

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

D'Ingénieur d'Etat en Automatique

Thème

**Commande Linéaire Quadratique des Systèmes
à Paramètres Distribués basée sur la stratégie de
pré-approximation**

Proposé par : M^r A.MAIDI.

Présenté par : M^r TIGUERCHA Sofiane.

Dirigé par : M^r A.MAIDI.

M^r TALHADJT Ramdane.

Soutenu le : / 06 /2010

Promotion 2010

REMERCIEMENT

Tout d'abord nous remercions Dieu tout puissant qui nous a armé de courage, de volonté et surtout de patience.

Au terme de ce modeste travail,

Nous tenons à remercier notre promoteur M^r. **A.MAIDI** qui nous a encadré et qui tout au long de notre travail nous a fait bénéficier de son savoir, de son aide et de ses conseils.

Nos remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à mener à terme ce travail et l'obtention de notre diplôme ingénieurs.

Que les membres de jury qui nous feront l'honneur d'évaluer notre travail puissent trouver ici l'expression de notre profonde gratitude.

DEDICACES

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail

- A mes chers parents.
- A ma grand-mère.
- A mon frère et mes sœurs.
- A toute la famille et ces proches.
- A tous mes amis.
- A tous les enseignants qui m'ont donné une noble formation et
éducation de l'école primaire à l'université.
- A tous ceux qui j'aime.

TIGUERCHA Sofiane

DEDICACES

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail

- A mes chers parents que j'aime beaucoup.
- A mes sœurs et mes frères.
- A toute la famille TALHADJT.
- A ma grand-mère FATOUMA.
- A tous mes amis.

TALHADJT Ramdane

INDICES

t	: variable du temps.
z	: variable d'espace.
$x(t)$: vecteur d'état.
$u(t)$: vecteur de commande.
$x^d(t)$: vecteur d'état désiré.
$u_d(t)$: signal d'entrée.
$e(t)$: vecteur d'erreur.
$x(z, t)$: vecteur d'état d'un système à paramètres distribués.
$u(z, t)$: vecteur de commande d'un système à paramètres distribués.
$y(z, t)$: vecteur de sortie d'un système à paramètres distribués.
$x_0(z)$: condition initiale.
A	: matrice d'état.
B	: matrice de commande.
C	: matrice de sortie.
D	: matrice de couplage.
I	: matrice identité.
n	: ordre du système.
m	: nombre de commande.
r	: nombre de sortie.
i, j, k	: indices.
α, β, γ	: coefficients constants.
Ω	: domaine spatial.
\mathcal{T}	: domaine temporelle.
\mathcal{C}	: matrice de commandabilité.
θ	: matrice d'observabilité.
\mathcal{M}	: opérateur matriciel différentiel.

\mathcal{L}	: opérateur matriciel différentiel.
\mathfrak{R}	: nombres réel.
∂	: indice d'une dérivée partielle.
d	: indice d'une dérivée totale.
$b(z)$: structure géométrique de système d'actionneur.
$P(z)$: structure géométrique de système d'observation.
$c(z)$: structure géométrique de système.
$a(t)$: vecteur d'état.
$b(t)$: vecteur de commande.
$\emptyset(z)$: vecteur fonctions propres.
λ_k, λ_n	: vecteur valeurs propres.
n	: dimension du système approximé par la méthode des fonctions propres.
H	: l'Hamiltonien.
J	: critère quadratique de compromis.
J_e	: critère de performance lié à l'écart.
J_u	: critère de performance lié à la commande.
Q	: matrice de pondération sur l'écart.
R	: matrice de pondération sur la commande.
$p(t)$: vecteur adjoint.
$P(t)$: solution de l'équation de Riccati.
$v(t)$: matrice liée au vecteur consigne.
K_c	: matrice de gain de retour d'état.
F	: matrice de poursuite.
$\frac{1}{s}$: intégrateur.
$\vec{\phi}$: vecteur flux de chaleur.
λ	: conductivité thermique.
S	: surface.

l	: longueur.
T	: température.
$\vec{\varphi}$: densité de flux thermique.
$\vec{\nabla}$: gradient.
τ	: temps de réponse.
$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$: coordonnées cartésiennes.
ρ	: masse volumique.
ΔQ	: quantité de chaleur emmagasinée.
C_v	: capacité calorifique massique.
D	: coefficient de diffusivité.
A_k	: coefficient.
w	: matrice fonctions propres.
N	: nombre d'échantillon.
$\Delta z, h$: pas d'échantillonnage.
p	: nombre de zones.
δ	: impulsion de Dirac.
L	: frontière.
$(.)^{-1}$: inverse d'une matrice.
$(.)^T$: transposé d'une matrice.
LQ	: linéaire quadratique.
SPD	: système à paramètres distribués.
SPL	: système à paramètres localisés.
EDP	: équation aux dérivées partielles.
EDO	: équation aux dérivées ordinaires.

SOMMAIRE

Sommaire

Introduction générale	01
Chapitre I : Généralités sur la Commande des Systèmes à Paramètres Distribués	
I.1 Introduction	03
I.2 Systèmes à paramètres distribués	03
I.3 Description mathématique d'un système à paramètres distribués	03
I.3.1 Types de commandes pour un système à paramètres distribués	04
I.3.1.1 Commande distribuée	05
I.3.1.2 Commande par zones	05
I.3.1.3 Commande ponctuelle	05
I.3.1.4 Commande par balayage	05
I.3.1.5 commande aux frontières	05
I.3.2 Types d'observations pour un système à paramètres distribués	05
I.3.2.1 Observation distribuée	06
I.3.2.2 Observation ponctuelle	06
I.3.2.3 Observation par balayage	06
I.3.2.4 Observation par moyenne spatial	06
I.4 Classification des systèmes à paramètres distribués	06
I.5 Commande des systèmes à paramètres distribués	07
I.5.1 Stratégie basée sur l'utilisation directe de modèle d'EDP	07
I.5.2 Stratégie basée sur l'approximation de modèle d'EDP.....	08

I.5.2.1 Méthode des différences finies	08
I.5.2.2 Méthode des fonctions propres	10
I.6 Conclusion	13
Chapitre II : Commande Linéaire Quadratique (LQ)	
II.1 Introduction	14
II.2 Formulation d'un problème de commande linéaire quadratique LQ	14
II.3 Rappel sur la commandabilité et l'observabilité	16
II.3.1 Commandabilité	16
II.3.2 Observabilité	16
II.4 Résolution de problème de commande LQ	17
II.5 Problème de commande LQ dans un horizon fini	18
II.5.1 Problème de poursuite	18
II.5.2 problème de régulation	20
II.6 Problème de commande LQ dans un horizon infini	22
II.6.1 Problème de poursuite	22
II.6.2 Problème de régulation	23
II.7 Choix des matrices de pondération	24
II.8 Rôle des matrices de pondération	24
II.9 Conclusion	25
Chapitre III : Modélisation de phénomène de transfert de chaleur dans une tige	
III.1 Introduction	26
III.2 Modes de transfert de chaleur	26

III.2.1 Diffusion	26
III.2.2 Convection	26
III.2.3 Rayonnement	26
III.3 Exemples de transfert de chaleur	27
III.4 Diffusion de la chaleur par conduction	27
III.4.1 Loi de Fourier	27
III.4.2 Phénomène de la conduction thermique	30
III.5 Equation de chaleur	30
III.5.1 Notion de chaleur	30
III.5.2 Equation de conduction de la chaleur	30
III.6 Approximation de l'équation de chaleur	35
III.6.1 Conditions aux limites et conditions initiales	35
III.6.2 Approximation de l'équation de chaleur par la méthode des différences finies	36
III.7 Conclusion	39
 Chapitre IV : Commande LQ de l'évolution de la température dans une tige métallique	
IV.1 Introduction	40
IV.2 Description du système à commander	40
IV.3 Equation de chaleur	41
IV.3.1 Approximation de l'équation de chaleur	41
IV.3.2 Méthodes d'approximation	42
IV.3.2.1 Méthode des fonctions propres	42
IV.3.3 approximation de l'équation de chaleur par la méthode des fonctions propres	42

IV.4	Résolution et simulation de l'équation de chaleur	48
IV.4.1	Simulation de l'équation approximée par la méthode des différences finies.....	48
IV.4.2	Simulation de l'équation approximée par la méthode des fonctions propres	49
IV.4.3	Comparaison des résultats	50
IV.5	Choix de la commande à appliquer	51
IV.6	Commande linéaire quadratique de l'évolution de la température dans la tige	51
IV.7	Simulation du système commandé	53
IV.7.1	Interprétation des résultats	56
IV.8	Conclusion	56
Conclusion générale	57

INTRODUCTION GENERALE

L'évolution dans les domaines de mathématique et d'informatique a apporté, ces dernières années, un développement considérable pour l'automatisation des systèmes plus complexes, parmi lesquels on retrouve les systèmes dynamiques à paramètres distribués (SPD). Ces derniers sont modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP) puisque les variables caractéristiques dépendent de la variable spatiale et de la variable temporelle.

La synthèse d'une loi de commande pour un système à paramètres distribués nécessite une approximation du modèle EDP pour le ramener à ce qui est déjà connu et maîtrisé par les automaticiens, c'est-à-dire avoir un système à paramètres localisés (SPL) modélisé par des équations aux dérivées ordinaires (EDO). Parmi les méthodes d'approximation, on retrouve les méthodes d'approximation de l'équation et celles d'approximation de la solution.

La résolution de l'EDP, approximé par les méthodes d'approximation de l'équation, nécessite un nombre de points de discrétisation élevé afin d'avoir une bonne précision. Néanmoins, ces méthodes d'approximation posent un sérieux problème pour l'implémentation du système de commande vu que ce dernier prend la dimension de modèle. Les méthodes d'approximation de la solution donnent un modèle d'état de faible dimension ce qui rend l'application d'une commande plus pratique. Parmi les méthodes d'approximation de solution, la plus utilisée, on retrouve la méthode des fonctions propres.

La théorie de systèmes s'intéresse plus particulièrement à l'optimisation de comportement, d'où la naissance de la théorie de la commande optimale qui a fait l'objet d'un très large développement méthodologique en atteignant un niveau relativement élevé dans la qualité des résultats obtenus. Ainsi dans notre travail on s'intéresse à la commande linéaire quadratique d'un système à paramètres distribués basée sur un modèle approximé obtenu par la méthode des fonctions propres.

La commande linéaire quadratique (LQ) est une commande optimale par retour d'état utilisant un critère quadratique. Ce dernier intervient dans les problèmes de minimisation de l'énergie mise en œuvre, de stabilisation et de suivi de trajectoire.

L'objet principal est la synthèse d'une commande linéaire quadratique pour un modèle décrit par l'équation de chaleur. L'exemple étudié concerne la diffusion de la chaleur dans une barre métallique dont le but de cette application est d'assurer un bon suivi de trajectoire de référence.

L'étude sera répartie sur les quatre chapitres présentés comme suit :

Le chapitre 1 porte des généralités sur les systèmes à paramètres distribués. En premier, on donne la définition et la description mathématique d'un système à paramètres distribués. Ensuite, on aborde les différentes commandes et observations ainsi que les classes de ce type de systèmes. La fin du chapitre expose deux méthodes de résolution de l'équation aux dérivées partielles ; la méthode des différences finies et la méthode des fonctions propres.

Le chapitre 2 présente des notions sur la commande linéaire quadratique (LQ) dont l'objectif est la recherche d'une loi de commande minimisant un critère quadratique traduisant les performances en poursuite et en minimisation de l'énergie. Le chapitre aborde également, la résolution d'un problème de régulation et de poursuite dans les cas d'un horizon fini et infini, et l'influence des matrices de pondération Q et R sur les performances du système.

Le chapitre 3 est consacré à la modélisation d'un transfert de chaleur par conduction dans une tige. Premièrement on va présenter les différents modes du transfert de chaleur, puis on s'intéressera à la modélisation du phénomène de diffusion de chaleur. Le chapitre se termine par l'application de la méthode des différences finies pour l'approximation de l'équation de chaleur.

Le chapitre 4 présente l'application de la commande linéaire quadratique (LQ) de la distribution de la température d'une tige métallique dont la dynamique est décrite par l'équation de chaleur. Le chapitre commence par l'approximation du modèle distribué par la méthode des fonctions propres, puis présente une comparaison des résultats de simulation obtenus par les deux méthodes d'approximation. En suite, on présentera les résultats de simulation du système commandé par une loi de commande LQ dans le cas de poursuite de la consigne.

CHAPITRE I

I.1 Introduction

Ce chapitre présente des notions sur les systèmes à paramètres distribués. Contrairement aux systèmes à paramètres localisés, les variables caractéristiques des systèmes à paramètres distribués (SPD) varient dans le temps et dans l'espace. Ces derniers sont modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP).

Les notions présentées dans ce chapitre concernent, la description mathématique des systèmes à paramètres distribués, leur classification et les différentes commandes et observations pour ce type de systèmes.

I.2 Systèmes à paramètres distribués

Les systèmes à paramètres distribués ont un large spectre d'utilisation dans les différentes domaines des sciences, comme exemples : la thermique, le génie des procédés, la chimie, la biologie, et d'autres. Pour les systèmes à paramètres distribués les variables sont non homogènes car elles dépendent de la variable d'espace. Par exemple, la température dans une enceinte thermique n'est pas la même en tout point mais elle est distribuée. Ou encore les concentrations dans un réacteur chimique, le déplacement d'une structure flexible, la densité et le débit dans un trafic urbain, l'évolution d'épidémie dans une population ou l'infection d'une personne par une maladie.

Comme exemples industriels de ces systèmes on peut citer les réacteurs chimiques ou biochimiques, décompteur, laminoirs, réacteurs thermiques, échangeurs de chaleurs, fours industrielles, colonne de distillation, manipulations flexibles en robotique. En effet, les SPD sont décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP).

I.3 Description mathématique d'un système à paramètres distribués

Le système caractérisé par une équation d'évolution, ce système est dit système à paramètres distribués (SPD) s'il est décrit par une équation aux dérivées partielles (EDP), une équation intégrale ou une équation intégro-différentielle à deux variables, variable du temps et variable d'espace. Ce type de systèmes est rencontré dans tous les domaines de la physique.

La modélisation d'un système physique qui donne une EDP, il est à paramètres distribués dont les variables caractéristiques et /ou paramètres sont non homogènes, ce type de systèmes est

de dimension infini (le nombre de variables d'état est infini). Dans le cas d'un SPD linéaire monodimensionnel à deux variables indépendantes, variable du temps (t) et variable d'espace (z), est décrit selon [1] par les données suivantes :

- Un domaine spatiale, borné de \mathfrak{R} , $\Omega = [0, L]$ et de frontières $\partial\Omega = \{0, L\}$,
- Un domaine temporel $\mathcal{T} = [0, +\infty [$,
- Une équation d'état ou d'évolution à l'intérieur de domaine $\Omega \times \mathcal{T}$:

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = A(x(z,t)) + B(u(z,t)), \quad t \in \mathcal{T} \text{ et } z \in \Omega, \quad (\text{I.1})$$

- Une équation de sortie $\Omega \times \mathcal{T}$:

$$y(z,t) = C(x(z,t)), \quad (\text{I.2})$$

- Des conditions sur la frontière $\partial\Omega$ appelées conditions aux limites :

$$\mathcal{L}(x(z,t)) = u(z,t), \quad z \in \partial\Omega. \quad (\text{I.3})$$

dans ce cas de commande aux frontières, $z \in \partial\Omega$ et $u(z,t) \neq 0$, ce qui donne des conditions aux limites non homogènes.

- Des conditions initiales ($t = 0$) sur Ω :

$$\mathcal{M}(x(z,t)) = 0, \quad (\text{I.4})$$

où l'état $x(z,t)$, la commande $u(z,t)$, et la sortie $y(z,t)$ du système sont représentées par des fonctions vectorielles de dimension $1 \times n, 1 \times m, 1 \times r$ respectivement.

Les matrices $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot), \mathcal{L}(\cdot)$, et $\mathcal{M}(\cdot)$ sont des matrices d'opérateurs différentiels ne comportant que des dérivées par rapport à la variable d'espace z .

$A(\cdot), B(\cdot)$ et $C(\cdot)$ sont appelées respectivement opérateur d'état, opérateur de commande et opérateur d'observation. La matrice $B(\cdot)$ dépend de la structure de commande de système, et la matrice $C(\cdot)$ dépend des objectifs de la commande.

I.3.1 Types de commandes pour un système à paramètres distribués

Les systèmes à paramètres distribués (SPD) peuvent être classés selon le type de la commande appliquée en plusieurs classes [1], et il existe :

I.3.1.1 Commande distribuée

$u(z, t)$ définie sur $\Omega \times \mathcal{T}$ et donnée comme suit :

$$u(z, t) = b(z)u_d(t), \quad (I.5)$$

où $b(z)$ caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs, et $u_d(t)$ est le signal d'entrée.

Cette décomposition permet de simplifier les calculs pour la détermination de la loi de commande.

I.3.1.2 Commande par zones

Une zone Ω_i représente une portion du domaine spatial Ω . Une commande par zone est définie sur un sous-ensemble $\Omega_i \times \mathcal{T}$. Par exemple la commande appliquée sur p zones alors :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^p b_i(z)u_{di}(t), \quad (I.6)$$

où $b_i(z)$ caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs, et $u_{di}(t)$ est le signal d'entrée relatif à la zone i .

I.3.1.3 Commande ponctuelle

Dans le cas particulier où la zone de commande se réduit à un point situé dans Ω , la fonction b_i est remplacée dans (I.6) formellement par l'impulsion de Dirac :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^p \delta(z - z_i)u_{di}(t). \quad (I.7)$$

I.3.1.4 Commande par balayage

Pour laquelle les zones ou/et points d'action sont mobile dans Ω .

I.3.1.5 Commande aux frontières

Définie sur $\partial\Omega \times \mathcal{T}$. Cette commande peut être par zones, ponctuelle, fixe ou par balayage.

I.3.2 Types d'observations pour un système à paramètres distribués

Les systèmes à paramètres distribués (SPD) peuvent être classés selon le type de la sortie observée en plusieurs classes [1], et il existe :

I.3.2.1 Observation distribuée

Défini sur $\Omega \times \mathcal{T}$ ou sur un sous-ensemble de $\Omega \times \mathcal{T}$. Le vecteur de sortie dans (I.2) peut être écrit sous la forme simplifiée suivante

$$y(z, t) = P(z)x(z, t) \quad (\text{I.8})$$

$P(z)$: caractérise la structure géométrique des systèmes d'observations.

I.3.2.2 Observation ponctuelle

Agissant sur un ou plusieurs points z_i de Ω définie par l'intégrale suivant :

$$y_i(t) = y(z_i, t) = \int_{\Omega} \delta(z - z_i)x(z, t)dz \quad z_i \in \Omega \quad (\text{I.9})$$

L'observation aux frontières n'est qu'un cas particulier de l'observation ponctuelle ; mais dans ce cas en agissant seulement sur les frontières $\partial\Omega$.

I.3.2.3 Observation par balayage

Les points d'observations (capteurs) sont mobiles dans le domaine admissible d'espace Ω et du temps \mathcal{T} .

I.3.2.4 Observation par moyenne spatiale

Définie par l'intégrale suivant

$$y(t) = \int_{\Omega} c(z)x(z, t)dz \quad (\text{I.10})$$

où $c(z)$ caractérise la structure géométrique de l'ensemble des capteurs.

Ce dernier cas est obtenu lorsqu'un ensemble de capteurs fournissant un signal de sortie qui ne peuvent pas être assimilés à des points d'observation.

I.4 Classification des systèmes à paramètres distribués

La classification des systèmes à paramètres distribués est basée sur la forme de l'équation aux dérivées partielles les caractérisant. Ces équations en générales sont de deuxième ordre à deux variables z et t . Elles se présentent sous la forme mathématique suivante :

$$\alpha \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} + [\dots] = 0, \quad (\text{I.11})$$

où les termes entre crochets dépendent des dérivées premières de $x(z, t)$, de $x(z, t)$, de z et de t .

α, β et γ sont des coefficients constants avec lesquels les classes d'une EDP se distinguent tel que le système est :

- Elliptique, si $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$,
- Parabolique, si $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$,
- Hyperbolique, si $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$.

En plus, des cas particuliers comme dans le cas où les trois coefficients α, β et γ sont nuls alors le système est hyperbolique, et dans le cas où $\alpha \neq 0$ et $\beta = \gamma = 0$ le système est dit parabolique.

Les systèmes elliptiques caractérisent les systèmes stationnaires. Pour les problèmes de commande on rencontre généralement des SPD de type parabolique ou hyperbolique.

I.5 Commande des systèmes à paramètres distribués

La commande des systèmes à paramètres distribués a connu un développement parallèle avec le développement de l'informatique et des mathématiques. Les différentes approches développées peuvent être divisées en deux grandes catégories : la stratégie basée sur l'utilisation directe du modèle EDP et la stratégie basée sur l'approximation de modèle EDP.

I.5.1 Stratégie basée sur l'utilisation directe de modèle d'EDP

La stratégie basée sur l'utilisation directe du modèle EDP est utile dans le cas de la mise en œuvre d'un correcteur car la synthèse de ce dernier se fait directement à partir du modèle d'EDP. Elle utilise des théorèmes mathématiques importants et des notions d'analyse fonctionnels, pour aborder les problèmes d'analyse et de synthèse des SPD. La linéarité de l'EDP caractérisant le SPD est importante dans le cas d'utilisation de la stratégie basée sur l'utilisation directe du modèle d'EDP sinon la linéarisation de modèle autour d'un point de fonctionnement est indispensable.

I.5.2 Stratégie basée sur l'approximation de modèle d'EDP

Le but de l'approximation est d'amener un SPD à un système bien connu et maîtrisé c'est le SPL par de diverses méthodes d'approximation. Deux approches existent pour la stratégie basée sur l'approximation du modèle : l'approximation de l'équation aux dérivées partielles et celle d'approximation de la solution de l'équation aux dérivées partielles. La première approche regroupe la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis. Ces méthodes conduisent à un système d'EDO. La seconde approche n'aborde pas le problème par des équations approchées mais directement par des modèles de solutions approchées. Parmi ces méthodes, on retrouve la méthode des fonctions propres et la méthode des résidus pondérés.

I.5.2 .1 Méthode des différences finies (méthode de discrétisation)

L'utilisation des méthodes d'approximation aux différences finies est très intéressante lorsqu'il s'agit d'obtenir pour un système à paramètres répartis considéré, un modèle mathématique à paramètres localisés suffisamment représentatif de son comportement réel, avec un nombre relativement faible de variables d'état.

Lorsque le problème posé consiste en une simple simulation du système considéré, on peut utiliser l'une des méthodes d'approximation aux différences finies ou méthodes de discrétisation. On distingue deux types de discrétisation :

- Discrétisation totale où les domaines d'espace et de temps sont décomposés ; on obtient dans ce cas un modèle d'équation aux récurrences implicite ou explicite selon la méthode utilisée.
- Semi-discrétisation où seul l'un des domaines d'espace ou de temps est décomposé ; le modèle obtenu est alors un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre d'autant plus grand que la discrétisation est plus fine. [1]

Exemple I.1

Pour illustrer la méthode des différences finies, considérant l'équation suivante

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + u(z, t) \quad , z \in [0,1] \quad (\text{I.12})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x(0, t)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial x(1, t)}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.13})$$

Conditions aux limites de type Neumann .

Remarque I.1

Il existe plusieurs types de conditions aux limites, parmi elles on peut citer les conditions de Dirichlet, les conditions de Neumann et les conditions de Fourier. Elles consistent à fixer soit les frontières de l'état, le gradient de l'état ou le gradient de l'état avec prise en considérations des conditions externes. □

et la condition initiale est :

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad (\text{I.14})$$

Décomposons le domaine d'espace $[0,1]$ en N intervalles égaux, correspondant à un pas de discrétisation $\Delta z = \frac{1}{N}$. Et par la définition de la dérivée

$$\frac{\partial x(z_i, t)}{\partial z} = \frac{x(z_{i+1}, t) - x(z_i, t)}{\Delta z} \quad (\text{I.15})$$

pour les frontières, on a :

pour $i=0$

$$\frac{\partial x(z_0, t)}{\partial z} = \frac{-3x(z_0, t) + 4x(z_1, t) - x(z_2, t)}{2\Delta z} = 0 \quad (\text{I.16})$$

d'ou

$$x(z_0, t) = \frac{4}{3}x(z_1, t) - \frac{1}{3}x(z_2, t) \quad (\text{I.17})$$

pour $i=N$

$$\frac{\partial x(z_N, t)}{\partial z} = \frac{3x(z_N, t) - 4x(z_{N-1}, t) + x(z_{N-2}, t)}{2\Delta z} = 0 \quad (\text{I.18})$$

d'ou

$$x(z_N, t) = \frac{4}{3}x(z_{N-1}, t) - \frac{1}{3}x(z_{N-2}, t) \quad (I.19)$$

la dérivée seconde est approximée par :

$$\frac{\partial^2 x(z_i, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta z^2} [x(z_{i+1}, t) - 2x(z_i, t) + x(z_{i-1}, t)] \quad (I.20)$$

on remplace dans (I.12)

$$\text{posant } x(z_i, t) = T_i$$

$$\text{d'où } \dot{T}_i = \frac{1}{\Delta z^2} [T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}] + u(z_i, t) \quad (I.21)$$

sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \vdots \\ \dot{T}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \quad \setminus u_i = u(z_i, t) \quad (I.22)$$

système sous sa forme d'état.

Remarque I.2

- Dans cet exemple seul la variable de l'espace qui est décomposée et le modèle obtenu est un système d'équations différentielles donc la méthode d'approximation aux différences finies utilisée est celle de la semi-discrétisation.
- L'approximation de l'équation I.12 par la méthode des différences finies peut se faire par l'utilisation des différences centrées.

I.5.2.2 Méthodes des fonctions propres

Elle se traduit par la séparation des variables de l'espace et du temps lorsque les fonctions propres et valeurs propres de l'équation (I.1) sont calculables.

tel que :

$$x(z, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{a}_j(t) \phi_j(z) \quad (\text{I.23})$$

$$u(z, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (\text{I.24})$$

Cette méthode permet d'aboutir à un modèle mathématique très simplifié. L'exemple I.2 montre les principales étapes de simplification.

Exemple I.2

Appliquant cette méthode sur le modèle (I.12)

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + u(z, t) \quad , z \in [0,1] \quad (\text{I.25})$$

Les équations (I.23) et (I.24) donnent :

$$x(z, t) = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(t) \phi_j(z) \quad (\text{I.26})$$

$$u(z, t) = \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (\text{I.27})$$

on remplace (I.26) et (I.27) dans (I.25)

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(t) \phi_j(z)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(t) \phi_j(z)}{\partial z^2} + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (\text{I.28})$$

pour $k = 1 \dots n$

$$\phi_k(z) \frac{\partial \tilde{a}_k(t)}{\partial t} = \tilde{a}_k(t) \frac{\partial^2 \phi_k(z)}{\partial z^2} + \tilde{b}_k(t) \phi_k(z) \quad (\text{I.29})$$

divisant par $\tilde{a}_k(t) \times \phi_k(z)$

$$\frac{1}{\tilde{a}_k(t)} \frac{\partial \tilde{a}_k(t)}{\partial t} = \frac{1}{\phi_k(z)} \frac{\partial^2 \phi_k(z)}{\partial z^2} + \frac{\tilde{b}_k(t)}{\tilde{a}_k(t)} \quad (\text{I.30})$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{1}{\tilde{a}_k(t)} \frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} - \frac{\tilde{b}_k(t)}{\tilde{a}_k(t)} = -\lambda_k \\ \frac{d^2\phi_k(z)}{d^2z} = -\phi_k(z)\lambda_k \end{cases} \quad k = 1 \dots n \quad (\text{I.31})$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} + \tilde{a}_k(t)\lambda_k = \tilde{b}_k(t) \\ \frac{d^2\phi_k(z)}{d^2z} + \phi_k(z)\lambda_k = 0 \end{cases} \quad k = 1 \dots n \quad (\text{I.32})$$

tel que λ_k et $\phi_k(z)$ sont les valeurs propres et les fonctions propres respectivement de l'opérateur différentiel spatial et le calcul de ces deux dernières se fait par la résolution de la deuxième équation différentielle (I.32).

la solution est donc

$$\begin{cases} \phi_k(z) = \sqrt{2} \cos k\pi z \\ \lambda_k = k^2\pi^2 \end{cases} \quad k = 1 \dots n \quad (\text{I.33})$$

de (I.32), on a

$$\frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} + \tilde{a}_k(t)\lambda_k = \tilde{b}_k(t) \implies \frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} = -\lambda_k\tilde{a}_k(t) + \tilde{b}_k(t) \quad (\text{I.34})$$

donc le modèle d'état de système (I.12) est sous la forme suivante :

$$\dot{a}_n(t) = A a_n(t) + b_n(t) \quad (\text{I.35})$$

tel que

$A = -\lambda_n I_{n \times n}$ Matrice d'état diagonale formée par les valeurs propres λ_n .

et sous la forme matricielle le système s'écrit comme suit :

$$\dot{a}_n(t) = \begin{bmatrix} -\pi^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -4\pi^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -n^2\pi^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.36})$$

Remarque I.3

Le système obtenu est un système d'équations différentielles ordinaires mais de dimension infinie. Par des conditions sur les valeurs propres et fonctions propres, il est possible de fixer le nombre d'échantillons N (système de dimension finie) selon la précision souhaitée.

I.6 Conclusion

Ce chapitre a abordé les différentes notions relatives aux SPD modélisés par des EDP. Ainsi, l'analyse et la synthèse pour ce type de systèmes sont très compliquées. Mais des méthodes d'approximation sont disponibles pour simplifier et approximer les EDP en équations aux dérivées ordinaires (EDO) caractérisant les systèmes à paramètres localisés.

Dans le chapitre suivant, on va présenter l'une des méthodes de commande bien adaptée pour les systèmes à paramètres localisés linéaires en l'occurrence la commande linéaire quadratique LQ.

CHAPITRE II

II.1 Introduction

L'optimisation est un objectif réel dont les sciences de l'ingénieur ont donné de l'importance. L'optimisation des commandes des procédés à apporter des nouvelles conceptions dans les secteurs industriels.

La commande optimale consiste à optimiser un critère choisi selon le cahier de charge imposé. La commande linéaire quadratique (LQ) est l'une des commandes la plus utilisée, elle se base sur la minimisation d'un critère quadratique, c'est-à-dire minimisation de l'écart et de l'énergie de commande. Elle résout en principe le problème de poursuite et de régulation.

Ce chapitre montre les procédures permettant d'aboutir à une commande optimale, d'un système représenté sous sa forme d'état, en minimisant un critère quadratique.

II.2 Formulation d'un problème de commande linéaire quadratique LQ

La commande linéaire quadratique est abordée en considérant les systèmes dynamiques à temps continu, linéaires, à coefficients constants (systèmes stationnaires), et stabilisables par un retour d'état. Un système linéaire est stabilisable s'il existe une commande en boucle fermée tel que le système commandé soit stable. Si la commande utilise un retour d'état, il suffit que les éventuels modes instables du système soient gouvernables (commandables). [2]

Soit le système donné sous la forme d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{II.1})$$

et l'équation de sortie

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{II.2})$$

et définissant l'erreur de la poursuite $e(t)$ tel que

$$e(t) = x^d(t) - x(t) \quad (\text{II.3})$$

où

$x(t)$: vecteur d'état, $\dim x(t) = n \times 1$.

$u(t)$: vecteur de commande, $\dim u(t) = m \times 1$.

$y(t)$: vecteur de sortie, $\dim y(t) = r \times 1$.

$x^d(t)$: vecteur d'état désiré.

$e(t)$: vecteur d'erreur.

A : Matrice d'état, $\dim A = n \times n$.

B : Matrice de commande, $\dim B = n \times m$.

C : Matrice d'observation, $\dim C = r \times n$.

D : Matrice de transmission directe, $\dim D = r \times m$.

La matrice D correspond à une transmission directe d'information entre l'entrée et la sortie. Pour la plus part des cas on prend la matrice D nulle.

Les contraintes de la régulation se situent au niveau de l'amplitude ou de l'énergie de la commande, soit à cause de saturation d'actionneurs, soit pour des raisons de coût énergétique. Le problème de régulation en boucle fermée, avec stabilisation, est toujours le résultat d'un compromis entre la rapidité et l'énergie de commande, comme il est montré dans le critère quadratique suivant :

$$J = \frac{1}{2} \int [e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (\text{II.4})$$

et s'écrit aussi

$$J = J_e + J_u \quad (\text{II.5})$$

où

$$J_e = \frac{1}{2} \int e^T(t)Qe(t) dt \quad (\text{II.6})$$

Le terme quadratique de (II.6) est lié à la nature du régime transitoire obtenu par la minimisation de l'erreur existant entre l'état du système $x(t)$ et sont état désiré à l'instant t . Physiquement c'est le rejet de perturbation.

Q est une matrice symétrique semi-définie positive ($e^T(t)Qe(t) \geq 0$). C'est une matrice de pondération de dimension $n \times n$, elle donne un poids différent à chaque composant du vecteur d'erreur $e(t)$ dans le critère. [2]

et

$$J_u = \frac{1}{2} \int u^T(t)Ru(t)dt \quad (\text{II.7})$$

Le terme quadratique de (II.7) correspond à la recherche d'une commande d'amplitude minimale (minimisation de l'énergie de commande).

R est une matrice symétrique définie positive ($u^T(t)Ru(t) \geq 0$) si $u(t) \neq 0$, matrice de pondération de la commande. On peut ainsi affecter un poids différent à chaque composante du vecteur de commande. [2]

II.3 Rappel sur la commandabilité et l'observabilité

II.3.1 Commandabilité

Le système linéaire (II.1) est complètement commandable à un temps t_0 , s'il existe un temps fini $t_1 (t_1 > t_0)$ tel que pour tout état $x(t_0)$ et pour tout état $x(t_1)$, il existe une commande $u(t)$ continue et définie sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ qui permet de transférer l'état de la position $x(t_0)$ à la position $x(t_1)$.

Il existe plusieurs méthodes pour tester la commandabilité d'un système linéaire et la plus utilisée est :

Le système linéaire (II.1) est commandable si la matrice de commandabilité

$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ est de rang égal à n , dimension du système.

On remarque que la commandabilité du système n'intervienne que dans l'équation d'état (II.1).

II.3.2 Observabilité

L'observabilité fait intervenir les deux équations, équation d'état et équation de sortie, suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Un système linéaire décrit par le système (II.8) est complètement observable au temps t_0 , s'il existe un temps fini t_1 ($t_1 > t_0$) tel que toute valeur initiale $x(t_0)$ de $x(t)$, la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$ suffit pour déterminer $x(t_0)$. Connaissant $x(t_0)$, on peut déterminer $x(t)$.

La méthode la plus utilisée pour tester l'observabilité d'un système linéaire, le système (II.8),

est de tester le rang de la matrice d'observabilité $\theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ si le rang de cette matrice égal à

n donc le système (II.8) est observable. Tel que n est la dimension de système.

II.4 Résolution de problème de la commande LQ

Dans le critère (II.4) deux problèmes d'optimisation, relatifs à la nature de régime transitoire et à l'amplitude de la commande. La formule d'Hamilton donne des solutions fiables.

La formule d'Hamilton est la suivante :

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} (e^T(t) Q e(t) + u^T(t) R u(t)) + p^T(t) \dot{x}(t) \quad (\text{II.9})$$

Remplaçant (II.1) et (II.3) dans (II.9)

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} \left((x^d(t) - x(t))^T Q (x^d(t) - x(t)) + u^T(t) R u(t) \right) + p^T(t) (Ax(t) + Bu(t)) \quad (\text{II.10})$$

- La loi de commande

La loi de commande est donnée par la minimisation de (II.10)

$$\frac{\partial H(x(t), u(t), p(t), t)}{\partial u(t)} = Ru(t) + B^T p(t) = 0 \quad (\text{II.11})$$

de (II.11)

$$u(t) = -R^{-1}B^T p(t) \quad (\text{II.12})$$

et

$$\frac{\partial H(x(t), u(t), p(t), t)}{\partial x(t)} = -\dot{p}(t) = -(x^d(t) - x(t))Q + A^T p(t) \quad (\text{II.13})$$

ce qui donne la relation canonique suivante :

$$\dot{p}(t) = x^d(t)Q - x(t)Q - A^T p(t) \quad (\text{II.14})$$

et on remplace (II.12) dans (II.1) on aura :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T p(t) \quad (\text{II.15})$$

Remarque II.1

$p(t)$ est le vecteur adjoint composé des dérivées partielles du critère par rapport à la variable d'état.

Ainsi les deux équations (II.14) et (II.15) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} x^d(t) \quad (\text{II.16})$$

deux cas de problèmes sont à considérer : le problème de régulation et celui de la poursuite.

II.5 Problème de la commande LQ dans un horizon fini[3]

II.5.1 Problème de la poursuite

Le critère à minimiser dans ce cas a la forme suivante :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (\text{II.17})$$

- La loi de commande

Dans le cas de la poursuite $e(t) = x^d(t) - x(t)$ et les vecteurs $x(t)$ et $p(t)$ sont liés par la relation linéaire suivante :

$$p(t) = P(t)x(t) + v(t) \quad (\text{II.18})$$

la dérivation de (II.18) donne

$$\dot{p}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) \quad (\text{II.19})$$

la combinaison des relations (II.14), (II.19), (II.15) et (II.18) donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t)x(t) + P(t)Ax(t) + A^T P(t)x(t) + Qx(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t)x(t) = \\ -\dot{v}(t) - (A^T - P(t)BR^{-1}B^T)v(t) + Qx^d(t) \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

ce qui résulte les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t) = 0 \\ \dot{v}(t) + (A^T - P(t)BR^{-1}B^T)v(t) + Qx^d(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

$$(\text{II.22})$$

dont l'équation (II.21) est l'équation de Riccati et $P(t)$ est sa solution.

On obtient alors avec le fait de remplacer (II.18) dans (II.12) la loi de commande optimale suivante :

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) - R^{-1}B^T v(t) \quad (\text{II.23})$$

tel que le gain de retour d'état

$$K_c = -R^{-1}B^T P(t) \quad (\text{II.24})$$

donc

$$u(t) = K_c x(t) - R^{-1}B^T v(t) \quad (\text{II.25})$$

Le modèle d'état s'écrit

$$\dot{x}(t) = (A + BK_c)x(t) - BR^{-1}B^T v(t) \quad (\text{II.26})$$

Remarques II.2

- La loi de commande $u(t)$ est en fonction de l'état $x(t)$ ce qui permet de construire un système à contre réaction (retour d'état).
- $P(t)$ et $v(t)$ ne dépendent pas de l'état du système, il en résulte que la loi de commande trouvée est optimale quelles que soit les conditions initiales.

La structure du système de commande optimale est représentée par la figure II.1 suivante

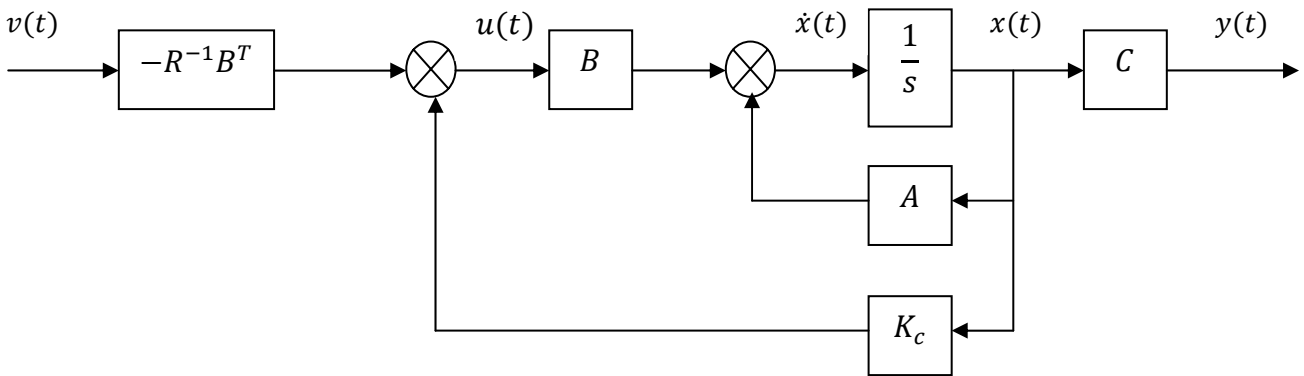


Figure II.1 Schéma fonctionnel d'un système à retour d'état

II.5.2 Problème de régulation

Le problème de régulation est un cas particulier du problème de poursuite, le fait de prendre les états désirés nuls ($x^d(t) = 0$) dans le cas de la poursuite, on obtient le problème de régulation.

Le critère à minimiser est :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \tag{II.27}$$

- La loi de commande

Dans ce cas la relation qui lie $x(t)$ et $p(t)$ est

$$p(t) = P(t)x(t) \tag{II.28}$$

la forme matricielle (II.16) devient

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

puisque le vecteur $v(t)$ est nul donc il reste seulement l'équation de Riccati.

$$\dot{P}(t)x(t) + P(t)Ax(t) + A^T P(t) + Qx(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t)x(t) = 0 \quad (\text{II.30})$$

mettant (II.28) dans (II.12) on obtient la loi de commande suivante

$$u(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) \quad (\text{II.31})$$

donc la loi de commande

$$u(t) = K_c x(t) \quad (\text{II.32})$$

tel que

$$K_c = -R^{-1}B^T P(t) \quad (\text{II.33})$$

le modèle d'état est

$$\dot{x}(t) = (A + BK_c)x(t) \quad (\text{II.34})$$

Le schéma bloc de la commande optimale est donné par la figure II.2 suivante

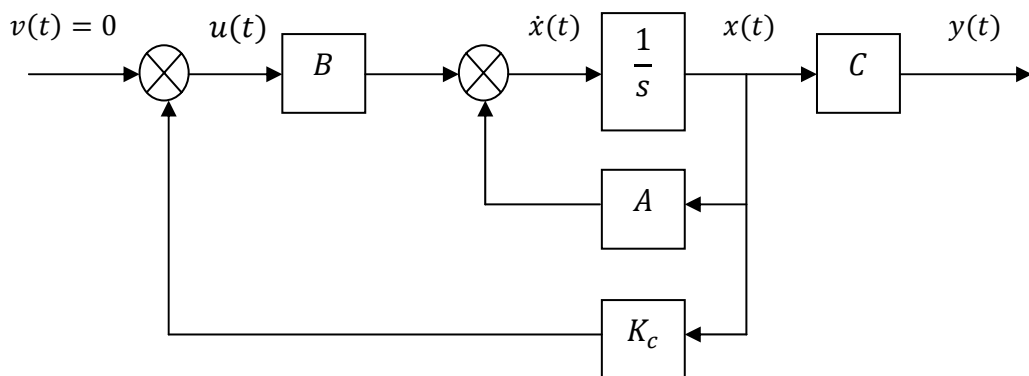


Figure II.2 Schéma fonctionnel d'un système à retour d'état

II.6 Problème de la commande LQ dans un horizon infini [3]

II.6.1 Problème de poursuite

Le critère à minimiser est :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (\text{II.35})$$

- La loi de commande

Dans l'horizon infini l'intervalle du temps est infini et de là les vecteurs $P(t)$ et $v(t)$ sont constants donc $\dot{P}(t) = \dot{v}(t) = 0$.

d'où les équations (II.21) et (II.22) s'écrivent :

$$P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t) = 0 \quad (\text{II.36})$$

$$(A^T - P(t)BR^{-1}B^T)v(t) + Qx^d(t) = 0 \quad (\text{II.37})$$

de (II.37)

$$v(t) = (A^T - P(t)BR^{-1}B^T)^{-1}Qx^d(t) \quad (\text{II.38})$$

donc la loi de commande

$$u(t) = K_c x(t) + Fx^d(t) \quad (\text{II.39})$$

tel que

$$K_c = -R^{-1}B^T P(t) \quad (\text{II.40})$$

et

$$F = -R^{-1}B^T (A^T - P(t)BR^{-1}B^T)^{-1}Q \quad (\text{II.41})$$

K_c est la matrice gain de retour d'état et la matrice F qui permettent de déterminer le retour d'état.

la forme d'état est

$$\dot{x}(t) = (A + BK_c)x(t) + BFx^d(t) \quad (\text{II.42})$$

Le schéma bloc de la figure II.3 montre la commande optimale LQ dans le cas de poursuite.

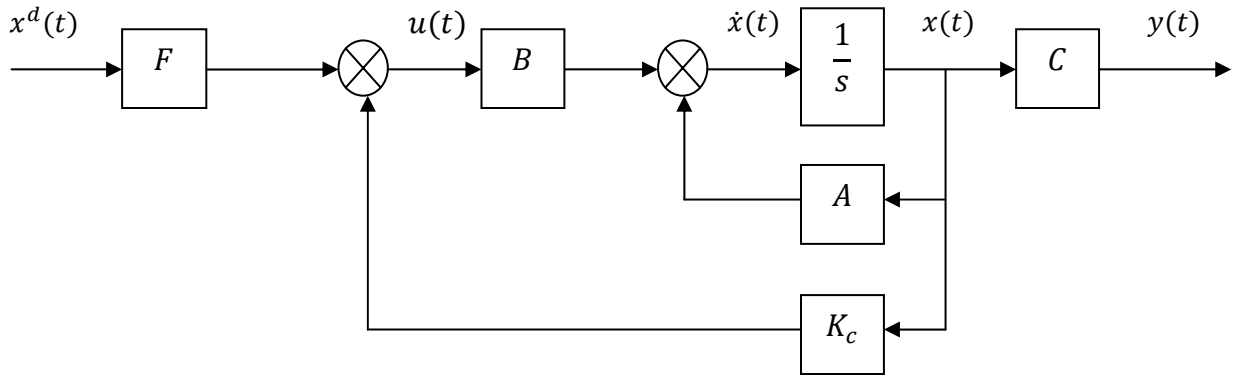


Figure II.3 Schéma fonctionnel d'un système à retour d'état

II.6.2 Problème de régulation

Le critère quadratique s'écrit

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (\text{II.43})$$

- La loi de commande

Dans le cas de l'horizon infini, l'intervalle du temps est infini, alors le vecteur $P(t)$ est constant donc $\dot{P}(t) = 0$.

d'où l'équation (II.21) s'écrit :

$$P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t) = 0 \quad (\text{II.44})$$

donc la loi de commande

$$u(t) = K_c x(t) \quad (\text{II.45})$$

tel que

$$K_c = -R^{-1}B^T P(t) \quad (\text{II.46})$$

K_c est la matrice gain qui permet de déterminer le retour d'état : $u(t) = K_c x(t)$

la relation d'état devient

$$\dot{x}(t) = (A + BK_c)x(t) \quad (\text{II.47})$$

Le schéma bloc de la figure II.4 montre la commande optimale LQ dans le cas de la régulation.

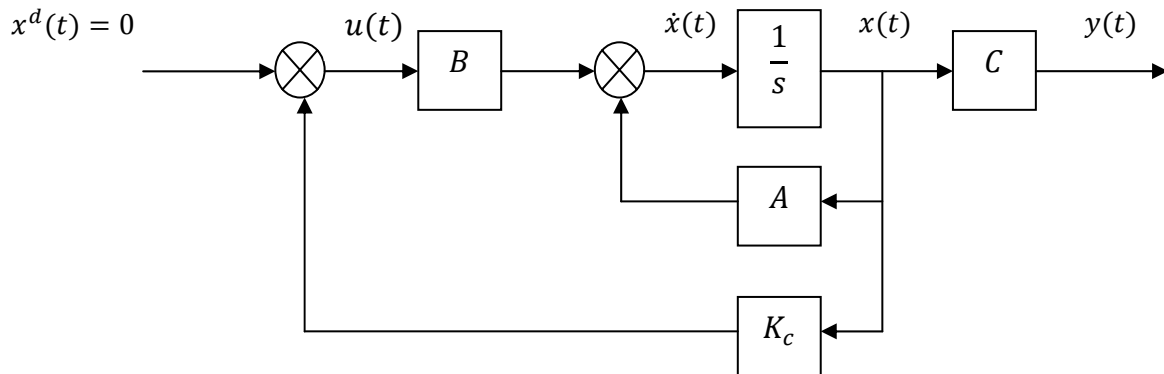


Figure II.4 Schéma fonctionnel d'un système à retour d'état.

II.7 Choix des matrices de pondération

Les matrices de pondération sont généralement choisies diagonales. Au départ, ces matrices (Q et R) doivent être choisies comme des matrices identités $I_{N \times N}$. En suite, par simulation on cherche les bons poids de pondération de chaque composant de vecteur soit de l'erreur ou de commande, afin d'avoir une poursuite et une régulation souhaitée.

II.8 Rôle des matrices de pondération

- La matrice de pondération Q a comme rôle de donner à chaque état $x(t)$, dans le cas de la régulation, ou à chaque erreur $e(t)$, dans le cas de la poursuite, des poids (coefficients).
- Le rôle de la matrice de pondération de la commande R est d'affecter un poids à chaque élément de vecteur de la commande $u(t)$.
- Le terme $e^T(t)Qe(t)$ est lié à la nature du régime transitoire obtenue par la minimisation de l'erreur ($e(t) = x^d(t) - x(t)$) entre l'état du système à l'instant t et l'état désiré.

- Le terme $u^T(t)Ru(t)$ est lié à la minimisation de l'énergie de commande ou recherche d'une commande d'amplitude minimale.

II.9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les principales applications de la commande LQ sur un modèle d'état en résolvant le problème de régulation et celui de la poursuite avec la minimisation d'un critère choisi.

L'intérêt de la commande LQ consiste à déterminer une loi de commande optimale qui est liée aux paramètres du système et aux choix des matrices de pondération Q et R.

Dans le chapitre qui suit, on va modéliser le phénomène de transfert de chaleur dans une tige qui est caractérisé par une équation aux dérivées partielles, auquel on applique par suite une commande LQ.

CHAPITRE III

III.1 Introduction

Le transfert de chaleur, l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux ou encore la diffusion moléculaire sont tous gouvernés par la même équation aux dérivées partielles appelée équation de chaleur. L'équation de chaleur caractérise un phénomène d'évolution, par exemple la propagation de la température dans un solide, se modélise par une équation aux dérivées partielles d'ordre un.

Ce chapitre porte essentiellement sur la description et la modélisation d'un transfert de chaleur par diffusion ; et l'approximation de l'équation de chaleur par la méthode des différences finies pour avoir un modèle plus simple à étudier.

III.2 Modes de transfert de chaleur

Les mécanismes de transfert de chaleur sont au nombre de trois : la diffusion, la convection et le rayonnement [4].

III.2.1 Diffusion

Lorsque l'on chauffe un matériau, les atomes les plus proches de la source de chaleur se mettent à vibrer d'une façon intense et communiquent ces vibrations aux atomes voisins. Ces vibrations ont pour conséquence la production de chaleur et sa diffusion dans le matériau. Dans le cas d'un gaz il s'agit d'un choc entre molécules. Cet état d'excitation est fonction de l'intensité de la source de chaleur, c'est donc un phénomène de diffusion qu'on l'appelle aussi la conduction.

III.2.2 Convection

La convection résulte de transfert de la chaleur par transport de matière. C'est le phénomène de base dans les échangeurs thermiques où la chaleur est fournie à, ou par, un fluide en mouvement.

III.2.3 Rayonnement

Le rayonnement est un phénomène omniprésent puisque tout corps dont la température est supérieure au zéro degré absolu rayonne. Au contraire de la diffusion et de la convection, le transfert de chaleur par rayonnement ne nécessite pas de milieu matériel. Le transport se fait par

des ondes électromagnétiques. Le corps chaud émet des photons, donc une onde qui est absorbée par le corps froid est transformée en chaleur.

III.3 Exemples de transfert de chaleur

On va exposer quelques exemples de transfert de chaleur selon les trois modes de transfert. L'exemple le plus vivant est celui de transfert de chaleur de soleil à la terre, la transmission de la chaleur se fait par rayonnement, les photons qui arrivent à la surface de la terre se transforment à une chaleur. Cette chaleur se propage de milieu chaud vers un milieu froid soit par conduction ou par convection (vaporisation des eaux).

Ces phénomènes sont rencontrés aussi dans la plupart des milieux industriels, tel que l'industrie pétrolière (raffineries), l'industrie métallurgique (fabrication des métaux), les centrales nucléaires et d'autres.

III.4 Diffusion de la chaleur par conduction

Le transfert de chaleur par diffusion prend lieu dans les solides et les fluides au repos. Sa modélisation a été pour la première fois abordée par J. Fourier dans son « traité analytique de la chaleur ».

III.4.1 Loi de Fourier [4]

La relation de Fourier est phénoménologique, c'est-à-dire issue de résultats expérimentaux. La figure III.1 représente un matériau homogène et isotrope sous la forme d'un tube supposé parfaitement isoler à sa périphérie. On note S la section du tube et l sa longueur. Les températures à ses deux extrémités notées T_0 et T_l , sont imposées constantes au cours du temps. Un flux de chaleur apparaît dans la direction des hautes températures vers les basses températures. Les lignes de flux sont définies comme des lignes perpendiculaires aux isothermes du tube. On note \vec{x} le vecteur tangent aux lignes de flux. Comme le tube est parfaitement isolé sur sa périphérie, aucune ligne de flux ne sort du tube et donc le flux est constant tout le long du tube.

J. Fourier obtient expérimentalement que lorsque les températures sont stabilisées dans le temps (régime stationnaire), il existe une relation liant le flux à l'écart de la température entre l'entrée et la sortie sous la forme :

$$\vec{\phi} = \lambda S \frac{T_0 - T_l}{l} \vec{x} \quad (\text{III.1})$$

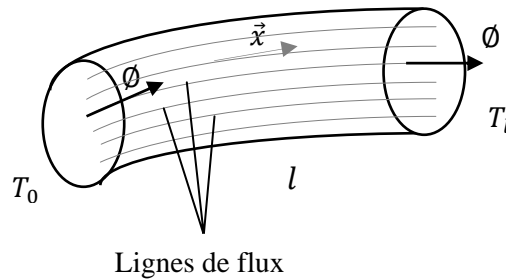


Figure III.1 Tube de flux de chaleur

Le coefficient de proportionnalité λ est appelé la conductivité thermique. Lorsque l'on fait tendre la longueur l vers zéro, on trouve l'expression de flux de conduction sous la forme différentielle :

$$\vec{\phi} = -\lambda S \frac{dT}{dx} \vec{x} \quad (\text{III.2})$$

En générale la relation a une configuration tridimensionnelle, on obtient :

$$\vec{\phi} = -\lambda S \vec{\nabla} T \quad (\text{III.3})$$

L'opérateur $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ désigne le gradient. On définit la densité de flux comme le rapport de flux à la section de passage :

$$\vec{\varphi} = \frac{\vec{\phi}}{S} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (\text{III.4})$$

Remarques III.1

- Le signe moins (–) indique que les transferts thermiques tendent à uniformiser la température du milieu, et se font du chaud vers le froid.
- La loi de Fourier postule une vitesse de propagation infinie de la chaleur (pas de dépendance temporelle) alors que cela est physiquement impossible : lors d'un déséquilibre thermique le flux thermique ne prend naissance que lorsque les collisions entre porteurs ont lieu. De même lorsque le gradient thermique disparaît il faut un certain temps pour observer la nullité du gradient. Pour remédier à cette inexactitude de la loi de Fourier. Cette loi a été modifiée :

$$\vec{\varphi} + \tau \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (\text{III.5})$$

Le terme rajouté induit un régime transitoire de durée caractéristique τ . Cette durée τ étant très faible (10^{-12} à 10^{-9} s), si on s'intéresse à des échelles de temps supérieures, on peut négliger ce terme et utiliser la loi de Fourier initiale. \square

La relation (III.4) montre bien que les lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes. Dans le système de coordonnées cartésiennes, cette relation s'écrit :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{z} \right) \quad (\text{III.6})$$

Dans de nombreux cas rencontrés dans la nature ou parmi les objets fabriqués par l'homme, la conductivité n'est plus isotrope mais anisotrope donc λ devient un tenseur. La relation III.6 devient :

$$\vec{\varphi} = -\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \vec{x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \vec{y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \vec{z} \right) \quad (\text{III.7})$$

Ce qui définit trois composantes de flux, chacune étant dépendante d'une valeur particulière de la conductivité.

III.4.2 Phénomène de la conduction thermique

Le phénomène de conduction de la chaleur est due à la non-uniformité de la température qui produit un transfert d'énergie thermique d'un point à un autre du système mais sans transport macroscopique de la matière.

Le phénomène de conduction a lieu dans tous les milieux (fluide (gaz ou liquide) ou solide).

Du point de vue microscopique les porteurs diffèrent suivant le milieu considéré. Dans les solides non métalliques, la conduction est assurée par le transfert de proche en proche de l'énergie de vibration des atomes. Le porteur associé à ces ondes longitudinales s'appelle le phonon. Dans les métaux, l'échange d'énergie se fait par les électrons libres (énergie de translation) car le processus est plus efficace que la vibration des atomes. Les métaux ou alliages métalliques sont donc de bons conducteurs thermiques. Dans un fluide, l'échange d'énergie s'effectue par les mouvements des atomes ou molécules (translation mais aussi rotation et vibration dans le cas des molécules).

III.5 Equation de chaleur

III.5.1 Notion de chaleur

Le terme de chaleur mérite d'être défini plus précisément. Il s'agit de l'énergie transmise entre deux morceaux du solide. Cette énergie est transférée sous forme thermique, car en négligeant les dilatations, il n'y a pas de mouvements macroscopiques, donc pas d'énergie propagée sous forme ordonnée de travail mécanique.

On utilise le vecteur densité de courant thermique, qui représente la chaleur transmise à travers une surface par unité de temps. C'est le flux surfacique de puissance thermique.

III.5.2 Equation de conduction de chaleur

L'équation de chaleur caractérise l'évolution de la température dans un corps ou fluide en fonction du temps t et de la variable d'espace z , décrit par une équation aux dérivées partielles. Dans notre cas, on s'intéresse au transfert de chaleur unidirectionnel dans une tige de longueur l .

On suppose que la tige est composée d'un matériau homogène et isotrope. La tige est placée le long de l'axe des z et on va mesurer le flux en chaque point $z \in \mathfrak{R}$, comme une valeur

moyenne le long d'une couche qui est transversale à l'axe z . Des conditions aux frontières $T(0, t)$ et $T(1, t)$ seront imposées à ses deux extrémités $z = 0$ et $z = 1$.

Pour simplifier, on considère le transfert de flux est uniquement dans les directions parallèles à z . La barre métallique de la figure III.2 où φ_1 et φ_2 sont les flux de chaleur (quantité de chaleur par unité de temps qui traverse la surface dans la direction z).

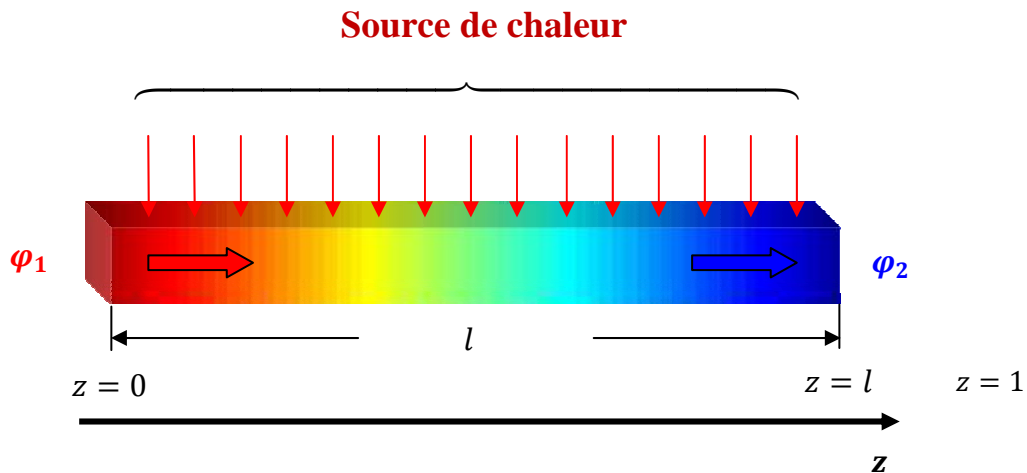


Figure III.2 Evolution de la température dans une tige homogène.

Le calcul de l'équation de la conduction de chaleur est basé sur le flux de chaleur traversant la tige, Le flux de chaleur dépend du gradient de température et du coefficient de conductivité thermique d'après la première loi de Fourier :

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{III.8})$$

Avec λ est le coefficient de la conduction thermique [W/mK]. Ce coefficient de conduction sera pris constant, mais il peut dépendre de la position (si on met des matériaux différents en contact), et il peut aussi dépendre de la température si on chauffe trop.

φ est la densité de flux [W/m^2].

D'après la première loi de la thermodynamique, la quantité de chaleur ΔQ qui est emmagasinée dans un matériau de densité ρ , de longueur Δz , durant une augmentation de température ΔT est

$$\Delta Q = c_v \rho \Delta z \Delta T \quad (\text{III.9})$$

c_v : capacité calorifique massique.

La quantité de chaleur qui entre pendant un intervalle de temps Δt d'après la définition du flux est

$$\Delta Q = -(\varphi_2 - \varphi_1) \Delta t \quad (\text{III.10})$$

l'application de théorème de la moyenne à III.10 donne

$$\Delta Q = -\Delta z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Delta t \quad (\text{III.11})$$

de III.9 et III.11 on établit l'équation de chaleur suivante

$$c_v \rho \Delta z \Delta T = -\Delta z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Delta t \quad (\text{III.12})$$

devisant III.12 par $\Delta z \Delta t$ et que $\Delta t \rightarrow 0$, alors on obtient

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{III.13})$$

compte tenu de la loi de Fourier

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (\text{III.14})$$

d'où l'équation de chaleur simplifiée suivante

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (\text{III.15})$$

tel que

$$D = \frac{\lambda}{c_v \rho} \quad (\text{III.16})$$

D est le coefficient de diffusivité de dimension $[m^2/s]$.

Dans ce cas la source de chaleur est absente, la prise en compte de cette source, l'équation III.15 devient

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + u(z, t) \quad (\text{III.17})$$

u variable qui caractérise la source de chaleur appliquée sur la tige le long de l'axe z (Figure III.2).

L'équation de chaleur est une équation différentielle aux dérivées partielles, sa résolution nécessite des conditions aux limites.

- Le tableau ci-après présente les valeurs des coefficients λ (conductivité thermique), c_v (capacité calorifique) et ρ (masse volumique) typique de quelques matériaux [5].

<i>Matière</i>		$\lambda(W/m K)$	$c_v(J/Kg K)$	$\rho(Kg/m^3)$
GAZ	<i>H₂</i>	16.80 10 ⁻²	28.80	0.10
	<i>N₂</i>	2.37 10 ⁻²	29.10	1.20
	<i>CO₂</i>	1.29 10 ⁻²	37.00	1.96
LIQUIDE	<i>Eau</i>	0.60	4186	1000
SOLIDES	<i>Verre</i>	0.80	837	2600
	<i>Glace</i>	2	2090	920
	<i>Béton</i>	0.80	860	2300
	<i>Al</i>	238	900	2700
	<i>Cu</i>	397	387	8920
	<i>Fe</i>	79.5	448	7860

Tableau III.1 Valeurs typiques des coefficients λ , c_v et ρ .

D'après le tableau (III.1) et les coefficients de la conduction thermique, on constate que les gaz sont des bons isolants (faibles coefficients de conductivité) et les métaux ont une bonne conductivité thermique donc bons conducteurs de chaleur.

Remarque III.2

- $\lambda(T)$ croît avec la température pour les gaz.
- $\lambda(T)$ décroît avec la température pour le cuivre, le zinc, les aciers doux, le plomb, mais croît avec la température pour l'aluminium et les aciers inoxydables.
- $\lambda(T)$ est quasi constant pour les huiles de moteur.
- $\lambda(T)$ pour l'eau augmente avec T , puis diminue (culmine vers 400K).

III.6 Approximation de l'équation de chaleur

La résolution de l'équation de chaleur nécessite une approximation de l'équation aux dérivées partielles (EDP) par un système d'équations aux dérivées ordinaire (EDO), pour la simplification des calculs et de la simulation. Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre ce type de problèmes. Parmi ces méthodes, on cite la méthode de séparation des variables, la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et autres. Dans notre cas, on va appliquer la méthode des différences finies, elle se base sur la définition de la dérivée.

En plus, il est nécessaire de fixer des conditions initiales et des conditions aux limites pour obtenir des résultats plus fiables.

L'équation de chaleur à approximer est

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + u(z, t) \quad (\text{III.18})$$

III.6.1 Conditions aux limites et conditions initiales

Notons tout d'abord que l'équation aux dérivées partielles (III.18) a une infinité de solutions. De plus, du point de vue physique, on ne peut décrire l'évolution d'un système sans connaître son état initial. On doit donc imposer des conditions supplémentaires pour avoir une solution unique. Pour ce problème, il semble clair qu'il faille imposer une condition initiale

$$T(z, 0) = T_0(z) \quad 0 < z < l \quad (\text{III.19})$$

Par ailleurs, comme l'équation (III.18) fait intervenir des dérivées partielles en z , il semble naturel d'imposer deux conditions aux limites. Ces conditions seront imposées aux deux extrémités $z = 0$ et $z = l$. Ici plusieurs choix sont possibles :

1. Pour le problème de transfert, on suppose que les extrémités $z = 0$ et $z = l$ sont imperméables. Ainsi, la loi de Fourier impose (puisque le flux est nul aux extrémités) que

$$\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = \lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.20})$$

On appelle ce type de conditions : conditions de Neumann ou conditions naturelles.

2. Pour le problème de la chaleur, on peut supposer que les deux extrémités de la barre sont isolées thermiquement. Ceci conduit, par la loi de Fourier, à une condition de Neumann identique à celle écrite ci-dessus. On peut aussi supposer que l'on connaît, à chaque instant, la température aux deux extrémités :

$$T(0, t) = T_1(t), \quad T(l, t) = T_2(t) \quad (\text{III.21})$$

On appelle ce type de condition conditions de Dirichlet ou conditions essentielles.

3. On peut, bien entendu imposer une condition de Dirichlet sur une extrémité et une condition de Neumann sur une autre.

Il existe d'autres possibilités de conditions aux limites telles que : des conditions de transfert thermique, des conditions de rayonnement, pour l'équation de chaleur.

Notons qu'on peut imposer aussi des conditions de Neumann non-homogènes ; on peut alors prescrire le flux de chaleur entrant (ou sortant) en $z = 0$ et/ou $z = l$.

III.6.2 Approximation de l'équation de chaleur par la méthode des différences finies

Soit le système décrit par l'équation (III.18)

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + u(z, t) \quad (\text{III.22})$$

avec la condition initiale

$$T(z, 0) = T_0(z) \quad 0 < z < 1 \quad (\text{III.23})$$

et les conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T(1, t)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

Décomposons le domaine d'espace $[0,1]$ en N intervalles égaux, correspondant à un pas de discrétisation $\Delta z = \frac{1}{N}$.

La méthode des différences finies (différences centrées), donne pour la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 T(z_i, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{2\Delta z} [T(z_{i+1}, t) - T(z_{i-1}, t)] \quad (\text{III.25})$$

pour les frontières, on a :

pour $i = 0$

$$\frac{\partial T(z_0, t)}{\partial z} = \frac{-3T(z_0, t) + 4T(z_1, t) - T(z_2, t)}{2\Delta z} = 0 \quad (\text{III.26})$$

d'ou

$$T(z_0, t) = \frac{4}{3}T(z_1, t) - \frac{1}{3}T(z_2, t) \quad (\text{III.27})$$

pour $i = N$

$$\frac{\partial T(z_N, t)}{\partial z} = \frac{3T(z_N, t) - 4T(z_{N-1}, t) + T(z_{N-2}, t)}{2\Delta z} = 0 \quad (\text{III.28})$$

d'ou

$$T(z_N, t) = \frac{4}{3}T(z_{N-1}, t) - \frac{1}{3}T(z_{N-2}, t) \quad (\text{III.29})$$

donc l'équation (III.18) devient

$$\text{pour } i = 1 \quad \dot{T}(z_1, t) = \frac{D}{2\Delta z} \left(-\frac{4}{3}T(z_1, t) + \frac{4}{3}T(z_2, t) \right) + u(z_1, t) \quad (\text{III.30})$$

$$\text{pour } i = 2 \quad \dot{T}(z_2, t) = \frac{D}{2\Delta z} (T(z_3, t) - T(z_1, t)) + u(z_2, t) \quad (\text{III.31})$$

$$\text{pour } i = 3 \quad \dot{T}(z_3, t) = \frac{D}{2\Delta z} (T(z_4, t) - T(z_2, t)) + u(z_3, t) \quad (\text{III.32})$$

⋮ ⋮

$$\text{pour } i = N - 1 \quad \dot{T}(z_{N-1}, t) = \frac{D}{2\Delta z} \left(\frac{4}{3}T(z_{N-1}, t) - \frac{4}{3}T(z_{N-2}, t) \right) + u(z_{N-1}, t) \quad (\text{III.33})$$

le modèle approximé est sous forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \vdots \\ \dot{T}_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{D}{2\Delta z} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

où $u_i = u(z_i, t)$

le système est donc sous la forme d'état connu et bien métrisé par les automaticiens :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{III.35})$$

où

$$A = \frac{D}{2\Delta z} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

A : matrice d'état.

et

$$B = I_{N-1 \times N-1}$$

B : matrice de commande.

III.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à des généralités sur le transfert de chaleur et les différents modes de transfert (diffusion, convection, rayonnement). Ensuite on a présenté la modélisation du phénomène de diffusion de chaleur par conduction.

Après avoir abordé le problème EDP de la modélisation du phénomène de transfert de chaleur par conduction, on a constaté que cette modélisation est très simple, elle donne des résultats en accord avec l'expérience dans de nombreux cas. Ensuite, une approximation par la méthode des différences finies a été réalisée sur l'équation de chaleur pour avoir une forme de modèle exploitable pour la commande.

Dans le prochain chapitre, l'étude sera consacrée à la commande optimale de l'évolution de transfert de chaleur dans une tige, modélisé par l'équation de chaleur. La technique de commande choisie est la commande linéaire quadratique (LQ) exposée dans le chapitre (II).

CHAPITRE IV

IV.1 Introduction

La modélisation d'un procédé a des objectifs soit de régulation soit de contrôlabilité ou d'observabilité. Après avoir modélisé le transfert de chaleur dans une tige dans le précédent chapitre, dans ce chapitre on aborde la simulation de l'équation de chaleur et la commande LQ. La grandeur à commander est la température (chauffage) et son évolution, par conduction dans la tige. Pour commander l'évolution de la température on doit donc appliquer une régulation à la source chauffante.

L'application de la commande linéaire quadratique (LQ) est basée sur un modèle approximé de l'équation de chaleur obtenu par la méthode des fonctions propres.

IV.2 Description du système à commander

Soit une tige homogène de longueur l , placée le long de l'axe de la variable d'espace z . Soit T une variable définit l'évolution de la température dans cette tige, le gradient de la température dépend de la variable du temps t et de la variable d'espace z . Des conditions seront imposées aux extrémités $T(0, t)$ à $z = 0$ et $T(l, t)$ à $z = l$ appelées conditions aux limites et une condition $T(z, 0)$ à $t = 0$ dite condition initiale.

La variation de la température crée un flux orienté du milieu à hautes températures vers un milieu à basses températures dans la tige. Ce type de phénomène décrit l'évolution de la température, se modélise par une équation aux dérivées partielles dite équation de chaleur.

La figure IV.1 montre la distribution de la température dans la tige.

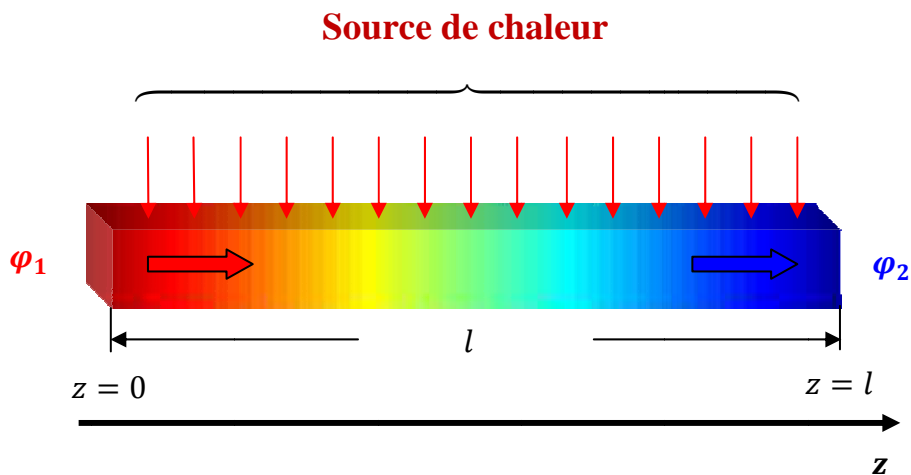


Figure IV.1 Commande de l'évolution de la température dans une tige.

IV.3 Equation de chaleur

L'équation de chaleur caractérise un transfert de chaleur, la chaleur peut être transférée par convection, par rayonnement ou par conduction. Ce dernier est le mécanisme auquel on est intéressé. La conduction thermique est une transmission de chaleur directe, elle s'observe principalement dans les solides. Dans les métaux, la conduction fait intervenir les électrons libres qui les rendent bons conducteurs de la chaleur. En revanche dans les isolants, la conduction se fait mal.

La modélisation de ce phénomène est basée sur la loi de Fourier et la première loi de la thermodynamique. La loi de Fourier modélise la conduction thermique en donnant une expression du vecteur courant de densité thermique, la première loi de la thermodynamique définit la quantité de chaleur ΔQ emmagasinée dans un matériau. De ces deux lois, l'équation de chaleur qui lie les variables spatiales et temporelles est donnée comme suit :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + u(z, t) \quad (\text{IV.1})$$

tel que

$$D = \frac{\lambda}{c_v \rho} \quad (\text{IV.2})$$

D : coefficient de diffusivité.

λ : coefficient de la conduction thermique.

φ : densité de flux thermique.

c_v : capacité calorifique massique.

ρ : masse volumique (densité de matière).

IV.3.1 Approximation de l'équation de chaleur

Le problème majeur posé dans ce type de système (systèmes à paramètres distribués) est le problème de commande. Or s'il existe une théorie de la commande des systèmes à paramètres repartis, les méthodes qui en découlent sont généralement d'une mise en œuvre difficile ou même impossible. [6]

La méthode résolvante de ce problème consiste à se ramener au cas des systèmes à paramètres localisés (équations différentielles ordinaires) par approximation de l'équation IV.1 ou de sa solution $T(z, t)$.

IV.3.2 Méthodes d'approximation

La méthode de Ritz, la méthode des résidus pondérés et la méthode des fonctions propres (qu'on l'appliquera par la suite) font partie des méthodes d'approximation de la solution. Par contre la méthode des différences finies développée dans le chapitre III traite le problème d'approximation de l'équation.

IV.3.2.1 Méthode des fonctions propres

La méthode des fonctions propres est basée sur la séparation des variables (variable d'espace z et variable de temps t), cette méthode est très pratique dans le cas particulier où le calcul des valeurs propres et fonctions propres est possible.

La solution de l'équation peut s'écrire sous la forme séparable

$$T(z, t) = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(t) \phi_j(z) \quad (\text{IV.3})$$

$$u(z, t) = \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (\text{IV.4})$$

tel que

$a(t)$: vecteur d'état.

$b(t)$: vecteur commande.

$\phi(z)$: fonctions propres.

IV.3.3 Approximation de l'équation de chaleur par la méthode des fonctions propres

L'équation à approximer est :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + u(z, t) \quad (\text{IV.5})$$

D : coefficient de diffusivité ($D > 0$).

avec les conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T(1, t)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

et les conditions initiales

$$T(z, 0) = T_0(z) \quad (\text{IV.7})$$

on remplace (IV.3) et (IV.4) dans (IV.5) on trouve

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(t) \phi_j(z)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j(t) \phi_j(z)}{\partial^2 z} + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (\text{IV.8})$$

pour $k = 1 \dots n$

$$\phi_k(z) \frac{\partial \tilde{a}_k(t)}{\partial t} = D \tilde{a}_k(t) \frac{\partial^2 \phi_k(z)}{\partial^2 z} + \tilde{b}_k(t) \phi_k(z) \quad (\text{IV.9})$$

divisant par $\tilde{a}_k(t) \times \phi_k(z)$

$$\frac{1}{\tilde{a}_k(t)} \frac{\partial \tilde{a}_k(t)}{\partial t} = \frac{D}{\phi_k(z)} \frac{\partial^2 \phi_k(z)}{\partial^2 z} + \frac{\tilde{b}_k(t)}{\tilde{a}_k(t)} \quad (\text{IV.10})$$

l'équation (IV.10) peut être décomposée en deux équations différentielles ordinaires, l'une fonction de la variable d'espace, l'autre fonction de la variable temporelle comme suite :

$$\begin{cases} \frac{1}{\tilde{a}_k(t)} \frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} - \frac{\tilde{b}_k(t)}{\tilde{a}_k(t)} = -\lambda_k \\ D \frac{d^2 \phi_k(z)}{d^2 z} = -\phi_k(z) \lambda_k \end{cases} \quad k = 1 \dots n \quad (\text{IV.11})$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} + \tilde{a}_k(t)\lambda_k = \tilde{b}_k(t) \\ D \frac{d^2\phi_k(z)}{dz^2} + \phi_k(z)\lambda_k = 0 \end{cases} \quad k = 1 \dots n \quad (\text{IV.12})$$

tel que λ_k et $\phi_k(z)$ sont les valeurs propres et les fonctions propres respectivement. Ces derniers sont déterminés par la résolution de la deuxième équation différentielle :

$$D \frac{d^2\phi_k(z)}{dz^2} + \phi_k(z)\lambda_k = 0 \quad (\text{IV.13})$$

dont la variable est $\phi_k(z)$.

La solution de l'équation différentielle (IV.13) qui vérifie les conditions aux limites est :

$$\phi_k(z) = A_k \cos \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} z \quad (\text{IV.14})$$

- Calcul des valeurs propres λ_k

La dérivée de (IV.14)

$$\frac{d\phi_k(z)}{dz} = -A_k \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} z\right) \quad (\text{IV.15})$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} \left. \frac{d\phi_k(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0 \\ \left. \frac{d\phi_k(z)}{dz} \right|_{z=1} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

donnent :

pour $z = 1$

$$\left. \frac{d\phi_k(z)}{dz} \right|_{z=1} = -A_k \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \sin \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \quad (\text{IV.17})$$

$$\left. \frac{d\phi_k(z)}{dz} \right|_{z=1} = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} = k \pi \quad \backslash \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots n$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_k}{D} = k^2 \pi^2 \quad \backslash \quad k = 1, 2, 3 \dots n$$

donc les valeurs propres sont :

$$\lambda_k = Dk^2 \pi^2 \tag{IV.18}$$

• Calcul A_k

Le calcul de A_k nécessite que les fonctions propres doivent être orthogonales c'est-à-dire que

$$\int_0^1 \phi_k^2(z) dz = 1 \tag{IV.19}$$

de (IV.14), il vient :

$$\phi_k^2(z) = A_k^2 \cos^2 \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} z \tag{IV.20}$$

L'intégrale de (IV.20)

$$\int_0^1 A_k^2 \cos^2 \left(\sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} z \right) dz = 1 \tag{IV.21}$$

donne

$$A_k^2 = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{D}\pi k} \cos \sqrt{D} \pi k \sin \sqrt{D} \pi k + \frac{1}{2}} \tag{IV.22}$$

et pour $D = 1$

$$A_k^2 = \frac{1}{\frac{1}{2\pi k} \cos \pi k \sin \pi k + \frac{1}{2}} \tag{IV.23}$$

d'où

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{2} & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

donc

$$\phi_k(z) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \sqrt{2} \cos k\pi z & k \neq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

de la première équation différentielle de (IV.12), il vient :

$$\frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} + \tilde{a}_k(t)\lambda_k = \tilde{b}_k(t) \quad k = 1 \dots n \quad (\text{IV.26})$$

$$\frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} = -\lambda_k \tilde{a}_k(t) + b_k(t) \quad (\text{IV.27})$$

d'où la forme d'état

$$\dot{a}_n(t) = A a_n(t) + b_n(t) \quad (\text{IV.28})$$

tel que

$A = -\lambda_n I_{n \times n}$ Matrice d'état diagonale formée par les valeurs propres λ_n .

et sous forme matricielle le modèle d'état s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{a}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -4\pi^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -n^2\pi^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

le développement de la relation (IV.4)

$$u(z, t) = \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(t) \phi_j(z) \quad (\text{IV.30})$$

donne

$$\begin{aligned}
 u(z_1, t) = u_1 &= b_1(t) \phi_1(z_1) + b_2(t) \phi_2(z_1) + \dots + b_n(t) \phi_n(z_1) \\
 u(z_2, t) = u_2 &= b_1(t) \phi_1(z_2) + b_2(t) \phi_2(z_2) + \dots + b_n(t) \phi_n(z_2) \\
 &\vdots \\
 u(z_n, t) = u_n &= b_1(t) \phi_1(z_n) + b_2(t) \phi_2(z_n) + \dots + b_n(t) \phi_n(z_n)
 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(z_1) & \phi_2(z_1) & \dots & \phi_n(z_1) \\ \phi_1(z_2) & \phi_2(z_2) & \dots & \phi_n(z_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(z_n) & \phi_2(z_n) & \dots & \phi_n(z_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

on sait de (IV.25) que

$$\phi_k(z_i) = \sqrt{2} \cos(k\pi z_i)$$

donc

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos(\pi z_1) & \sqrt{2} \cos(2\pi z_1) & \dots & \sqrt{2} \cos(n\pi z_1) \\ \sqrt{2} \cos(\pi z_2) & \sqrt{2} \cos(2\pi z_2) & \dots & \sqrt{2} \cos(n\pi z_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sqrt{2} \cos(\pi z_n) & \sqrt{2} \cos(2\pi z_n) & \dots & \sqrt{2} \cos(n\pi z_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

soit

$$w = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos(\pi z_1) & \sqrt{2} \cos(2\pi z_1) & \dots & \sqrt{2} \cos(n\pi z_1) \\ \sqrt{2} \cos(\pi z_2) & \sqrt{2} \cos(2\pi z_2) & \dots & \sqrt{2} \cos(n\pi z_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sqrt{2} \cos(\pi z_n) & \sqrt{2} \cos(2\pi z_n) & \dots & \sqrt{2} \cos(n\pi z_n) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

Ainsi, la relation entre $b(t)$ et $u(z, t)$ est donnée comme suit :

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = w^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

IV.4 Résolution et simulation de l'équation de chaleur

Dans notre étude, on résout et on simule cette équation approximé par la méthode des différences finies et par la méthode des fonctions propres.

La commande est un échelon, l'objectif est de comparer les résultats obtenus par les deux méthodes ; méthodes d'approximation de l'équation (différences finies) et méthode d'approximation de la solution (fonctions propres).

IV.4.1 Simulation de l'équation approximée par la méthode des différences finies

Prenant $N_x = 10$ et le coefficient de diffusion $D = 1$. La commande appliquée est une commande distribuée le long de l'axe z de la tige de longueur $l = 1$ d'un pas d'échantillonnage $\Delta z = h = \frac{l}{N_x} = 0.1$ et donc $z = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9]$.

La simulation de modèle approximé par la méthode des différences finies dans le chapitre (III), donne les résultats montrés par la figure IV.2.

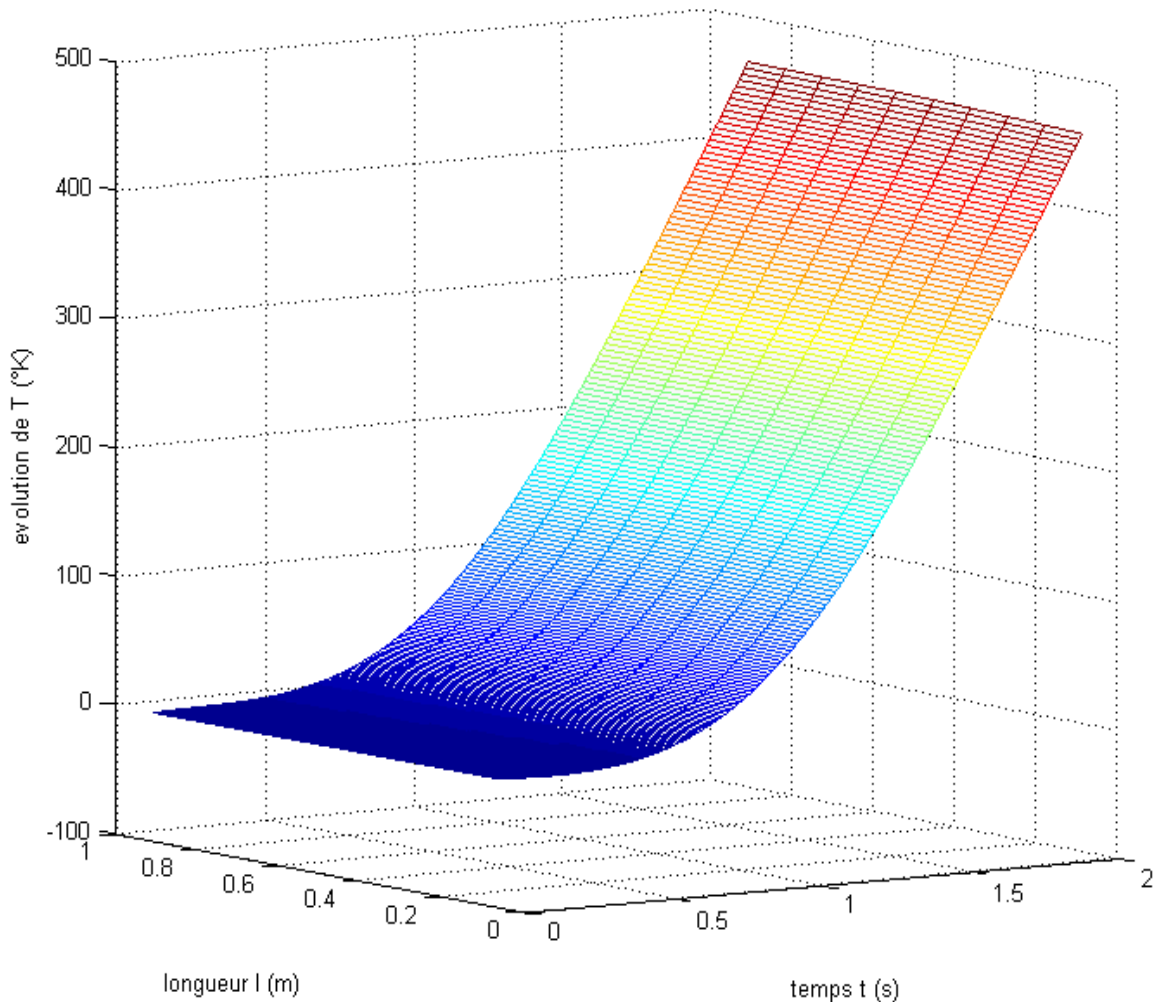


Figure IV.2 Evolution de la température

IV.4.2 Simulation de l'équation approximée par la méthode des fonctions propres

Dans ce cas, on prend un nombre d'échantillon $N_a = 5$ qui donne un pas $\Delta z = h = \frac{l}{N_a} = 0.2$ ($l = 1$) et donc $z = [0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8]$.

La simulation de l'équation de chaleur approximée par la méthode des fonctions propres, donne les résultats montrés par la figure IV.3

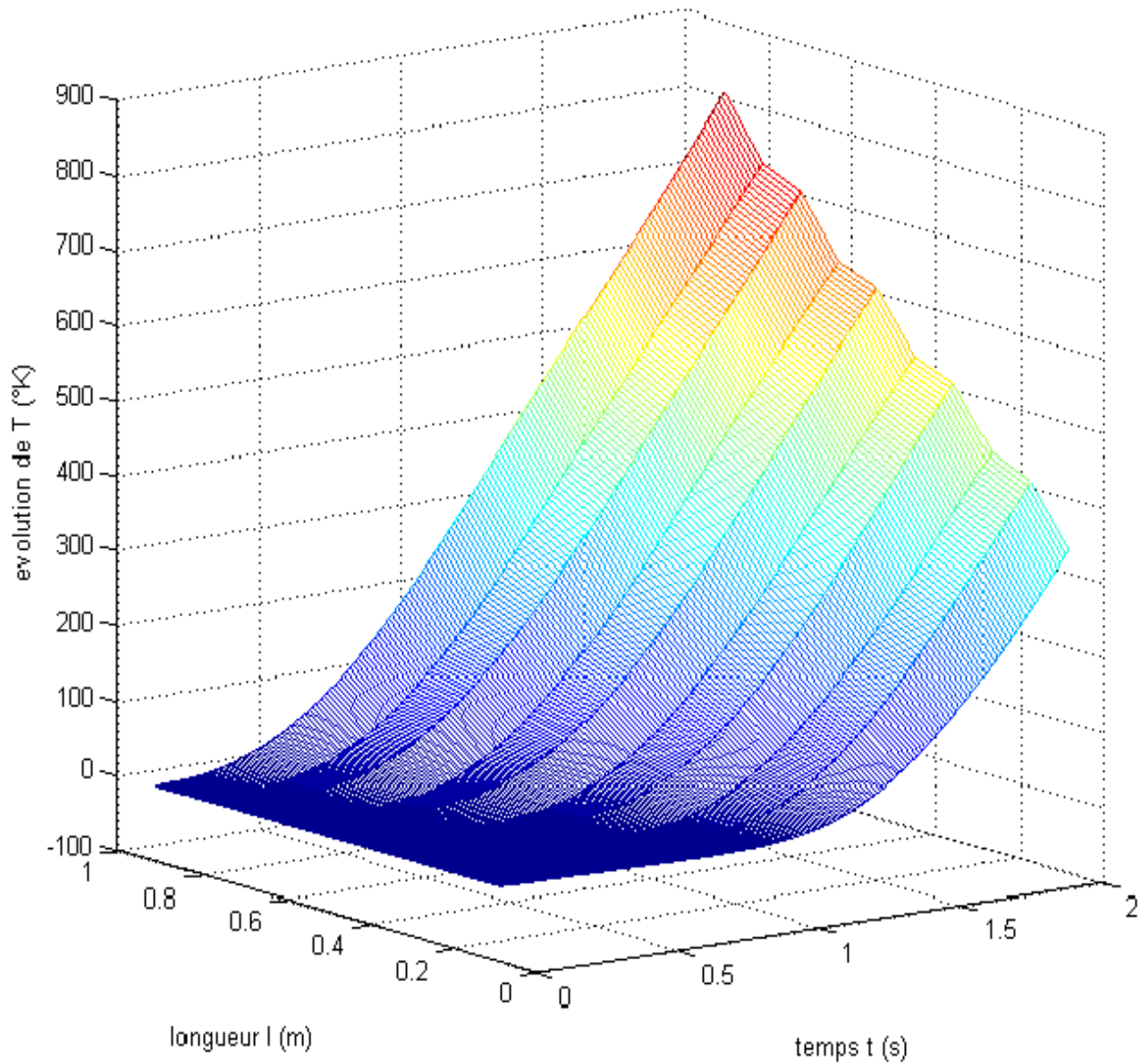


Figure IV.3 Evolution de la température

Remarque IV.1

Le nombre d'échantillon pris dans la simulation de modèle approximé par la méthode des différences finies N_x est plus important par rapport à celui pris dans la simulation de modèle approximé par la méthode des fonctions propres N_a . Ceci est pour des objectifs de précision et de dimension de modèle d'état à obtenir.

IV.4.3 Comparaison des résultats

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont en principe les mêmes, la différence qu'il existe est due aux erreurs de résolution par les méthodes numériques.

La méthode des différences finies donne des résultats précis pour un nombre d'échantillon élevé ; mais l'intérêt majeur de la méthode des fonctions propres réside dans le fait que l'ordre du système différentiel approché est relativement faible par rapport à celui obtenu par l'utilisation d'une méthode aux différences finies et il est plus simple d'appliquer une commande à un système de dimension faible. L'utilisation de la méthode des fonctions propres permet d'avoir un système approximé moins précis que celui obtenu par la méthode des différences finies mais il est exploitable pour la synthèse d'une loi de commande.

IV.5 Choix de la commande à appliquer

L'intérêt de telle commande est d'assurer une robustesse maximale, marge de gain supérieur à 0.5, marge de phase supérieur à 60°, marge de module supérieur à 1. La robustesse garantit un certain niveau de performances malgré les incertitudes ou les variations d'un système à commander, et présence du bruit ou les perturbations susceptibles d'agir sur le processus au cours de son évolution. [7]

La commande linéaire quadratique (LQ) est l'une des commandes les plus robustes qui assure une bonne marge de stabilité et les meilleures performances avec un bon choix des matrices de pondération Q et R .

IV.6 Commande linéaire quadratique de l'évolution de la température dans la tige

La commande LQ dans notre cas correspond à un problème de poursuite dans un horizon infini. Le modèle à commander est celui déduit par approximation dans (IV.3.3) qui s'écrit

$$\dot{a}(t) = A a(t) + B b(t) \quad (\text{IV.35})$$

pour $n = 4$

la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -\pi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16\pi^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

et

$$B = I_{4 \times 4} \quad (\text{IV.37})$$

et d'après la section (II.6.1) la commande optimale est

$$b(t) = K_c a(t) + F a^d(t) \quad (\text{IV.38})$$

K_c : matrice de gain de retour d'état.

F : matrice de poursuite.

$a^d(t)$: vecteur états désirés.

tel que

$$K_c = -R^{-1} B^T P(t) \quad (\text{IV.39})$$

et

$$F = -R^{-1} B^T (A^T - P(t) B R^{-1} B^T)^{-1} Q \quad (\text{II.40})$$

donc le modèle IV.35 devient

$$\dot{a}(t) = (A + B K_c) a(t) + B F a^d(t) \quad (\text{II.41})$$

IV.7 Simulation du système commandé

Dans cette section, on va présenter les résultats de l'application de la commande linéaire quadratique pour l'équation de chaleur caractérisant le transfert de chaleur dans la tige. Rappelant que cette équation a été approximée par la méthode des fonctions propres.

La commande optimale appliquée au système est montrée par la figue IV.4 suivante

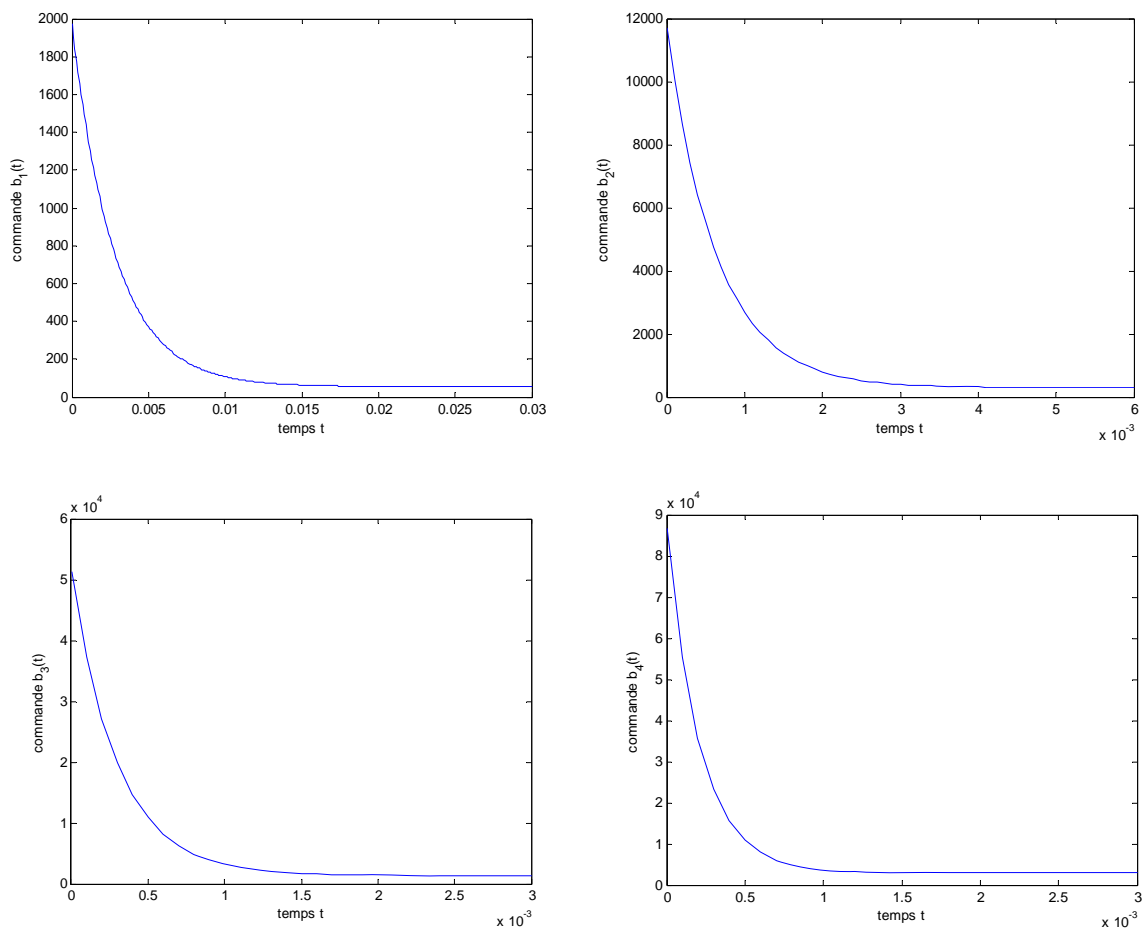


Figure IV.4 Représentation des commandes appliquées $b_i(t)$.

La simulation donne les résultats représentés par les figures IV.5, IV.6, IV.7 et IV.8 dans le cas de la poursuite de consigne.

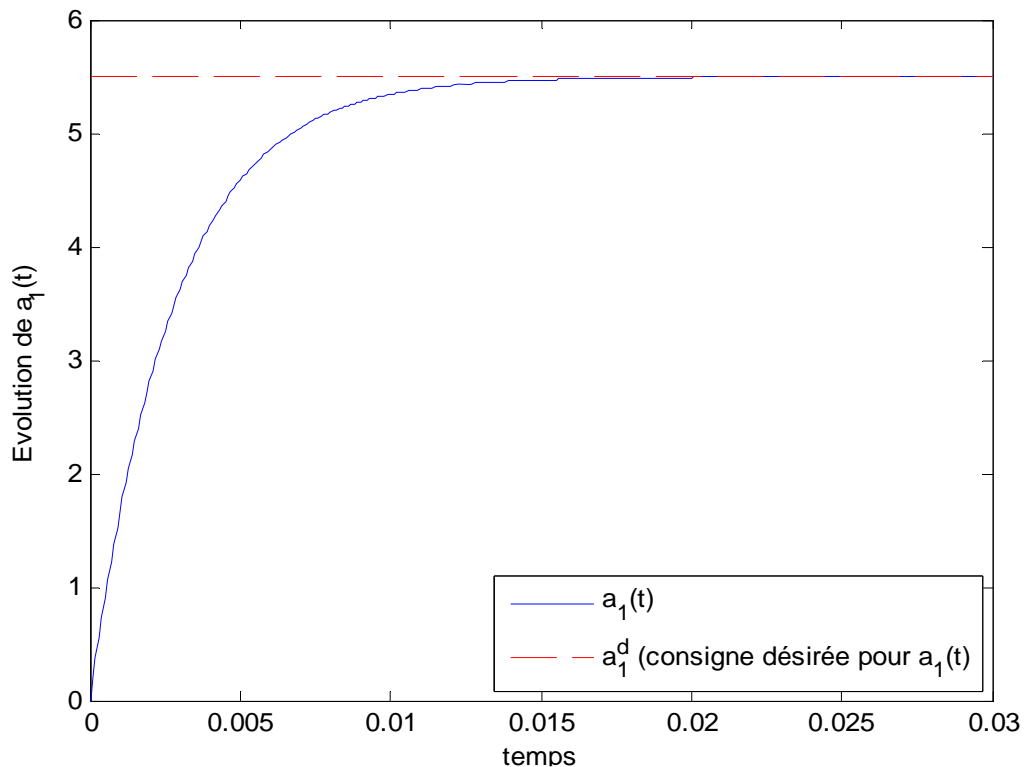


Figure IV.5 Représentation de l'évolution de l'état $a_1(t)$.

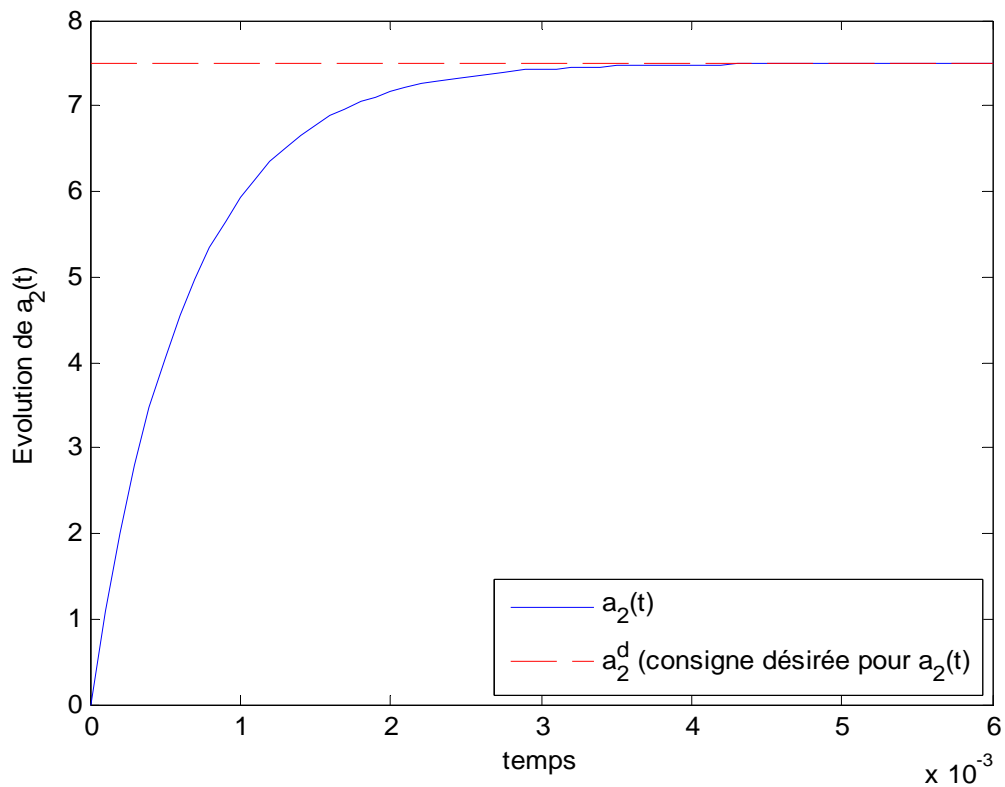


Figure IV.6 Représentation de l'évolution de l'état $a_2(t)$.

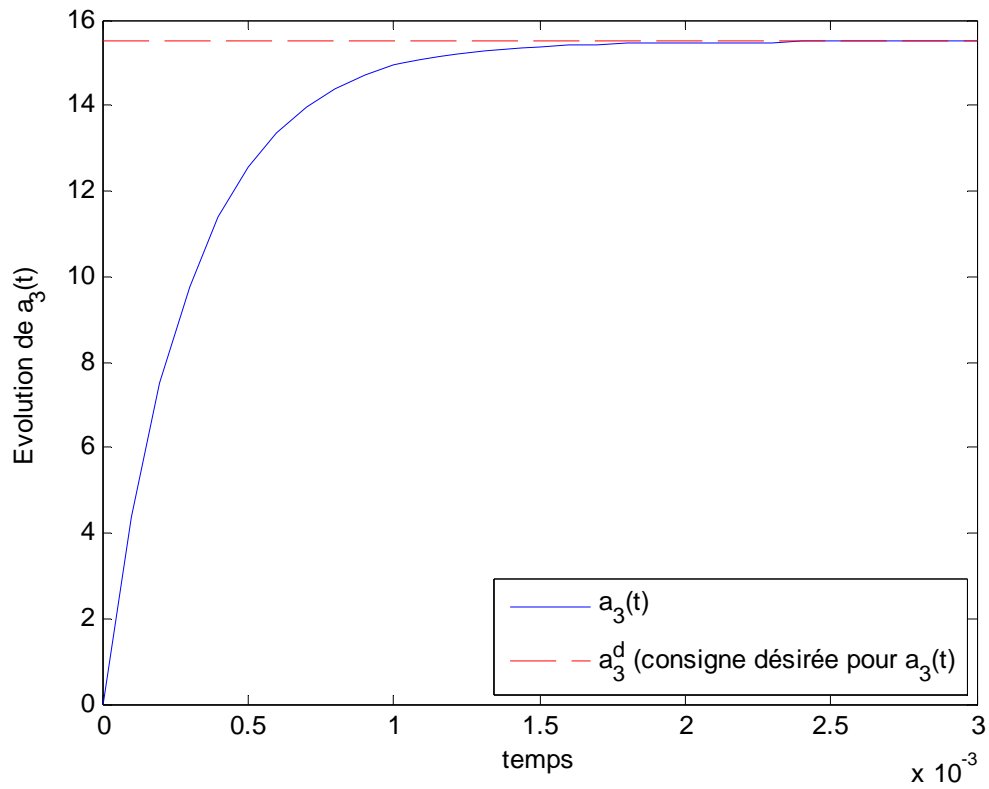


Figure IV.7 Représentation de l'évolution de l'état $a_3(t)$.

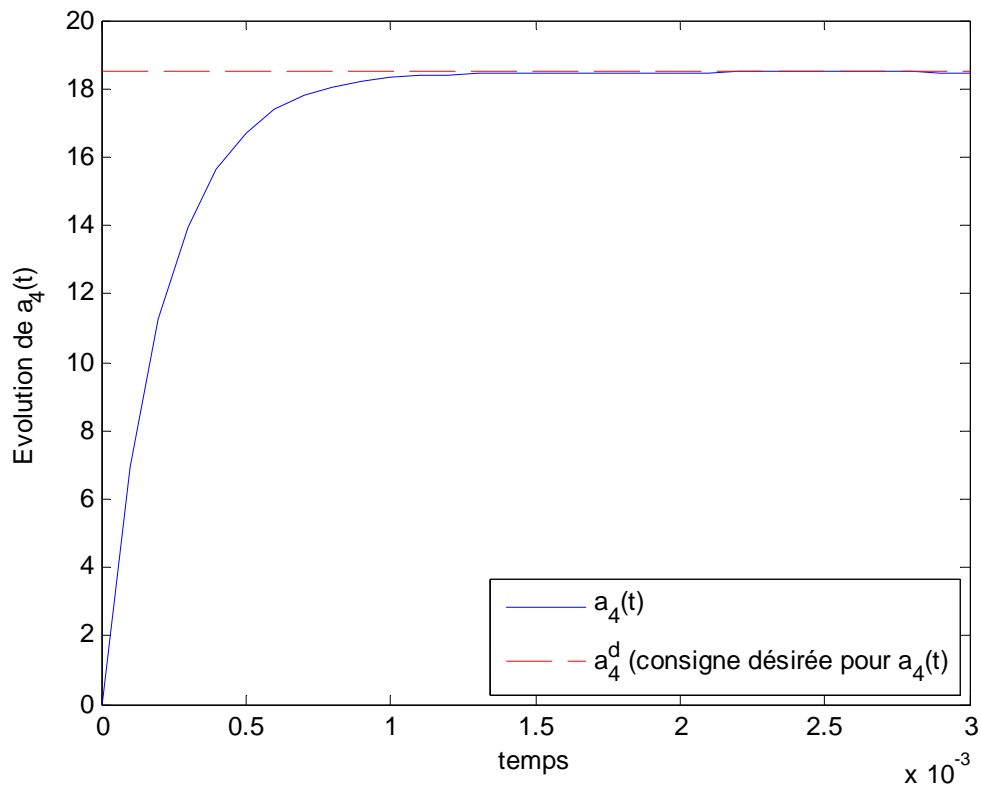


Figure IV.8 Représentation de l'évolution de l'état $a_4(t)$.

IV.7.1 Interprétation des résultats

D'après les résultats de simulation obtenus, on remarque des figures IV.5, IV.6, IV.7 et IV.8 que chaque état suit son état désiré correspondant après un temps de réponse court avec un écart statique nul.

Comme la résolution par la variable d'état $a(t)$ assure une poursuite de la consigne et que la relation IV.3 liant $a(t)$ et $T(t)$ est linéaire, donc cette poursuite est assurée même pour la variable $T(z, t)$, c'est-à-dire cette température suit un certain profil désiré défini par les coefficients imposés $a_i(t)$. Rappelons que ce profil est donné par la relation (IV.3).

Pour montrer l'influence des matrices de pondérations Q et R, plusieurs tests de simulation sont effectués pour arriver aux résultats désirés.

IV.8 Conclusion

Après avoir approximé et simulé dont le comportement dynamique est caractérisé par l'équation de chaleur, par la méthode des fonctions propres, on a montré l'apport de régulateur LQ sur les performances du système. On constate que ce type de systèmes se traite d'une manière plus simple puisque le modèle réduit utilisé est de faible dimension. L'analyse des résultats obtenus par simulation montre que la commande optimale (LQ) assure les performances désirées : poursuite de consignes avec une erreur statique nulle (système précis), pas de dépassement (système amorti) et un temps de réponse faible (système rapide), ceci en faisant un choix convenable des matrices de pondération Q et R utilisées pour la synthèse de la loi de commande.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, on a appliqué la commande linéaire quadratique (LQ) pour commander la distribution de la température (diffusion de chaleur) dans une tige métallique. Le modèle mathématique est donné par l'équation de chaleur. Ce dernier est approximé par la méthode des fonctions propres. L'objectif de cette application est d'assurer un bon suivi de la consigne.

Après avoir présenté des généralités sur les systèmes à paramètres distribués, on a abordé la théorie relative à la commande LQ. Ensuite, la modélisation du transfert de chaleur par conduction dans une tige a été présentée de manière détaillée. La fin du mémoire est consacrée à la commande LQ de l'évolution de la température dans une tige métallique et à la présentation des résultats de simulation.

La méthode des fonctions propres utilisée pour approximer la solution de l'équation de chaleur, permet d'obtenir un modèle de faible dimension ce qui a rendu la synthèse du correcteur LQ plus simple.

La commande LQ permet d'avoir des résultats de très bonnes performances, poursuite de trajectoire, stabilité et rapidité acceptable, avec l'intermédiaire de bon choix des matrices de pondération du critère. Ainsi, la commande LQ traite le compromis de minimisation de l'énergie de commande et l'écart entre états du système et états désirés.

Les résultats obtenus par simulation ont montré la fiabilité de la commande LQ appliquée au système à paramètres distribués approximé par la méthode d'approximation de la solution. L'approximation par la méthode des fonctions propres permet de simplifier davantage l'étape de synthèse puisque la dimension du modèle approximé est réduite.

Le travail présenté dans ce mémoire peut être étendu aux systèmes à paramètres distribués non linéaires en considérant un modèle linéaires autour d'un point de fonction ou d'une trajectoire. Une comparaison des résultats avec une autre méthode d'approximation, par exemple la méthode des résidus pondérés appliquées, constitue une idée très intéressante.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Références

Livres

[1] **J.P.Babary et W.Pelczewski.**, "*Commande optimale des systèmes déterministes*". Editions Masson, Paris, 1985.

[3] **A.Rachid, D. Mehdi.**, "*Réalisation, Réduction et Commande des systèmes linéaires*". Editions technip, Paris, 1997.

[4] **Jean-Luc Battaglia.**, "*Transferts thermiques dans les procédés de mise en forme des matériaux*". Editions Lavoisier, Paris, 2007.

[6] **A. EL. JAI et M.Amouroux.**, "*Automatique des systèmes distribués*", Edition Hermès, Paris 1990.

[7] **A. Rachid.**, "*Système de régulation*". Editions Masson, Paris, 1996.

Sites internet

[5] **P.Y. Lagrée.**, "*Equation de chaleur*". <http://www.Imm.Jussieu.fr/~Lagree>. Version 13 mars2010.

[2] **Benoît Bergeon.**, "*Commande Linéaire des Systèmes Multivariables*".

[http // personnel. Supaero.fr/alazard-daniel/gt_mosar/cma.Pdf](http://personnel.Supaero.fr/alazard-daniel/gt_mosar/cma.Pdf). dernière consultation Avril 2010.

Résumé

Après avoir présenté des généralités sur les systèmes à paramètres distribués, on a abordé la théorie relative à la commande LQ. Ensuite, la modélisation du transfert de chaleur par conduction dans une tige a été présentée de manière détaillée. La fin du mémoire est consacrée à la commande LQ de l'évolution de la température dans une tige métallique et à la présentation des résultats de simulation.

Les résultats obtenus par simulation ont montré la fiabilité de la commande LQ appliquée au système à paramètres distribués approximé par la méthode d'approximation de la solution. L'approximation par la méthode des fonctions propres permet de simplifier davantage l'étape de synthèse puisque la dimension du modèle approximé est réduite.

Mots clés

Commande LQ des systèmes à paramètres distribués, méthodes d'approximation (fonctions propres et différences finies).