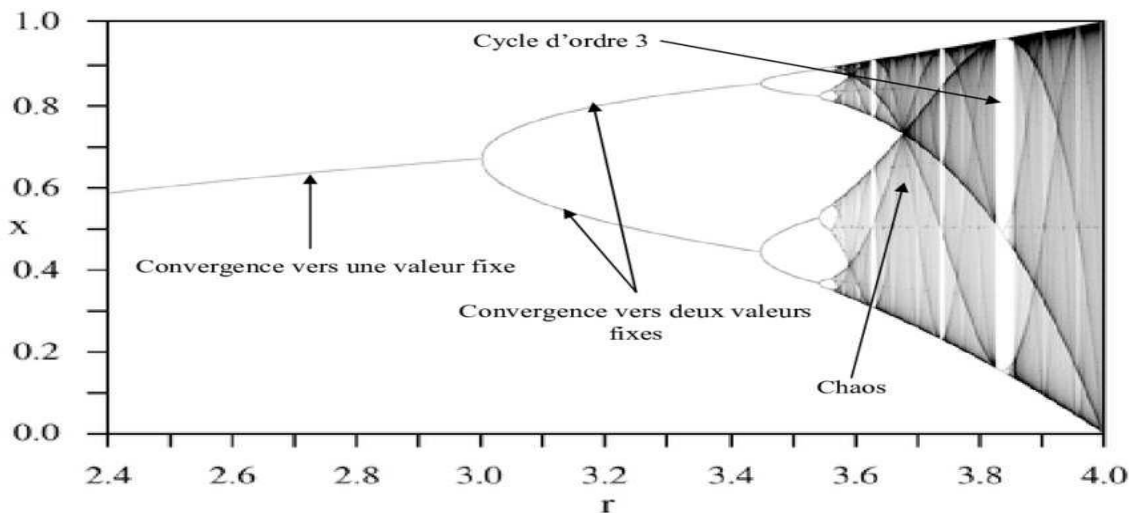


FIGURE 1.5: Diagramme de bifurcation de la fonction logistique

1.5 Théorie de la dérivation non entière et systèmes chaotiques fractionnaire

1.5.1 Calcul fractionnaire

Un système est dit fractionnaire s'il est modélisé par des équations différentielles d'ordre non entier (fractionnaire). Ces équations sont basées sur la notion de dérivation et d'intégration d'ordre non entier [24]. Si les ordres de dérivation de l'équation différentielle fractionnaire qui régit le système sont des multiples entiers de l'ordre de base α [25], le système est dit commensurable ; sinon, le système est non commensurable.

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier ${}_a D_t^\alpha$, également appelé opérateur intégral-différentiel. Cet opérateur est défini comme suit [26] :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \text{si } \alpha \succ 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \text{si } \alpha \prec 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Avec

α : l'ordre de dérivation

a et t : sont les bornes d'intégrales

1.5.2 Fonctions spécifiques à la dérivation et l'intégration fractionnaire

Ces fonctions représentent les outils de base du calcul fractionnaire :

Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante [27] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.9)$$

Où $z \in \mathbb{C}$; $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

Une propriété importante de $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.10)$$

En particulier, la fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction Bêta

La fonction Bêta est une fonction importante en calcul fractionnaire et peut être liée à la fonction Gamma par la relation suivante [28] :

$$\beta(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (1.11)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$.

Fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle et qu'est souvent utilisée dans la résolution des problèmes physiques décrits par des équations à dérivée ou intégrale fractionnaires [29]. Elle est définie comme suit :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.12)$$

1.5.3 Définitions des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire

Différentes définitions de l'intégration et dérivation d'ordre fractionnaire ont été proposées durant le développement de la théorie du calcul fractionnaire. Certaines sont directement généralisées à partir du cas entier. Dans ce qui suit, nous présenterons les définitions les plus utilisées par la communauté scientifique :

Définition de Riemann-Liouville (RL)

L'intégrale dite de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f de borne inférieure t_0 est donnée par :

$${}^{RL}I_t^\alpha f(t) = {}_{t_0}D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.13)$$

Tandis que la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$ est définie comme étant la dérivée d'ordre entier n de l'intégrale d'ordre non entier $(n - \alpha)$, soit :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}^{RL}I_t^{n-\alpha} f(t)) \quad (1.14)$$

Avec n est un nombre entier, sous la condition $(n - 1 < \alpha < n)$.

En utilisant la définition de l'intégral(1.13). La dérivée d'ordre α de f s'écrit :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} dt \right) \quad (1.15)$$

Définition de Grünwald-Letnikov

La définition au sens de Grünwald-Letnikov est une généralisation de la définition de la dérivée d'ordre entier n à une dérivée d'ordre réel α ou toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle à travers la fonction Gamma Euler.

Soit la dérivée d'ordre 1 donnée par :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1.16)$$

La dérivée d'ordre 2 conduit à :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (1.17)$$

Une première généralisation à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ est alors donnée par :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \left((-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \right) \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.18)$$

La généralisation de la définition de la dérivée (1.18) à des ordres de dérivation non entiers, donne :

$${}_t D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-t_0}{h} \right]} \left((-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \right) \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (1.19)$$

Où $[\cdot]$ est la partie réelle. La notation $\binom{\alpha}{k}$ désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha - k + 1)} \quad (1.20)$$

Avec :

$$\binom{\alpha}{k} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha - k = -1, -2, -3, \dots \quad (1.21)$$

Selon la valeur de α qui peut être positive ou négative, l'opérateur ${}_t D_t^\alpha$ correspond respectivement à une dérivation ou intégration.

1.5.4 Propriétés des dérivées fractionnaires et intégrales fractionnaires :

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes :

1. Si $f(t)$ est une fonction analytique en t alors sa dérivée fractionnaire $D_\alpha^t f(t)$ est une fonction analytique en t et α .
2. Pour définir un opérateur d'ordre fractionnaire il est nécessaire de connaître les deux paramètres α et t .
3. Pour $\alpha = n$, où n est un nombre entier, l'opération ${}_t D_t^\alpha f(t)$ produit le même résultat que la dérivation classique d'ordre entier.
4. Pour $\alpha = 0$, l'opérateur D_t^α est l'opérateur identité.

$$D_t^\alpha f(t) = f(t) \quad (1.22)$$

5. La dérivation et l'intégration fractionnaires sont des opérations linéaires.

$$D_t^\alpha(\gamma f(t) + \delta g(t)) = \gamma D_t^\alpha f(t) + \delta D_t^\alpha g(t) \quad (1.23)$$

Avec f et g sont deux fonction continues, γ et δ sont des constantes.

6. La dérivée d'ordre fractionnaire α de l'intégrale de même ordre d'une fonction donne la fonction elle même avec $\alpha > 0$:

$${}_{t_0}D_t^{\alpha} I_t^{\alpha} f(t) = f(t) \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad (1.24)$$

1.5.5 Exemple d'un système chaotique d'ordre fractionnaire continu :

Nous développerons, dans cette partie, un exemple de système chaotique continu d'ordre fractionnaire. Il s'agit du système de Rössler.

Les équations de Rössler sont données par(1.4).

Ou x_1 , x_2 et x_3 sont les états du systèmes. Pour les valeurs $a = 0.2$, $b = 0.2$ et $c = 5.7$ le système (1.25) présente un comportement chaotique.

La généralisation du système de Rossler au cas fractionnaire est représentée comme suit :

$$\begin{cases} D^{\alpha_{11}} x_1 = -(x_2(t) + x_3(t)) \\ D^{\alpha_{12}} x_2 = x_1(t) + ax_2(t) \\ D^{\alpha_{13}} x_3 = b + x_3(t)(x_1(t) - c) \end{cases} \quad (1.25)$$

Avec $0 < \alpha_{11} \leq 1$, $0 < \alpha_{12} \leq 1$ et $0 < \alpha_{13} \leq 1$ sont les ordres de dérivation fractionnaires des états x_1 , x_2 et x_3 respectivement.

L'évolution chaotique des états x_1 , x_2 et x_3 sont illustrée; pour les valeurs des ordres de dérivations fractionnaires $\alpha_{11} = 0.9$, $\alpha_{12} = 0.85$ et $\alpha_{13} = 0.95$. Dans ce cas le système est dit incommensurable car $\alpha_{11} \neq \alpha_{12} \neq \alpha_{13}$.

Dans le cas ou $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13}$ le système est dit commensurable.

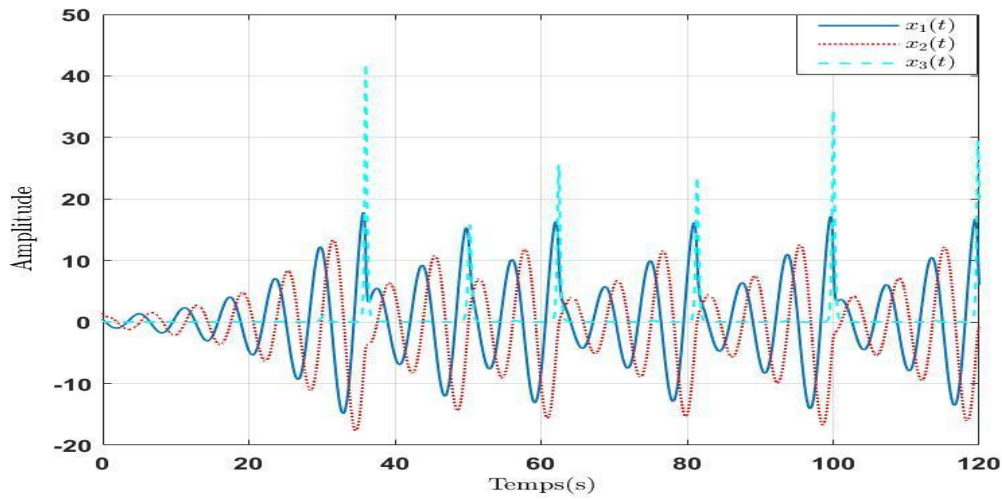


FIGURE 1.6: Évolution des états x_1 , x_2 et x_3 du système de Rössler d'ordre fractionnaire

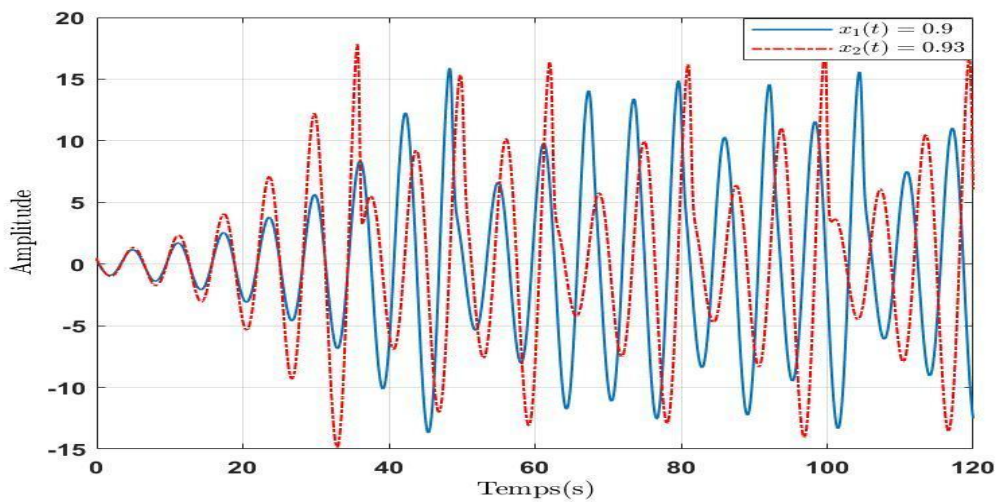


FIGURE 1.7: Sensibilité de l'état x du système de Rössler d'ordre fractionnaire aux conditions initiales

1.5.6 Les domaines d'applications du calcul fractionnaire

1.5.7 Automatique

Des applications en automatique incluent les contrôleurs à base de dérivées et intégrales fractionnaires qui sont des généralisations de méthodes classiques telles que le PID. [30]

1.5.8 Électricité

Le calcul fractionnaire est utilisé pour modéliser certains composants électriques, comme les condensateurs fractionnaires. [31]

1.5.9 Mécanique des milieux continus

Les équations différentielles d'ordre fractionnaire sont utilisées pour modéliser le comportement de viscoélasticité de certains matériaux. [32]

1.5.10 Thermique

L'équation de la chaleur peut être modélisée en utilisant des dérivées d'ordre fractionnaire. [32]

1.5.11 Traitement d'images

Le traitement d'images en utilisant des dérivées d'ordre fractionnaire est utilisé dans divers domaines, notamment la géophysique, la biomédecine et l'optique. [33]

1.6 Conclusion :

Ce chapitre, est considéré comme un chapitre introductif, dans lequel on a présente quelques définitions essentiels des systèmes dynamiques non linéaire, ainsi que les concepts fondamentaux du chaos et des systèmes chaotiques. Et pour une meilleures compréhension du chaos on a illustrer quelques exemples les plus célèbres des systèmes chaotiques, puis les caractéristiques des systèmes chaotiques ont été exposées. Ensuite, nous avons présenté le principe du calcul non entier. On a fourni les différentes définitions de calcul de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire, ainsi que les définitions de Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov.

Ce qui suit sera consacré à la synchronisation des systèmes chaotiques, avec ses différentes méthodes, qui a entraîné une révolution dans le domaine de l'automatique.

Chapitre 2

Synchronisation des systèmes chaotiques

2.1 Introduction

Les phénomènes de synchronisation ont fait l'objet de discussions dans divers domaines de recherche depuis le 17^{ème} siècle. Ce concept a trouvé sa place dans de nombreuses applications théoriques et pratiques, où plusieurs types de synchronisation ont été distingués. La synchronisation est un processus omniprésent dans la vie courante et joue un rôle important dans différents contextes [34].

Récemment, les chercheurs se sont intéressés à la synchronisation des systèmes chaotiques. Ces derniers, caractérisés par une sensibilité aux conditions initiales, rendent surprenant le fait de parler de synchronisation pour des systèmes chaotiques. Cependant, depuis les célèbres travaux de Pecora et Carroll [35], il a été démontré que les systèmes chaotiques peuvent être complètement synchronisés.

Dans ce chapitre, nous développerons plus en détail le principe de synchronisation des systèmes chaotiques et présenterons les différents types de synchronisation. Nous aborderons largement la notion d'observabilité et de commandabilité. Ensuite, nous nous concentrerons sur la synchronisation des systèmes chaotiques à base d'observateurs et de commande. L'objectif de ce chapitre est de proposer des lois de commande non linéaires pour nos systèmes chaotiques, en utilisant la technique à mode glissant. Nous présenterons la conception détaillée de cette loi de commande et nous terminerons ce chapitre par une conclusion.

2.2 Principe de la synchronisation

Le terme synchronisation vient du grec *syn* signifiant "avec" et *chronos* signifiant "temps", ce qui signifie "se produire en même temps". Le phénomène de synchronisation se manifeste lorsque deux systèmes évoluent de manière identique au cours du temps. On peut définir la synchronisation comme le phénomène où deux systèmes se comportent de la même façon en même temps.

Le phénomène de synchronisation a été observé pour la première fois au 17^{ème} siècle par le chercheur hollandais Christian Huygens en 1658 [36]. En étudiant deux horloges de fréquences légèrement différentes, il a constaté qu'en les reliant avec un morceau de bois, elles affichaient la même heure : elles se synchronisaient. Des exemples de synchronisation existent dans la nature, les sciences de la vie et de la Terre, ainsi que dans les domaines techniques [37].

2.3 Synchronisation des systèmes chaotiques

La synchronisation des systèmes chaotiques a suscité un grand intérêt dans la communauté scientifique. En général, la notion de synchronisation est liée à un mouvement périodique. Deux signaux sont synchronisés si leur période et leur phase sont identiques. Cette définition ne s'applique pas aux signaux chaotiques. Deux signaux chaotiques sont dits synchronisés s'ils deviennent asymptotiquement identiques lorsque t tend vers l'infini [38].

Dans le contexte du chaos, une configuration populaire de synchronisation est la configuration maître-esclave. Dans cette configuration, un système dynamique, appelé système esclave, suit le rythme et la trajectoire imposés par un autre système dynamique, appelé système maître.

Considérons la figure 2.1 suivante :

Dans cette figure 2.1, le système (2), dit système esclave, sera synchronisé avec le système (1) (système maître).

On dit alors qu'un système esclave défini par le système différentiel continu

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t)), \quad x_s \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

se synchronise avec un système maître donné par le système d'équations différentielles :

$$\dot{x}_m(t) = f_m(x_m(t)), \quad x_m \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

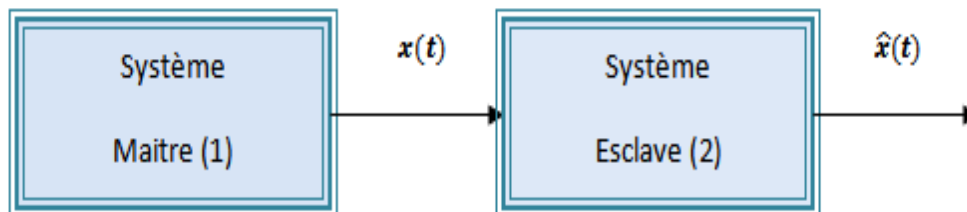


FIGURE 2.1: Système maître-esclave pour réaliser la synchronisation

Si, pour toute paire de conditions initiales $(x_m(0), x_s(0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{(t,k) \rightarrow +\infty} |x_s - x_m| = 0 \quad (2.3)$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne.

2.4 Types de synchronisation

Plusieurs types de synchronisation ont été proposés dans la littérature. Nous citons ci-dessous quelques approches en expliquant leurs principes.

2.4.1 Synchronisation identique

Ou synchronisation complète, c'est la plus ancienne et la plus simple forme de synchronisation des systèmes chaotiques couplés, offrant une solution simple et performante. Son principe consiste à ce que le système esclave reproduise l'état du système maître [39].

Considérant deux systèmes dynamiques :

$$\dot{x}_m(t) = f(x_m(t)) \quad (2.4)$$

$$\dot{x}_s(t) = f(x_s(t)) \quad (2.5)$$

où $x_m(t)$ et $x_s(t) \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs d'état de dimension n .

Alors, (2.4) et (2.5) sont identiquement synchronisés si, quelles que soient leurs conditions initiales :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_s(t) - x_m(t)| = 0 \quad (2.6)$$

2.4.2 Synchronisation retardée

Dans la synchronisation retardée, l'état du système esclave tend vers l'état décalé dans le temps du système maître [40]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}_1(t) - x(t - \tau)| = 0 \quad (2.7)$$

où $x(t)$ est l'état du système émetteur, $\hat{x}(t)$ l'état du système récepteur, et τ est un retard positif [40].

2.4.3 Synchronisation couplage

Il est possible de coupler deux systèmes chaotiques dans un sens (couplage unidirectionnel) ou dans les deux sens (couplage bidirectionnel). Dans le cas d'une synchronisation unidirectionnelle, le couplage entre les deux systèmes chaotiques est réalisé à l'aide d'un élément fonctionnant dans un seul sens. Par contre, dans le cas de la synchronisation bidirectionnelle, le couplage est réalisé à l'aide d'un élément permettant l'échange d'énergie dans les deux sens. Les deux types de couplages peuvent être appliqués à des systèmes non identiques [41].

2.4.4 Synchronisation de phase

On peut définir la synchronisation de phase en se basant sur la théorie classique linéaire des vibrations. Considérons deux oscillateurs couplés de phases Φ_1 et Φ_2 . Il a été démontré que la synchronisation de phase entre ces deux oscillateurs a lieu lorsque l'inégalité (2.8) est satisfaite [42].

$$|n\Phi_1 - m\Phi_2| < c, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (2.8)$$

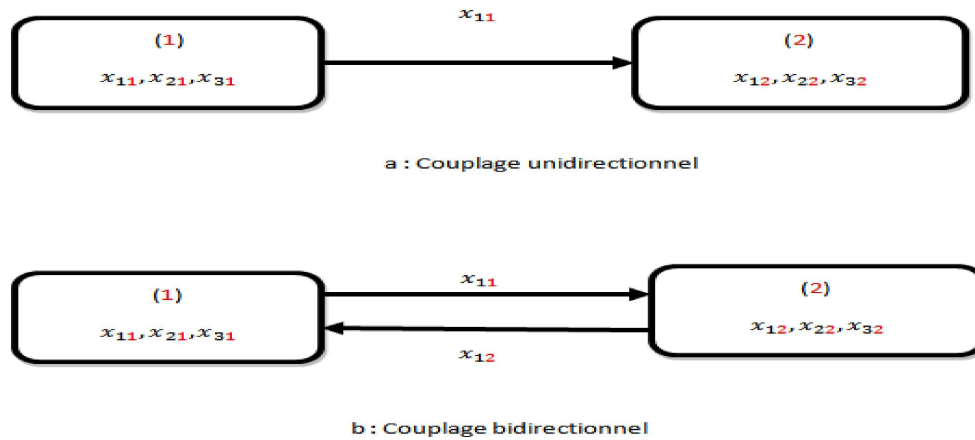


FIGURE 2.2: Synchronisation par couplage

2.4.5 Synchronisation inversé

Jusqu'à présent, toutes les approches mentionnées ont pour but de synchroniser les états du système et ne concernent pas l'estimation des entrées inconnues du système. Cependant, la possibilité d'estimer les entrées inconnues est essentielle pour la transmission chaotique de données puisque l'entrée inconnue est généralement le message confidentiel.

Soit la figure (2.3), où l'émetteur peut être écrit de la façon suivante [43] :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.9)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états du système d'ordre n

$u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées inconnues d'ordre m

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des fonctions vectorielles, et $y \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des mesures des sorties d'ordre m .

Le vecteur d'entrée du récepteur est le vecteur de sortie de l'émetteur, il faut donc concevoir un récepteur de manière à ce que son vecteur de sortie converge au moins asymptotiquement vers le vecteur d'entrée de l'émetteur.

Pour le récepteur, nous avons un système dynamique de la forme :

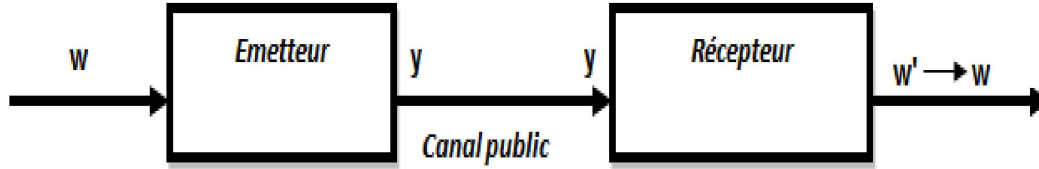


FIGURE 2.3: Synchronisation d'un système inversé

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})\hat{u} + H(y - \hat{y}) \quad \hat{y} = h(\hat{x}) \quad (2.10)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états estimés par l'observateur, $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des sorties estimées, $\hat{u} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées estimées, et H est une matrice appelée matrice d'observation [34].

Alors, la synchronisation inversée est réalisée si l'on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{x}(t) - x(t)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{u}(t) - u(t)| = 0 \quad (2.11)$$

2.5 Techniques et stratégies de synchronisation

Il existe différentes techniques et méthodes de synchronisation basées sur l'utilisation d'observateurs et de contrôleurs. Dans cette section, nous présenterons ces méthodes en détail.

2.5.1 Synchronisation basée sur des observateurs

L'observateur

Un observateur est un système dynamique conçu pour estimer les états inconnus d'un système lorsque ceux-ci ne peuvent être mesurés directement, soit pour des raisons technologiques, soit pour des raisons économiques. Dans la synchronisation utilisant un observateur, le système maître

est un système chaotique quelconque et le système esclave agit comme un observateur d'état correspondant.

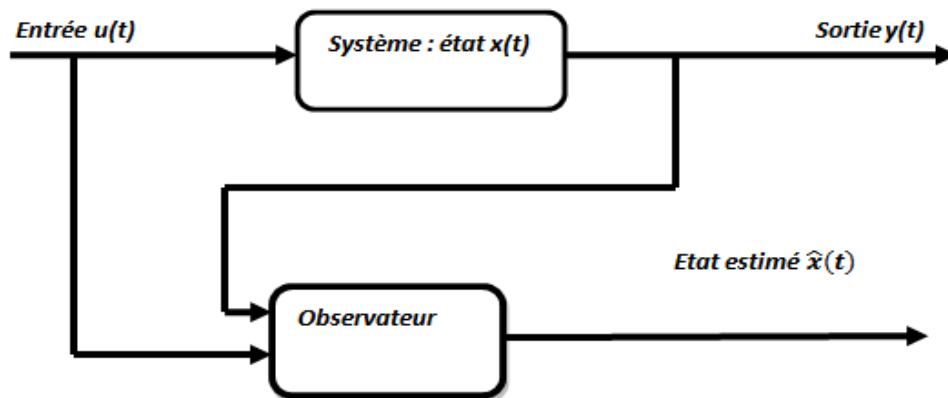


FIGURE 2.4: Principe de l'observateur

Pour pouvoir synthétiser un observateur, il est nécessaire d'analyser l'observabilité.

Observabilité

L'observabilité des systèmes non linéaires dépend fondamentalement de l'entrée appliquée au système. En d'autres termes, un système peut être globalement observable tout en ayant certaines entrées qui le rendent inobservable.

Dans ce contexte, l'observabilité d'un système non linéaire est caractérisée par la capacité, à partir de la sortie mesurée, de discerner les différents états initiaux.

Les processus physiques sont très souvent représentés par des modèles non linéaires décrits sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad y = h(x) \quad (2.12)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $y \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.

Espace d'observabilité

Soit le système (2.12). L'espace d'observabilité, noté \mathcal{O} , est le plus grand sous-espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs dans l'espace de sortie, contenant les sorties h_1, h_2, \dots, h_p et qui est fermé sous l'opération de la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteurs $f(x, u)$, u étant

fixé. On note $d\mathcal{O}$ l'espace des différentielles des éléments de \mathcal{O} .

Condition de rang d'observabilité

Pour déterminer la condition de rang d'observabilité, nous définissons tout d'abord la dérivée de Lie, une notion largement utilisée dans l'étude de l'observabilité des systèmes non linéaires.

Considérons h une fonction C^∞ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On définit la dérivée de Lie de h dans la direction de f , notée $L_f h$, comme la dérivée de h le long de la courbe intégrale de f en $t = 0$:

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \quad (2.13)$$

Par définition, on écrit $L_f^0 h = h$ et $L_f^k h = L_f(L_f^{k-1} h)$ pour tout $k \geq 1$.

Le système satisfait la condition de rang d'observabilité si :

$$\text{Rang}(\mathcal{O}) = \text{rang} \left[dh \ dL_f h \ : \ dL_f^{n-1} h \right] = n \quad (2.14)$$

L'expression de $dL_f^k h$ est donnée par le co-vecteur :

$$dL_f^k h = \left[\frac{\partial L_f^k h}{\partial x_1}, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_n} \right] \quad (2.15)$$

Pour l'application aux systèmes non linéaires, nous définissons la condition de rang d'observabilité pratique comme suit :

$$\text{Rang}(\mathcal{O}) = \text{rang} \left[dh \ dL_f h \ : \ dL_f^{n-1} h \right] = n \quad (2.16)$$

Les différents types d'observateurs non linéaires

Les observateurs non linéaires jouent un rôle fondamental dans le développement des méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques.

Plusieurs observateurs ont été proposés. Nous pouvons citer, par exemple, l'observateur à entrée inconnue, développé dans le but d'estimer l'état d'un système malgré les entrées inconnues non mesurables. Ces entrées inconnues apparaissent dans les processus physiques sous forme d'erreurs de modélisation, d'incertitudes, de perturbations, de défauts, etc.

Il y a également l'observateur adaptatif pour l'estimation des états et des paramètres du système dynamique, ainsi que l'observateur impulsif, qui offre plusieurs avantages.

Enfin, nous mentionnons l'observateur à mode glissant, basé sur la théorie des systèmes à structure variable, dont nous donnons plus de détails dans la partie qui suit.

Observateurs à modes glissants

Dans un observateur à modes glissants, le terme correcteur d'erreur d'estimation est une fonction discontinue de type *sign*. La construction de l'observateur à modes glissants est une approche basée sur la théorie des systèmes à structure variable.

L'observateur à modes glissants a été proposé dans diverses applications. Dans notre cas, il est utilisé pour la synchronisation des systèmes chaotiques. Dans ce qui suit, nous allons donner quelques définitions liées aux modes glissants.

On considère le système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x). \quad (2.17)$$

La structure d'un observateur à modes glissants pour le système (2.17) s'écrit :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + \lambda \text{sign}(y - \hat{y}), \quad \hat{y} = h(\hat{x}). \quad (2.18)$$

C'est une copie du modèle, à laquelle on ajoute un terme correcteur qui assure la convergence de \hat{x} vers x . La surface de glissement dans ce cas est donnée par :

$$S = y - \hat{y}. \quad (2.19)$$

Le terme de correction utilisé est proportionnel à la fonction discontinue *sign* appliquée à l'erreur de sortie, où $\text{sign}(x)$ est définie par :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

2.5.2 Synchronisation basée sur la commande

La théorie de la commande des systèmes non linéaires a joué un rôle crucial dans le développement des méthodes modernes de synchronisation. Diverses approches, fondées sur la conception de différentes lois de commande, ont été largement documentées dans la littérature.

Commandabilité

Un système non-linéaire est dit commandable s'il existe, pour un temps donné t_0 , un temps fini $t_1 > t_0$ tel que, quels que soient deux états $x(t_0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$ dans l'espace d'état, il existe une entrée de commande $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, permettant de transférer l'état $x(t)$ de x_0 à x_1 en un temps fini t_1 .

Considérons le système non-linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.21)$$

où l'état x appartient à un ouvert de \mathbb{R}^n et où l'entrée u est de dimension m .

On peut définir plusieurs notions de commandabilité. La notion la plus proche de ce qui précède, mais la plus restrictive, concerne la commandabilité locale autour d'un point d'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) , tel que $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

Commandabilité au premier ordre On dit que le système (2.21) est commandable au premier ordre au point d'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) si le rang de la matrice \mathcal{C} , définie par (2.22), est égal à n :

$$\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (2.22)$$

Si le système (2.21) est commandable au premier ordre au point d'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) , il est localement commandable en (\bar{x}, \bar{u}) . Notons que le système (2.21) peut très bien être localement commandable sans être commandable au premier ordre.

Les différents types de commandes pour un système non linéaire

Dans cette section, nous présenterons les méthodes de commande couramment utilisées dans le contexte de la synchronisation.

La commande par Backstepping

La technique par backstepping est une méthode systématique et récursive de synthèse de lois de commande non linéaires, basée sur les fonctions de Lyapunov, qui assure la stabilisation progressive de chaque étape du processus de synthèse.

Contrairement à la méthode de linéarisation entrée-sortie, qui exige des modèles bien définis et compense souvent des non-linéarités potentiellement bénéfiques, la méthode de backstepping

offre une variété d'outils de synthèse permettant de gérer les incertitudes et d'éviter l'élimination de ces non-linéarités utiles pour la performance et la robustesse de la commande.

Considérons le système maître défini sous la forme suivante :

$$\dot{x}_{m1} = f_1(x_{m1}, x_{m2}), \quad \dot{x}_{m2} = f_2(x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}), \quad \dots, \quad \dot{x}_{mn} = f_n(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) + f_{n+1}(t) \quad (2.23)$$

Soit $x_m = [x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}]^T \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état. La fonction f_1 est linéaire, tandis que f_i (pour $i = 2, 3, \dots, n+1$) sont des fonctions non linéaires. Pour des systèmes tels que ceux de Lorenz, Rössler ou Chua, $f_{n+1}(t) = 0$.

Le système esclave couplé avec le système (2.23) est défini par le système suivant [44] :

$$\begin{cases} \dot{x}_{s1} = f_1(x_{s1}, x_{s2}) \\ \dot{x}_{s2} = f_2(x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{sn} = f_n(x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn}) + f'_{n+1}(t) + U \end{cases} \quad (2.24)$$

Avec $x_s = [x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn}]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $f'_{n+1}(t)$ est une fonction ayant des caractéristiques similaires à $f_{n+1}(t)$, et u est le contrôleur qui doit être choisi de manière appropriée pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (2.23) et (2.24).

Les erreurs de synchronisation sont définies comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = x_{s1} - x_{m1} \\ e_2 = x_{s2} - x_{m2} \\ \vdots \\ e_n = x_{sn} - x_{mn} \end{cases} \quad (2.25)$$

A partir de (2.25), nous avons :

$$\begin{cases} x_{s1} = e_1 + x_{m1} \\ x_{s2} = e_2 + x_{m2} \\ \vdots \\ x_{sn} = e_n + x_{mn} \end{cases} \quad (2.26)$$

En soustrayant (2.23) de (2.24) et en tenant compte de (2.25) et (2.26), le système d'erreur peut

être représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2) \\ \dot{e}_2 = g_2(x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, e_1, e_2, e_3) \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}, e_1, e_2, \dots, e_n) + f'_{n+1}(t) - f_{n+1}(t) + u \end{cases} \quad (2.27)$$

Où $e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'erreur, g_1 est une fonction linéaire et $g_i (i = 1, 2, \dots, n)$ sont des fonctions non linéaires.

Pour utiliser l'algorithme du backstepping, le système d'erreur doit être décomposé en sous-systèmes $e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$.

L'algorithme récursif du backstepping consiste alors à définir pour chaque sous-système une fonction de Lyapunov positive V telle que :

$$\dot{V}_j(e_j, u_j, \alpha_j) \quad (2.28)$$

où j est l'ordre du sous-système, V_j est la fonction de Lyapunov définie pour le sous-système d'ordre j et u_j, α_j sont la loi de commande et le contrôleur dit virtuel du sous-système j .

La commande par modes glissants

La commande par mode glissant a été introduite initialement comme moyen de contrôle des systèmes à structure variable. Elle repose essentiellement sur la résolution des équations différentielles discontinues de second ordre. Initiée par Filippov [45], elle a été étudiée et développée principalement dans les années 1980 par le chercheur V.I. Utkin [46].

La commande par mode glissant a été largement utilisée dans la littérature. Ce succès est attribué à sa simplicité de mise en œuvre et à sa robustesse face aux variations paramétriques et aux perturbations externes.

L'objectif de la commande par mode glissant est d'atteindre un état de référence et de fonctionner selon une dynamique désirée. Une fois que l'état du système atteint la surface de glissement, le système entre en régime glissant. Dans ce régime, les dynamiques du système sont insensibles aux perturbations extérieures et aux variations paramétriques tant que les conditions du régime glissant sont respectées.

Principe de la commande par modes glissants

La conception des contrôleurs par modes glissants prend en compte les problèmes de stabilité et offre systématiquement de bonnes performances. Cette approche se divise en trois étapes principales :

- Choix des surfaces.
- Établissement des conditions d'existence et de convergence.
- Détermination de la loi de commande.

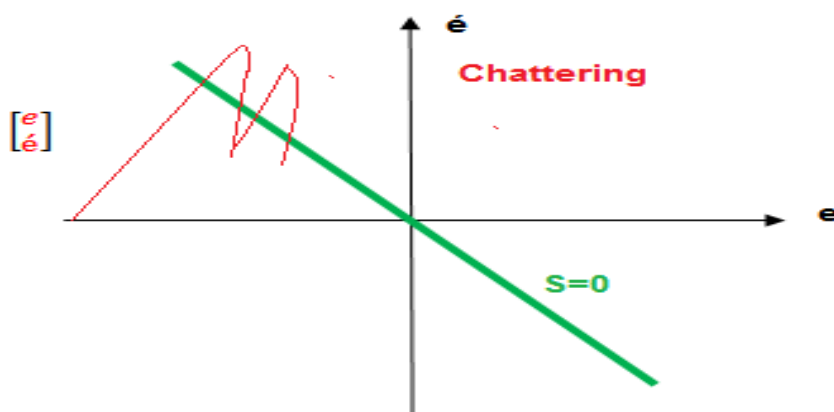


FIGURE 2.5: Modes de fonctionnement dans le plan

Choix des surfaces de glissement

Le choix des surfaces de glissement concerne non seulement leur nombre nécessaire, mais également leur forme, en fonction de l'application et de l'objectif visé. En général, pour un système défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (2.29)$$

Le calcul des surfaces de glissement est basé sur l'équation de J.J. Slotine, qui propose une formule générale pour déterminer la surface de glissement assurant la convergence d'une variable

vers sa valeur désirée [47] :

$$S(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{r-1} e(x) \quad (2.30)$$

où :

- x : variable à réguler,
- $e(x)$: écart de la variable à régler, $e(x) = x_d - x$,
- λ : constante positive interprétant la bande passante du contrôle désiré,
- r : degré relatif, égal au nombre de dérivations nécessaires de la sortie pour faire apparaître la commande.

Condition d'existence et de convergence

Les conditions de convergence permettent aux dynamiques du système, dans le plan de phase, de converger vers la surface de glissement. Deux conditions issues de la littérature sont retenues :

- Formuler une fonction scalaire positive $v(x) > 0$ pour les variables d'état du système.
- Choisir une loi de commande qui fera décroître cette fonction, c'est-à-dire assurer que $\dot{v}(x) < 0$.

La fonction de Lyapunov utilisée est la suivante :

$$v(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad (2.31)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\dot{v}(x) = S(x)\dot{S}(x) \quad (2.32)$$

Pour assurer une bonne dynamique du système et une convergence adéquate, il suffit de garantir que :

$$\dot{v}(x) = S(x)\dot{S}(x) < 0 \quad (2.33)$$

Calcul de la commande

Une fois la surface de glissement choisie ainsi que la vitesse de convergence, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la variable à contrôler vers cette surface et

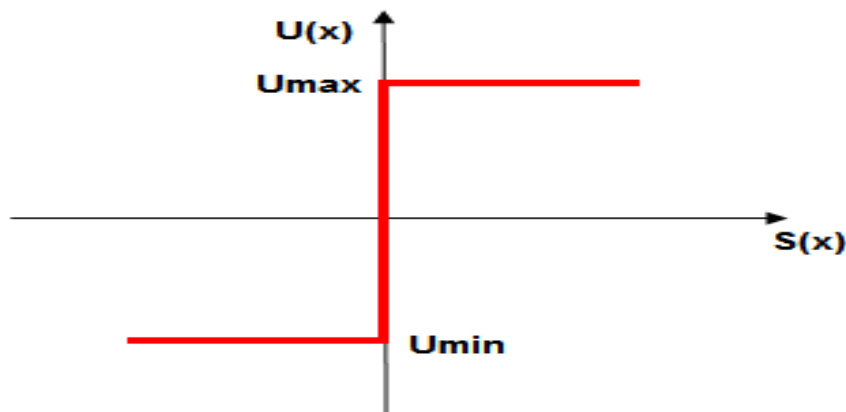


FIGURE 2.6: Commande appliquée au système

ensuite vers son point d'équilibre (origine du plan de phase) tout en maintenant la condition d'existence du mode de glissement.

Une des hypothèses essentielles dans la conception des systèmes à structures variables pour la commande par mode de glissement est que la commande doit commuter instantanément (fréquence infinie) entre U_{\max} et U_{\min} en fonction du signe de la surface de glissement (voir figure 2.6). Dans ce cas, des oscillations de très haute fréquence, appelées "chattering", apparaissent dans le mode de glissement et le régime permanent.

Le phénomène de réticence "Chattering"

Un mode de glissement idéal n'existe pas en pratique, car cela impliquerait que la commande commute à une fréquence infinie. En présence d'imperfections de commutation, telles que des retards de temps de commutation et de petites constantes de temps dans les actionneurs, la discontinuité dans la commande de rétroaction produit un phénomène particulier appelé "chattering".

La structure d'un contrôleur par mode de glissement est constituée de deux parties : l'une concerne la linéarisation exacte U_{eq} et l'autre la stabilité U_n . U_{eq} correspond à la commande proposée par Filippov et Utkin (commande équivalente), qui sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $S(x) = 0$. La commande équivalente est déduite en considérant que

la dérivée de la surface est nulle $\dot{S}(x) = 0$.

La commande discrète U_n est déterminée pour vérifier la condition de convergence en dépit de l'imprécision des paramètres du modèle du système. Afin de mettre en évidence le développement précédent :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} [A(x) + BU_{eq}] + \frac{\partial S}{\partial x} [BU_n] \quad (2.34)$$

En résumé, la combinaison de U_{eq} et U_n permet de concevoir une commande robuste qui assure la stabilité et la convergence malgré les incertitudes et les imperfections du système. Le phénomène de chattering demeure un défi majeur dans la mise en œuvre pratique des contrôleurs par mode de glissement.

Pendant le régime de glissement permanent, la surface est nulle, ce qui implique que sa dérivée ainsi que la partie discontinue sont également nulles. Dès lors, nous déduisons l'expression de la commande équivalente comme suit :

$$U_n = 0 \quad (2.35)$$

$$U_{eq} = - \left(\frac{\partial s}{\partial x} B \right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial x} A(x) \right) \quad (2.36)$$

Pendant la convergence, en substituant l'expression de U_{eq} , nous obtenons la nouvelle expression de la dérivée de la surface :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial s}{\partial x} BU_n \quad (2.37)$$

Étant donné que :

$$\frac{\partial s}{\partial x} B = \frac{\partial \dot{S}}{\partial x} \neq 0 \quad (2.38)$$

Pour satisfaire à cette condition, le signe de U_n doit être opposé à celui de $S(x) \frac{\partial s}{\partial x} [b]$. La forme la plus simple que peut revêtir la commande discrète est celle d'une fonction *sign* :

$$U_n = K_x \text{sign}(S(x)) \quad (2.39)$$

Remarque

Les concepts de commandabilité et d'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires d'ordre fractionnaire (non entier) sont analogues à ceux utilisés dans la théorie des systèmes non linéaires entiers [48].

2.6 Conclusion :

Ce chapitre offre un aperçu approfondi de la synchronisation des systèmes chaotiques, en commençant par une analyse des différents types de synchronisation.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux techniques et stratégies de synchronisation, en mettant en évidence le rôle crucial des observateurs pour estimer les états inconnus des systèmes et celui de la commande pour influencer activement leur comportement. Parmi les méthodes de commande, la commande par modes glissants a été présentée comme offrant stabilité et robustesse, malgré le défi persistant du "chattering" dans sa mise en œuvre pratique.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons l'application de notre travail en utilisant la technique synergétique, semblable à celle par modes glissants, mais sans l'inconvénient du phénomène de chattering.

Chapitre 3

Application de la Commande Synergétique pour la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

3.1 Introduction

Parmi les techniques de commande des systèmes non linéaires (chaotiques) qui ont suscité un intérêt particulier ces dernières années, on peut citer la commande à mode glissant et la commande synergétique.

La théorie du contrôle synergétique a été développée et introduite de manière générale par le professeur Anatoly Klesnikov et son équipe [49]. Le contrôleur conçu selon cette théorie est attrayant par sa simplicité et son efficacité optimale. Il élimine entièrement le phénomène de bavardage grâce à l'utilisation d'une loi de contrôle à signal entièrement continu [50].

Récemment, l'approche synergétique a été classée parmi les techniques de contrôle robuste les plus prometteuses en raison des résultats satisfaisants obtenus théoriquement et expérimentalement dans divers domaines [51].

Dans ce chapitre, nous étudions la théorie du contrôle d'ordre fractionnaire pour concevoir des contrôleurs : par mode glissant, synergétique et synergétique à temps fixe, dédiés à la synchronisation de deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire identiques avec des conditions

initiales différentes. Nous comparons ensuite les résultats obtenus. Par la suite un autre contrôleur synergétique et synergétique à temps fixe sera appliqué à deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire différents.

3.2 Rappel de quelques propriétés des intégrales et des dérivées

Certaines propriétés des intégrales et des dérivées, énoncées ci-dessous, seront utiles pour établir les résultats présentés dans cette partie [52].

$$\begin{aligned}
 D^\alpha \lambda x(t) &= \lambda D^\alpha x(t) & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
 D^\alpha (I^\alpha x(t)) &= x(t) \\
 D^{\alpha_1} (I^{\alpha_2} x(t)) &= D^{\alpha_1 - \alpha_2} x(t) & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+; \quad \alpha_1 > \alpha_2 \\
 D^{\alpha_1} (I^{\alpha_2} x(t)) &= I^{\alpha_2 - \alpha_1} x(t) & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+; \quad \alpha_2 > \alpha_1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.3 La commande synergétique

La commande synergétique est une approche innovante de contrôle qui contraint le système à suivre une trajectoire préalablement définie par le concepteur. Cette méthode repose sur le principe d'invariance, similaire à celui utilisé dans le contrôle par glissement, mais présente l'avantage notable de ne pas induire de phénomène de broutement (ou chattering).

Contrairement au contrôle par glissement, la commande synergétique se distingue par une action de commande continue. De plus, elle utilise une macro-variable, qui peut être fonction soit des erreurs, soit des variables d'état du système.

3.3.1 Synthèse de la commande synergétique

Soit un système non linéaire défini par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \tag{3.2}$$

Où x représente le vecteur d'état du système et u représente le vecteur de commande. La synthèse du contrôleur synergétique débute par la définition, par le concepteur, d'une macro-variable destinée à satisfaire les exigences du cahier des charges tout en prenant en compte d'éventuelles contraintes de contrôle. Cette macro-variable est définie par :

$$\Psi(t) = \Psi(x, t) \tag{3.3}$$

Ψ représente une macro-variable, tandis que $\Psi(x, t)$ désigne une fonction des variables d'état et du temps, définie par l'utilisateur. L'objectif de la commande synergétique est de contraindre le système à évoluer dans le domaine prédéfini par le concepteur.

$$\Psi = 0 \quad (3.4)$$

Les caractéristiques de la macro-variable peuvent être déterminées par le concepteur en fonction des paramètres de commande, du temps de réponse, des limitations de la commande, etc. La macro-variable peut être une combinaison linéaire des variables d'état et est contrainte d'évoluer selon une trajectoire souhaitée, exprimée par une condition telle que :

$$T\dot{\Psi} + \Phi = 0 \quad T > 0 \quad (3.5)$$

Où T est un paramètre de conception spécifiant le taux de convergence de la macro-variable Ψ la variété invariante définie par $\Psi(x, t) = 0$, et $\Phi(\Psi)$ est une fonction différentiable et lisse de Ψ choisie conformément à [53].

$$\Phi(0) = 0 \quad (3.6)$$

$$\Phi(\Psi)\Psi > 0; \quad \forall \Psi \neq 0$$

La solution de l'équation(3.2) donne la fonction suivante :

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{\frac{-t}{T}} \quad (3.7)$$

Selon cette solution, la macro-variable $\Psi(t)$ converge vers l'attracteur ou le collecteur $\Psi(t)$ pour diverses conditions initiales. Ici, t désigne le temps et T est un paramètre de contrôle qui détermine la vitesse de convergence du système en boucle fermée vers la plage spécifiée.

3.3.2 Application de contrôleurs pour la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

Cette section vise à synchroniser des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire en utilisant différentes méthodes de contrôle. L'objectif est de contraindre un système chaotique esclave à suivre un système chaotique maître.

La première application consistera tout d'abord à synchroniser un système chaotique d'ordre fractionnaire en utilisant la méthode du contrôle par mode glissant.

Dans une seconde étape, nous développerons un contrôleur synergétique et synergétique à temps fixe. Celui-ci permettra de synchroniser deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

identiques mais avec des conditions initiales différentes. Ensuite, nous présenterons les résultats de leurs simulations.

La deuxième application implique le développement d'un contrôleur synergétique et synergétique à temps fixe afin de synchroniser deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire distincts.

Application 1

1. Cas de la commande par mode glissant

Dans cette section, nous exposons une stratégie de commande non linéaire fondée sur le mode glissant pour synchroniser deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire identiques, mais soumis à des conditions initiales différentes.

Le système chaotique maître d'ordre fractionnaire est donné par [54] :

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1(t) &= x_2(t) \\ D^\alpha x_2(t) &= x_3(t) \\ D^\alpha x_3(t) &= -x_1(t) - 1.1x_2(t) - 0.15x_3(t) + x_1^2(t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Le système chaotique d'ordre fractionnaire esclave est donné par

$$\begin{aligned} D^\alpha y_1(t) &= y_2(t) \\ D^\alpha y_2(t) &= y_3(t) \\ D^\alpha y_3(t) &= -y_1(t) - 1.1y_2(t) - 0.15y_3(t) + y_1^2(t) + u(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Où $u(t)$ est la commande de synchronisation, et $\alpha = 0.9$ est la dérivée d'ordre fractionnaire. Soit les erreurs de synchronisation entre le système maître et le système esclave, leurs dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} D^\alpha e_1(t) &= x_2(t) - y_2(t) \\ D^\alpha e_2(t) &= x_3(t) - y_3(t) \\ D^\alpha e_3(t) &= -(x_1(t) - y_1(t)) - 1.1(x_2(t) - y_2(t)) - 0.15(x_3(t) - y_3(t)) + (x_1^2(t) - y_1^2(t)) - u(t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Un calcul simple de la dynamique d'erreur

$$\begin{aligned} D^\alpha e_1(t) &= e_2(t) \\ D^\alpha e_2(t) &= e_3(t) \\ D^\alpha e_3(t) &= -e_1(t) - 1.1e_2(t) - 0.15e_3(t) + (x_1^2(t) - y_1^2(t)) - u(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pour réaliser cet objectif de commande, on définit la surface de glissement, qui représente la condition à satisfaire pour atteindre la synchronisation.

$$S = C_1[e_1, e_2, e_3] \quad (3.12)$$

Ou C_1 représente le vecteur des valeurs propres du placement de pôle, dans notre cas il est choisi comme suit :

$$C_1 = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La loi de commande par mode glissant est donnée par la formule suivante : [55]

$$U = U_{0eq} + U_0 \quad (3.14)$$

Tels que :

U_{0eq} : permet de stabiliser le système en régime glissant, elle est donné de la manière suivante :

$$U_{0eq} = -(SB)^{-1}SAe \quad (3.15)$$

U_0 : permet de garantir l'attractivité de la surface et de satisfaire les conditions de convergences. elle est choisi de comme suit :

$$U_0 = -(SB)^{-1} + SAe - (SB)^{-1}K(C_1B) - L(C_1B)^{-1}sign(S) \quad (3.16)$$

Finalement, l'expression de la commande est :

$$U = -(SB)^{-1}SAe + -(SB)^{-1} + SAe - (SB)^{-1}K(C_1B) - L(C_1B)^{-1}sign(S) \quad (3.17)$$

Résultats de simulation

Les résultats de simulation sont données pour les valeurs suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}^T$$

Les valeurs des gains de la commande discontinue représentent une constante positive donnée par $K = 10$, $L = 10$.

Nous obtenons, alors les figures suivantes :

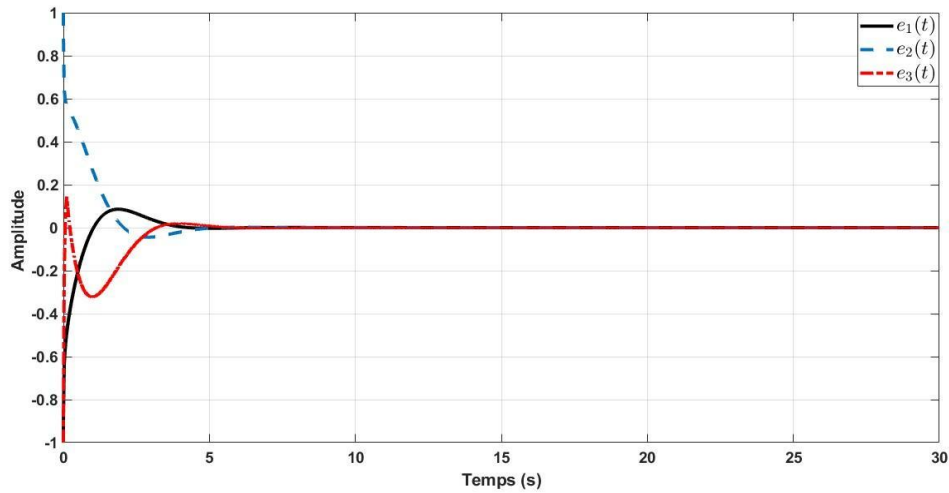


FIGURE 3.1: Erreurs de synchronisation avec la commande

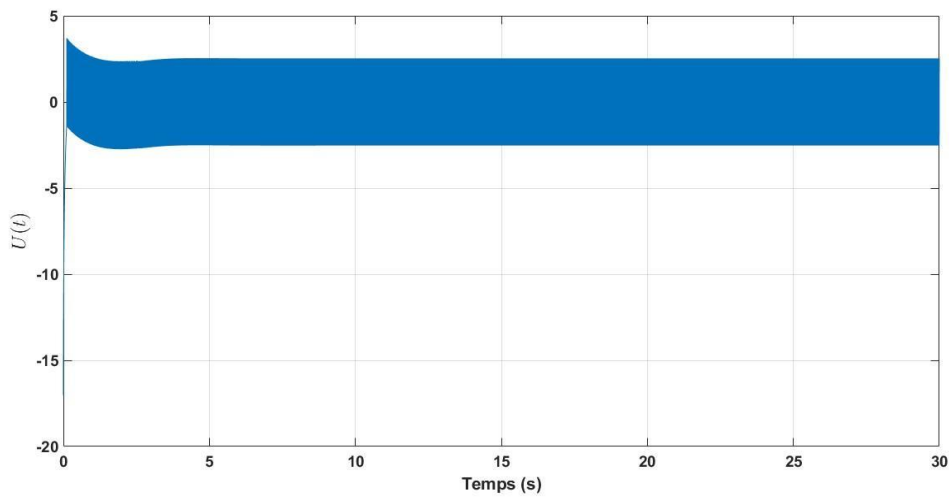


FIGURE 3.2: La commande par mode glissant

Les figures 3.1 et 3.2 illustrent les résultats de simulations portant respectivement sur les erreurs et la commande par mode glissant. Ces résultats mettent en évidence l'efficacité de cette méthode de contrôle, puisque les systèmes tendent à se synchroniser et que les erreurs convergent vers 0. Cependant, ces simulations révèlent également l'apparition du phénomène de Chattering,

qui est l'inconvénient majeur de cette commande.

2. Cas de la commande synergétique

Dans ce cas, le système (3.8) est utilisé comme système maître, tandis que le système esclave est représenté par (3.9). Les équations d'erreur de synchronisation sont fournies dans (3.11). Le contrôle conçu dépend de la macro-variable Ψ , définie en fonction des erreurs du système.

Afin de concevoir le contrôleur pour les systèmes (3.8) et (3.9), la fonction différentiable lisse (Φ) de Ψ est égale à la macro-variable Ψ ($\Phi = \Psi$).

La macro-variable sera donc sélectionnée de la manière suivante par le concepteur . [56]

$$\Psi = k_1 I^{(1-\alpha)} e_1(t) + k_2 I^{(1-\alpha)} e_2(t) + k_3 I^{(1-\alpha)} e_3(t) \quad (3.18)$$

Pour satisfaire la condition (3.5); en dérivent la macro-variable (3.18), en utilisant les propriétés de (3.1)

$$\dot{\Psi} = k_1 I^{-\alpha} e_1(t) + k_2 I^{-\alpha} e_2(t) + k_3 I^{-\alpha} e_3(t) \quad (3.19)$$

D'après (3.1), on obtient :

$$\dot{\Psi} = k_1 D^\alpha e_1(t) + k_2 D^\alpha e_2(t) + k_3 D^\alpha e_3(t) \quad (3.20)$$

On remplace (3.20) dans l'équation (3.5)

$$T(k_1 D^\alpha e_1(t) + k_2 D^\alpha e_2(t) + k_3 D^\alpha e_3(t)) + \Psi(t) = 0 \quad (3.21)$$

On remplaçant les dérivées à l'ordre α des erreurs (3.11) dans (3.21)

$$Tk_1 e_2(t) + Tk_2 e_3(t) + Tk_3(-e_1(t) - 1.1e_2(t) - 0.15e_3(t) + e_1(t)^2 - u(t)) + \Psi(t) = 0 \quad (3.22)$$

En effectuant les simplifications nécessaires, on obtient la loi de commande suivante :

$$u(t) = \frac{k_1}{k_3} e_2(t) + \frac{k_2}{k_3} e_3(t) - e_1(t) - 1.1e_2(t) - 0.15e_3(t) + e_1(t)^2 + \frac{\Psi}{Tk_3} \quad (3.23)$$

3. Cas de la commande synergétique à temps fixe

Dans le cas où le contrôle conçu est de concevoir un algorithme synergétique d'ordre fractionnaire à temps fixe pour la stabilisation de la dynamique du système.

En ce qui concerne la commande synergétique à temps fixe. La fonction différentiable lisse (Φ) de Ψ

est égale à [56] :

$$\Phi = \Psi^{\underline{q}} + \Psi^{\underline{p}} \quad (3.24)$$

Nous substituons l'équation (3.24) dans (3.5) et nous obtiendrons :

$$T\dot{\Psi} + \Psi^{\underline{p}} + \Psi^{\underline{q}} = 0 \quad (3.25)$$

Par conséquent, la loi de commande sera la suivante :

$$u(t) = \frac{k_1}{k_3} e_2(t) + \frac{k_2}{k_3} e_3(t) - e_1(t) - 1.1e_2(t) - 0.15e_3(t) + e_1(t)^2 + \frac{\Psi^{\underline{q}}}{Tk_3} + \frac{\Psi^{\underline{p}}}{Tk_3} \quad (3.26)$$

4. Résultats de simulation :

Des simulations numériques sont réalisées pour évaluer les performances de la méthode proposée. Les résultats de la simulation ont été obtenus en utilisant les valeurs initiales suivantes des paramètres du premier et second systèmes : $x_1(1) = -0.5, x_2(1) = 0.5, x_3(1) = -0.5$, et $y_1(1) = 0.5, y_2(1) = -0.5, y_3(1) = 0.5$.

Les paramètres du contrôleur seront choisis de la manière suivante : $k_1 = 5, k_2 = 10, k_3 = 15, T = 0.1s, p = 9$, et $q = 7$. Avec $\alpha = 0.9$ est la dérivée commensurable à l'ordre fractionnaire.

D'après les résultats de simulation, la macro-variable atteint la variété invariante avec l'entrée de commande (3.23) dans le premier cas, et (3.26) dans le cas d'un temps fixe.

Les erreurs $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ convergent asymptotiquement vers zéro. La synchronisation entre le système chaotique esclave d'ordre fractionnaire (3.8), et du système chaotique maître d'ordre fractionnaire (3.9) sont obtenus par la suite.

Les résultats dans le cas synergique sont donnés par les Figures 3.4-???. Les résultats dans le cas synergique à temps fixe sont donnés par les Figures 3.7-3.9.

Ces figures (3.3), (3.4) et (3.7) montrent la réponse temporelle des erreurs avec et sans contrôle. Les figures (3.5) et (3.8) montrent la réponse temporelle de la macro-variable. Comme le montrent ces figures, la synchronisation est atteinte avec succès. L'entrée de commande est illustrée par les figures (3.6) et (3.9)

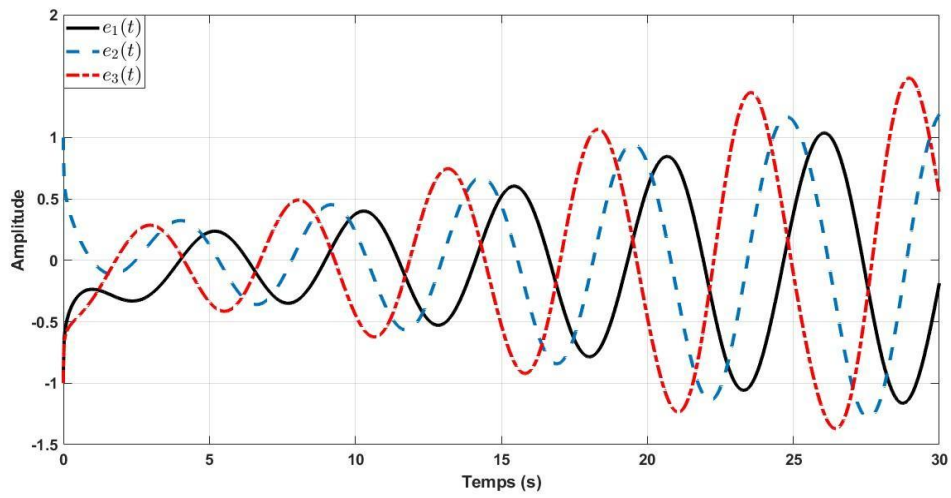


FIGURE 3.3: Erreurs de synchronisation sans contrôle.

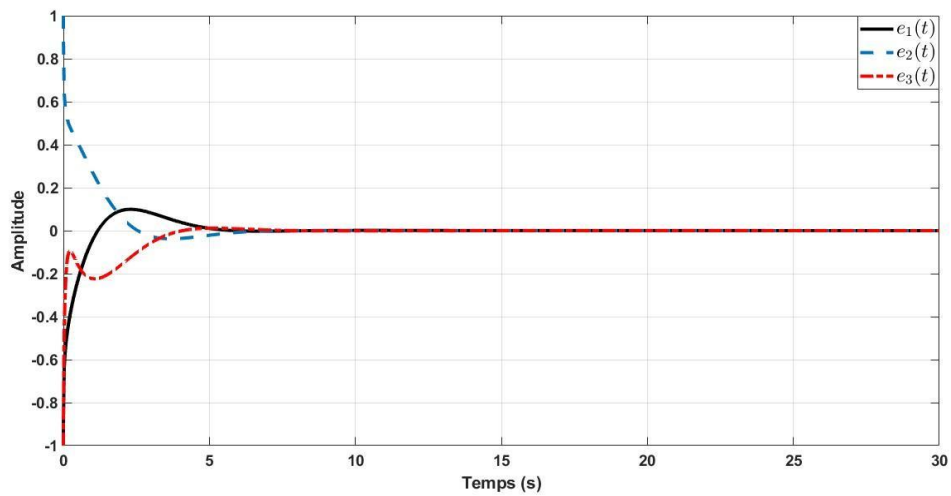


FIGURE 3.4: Erreurs de synchronisation avec la commande

Application 2

Dans cet exemple, nous considérons le même système maître que l'application 1, mais pour le système esclave nous prenons un autre différent.

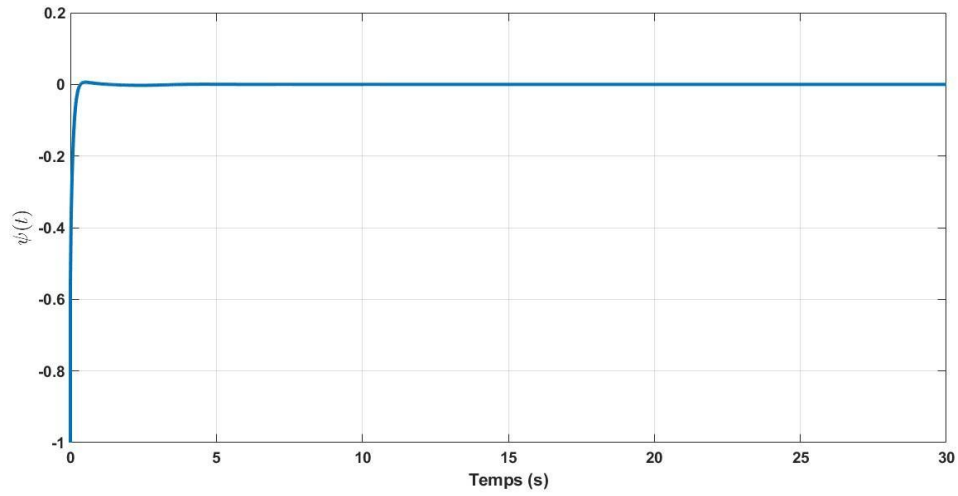


FIGURE 3.5: Macro-variable

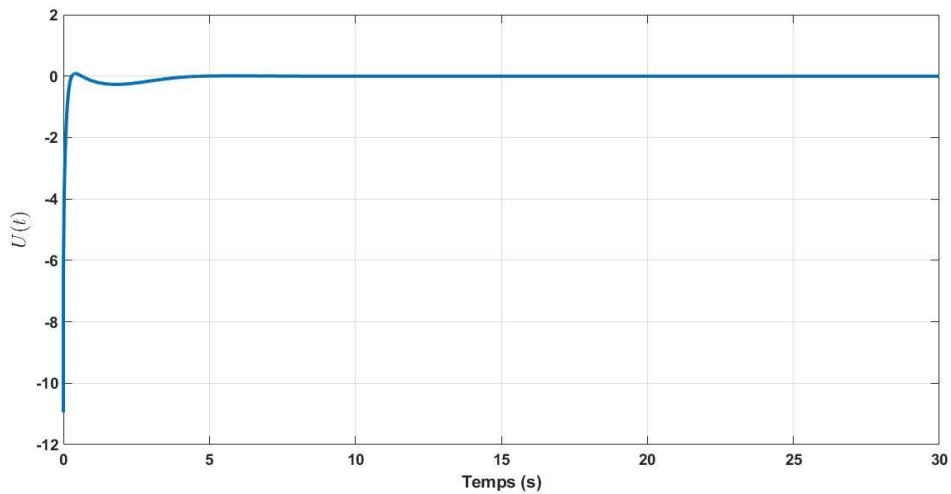


FIGURE 3.6: Contrôle d'entrée

1. Cas de la commande synergétique

Le système chaotique maître d'ordre fractionnaire est donné par :

$$\begin{aligned}
 D^\alpha x_1(t) &= x_2(t) \\
 D^\alpha x_2(t) &= x_3(t) \\
 D^\alpha x_3(t) &= -x_1(t) - 1.1x_2(t) - 0.15x_3(t) + x_1^2(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

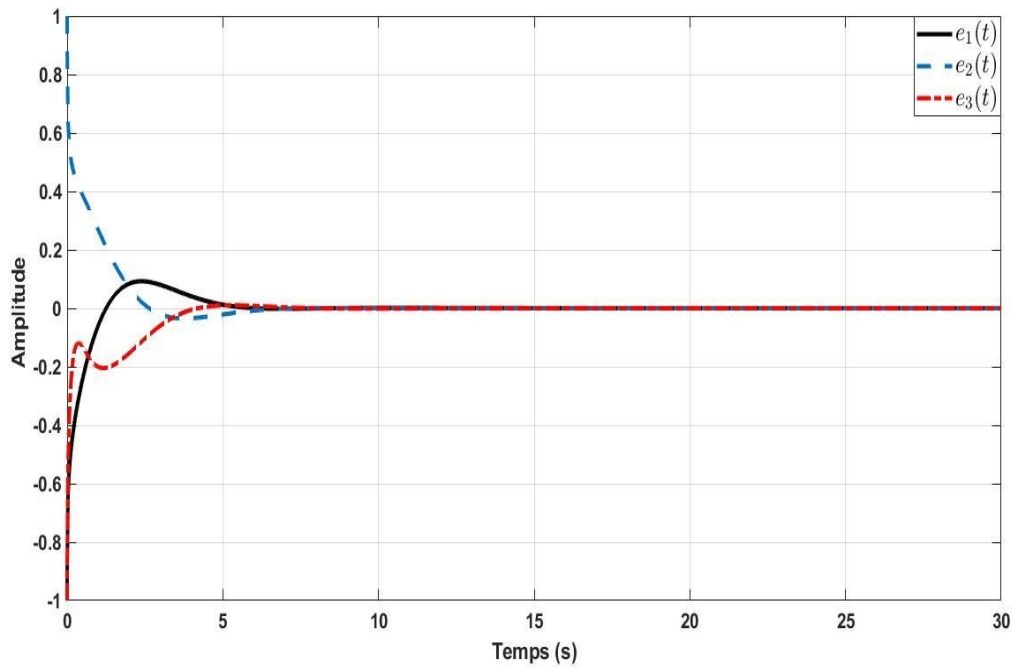


FIGURE 3.7: Erreurs de synchronisation avec contrôle.

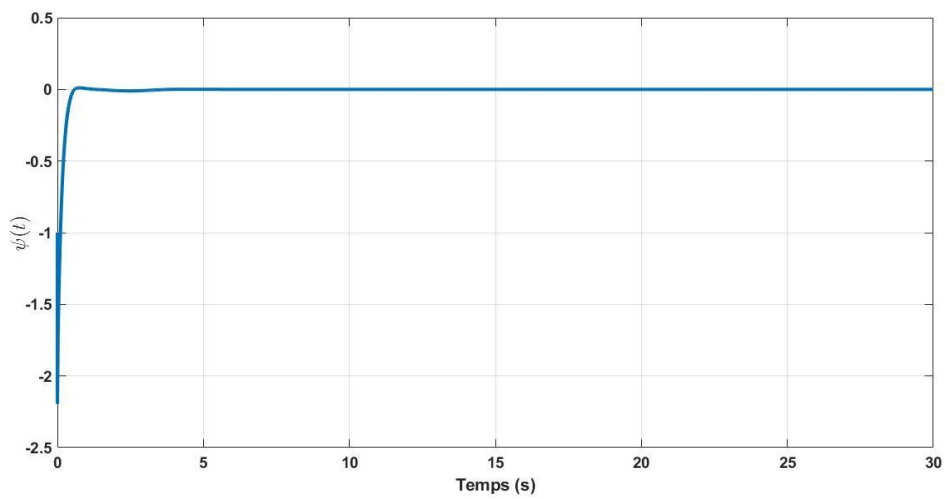


FIGURE 3.8: Macro-variable

Le système chaotique d'ordre fractionnaire esclave est donné par : [57]

$$\begin{aligned}
 D^\alpha z_1(t) &= z_2(t) \\
 D^\alpha z_2(t) &= z_3(t) \\
 D^\alpha z_3(t) &= 5.5z_1(t) - 3.5z_2(t) - z_3(t) - z_1^3(t) + u(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

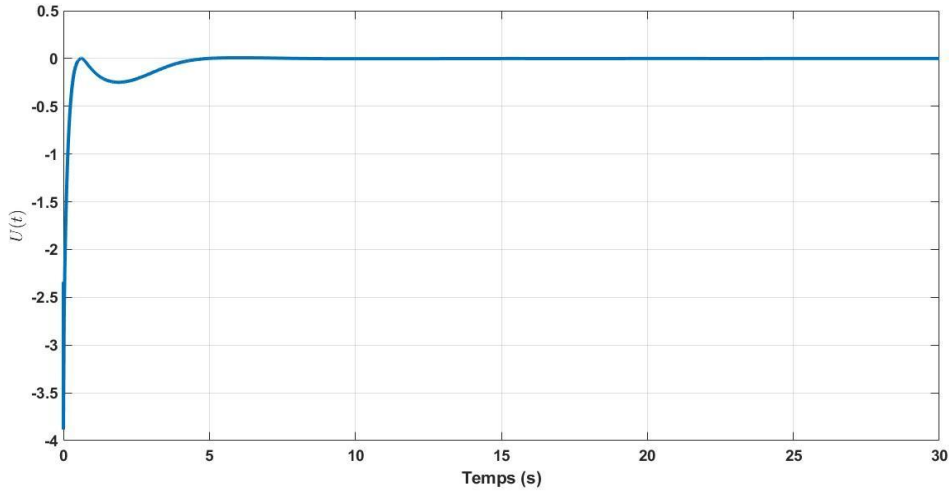


FIGURE 3.9: Contrôle d'entrée

Les erreurs de synchronisation évoluent alors de la manière suivante.

$$D^\alpha e_1(t) = x_2(t) - z_2(t)$$

$$D^\alpha e_2(t) = x_3(t) - z_3(t)$$

$$D^\alpha e_3(t) = (-x_1(t) - 5.5z_1(t)) + (-1.1x_2(t) + 3.5z_2(t)) + (-0.15x_3(t) + z_3(t)) + (x_1^2(t) + z_1^3(t)) - u(t) \quad (3.29)$$

Dans le but, d'obtention de la loi de commande, nous suivons les mêmes étapes que dans l'application 1. Sauf que dans ce cas la fonction (3.22) devient :

$$Tk_1 e_2(t) + Tk_2 e_3(t) + Tk_3((-x_1(t) - 5.5y_1(t)) + (-1.1x_2(t) + 3.5y_2(t)) + (-0.15x_3(t) + y_3(t)) + ((x_1(t)^2) + (y_1(t)^3)) - u(t)) + \Psi(t) = 0$$

Finalement, la loi de commande sera la suivante :

$$u(t) = \frac{k_1}{k_3} e_2(t) + \frac{k_2}{k_3} e_3(t) + (-x_1(t) - 5.5y_1(t)) + (-1.1x_2(t) + 3.5y_2(t)) + (-0.15x_3(t) + y_3(t)) + ((x_1(t)^2) + (y_1(t)^3)) + \frac{\Psi(t)}{Tk_3}$$

2. Cas de la commande synergétique à temps fixe

On prends les mêmes systèmes que dans la commande synergétique (3.27) et (3.28).

La seule distinction dans cette situation réside dans la fonction différentiable lisse Φ de Ψ

$$Tk_1 e_2(t) + Tk_2 e_3(t) + Tk_3((-x_1(t) - 5.5y_1(t)) + (-1.1x_2(t) + 3.5y_2(t)) + (-0.15x_3(t) + y_3(t)) + ((x_1(t)^2) + (y_1(t)^3)) - u(t)) + \frac{p}{\Psi(t)^q} + \frac{q}{\Psi(t)^p} = 0$$

Nous parvenons finalement à obtenir la loi de commande synergétique à temps fixe :

$$u(t) = \frac{k_1}{k_3} e_2(t) + \frac{k_2}{k_3} e_3(t) + (-x_1(t) - 5.5y_1(t)) + (-1.1x_2(t) + 3.5y_2(t)) + (-0.15x_3(t) + y_3(t)) + ((x_1(t)^2) + (y_1(t)^3)) + \frac{p}{Tk_3} + \frac{q}{Tk_3}$$

3. Résultats de simulation

Les résultats de simulation de la synchronisation de deux systèmes différents avec les conditions initiales suivantes : $x_1(1) = -0.2, x_2(1) = 0.1, x_3(1) = -0.2, z_1(1) = 0.1, z_2(1) = -0.1, z_3(1) = 0.3$

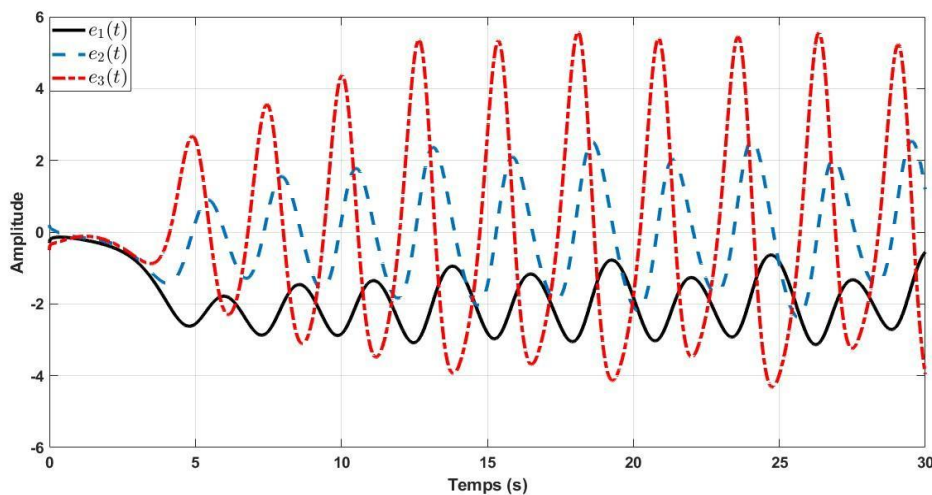


FIGURE 3.10: Erreurs de synchronisation sans contrôle

Les résultats dans le cas synergique sont données par les Figures 3.11–3.13. Les résultats dans le cas synergique à temps fixe sont données par les Figures 3.14–3.16.

Les figures (3.10) , (3.11) et (3.14) illustrent les erreurs avec et sans contrôle, tandis que les figures (3.12) et (3.15) présentent la macro-variable. Ces figures démontrent le succès de la synchronisation. Les résultats de simulation montrent que l'efficacité de l'approche proposée est bien vérifiée et la synchronisation est atteinte.

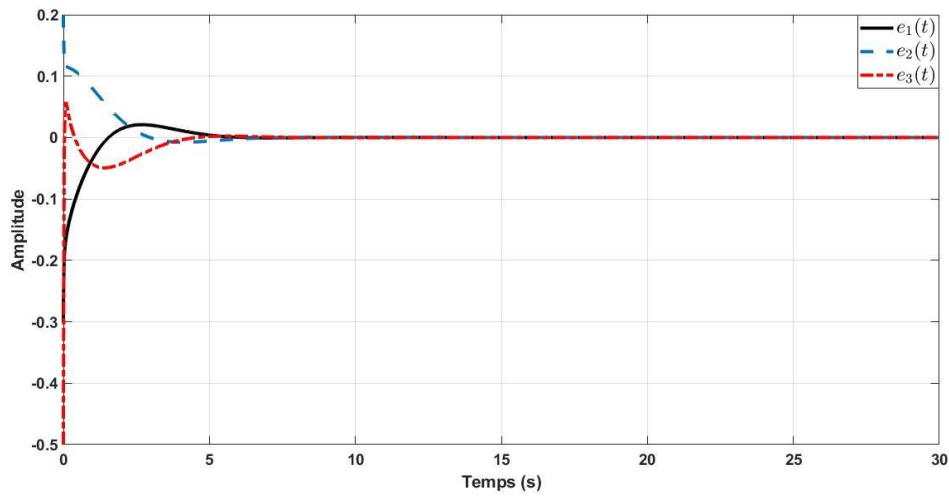


FIGURE 3.11: Erreurs de synchronisation avec le contrôle

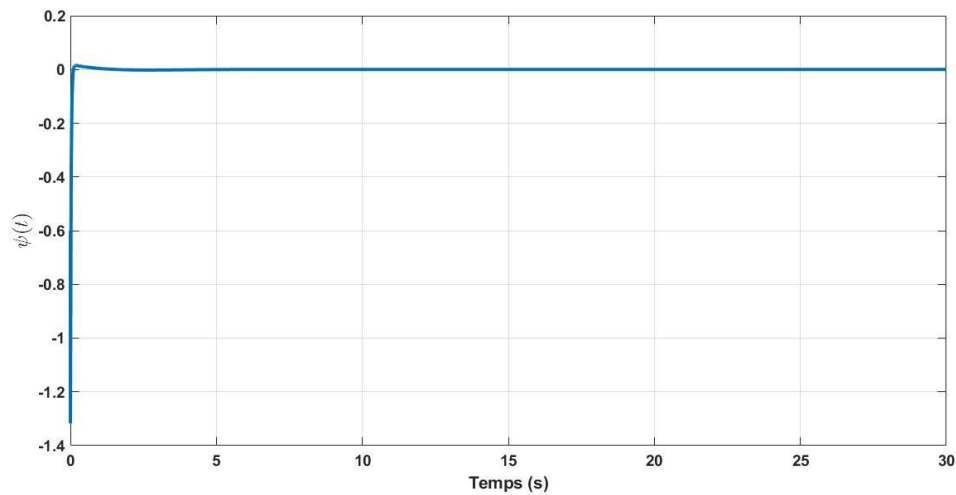


FIGURE 3.12: Macro-variable

3.3.3 Comparaison entre le contrôle synergétique et le contrôle par mode glissant

Les résultats de simulation obtenus dans l'application 1 mettent en évidence les nombreux avantages du contrôle par mode glissant. Cependant, il est important de reconnaître un inconvénient majeur associé à cette méthode, à savoir le phénomène de réticence induit par la discontinuité de la commande. En revanche, la technique de contrôle synergétique offre une approche entièrement continue, dépourvue de termes discontinus, ce qui la rend plus performante

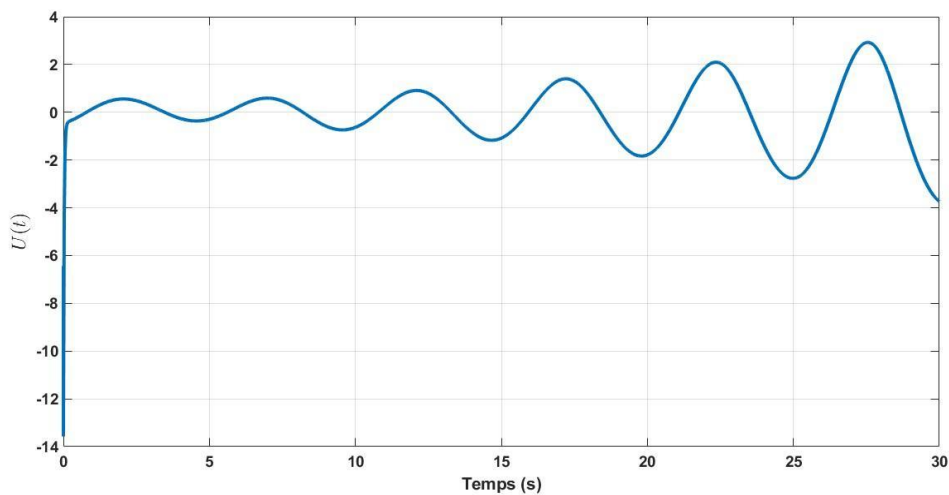


FIGURE 3.13: L'entrée de contrôle

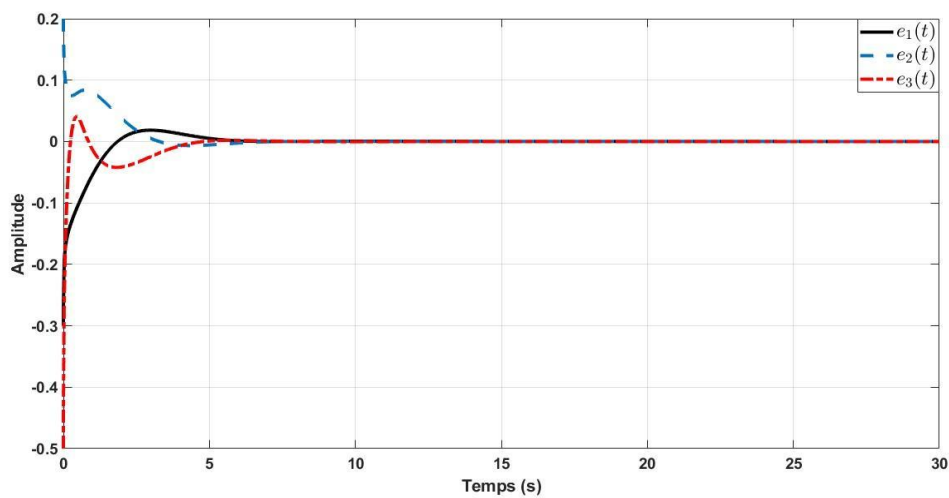


FIGURE 3.14: Erreurs de synchronisation avec contrôle

et efficace par rapport au contrôle par mode glissant.

Les principaux avantages de la méthode de contrôle synergétique incluent :

- Absence de phénomène de bavardage grâce au contrôle synergétique d'ordre fractionnaire.
- Garantie de convergence de la macro-variable, avec un temps de convergence uniformément délimité.

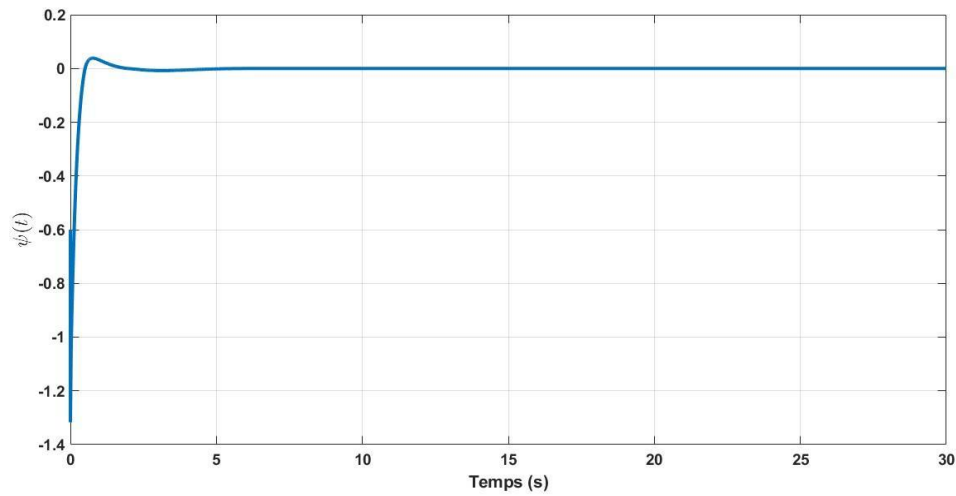


FIGURE 3.15: Macro-variable

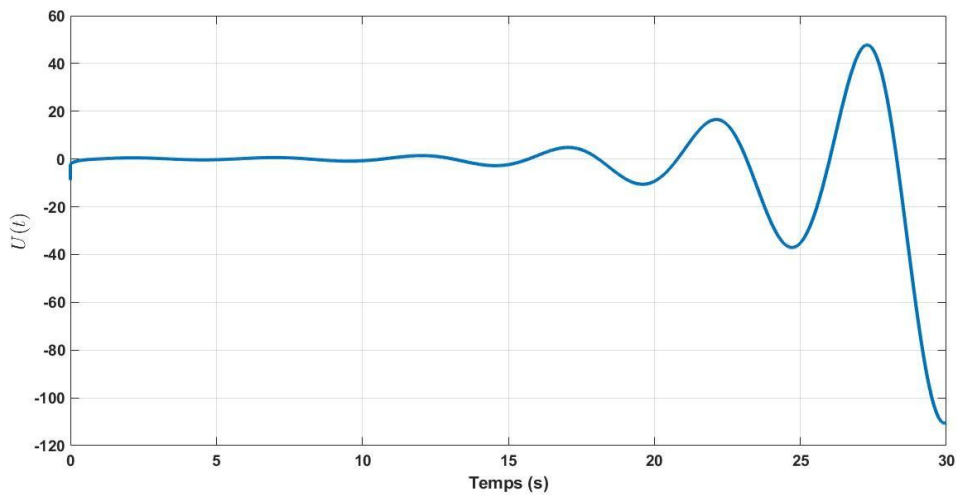


FIGURE 3.16: Contrôle d'entrée

3.4 Conclusion

Ce chapitre présente une approche novatrice combinant la commande synergétique d'ordre fractionnaire avec la méthode de contrôle à temps fixe pour la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Cette méthode fiable repose sur le principe de contraindre un système sous contrôle à respecter une contrainte de conception prédéfinie, en utilisant une loi de contrôle continue et une macro-variable. Malgré des conditions initiales et des systèmes chaotiques variés, la synchronisation a été réalisée avec succès. De plus, l'algorithme de contrôle proposé,

en plus de sa capacité à éliminer les bavardages, assure la convergence de la macro-variable en temps fixe.

Une comparaison exhaustive a été effectuée entre la méthode étudiée dans ce chapitre, à savoir la commande synergétique et synergétique à temps fixe, et la commande par mode glissant. Les résultats démontrent une nette supériorité de notre approche en termes de performance et de robustesse.

Conclusion Générale

Le travail présenté dans ce mémoire se concentre sur la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire à l'aide de la commande synergétique.

Pour atteindre nos objectifs, nous avons commencé par présenter quelques définitions préliminaires sur les systèmes dynamiques chaotiques et leurs caractéristiques, ainsi qu'un aperçu général du calcul fractionnaire et des exemples de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

Le concept de synchronisation des systèmes chaotiques et les techniques couramment utilisées dans la littérature, telles que la synchronisation basée sur l'observateur et le contrôleur, ont été exposés dans le deuxième chapitre de ce mémoire.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié une méthode de contrôle synergétique, applicable à une grande variété de systèmes non linéaires. Cette méthode combine les avantages d'une technique robuste, à savoir la commande par mode glissant, avec ceux de la commande synergétique à temps fixe.

Pour conclure cette section, nous avons testé la commande par mode glissant et la commande synergétique sur deux systèmes chaotiques identiques d'ordre fractionnaire avec différentes conditions initiales. Des simulations ont été réalisées avec le logiciel MATLAB pour vérifier notre travail, suivies d'une analyse comparative de ces deux commandes.

D'après les résultats de simulation, bien que la commande par mode glissant soit robuste et facile à implémenter, elle présente un inconvénient majeur : le phénomène de réticence causé par la discontinuité de la commande.

En revanche, les résultats obtenus avec le contrôle synergétique montrent les hautes performances de cette méthode, notamment en éliminant le phénomène de réticence et en assurant une convergence rapide des erreurs. Afin de confirmer nos résultats nous n'avons appliquée cette commande pour deux autres systèmes différents et les résultats obtenu montrent toujours l'efficacité de cette approche.

Les perspectives pour ce travail sont vastes. Nous pouvons, entre autres, envisager des applications pour le cryptage des données (signaux, images, etc.).

Bibliographie

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Physical review letters* 64 (8) (1990) 821.
- [2] I. Petráš, *Fractional-order nonlinear systems : modeling, analysis and simulation*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [3] S. Alima, *Les systèmes chaotiques et leurs applications dans la sécurité de communication*.
- [4] S. Yang, C. Duan, Generalized synchronization in chaotic systems, *Chaos, Solitons & Fractals* 9 (10) (1998) 1703–1707.
- [5] V. Sundarapandian, S. Sivaperumal, Sliding controller design of hybrid synchronization of four-wing chaotic systems, *International Journal of Soft Computing* 6 (5) (2011) 224–231.
- [6] R. A. Jiang, Zhenhua et Dougal, Contrôle synergique des convertisseurs de puissance pour la charge par courant pulsé de batteries avancées à partir d’une source d’alimentation à pile à combustible, *Transactions IEEE sur l’électronique de puissance* 19.
- [7] D. Lavoie, *Le jeu des possibles : méthode de conception en design inspirée de la théorie de chaos*, Université du Québec à Chicoutimi, 1997.
- [8] L. Vieira, N. W. Pinède, Internet et les théories du chaos, *Communication & Langages* 124 (1) (2000) 58–74.
- [9] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, D. Chillingworth, Chaos : an introduction to dynamical systems, *SIAM Review* 40 (3) (1998) 732–732.
- [10] E. G. Da Silva, *Introduction aux systèmes dynamiques et chaos*.
- [11] O. Megherbi, *Etude et réalisation d’un système sécurisé à base de systèmes chaotiques*, Ph.D. thesis, Université Mouloud Mammeri (2013).
- [12] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of atmospheric sciences* 20 (2) (1963) 130–141.

-
- [13] E. Lorenz, Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas, in : AAAS 139th meeting, 1972.
- [14] E. Cherrier, Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL (2006).
- [15] L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, G.-Q. Zhong, A universal circuit for studying and generating chaos. i. routes to chaos, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications* 40 (10) (1993) 732–744.
- [16] A. Zemouche, Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires, Ph.D. thesis, Université Louis Pasteur-Strasbourg I (2007).
- [17] Y. L. Chen, *Bifurcation and chaos in engineering*, Springer, 1998.
- [18] R. Kharel, Design and implementation of secure chaotic communication systems, Ph.D. thesis, Northumbria University (2011).
- [19] L. Boi, E. Bois, Mathématiques créatives, physiques significatives et le livre ouvert de la nature : quelques remarques sur les systèmes dynamiques, le chaos, le déterminisme et la nature du temps, *Eikasia* 3 (2009) 38–65.
- [20] Z. CHOUGUI, Quelques schémas de synchronisation chaotique dans les systèmes dynamiques fractionnaires, Ph.D. thesis (2021).
- [21] G. B. Mindlin, X.-J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore, N. Tufillaro, Classification of strange attractors by integers, *Physical Review Letters* 64 (20) (1990) 2350.
- [22] B. B. Mandelbrot, B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Vol. 1, WH freeman New York, 1982.
- [23] H. Hamiche, Inversion à gauche des systèmes dynamiques hybrides chaotiques : Application à la transmission sécurisée de données, Ph.D. thesis, Université Mouloud Mammeri (2011).
- [24] D. Valério, J. S. Da Costa, *An introduction to fractional control*, Vol. 91, IET, 2013.
- [25] F. Lydia, M. Souad, Etude de dispositifs de transmission sécurisée de données à base de systèmes chaotiques d'ordre entier et fractionnaire, Ph.D. thesis, Université Mouloud Mammeri (2012).
- [26] D. Idiou, A. Charef, Implémentation analogique de dérivateur et d'intégrateur d'ordre fractionnaire variable.

-
- [27] M.-S. Abdelouahab, Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, Mémoire de Magister, Université Mentouri de Constantine.
- [28] I. Podlubny, Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, elsevier, 1998.
- [29] T. Menacer, N. Hamri, Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires.
- [30] I. Podlubny, Fractional-order systems and $\pi/\sup/\spl\lambda//d/\sup/\spl\mu//$ -controllers, IEEE Transactions on automatic control 44 (1) (1999) 208–214.
- [31] T. Kaczorek, K. Rogowski, Fractional linear systems and electrical circuits, Springer, 2015.
- [32] S. Das, Functional fractional calculus, Vol. 1, Springer, 2011.
- [33] M. García-Fiñana, L. M. Cruz-Orive, Fractional trend of the variance in cavalieri sampling, Image Analysis and Stereology 19 (2) (2000) 71–79.
- [34] X.-S. Yang, Concepts of synchronization in dynamical systems, Physics Letters A 260 (5) (1999) 340–344.
- [35] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, Phase synchronization of chaotic oscillators, Physical review letters 76 (11) (1996) 1804.
- [36] C. Huygens, H. Oscillatorium, Sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae, Christiaan Huygens, 1st edition (1673).
- [37] E. Cherrier, Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL (2006).
- [38] R. B. Mahmoud, S. Hammami, M. Benrejeb, Sur l'analyse et la synchronisation de systèmes chaotiques chen, Revue e-STA 2.
- [39] A. Hank, R. Younsi, K. E. Kemih, Systèmes chaotiques pour la transmission sécurisée de données, Ph.D. thesis, Université de Jijel (2020).
- [40] S. Kassim, Contribution à la transmission numérique sécurisée de données à base de générateurs de séquences chaotiques d'ordre non entier, Ph.D. thesis, Université Mouloud Mammeri (2018).
- [41] O. Megherbi, Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques, Ph.D. thesis, Université Mouloud Mammeri (2013).

- [42] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Physical review letters* 64 (8) (1990) 821.
- [43] G. Zheng, Formes normales d'observabilité paramétrées par les sorties : Applications au cryptage par synchronisation de systèmes chaotiques, Ph.D. thesis, Cergy-Pontoise (2006).
- [44] X. Tan, J. Zhang, Y. Yang, Synchronizing chaotic systems using backstepping design, *Chaos, Solitons & Fractals* 16 (1) (2003) 37–45.
- [45] A. F. Filipov, Differential equations with discontinuous right-hand side, in : *Amer. Math. Soc*, 1988, pp. 191–231.
- [46] V. I. Utkin, *Sliding modes in control and optimization*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [47] J.-J. E. Slotine, *Applied nonlinear control*, PRENTICE-HALL google schola 2 (1991) 1123–1131.
- [48] A. Si Ammour, Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire, Ph.D. thesis, Université Mouloud Mammeri (2011).
- [49] A. Kolesnikov, G. Veselov, A. A. Kolesnikov, A synergetic approach to control theory, in : *Modern applied control theory*, 2000.
- [50] E. Schöll, *Nonlinear spatio-temporal dynamics and chaos in semiconductors*, no. 10, Cambridge University Press, 2001.
- [51] H. Haken, Visions of synergetics, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 7 (09) (1997) 1927–1951.
- [52] A. Kilbas, *Theory and applications of fractional differential equations*.
- [53] D. Li, K. Proddatur, E. Santi, A. Monti, Synergetic control of a boost converter : Theory and experimental verification, in : *Proceedings IEEE SoutheastCon 2002 (Cat. No. 02CH37283)*, IEEE, 2002, pp. 197–200.
- [54] I. Kondratiev, E. Santi, R. Dougal, Robust nonlinear synergetic control for m-parallel-connected dc-dc boost converters, in : *2008 IEEE power electronics specialists conference*, IEEE, 2008, pp. 2222–2228.
- [55] N. Djeghali, M. Bettayeb, S. Djennoune, Sliding mode active disturbance rejection control for uncertain nonlinear fractional-order systems, *European Journal of control* 57 (2021) 54–67.

- [56] A. Hamoudi, s. Alouane, S. Aberkane, N. Djeghali, M. Bettayeb, Fixed-time synergetic control for synchronization of fractional-order chaotic systems, in : ICEAPI 2023, IEEE, 2023.
- [57] I. Petráš, Fractional-order nonlinear systems : modeling, analysis and simulation, Springer Science & Business Media, 2011.