

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERY DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etude
De MASTER ACADEMIQUE
Spécialité : commande des systèmes
Filière : Génie Electrique

Présenté par
M^{elle} ADJAOUT Lynda Sabrina
M^{elle} MAHMOUDI Faiza

Mémoire dirigé par *M. SALHI Boualem*

Thème

Méthode des Moindres Carrés
Comparaison et application :
Cas continu et discret

Mémoire soutenu publiquement , septembre 2016 devant le jury composé de:

M. ALLAD Mourad
Maitre Assistant, UMMTO, Président

M. SALHI Boualem
Maitre Assistant, UMMTO, Rapporteur

M. Charif Moussa
Maitre Assistant, UMMTO, Examineur

M. Haddouche Rezki
Maitre Assistant, UMMTO, Examineur

Remerciements

Nos premiers remerciements s'adressent à notre encadreur, monsieur *SALHI*, pour avoir encadré nos travaux durant ces mois. Sa disponibilité quotidienne, ses remarques avisées et son soutien ont été une aide précieuse pour mener ces travaux à bien. Nous avons beaucoup apprécié de travailler sous sa direction, d'autant plus que ceci m'a permis d'approfondir mes connaissances grâce à ses judicieux conseils et que la précision et la qualité dans le travail n'étaient pas incompatibles avec détente et sérénité.

Bien entendu on n'oublie pas nos compagnons et tous nos amis qui ont vécu ou vivent encore ces instants qui m'ont permis d'atteindre mon objectif et je leur souhaite autant.

Naturellement, c'est à nous familles que vont nos remerciements les plus chaleureux, leur soutien sans faille a été pour beaucoup dans l'aboutissement de cette étape, à nous frères pour leurs encouragements. Si quelqu'un a vraiment vécu autant que nous les moments les plus difficiles comme les plus agréables de ces mois, c'est bien nous mère, vous avez su comment trouver les mots pour nous motiver et nous donner l'envie d'y arriver. Votre patience et confiance en nous n'ont toujours fait aller de l'avant car au delà de la de ce mémoire, c'est tout au long de nos études qu'elles nous ont encouragé, soutenu et épaulé. Si on en est là aujourd'hui c'est principalement grâce à vous, Merci... Sans eux la réalisation de ce travail aurait sans doute été beaucoup plus difficile. et pour finir. Il y a pourtant des fois où les mots ne suffisent pas pour exprimer tout ce que l'on ressent pour quelqu'un.

Finalement, on aimerait remercier tous celles et ceux qui nous ont aidé à réaliser ce mémoire.

Table des matières

Table des matières

Introduction	1
1. Méthode Moindres carrés : cas continu.....	3
1.1 Introduction.....	3
1.2 Norme et convexité.....	3
1.2.1 Norme vectorielle	3
1.2.2 Norme matricielle	3
1.2.3 Norme \mathcal{L}_p	4
1.2.4 Convexité.....	5
1.3 Identification par la méthode Moindre carrée (MC)	5
1.3.1 Modèle paramétrique linéaire	5
1.3.2 Algorithme MC non récursif	7
1.3.3 Algorithme MC récursif	10
1.4 Différentes déclinaisons de l'Algorithme des MC	11
1.4.1 Algorithme des Moindres carrés purs.....	11
1.4.2 Algorithme des Moindres carrés purs avec réinitialisation	13
1.4.3 Algorithme des Moindres carrés avec un facteur d'oubli	15
1.4.4 Algorithme des Moindres carrés avec un facteur d'oubli et excitation persistance.....	16
1.5 Exemple d'application (filtre RC)	16
1.6 Conclusion	19
2. Méthodes Moindres carrés : cas discret	20
2.1 Introduction.....	20
2.2 Norme	20
2.3 Modèle par identification.....	20
2.3.1 Modèle ARMA	20
2.3.2 Modèle ARMA X	21
2.4 Identification par la méthode MC.....	23
2.4.1 Algorithme des moindres carrés non récursif.....	24
2.4.2 Algorithme des moindres carrés récursif.....	26
2.5 Différentes déclinaisons	28
2.5.1 Algorithme des moindres carrés à gain non-décroissant.....	29
2.5.2 Les variantes d'algorithme des moindres carrés à gain non- Décroissant.....	30
2.5.2.1 Algorithme des moindres carrés avec un facteur d'oublie fixe... ..	31
2.5.2.2 Algorithme des moindres carrés avec un facteur transitoire.....	32
2.5.2.3 Algorithme des moindres carrés avec un gain à trace constant	32
2.5.2.4 Algorithme des moindres carrés avec réinitialisation du gain.....	33
2.6 Exemple d'application (filtre RC)	34
2.7 Conclusion	38
3. Comparaison, simulation et essai pratique	39
3.1 Introduction.....	39
3.2 Comparaison des deux cas.....	39
3.3 Machine à courant continu MCC.....	39
3.3.1 Définition de la MCC	39
3.3.2 Les caractéristiques de la MCC	39

3.3.3	Schéma équivalent de la MCC	40
3.3.4	Modélisation du système	40
3.3.4.1	modèle continu	40
3.3.4.2	Modèle discret.....	43
3.4	Simulation.....	46
3.4.1.1	Simulation de cas continu	46
3.4.1.2	Simulation de cas discret	49
3.5	Essai pratique.....	50
3.6	Conclusion	52
	Conclusion générale	53

Bibliographie

La méthode des moindres carrés est une méthode ancienne datant du dix-huitième siècle; elle a été développée par Mr Gauss. Dans le cadre de ces travaux sur les planètes, Mr Gauss a développé cette méthode pour déterminer les orbites des planètes à partir des positions observées. Mr Gauss a eu l'idée d'approximer l'orbite d'une planète par un modèle mathématique dont les paramètres sont ajustables. En effet, cette approximation est réalisée par la minimisation de la somme des carrés des erreurs, dite "erreur d'estimation", entre les positions observées et celles générées par le modèle mathématique [1] [2].

Au fil du temps, cette méthode a reçu une très grande attention de la communauté scientifique. En effet, les bons résultats de cette méthode lui ont permis d'être appliquées dans diverses disciplines avec succès. Cependant, la complexité des systèmes et le développement des mathématiques ont poussé les scientifiques à étudier plus profondément cette méthode et à développer d'autres méthodes telles que la méthode du gradient ...etc.

Dans la discipline de la commande des systèmes, le développement de la méthode des moindres carrés a donné lieu à un domaine particulier pour l'automatique, en l'occurrence le domaine de l'identification et encore plus au domaine de la commande adaptative. En effet, la le développement des méthodes récursives d'identification ont permis le développement des commandes adaptatives pour les systèmes variant dans le temps.

La discipline de la commande des systèmes ayant suivi deux directions "concurrente", la commande des systèmes à modèle échantillonné et la commande des systèmes à modèle continu; les chercheurs ont développé pour chaque cas l'algorithme des moindres carrés récursif. L'objectif de ce mémoire est donc d'étudier et de présenter, pour chaque cas, l'algorithme des moindres carrés récursif et ces différentes déclinaisons. Nous étudions l'ajustement et la convergence des paramètres dans les deux cas. Ainsi, on citera des notions importantes, des définitions et des théorèmes qui seront utile pour la bonne compréhension des algorithmes. D'autre part, on tentera de présenter une comparaison théorique entre les deux versions, discrètes et continue.

Pour les deux versions de l'algorithme récursif des moindres carrés, des simulations réalisées sous le logiciel *Matlab/Simulink* pour un système électrique simple «Filtre RC» seront présentés. D'autre part, un système pratique constitué d'une machine à courant continue alimentée par un hacheur série sera utilisé pour réalisé les tests de comparaison entre les deux

versions de l'algorithme par simulation. Pour terminer ce travail, un test pratique de l'algorithme récursif des moindres carrés dans sa version discrète a été réalisé au laboratoire "Machine Electrique" sur le système précédent.

Nous espérons que la lecture de ce travail saura éveiller un certain intérêt chez le lecteur non averti et qu'elle plaira aux spécialistes.

1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode d'identification dite des moindres carrés et ce pour les systèmes continus mono entrée-mono sortie (SISO). Cette méthode sert à trouver un ensemble de paramètres permettant de rendre l'erreur nulle entre la sortie du système et celle du modèle paramétrique linéaire. On présentera en premier lieu l'algorithme des moindres carrés non récursif, et à partir de celui-ci on démontrera la version récursive. Une analyse de convergence de l'algorithme sera aussi présentée.

2. Normes et convexité

Les algorithmes en identification étant basés sur la notion de minimisation des fonctions convexes. D'autre part l'analyse de la convergence des algorithmes d'identification en général et celui des moindres carrés en particulier fait appel à plusieurs notions mathématiques [1][7][8]. Nous rappelons ici les définitions usuelles des normes et des fonctions convexes.

2.1. Norme vectorielle

La norme $|x|$ d'un vecteur x peut être considérée comme la taille ou la longueur du vecteur x . De même, $|x - y|$ peut être considéré comme étant la distance entre le vecteur x et y . La norme d'un vecteur x est une fonction à valeur réelle et ayant les propriétés suivantes :

- i. $|x| \geq 0$ avec $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- ii. $|\alpha x| = |\alpha| |x|$ pour tout scalaire α .
- iii. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire).

2.2. Norme matricielle

Une matrice $A \in R^{m \times n}$ est une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension n vers un espace vectoriel de dimension m . Nous définissons la norme induite d'une matrice A comme suit.

Soit $|\cdot|$ une norme vectorielle donnée, alors pour chaque matrice $A \in R^{m \times n}$, la quantité $\|A\|$ définie par

$$\|A\| \triangleq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in R^n}} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

Est dite la norme induite matricielle de la matrice A correspondante à la norme vectorielle $|\cdot|$. Cette dernière possède en plus des propriétés (i) à (iii) de la définition 2.1, les propriétés suivantes.

- i. $|Ax| \leq \|A\| |x|, \forall x \in \mathcal{R}^n$
- ii. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- iii. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Les normes les plus couramment utilisées sont rassemblées dans le tableau suivant.

Tableau 3.1 normes couramment utilisées :

Norme sur \mathcal{R}^n	Norme induite sur $\mathcal{R}^{m \times n}$
$ x _\infty = \max_i x_i $ (Norme infinie)	$\ A\ _\infty = \max_i \sum_j a_{ij} $ (somme sur une ligne)
$ x _1 = \sum_i x_i $	$\ A\ _1 = \max_j \sum_i a_{ij} $ (somme sur une colonne)
$ x _2 = (\sum_i x_i ^2)^{1/2}$ (Norme euclidienne)	$\ A\ _2 = [\lambda_m(A^T A)]^{1/2}$, Ou $\lambda_m(M)$ est la valeur propre maximale de M

2.3. Norme \mathcal{L}_p

Pour les fonctions temporelles et pour tout $p \in [1, \infty[$, on définit la norme \mathcal{L}_p comme suit :

$$\|x\|_p \triangleq \left(\int_0^\infty |x(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}$$

On dit que x appartient à \mathcal{L}_p si $\|x\|_p$ est une valeur finie. La norme \mathcal{L}_∞ est définie comme :

$$\|x\|_\infty \triangleq \sup_{t \geq 0} |x(t)|$$

Dans les définitions de $\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_\infty$ ci-haut ; $x(t)$ peut être un scalaire ou une fonction vectorielle. Si x est une fonction scalaire, alors $|\cdot|$ désigne la valeur absolue. Si x est une fonction vectorielle dans \mathcal{R}^n alors $|\cdot|$ désigne n'importe quelle norme dans \mathcal{R}^n .

2.4. Convexité

L'analyse convexe traite les fonctions et les ensembles convexes, elle est l'intermédiaire entre l'algèbre linéaire et l'analyse non linéaire. Elle nous permet de démontrer un grand nombre d'inégalités remarquables (inégalités de convexité), et d'éliminer la distinction entre le minimum local et le minimum globale se qui signifie qu'elle a aussi un rôle en optimisation.

Définition 1 [6] : On dit qu'une fonction $f(x)$ est convexe sur un ensemble convexe I dans \mathcal{R}^n si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1]; \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

Pour les fonctions convexes, il y a une équivalence entre le minimum local et le minimum global. Une fonction convexe possède les propriétés suivantes [6][7].

Soit f convexe sur I .

- i. La fonction f admet Un seul minimum.
- ii. Si f admet un minimum local y_0 , alors c'est un minimum global.
- iii. Si un minimum local (donc global) est atteint en deux points $x_1 < x_2$, alors f est constante sur $[x_1, x_2]$.
- iv. f est dite strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte pour $x_1 \neq x_2$.
- v. Si f et g sont deux fonctions convexes, alors $f + g$ est une fonction convexe.
- vi. Toute fonction convexe sur I est continu, et elle admet une dérivé à droite (respectivement à gauche).

3. Identification par la méthode des moindres carrés (MC)

3.1. Modèle paramétrique linéaire

En identification, quelque soit le cas auquel on s'intéresse (continu ou échantillonné), on cherche toujours une écriture particulière de modèle du système. Cette écriture est dite Modèle Paramétrique Linéaire. Pour le cas linéaires continus ce modèle est obtenu comme suit [5].

Soit un système linéaire continu d'ordre n tel que $m \leq n$ (système propre ou strictement propre) où $y, u, \frac{d^n y}{dt^n}, \frac{d^m u}{dt^m}$ sont respectivement la sortie, l'entrée et leur nième dérivée. a_n, b_m sont les paramètres du système.

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} - \dots - a_0 y + b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u \quad (1.1)$$

Si on rassemble les paramètres dans le vecteur des paramètres θ^* ; les entrées, sorties et leurs dérivées dans le vecteur des signaux Y tel que :

$$\theta^* = [b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0]^T$$

$$Y = \left[\frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}}, \dots, u, -\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, -\frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}}, \dots, y \right]^T$$

On obtient la forme des paramètres linéaire suivante: $\frac{d^n y}{dt^n} = \theta^{*T} Y$

En réalité les seuls signaux disponibles (mesurés) sont l'entrée u et la sortie y . Comme les différentes dérivées ne sont pas disponibles et que la dérivation n'est pas souhaitée, donc le modèle précédent ne peut pas être utilisé directement. Pour éviter la dérivation, le modèle précédent est modifié on ajoutant des deux côtés de l'égalité (1.1) la quantité suivante:

$$\left[\lambda_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \dots + \lambda_0 \right] y$$

On obtient

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \left[\lambda_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \dots + \lambda_0 \right] y =$$

$$\left[-a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} - \dots - a_0 \right] y + \left[b_m \frac{d^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \right] u + \left[\lambda_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \dots + \lambda_0 \right] y$$

Après arrangement on aura :

$$\left[\frac{d^n}{dt^n} + \lambda_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \dots + \lambda_0 \right] y = \left[b_m \frac{d^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \right] u + \left[(\lambda_{n-1} - a_{n-1}) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + (\lambda_{n-2} - a_{n-2}) \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \dots + (\lambda_0 - a_0) \right] y$$

Si l'on note $\Lambda = \left[\frac{d^n}{dt^n} + \lambda_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \dots + \lambda_0 \right]$. On obtient alors le modèle paramétrique linéaire modifié suivant:

$$y = \theta^{*T} \phi \quad (1.2)$$

Où θ^* est le nouveau vecteur paramètres donné par:

$$\theta^* = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+m+1}]^T = [b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, (\lambda_{n-1} - a_{n-1}), (\lambda_{n-2} - a_{n-2}), \dots, (\lambda_0 - a_0)]^T$$

Et ϕ est le vecteur des signaux filtrés:

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n+m+1}]^T = \left[\frac{d^m}{\Lambda} u, \frac{d^{m-1}}{\Lambda} u, \dots, \frac{u}{\Lambda}, \frac{d^{n-1}}{\Lambda} y, \frac{d^{n-2}}{\Lambda} y, \dots, \frac{y}{\Lambda} \right]^T$$

En effet les signaux ϕ_i sont obtenus par filtrage de l'entrée u et la sortie y ou les différents filtres sont donnés dans le domaine de Laplace par :

$$\left[\frac{s^m}{\Lambda(s)}, \frac{s^{m-1}}{\Lambda(s)}, \dots, \frac{1}{\Lambda(s)}, \frac{s^{n-1}}{\Lambda(s)}, \frac{s^{n-2}}{\Lambda(s)}, \dots, \frac{1}{\Lambda(s)} \right]$$

$$\Lambda(s) = s^n + \lambda_{n-1} s^{n-1} + \lambda_{n-2} s^{n-2} + \dots + \lambda_0$$

Où les λ_i sont choisis tel que le polynôme $\Lambda(s)$ soit stable.

3.2. Algorithme MC non récursif

L'algorithme des moindres carrés non récursif est obtenu par la minimisation de la fonction convexe suivante dite fonction de coût [1][3][7] :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(y(\tau) - \theta^T(t)\phi(\tau))^2}{m^2} d\tau + \frac{1}{2} e^{-\beta t} (\theta - \theta_0)^T Q_0 (\theta - \theta_0) \quad (1.3)$$

Telle que:

- $Q_0 = Q_0^T > 0$; est une matrice symétrique définie positive.
- $\beta > 0$; constante réel dite facteur d'oubli.
- $\theta_0 = \theta(t = 0)$.
- $y(t) - \theta^T(t)\phi(t) = e(t)$; est l'erreur d'estimation.
- $\frac{y(t) - \theta^T(t)\phi(t)}{m^2} = \xi(t)$; est l'erreur d'estimation normalisée, Où $m^2 = 1 + n_s^2$

Telle que : $n_s^2 = \phi^T P \phi$ pour $P = P^T > 0$, n_s est le signal de normalisation conçu de telle sorte que $\frac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty$.

Dans l'équation précédente, m^2 est le signal de normalisation. L'introduction du terme m^2 permet de normaliser les signaux, c'est-à-dire de faire en sorte que les signaux du modèle ne divergent pas même si la sortie du système diverge i.e. $\frac{y}{m} \in \mathcal{L}_\infty$, $\frac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty$. Dans le cas où le système est stable on prend $m = 1$. Puisque $\frac{y}{m}, \frac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty$, alors $J(\theta)$ est une fonction convexe en fonction de θ sur \mathcal{R}^n . Par conséquent, tous minimum local est aussi un minimum globale et donc la relation suivante est satisfaite

$$\nabla J(\theta(t)) = 0, \forall t \geq 0$$

$$\begin{aligned} \nabla J(\theta) &= \frac{1}{2} \int_0^t \nabla \left[e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(y(\tau) - \theta(t)^T \phi(\tau))^2}{m^2} \right] d\tau + \left[e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(y(\tau) - \theta(t)^T \phi(\tau))^2}{m^2} \right]_{\tau=t} \nabla[t] \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\beta t} \nabla [(\theta - \theta_0)^T Q_0 (\theta - \theta_0)] \end{aligned}$$

$$\nabla J(\theta) = - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(y(\tau) - \theta(t)^T \phi(\tau))}{m^2} \phi(\tau) d\tau + e^{-\beta t} Q_0 (\theta - \theta_0) = 0$$

$$e^{-\beta t} Q_0 (\theta - \theta_0) - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{(y(\tau) - \theta(t)^T \phi(\tau))}{m^2} \phi(\tau) d\tau = 0$$

$$e^{-\beta t} Q_0 \theta(t) - e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 - \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{[\theta(t)^T \phi(\tau)] \phi(\tau)}{m^2} d\tau = 0$$

$$\left[e^{-\beta t} Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\phi(\tau)\phi(\tau)^T}{m^2} \right] \theta(t) = e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau$$

$$\theta(t) = \left[e^{-\beta t} Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\phi(\tau)\phi(\tau)^T}{m^2} \right]^{-1} \left[e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau \right]$$

$$\theta(t) = P(t) \left[e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau \right] \quad (1.4)$$

$$\text{Où : } P(t) = \left[e^{-\beta t} Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\phi(\tau)\phi(\tau)^T}{m^2} \right]^{-1} \quad (1.5)$$

On peut éviter le calcul de l'inverse de $P(t)$ et ce en montrant que ça dérivée est donnée par :

$$\dot{P}(t) = \beta P(t) - P(t) \frac{\phi(t)\phi(t)^T}{m^2} P(t) \quad (1.6)$$

Ceci est obtenu en considérant l'identité suivante :

$$\frac{d}{dt}(P(t)P(t)^{-1}) = \dot{P}(t)P(t)^{-1} + P(t)\frac{d}{dt}P(t)^{-1}$$

$$P(t)\frac{d}{dt}[P(t)^{-1}] + \frac{d}{dt}P(t)P(t)^{-1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}P(t) = -P(t)\frac{d}{dt}[P(t)^{-1}]P(t)$$

$$P(t)^{-1} = e^{-\beta t} Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\phi(\tau)\phi(\tau)^T}{m^2} d\tau$$

$$\frac{d}{dt}[P(t)^{-1}] = -\beta e^{-\beta t} Q_0 + \int_0^t -\beta e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\phi(\tau)\phi(\tau)^T}{m^2} d\tau + \left[e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\phi(\tau)\phi(\tau)^T}{m^2} \right]_{\tau=t} \frac{d(t)}{dt}$$

$$= -\beta \left[e^{-\beta t} Q_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\phi(\tau)\phi(\tau)^T}{m^2} d\tau \right] + \frac{\phi(t)\phi(t)^T}{m^2}$$

$$= -\beta P(t)^{-1} + \frac{\phi(t)\phi(t)^T}{m^2}$$

$$\frac{d}{dt}P(t) = \beta P(t)P(t)^{-1}P(t) - P(t)\frac{\phi(t)\phi(t)^T}{m^2}P(t)$$

$$\dot{P}(t) = \beta P(t) - P(t)\frac{\phi(t)\phi(t)^T}{m^2}P(t) \quad (1.7)$$

L'algorithme des moindres carrés non récursif est donc donné par :

$$\begin{cases} \theta(t) = P(t) \left[e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau \right] \\ \dot{P}(t) = \beta P(t) - P(t)\frac{\phi(t)\phi(t)^T}{m^2}P(t) \\ P(t=0) = P(0) = Q_0^{-1} \end{cases} \quad (1.8)$$

3.3. Moindres carrés récursif

La version récursive de l'algorithme des moindres carrés est obtenue par dérivation de $\theta(t)$ dans (1.8) par rapport au temps.

$$\theta(t) = P(t) \left[e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau \right] \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) = \dot{P}(t) \left[e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau \right] + \\ P(t) \frac{d}{dt} \left[e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau \right] \\ = -\beta e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t -\beta e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau + \left[e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} \right]_{\tau=t} \frac{dt}{dt} \\ = -\beta e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 - \beta \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau + \frac{y(t)\phi(t)}{m^2} \\ = -\beta \left[e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau \right] + \frac{y(t)\phi(t)}{m^2} \end{aligned}$$

De (1.9) on tire : $\left[e^{-\beta t} Q_0 \theta_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{y(\tau)\phi(\tau)}{m^2} d\tau \right] = P(t)^{-1} \theta(t)$

On remplace dans (1.10) et on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \left[\beta P(t) - \frac{P(t) \phi(t) \phi(t)^T P(t)}{m^2} \right] P(t)^{-1} \theta(t) + P(t) \left[-\beta P(t)^{-1} \theta(t) + \frac{y(t) \phi(t)}{m^2} \right] \\
&= -P(t) \left[\frac{\phi(t) \phi(t)^T}{m^2} \right] \theta(t) + P(t) \frac{y(t) \phi(t)}{m^2} \\
&= P(t) \left[-\phi(t) \frac{[\phi(t)^T \theta(t)]}{m^2} + \frac{y(t) \phi(t)}{m^2} \right] \\
&= P(t) \left[\frac{y(t) \phi(t)}{m^2} - \frac{[\phi(t)^T \theta(t)]}{m^2} \phi(t) \right] \\
&= P(t) \left[\frac{y(t) - \phi(t)^T \theta(t)}{m^2} \right] \phi(t) \\
\dot{\theta}(t) &= P(t) \xi(t) \phi(t) \tag{1.11}
\end{aligned}$$

L'algorithme des moindres carrés récursif avec facteur d'oubli est donc le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = P(t) \xi(t) \phi(t) \\ \dot{P}(t) = \beta P(t) - P(t) \frac{\phi(t) \phi(t)^T}{m^2} P(t) \\ P(t=0) = P(0) = Q_0^{-1} \end{cases} \tag{1.12}$$

4. Différentes déclinaisons de l'algorithme des moindres carrés

4.1 Algorithme des moindres carrés pur

Dans la littérature de l'identification, lorsque le facteur d'oubli est pris nul ($\beta = 0$), l'algorithme précédent (1.12) est appelé algorithme des Moindres carrés pur. Il a une forme très similaire à celle du filtre de KALMAN [1]. Pour cette raison, la matrice P est généralement appelé la matrice de covariance.

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = P(t) \xi(t) \phi(t) \\ \dot{P}(t) = -P(t) \frac{\phi(t) \phi(t)^T}{m^2} P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

On peut étudier aisément l'évolution de la matrice P et ce en considérant son inverse. En effet, on peut montrer que $\dot{P}^{-1}(t) = \frac{\phi(t) \phi(t)^T}{m^2}$; ceci implique que $\dot{P}^{-1} \geq 0$ et donc la matrice P^{-1} est croissante et peut prendre de très grandes valeurs. Dans ce cas, la matrice P peut devenir arbitrairement petite et par conséquent alourdi l'adaptation dans

certaines directions. Ceci constitue l'un des principaux inconvénients de la méthode des moindres carrés pure. Malgré ces insuffisances, l'algorithme des moindres carrés pur a pour propriété de garantir la convergence des paramètres à des valeurs constantes comme décrit par le théorème suivant :

Théorème 1.1 : *L'algorithme des moindres carrés pur (1.13) garantit que :*

1. $\xi, \xi n_s, \theta, \dot{\theta}, P \in \mathcal{L}_\infty$
2. $\xi, \xi n_s, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2$
3. $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \bar{\theta}$ et $\bar{\theta}$ est constant
4. Et si $n_s, \phi \in \mathcal{L}_\infty$ et ϕ est une PE, donc $\theta(t)$ converge vers θ^* quand $t \rightarrow \infty$

Preuve :

De (1.12) nous avons $\dot{P} \leq 0$ donc $P(t) \leq P_0$; d'autre part $P(t)$ est définie positive c.-à-d. que $P(t) = P^T(t) \geq 0, \forall t \geq 0$. Dans ce cas $0 \leq P(t) \leq P_0$ d'où $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \bar{P}$.

Tell que $\bar{P}(t) = \bar{P}^T(t) \geq 0$ est une matrice constante.

En considérons maintenant que :

$$\frac{d}{dt}(P^{-1}\tilde{\theta}) = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}\tilde{\theta} + P^{-1}\dot{\tilde{\theta}} = \frac{\phi\phi^T\tilde{\theta}}{m^2} + \xi(t)\phi = 0$$

Où les deux dernières égalités sont obtenues en utilisant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}P^{-1} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1} \\ \xi(t) = -\frac{\tilde{\theta}^T\phi}{m^2} \end{cases}$$

Par conséquent, $P^{-1}(t)\tilde{\theta}(t) = P_0^{-1}(t)\tilde{\theta}(0)$ ce qui implique que : $\tilde{\theta}(t) = P(t)P_0^{-1}(t)\tilde{\theta}(0)$ dont en déduira que la limite est constante, d'où $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = \bar{P}P_0^{-1}(t)\tilde{\theta}(0)$. Dans ce cas on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta^* + \bar{P}P_0^{-1}(t)\tilde{\theta}(0) \triangleq \bar{\theta}$. Nous avons :

$$\begin{cases} \tilde{\theta}, \theta \in \mathcal{L}_\infty \\ \frac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty \end{cases} \Rightarrow \xi m = -\frac{\tilde{\theta}^T\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty \text{ Et } \xi, \xi n_s \in \mathcal{L}_\infty$$

Considérons maintenant la fonction de LYAPUNOV suivante :

$$V(\tilde{\theta}, t) = \frac{\tilde{\theta}^T P^{-1}(t)\tilde{\theta}}{2}$$

La dérivée temporelle \dot{V} de V est donnée par :

$$\dot{V} = \xi \tilde{\theta}^T \phi + \frac{\tilde{\theta}^T \phi \phi^T \tilde{\theta}}{2m^2} = -\xi^2 m^2 + \frac{\xi^2 m^2}{2} = -\frac{\xi^2 m^2}{2} < 0$$

D'où $V \in \mathcal{L}_\infty$ et $\xi m \in \mathcal{L}_2$. donc : $\xi, \xi n_s \in \mathcal{L}_2$

De (1.13), nous avons :

$$|\dot{\theta}| \leq \|P\| \frac{|\phi|}{m} |\xi m|$$

Puisque $P, \frac{\phi}{m}, \xi m \in \mathcal{L}_\infty$ et $\xi m \in \mathcal{L}_2$, nous en déduisant que $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$. Ceci achève la preuve des trois premiers points (1), (2), (3). La preuve du quatrième point est comme suit :

Les paramètres d'estimation tendent vers les vraies valeurs si $\tilde{\theta} \rightarrow 0$, du fait qu'on a $\tilde{\theta}(t) = P(t)P_0^{-1}(t)\tilde{\theta}(0)$, il est clair que $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ quand t tend vers l'infini si $P(t) \rightarrow 0$.

Puisque $\frac{d}{dt}P^{-1} = \frac{\phi\phi^T}{m^2}$ et en utilisons la propriété que ϕ est PE , c.-à-d. que $\int_t^{t+T_0} \phi(\tau)\phi^T d\tau \geq \alpha_0 T_0 I$ pour tout $\alpha_0, T_0 > 0$, on déduit que :

$$P^{-1}(t) - P^{-1}(0) = \int_0^t \frac{\phi\phi^T}{m^2} d\tau \geq n_0 \frac{\alpha_0 T_0}{\bar{m}} I \geq \left(\frac{t}{T_0} - 1\right) \frac{\alpha_0 T_0}{\bar{m}} I$$

Où $\bar{m} = \sup_t \{m^2(t)\}$ et n_0 est le plus grand entier qui satisfait $n_0 \leq \frac{t}{T_0}$, i.e., $n_0 \geq \frac{t}{T_0} - 1$.

Donc,

$$\begin{aligned} P^{-1}(t) &\geq P^{-1}(0) + \left(\frac{t}{T_0} - 1\right) \frac{\alpha_0 T_0 I}{\bar{m}} \\ &\geq \left(\frac{t}{T_0} - 1\right) \frac{\alpha_0 T_0 I}{\bar{m}} \quad \forall t > T_0 \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$P(t) \leq \left(\left(\frac{t}{T_0} - 1\right) \alpha_0 T_0 \right)^{-1} \bar{m} I \quad \forall t > T_0$$

Puisque $P(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et que la quantité $\left(\left(\frac{t}{T_0} - 1\right) \alpha_0 T_0 \right)^{-1}$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, nous pouvons conclure que $P(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, d'où $\tilde{\theta}(t) = P(t)P_0^{-1}\tilde{\theta}(0) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$

Remarque :

Il faut noter que le taux de convergence $\theta(t)$ à θ^* en Théorème II n'est pas garanti D'être exponentielle, même lorsque ϕ est PE. Tel qu'indiqué dans la preuve du théorème 1.1

$P(t)$ et $\tilde{\theta}$ satisfont

$$\begin{cases} P(t) \leq \frac{\bar{m}}{(t-T_0)^{\alpha_0}} I \\ |\tilde{\theta}(t)| \leq \frac{P_0^{-1} \bar{m}}{(t-T_0)^{\alpha_0}} |\tilde{\theta}(0)|, \quad \forall t > T_0 \end{cases}$$

Ceci montre que $|\tilde{\theta}(t)|$ converge vers zéro avec une vitesse de $\frac{1}{t}$.

4.2 Algorithme des moindres carrés purs avec réinitialisation

Dans le précédent cas, nous avons vu que la matrice P peut prendre des valeurs arbitrairement petite et donc alourdir la convergence. Pour éliminer ce problème et garder une bonne convergence, cette matrice est réinitialisée à chaque fois qu'elle devienne inférieure à une certaine valeur [1][3]. L'algorithme obtenu est dit Moindres carrés purs avec réinitialisation donné par :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = P(t) \xi(t) \phi(t) \\ \dot{P} = -P(t) \frac{\phi(t)\phi(t)^T}{m^2} P(t) \\ P(t_r^+) = P_0 = \rho_0 I \end{cases} \quad (1.14)$$

Où t_r est le temps correspondant à la condition $\lambda_{\min}(P(t)) \leq \rho_1$ et où $\rho_0 > \rho_1 > 0$ sont des scalaires de réglage. A proprement parler, les équations en (1.14) ne constituent plus l'algorithme des moindres carrés pur développé précédemment. Cependant, il se comporte comme l'algorithme des moindres carrés pur entre les instants de réinitialisation.

Théorème 2.1:

L'algorithme des moindres carrés purs avec réinitialisation présente les propriétés suivantes:

1. $\xi, \xi n_s, \theta, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$
2. $\xi, \xi n_s, \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2$
3. si $n_s, \phi \in \mathcal{L}_\infty$ et ϕ est une PE, donc $\theta(t)$ converge exponentiellement vers θ^* .

Preuve :

Les éléments de la matrice de covariance $P(t)$ sont des fonctions discontinues du temps, entre chaque deux discontinuités ces fonctions sont défini par l'équation différentiel (1.14). A l'instant de réinitialisation la discontinuité est telle que $P(t_r^+) = P_0 = \rho_0 I$.

Puisque P est décroissante on les relations suivante :

$$\begin{cases} \rho_0 I > P(t) > \rho_1 I \\ \rho_0^{-1} I > P^{-1}(t) > \rho_1^{-1} I \end{cases}, \forall t > 0$$

Considérons maintenant la fonction :

$$V(\tilde{\theta}, t) = \frac{\tilde{\theta}^T P^{-1}(t) \tilde{\theta}}{2} \quad (1.15)$$

La dérivation de V et après arrangement donne :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \frac{d(P^{-1})}{dt} \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\tilde{\theta}} = -\xi^2 m^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \frac{d(P^{-1})}{dt} \tilde{\theta}$$

$\forall t \in [t_1, t_2]$ où $[t_1, t_2] \subset [0, \infty[$ et pour lequel $t_r \notin [t_1, t_2]$ on a :

$$\dot{V} = -\xi^2 m^2 + \frac{1}{2} \frac{(\tilde{\theta}^T \phi)^2}{m^2} = -\frac{\xi^2 m^2}{2} < 0 \quad (1.16)$$

Aux instants de discontinuité t_r l'intégral de V donne :

$$V(t_r^+) - V(t_r) = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T (P^{-1}(t_r^+) - P^{-1}(t_r)) \tilde{\theta}$$

Puisque $P^{-1}(t_r^+) = \frac{1}{\rho_0} I$ et $P^{-1}(t_r) > \frac{1}{\rho_0} I$, alors $V(t_r^+) - V(t_r) < 0$ d'où $V(t)$ est

une fonction non croissante du temps. De ce faite on conclut que $V \in \mathcal{L}_\infty$ et

$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_\infty < \infty$. D'autre part, comme les instants de discontinuités t_r forment un ensemble ayant une mesure nulle, il résulte de (1.16) que ξm , $\xi \in \mathcal{L}_2$. Du fait que $V \in \mathcal{L}_\infty$ et $\rho_0^{-1} I > P^{-1}(t) > \rho_1^{-1} I$ nous concluons que $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow \xi, \xi m \in \mathcal{L}_\infty$.

A partir de $\xi m \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ et $\rho_0 I > P(t) > \rho_1 I$ nous déduisant que $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$. Ceci constitue la fin de la preuve des points (1) et (2) ; consternant le dernier point la preuve est semblable à celle présenté pour le théorème.2.

4.3 Algorithme des moindres carrés modifiés avec facteur d'oubli

Lorsque $\beta > 0$, la matrice de covariance $P(t)$ ne présente plus la problématique de devenir singulière (prendre des valeurs très faibles). Toutefois, $P(t)$ peut se développée sans limite lorsque $\dot{P} > 0$ car $\beta P > 0$ et du fait que $\frac{P\phi\phi^T P}{m^2}$ est seulement semi-définie positive [1]

[4]. Une manière d'éviter cette complication est de modifier l'algorithme des moindres carrés comme suit:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = P(t)\xi(t)\phi(t) \\ \dot{P} = \begin{cases} \beta P(t) - P(t) \frac{\phi(t)\phi^T(t)}{m^2} P(t) & \text{et } \|P(t)\| \leq \mathcal{R}_0 \\ 0 & \text{Ailleur} \end{cases} \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\text{Où : } \begin{cases} P(0) = P_0 = P_0^T > 0 \\ \|P_0\| \leq \mathcal{R}_0 \end{cases}$$

\mathcal{R}_0 est une matrice constante qui sert comme une limite supérieure pour $\|P\|$. Ceci garantit que $P(t) \in \mathcal{L}_\infty$ et elle est désigné sous le nom Moindres carrés modifié avec facteur d'oubli. Cette nouvelle version garantit les mêmes propriétés que la version dite Moindres carrés pures avec réinitialisation. Ils peuvent être établis en utilisant a même fonction Lyapunov précédente et l'identité $\frac{dP^{-1}}{dt} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}$. En établie que $\frac{dP^{-1}}{dt}$ et \dot{V} sont par :

$$\frac{dP^{-1}}{dt} = \begin{cases} -\beta P^{-1} + \frac{\phi\phi^T}{m^2} & \text{Si } \|P\| \leq \mathcal{R}_0 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

Où $P^{-1}(0) = P_0^{-1}$, qui conduit à :

$$\dot{V} = \begin{cases} -\frac{\xi^2 m^2}{2} - \frac{\beta}{2} \tilde{\theta}^T P^{-1} \tilde{\theta} & \text{si } \|P\| \leq \mathcal{R}_0 \\ -\xi^2 m^2 & \text{Ailleur} \end{cases}$$

Puisque $P(t)$ est bornée et définie positif et que $\dot{V} \leq -\frac{\xi^2 m^2}{2} \leq 0$, alors ξm , $\xi \in \mathcal{L}_2$. Le reste de l'analyse est exactement la même que dans la démonstration du théorème 2.

4.4 Algorithme des Moindres carrés avec facteur d'oubli et PE

Les modifications décrites ci-dessus ne sont pas nécessaires lorsque $n_s, \phi \in \mathcal{L}_\infty$ et ϕ est PE [1]. La propriété PE de ϕ garantit que sur un intervalle de temps, l'intégrale de $-\frac{P\phi\phi^T P}{m^2}$ est une matrice définie négative qui contrebalance l'effet du terme définie positif βP où $\beta > 0$ dans l'équation de P et garantit que $P \in \mathcal{L}_\infty$.

Preuve

Si $n_s, \phi \in \mathcal{L}_\infty$ et ϕ est PE alors l'algorithme des moindres carrés récursif avec facteur d'oubli $\beta > 0$ donnée par

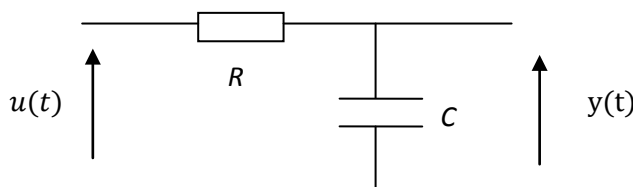
$$\begin{cases} \dot{\theta} = P(t)\xi(t)\phi(t) \\ \dot{P} = \beta P - P(t) \frac{\phi(t)\phi^T(t)}{m^2} P(t) \end{cases}, P(0) = P_0 = Q_0^{-1} \quad (1.18)$$

Garanti que $P, P^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ et que $\theta(t)$ converge exponentiellement vers θ^*

L'utilisation de l'algorithme récursif des moindres carrés avec facteur d'oubli $\phi \in \mathcal{L}_\infty$ Et ϕ PE est plus appropriée dans le cas où l'estimation des paramètres constitue l'objectif principal et ce pour les systèmes stable.

5. Exemple d'application (filtre RC)

On considère le circuit électrique suivant. La relation mathématique liant la tension de sortie $y(t)$ à celle de l'entrée $u(t)$ peut être trouvée en écrivant l'équation différentielle régissant le circuit :



L'équation de circuit RC est comme suit :

$$u = RC \frac{dy}{dt} + y \quad (1.19)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{RC} u - \frac{1}{RC} y \quad (1.20)$$

Pour éviter la dérivation le modèle précédent est modifié en ajoutant des deux côtés de l'égalité précédente la quantité suivante : λy

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = -\frac{1}{RC} y + \frac{1}{RC} u + \lambda y \quad (1.21)$$

On arrange les termes semblables :

$$\left[\frac{d}{dt} + \lambda \right] y = \left[\lambda - \frac{1}{RC} \right] y + \frac{1}{RC} u$$

Après l'arrangement :

$$y(t) = \left(\lambda - \frac{1}{RC} \right) \frac{1}{(s + \lambda)} y(t) + \frac{1}{RC} \frac{1}{(s + \lambda)} u(t)$$

On obtient alors le modèle paramétrique linéaire modifié suivant : $y = \theta^T \phi$

Où θ est le vecteur paramètres donné par : $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2]^T = \left[\lambda - \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{RC} \right]^T$

Et ϕ est le vecteur des signaux filtrés :

$$\phi(t) = \left[\frac{1}{(S + \lambda)} y(t) \quad \frac{1}{(S + \lambda)} u(t) \right]^T$$

Où $\frac{1}{(S + \lambda)}$ est un filtre stable tel que $\lambda > 0$.

Pour le circuit (filtre RC) donnée ci haut avec $R=50 \Omega$ et $C= 200\mu F$; on réalise la simulation de l'algorithme des moindres carré avec les paramètres suivant : $P_i=0.1$ et $B=0$, $L_0=0.5$, $\theta(0) = [0, 0]$. Les résultats obtenu pour ces paramètres sont données par les figures ces dessous.

Simulation 1 : (Entrer constante $U=1$)

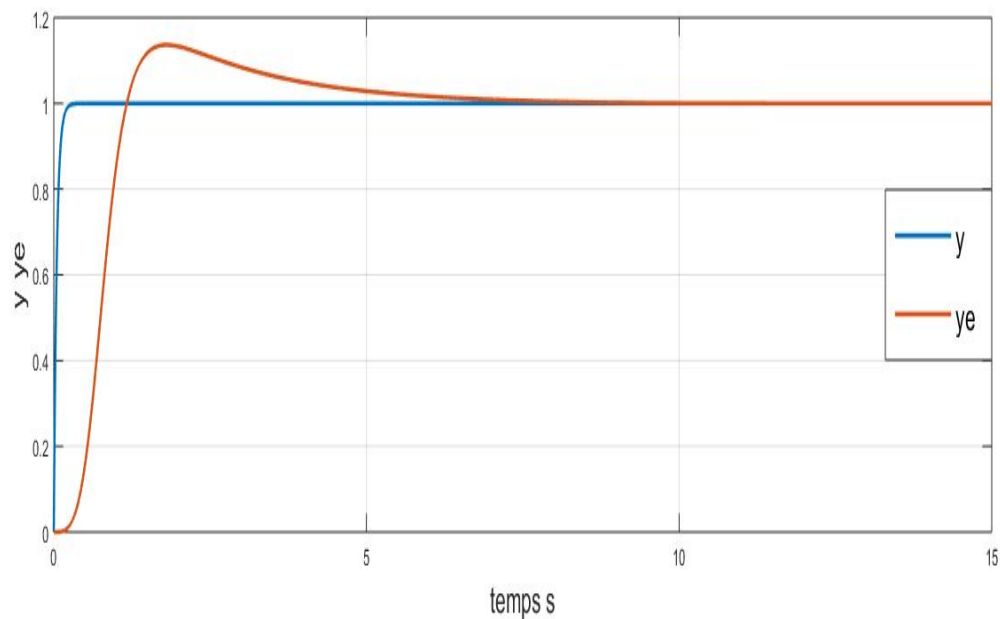


Fig. 1.1 - Sorties du système et du modèle.

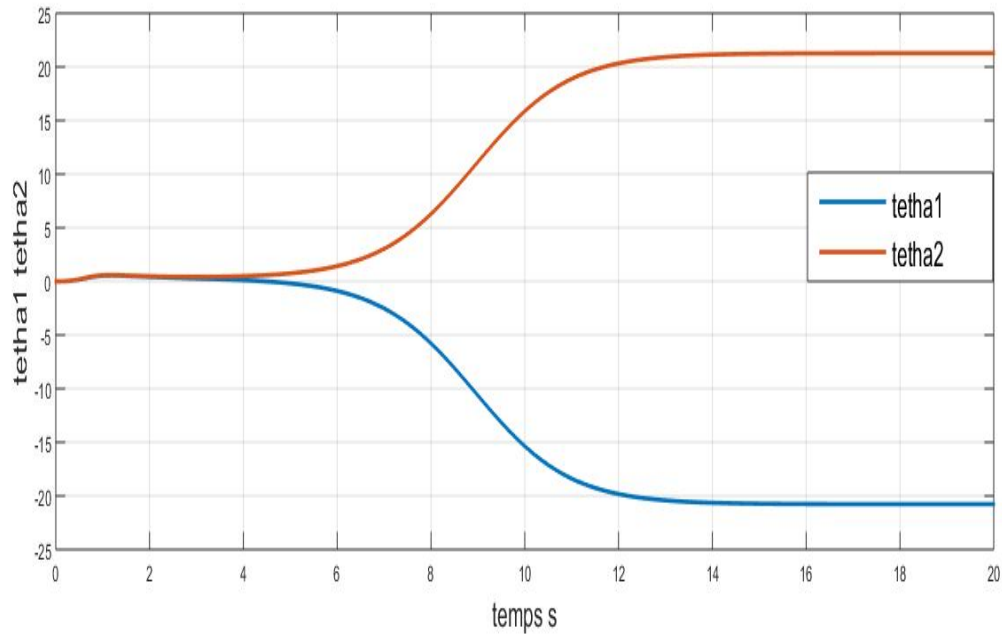


Fig. 1.2 – les paramètres estimés

La Fig. 1.1 représente les deux sorties, la sortie du système réel et celle du modèle. On peut constater que la sortie du modèle suit la sortie du système réel, il le suit asymptotiquement.

Les paramètres correspondante a ces sortie sont donnée par la Fig. 2.2. En effet en constate que ces paramètres elle est bornée et qui ne divergent pas.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'algorithme des moindres carrés. En effet, on a présenté le développement mathématique de cet algorithme avec l'étude de convergence des différents signaux. Cette étude montre que l'algorithme est applicable aux systèmes stable ou non. Les différentes déclinaisons de cet algorithme ont été présentées. Nous avons implémenté l'algorithme «des moindres carré pur» au système électrique simple «Filtre RC».

1. Introduction:

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'algorithme d'identification dit des moindres carrés dans le cadre de la représentation discrète des systèmes mono entrée mono sortie (SISO).

2. Norme [1] [8] : pour les séquences discrètes nous définissons la norme ℓ_p comme suit :

$$\|x\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Et la norme ℓ_∞ :

$$\|x\|_\infty \triangleq \sup_{i \geq 1} |x_i|$$

Où $x = (x_1, x_2, \dots)$ et $x_i \in \mathcal{R}$. Nous disons que $x \in \ell_p$ (respectivement $x \in \ell_\infty$) si $\|x\|_p$ (respectivement $\|x\|_\infty$) existe.

3. Modèle par l'identification

3.1. Modèle ARMA

Le modèle ARMA (Auto Regressive Moving Average) est un modèle régressif qui contient une entrée et un bruit $\varepsilon(t)$ qui perturbe la sortie [13] [14]. Le système à identifier évolue sous l'effet d'une entrée de commande $u(t)$ et d'une perturbation $\varepsilon(t)$ celle-ci peut affecter l'entrée, la sortie ou un autre état du système et cela peut être représenté par la figure ci dessus

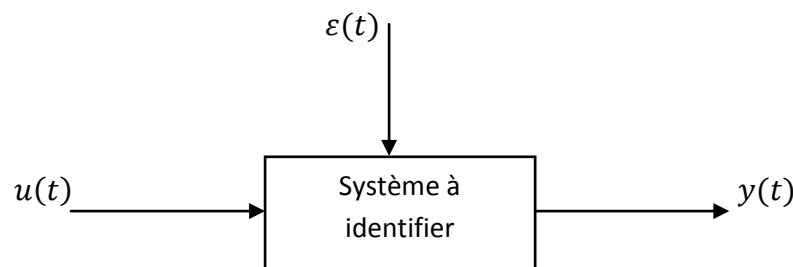


Figure.2.1. Le modèle ARMA

❖ Le model ARMA (cas idéal $\varepsilon = 0$)

On se place dans le contexte temps discret c'est à dire que le temps est $t = 0,1,2, \dots$; Le système étant supposé linéaire et stationnaire on peut donc le représenter par un modèle de la forme :

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b)$$

Les entiers n_a et n_b , les degrés constants définissent la structure du modèle et les réels a_i, b_j sont les paramètres du modèle [14] .et la forme du modèle Auto Regressive Moving Average (moyenne mobile) est donné comme suite :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t)$$

Tell que :

- $A(q^{-1}) = 1 + a_{n_1} q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$
- $B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + a_{n_b} q^{-n_b}$

La forme de régression du modèle ARMA peut se réécrire comme suit :

$$y(t) = \phi(t)^T \theta^*$$

$$\phi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n_a) \quad u(t-d) \dots u(t-n_b)]^T$$

$$\theta^* = [a_1 \dots \dots a_{n_a} b_1 \dots \dots b_{n_b}]^T$$

La forme prédictive de notre système est comme suit

$$\hat{y}(t/\theta^*, t-1) = \phi(t)^T \theta^* = (1 - A(q^{-1}))y(t) + B(q^{-1})u(t) = y(t)$$

3.2. Modèle ARMAX

Le modèle ARMAX (Auto Regressive Moving Average with eXogenous input) est un modèle auto régressif qui inclut des entrées et un bruit blanc de moyenne nulle. Dont $\xi(t)$ est une fonction de bruit qui dépend de la manier qu'il affect le système: Dans ce cas on en le considère comme un bruit blanc qui perturbera la sortie bruité de notre système dont il permet de modéliser des perturbations non-mesurables dans le modèle; et c'est une suite de variables aléatoires non-corrélées $E(\xi(t) \xi(\tau)) = 0, \forall t \neq \tau$ [14] [15].

Le schéma d'ARMAX est donné par :

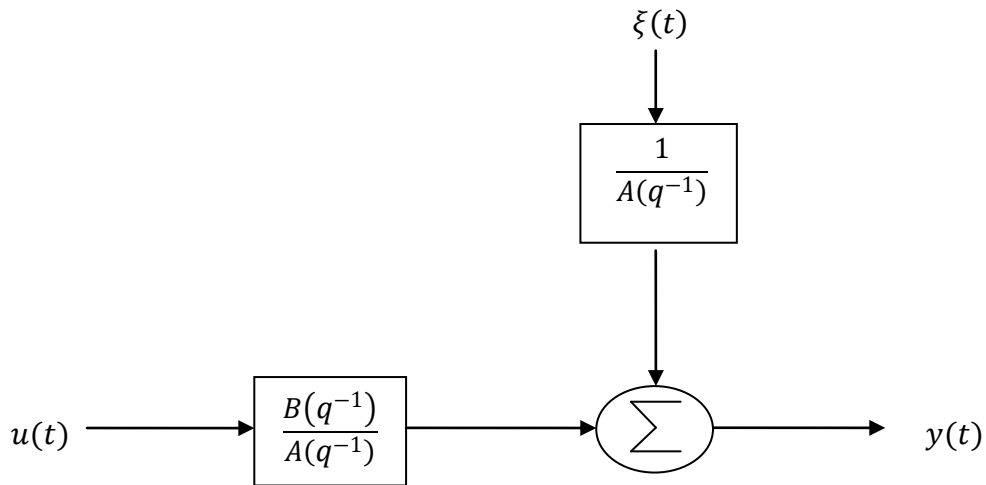


Figure.2.2. Le modèle ARMAX

Le modèle du système ARMAX donné ci-dessous et comme suit :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \xi(t) \quad (2.1)$$

❖ Forme de régression et forme prédicteur du modèle ARMAX

Définition [14] [15] : on appelle prédicteur optimal de la sortie $y(t)$, sur la base des informations disponibles à l'instant $t - 1$, le nombre réel, noté

$$\hat{y}(t/\theta^*, t-1) = f(\theta^*, y(t-1), y(t-2), \dots, u(t-1), \dots)$$

Qui minimise la variance

$$E(y(t) - x)^2 = g(x)$$

Notation

$$\hat{y}(t/\theta^*, t-1) = \arg \left[\min_x g(x) \right]$$

La forme de régression du modèle (2.1) peut se réécrire comme suit :

$$y(t) = \phi(t)^T \theta^* + \xi(t) \quad (2.2)$$

Tell que : $\phi(t) = [-y(t-1) \dots \dots, -y(t-n_a) \quad u(t-d), \dots, -u(t-n_b)]$

Et : $\theta^* = [a_1 \dots \dots a_{n_a} \quad b_1 \dots \dots b_{n_b}]^T$

La forme prédictive de notre système est comme suit :

$$\hat{y}(t/\theta^*, t-1) = \phi(t)^T \theta^* = (1 - A(q^{-1}))y(t) + B(q^{-1})u(t) \quad (2.3)$$

Si on suppose maintenant que l'erreur est généré par un processus a moyenne mobile comme suit $\varepsilon(t) = C(q^{-1})\xi(t)$ Où $C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + a_{nc}q^{-nc}$ est supposé stable dans ce cas le modèle du notre système devient :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\xi(t)$$

Prédiction optimale de la sortie est donné par :

$$\hat{y}(t/\theta^*, t-1) = \phi(t)^T \theta^* = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(t) + \left(1 - \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right)y(t)$$

Où θ^* défini par $\theta^* = [a_1 \dots \dots a_{na} \ b_1 \dots \dots b_{nb} \ c_1 \dots \dots c_{nc}]^T$

4. Identification par la méthode MC

Pour l'identification par cette méthode en utilisera aussi la minimisation de la fonction convexe qui permet de déterminer les meilleurs paramètres tels que la sortie du modèle converge vers celle du système réel. Ce critère est en fonction de l'écart entre la sortie du système et celle du modèle [6][7]. Le critère à minimiser est la fonction de coût donnée comme suit :

$$J(x) = \sum_{i=1}^t (y(i) - \phi(i)^T x)^2 \quad (2.4)$$

Tel que : $x \in \mathcal{R}^{2n}$ est le vecteur estimé et où y et y^* sont générés selon la régression :

$$y(t) = \phi^T(t)\theta^* \quad (2.5)$$

$$y^*(t) = \phi^T(t)x$$

$\theta^* \in \mathcal{R}^{2n}$ le vecteur des vrais paramètres inconnu. La meilleure estimation $\hat{\theta}(t)$ de θ^* à l'instant t est :

$$\hat{\theta}(t) = \arg \left[\min_x J(x) \right]$$

4.1. Algorithme des Moindres Carrés non récursif

L'algorithme des moindres carrés non récursif dans le cas discret est obtenu à partir de la minimisation de la fonction convexe comme suit :

$$\frac{dJ(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{dJ(x)}{dx} = -2 \sum_{i=1}^t \phi(i)[y(i) - x^T \phi(i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^t y(i)\phi(i) = \left(\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right) x$$

$$x = \left[\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^t y(i)\phi(i)$$

En note que $x = \hat{\theta}(t)$ le vecteur estimé

$$\hat{\theta}(t) = \left[\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^t y(i)\phi(i) \quad (2.6)$$

Cette dernière relation n'est possible que si la matrice $\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T$ est inversible. Il s'avère qu'en effet cette dernière est inversible ; ceci peut être montré facilement en considérant que la fonction de coût $J(x)$ est convexe d'une part, et d'autre part sachant que la deuxième dérivée d'une fonction convexe est positive. La seconde dérivée de $J(x)$ est comme suit :

$$\frac{d^2 J(\theta)}{dx^2} = 2 \sum_{i=1}^t \phi(i)\phi(i)^T > 0$$

D'où la matrice $\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T$ est définie positive et donc inversible.

L'algorithme des MC non récursif est caractérisé par les propriétés données par le théorème suivant :

Théorème.

$$1. \text{ S'il existe un instant } t_0, \text{ tel que : } \sum_{i=1}^{t_0} \phi(i) \phi(i)^T \geq \alpha I > 0 \quad (2.7)$$

$$\text{Alors} \quad \hat{\theta}(t) = \theta^* \quad \forall t \geq t_0$$

$$2. \text{ Si } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T > 0 \quad \text{Alors : } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta^* \quad (2.8)$$

Preuve :

En multipliant les deux cotés de l'équation (2.5) par $\phi(t)$ à gauche on obtient :

$$\phi(t) y(t) = \phi(t) \phi(t)^T \theta^*$$

D'où la somme suivante :

$$\sum_{i=1}^t \phi(i) y(i) = \left(\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right) \theta^* \quad (2.9)$$

1) si (2.7) est satisfaite, alors de (2.9) on aura :

$$\theta^* = \left[\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^t \phi(i) y(i) \right] = \hat{\theta}(t) \quad \forall t \geq t_0$$

En effet, (2.7) assure que l'inverse existe pour $t \geq t_0$

2) si la condition(2.8) est vérifiée, l'équation (2.9) ce réécrit sous la forme :

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i) y(i) = \left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right) \theta^* \Rightarrow \theta^* = \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i) y(i) \right]$$

$$\hat{\theta}(t) = \left[\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i) \Rightarrow \hat{\theta}(t) = \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \phi(i) y(i) \right]$$

De ces deux équations, on conclut que pour t suffisamment grand on a : $\hat{\theta}(t) = \theta^*$.

Remarque

Si $\{\phi(i)\}$ effectue un balayage persistant alors (2.7) et (2.8) sont satisfaites (et l'inverse n'est pas forcément vrai).

4.2. Algorithme des Moindres carrés récursif

L'algorithme des MC récursif est obtenu à partir de la version non récursive et ce en réalisant les manipulations suivantes. Posons tout d'abord que:

$$P(t) = \left[\sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \right]^{-1} \quad (2.10)$$

Donc (2.6) se réécrit sous la forme:

$$P(t)^{-1} \hat{\theta}(t) = \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i) \quad (2.11)$$

Ecrivons maintenant l'équation (2.11) à l'instant $(t - 1)$:

$$P(t-1)^{-1} \hat{\theta}(t-1) = \sum_{i=1}^{t-1} y(i) \phi(i) \quad (2.12)$$

Dans ce cas l'équation (2.11) peut être réécrite en fonction de l'équation (2.12) :

$$\begin{aligned} P(t)^{-1} \hat{\theta}(t) &= P(t-1)^{-1} \hat{\theta}(t-1) + y(t) \phi(t) \\ &= P(t-1)^{-1} \hat{\theta}(t-1) + \phi(t) \phi(t)^T \hat{\theta}(t-1) - \phi(t) \phi(t)^T \hat{\theta}(t-1) + y(t) \phi(t) \\ &= [P(t-1)^{-1} + \phi(t) \phi(t)^T] \hat{\theta}(t-1) + \phi(t) [y(t) - \phi(t)^T \hat{\theta}(t-1)] \end{aligned}$$

D'où :

$$P(t)^{-1} \hat{\theta}(t) = P(t)^{-1} \hat{\theta}(t-1) + \phi(t) e(t) \quad (2.13)$$

En multipliant par $P(t)$ on trouve finalement l'écriture récursive de l'estimation donnée par :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t) \phi(t) e(t) \quad (2.14)$$

Pour le calcul de la matrice de covariance $P(t)$ on utilise le lemme d'inversion matricielle .

Lemme [11]: Soient les matrices $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathcal{R}^{m \times n}$ Alors :

$$[A + BC]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[I + CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1}$$

En appliquant ce lemme à l'équation $P(t) = [P(t-1)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T]^{-1}$ et ce avec $A = P(t-1)^{-1}$; $B = \phi(t)$; $C = \phi(t)^T$ on trouve :

$$\begin{aligned} & [P(t-1)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T]^{-1} \\ &= P(t-1) - P(t-1)\phi(t)[1 + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)]^{-1}\phi(t)^T P(t-1) \end{aligned}$$

On trouve enfin la relation réursive suivante pour $P(t)$:

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi(t)^T P(t-1)}{1 + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} \quad (2.15)$$

Multipliant maintenant les deux cotés de l'équation(2.15) par $\phi(t)$ à droite :

$$P(t)\phi(t) = P(t-1)\phi(t) - \frac{P(t-1)\phi(t)[\phi(t)^T P(t-1)\phi(t)]}{1 + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)}$$

Après arrangent on a :

$$P(t)\phi(t) = \frac{P(t-1)\phi(t)}{1 + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} \quad (2.16)$$

En remplace (2.16) dans (2.14) et on obtient finalement la forme réursive de l'estimateur des moindres carrés :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-1)\phi(t) e(t)}{1 + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} & (2.17.a) \\ P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi(t)^T P(t-1)}{1 + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} & (2.17.b) \\ e(t) = \phi(t)[y(t) - \phi(t)^T \hat{\theta}(t-1)] & (2.17.c) \end{cases}$$

❖ *initiation*

Pour l'initialisation on prend $\hat{\theta}(0) = \theta_0$; $P(0) = P_0$, telle que θ_0 est choisi en tenant compte des informations disponibles, a priori, sur θ^* . Si on dispose d'aucune information alors on prend $\theta_0 = 0$. Le choix de P_0 peut être clarifié en considérant le développement suivant :

$$P(t) = [P(t-1)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T]^{-1}$$

$$\Leftrightarrow P(t)^{-1} = P(t-1)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T \quad (2.18)$$

$$P(t)^{-1} = P(0)^{-1} + \sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T$$

$$P(t)^{-1} = P_0^{-1} + \sum_{i=1}^t \phi(i) \phi(i)^T \quad (2.19)$$

Pour que cette algorithmne donne lieu à la vrai valeur de $P(t)^{-1}$, il faut que P_0^{-1} soit très petit. Alors on le choisit comme suit $P_0^{-1} = \frac{1}{\alpha} I$. Ou $\alpha \gg 1$ soit $\alpha = 10^2, 10^3 \dots$

❖ Propriété de l'estimateur des moindres carrés récursifs

Théorème.

- 1) $\|\hat{\theta}(t) - \theta^*\| \leq K \|\hat{\theta}(0) - \theta^*\|$ Ou $K = \lambda_{\max}(P_0^{-1}) / \lambda_{\min}(P_0^{-1})$
- 2) $\left\{ \frac{e(t)}{\sqrt{1 + \phi(t)^T \phi(t)}} \right\} \in \ell_2$
- 3) $\{\hat{\theta}(t)\}$ converge (pas forcément vers θ^*)
- 4) Si $\{\phi(t)\}$ effectue un balayage persistant alors il peu converger vers θ^*

5. Différentes déclinaisons

L'adaptation paramétrique par l'algorithme des MCR (2.17.a – c) s'arrête dès que la matrice de gain $P(t)$ tende vers zéro ($P(t) \approx 0$); Or c'est précisément ce qui se passe en présence de la condition d'excitation persistante PE [9][10]. En effet, si $\{\phi(t)\}$ effectue un balayage persistant et à partir de $P(t)^{-1} = P(t-1)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(kN)^{-1} &= P(0)^{-1} + \sum_{i=1}^{kN} \phi(i) \phi(i)^T \\ &= P(0)^{-1} + \sum_{j=1}^k \sum_{i=jN}^{(j+1)N} \phi(i) \phi(i)^T \geq P(0)^{-1} + \sum_{j=1}^k \alpha I \geq k\alpha I \end{aligned}$$

Se qui implique que $P(kN) \leq \frac{1}{K\alpha} I$, d'où $P(kN) \rightarrow 0$ quant $k \rightarrow \infty$;

Le fait que $P(t)$ tende vers zéro implique que l'algorithme des moindres carrés standard (2.17.a – c) n'est pas bien adaptés aux systèmes à paramètres variants qui possèdent la propriété d'excitation persistante.

5.1. Algorithme Moindres carrés à gain non-décroissant

Pour régler la problématique du gain décroissant de l'algorithme standard on modifie la fonction $J(x)$ comme suit :

$$J(x) = \sum_{i=1}^t \alpha(t, i) (y(i) - \phi(t)^T x)^2 \quad (2.20)$$

Où $\{\alpha(t, i)\}$ est une séquence de pondération à l' instant t , des informations intérieures, choisies telles que $\alpha(t, i) = \lambda(t) \alpha(t - 1, i)$, avec $0 < \lambda(t) \leq 1$, $0 < \alpha(t, t) < 2$ et $(i = 1, \dots, t - 1)$. Dans ce cas la dérivée nous donne :

$$\frac{dJ(x)}{dx} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ(x)}{dx} &= -2 \sum_{i=1}^t \alpha(t, i) \phi(i) [y(i) - x^T \phi(i)] = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^t \alpha(t, i) \phi(i) y(i) + 2 \sum_{i=1}^t \alpha(t, i) \phi(i) \phi(t)^T x \\ x &= \left[\sum_{i=1}^t \alpha(t, i) \phi(i) \phi(t)^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^t \alpha(t, i) \phi(i) y(i) \end{aligned}$$

En note que $x = \hat{\theta}(t)$ le vecteur estimé.

$$\hat{\theta}(t) = \left[\sum_{i=1}^t \alpha(t, i) \phi(i) \phi(t)^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^t \alpha(t, i) \phi(i) y(i) \quad (2.21)$$

D'où la nouvelle version de l'algorithme Moindres carrés à gain non-décroissant :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-1)\phi(t)e(t)}{\frac{\lambda(t)}{\alpha(t,t)} + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} & (2.22.a) \\ P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi(t)^T P(t-1)}{\frac{\lambda(t)}{\alpha(t,t)} + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} \right] & (2.22.b) \\ e(t) = y(t) - \phi(t)^T \hat{\theta}(t-1) & (2.22.c) \end{cases}$$

❖ Evolution de $P(t)^{-1}$

L'inverse de l'équation (2.22.b) est comme suit :

$$P(t)^{-1} = \lambda(t) P(t-1)^{-1} + \alpha(t,t) \phi(t) \phi(t)^T \quad (2.23)$$

Cette dernière nous montre que si $\lambda(t) < 1$, $P(t)^{-1}$ ne diverge pas, et par conséquent, $P(t)$ ne converge pas vers zéro. Pour cette raison on l'appelle à gain non décroissant. De cette même équation, il découle aussi que :

$$P(t)^{-1} = \left[\prod_{i=1}^t \lambda(i) \right] P(0)^{-1} + \sum_{i=1}^t \alpha(t,i) \phi(i) \phi(i)^T \quad (2.24)$$

Qui nous montre que l'effet de $P(0)^{-1}$ est plus faible si $0 < \lambda(i) < 1$.

5.2. Les variantes de l'algorithme des moindres carrés à gain non-décroissant

Cette section nous présentera les principales techniques pour l'introduction du facteur d'oubli dans l'algorithme des moindres carrés récursifs. La plus simple est l'utilisation d'un facteur d'oubli exponentiel, mais elle est sujette au problème d'explosion de la matrice de covariance (covariance « wind-up » problem) [16][17]. Plusieurs autres techniques ont été proposées pour tenter de pallier ce problème comme utiliser un facteur d'oubli fixe ou à trace constante.

5.2.1. Algorithme des moindres carrés avec un facteur d'oubli fixe

L'introduction du facteur d'oubli dans l'algorithme des moindres carrés récursifs est un sujet qui a été beaucoup étudié dans la littérature dédiée au contrôle de systèmes physiques complexe [18]. Pour cela, il faut travailler sur la matrice de covariance qui représente la distribution des données dans l'algorithme des moindres carrés récursifs. Le principe du facteur d'oubli est d'introduire une mise à jour temporelle. Dans ce cas on prend $\lambda(t) = \lambda < 1$ et $\alpha(t, t) = 1$ aux informations du critère $J(x)$ récentes au détriment des anciennes $\alpha(t, i) = \lambda\alpha(t-1, i) \triangleq \alpha(t, i) = \lambda^{t-i}$, ce qui implique que :

$$J(x) = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} (y(i) - \phi(t)^T x)^2 \quad (2.25)$$

Dans ce cas (2.23) devient :

$$P(t)^{-1} = \lambda P(t-1) + \phi(t)\phi(t)^T \quad (2.26)$$

L'algorithme (2.24. a - c) devient :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-1)\phi(t)e(t)}{\lambda + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} & (2.27.a) \\ P(t) = \frac{1}{\lambda} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi(t)^T P(t-1)}{\lambda + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} \right] & (2.27.b) \\ e(t) = y(t) - \phi(t)^T \hat{\theta}(t-1) & (2.27.c) \end{cases}$$

Remarque :

- i. On note que si $\{\phi(t)\}$ effectue un balayage persistant, alors $\hat{\theta}(t)$ converge vers θ^* exponentiellement.
- ii. Dans le cas où $\{\phi(t)\}$ n'effectue un balayage persistant, non seulement $\hat{\theta}(t)$ ne converge pas vers θ^* mais, en plus, il y a un risque de divergence de $P(t)$.

En effet, dans le cas limite où $\phi(t) = \phi$ constant (2.28) montre que $P(t)^{-1}$ converge vers $\phi\phi^T/(1-\lambda)$, donc $\lambda_{\min} P(t)^{-1} \rightarrow 0$ et par conséquent $\lambda_{\max} P(t) \rightarrow \infty$.

La propriété la plus importante d'un algorithme d'estimation récursif avec un facteur d'oubli est que sa matrice de covariance reste bornée [18] [19]. En effet, sans borne inférieure à la matrice de covariance, le gain de l'algorithme va tendre vers zéro et le système va perdre

ses capacités d'adaptation. Sans borne supérieure, la matrice de covariance peut exploser sous l'effet de l'oubli, et engendrer des instabilités qui mènent à l'écroulement du système.

5.2.2. Algorithme des moindres carrés avec un facteur transitoire

Dans ce cas on prend $\lambda(t) = \lambda_0 \lambda(t-1) + (1 - \lambda_0)$, $\alpha(t, t) = 1$ telle que $\lambda(0)$, $\lambda_0 \in [0.5, 0.97]$ [20] ; Il s'ensuit que : $\lambda(t)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 1$ exponentiellement et ce vient de la récurrence suivante :

$$\lambda(t) = \lambda_0^t \lambda(0) + \sum_{i=1}^{t-1} \lambda_0^{t-i} (1 - \lambda_0)$$

L'algorithme est défini par les équations (2.27. a - c) il se confond asymptotiquement avec celui des moindres carrés simple (2.17. a - c)

Remarque :

Il résulte de ce qui précède que l'algorithme des moindres carrés (2.27. a - c) avec un facteur d'oubli transitoire $\lambda(t) = \lambda_0 \lambda(t-1) + (1 - \lambda_0)$ sera applicable avec succès dans les mêmes conditions que celles requises par l'algorithme des moindres carrés standard (2.17. a - c) . C'est-à-dire, lorsque le système identifié est invariant (θ^* constant) l'intérêt du facteur d'oubli transitoire est de réduire la sensibilité de l'algorithme aux conditions initiales.

5.2.3. Algorithme des moindres carrés avec un gain à trace constant

Le principe gain à trace constant est de renvoyer la quantité d'information acquise par l'algorithme, on choisissons $\lambda(t)$ telle que la trace de la matrice de covariance est donné par $\text{trace } P(t) = \text{trace } P(0)$ et $\alpha(t, t) = \lambda(t)$ [19]. On découle de l'équation (2.17. c) que $\text{trace } P(t) = \text{trace } P(0)$ si :

$$\lambda(t) = 1 - \frac{\phi(t)^T P(t-1) P(t-1) \phi(t)}{(1 + \phi(t)^T P(t-1) \phi(t)) \text{trace } P(0)} \quad (2.28)$$

Le fait que $\text{trace } P(t) = \text{constant}$ assure que les valeurs propres de $P(t)$, lesquelles sont supérieures ou égales à zéro, restent bornées même en l'absence d'excitation persistante.

5.2.4. Algorithme des moindres carrés avec réinitialisation du gain :

$$P(t) = \begin{cases} P(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)\phi(t)^T P(t-1)}{\lambda + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)} \\ P_i \quad \text{pour} \quad t = t_i \end{cases} \quad (2.29)$$

Où les instants t_i sont ceux où se produit un changement des vrais paramètres θ^* du système à identifier. Le choix le plus simple de $\{P_i\}$ est $P_i = P_0 = \text{constante}$; mais quand il est impossible de détecter les instants de changement des vrais paramètres, on prend une suite $\{t_i\}$ périodique $t_i = iN$ où N est une constante. Puisque pour $\lambda = 1$ on a :

$$P(t)^{-1} = P(t-1)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T \quad (2.30)$$

Ceci implique que pour tout t appartenant à $[t_i, t_{i+n}]$ on a :

$$P_i \leq P(t)^{-1} \leq P_i^{-1} + \sum_{j=1}^t \phi(t_i + j)\phi(t_i + j)^T$$

Il s'ensuit que $P(t)$ ne converge pas vers zéro et ne diverge pas. L'algorithme des moindres carrés avec réinitialisation de la matrice de gain est composé, en plus de l'équation (2.29), de la loi d'adaptation paramétrique standard :

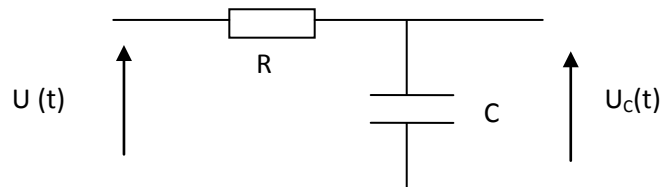
$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) - \frac{P(t-1)\phi(t)e(t)}{1 + \phi(t)^T P(t-1)\phi(t)}$$

Remarque :

La liste des variables de l'algorithme (2.22. a-c), décrites précédemment, n'est pas limitative. Mais, elle est représentative des autres solutions que l'on peut trouver dans la littérature spécialisée. Le fait que ces nombreuses variations variantes soient préconisées montre aussi qu'aucune d'elles ne constitue la panacée. En effet chaque variante se prête mieux que les autres à une situation donnée

6. Exemple d'application (filtre RC)

On considère le circuit électrique suivant. En admettant que les paramètres R et C soient constants, la relation mathématique liant la tension de sortie $U_C(t)$ à celle d'entrée $U(t)$ peut être trouvée en écrivant l'équation différentielle régissant le circuit :



L'équation de ce circuit est donné par :

$$U = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{RC} U = \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C \quad (2.32)$$

On applique la transformée de Laplace à l'équation (2.32)

$$\frac{1}{RC} U(S) = S U_C(S) + \frac{1}{RC} U_C(S) \quad (2.33)$$

$$\frac{U_C(S)}{U(S)} = \frac{\frac{1}{RC}}{S + \frac{1}{RC}} \quad (2.34)$$

On applique la transformée en z à l'équation (2.34)

$$\frac{k}{S + k} \xrightarrow{TZ} \frac{kZ}{Z - e^{-kT}}$$

$$\frac{\frac{1}{RC}}{S + \frac{1}{RC}} \xrightarrow{TZ} \frac{\frac{1}{RC} Z}{Z - e^{-\frac{1}{RC}T}}$$

$$\frac{U_C(Z)}{U(Z)} = \frac{aZ}{Z - e^{-aT}}$$

$$U_C(Z)(Z - e^{-aT}) = aZ U(Z)$$

$$ZU_c(Z) - U_c(Z)e^{-aT} = aZU(Z)$$

$$U_c(Z) = \frac{1}{Z}U_c(Z)e^{-aT} + aU(Z)$$

$$U_c(Z) = Z^{-1}U_c(Z)e^{-aT} + aU(Z)$$

$$U_c(k) = e^{-aT}U_c(k-1) + aU(k)$$

$$U_c(k) = bU_c(k-1) + aU(k)$$

Avec $a = \frac{1}{RC}$ et $b = e^{-\frac{1}{RC}T}$ sont les paramètres à identifier.

Pour le circuit (filtre RC) donnée ci haut avec $R=50\Omega$ et $C=200\mu F$; on réalise la simulation de l'algorithme des moindres carrés avec les paramètres suivant : $\theta(0) = [\theta_1 \theta_2] = [0.2 \ 0.2]$, $P_i=0.1$ et $B=2$, $L_0=0.5$; les résultats obtenus pour ces paramètres sont donnés par les figures ci-dessous ; en premier lieu, on prend une entrée constante ; en second on prendra une entrée constante avec une variation de paramètre.

Simulation 1(Entrée constante):

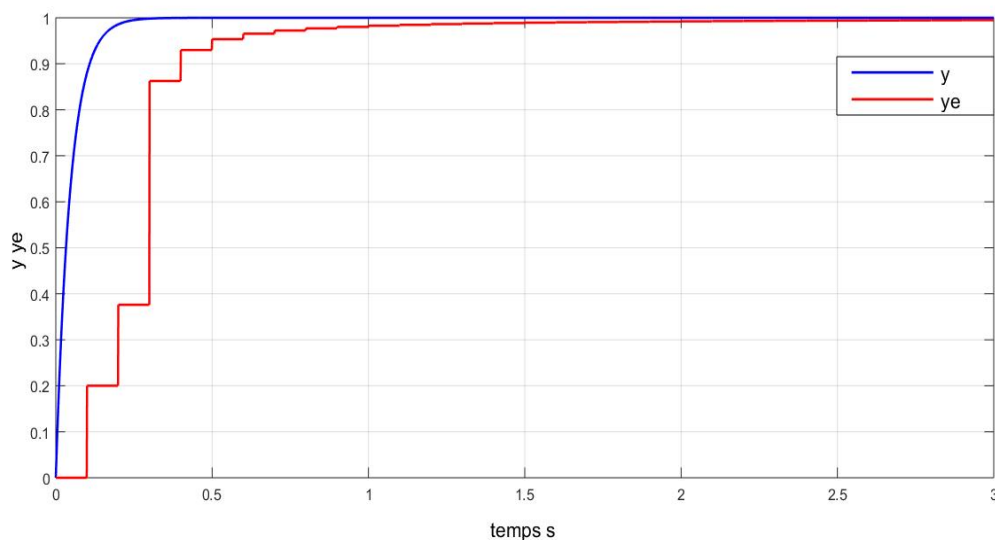


Fig. 2.3 - Sorties du système et du modèle

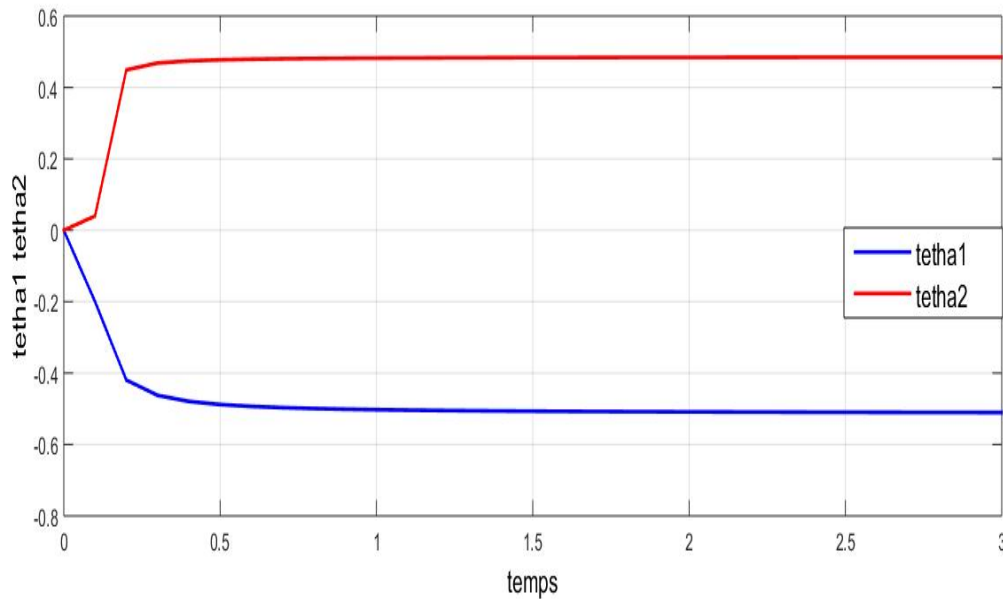


Fig. 2.4 – les paramètres estimés

La Fig. 2.3 représente la sortie du système réel et celle du modèle. On peut constater de cette figure que la sortie du modèle suit parfaitement la variation de la sortie du système réel.

Les paramètres correspondants à ces sorties sont donnés par la Fig. 2.4. En effet dans cette dernière on déduit que ces paramètres sont bornés et qu'ils ne divergent pas.

Simulation2 (Entrée variable avec variation de paramètre) :

Dans cette deuxième simulation on fait le test d'une entrée variable. Pour ce faire on maintient l'entrée à $U=1$, et on ajoute une autre entrée variable avec une variation de paramètre dans une période donnée par (5s), qui influencera sur la rapidité du modèle, et pour ce faire on change la valeur du condensateur C entre deux valeurs: $C1= 470 \cdot 10^{-6} \mu F$ et $C2=47 \cdot 10^{-6} \mu F$.

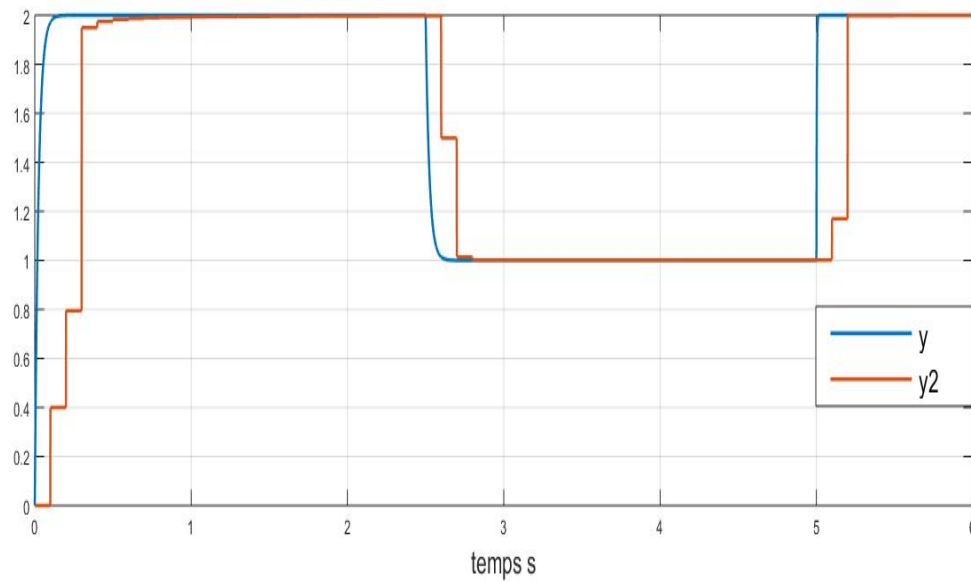


Fig. 2.5 - Sorties du système et du modèle

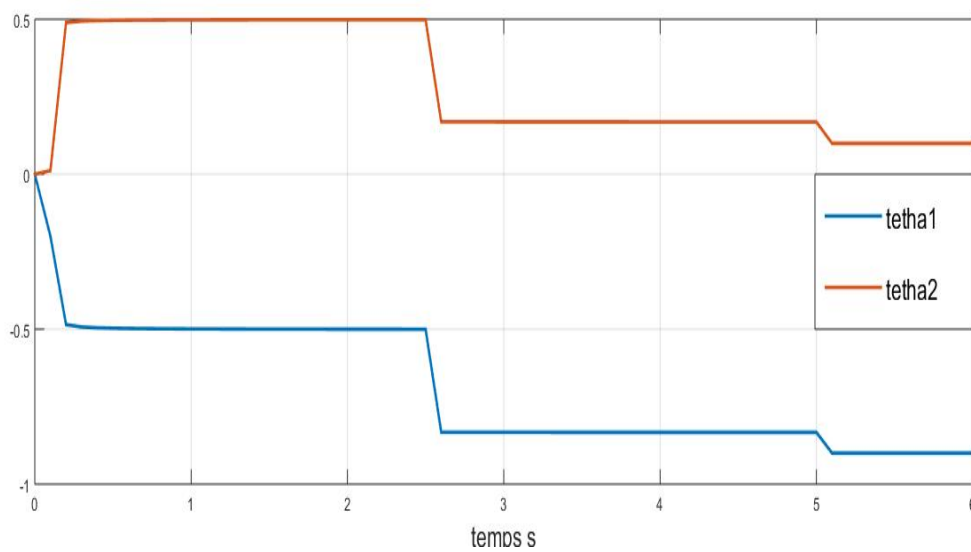


Fig. 2.6 – les paramètres estimés

La Fig. 2.5 représente la sortie du système réel et celle du modèle. D'après les résultats obtenus on déduit que la variation de paramètre dans une période donnée par (5s) a influencé sur la rapidité du modèle et qui suit parfaitement la variation de la sortie du système réel. Montrera plus pris qu'il le suit parfaitement.

Les paramètres correspondants à ces sorties sont donnés par la Fig. 2.6. En effet dans cette dernière on déduit que ces paramètres sont bornés et qu'ils ne divergent pas.

7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'algorithme des moindres carrés dans le cas décrit et leurs différentes déclinaisons. En effet, on a fait une étude globale sur la convergence de certain signaux et cela est obtenu après la représentation du développement mathématique de cet algorithme. Et de même ce dernier est applicable pour tous les systèmes dynamiques stables ou instables. Cet algorithme «des moindres carrés» a été implémenté au système électrique simple «Filtre RC».

1. Introduction

Dans ce chapitre on présentera en premier lieu la machine à courant continu sur laquelle on appliquera les deux méthodes d'identification des moindres carrés dans le cas continu et discret, puis en analysera la convergence des paramètres et les signaux de sorties de chaque algorithme pour ces deux cas. On présentera finalement les résultats pratiques pour le cas discret.

2. Comparaison des deux cas

D'après l'étude réalisée dans les deux chapitres précédents on a déduit que les deux algorithmes standards ont les mêmes problèmes de convergences et présentent les mêmes solutions. D'autre part, cette étude montre que l'algorithme est applicable aux systèmes stables ou non pour le cas continu (cas avec normalisation) et uniquement stable pour le cas discret.

Dans ce qui suit, on va appliquer les algorithmes standards dans les deux cas et ce pour le système constitué d'une machine à courant continu alimentée par un hacheur série. On réalisera une comparaison par simulation des deux cas.

3. Machine DC :

3.1. Définition de la machine à courant continu :

Une machine à courant continu est un convertisseur électromécanique permettant la conversion bidirectionnelle d'énergie entre une installation électrique parcourue par un courant continu et un dispositif mécanique selon la source d'énergie. Soit elle convertit l'énergie électrique absorbée en énergie mécanique, on dit alors qu'elle fonctionne en moteur. Ou bien elle convertit l'énergie mécanique reçue en énergie électrique lorsqu'elle subit l'action d'une charge entraînant. On dit alors qu'elle fonctionne en génératrice [21].

3.2 Les caractéristiques du moteur à courant continu :

La machine à courant continu (*MCC*) est caractérisée par une constante de vitesse, et une pente vitesse/couple. Le courant est proportionnel à la charge ; La vitesse est proportionnelle à la tension d'alimentation. Le moteur à courant continu sans fer ne présente pas de couple magnétique résiduel et les agitations électromagnétiques sont dérisoires. Son rendement, qui atteint 90%, surpasse celui des autres technologies de moteurs. Son rotor en forme de cloche donne la possibilité d'accélération très importantes et d'un couple de retenue inexistant. Cela permet d'obtenir des positionnements précis et des vitesses faibles. Ce rotor est composé d'un

stator à aimant permanent en terre rare de type Al-Nico, samarium cobalt ou néodyme fer bore qui expliquent les caractéristiques dynamiques très élevées [21].

3.3 Schéma équivalent du système

On considère une machine à courant continu à excitation séparée alimentée par un hacheur série, voir la figure.3.1. Les paramètres de cette machine sont inconnus et peuvent même varier au cours du temps. Pour l'hacheur série on a opté pour un modèle statique, c.-à-d. que sa tension de sortie $u_a(t)$ est proportionnelle à son entrée de commande qui est le rapport cyclique d , selon la relation suivante : $u_a(t) = E.d$ où E est la tension d'alimentation de l'hacheur. Les paramètres de l'hacheur sont $C = 1000 \mu F$ et $L = 100 mH$.

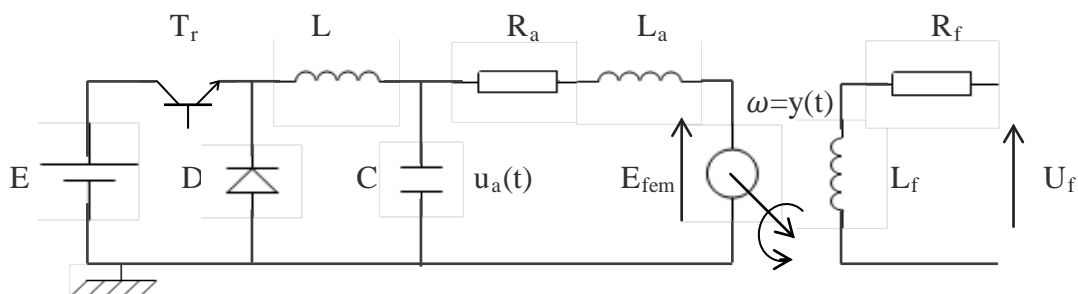


Figure 3.1 la machine à courant continu avec son convertisseur.

3.4 Modélisation du système

Dans cette section on va établir les deux modèles pour la MCC, le modèle discret et le modèle continu.

3.4.1 modèle continu

Les signaux d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ pour la machine sont ici la tension $u_a(t)$ appliquée aux bornes de l'induit ainsi que la vitesse angulaire $w(t)$, respectivement. La mise en équations donne :

$$\begin{cases} u_a(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_{fem} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} J \frac{dw}{dt} = C_{em} - fw - C_r \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \text{telle que } E_{fem} = k_a w ; C_{em} = k_a i_a$$

Par simple mise en forme, on peut en déduire les équations d'état, en choisissant i_a et w comme variables d'état :

$$\left(\frac{di_a}{dt} = \frac{E}{L_a} d - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{k_a}{L_a} w \right. \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{dw}{dt} = \frac{k_a}{J} i_a - \frac{f}{J} w - \frac{1}{J} \dot{C}_r \right) \quad (3.4)$$

Où l'on a ajouté le modèle statique du hacheur série donné pour rappel par :

$$u_a(t) = d(t) * E$$

En dérivant (3.4) et en utilisant (3.3) on obtient après arrangement :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{k_a E}{J L_a} d - \frac{k_a R_a}{J L_a} i_a - \frac{k_a^2}{J L_a} w - \frac{f}{J} \frac{dw}{dt} - \frac{1}{J} \dot{C}_r \quad (3.5)$$

D'après l'équation (3.4) On a :

$$\frac{k_a}{J} i_a = \frac{dw}{dt} + \frac{f}{J} w + \frac{1}{J} \dot{C}_r \quad (3.6)$$

On remplace (3.6) dans (3.5) et on obtient :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -\frac{R_a}{L_a} \frac{dw}{dt} - \frac{R_a f}{J L_a} w - \frac{R_a}{J L_a} \dot{C}_r + \frac{k_a E}{J L_a} d - \frac{k_a^2}{J L_a} w - \frac{f}{J} \frac{dw}{dt} - \frac{1}{J} \dot{C}_r$$

Après arrangement, on obtient finalement l'équation suivant :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -\left[\frac{f}{J} + \frac{R_a}{L_a} \right] \frac{dw}{dt} - \left[\frac{R_a f + k_a^2}{J L_a} \right] w + \frac{k_a E}{J L_a} d - \frac{1}{J} \dot{C}_r - \frac{R_a}{J L_a} \dot{C}_r$$

En posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{f}{J} + \frac{R_a}{L_a} = \frac{R_a J + L_a f}{J L_a} \\ a_0 = \frac{R_a f + k_a^2}{J L_a} \\ b_0 = \frac{k_a E}{J L_a} \\ C_1 = \frac{1}{J} \\ C_0 = \frac{R_a}{J L_a} \end{array} \right.$$

On peut écrire alors que :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -a_1 \frac{dw}{dt} - a_0 w + b_0 d - C_1 \dot{C}_r - C_0 \dot{C}_r \quad (3.7)$$

Pour éviter la dérivation, le modèle précédent est modifié en ajoutant des deux côtés de l'égalité précédente la quantité suivante : $\left[\lambda_1 \frac{d}{dt} + \lambda_0 \right] w$, tel qu'expliquer dans le premier chapitre :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \left[\lambda_1 \frac{d}{dt} + \lambda_0 \right] w = -a_1 \frac{dw}{dt} - a_0 w + b_0 d - C_1 \dot{C}r - C_0 Cr + \left[\lambda_1 \frac{d}{dt} + \lambda_0 \right] w$$

On arrange les termes semblables :

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_1 \frac{d}{dt} + \lambda_0 \right] w = (\lambda_1 - a_1) \frac{dw}{dt} + (\lambda_0 - a_0) w + b_0 d - C_1 \dot{C}r - C_0 Cr$$

Après arrangement:

$$\begin{aligned} w(t) &= (\lambda_1 - a_1) \frac{s}{(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} w(t) \\ &+ (\lambda_0 - a_0) \frac{1}{(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} w(t) \\ &+ b_0 \frac{1}{(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} d(t) \\ &- C_1 \frac{s}{(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} \dot{C}r \\ &+ C_0 \frac{1}{(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} Cr \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le couple de charge Cr étant une entrée inconnue, la quantité donnée par la somme des deux derniers termes dans (3.8) est donc une perturbation externe non mesurable et sera donc représentée par un seul terme telle que :

$$w(t) = \theta_1 \phi_1(t) + \theta_2 \phi_2(t) + \theta_3 \phi_3(t) + P_r(t) \quad (3.9)$$

En négligeant la perturbation externe $P_r(t)$ dans l'équation 3.9, le modèle paramétrique linéaire sera donc donné par :

$$y(t) = \theta(t)^T \phi(t)$$

Où θ est le vecteur paramètres donné par :

$$\theta(t) = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T = [(\lambda_1 - a_1) \quad (\lambda_0 - a_0) \quad (b_0)]^T$$

Et $\phi(t)$ est le vecteur des signaux filtrés donné par :

$$\begin{aligned}\phi(t) &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3]^T \\ &= \left[\frac{s}{(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} y(t) \quad \frac{1}{(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} y(t) \quad \frac{1}{(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)} u(t) \right]^T\end{aligned}$$

Où $y(t) = w(t)$ $u(t) = d(t)$

Les trois filtre donné par leurs fonctions de transfert possèdent le même dénominateur $(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0)$, pour que ces trois filtres soient stable les deux constantes λ_1, λ_0 sont choisis positifs.

Il faut noter ici que même si la condition d'excitation persistante est vérifiée, il est impossible de retrouver les vrais paramètres de notre système; ceci est dû au faite qu'il existe un terme de perturbation dans le modèle complet que l'on a négligé.

3.4.2 Modèle discret

On reprend l'équation précédente (3.7) :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -a_1 \frac{dw}{dt} - a_0 w + b_0 d - C_1 \dot{C}r - C_0 Cr$$

On applique la transformer de Laplace sur cette dernière équation et on obtient :

$$\begin{aligned}[s^2 + a_1 s + a_0]w &= b_0 d - [C_1 s + C_0]Cr \\ w &= \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} d - \frac{C_1 s + C_0}{s^2 + a_1 s + a_0} Cr \\ w(s) &= \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} d(s) - \frac{C_1 s + C_0}{s^2 + a_1 s + a_0} Cr(s)\end{aligned}\quad (3.10)$$

A partir du modèle de Laplace (3.10) on cherche à établir le modèle discret (de récurrence) en utilisant les fonctions de conversion (Laplace \Rightarrow TZ) connues. Pour cela on décompose le dénominateur de l'équation (3.10) de la manière suivante :

Soit

$$s^2 + a_1 s + a_0 = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 \quad (3.11)$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -a_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = a_0 \end{cases}$$

La résolution de l'équation du 2^{ième} ordre (3.11) donne

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \quad \text{Où } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta} \\ \Delta = a_1^2 - 4a_0 \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{s + \frac{R_a}{L_a}}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{\lambda_1 + \frac{R_a}{L_a}}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{\lambda_2 + \frac{R_a}{L_a}}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{s - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\lambda_1 + \frac{R_a}{L_a}}{s - \lambda_1} - \frac{\lambda_2 + \frac{R_a}{L_a}}{s - \lambda_2} \right] \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{1}{s - \lambda_2} \right] \quad (3.13)$$

Remplacent (3.12) et (3.13) dans (3.10), on aura :

$$w(s) = \frac{b_0}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{s - \lambda_1} - \frac{1}{s - \lambda_2} \right] d(s) - \frac{C_1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\lambda_1 + \frac{R_a}{L_a}}{s - \lambda_1} - \frac{\lambda_2 + \frac{R_a}{L_a}}{s - \lambda_2} \right] Cr(s) \quad (3.14)$$

On rappelle ici la transformée usuelle que l'on a utilisée :

$$\frac{1}{s + 1} \xrightarrow{TZ} \frac{z}{z - e^{-\lambda T}}$$

L'application de cette TZ à (3.14) nous donne :

$$\frac{1}{s - \lambda_1} \xrightarrow{TZ} \frac{z}{z - e^{\lambda_1 T}}$$

$$\frac{1}{s - \lambda_2} \xrightarrow{TZ} \frac{z}{z - e^{\lambda_2 T}}$$

D'où la TZ de l'équation (3.14) est comme suit :

$$w(k) = \frac{b_0}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{z}{z - e^{\lambda_1 T}} - \frac{z}{z - e^{\lambda_2 T}} \right] d(k) - \frac{C_1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\left(\lambda_1 + \frac{R_a}{L_a}\right) z}{z - e^{\lambda_1 T}} - \frac{\left(\lambda_2 + \frac{R_a}{L_a}\right) z}{z - e^{\lambda_2 T}} \right] Cr(k)$$

$$w(k) =$$

$$w(k) = \frac{b_0}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{1 - z^{-1}e^{\lambda_2 T} - 1 - z^{-1}e^{\lambda_1 T}}{1 - [e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}]z^{-1} + z^{-2}e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}} \right] d(k) - \left[\frac{C_1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\lambda_1 + \frac{R_a}{L_a} - \lambda_2 - \frac{R_a}{L_a} - z^{-1}e^{\lambda_2 T} \left[\lambda_1 + \frac{R_a}{L_a} \right] + z^{-1}e^{\lambda_1 T} \left[\lambda_2 + \frac{R_a}{L_a} \right]}{1 - [e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}]z^{-1} + z^{-2}e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}} \right] Cr(k)$$

$$w(k) = \frac{b_0}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{z^{-1}[e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}]}{1 - [e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}]z^{-1} + z^{-2}e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}} \right] d(k) - \frac{C_1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\lambda_1 + \frac{R_a}{L_a} - \lambda_2 - \frac{R_a}{L_a} - z^{-1}e^{\lambda_2 T} \left[\lambda_1 + \frac{R_a}{L_a} \right] + z^{-1}e^{\lambda_1 T} \left[\lambda_2 + \frac{R_a}{L_a} \right]}{1 - [e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}]z^{-1} + z^{-2}e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}} \right] Cr$$

$$w(k) = \frac{b_0 e^{\lambda_2 T} [e^{\sqrt{\Delta} T} - 1]}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{z^{-1}}{1 - e^{\lambda_2 T} [e^{\sqrt{\Delta} T} + 1]z^{-1} + z^{-2}e^{-a_1 T}} \right] d(k) - \frac{C_1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\sqrt{\Delta} + z^{-1} \left\{ \frac{R_a}{L_a} e^{\lambda_2 T} [e^{\sqrt{\Delta} T} - 1] + e^{\lambda_2 T} (\lambda_2 e^{\sqrt{\Delta} T} - \lambda_1) \right\}}{1 - [e^{\lambda_2 T} + e^{\lambda_1 T}]z^{-1} + z^{-2}e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}} \right] Cr(k)$$

On pose que :

$$\begin{cases} e^{\lambda_2 T} [e^{\sqrt{\Delta} T} - 1] = \bar{\lambda}_2 \\ e^{\lambda_2 T} [e^{\sqrt{\Delta} T} + 1] = \bar{\bar{\lambda}}_2 \end{cases}$$

$$w(k) = \frac{b_0 \bar{\lambda}_2}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{z^{-1}}{1 - \bar{\bar{\lambda}}_2 z^{-1} + z^{-2}e^{-a_1 T}} \right] d(k) - \frac{C_1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\sqrt{\Delta} + z^{-1} \left\{ \left(\frac{R_a a_1}{L_a} \right) \bar{\lambda}_2 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \bar{\bar{\lambda}}_2 \right\}}{1 - \bar{\bar{\lambda}}_2 z^{-1} + z^{-2}e^{-a_1 T}} \right] Cr(k)$$

$$\begin{aligned} w(k)[1 - \bar{\bar{\lambda}}_2 + z^{-2}e^{-a_1 T}] \\ = \frac{b_0 \bar{\lambda}_2}{\sqrt{\Delta}} z^{-1} d(z) - \frac{C_1}{\sqrt{\Delta}} \left[\sqrt{\Delta} + z^{-1} \left\{ \left(\frac{R_a a_1}{L_a} \right) \bar{\lambda}_2 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \bar{\bar{\lambda}}_2 \right\} \right] Cr(k) \end{aligned}$$

Le modèle récurive de notre système dans le cas discret est comme suit :

$$A(k)w(k) = B(k)d(k) + H(k)Cr(k)$$

Telle que :

$$A(k) = 1 + A_1 z^{-1} + A_0 z^{-2}$$

$$B(k) = B_0 z^{-1}$$

$$H(k) = -\frac{c_1}{\sqrt{\Delta}} \left[\sqrt{\Delta} + \left\{ \left(\frac{Ra}{La} \frac{a_1}{2} \right) \bar{\lambda}_2 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \bar{\lambda}_2 \right\} z^{-1} \right]$$

Ou :

$$\begin{cases} A_1 = -\bar{\lambda}_2 \\ A_0 = e^{-a_1 T} \\ B_0 = \frac{b_0 \bar{\lambda}_2}{\sqrt{\Delta}} \end{cases}$$

On pose :

$$H(k)Cr(k) = V(k)$$

$$A(k)w(k) = B(k)d(k) + V(k) \quad \text{Ou } V(k) \text{ est une perturbation externe non mesurable.}$$

Ce dernier est le modèle utilisé.

4. Simulation

Dans cette section nous présenteront les différents résultats de simulation de l'algorithme des moindres carrés que l'on a appliqué à la machine à courant continu alimenté par un hacheur série, et ce pour les deux cas de modélisation (continu / discret). L'entrée de commande étant le rapport cyclique $d(t)$, nous l'avons pris comme un signal carré de période égale à 2 s et variable entre 0.4 et 0.85.

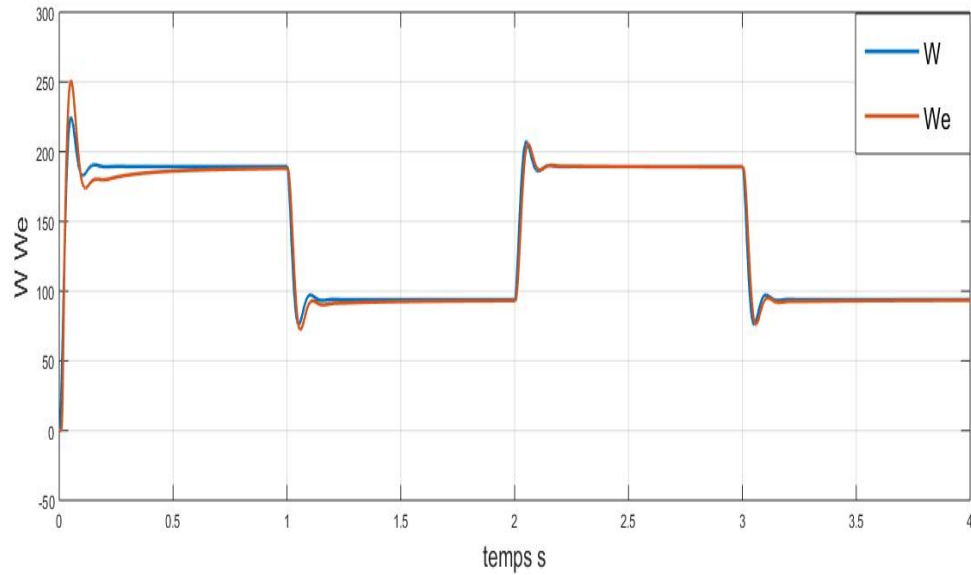
4.1 Simulation de cas continu :

Dans cette partie, on présente les résultats de simulation de l'algorithme récursif des moindres carrés avec facteur d'oubli dans le cas d'une modélisation continue. Les paramètres de réglage utilisés sont les suivant :

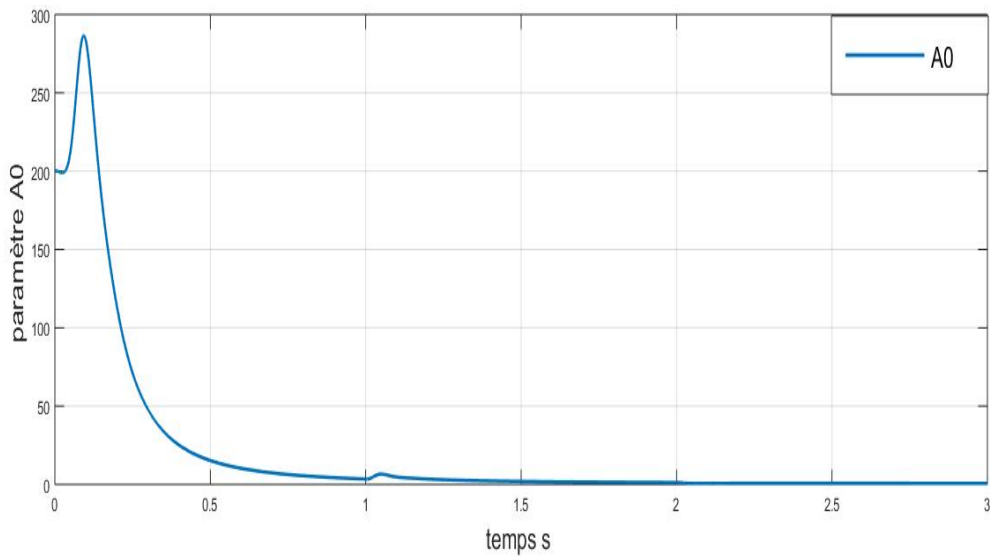
$$P^{-1}(0) = Q(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad \theta(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 67 \quad \lambda_0 = 30 \quad \beta = 2 \quad y(0) = 0$$

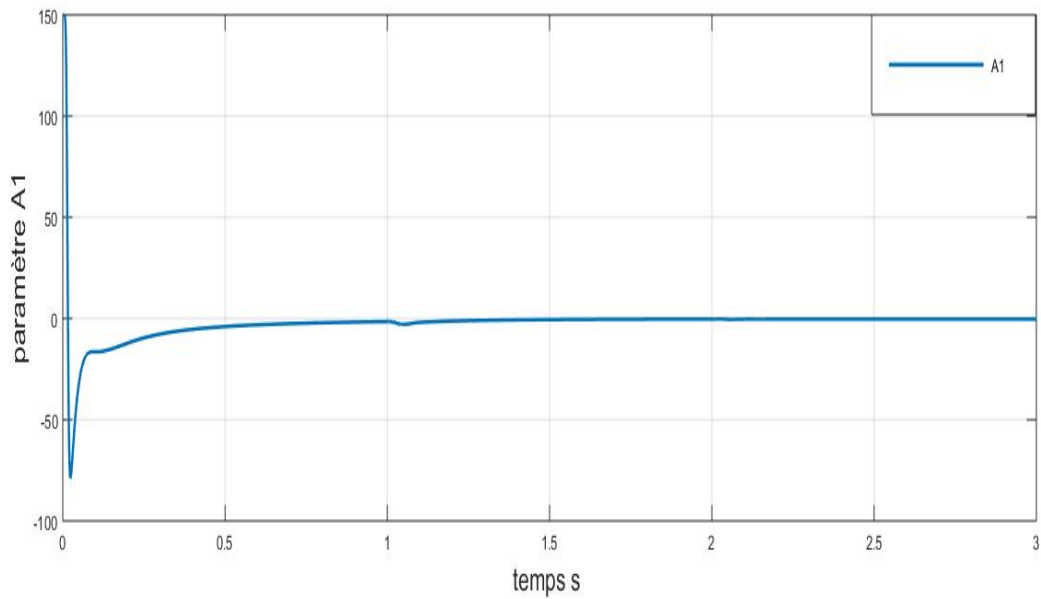
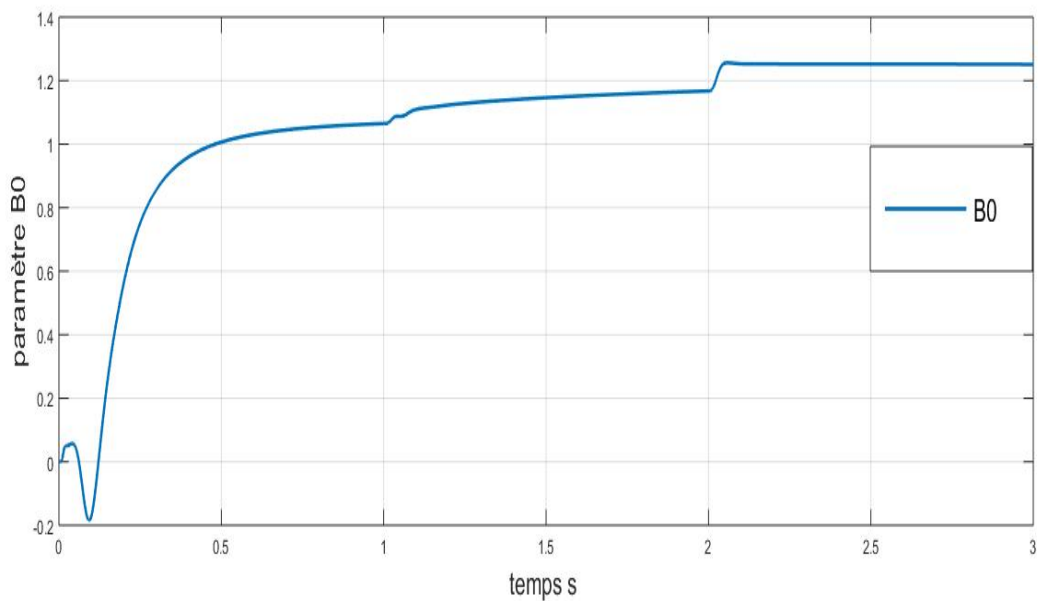
Les résultats obtenus sont en figures Fig3.1 à Fig3.4.



La Figure.3.1 Sortie mesurée w et sortie estimée w_e (modèle).



La Figure.3.2 Estimation du paramètre a_0 .

La Figure.3.3 Estimation du paramètre a_1 La Figure.3.4 Estimation du paramètre b_0

La Fig. 3.1 représente les deux sorties, la sortie du système réel et celle du modèle. De cette figure on peut constater que les deux sorties sont très similaires puisque la sortie du modèle suit parfaitement celle du système réel, donc il le suit asymptotiquement.

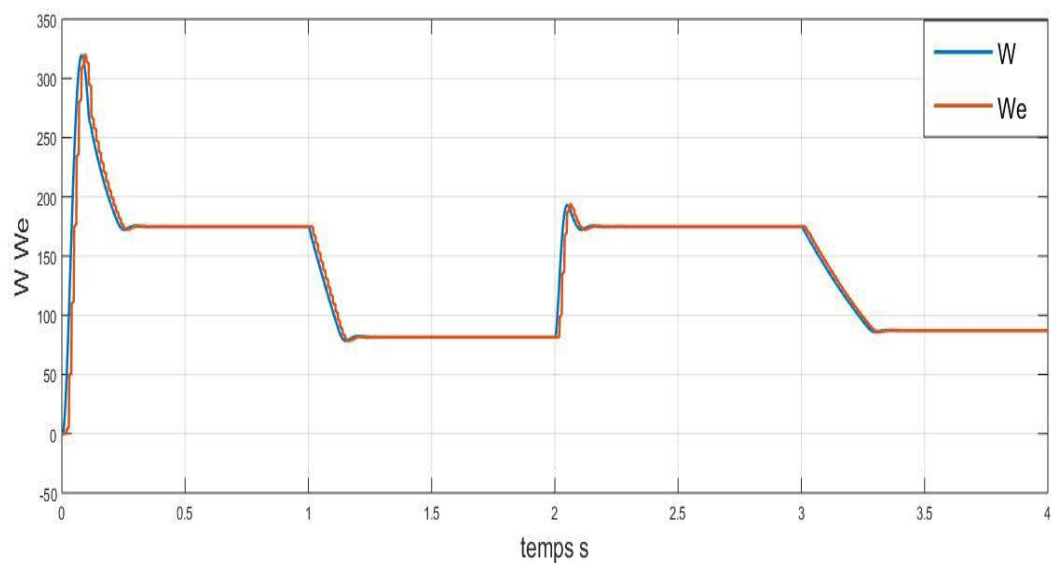
Les paramètres estimés (a_1 , a_0 , b_0) du modèle sont donnés par les trois figures Fig. 3.2, Fig. 3.3 et Fig. 3.4. En effet, ces figures permettent de constater que les paramètres estimés sont bornés et qu'ils ne divergent pas.

4.2 Simulation de cas discret :

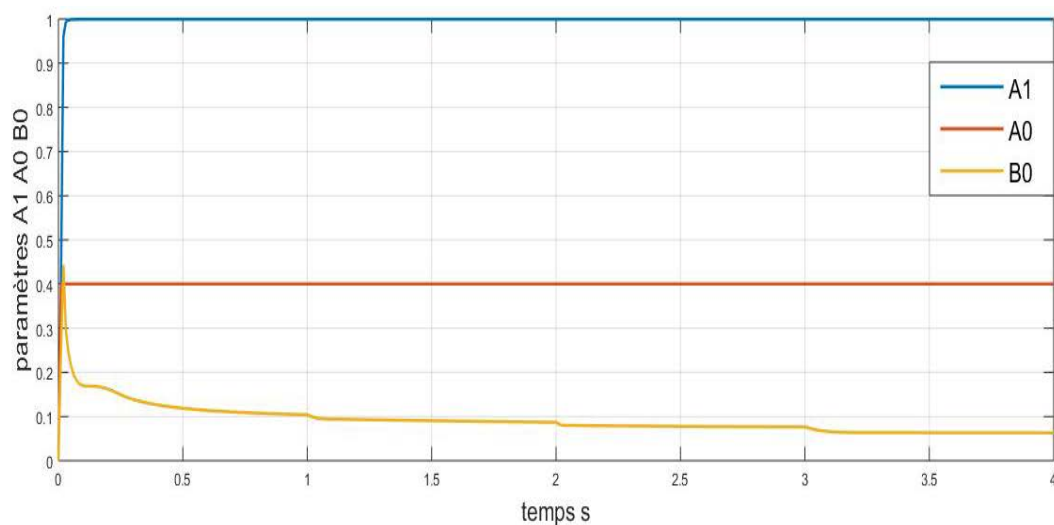
Dans cette partie, on présente les résultats de simulation de l'algorithme récursif des moindres carrés standard dans le cas d'une modélisation discrète. Les paramètres de réglage utilisés sont les suivant :

$$P(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta(0) = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad T_k = 0.01 \quad y(0) = 0$$

Les résultats obtenus sont en figures Fig3.5 et Fig3.6.



La Figure.3.5 Sortie mesurée w et sortie estimée w_e (modèle).



La Figure.3.6 Estimation des paramètres A_1, A_0, B_0 du modèle discret.

La Fig. 3.5 représente les deux sorties, la sortie du système réel et celle du modèle. De cette figure on peut constater que les deux sorties sont très similaires puisque la sortie du modèle suit parfaitement celle du système réel, donc il le suit asymptotiquement.

Les paramètres estimés (A_1, A_0, B_0) du modèle discret sont donnés par la figure Fig. 3.6. En effet, cette figure permet de constater que les paramètres estimés sont bornés et qu'ils ne divergent pas.

5. Essai Pratique

Dans cette section on présentera les résultats pratiques obtenus en utilisant l'algorithme des moindres carrés standard dans le cas d'une modélisation en discret. L'implémentation pratique de cet algorithme est réalisée sur la carte numérique *Arduino Mega*. L'essai pratique a été réalisé au Laboratoire *Machine Electrique* du département *Automatique*. Le montage complet de l'essai et celui du branchement de la carte numérique sont donnés par les images *figure3.9* et *figure3.10*. Les résultats de l'essai pratique sont donnés par les figures Fig.3.7 et Fig3.8. Ces deux dernières figures permettent de valider le travail théorique exposé dans ce chapitre et le chapitre II. En effet, on peut constater en premier lieu que la sortie estimée correspond parfaitement à la sortie réelle mesurée; et en second lieu que l'estimation pratique des paramètres du modèle est pratiquement la même que les résultats de simulation.

❖ Résultats expérimentales

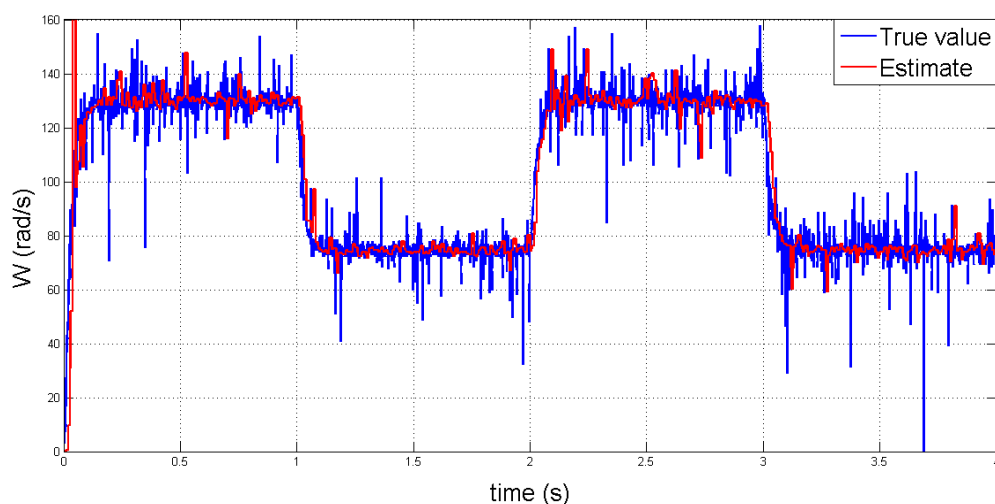
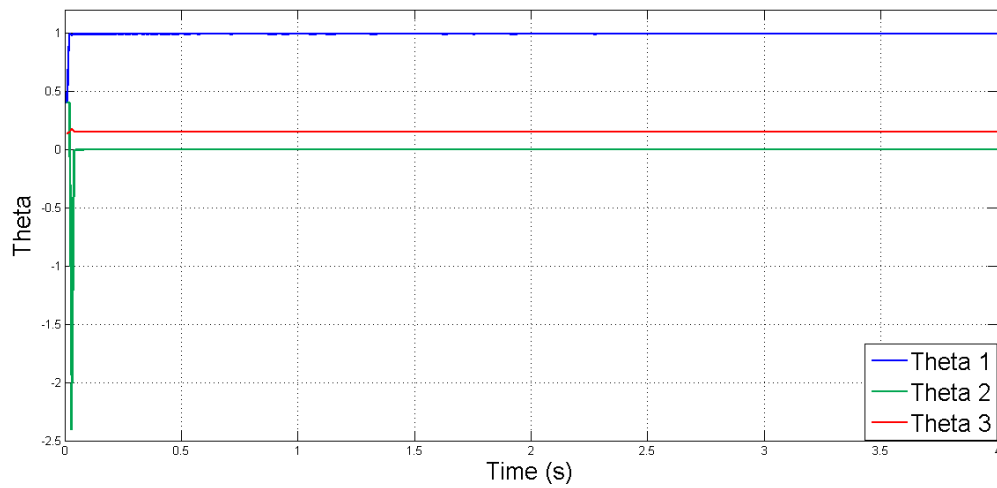
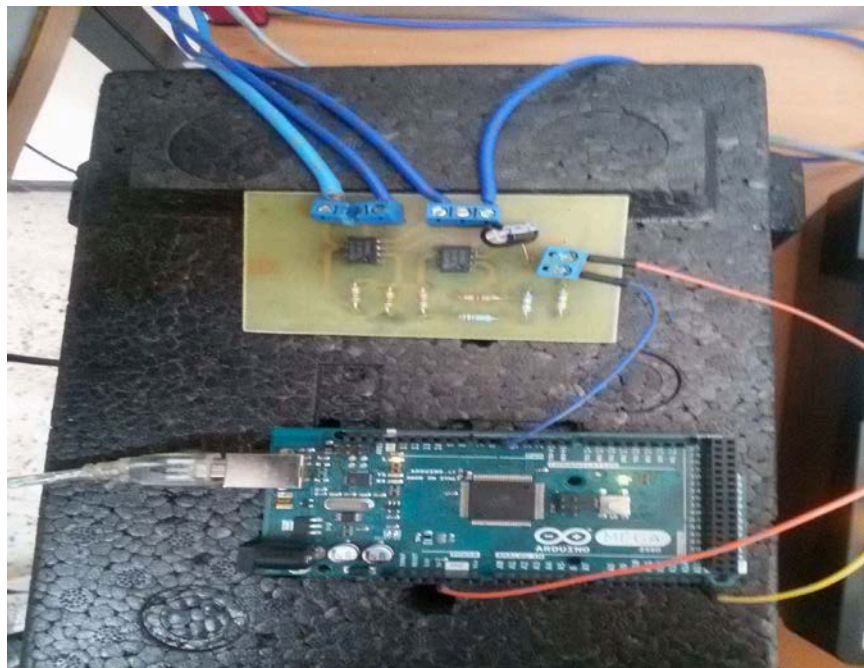


Figure.3.7 Sortie réel du système et celle estimé du modèle

Figure.3.8 Les paramètres estimés θ_1 , θ_2 et θ_3 Figure 3.9 Photographie de la carte *Arduino*

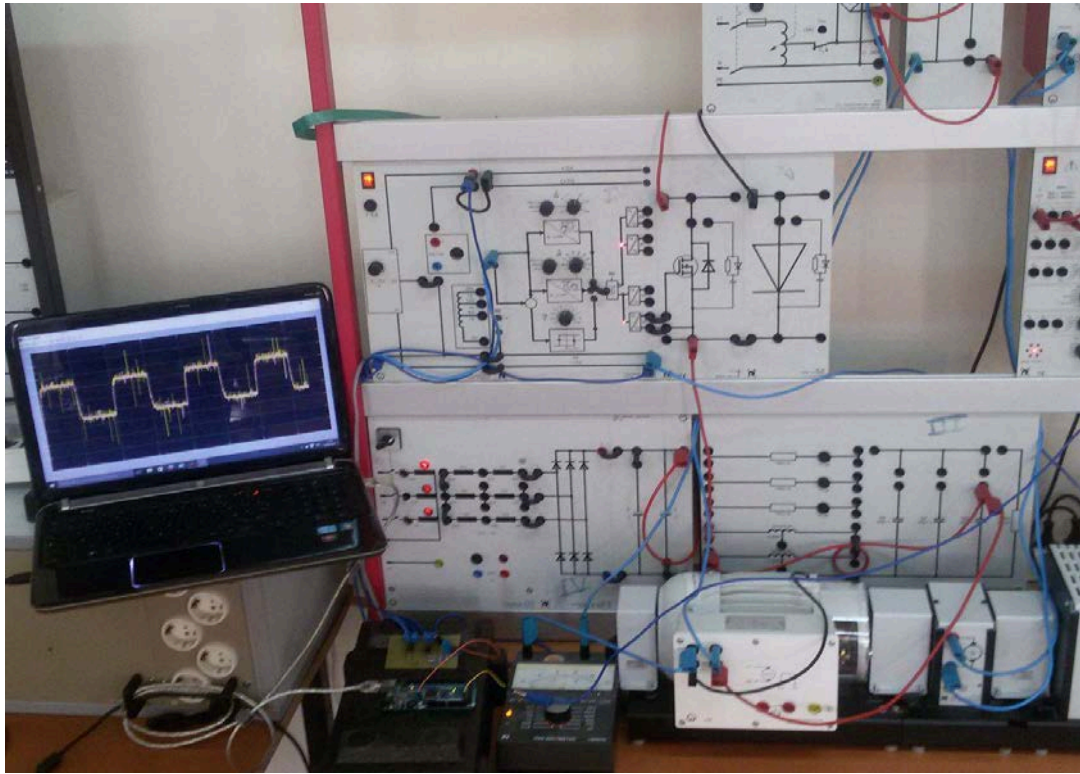


Figure 3.10 Photographie du montage complet de l'application

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué l'algorithme récursif standard des moindres carrés au système constitué d'une machine à courant continu alimentée par un hacheur série. En effet, dans les deux cas de figure, continu et discret, nous avons tiré le modèle paramétrique linéaire pour ce système et nous avons réalisé sous *Matlab/Simulink* la simulation correspondante. Les simulations réalisées ont confirmé l'étude théorique réalisée dans les deux premiers chapitres. En plus des simulations, nous avons réalisé un essai pratique de l'algorithme dans le cas d'une modélisation en discret. Cet essai nous a permis de valider le travail théorique et les simulations.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux problèmes d'identification des systèmes linéaires à une entrée et une sortie. Ces systèmes peuvent avoir un modèle mathématique continu ou bien discret. Nous nous sommes plus exactement intéressé au problème d'identification au sens des moindres carrés, où nous nous sommes appliqués à démontrer un certain nombre de propriétés reliées à ce sujet.

L'objectif de ce mémoire était la présentation de l'algorithme d'identification dit des moindres carrés récursif dans les deux cas de modélisations. On a présenté le développement mathématique de cet algorithme avec l'étude globale de la convergence des différents signaux. Pour chaque type de modélisations, plusieurs versions constituant des améliorations de l'algorithme pur ont été présentées. Ceci nous a permis de faire une étude comparative de l'algorithme des moindres carrés pour les deux types de modélisation. En effet, pour les deux situations en question, cet algorithme est pratiquement le même du point de vue de la formulation mathématique et en nombre de versions. Cette étude montre l'avantage du cas continu puisque l'algorithme est applicable aux systèmes dynamiques stables ou instables; alors qu'il est limité aux systèmes stables pour le cas discret.

Nous avons implémenté l'algorithme des moindres carrés pur à un système électrique réel constitué d'une machine à courant continu alimenté par un hacheur série et ce dans les deux cas de modélisation. Les différentes simulations effectuées ont permis de vérifier l'efficacité de l'algorithme des moindres carrés récursif. Nous avons aussi, dans le cas discret, réalisé un essai pratique sur le système précédent avec un grand succès. De ce fait, nous pensons avoir atteint l'objectif que nous nous étions fixés.

Ce travail pratique réalisé dans ce mémoire pourrait être complété, on l'espère, par d'autres étudiants en rajoutant une commande adaptative de type *RST*. En terminant, nous espérons que ce mémoire pourrait être utile pour les futures générations.

Bibliographie

- [1] P. A. Ioannou, J. Sun. *Robust Adaptive Control* . Dover publication, Inc. Mineola, New York, 1996.
- [2] Eykhoff, P. *System Identification: Parameter and State Estimation*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.
- [3] Ljung L. and T. Soderstrom, *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1983.
- [4] Middleton, R.H and G.C. Goodwin, *Digital Control and Estimation: A Unified Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.
- [5] Chi-Tsong Chen, *Control System Design : Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methode*, Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, New York 2000.
- [6] Mathias André, *Concavité / Convexité, cours de École Polytechnique – Crest, MI EPP* 2009.
- [7] Etienne Miquey, *Fonctions convexes, Atelier Maths JPS - 10 Janvier 2011*.
- [8] Denis Diderot, *Topologie des espaces vectoriels de dimension finie, Université Paris 7 – Année 2005/2006*.
- [9] Youness Mir, *Approximation par la méthode des moindres carrés, Mémoire de doctorat, Faculté des Sciences Université de Sherbrooke, Canada, Novembre 2007*.
- [10] Christophe Hurlin et Papa MB.P. N'Diaye y, *Méthode d'Estimation des Moindres Carrés Modifiés, Juin 1998*.
- [11] Michel Llibre, *Resolution de systemes lineaires : Moindres carres récursifs et Filtre de Kalman discret. ONERA, the franch aerospace LAB. Décembre 2008*.

- [13] B. SALEMII, B. REMY, *Mise en place de modèles paramétriques autorégressifs de type « ARX » pour l'extrapolation de températures d'équipements dans la nacelle d'un système propulsif, Congrès Français de Thermique, SFT 2011, Perpignan, 24-27 Mai 2011.*
- [14] P.C.Young. *parameter estimation for continuous time models . A survey. Automatica.1981*
- [15] Michel ETIQUE, *Cours Automatique avancée (AAV), 134 pages, Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion. Suisse. Mars 2006.*
- [16] Salgado, M. E., G. C. Goodwin, et R. H. Middleton (1988). *Modified least squares algorithm incorporating exponential resetting and forgetting. International Journal of Control 47(2), 477–491.*
- [17] Parkum, J., N. K. Poulsen, et J. Holst (1992). *Recursive forgetting algorithms. International Journal of Control 55(1), 109–128.*
- [18] Lughofer, E. et P. Angelov (2011). *Handling drifts and shifts in on-line data streams with evolving fuzzy systems. Applied Soft Computing 11(2), 2057–2068.*
- [19] Fortescue, T. R., L. S. Kershenbaum, et B. E. Ydstie (1981). *Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors. Automatica 17(6), 831–835.*
- [20] Almaksour, A. et E. Anquetil (2011). *Improving premise structure in evolving takagi-sugeno neuro-fuzzy classifiers. Evolving Systems 2, 25–33.*
- [21] Philippe LE BRUN, *Choix et alimentation des machines à courant continu, Janvier 2000.*

Résumé

Etude et application des algorithmes d'identification dite les moindres carrés récursif dans les deux cas de la modélisation (continue et discret), une présentation et un développement mathématique de cette algorithmes avec l'étude globale de la convergence des différentes signaux.

Pour les deux versions de l'algorithme des moindres carrés récursif, on a réalisé des simulations sous le logiciel Matlab/Simulink pour un système électrique simple filtre RC et une Machine à courant continue, afin de réaliser le test de comparaison entre les deux versions. On a terminé avec un essai pratique de la MCC en utilisant une carte Arduino.

Les mots clés

- Identification
- Moindres carrés récursif
- Machine à courant continue
- Carte Arduino