

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI, TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MAGISTER (ÉCOLE DOCTORALE)

EN MATHÉMATIQUES

**Option** : Statistique

Par

**Hanane ARBIA**

Titre

**MESURES DE RISQUE POUR LES SOMMES DES GRANDES  
PERTES FINANCIERES**

**Soutenu publiquement le : Jeudi 31 mai 2012**

Devant le jury d'examen composé de :

Hocine FALLAG	Professeur	UMMTO	Président
Abdelhakim Necir	Professeur	UMKB	Rapporteur
Mohand Arezki BOUDIBA	Maître de conférences A	UMMTO	Examineur
Djamel MERAGHNI	Maître de conférences A	UMKB	Membre invité

# Remerciements

Je voudrais, en premier lieu, témoigner mes vifs et sincères remerciements à **DIEU**, pour sa miséricorde, son secours, ses grâces et de m'avoir donné du courage afin que ce mémoire vous soit présenté aujourd'hui.

Mes sincères remerciements à mon directeur de mémoire Monsieur le professeur *Abdelhakim NECIR*, Professeur à l'U.M.K.B qui s'est toujours très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour m'avoir accordé toute sa confiance ; pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de cette période, sachant répondre à toutes mes interrogations ; sans oublier sa participation au cheminement de ce rapport et sans lui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je veux également exprimer toutes mes reconnaissances aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait pour juger ce travail : *Hocine FELLAG*, *Mohand BOUDIBA* et *Djamel MERAGHNI*. Merci sincèrement du temps et de l'effort que vous avez consacré à la lecture de mon travail et pour les commentaires, les corrections et les remarques constructives.

J'exprime ma gratitude à tous les enseignants qui ont accepté de répondre à mes questions avec gentillesse.

En outre je tiens à remercier mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amies, qui m'ont toujours soutenue et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

*Merci à tous et à toutes.*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>ii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>iv</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Notations et abreviations</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Risque et Mesures de Risque Financier</b>	<b>4</b>
1.1 Risque financier . . . . .	5
1.1.1 Définitions . . . . .	5
1.1.2 Typologie des risques financiers . . . . .	6
1.2 Mesures de risque financier . . . . .	6
1.2.1 Paramètres d'une mesure de risque . . . . .	7
1.2.2 Progrès dans la mesure de risque . . . . .	7
1.3 Caractérisation axiomatique des mesures de risque . . . . .	8
1.3.1 Mesure de risque cohérente . . . . .	8
1.3.2 Mesure de risque convexe . . . . .	10
1.3.3 Mesures de risques monétaires . . . . .	11
1.3.4 Mesure de risque comonotone additive . . . . .	11
1.3.5 Mesure de risque invariante en loi . . . . .	12
1.4 Mesures de Risque Usuelles . . . . .	12
1.4.1 Value at Risk . . . . .	12
1.4.2 Au delà de la VaR . . . . .	16
1.4.3 Mesures Spectrale de Risque . . . . .	18

1.4.4	Mesures de Risque de Distorsion . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Théorie des Valeurs Extrêmes et Modélisation avec les Lois Stables des Risques Financiers</b>	<b>32</b>
2.1	Théorie des Valeurs Extrêmes Univariée . . . . .	33
2.1.1	Statistique d'ordre . . . . .	33
2.1.2	Distribution généralisée des valeurs extrêmes (GEV) . .	34
2.1.3	Distribution généralisée de Pareto (GPD) . . . . .	39
2.1.4	Approche Semi-Paramétrique de L'indice de Queue . .	42
2.2	Théorie des Valeurs Extrêmes Bivariée . . . . .	44
2.3	Modélisation avec les lois Stables . . . . .	46
2.3.1	Définitions d'une loi stables . . . . .	46
2.3.2	Interprétation des paramètres d'une Loi Stable . . . . .	47
2.3.3	Propriétés des Loïs Stables . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Mesures de Risque pour la Somme de Pertes Financières</b>	<b>53</b>
3.1	Mesures de Dépendance . . . . .	54
3.1.1	Définitions . . . . .	54
3.1.2	Coefficient de corrélation de Pearson . . . . .	55
3.1.3	Coefficient de corrélation des rangs de Kendall . . . . .	56
3.1.4	Coefficient de corrélation des rangs de Spearman . . . . .	56
3.2	Copules comme structure de dépendance . . . . .	57
3.2.1	Exemples de copules . . . . .	60
3.2.2	Distorsion de Copule . . . . .	63
3.2.3	Copules et mesures de dépendance . . . . .	64
3.3	Mesures de Risque de Distorsion pour la Somme de Pertes . .	65
3.3.1	Cadre d'analyse . . . . .	65
3.3.2	Distorsion de la fonction de survie de la somme . . . . .	66
3.3.3	Distorsion de la fonction de survie de la somme et de la copule . . . . .	68
3.3.4	MRD pour la somme de deux pertes dépendantes avec des distributions de Pareto . . . . .	70
	<b>Conclusion</b>	<b>74</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>75</b>

# Liste des tableaux

2.1	Moments d'une variable aléatoire suivant une loi $\alpha$ -stable. . .	52
3.1	Copules archédiennes avec leurs générateurs. . . . .	62
3.2	MRDC et tau de Kendall transformé de la somme de deux risques de distributions de Pareto avec le paramètre de distor- sion de queue $\rho= 1.2$ . . . . .	72
3.3	MRDC et tau de Kendall transformé de la somme de deux risques de distributions de Pareto avec le paramètre de distor- sion de queue $\rho= 1.4$ . . . . .	73

# Table des figures

1.1	VaR et Tail-VaR. . . . .	18
1.2	L'espérance et la mesure de risque de distorsion. . . . .	25
1.3	Fonction de distorsion de la VaR. . . . .	27
1.4	Fonction de distorsion de la TVaR. . . . .	28
1.5	Fonction de distorsion de la PHT. . . . .	29
1.6	Fonction de distorsion de la WT pour $\lambda = 0, 0.5$ et $1$ . . . . .	30
2.1	Fonctions de distribution du Gumbel (en noire), de Fréchet (en rouge) et de Weibull (en bleu). . . . .	37
2.2	Méthode des excès. . . . .	40
2.3	L'estimateur de Pickands. . . . .	43
2.4	L'estimateur de Hill. . . . .	44
2.5	Courbe de la densité pour différentes valeurs de $\alpha$ et pour $\beta = 0, \sigma = 1$ et $\mu = 0$ . . . . .	48
2.6	Courbe de la densité pour différentes valeurs de $\beta$ et pour $\alpha = 1.5, \sigma = 1$ et $\mu = 0$ . . . . .	49
2.7	Courbe de la densité pour différentes valeurs de $\sigma$ et pour $\alpha = 1.5, \beta = 0$ et $\mu = 0$ . . . . .	49
2.8	Courbe de la densité pour différentes valeurs de $\mu$ et pour $\alpha = 1.5, \beta = 0$ , et $\sigma = 1$ . . . . .	50
3.1	Densité de copule pour trois familles archimédiennes (Franck, Clayton, Gumbel). . . . .	62
3.2	Densité de la copule de Clayton avec $\theta = 2$ et leur densité de copule distordue avec $\delta = 4$ . . . . .	72
3.3	Mesure de risque de la somme de deux risques de distributions de Pareto avec le paramètre de distorsion de queue $\rho = 1.2$ . . . . .	73

## Notations et abriviations

$CTE$	Conditionnal Tail Expectation.
$\mathcal{D}()$	Domaine d'attraction.
$ES$	Expected Shortfall.
$F$	Fonction de distribution.
$F^{-1}$	Fonction quantile.
$F^*$	Distribution de probabilité distordue.
$F_u$	Distribution conditionnelle des excès.
$F_i$	Fonction de distribution de la $i^{\text{ème}}$ marginale.
$g$	Fonction de distorsion.
$G$	Fonction de répartition de la v.a $Z$ .
$G^\delta$	Fonction de répartition transformé de la v.a $Z$ .
$GEV$	Distribution généralisée de valeurs extrêmes.
$GPD$	Distribution généralisée de Pareto.
$h$	Fonction de densité multivariée.
$H_\xi$	Distribution des valeurs extrêmes standard.
$i.i.d$	Indépendantes et identiquement distribuées.
$MRD$	Mesure de Risque de Distorsion.
$MRDC$	Mesure de Risque de Distorsion du Copule.
$MSR$	Mesure Spectrale de Risque.
$Par$	La loi de Pareto.
$PHT$	Proportional Hazard Transform.
$POT$	Peaks Over Threshold.
$S$	Fonction de répartition décumulative.
$TVaR$	Tail Value-at-Risk.
$TVE$	Théorie des valeurs extrêmes.
$WT$	Transformée de Wang.
$(X_1, \dots, X_n)$	Echantillon de taille $n$ de $X$ .
$(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$	Echantillon ordonné.
$X_F$	Le point terminale.

$X_{i,n}$	La $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre.
$\phi$	Distribution normale standard.
$\Lambda(x)$	Distribution des valeurs extrêmes de Gumbel.
$\Phi_\alpha(x)$	Distribution des valeurs extrêmes de Fréchet.
$\Psi_\alpha(x)$	Distribution des valeurs extrêmes de Weibull.
$\widehat{\xi}_{n,k}^{Pickands}$	L'estimateur de Pickands.
$\widehat{\xi}_{n,k}^{Hill}$	L'estimateur de Hill.

# Introduction

Le risque est toujours un souci dans notre vie. Nous faisons face à différents genres de risque journaliers parmi ceux-ci le risque financier que l'on peut distinguer au risque de marché, le risque d'activité et le risque de crédit. Cependant, le risque n'est pas un concept objectif et ainsi, il n'est pas du tout facile de lui donner une définition précise. En général, le risque signifie une possibilité des dommages ou de la perte liés à une action donnée.

Dans la finance, les gens sont intéressés à l'évaluation de ces risques. Les mesures de risque sont des outils d'évaluation de risque. Il existe de nombreuses méthodes permettant de décrire de façon quantitative le risque d'un instrument financier. *J.P. Morgan (1996)* introduit une mesure de risque connue par "la valeur en risque", notée VaR. Cette mesure permet de transformer le risque en un chiffre unique et elle est utilisée par les grandes banques pour évaluer leurs risques. Mais cette mesure présente quelques inconvénients, du fait qu'elle n'est pas sous-additive et aussi elle ne se base sur aucune information sur la queue droite de la distribution. Comme des mesures alternatives de la VaR, on peut citer la TVaR, CTE et ES. Ces mesures possèdent des propriétés importantes vis-à-vis au d'autres mesures.

Une des plus intéressantes familles de mesures de risque est la famille des mesures spectrales introduite par *Acerbi (2001)*. Celle-ci vérifie les propriétés de cohérence et en plus elle permet à l'utilisateur d'exprimer son aversion au risque de façon simple.

Une autre classe de mesures de risque satisfaisant les propriétés de cohérence, équivalente à la classe des mesures spectrales, c'est la mesure de risque de distorsion proposée par *Wang (1995)*.

Par ailleurs, la théorie des valeurs extrêmes occupe une place importante pour l'étude des risques financiers (risques extrêmes) contrairement à l'infé-

rence statistique basée sur les lois gaussiennes. La généralisation de la théorie des valeurs extrêmes univariée nous conduit à l'étude des risques multivariées.

L'étude de risque financier a été développée sur la base de l'hypothèse d'indépendance entre les variables aléatoires du vecteur de perte.

La question qui se pose est :

*Dans le cas de dépendance, comment peut-on évaluer le risque d'une institution financière ?*

Pour répondre à notre problématique nous traitons :

1. La mesure de risque de distorsion pour la somme des pertes.
2. La copule pour mesurer la dépendance entre les composantes d'un vecteur de pertes.

Dans ce mémoire, réparti en trois chapitres, nous discutons de façon détaillée les deux derniers points.

**Chapitre 1** : Ce chapitre est constitué de quatre sections. Dans la première section nous donnons quelques définitions de risque financier en décrivant sa typologie. La deuxième section est réservée aux définitions de mesure de risque, ses paramètres et son progrès. Nous présentons dans la troisième section la caractérisation axiomatique des mesures de risque et nous traitons ces propriétés. Dans la quatrième section nous exposons les mesures de risque usuelles en finance à savoir, la VaR, TVaR, CTE, la mesure spectrale et la mesure de distorsion.

**Chapitre 2** : Ce chapitre est réparti en trois sections. Dans la première section nous donnons une brève introduction sur la théorie des valeurs extrêmes univariée. Cette théorie est basée essentiellement sur la statistique d'ordre et sur les méthodes d'extrapolation (GEV, GPD). Dans la deuxième section, nous présentons la théorie des valeurs extrêmes bivariées. Dans la troisième section, nous exposons la modélisation des distributions à queues lourdes. Dans cette section, nous donnons la définition des lois stables, l'interprétation de ses paramètres et ses propriétés.

**Chapitre 3** : Nous nous focalisons dans ce chapitre sur le cas bivarié. Dans la première section nous donnons la définition des mesures de dépendance en mettant en évidence les mesures de dépendance usuelles. Dans la

deuxième section nous introduisons la notion de copule. Nous présentons sa définition, ses propriétés et quelques exemples. La troisième section est réservée à l'étude de la mesure de risque de distorsion pour la somme de pertes et un exemple pour un calcul numérique de cette mesure.

# Chapitre 1

## Risque et Mesures de Risque Financier

Avant de gérer un risque, il est nécessaire de bien comprendre quels pourraient être l'impact sur la valeur de l'entreprise. Cette réalité a créé le besoin d'une mesure qui exhibe l'impact d'un certain risque. Les mesures de risque sont des outils de quantification de risque, elles permettent d'évaluer un niveau de dangerosité d'un risque. De nombreuses mesures de risque ont été proposées ces dernières années. Nous présentons ici celles qui sont principalement étudiées en théorie mais également utilisées en pratique et elles doivent en général vérifier un certain nombre de propriétés.

Le but de ce chapitre est de présenter le risque et son besoin d'une mesure.

Ce chapitre est organisé comme suit :

La première section est le risque financier, nous sommes intéressés à sa définition et sa typologie pour assurer la nécessité des mesures pour le quantifier.

La deuxième section est la mesure de risque qui permet de donner une quantification de risque, nous donnons sa définition, ses paramètres et finalement son progrès pour amener à une meilleure mesure de risque.

La troisième section est la caractérisation axiomatique des mesures de risque. Une bonne mesure de risque est nécessaire pour vérifier les propriétés que nous donnons dans cette section.

Dans la dernière section, nous traitons quelques exemples des mesures de risque les plus usuelles en finance tel que la VaR, des mesures de risque qui donnent une quantification de la perte lorsque la VaR est dépassée (TailVaR, CTE, ES), les mesures spectrales et finalement les mesures de distorsion.

## 1.1 Risque financier

Le risque est un facteur qui joue un rôle extrêmement important dans les domaines économiques, politiques, sociaux et technologiques. Il existe diverses tentatives de définir et de caractériser leurs mesures. Notre but est de se concentrer sur les risques financiers puisque le risque et la gestion des risques sont au cœur du succès de l'investissement. La notion de risque en finance est très proche de celle d'incertitude. En général, le risque est considéré comme un bénéfice ou une perte aléatoire d'une position. Il peut être positif ou négatif.

### 1.1.1 Définitions

La littérature du risque est vaste car ce concept est largement utilisé au quotidien. Cependant, le concept de risque apparaît protéiforme dans les discours. Chacun a sa vision du risque par rapport à sa culture. Le concept de base du risque est le potentiel de changement dans le prix ou la valeur d'un actif ou des produits de base. En finance, le risque n'a pas de définition unique. L'une d'entre elles est :

**Définition 1.1** (*Risque en finance*)

*Le risque est la probabilité que le rendement réel d'un investissement sera différent de celui attendu.*

Il est également défini comme un phénomène subjectif impliquant l'exposition. Mais en général, le risque est défini en termes de changements des valeurs entre deux dates. Parce qu'il est lié à la variabilité de la valeur future d'une position en raison de changements du marché ou, plus généralement, des événements incertains.

Une différence essentielle entre le risque et l'incertitude est le fait que le risque est une quantité susceptible de mesurer, dans certains cas.

Nous donnons ci-dessous sa définition mathématique.

**Définition 1.2** (*Risque en mathématiques*)

*Un risque,  $X$  est une variable aléatoire représentant la perte nette d'un investisseur à un certain moment particulier dans le future.  $X < 0$  représente un gain et un  $X > 0$  représente une perte.*

### 1.1.2 Typologie des risques financiers

Les institutions financières sont soumises à un certain nombre de risque qu'il convient de bien gérer. Parmi ces risque nous pouvons citer :

1. **Le risque de marché** : qui se définit comme l'exposition financière d'une entreprise à une évaluation défavorable des prix et des taux. Le risque de marché est présent à différents niveaux (une position, une activité, un portefeuille), sur différents types d'actifs (taux d'intérêt, change, action) et sur différentes catégories (les prix, la courbe des taux d'intérêt, la volatilité). Ce risque est relatif aux crises que peuvent subir les marchés financiers (crise de 1929, krach de 1987, bulle technologique des années 2000, crise des subprimes de 2007).
2. **Le risque d'activité** : Ce risque fait référence aux pertes potentielles qui résultent des systèmes inadéquats, de l'échec de la gestion, des contrôles défectueux, des fraudes, et des erreurs humaines. Par ailleurs, *Basle Committee on Banking Supervision (1998)* considère que les types de risque d'activité les plus importants incluent l'échec des systèmes de contrôle et la gouvernance de l'entreprise. Un tel échec peut être considéré à des pertes financières suite à des erreurs, des fraudes, ou à un échec d'accomplir une opération commerciale dans les meilleurs délais.
3. **Le risque de crédit** : Ce risque relatif au risque de faillite d'une entreprise qui a contracté des contrats de dettes et qu'elle ne peut pas rembourser ses créanciers.

## 1.2 Mesures de risque financier

Après avoir reconnu les sources de risque, les institutions financières sont à la recherche des techniques pour quantifier leurs risques. La mesure de risque est un outil de quantification de risque, elle est en évolution rapide dans les deux champs ; théoriques et pratiques ces dernières années.

### **Définition 1.3** (*Mesure de risque*)

*Une mesure de risque est une application  $\rho$  à tout risque  $X$  (une variable aléatoire donnée) associe un réel  $\rho(X) \in \mathbb{R}$ .*

Cette définition montre que l'espérance et la variance se sont des mesures de risque lorsqu'elles existent.

Nous interprétons cette mesure comme le plus petit montant de capital qu'il faut ajouter à une position pour que celle-ci devienne acceptable.

### 1.2.1 Paramètres d'une mesure de risque

Aujourd'hui, trois paramètres sont importants pour la mesure de risque :

1. **L'horizon temporel** : Il correspond à la durée du modèle qui doit être projeté pour avoir une meilleure information. Un horizon à court terme a l'inconvénient que de nombreuses stratégies n'ont pas leur effet total. Toutefois, un long horizon temporel ralentit le modèle en projetant la variable économique très loin dans le future. En général, la longueur de l'horizon temporel dépend du portefeuille et du but du modèle.
2. **Le niveau de confiance** : C'est un paramètre capital dans la mesure de risque. Il doit être spécifié dans le but de distinguer le niveau d'acceptabilité du risque et correspond à l'estimation d'intervalle dans lequel la mesure ne devrait pas dépasser la perte maximale.
3. **La variable financière** : C'est la variable à modéliser dans la future position en raison de l'incertitude.

Le choix des paramètres est très important dans la mesure de risque et qu'il doit bien le spécifier.

### 1.2.2 Progrès dans la mesure de risque

Du point de vue historique, Markowitz a été le premier qui avait reconnu la relation entre le risque et la récompense. Il a présenté l'écart type  $\sigma(X) = \sqrt{E(X - E(X))^2}$  pour donner une information sur le risque *Markowitz (1952)*. Une difficulté de l'écart type est celle de la moyenne ; les profits et les pertes sont symétriques et ceci ne correspond pas à la réalité. L'écart-type ne peut pas être compté de la nature asymétrique du risque. Puis la Value-at-Risk (VaR) a été présentée par le *J.P. Morgan (1996)* un des plus anciens dans les services financiers dans le monde, elle est très populaire dans la pratique et elle est devenue une partie intégrante de la réglementation financière. Ensuite, apparition des documents sur les mesures de risque cohérentes présentés par le groupe de chercheurs Artzner, Delbaen, Eber et Heath. Ils ont décrit les propriétés mathématiques qu'une mesure significative de risque devrait satisfaire. Ces caractérisations seront présentées dans ce

travail *Artzner et al. (1999)*. De là, certaines nouvelles mesures de risque comme la CTE, TVaR, ES ont été construites. *Acerbi (2001)* a également introduit ce qu'il a appelé les mesures de risque spectrales ; c'est une famille de mesures de risque cohérentes, cette famille est équivalente à la famille de mesures de risque de distorsion qui a été introduite par *Wang (1995)* (ces mesures sont introduites en détail dans ce chapitre). Il y a beaucoup de progrès dans la recherche sur les mesures de risque ces dernière années.

## 1.3 Caractérisation axiomatique des mesures de risque

La définition d'une mesure de risque est très générale puisque toute fonction réelle d'une variable aléatoire peut être considérée comme étant une mesure de risque. Mais, en pratique, on demandera souvent à une mesure de risque posséder un certain nombre de propriétés mathématiques, où dans cette section nous donnons les propriétés, qu'une mesure significative de risque, devrait satisfaire.

### 1.3.1 Mesure de risque cohérente

*Artzner et al. (1999)* ont introduit un ensemble d'axiomes pour la construction appropriée des mesures de risque. Un de ces derniers est la notion d'une mesure cohérente de risque.

**Définition 1.4** (*Mesure de risque cohérente*)

Une mesure de risque  $\rho : V \longrightarrow \mathbb{R}$  est cohérente si elle est vérifiée :

1. **Monotonie :**

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \quad \forall X, Y \in V,$$

2. **Invariance par translation :**

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a \quad \forall a \in \mathbb{R}, X \in V,$$

3. **Homogénéité positive :**

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad \forall \lambda \geq 0, X \in V,$$

#### 4. *Sous-additivité* :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \forall X, Y \in V.$$

Les axiomes sont expliqués comme suit :

**Monotonie** : Traduit quand à elle le fait que si le montant résultant d'un risque est inférieur à celui résultant d'un autre risque, le montant du capital nécessaire pour couvrir le premier risque serait inférieur à celui nécessaire pour couvrir le second.

**Invariance par translation** : Ceci est motivé par l'interprétation du  $\rho(X)$  comme le besoin de capitaux, c-à-d,  $\rho(X)$  est la quantité de capital qui devrait être ajoutée à la position pour rendre  $X$  acceptable du point de vue du régulateur. Ainsi, si la quantité  $a$  est ajoutée à la position, le besoin de capitaux est augmenté par le même montant. Nous notons que ceci a l'implication suivante :

$$\rho(X - \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0.$$

**Homogénéité positive** : L'omogénéité positive implique que le risque d'un portefeuille est linéairement lié à la taille de ce portefeuille.

**Sous-additivité** : Ce qui signifie fondamentalement que "une fusion ne crée pas un risque supplémentaire".

La sous-additivité indique que si nous combinons deux portefeuilles, le risque n'est pas plus grand que la somme des risques associés à chacun : il capture la notion de la diversification. Si la mesure d'un échange du risque ne satisfaisait pas cette propriété, alors un commerçant pourrait être meilleur en détachant sa position, ouvrant deux comptes et diminuant la couverture obligatoire. La même motivation s'applique aux sociétés, aux banques, aux compagnies d'assurance, etc. Pour le cas de la budgétisation capitale interne, si la mesure de risque satisfait la sous-additivité, alors l'office peut être sûr lorsqu'il fait la division de sa position, le risque total de l'office sera plus petit que la somme des différents risques de ses positions.

Les propriétés qui définissent les mesures cohérentes de risque sont nécessaires pour qu'une mesure de risque soit raisonnable.

**Remarque 1.1** *D'un point de vue pratique, un inconvénient principal de la mesure cohérente de risque est qu'elle élimine l'utilisation des quantiles comme mesures de risque, et elle inclut seulement des espérances.*

**Proposition 1.1** *(Représentation des mesures de risque cohérentes)*

*Supposer que  $\Omega$  est un nombre fini d'éléments et  $X$  est l'ensemble de toutes les variables aléatoires réelles. Une mesure de risque  $\rho$  est cohérente si et seulement s'il existe une famille  $Q$  des mesures de probabilité sur  $\Omega$ , tels que*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in Q} \{E_Q(X)\}.$$

*Où  $E_Q(X)$  est l'espérance de  $X$  sous la mesure de probabilité  $Q$ .*

Par conséquent, pour obtenir une mesure cohérente de risque, premièrement il faut choisir un ensemble de scénarios (différentes mesures de probabilité), et puis calculer la mesure cohérente de risque comme l'espérance maximale de perte sous ces scénarios.

### 1.3.2 Mesure de risque convexe

*Föllmer et Schied (2002)* présentent le concept des mesures convexes de risque, qui satisfont les propriétés de la monotonie, l'invariance par translation et la convexité.

**Définition 1.5** *(Mesure de Risque Convexe)*

*Invariable par translation et monotonique mesure de risque  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$  s'appelle convexe s'il possède la propriété*

$$\text{convexité} : \rho[\lambda X + (1 - \lambda)Y] \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y),$$

*pour n'importe quel risque  $X, Y$  dans  $V$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .*

La propriété de la convexité signifie que la diversification n'augmente pas le risque, c-à-d le risque d'une position diversifiée  $\lambda X + (1 - \lambda)Y$  est inférieure ou égale à la moyenne pondérée du risque individuel.

**Proposition 1.2** *Une mesure cohérente de risque est convexe. Une mesure convexe de risque qui est homogène positive est donc cohérente.*

### Démonstration

Supposons que  $\rho$  est une mesure de risque cohérente.  $\forall \lambda \in [0, 1]$  et  $X, Y$  dans  $V$  on a :

$\rho[\lambda X + (1 - \lambda)Y] \leq \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y)$  à cause de la sous additivité de  $\rho$ .

$\rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y) = \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$  à cause de l'homogénéité positive de  $\rho$ .

D'après l'inégalité et l'égalité précédentes on obtient

$$\rho[\lambda X + (1 - \lambda)Y] \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y),$$

alors  $\rho$  est une mesure de risque convexe.

Une mesure de risque convexe est sous additive. Si l'on ajoute l'homogénéité positive elle devient cohérente.

La classe des mesures cohérentes de risque peut être caractérisée comme une classe des mesures convexes de risque qui satisfont la propriété d'homogénéité positive. Car la classe des mesures de risque convexes est une extension de la classe des mesures de risque cohérentes, elle s'appelle parfois la classe des mesures de risque faiblement cohérente.

### 1.3.3 Mesures de risques monétaires

Le concept de mesure de risque monétaire (monetary measure of risk) donne une interprétation concrète aux mesures de risque : c'est la quantité d'actif qui, ajouté à une position, permet celle-ci acceptable par le régulateur.

#### Définition 1.6 (*Mesure de Risque Monétaire*)

*Une mesure de risque  $\rho$  est dite monétaire si elle est monotone et invariante par translation.*

### 1.3.4 Mesure de risque comonotone additive

Rappelons qu'un vecteur aléatoire  $(X_1; X_2)$ , de fonctions de répartition marginales  $F_1, F_2$ , est un vecteur comonotone s'il existe une variable aléatoire  $U$  de loi uniforme sur  $[0; 1]$  telle que  $(X_1; X_2)$  a la même loi que  $(F_1^{-1}(U); F_2^{-1}(U))$ .

**Définition 1.7** (*Mesure de Risque Comonotone additive*)

On appelle mesure de risque comonotone additive toute mesure de risque  $\rho$  telle que :

$$\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2),$$

pour tout vecteur comonotone  $(X_1; X_2)$ .

Une mesure de risque comonotone additive intègre donc le fait que deux risques comonotones ne se mutualisent pas.

### 1.3.5 Mesure de risque invariante en loi

Une mesure de risque  $\rho$  est dite invariante en loi si elle vérifie l'axiome de l'invariance en loi.

**Définition 1.8** (*Invariance en loi*)

$$\rho(X) = \rho(Y),$$

si  $X$  et  $Y$  ont même distribution.

L'invariance en loi signifie que les positions financières avec la même distribution devraient avoir le même risque.

## 1.4 Mesures de Risque Usuelles

L'objet de ce paragraphe est de présenter les mesures de risque les plus usuelles. Nous sommes intéressés aux mesures suivantes : la Value-at-Risk, les mesures au delà de la VaR, les mesures spectrales et les mesures de distorsion.

### 1.4.1 Value at Risk

La Value at Risk est apparue dans les années 90, en réponse à de nombreux désastres qui ont touché les marchés de capitaux à cette période. Cette mesure de risque est un outil utilisé pour évaluer le risque que peut subir une institution financière. La Value at Risk est une mesure de risque attrayante car elle permet de transformer le risque en un chiffre unique, simple et compréhensible par tous. Pour cette raison cette méthode est aujourd'hui utilisée par la majorité des grandes banques pour quantifier leurs risques *J.P. Morgan (1996)*.

## Définition de la Value at Risk

La Value at Risk, VaR en abrégé, n'est rien d'autre qu'un quantile du risque considéré comme une fonction de perte.

- De nombreuses définitions de la VaR existent, nous en reprenons deux :
- Selon *Hervé (2004)*, la VaR est la perte maximale observable sur un portefeuille avec une probabilité donnée sur un horizon de temps donné.
  - Selon *Jorion (2002)*, la VaR d'un portefeuille ou d'un actif, pour une durée  $T$  et un niveau de probabilité  $\alpha$ , se définit comme le montant de perte attendu de façon que ce montant, pendant la période  $[0, T]$ , ne devrait pas être plus important que la VaR et ceci avec une probabilité de  $(1 - \alpha)$ .

Donc la VaR n'est rien d'autre qu'une perte maximale que peut subir une institution financière sur un horizon de temps donné et un niveau de probabilité prédéfini.

Nous donnons ci-dessous sa définition mathématique.

### Définition 1.9 (*Value-at-Risk*)

La Value-at-Risk (VaR) de niveau  $\alpha$  associée au risque  $X$  est donnée par :

$$VaR(X, \alpha) = \inf\{x | Pr[X \leq x] \geq \alpha\}.$$

Cette définition montre que la VaR a la même définition de  $\alpha$  – *quantile* de la distribution de risque  $X$ , donc on peut établir l'égalité  $VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$  où  $F_X^{-1}$  désigne la fonction quantile de la variable  $X$ .

La fonction quantile est la pseudo-inverse de la fonction de répartition, elle est définie comme suit :

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x | F_X(x) \geq p\}.$$

Une simple explication de la VaR est : le plus petit montant de capital qui permettra de couvrir une position engendrée par le risque  $X$  avec une probabilité  $\alpha$ .

Au plus, la VaR permet de répondre à la question suivante :

## **Combien l'établissement financier peut-il perdre avec une probabilité $\alpha$ pour un horizon de temps $T$ fixé ?**

Les deux éléments ; la période de détention  $T$ , et le seuil de confiance  $\alpha$  sont indispensables pour interpréter la VaR ; les organismes financiers utilisent une VaR à 10 jours mais cet horizon peut atteindre plusieurs mois lorsqu'il s'agit d'obligations et typiquement le niveau de probabilité est  $\alpha = 95\%$  ou  $99\%$ .

### **Caractéristiques de la VaR**

La VaR est une mesure de risque plus populaire et plus utilisée en gestion de risque à cause de ses caractéristiques :

1. *Globalité* : VaR permet une évaluation globale de tous les risques d'un portefeuille.
2. *Universalité* : VaR peut être appliquée à n'importe quel type de portefeuilles.
3. *Contenu Probabiliste* : VaR porte une information probabiliste parce qu'elle fournit le seuil potentiel de perte souffert par le portefeuille dans un niveau de confiance spécifique. Un gestionnaire des risques associe immédiatement de cette façon une quantité de perte à une probabilité d'occurrence.
4. *Unité de mesure* : VaR est exprimée en plus simple et plus transparent en des unités de mesure, à savoir "argent perdu".

En plus de ses caractéristiques la VaR a de nombreux avantages sur les autres méthodes classiques de mesures de risque :

- elle donne une perception simple de l'envergure des pertes possibles.
- elle n'est pas assujettie à la distribution des rendements du portefeuille ou des actifs étudiés contrairement à de nombreux modèles qui se basent sur une distribution normale de ces rendements.
- elle prend en compte l'asymétrie de la distribution des rendements.

### **La non sous additivité de la VaR**

L'un des principaux reproches faits à la mesure VaR est qu'elle n'est pas sous-additive, i.e qu'elle ne rend pas compte du fait qu'un portefeuille

de deux risques mutualisés soit moins risqué à gérer que deux risques pris individuellement.

On peut se démontrer ce résultat à l'aide d'un contre-exemple. Soit  $X$  et  $Y$  deux risques indépendants suivant des lois de Pareto,  $X \sim Par(1, 1)$  et  $Y \sim Par(1, 1)$ .

**Rappelons que :**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  de loi de Pareto est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^p, & \text{si } x > 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa fonction quantile est :

$$F_X^{-1}(\alpha) = \theta[(1 - \alpha)^{-1/p} - 1].$$

On a  $X \sim Par(1, 1)$  et  $Y \sim Par(1, 1)$ . Donc

$$P(X \leq t) = P(Y \leq t) = 1 - \frac{1}{1+t}, \quad t > 0.$$

Nous avons alors

$$VaR(X; \alpha) = VaR(Y; \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} - 1.$$

De plus, on peut vérifier que

$$P[X + Y \leq t] = 1 - \frac{2}{2+t} + 2 \frac{\ln(1+t)}{(2+t)^2}, \quad t > 0.$$

Puisque

$$P[X + Y \leq 2VaR(X; \alpha)] = \alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2} \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) < \alpha.$$

donc  $\forall \alpha$

$$VaR(X; \alpha) + VaR(Y; \alpha) < VaR(X + Y; \alpha).$$

## Faiblesses inhérentes à la VaR

Nous avons mentionné que la VaR a beaucoup d'avantages : considération globale de portefeuille et issue probabiliste,...Mais il y a quelques défauts évidents. Cette mesure de risque indique combien la perte est possible si la perte de queue ne se produit pas. Mais ce qui n'indique pas si la perte de queue se produit. Ceci signifie que si une certaine position aura des pertes extrêmes comparativement élevées, qu'une autre position pas très risquée avec la même VaR, cette dernière position semblera risquée autant que la première. Un autre problème de la VaR qui est plus important : elle ne peut pas être considérée comme bonne mesure de risque parce qu'elle n'est pas cohérente car cette mesure de risque n'a pas vérifié les axiomes de cohérence. Le problème avec la VaR surgit avec la violation de la sous-additivité.

La question qui se pose maintenant est :

*Qu'est-ce que la magnitude de la perte quand la VaR est dépassée ?*

Quelques auteurs proposent d'employer d'autres mesures de risque que la VaR, afin d'obtenir une meilleure caractérisation des événements extrêmes, et fournissent des informations sur la magnitude de la perte quand la VaR est dépassée, ces mesures sont présentées dans la section suivante.

### 1.4.2 Au delà de la VaR

Pour remédier les défauts de la VaR et pour répondre à la question précédente, d'autres mesures ont été proposées. Nous en présentons trois très proches, dont l'idée commune est de quantifier la perte lorsque la VaR est dépassée. Ces mesures de risque sont des mesures extrêmes définies à partir des queues des distributions.

**Définition 1.10** (*Tail Value-at-Risk*)

*La Tail Value-at-Risk (TVaR) de niveau  $\alpha$  associée au risque  $X$  est donnée par :*

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 F_X^{-1}(p) dp.$$

la Tail-VaR est la moyenne des VaR de niveau supérieur à  $\alpha$ . Cette mesure de risque prend en compte les valeurs de la distribution au delà de la VaR au niveau de confiance  $\alpha$  et donc elle donne une information sur l'épaisseur de la queue de distribution.

**Propriété :** La Tail Value-at-Risk est cohérente.

**Définition 1.11** (*Conditionnal Tail Expectation*)

La *Conditionnal Tail Expectation (CTE)* de niveau  $\alpha$  est le montant de la perte moyenne sachant que celle-ci dépasse la VaR au niveau  $\alpha$ , i.e.

$$CTE(X, \alpha) = E(X|X > VaR(X, \alpha)).$$

Cette mesure de risque s'intéresse à la queue de distribution car elle donne des informations sur la distribution de  $X$  au delà de la VaR.

**Définition 1.12** (*Expected Shortfall*)

L'*expected shortfall (ES)* de niveau de probabilité  $\alpha$  est la perte moyenne au delà de la VaR au niveau  $\alpha$ , i. e.

$$ES(X, \alpha) = E[(X - VaR(X, \alpha))_+].$$

Donc ES est l'espérance inconditionnelle des pertes excessives, prenant la valeur zéro quand les pertes sont moins que le quantile.

Ces trois mesures de risque sont liées par les relations suivantes :

**Théorème 1.1** (*Relation entre TVaR, CTE et ES*)

Pour  $\alpha \in (0, 1)$ , nous avons :

$$TVaR(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{1 - \alpha} ES(X, \alpha),$$

$$CTE(X, \alpha) = VaR(X, \alpha) + \frac{1}{1 - F_X(VaR(X, \alpha))} ES(X, \alpha),$$

$$CTE(X, \alpha) = TVaR(X, F_X(VaR(X, \alpha))).$$

Pour ceux qui sont intéressés à la preuve de ce théorème voir *Dhaene et al. (2006)*.

**Remarque 1.2** La TVaR et la CTE coïncident pour des risques de distributions continues, i.e

$$CTE(X, \alpha) = TVaR(X, \alpha).$$

Donc la CTE est cohérente pour des risques continus.

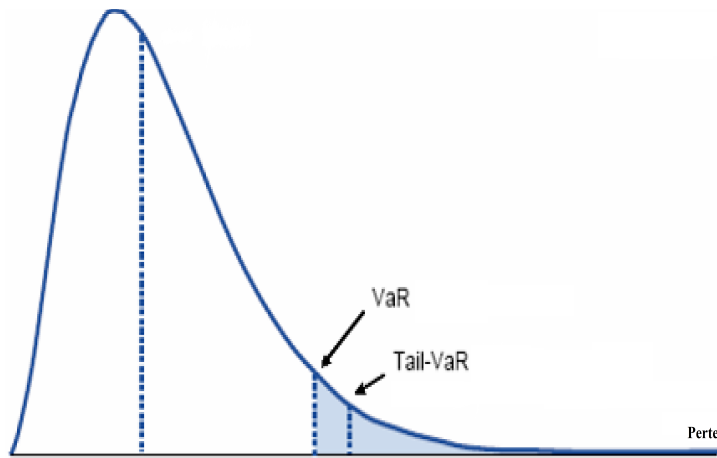


FIG. 1.1 – VaR et Tail-VaR.

La VaR suppose que l'utilisateur n'est pas averse au risque, tandis que TVaR suppose que l'utilisateur a une neutralité envers le risque, ni la VaR, ni la TVaR est conforme à l'utilisateur qui est averse au risque, il préfère de travailler avec une mesure de risque qui tient compte de son aversion au risque, et ceci nous porte à la classe des mesures spectrales de risque.

### 1.4.3 Mesures Spectrale de Risque

La théorie des mesures spectrales de risque financier est un développement intéressant dans le secteur financier, récemment proposée par *Acerbi (2001, 2002, 2003)*. Les mesures spectrales de risque (MSR) sont étroitement liées aux mesures de risque cohérentes car elles possèdent la propriété de sous additivité. Les mesures spectrales de risque sont des mesures de risque attrayantes car elles permettent à l'utilisateur d'obtenir des mesures de risque qui reflètent leur aversion au risque subjectif. Un des dispositifs gentils de MSR est qu'elles relient la mesure de risque elle-même à l'aversion au risque de l'utilisateur.

#### Définition des Mesures Spectrales de Risque

La mesure spectrale de risque est une moyenne pondérée des quantiles d'une distribution de perte, dont les poids dépendent de la fonction d'aversion de risque de l'utilisateur. Les mesures spectrales de risque nous permettent

de lier la mesure de risque à l'attitude de l'utilisateur envers le risque, par exemple si un utilisateur est plus opposé au risque, alors celui la devrait faire face à un plus gros risque, qui est donné par la valeur du MSR.

**Définition 1.13** (*Mesure Spectrale*)

Une MSR est une moyenne pondérée de toute la distribution de perte :

$$M_\phi = \int_0^1 \phi(p)q_p dp, \quad (1.1)$$

où  $q_p$  représente un quantile de la distribution de pertes et  $\phi(p)$  représente la fonction de pondération des pertes. Nous pouvons penser que les MSR est une classe de mesure de risque basée sur le quantile, où chaque mesure individuelle de risque est définie par sa propre fonction de pondération particulière.

**Définition 1.14** (*Spectre admissible*)

Un élément  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée "spectre admissible" si elle vérifie les conditions suivantes :

1. *Non-négativité* :  $\phi(p) \geq 0$  pour tous  $p \in [0, 1]$ ,
2. *Normalisation* :  $\int_0^1 \phi(p) = 1$ ,
3. *Croissance* :  $\phi(p_1) \leq \phi(p_2)$  pour tous  $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$ .

La première condition exige que les poids sont non négatifs, et la seconde exige que la somme des probabilités pondérées devraient être égales à 1. Les deux sont évidentes. Cependant, la troisième condition est une réflexion directe de l'aversion au risque, et exige que les poids attachés à des pertes plus élevées devraient être plus grands que, ou certainement aucun moins que, les poids attachés aux pertes inférieures.

Les poids attachés à des pertes plus élevées dans la mesure spectrale de risque sont ainsi une réflexion directe de l'aversion au risque de l'agent. Pour un agent moins opposé au risque la fonction de spectre augmentera graduellement, et pour un agent très opposés au risque cette fonction augmentera rapidement.

**Remarque 1.3** Si  $X \leq 0$ , alors  $q_p \leq 0$  et donc  $M_\phi \leq 0$ . C'est-à-dire, une variable négative signifie aucun risque au sens du mesure spectrale.

**Théorème 1.2** (MSR et l'admissibilité du spectre)

Soit  $M_\phi$  définie par :

$$M_\phi = \int_0^1 \phi(p) q_p dp,$$

si  $\phi(p)$  est un spectre admissible de risque alors  $M_\phi$  est une mesure de risque.

La fonction  $\phi(p)$  s'appelle la fonction d'aversion de risque et en fait elle assigne différents poids aux différents niveaux de confiance ( $p$ ) de la queue droite. N'importe quel investisseur raisonnable peut exprimer son aversion subjective au risque en dessinant un profil différent pour la fonction de poids.

**Théorème 1.3** (Cohérence des MSR)

La mesure spectrale de risque  $M_\phi$  définie par :

$$M_\phi = \int_0^1 \phi(p) q_p dp, \quad \text{pour } \phi \in [0, 1]$$

est une mesure de risque cohérente.

Ce théorème montre que toute MSR est une mesure de risque cohérente. Mais dans le cas contraire, si  $M_\phi$  est cohérente quelle condition doit  $\phi$  vérifier ?

### Nécessité de l'admissibilité du $\phi$ pour la cohérence

Maintenant on pose la question suivante :

*L'admissibilité est-elle également nécessaire pour la cohérence ?*

Comme exemple significatif nous considérons le cas de la VaR :

La VaR place tout son poids sur un quantile simple qui correspond à un niveau de confiance choisi, et ne place aucun poids sur tous autres, c-à-d, avec la mesure de risque VaR,  $\phi(p)$  prend la forme dégénérée d'une fonction de Dirac delta qui donne aux résultats  $p = \alpha$  un poids infini et donne à chaque autres résultats un poids nul.

Pour cette raison, le théorème 1.2 ne s'applique pas puisque  $\phi$  n'est pas une fonction croissante dans  $p$  et donc ce n'est pas un spectre admissible de risque. En effet, il est bien connu que la VaR ne peut pas être une mesure de risque, en raison de son manque de sous-additivité. Cette interprétation de la non-cohérence de la VaR prouve que, dans la classe des mesures que nous les explorons, la VaR est peut-être moins appropriée puisque son  $\phi$  n'est pas croissante. L'interprétation également illustrée est le fait que la VaR ne tient pas compte de toutes les pertes associées à la queue, se concentrant seulement sur leur valeur de seuil. Sa fonction d'aversion de risque montre l'attitude d'un investisseur incohérent qui est seulement préoccupé par le niveau de seuil de ses plus mauvaises pertes d'  $\alpha 100\%$  et la néglige à toutes les pertes elles-mêmes. Cet exemple impose notre croyance que si  $\phi$  n'est pas un spectre admissible de risque donc  $M_\phi$  ne puisse pas être une mesure de risque cohérente. Ceci implique que la clef de cohérence est qu'une mesure de risque doit donner à des pertes plus élevées, au moins le même poids que les pertes plus basses.

**Théorème 1.4** (*Cohérence des MSR et l'admissibilité de spectre*)

*La mesure de risque  $M_\phi$  définie par :*

$$M_\phi = \int_0^1 \phi(p) q_p dp, \quad \text{pour } \phi \in [0, 1]$$

*est une mesure de risque cohérente si et seulement si  $\phi(p)$  est un spectre admissible de risque.*

De cette classe des mesures de risque (MSR), l'investisseur a la possibilité d'exprimer son aversion au risque par le choix de  $\phi$ . Cependant, il doit imposer la condition de l'admissibilité de  $\phi$  s'il veut que sa mesure soit cohérente.

Spécifiquement, une mesure spectrale peut être associée à une mesure de risque cohérente avec deux propriétés additionnelles ; l'invariance en loi et l'additivité comonotone.

**Proposition 1.3** *Les mesures spectrales de risque sont toutes mesures cohérentes  $\rho$  qui possèdent les deux conditions additionnelles suivantes :*

1. *Invariance en loi :  $\rho(X) = \rho(Y)$  si  $F_X(\cdot) = F_Y(\cdot)$ ,*
2. *Additivité comonotone :  $\rho(X+Y) = \rho(X)+\rho(Y)$   $X, Y$  comonotonic.*

Les deux conditions sont importantes, et les mesures de risque cohérentes qui ne les satisfont pas ne sont probablement pas intéressantes.

Une question qui se pose maintenant est :

*Est-il possible de trouver des mesures cohérentes basées sur la statistique de la forme (1.1) ?*

### Exemples des Mesures Spectrales de Risque

Pour obtenir une mesure spectrale de risque, l'utilisateur doit spécifier une forme particulière pour sa fonction d'aversion de risque. Cette décision est subjective, mais peut être guidée par la littérature économique.

**Exemple 1** : Il est facile de vérifier que TVaR est un cas particulier de (1.1). En effet, sa fonction d'aversion de risque est définie par :

$$\phi(p) = \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{I}_{[\alpha,1]}(p),$$

L'utilisation de la mesure TVaR implique de prendre une moyenne de quantiles dans lesquels les quantiles de queue ont un poids égal et les quantiles de non-queue ont un poids nul. Cependant, le fait que la TVaR donne toutes les pertes de queue des poids égaux suggère qu'un utilisateur qui utilise cette mesure a une neutralité envers le risque à la marge entre les meilleurs et les plus mauvais résultats de queue, et c'est contradictoire avec l'aversion au risque.

**Exemple 2** : *Down, Cotter et Sorwar (2008)* ont défini la fonction de pondération exponentielle comme suit :

$$\phi(p) = \frac{ke^{-k(1-p)}}{1-e^{-k}},$$

où  $k$  ( $k > 0$ ) est le coefficient absolu d'aversion de risque d'utilisateur. Cette fonction vérifie les conditions exigées d'une mesure spectrale de risque, elle est également attrayante parce que c'est une fonction simple qui dépend d'un seul paramètre, le coefficient absolu d'aversion de risque, dont sa valeur reflète l'aversion au risque de l'utilisateur. Cette fonction de pondération a une forme gentille et elle augmente exponentiellement avec  $p$ .

**Exemple 3** : L'espérance mathématique est une MSR qui correspond au cas où  $\phi(p) = 1$  alors

$$M_\phi = \int_0^1 \phi(p) q_p dp = \int_0^1 q_p dp = E(X).$$

**Exemple 4** : Différentes fonctions d'aversion de risque produisent différentes mesures spectrales de risque. Plusieurs genres de fonctions d'aversion au risque sont énumérés comme suit :

1. Dual-power :

$$\phi_\nu(p) = \nu p^{\nu-1}.$$

2. Proportional Hazard :

$$\phi_\gamma(p) = \frac{1}{\gamma} (1-p)^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

3. Transformée de Wang :

$$\phi_\alpha(p) = e^{-\alpha \phi^{-1}(p) - \alpha^2/2}.$$

Une classe équivalente des mesures spectrales de risque définies dans la littérature de l'assurance et la finance qui utilise les fonctions Dual-power, Proportional Hazard, la Transformée de Wang en d'autre terme. Cette famille de mesure de risque connues par "mesure de risque de distorsion".

#### 1.4.4 Mesures de Risque de Distorsion

Les mesures de risque de distorsion *Wang (1995, 1996)*, *Wang et Young (1998)* et *Wang et al. (1997)* utilisent l'espérance sur des transformations de la distribution d'une variable aléatoire. Le but de cette transformation est de donner une importance de la queue de la distribution de cette variable aléatoire. Cette transformation ou en d'autre terme cette distorsion de la fonction de répartition sera effectuée à l'aide d'une fonction qui s'appelle la fonction de distorsion.

**Définition 1.15** (*Fonction de distorsion*)

Nous dirons que  $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  est une fonction de distorsion si :

1.  $g(0) = 0$  et  $g(1) = 1$ .
2.  $g$  est une fonction croissante.

La transformation  $F_X^*(x) = g(S_X(x))$  définit une distribution de probabilité distordue, où  $S_X(x) = \bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$  est la fonction de répartition décumulative.

**Définition 1.16** (*Mesure de distorsion*)

La mesure de risque de distorsion  $\rho_g(X)$  utilise l'espérance sous la probabilité distordue  $F_X^*(x) = g(S_X(x))$ , elle est définie par

$$\rho_g(X) = - \int_{-\infty}^0 (1 - g(S_X(x))) dx + \int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx. \quad (1.2)$$

La figure ci-après donne une représentation de l'espérance et de la mesure de risque de distorsion à l'aide d'une fonction de distorsion  $g$ .

**Remarque 1.4** *L'espérance est un cas particulier de mesure de risque de distorsion avec la fonction de distorsion d'identité  $g = x$ .*

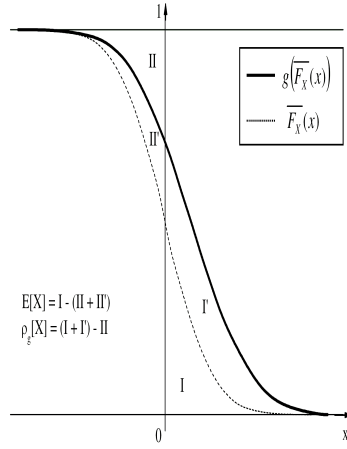


FIG. 1.2 – L’espérance et la mesure de risque de distorsion.

On peut remarquer de ce graphique que la mesure de risque de distorsion est supérieure que l’espérance mathématique.

On s’intéresse dans la suite de notre mémoire au cas où  $X$  est non-négative, d’après (1.2) on obtient la forme d’une mesure de risque de distorsion pour une variable positive :

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx.$$

La mesure de risque de distorsion ajuste la véritable mesure de probabilité de donner plus de poids aux événements de plus gros risque.

**Remarque 1.5** *En terme d’assurance  $\rho_g(X)$  est la prime de Wang. La prime d’assurance est le prix que le preneur d’assurance doit payer pour pouvoir bénéficier de la couverture d’assurance en cas de risque.*

**Proposition 1.4** *(Propriétés d’une mesure de distorsion)*

*La mesure de risque de distorsion  $\rho_g$  a les propriétés suivantes :*

1.  $X \leq Y$  implique  $\rho_g(X) \leq \rho_g(Y)$ .
2.  $\rho_g(\lambda X) = \lambda \rho_g(X)$  pour toute positive  $\lambda$ .  $\rho_g(c) = c$  quelque soit un risque constant  $c$ .

3. Si les risques  $X$  et  $Y$  sont comonotones, alors  $\rho_g(X + Y) = \rho_g(X) + \rho_g(Y)$ .
4. Si  $g$  est concave alors  $\rho_g(X + Y) \leq \rho_g(X) + \rho_g(Y)$ .
5. Si  $g$  est convexe alors  $\rho_g(X + Y) \geq \rho_g(X) + \rho_g(Y)$ .

### Distorsion Concave et Mesure de Risque de Distorsion Cohérente

Wirch et Hardy (2001) ont prouvé qu'une mesure de risque basée sur la fonction de distorsion est cohérente si et seulement si la fonction de distorsion est concave.

**Théorème 1.5** Si  $g$  est une fonction de distorsion concave, alors la mesure de risque de distorsion  $\rho_g(X)$  est une mesure de risque cohérente.

La fonction de distorsion  $g$  est concave si :

$$g(b + x) - g(a + x) \leq g(b) - g(a), \quad \forall 0 < a < b \quad \text{et} \quad x > 0.$$

Donc la sous-additivité d'une mesure de risque de distorsion est vérifiée si et seulement si la fonction de distorsion  $g$  est concave.

### Exemples des Mesures de Risque de Distorsion

Pour faire un bon usage des mesures de distorsion, nous choisirions une "bonne" fonction de distorsion, et il y a beaucoup de fonctions de distorsion à choisir. Les propriétés que nous pourrions rechercher dans une "bonne" fonction de distorsion incluent la continuité, la concavité, et le différentiabilité; de ces dernières, la continuité est nécessaire et suffisante pour la mesure de risque de distorsion d'être cohérente, et la concavité est suffisante.

**Exemple 1** : La VaR peut s'avérer une mesure de risque de distorsion obtenue par l'utilisation de la fonction de distorsion :

$$g(S_X(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq S_X(x) < 1 - \alpha, \\ 1 & \text{si } 1 - \alpha \leq S_X(x) \leq 1. \end{cases}$$

De sorte que

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx = \int_0^{VaR(X, \alpha)} dx = VaR(X, \alpha).$$

C'est une fonction pauvre parce qu'elle n'est pas continue, en raison du saut à  $S_X(x) = 1 - \alpha$ ; et puisqu'elle n'est pas continue, elle n'est pas cohérente. Ainsi, de la perspective de la théorie de distorsion, la VaR est une mesure de risque pauvre parce qu'elle est basée sur une "mal comportée" de fonction de distorsion.

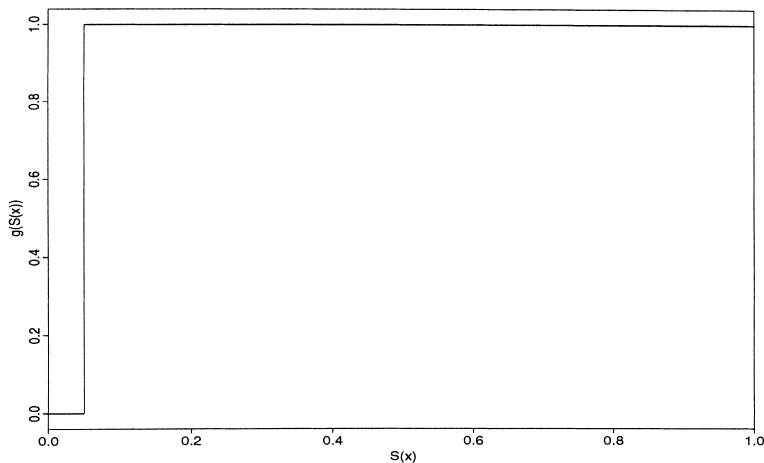


FIG. 1.3 – Fonction de disrorsion de la VaR.

Cette figure montre que  $g$  est une fonction de distorsion valide puisque  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$  et  $g$  est une fonction croissante mais  $g$  n'est pas concave.

**Exemple 2** : TVaR est une mesure de risque de distorsion basée sur la fonction de distorsion :

$$g(S_X(x)) = \begin{cases} \frac{S_X(x)}{1-\alpha} & \text{si } 0 \leq S_X(x) < 1 - \alpha, \\ 1 & \text{si } 1 - \alpha \leq S_X(x) \leq 1. \end{cases}$$

Cette fonction de distorsion est concave, ce qui implique que la TVaR est cohérente.

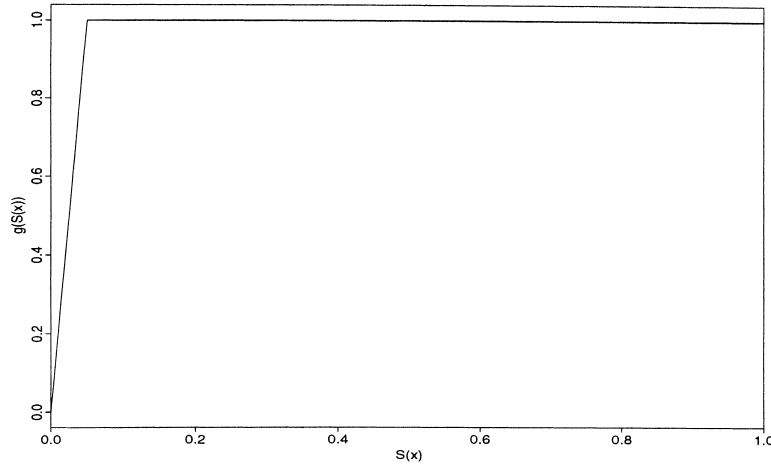


FIG. 1.4 – Fonction de distorsion de la TVaR.

Cette figure montre que  $g$  est une fonction de distorsion (croissante et  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ ) en plus, cette fonction est concave.

**Exemple 3** : Proportional Hazard Transform (PHT) a été intensivement étudié par *Wang (1995, 1996)*, principalement dans le cadre d'un principe prime. Sa fonction de distorsion est définie pour le paramètre  $\gamma$  par :

$$g(S_X(x)) = (S_X(x))^{1/\gamma}, \quad \text{pour } \gamma \geq 1.$$

Le paramètre  $\gamma$  est appelé l'indice d'aversion au risque; de plus grandes valeurs de ce paramètre placent plus de poids sur la queue droite de la distribution de perte.

La mesure de risque associée à cette fonction de distorsion (PHT) est donnée par :

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} (S_X(x))^{1/\gamma} dx, \quad \text{pour } \gamma \geq 1$$

Quand  $\gamma = 1$ ,  $\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} (S_X(x)) dx = E(X)$ .

Cette mesure est cohérente puisque sa fonction de distorsion est concave.

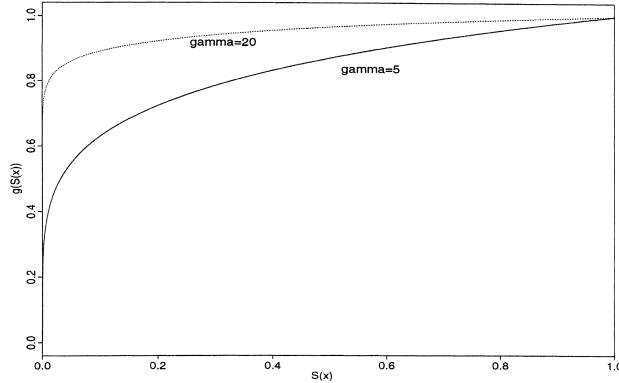


FIG. 1.5 – Fonction de distorsion de la PHT.

La fonction illustrée dans cette figure montre que  $g$  est une fonction de distorsion concave. À chaque élévation du paramètre  $\gamma$  nous obtenons plus de distorsion.

**Exemple 4** : La fonction de distorsion de la transformée de Wang (WT) *Wang (2002)* est définie par :

$$g(S_X(x)) = \Phi[\Phi^{-1}(S_X(x)) + \lambda],$$

où  $\Phi$  est la fonction de distribution normale standard et  $\lambda = \Phi^{-1}(\alpha)$ , pour un seuil  $\alpha$ .

La mesure de risque WT est :

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} \Phi[\Phi^{-1}(S_X(x)) + \lambda] dx.$$

Cette mesure est cohérente puisque sa fonction de distorsion est concave.

La transformée de Wang est particulièrement adaptée dans le cas de distributions gaussiennes, log-normales.

Les mesures de WT sont supérieures à TVaR parce qu'elles tiennent compte des pertes au-dessous de la VaR, et tiennent mieux compte également des pertes extrêmes.

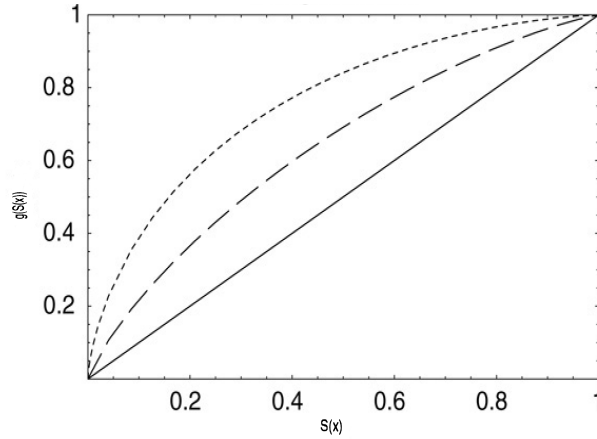


FIG. 1.6 – Fonction de distorsion de la WT pour  $\lambda = 0, 0.5$  et  $1$ .

Ce graphique montre que la WT est une fonction de distorsion concave. Une plus grande valeur du paramètre  $\lambda$  donne plus de distorsion.

### Equivalence entre les Mesures de Risque de Distorsion et les Mesures Spectrales de Risque

Dans cette partie, nous prouvons le rapport entre les mesures de distorsion et les mesures spectrale.

**Théorème 1.6** *Soit  $g$  est une fonction de distorsion concave, et soit  $\rho_g$  la mesure de distorsion associée. Alors  $\phi(u) = g'(1 - u)$  définit une mesure spectrale  $M_\phi$  tels que :*

$$M_\phi(X) = \rho_g(X).$$

où  $u = 1 - S_X(x)$ .

Donc les mesures de distorsion peuvent être réécrites sous forme d'une mesure spectrale comme suit :

$$\rho_g(X) = \int_0^1 g'(1 - u)q_u du.$$

**Exemples :** Nous donnons ci-dessous deux exemples qui montrent la relation qui existe entre les mesures de distorsion et les mesures spectrales :

1. **TVaR** : Sa fonction de distorsion est donnée par :

$$g(S_X(x)) = \begin{cases} \frac{S_X(x)}{1-\alpha} & \text{si } 0 \leq S_X(x) < 1 - \alpha, \\ 1 & \text{si } 1 - \alpha \leq S_X(x) \leq 1. \end{cases}$$

La fonction de poids de la mesure spectrale TVaR est obtenue par

$$g'(1-u) = \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{I}_{[\alpha,1]}(u) = \phi(u).$$

2. **PHT** : La fonction de distorsion de la PHT définie par

$$g(S_X(x)) = (S_X(x))^{1/\gamma}.$$

On obtient par la dérivée ci-dessous la fonction de poids de la mesure spectrale PHT

$$g'(1-u) = \frac{1}{\gamma} (1-u)^{\frac{1}{\gamma}-1} = \phi(u).$$

## Chapitre 2

# Théorie des Valeurs Extrêmes et Modélisation avec les Lois Stables des Risques Financiers

La gestion du risque est une gestion des événements inattendus. Avec la distribution gaussienne, ces événements ont un caractère "prévisible" pour cette raison l'inférence gaussienne n'est pas un outil pour l'étude des risques, mais la théorie des valeurs extrêmes a l'avantage pour cette étude car elle s'intéresse aux événements rares. Même si la théorie des valeurs extrêmes est liée aux recherches dans le domaine des queues épaisses, cette théorie n'est pas un outil de modélisation du caractère leptokurtique d'une distribution.

La modélisation du caractère leptokurtique d'une distribution est basée sur des lois  $\alpha$  stables de Lévy, constituant une classe riche de lois de probabilité capables de représenter différentes asymétries et des queues lourdes.

Notre chapitre est composé de trois sections :

Dans la première section, nous présentons la théorie des extrêmes univariée, nous sommes intéressés à la définition des statistiques d'ordre, distribution généralisée des valeurs extrêmes (GEV), distribution généralisée de Pareto (GPD) et l'estimation semi-paramétrique de l'indice de queue.

Dans la deuxième section nous exposons la théorie des valeurs extrêmes bivariée, c'est une généralisation des résultats obtenue dans le cas univarié.

Dans la troisième section nous traitons la modélisation des queues lourdes (loi stable) qui a un grand intérêt dans la finance, nous donnons sa définition, une interprétation de ses paramètres et ses propriétés.

## 2.1 Théorie des Valeurs Extrêmes Univariée

La théorie des valeurs extrêmes univariée permet d'évaluer les événements rares et les pertes associées à leur apparition. De plus cette théorie a une importance particulière du fait qu'elle s'intéresse directement à la queue de la loi.

Les extrêmes d'une distribution peuvent être sélectionnés suivant deux approches différentes. La série de maxima de blocs de valeurs suffisamment larges converge asymptotiquement vers la loi généralisée des valeurs extrêmes (GEV) *Costinot et al. (2000)*, *Longin (1998)*, de *Haan et Ferreira (2006)*, *Raggad (2009)* et *Embrechets et al. (1997)*. La série des valeurs qui dépasse un seuil assez haut tend vers la loi généralisée de Pareto (GPD) *Këllezi et Gilli (2000)*, *Pierre (2010)* et *Benlagha et al. (2009)*. Ces deux lois constituent les fondements de la modélisation des valeurs extrêmes et de la caractérisation de leurs fréquences d'occurrence. L'utilisation des lois des valeurs extrêmes repose sur des propriétés des statistiques d'ordre et sur des méthodes d'extrapolation.

### 2.1.1 Statistique d'ordre

Les statistiques d'ordre sont très instrumentales dans la théorie des valeurs extrêmes parce qu'elles (plus avec précision la supérieure) fournissent des informations sur la queue droite de la distribution.

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un échantillon de  $n$  variables aléatoires i.i.d. Ordonnons cet échantillon par ordre croissant :

$$X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}.$$

Le vecteur  $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$  est appelé l'échantillon ordonné et  $X_{i,n}$  est la  $i^{\text{ème}}$  statistique d'ordre (ou statistique d'ordre  $i$ ).

#### **Définition 2.1** (*Statistique d'ordre*)

*Les statistiques d'ordre concernant un échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  sont les  $X_i$  disposés dans l'ordre croissant, elles sont dénotées par  $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$  et pour  $k = 1, 2, \dots, n$  la variable aléatoire  $X_{n-k+1,n}$  s'appelle la statistique d'ordre supérieure de la  $k^{\text{ème}}$  ordre.*

particulièrement, les statistiques d'ordre :

$$X_{1,n} = \min(X_1, \dots, X_n) \text{ et } X_{n,n} = \max(X_1, \dots, X_n),$$

sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de l'échantillon et s'appellent les statistiques d'ordre extrêmes (statistiques d'ordre du minimum et maximum respectivement) ou simplement extrémités.

L'étude du comportement de ses deux statistiques est l'objet de la théorie des valeurs extrêmes dont le but de la section suivante, d'où nous nous bornerons à étudier le comportement de  $X_{n,n}$  puisqu'on s'intéresse dans notre étude à la plus grande perte.

### 2.1.2 Distribution généralisée des valeurs extrêmes (GEV)

La théorie des valeurs extrêmes a pour but d'étudier la loi du maximum d'une suite des variables aléatoires réelles même si, et spécialement si, la loi du phénomène n'est pas connue.

Nous supposons données  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de fonction de répartition  $F$  définie par :

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Pour étudier le "comportement" des événements extrêmes, nous considérons la variable aléatoire  $M_n$  qui représente la plus grande perte observée sur les  $n$  pertes observées  $X_1, \dots, X_n$  :

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Mais le problème surgit dans la connaissance de la loi de la variable aléatoire  $M_n$ . Puisque les v.a sont i.i.d on obtient la loi du maximum :

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x) \\ &= [F_X(x)]^n. \end{aligned}$$

La loi du maximum dépend essentiellement des propriétés de la loi de la variable  $X$  pour de grandes valeurs de  $x$ .

En pratique, la loi de la variable  $X$  n'est pas connue avec précision. En effet, il n'existe ni théorie statistique, ni théorie financière, ni modèle économique qui spécifie la loi statistique de  $X$ . De ce fait, si cette loi n'est pas connue, la loi exacte du maximum ne l'est pas non plus. Les formules exactes de la loi du maximum et de sa loi limite ne sont donc pas très intéressantes. Pour ces raisons, il est intéressant de considérer les comportements asymptotiques du maximum convenablement normalisé.

Le théorème de Fisher-Tippett est un résultat très connu dans la théorie des valeurs extrêmes pour caractériser la loi de distribution des extrêmes.

### **Théorème limite de Fisher-Tippett**

Nous donnons premièrement la définition des classes d'équivalences sur l'ensemble des fonctions de répartition (sur les distributions des probabilités).

#### **Définition 2.2** (*Lois de même type*)

*On dit que deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  sont de même type s'il existe des constantes réelles  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} aX + b$  i.e. si  $F$  et  $H$  sont des lois respectives des variables  $X$  et  $Y$  alors on a  $F(ax + b) = H(x)$ .*

La question qui se pose maintenant est :

*Peut-on trouver des constantes de normalisation  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  et une loi non-dégénérée de loi  $H$  telle que :*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = (F(a_n x + b_n))^n \xrightarrow{\mathcal{L}} H(x)?$$

La solution de ce problème a été trouvée par Fisher et Tippett dans son théorème Fisher et Tippett qui est l'un des résultats fondamentaux dans la théorie des valeurs extrêmes *Fisher et Tippett (1928)*.

#### **Théorème 2.1** (*Fisher-Tippett ou théorème des 3 types extrêmes*)

*S'il existe deux suites de constantes de normalisation avec  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  et une loi non-dégénérée de loi  $H$  telle que :  $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} H$ , alors  $H$  appartient à l'un des trois types suivants (I, II, ou III)*

Type I : Gumbel

$$\Lambda(x) = \exp\{-\exp(-x)\}, x \in \mathbb{R}$$

Type II : Fréchet

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-x^{-\alpha}\}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Type III : Weibull

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{-\alpha}\}, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ce théorème donne un résultat très intéressant : quelle que soit la loi limite de la variable  $X$ , la loi limite des extrêmes a toujours la même forme.

Nous pouvons caractériser les trois types de distribution précédentes par une distribution unique

$$H_\xi = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x))^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{si } \xi \neq 0, 1 + \xi x > 0 \\ \exp(-\exp(-x)), & \text{si } \xi = 0, -\infty \leq x \leq \infty \end{cases}$$

où  $H$  est une fonction de répartition non-dégénérée. Cette loi est la loi standard des extrêmes.

En introduisant les paramètres de localisation  $\mu$  et de dispersion  $\sigma$  on obtient la forme la plus générale de la distribution des valeurs extrêmes, notée GEV (Generalized Extreme Value Distribution).

Elle correspond à :

$$H_{\xi, \mu, \sigma} = \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right), \xi \neq 0, 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0.$$

où  $\xi$  est un paramètre de forme (shape parameter) encore appelé indice des valeurs extrêmes ou indice de queue. Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important. On parle alors de distributions à «queues épaisses».

Trois cas sont possibles :

Le cas  $\xi = 0$  correspond à la loi Gumbel.

Le cas  $\xi > 0$  correspond à la loi de Fréchet de paramètre  $\alpha = \frac{1}{\xi}$ .  
 Le cas  $\xi < 0$  correspond à la loi de Weibull de paramètre  $\alpha = -\frac{1}{\xi}$ .

La densités de ces lois est présentée sur la figure 1.1.

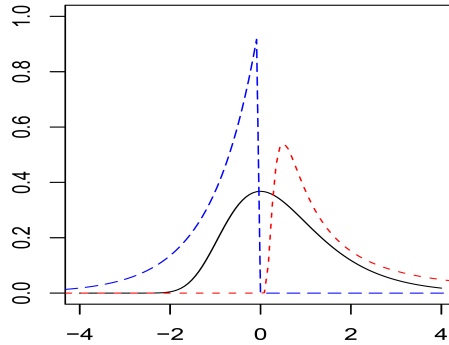


FIG. 2.1 – Fonctions de distribution du Gumbel (en noire), de Fréchet (en rouge) et de Weibull (en bleu).

La loi de Fréchet est la loi la plus utilisée dans les domaines de la finance, car cette loi s'intéresse aux grandes variations, et leur utilisation n'est pas seulement dans la finance, par exemple si nous avons des variations extrêmes dans n'importe quel domaine, il faut donc travailler avec une loi qui donne une importance à ces données, la loi de Fréchet est là pour représenter ce genre de données. Les lois de Weibull et Gumbel sont des lois écartées dans l'utilisation dans la finance pour les données extrêmes.

### Variation régulière

La tâche de déterminer à quel type appartient la distribution de limite est étroitement liée au concept des fonctions à variation régulière dont les propriétés sont fréquemment employées dans l'analyse de la valeur extrême, en plus ces fonctions serviront dans l'étude des estimateurs.

**Définition 2.3** (*Fonction à variation régulière*)

Une fonction mesurable  $U$  est dite à variation régulière d'indice  $\alpha$  si et seulement si :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\alpha, \quad \forall t > 0.$$

si  $\alpha = 0$ , la fonction  $U$  est dite à variation lente.

Ainsi, les fonctions :  $x^\alpha$ ,  $x^\alpha \ln(1+x)$  et  $(x \ln(1+x))^\alpha$  sont à variation régulière d'indice  $\alpha$  et les fonctions  $\ln(1+x)$ ,  $\ln \ln(1+x)$  sont à variation régulière lente.

Nous donnons ci-dessous quelques propriétés importantes :

**Proposition 2.1** (*Propriétés des fonctions à variations régulières*)

1. Si  $U$  est à variation régulière d'indice  $\alpha$ , alors  $U^{-1}$  est à variation régulière d'indice  $\alpha^{-1}$ .
2. Si  $U$  est à variation régulière d'indice  $\alpha$ , alors  $U(1/x)$  est à variation régulière d'indice  $-\alpha$ .
3. Si  $U$  est à variation régulière alors  $U(x) = x^\alpha L(x)$ , où  $L(x)$  est à variation régulière lente.

Dans les applications, on s'intéresse aux distributions dont les queues sont à variation régulière.

**Domaine d'Attraction**

Dans certains cas, il est possible d'identifier la distribution de  $M_n$  si l'on connaît explicitement la distribution  $F$  des variables aléatoires i.i.d  $X_i$ . Mais dans l'autre cas si l'on ne connaît pas la distribution  $F$  des  $X_i$  comment pouvons nous identifier la loi de  $M_n$ ? Ce problème est épineux dans les applications, et pour le résoudre, nous essayons de répondre à la question suivante :

*Etant donnée une distribution de valeurs extrêmes  $H_\xi$ , sous quelles conditions la fonction de distribution  $F$  des maxima  $M_n$  normalisés converge-t-elle faiblement vers  $H_\xi$  ?*

La réponse à cette question est équivalente à la recherche du domaine d'attraction.

**Définition 2.4** (*Domaine d'Attraction*)

On dit qu'une distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction de la distribution des valeurs extrêmes  $H_\xi$  ( $F \in \mathcal{D}(H_\xi)$ ) s'il existe des suites réelles  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  telles que :

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} H \quad \text{telle que } n \longrightarrow \infty.$$

A l'aide de cette définition, on peut aisément vérifier si une distribution appartient au domaine d'attraction de l'une des trois distributions des valeurs extrêmes.

La majorité des lois de probabilité usuelles appartiennent à l'un des trois domaines d'attraction suivante :

- $\mathcal{D}(\Lambda(x))$  : Exponentielle, Gaussienne, Lognormale, Gamma,..etc.
- $\mathcal{D}(\Phi_\alpha(x))$  : Cauchy, Paréto,  $\alpha$ -stable( $\alpha < 2$ ), Student,..etc.
- $\mathcal{D}(\Psi_\alpha(x))$  : Uniforme, Beta,..etc.

Donc les trois distributions des valeurs extrêmes sont différentes en terme de domaine d'attraction :

1. Dans le domaine d'attraction de la distribution Gumbel, nous rencontrons des distributions à queue fine.
2. Dans le domaine d'attraction de la distribution Fréchet, nous rencontrons des distributions à queue lourde.
3. Dans le domaine d'attraction de la distribution Weibull, nous rencontrons des distributions sans queue.

La GEV est une approche basée sur la série de maxima de blocs, donc cette méthode a l'inconvénient qu'une seule observation entre dans la modélisation; cela conduit à une perte d'information contenue dans les autres grandes valeurs de l'échantillon. Contrairement à la GEV, la GPD est apparue pour remédier les défauts de la GEV, cette méthode a l'avantage que plusieurs observations qui dépassent un certain seuil seront présentes dans la modélisation, pour cette raison nous les introduisons dans la section suivante.

### 2.1.3 Distribution généralisée de Pareto (GPD)

Ce second volet de la TVE appelé méthode POT (Peaks Over Threshold) consiste à utiliser les observations qui dépassent un certain seuil détermi-

niste et plus particulièrement les différences entre ces observations et le seuil, appelées excès.

Les excès au-delà du seuil  $u$  sont définis comme l'ensemble des variables aléatoires  $Y$  tel que :  $y_j = x_j - u, \quad x_j > u$ .

On appelle right-end point ou point terminal de la fonction de répartition  $F$ , le point  $x_F$  tel que :

$$x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

La figure ci-dessous représente le principe de la méthode des excès.

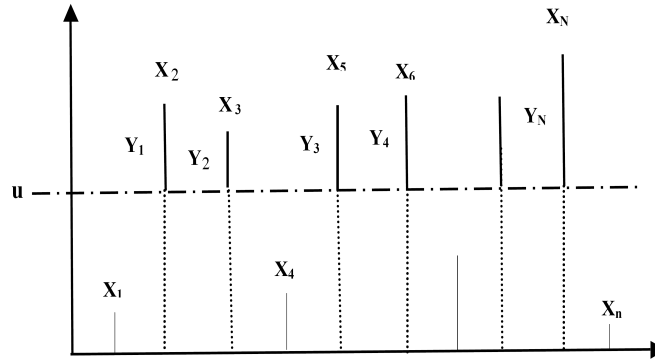


FIG. 2.2 – Méthode des excès.

On cherche à partir de la distribution  $F$  de  $X$  à définir une distribution conditionnelle  $F_u$  par rapport au seuil  $u$  pour les variables aléatoires dépassant ce seuil.

**Définition 2.5** (*La distribution conditionnelle des excès*)

*La distribution conditionnelle des excès de perte (POT) par rapport à un seuil élevé  $u$  est définie par*

$$F_u(y) = P(X - u \leq y / X > u); \quad 0 \leq y \leq x_F - u.$$

La fonction de distribution des excès représente la probabilité qu'une certaine perte dépasse le seuil  $u$  d'au plus une quantité  $y$ , sachant qu'elle

dépasse  $u$ . Cette fonction s'écrit sous la forme :

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

L'objectif de la méthode POT est de déterminer par quelle loi de probabilité on peut approcher cette distribution conditionnelle. Le théorème de Balkema-de Haan-Pickands ci-après précise la distribution conditionnelle des excès lorsque le seuil déterministe tend vers le point terminal.

**Théorème 2.2** *(de Balkema-de Haan-Pickands)*

*Pour une certaine classe de distributions, la GPD est la distribution limite de la distribution des excès lorsque le seuil tend vers  $x_F$ . Formellement, nous pouvons trouver une fonction positive mesurable  $\sigma(u)$  telle que*

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \sigma(u)}(x)| = 0$$

*si, et seulement si,  $F \in \mathcal{D}(H_\xi)$ .*

Ce résultat de Balkema-de Haan-Pickands montre que, lorsque nous avons des données issues d'une distribution inconnue, il est possible d'approximer la distribution au-delà d'un certain seuil (assez grand) par une distribution de Pareto généralisée.

$G_{\xi, \sigma(u)}(x)$  est la fonction de répartition de la distribution de Pareto généralisée (GPD) de paramètres  $\xi$  et  $\sigma(u)$  définie par :

$$G_{\xi, \sigma(u)}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{y}{\sigma(u)})^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\sigma(u)}), & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Le paramètre  $\xi$  est lié au caractère leptokurtique de la fonction de distribution et  $\sigma(u)$  est un paramètre d'échelle.

Ce théorème établit le lien entre le paramètre de la loi limite du maximum et le comportement limite des excès au-delà d'un seuil assez grand. En particulier, l'indice de queue  $\xi$ , obtenu dans l'étude du maximum, est identique au paramètre de la loi de Pareto généralisée.

### 2.1.4 Approche Semi-Paramétrique de L'indice de Queue

Cette approche est liée à la notion de domaine d'attraction. En effet, les méthodes d'estimation basées sur cette approche ont pour but d'estimer seulement l'indice des valeurs extrêmes puisque c'est ce paramètre qui détermine la forme de la queue de la distribution. Ces techniques permettent donc de déterminer la distribution asymptotique du maximum par le biais du théorème de Fisher-Tippet. En pratique, on ne peut pas considérer la plus grande observation, de l'échantillon, toute seule ; on considère donc les  $k$  plus grandes observations qui caractérisent la distribution du maximum. Pour une meilleure précision,  $k$  doit être intermédiaire c'est-à-dire, ni trop petit ni trop grand, donc l'idée est d'avoir  $k \rightarrow \infty$  et  $k/n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Le choix de  $k$  n'est pas une tâche facile. Plusieurs méthodes ont été développées, pour le choix de  $k$ , mais aucune n'est adoptée d'une manière générale.

Dans la littérature de la théorie des valeurs extrêmes on trouve plusieurs techniques semi-paramétriques pour l'estimation de l'indice des valeurs extrêmes. On cite l'estimateur de Pickands, l'estimateur de Hill, l'estimateur des moments, et d'autre. En général, il n'y a pas une meilleure méthode dans toutes les situations. Les méthodes les plus utilisées sont celles de Hill et de Pickands.

Dans cette section, nous présentons deux estimateurs de l'indice des valeurs extrêmes, le premiers est adapté pour n'importe quel domaine d'attraction c'est l'estimateur de Pickands *Embrechts et al. (1997)* et le deuxième est adapté uniquement pour la domaine d'attraction de Fréchet c'est l'estimateur de Hill *Avouyi-Dovi et Guégan (2001)*, *Dekkers et al. (1989)*.

#### L'estimateur de Pickands

Soit  $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ , la suite ordonnée dans l'ordre croissant des composantes de la suite initiale  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . L'estimateur de Pickands de  $\xi$  est défini par :

$$\widehat{\xi}_{n,k}^{Pickands} = \frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{X_{n-k+1,n} - X_{n-2k+1,n}}{X_{n-2k+1,n} - X_{n-4k+1,n}} \right).$$

La normalité asymptotique de cet estimateur est comme suit :

$$\sqrt{k}(\widehat{\xi}_{n,k}^{Pickands} - \xi) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Gamma), n \longrightarrow \infty,$$

où

$$\Gamma = \frac{\xi^2(2^{2\xi+1} + 1)}{(2(2^\xi - 1)\log 2)^2}.$$

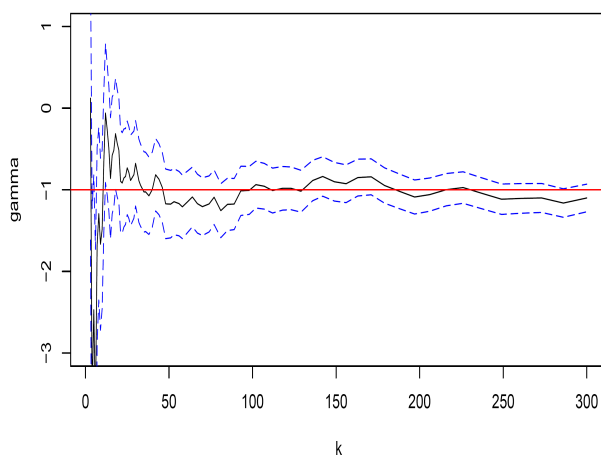


FIG. 2.3 – L'estimateur de Pickands.

### L'estimateur de Hill

L'estimateur de Hill est plus fiable dans le domaine d'attraction de Fréchet où sa fonction de distribution vérifie :

$$1 - F(x) = x^{-1/\xi}L(x),$$

avec  $L$  une fonction à variations lentes et  $\xi > 0$ . Cet estimateur est défini par :

$$\widehat{\xi}_{n,k}^{Hill} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k,n}),$$

pour  $1 \leq k \leq n$  où  $k = k(n) \longrightarrow \infty$

La normalité asymptotique pour l'estimateur de Hill est :

$$\sqrt{k}(\widehat{\xi}_{n,k}^{Hill} - \xi) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \xi^2)$$

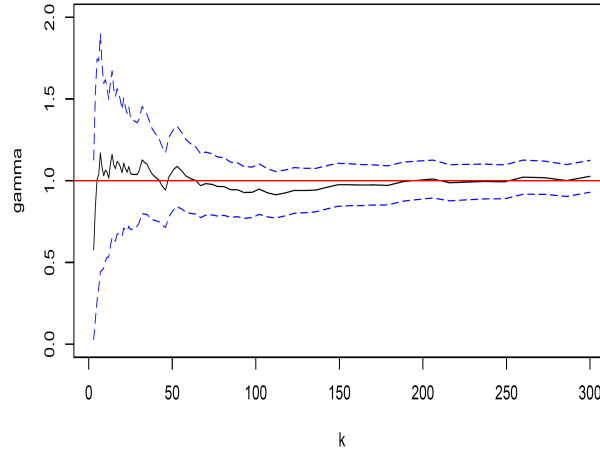


FIG. 2.4 – L'estimateur de Hill.

Ce graphique Hill-plot, nous permet d'avoir des estimations du paramètre  $\xi$  en fonction de l'ordre statistique le plus élevé ( $k$ ), l'indice le plus stable est notre choix.

La représentation ci-dessus nous permet d'estimer le quantile extrême (seuil) en se servant de l'indice de queue de la distribution retrouvé par la même méthode.

Le Hill-plot est donc un outil à double utilité ;

- L'estimation de l'indice de la queue de la distribution.
- L'estimation du seuil.

## 2.2 Théorie des Valeurs Extrêmes Bivariée

La théorie des valeurs extrêmes bivariée n'est rien qu'une généralisation du cas univarié, cette théorie permet de modéliser les risques multiples.

Nous considérons un échantillon  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  de variables indépendantes et de même fonction de répartition  $F_{X,Y}(x, y)$ .

$$X_n = \max(X_i) \text{ et } Y_n = \max(Y_i).$$

Donc la loi de vecteur  $(X_n, Y_n)$  est donnée par

$$P(X_n \leq x, Y_n \leq y) = [F(x, y)]^n.$$

A partir des définitions données dans un cadre univarié, nous écrivons également :

*S'il existe des constantes  $a_n > 0, b_n; c_n > 0$  et  $d_n$  telles que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - b_n}{a_n} \leq x, \frac{Y_n - d_n}{c_n} \leq y\right) = G(x, y),$$

*pour une fonction de distribution  $G$  non dégénérée, alors  $G$  est appelée fonction de répartition extrême bivariée et  $F$  est dite dans le domaine d'attraction de  $G$ .*

La relation entre la théorie des extrêmes univariée et bivariée est obtenue par les marginales de  $G$ . On a :

$$G_1(x) = G(x, +\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - b_n}{a_n} \leq x\right),$$

et

$$G_2(x) = G(+\infty, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n - d_n}{c_n} \leq y\right).$$

Le lien entre ces marginales et la fonction de répartition extrême bivariée est représenté par une fonction qui s'appelle la copule, dont nous la traitons dans le paragraphe consacré aux copules dans le chapitre suivant.

**Remarque 2.1** *Les résultats présentés ici pourraient se généraliser au cas de dimensions plus élevées (théorie des valeurs extrêmes multivariée).*

## 2.3 Modélisation avec les lois Stables

Les lois stables, généralisations de la loi gaussienne, constituent une classe très riche de distributions de probabilités qui prend en compte l'asymétrie et les queues lourdes. Les distributions à queues lourdes sont liées à la théorie des valeurs extrêmes et permettent de modéliser plusieurs phénomènes rencontrés dans différentes disciplines : finance, hydrologie, télécommunication, géologie,..ect.

Dans la finance ; pour les données qui représentent une grande variabilité et l'existence d'une valeur de Kurtosis très supérieure à 3, cette réalité a créé le besoin d'une loi qui prend en compte l'épaisseur de la queue de distribution. Au plus, pour ce genre de données la variance a varié considérablement, c'est-à-dire que la variance n'est pas finie donc il est impossible de l'estimer. Pour ces raisons, les lois stables sont présentées pour modéliser les données financières.

### 2.3.1 Définitions d'une loi stables

Nous nous référons pour les définitions de cette partie *Adam (2001), Marsalle (2010), Alvarez et Olivares (2005) et Meraghni (2008)*.

#### **Théorème Central Limite Généralisé**

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , des variables aléatoires indépendantes, de même loi. Une variable aléatoire  $X$  est la loi limite de la suite

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{a_n} - b_n,$$

pour une suite de réels strictement positifs  $(a_n)$  et une suite de réels  $(b_n)$ , si, et seulement si,  $X$  suit une loi stable.

Selon ce théorème, si la somme des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) a une fonction de distribution limite quand le nombre de variables sommées tend vers l'infini, alors la distribution limite est un membre de la famille des lois stables.

## Deux Définitions Equivalentes des Distributions $\alpha$ -Stables

Il existe plusieurs définitions équivalentes d'une loi stable. On cite les deux suivantes :

### Définition 2.6 (Propriété de Stabilité)

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une loi stable si pour tout  $n \geq 2$ , il existe un réel strictement positif  $C_n$  et un réel  $D_n$  tels que

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{Loi}{=} C_n X + D_n,$$

où  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  copies indépendantes de  $X$ .

### Définition 2.7 (Fonction Caractéristique)

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une loi stable si et seulement si sa fonction caractéristique est de la forme

$$\psi_X(t) = \begin{cases} \exp[i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \sin(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))] & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp[i\mu t - \sigma |t|^\alpha (1 + \frac{2}{\pi} i\beta \sin(t) \ln|t|)] & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

où

$$\sin(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

et  $0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1, \gamma > 0, \mu \in \mathbb{R}$ .

Les lois stables sont intéressantes pour modéliser les distributions à queue lourde. Pour identifier ces lois on s'intéresse aux quatre paramètres dont nous les interprétons dans le paragraphe suivant.

## 2.3.2 Interprétation des paramètres d'une Loi Stable

Une loi stable notée  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  est caractérisée par quatre paramètres

1.  $\alpha$  : l'exposant caractéristique où l'indice de stabilité,  $0 < \alpha \leq 2$ .  
Il caractérise les queues de distribution en mesurant leurs épaisseurs. C'est pourquoi on parle des distributions  $\alpha$ -stables à queues lourdes ou à queues épaisses. Quand  $\alpha$  est proche de 2, la probabilité d'observer des valeurs de la variable aléatoire loin de la position centrale est faible.

Une valeur proche de 0 de l'indice  $\alpha$  signifie que la masse de la queue a une probabilité considérable. La valeur  $\alpha = 2$  correspond à la loi normale (loi de Gauss) pour toute valeur de  $\beta$ , alors que  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  correspond à la loi de Cauchy.

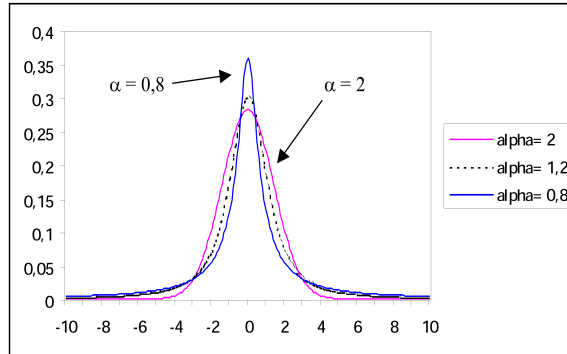


FIG. 2.5 – Courbe de la densité pour différentes valeurs de  $\alpha$  et pour  $\beta = 0$ ,  $\sigma = 1$  et  $\mu = 0$ .

2.  $\beta$  : **paramètre d'asymétrie**,  $-1 \leq \beta \leq 1$ . Si  $\beta$  est égal à  $-1$  (resp.  $+1$ ) la distribution est totalement asymétrique à gauche (resp. à droite). Lorsque  $\beta = 0$ , la loi est symétrique par rapport au paramètre  $\mu$ . Dans ce cas la loi de probabilité est dite  $\alpha$ -stable symétrique, ces distributions représentent une sous classe importante des distributions  $\alpha$ -stable. Par exemple, la loi de Gauss et la loi de Cauchy sont des lois  $\alpha$ -stable symétrique. Lorsque  $\beta$  est positif (resp. négatif), la queue de distribution est plus épaisse à droite (resp. à gauche).

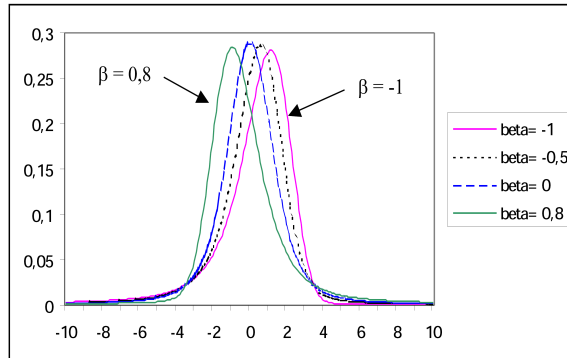


FIG. 2.6 – Courbe de la densité pour différentes valeurs de  $\beta$  et pour  $\alpha = 1.5$ ,  $\sigma = 1$  et  $\mu = 0$ .

3.  $\sigma$  : **paramètre d'échelle**, il mesure la dispersion de la distribution autour du paramètre  $\mu$ . Plus  $\sigma$  est grand, plus les données sont volatiles.

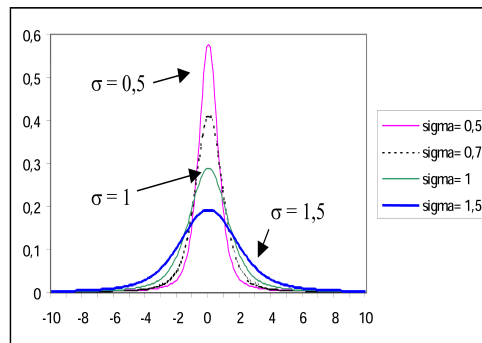


FIG. 2.7 – Courbe de la densité pour différentes valeurs de  $\sigma$  et pour  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0$  et  $\mu = 0$ .

4.  $\mu$  : **paramètre de position**, il mesure la tendance centrale de la distribution. Lorsque  $\alpha > 1$ ,  $\mu$  représente la moyenne et si  $0 < \alpha < 1$ , alors  $\mu$  représente la médiane. Dans les autres cas le paramètre  $\mu$  ne peut pas être interprété .

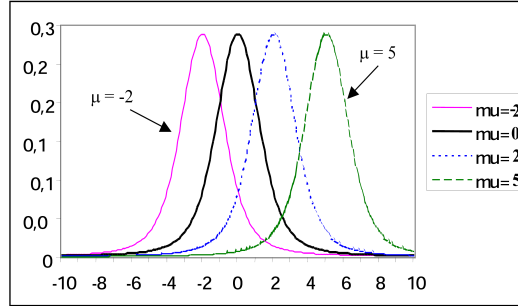


FIG. 2.8 – Courbe de la densité pour différentes valeurs de  $\mu$  et pour  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0$ , et  $\sigma = 1$ .

### 2.3.3 Propriétés des Lois Stables

Dans cette partie, les propriétés les plus importantes des lois  $\alpha$ -stables seront présentées.

#### Densité de Probabilité

Pour les v.a.  $\alpha$ -stables, il n'existe pas une expression explicite de la densité de probabilité dans le cas général. Cependant on peut obtenir une expression sous forme d'une intégrale de la densité de probabilité à l'aide de la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique, donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \psi_X(t) dt.$$

La forme explicite de la densité de probabilité de lois  $\alpha$ -stables n'existe que dans les trois cas importants suivants :

1. La loi de Gauss :  $S_0(0, \sigma, \mu)$  où  $f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}\right)$ .
2. La loi de Cauchy :  $S_1(0, \sigma, \mu)$  où  $f(x) = \frac{2\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + 4\sigma^2)}$ .
3. La loi de Lévy :  $S_{1/2}(1, \sigma, \mu)$  où

$$f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} (x - \mu)^{3/2} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x - \mu)}\right) \mathbb{I}_{] \mu, \infty[}(x),$$

avec  $\mathbb{I}$  fonction indicatrice.

### Domaine d'attraction

Une bonne propriété que ces lois ont un domaine d'attraction, c'est-à-dire qu'elles sont des limites de sommes de variables aléatoires.

#### **Définition 2.8** (*Domaine d'attraction d'une loi stable*)

Soit  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$   $n$  copies indépendantes de  $Y$ . On dit que  $Y$  appartient au domaine d'attraction d'une v.a stable  $X$  ( $Y \in \mathcal{D}(X)$ ) s'il existe deux suites réelles  $a_n > 0$  et  $b_n$  telles que :

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n Y_i - b_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \text{ telle que } n \longrightarrow \infty.$$

### Propriétés arithmétiques

Nous allons rappeler quelques propriétés arithmétiques importantes des variables aléatoires stables de loi  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  :

**Proposition 2.2** Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes de loi stable  $S_\alpha(\beta_1, \sigma_1, \mu_1)$  et  $S_\alpha(\beta_2, \sigma_2, \mu_2)$  alors  $X_1 + X_2$  suit une loi stable  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  avec :

$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}$ ,  $\beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}$ ,  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ , notons que si  $\beta_1 = \beta_2$  alors  $\beta = \beta_1 = \beta_2$ .

**Proposition 2.3** Soit  $X$  une v.a de loi stable  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  est dite symétrique autour de  $\mu$  si et seulement si  $\beta = 0$ , et dit symétrique avec  $\mu = 0$ .

**Proposition 2.4** Soit  $X$  une v.a de loi stable  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  et  $c$  une constante réelle, alors  $X + c$  suit une loi stable  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu + c)$ .

**Proposition 2.5** Soit  $X$  une v.a de loi stable  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  et  $h$  une constante réelle non nulle, alors :

$$hX \sim \begin{cases} S_\alpha(\sin(h)\beta, |h|\sigma, h\mu) & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ S_1(\sin(h)\beta, |h|\sigma, h\mu - \frac{2}{\pi}h(\ln|h|)\sigma\beta) & \text{pour } \alpha = 1. \end{cases}$$

**Proposition 2.6** Soit  $X$  une v.a de loi stable  $S_\alpha(\beta, \sigma, 0)$  alors  $-X$  suit une loi stable  $S_\alpha(-\beta, \sigma, 0)$ , pour  $\alpha \in ]0, 2[$ .

**Proposition 2.7** Une variable aléatoire  $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  est strictement stable si

$$\begin{cases} \mu = 0 & \text{pour } \alpha \neq 0, \\ \beta = 0 & \text{pour } \alpha = 0. \end{cases}$$

Ainsi, la v.a  $X - \mu$  est strictement stable pour  $\alpha \neq 0$ .

**Proposition 2.8** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi stable  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$  avec  $\alpha \in ]0, 2[$  alors

$$\begin{cases} E|X|^p < \infty & \text{pour tout } p \in ]0, \alpha[, \\ E|X|^p = \infty & \text{pour tout } p \geq \alpha. \end{cases}$$

si  $\alpha \in ]1, 2]$  alors  $E(X) = \mu$ .

Indice de stabilité	$\alpha \in ]0, 1]$	$\alpha \in ]1, 2[$	$\alpha = 2$
Moyenne	$\infty$	$\mu$	$\mu$
Variance	$\infty$	$\infty$	$2\sigma^2$

TAB. 2.1 – Moments d'une variable aléatoire suivant une loi  $\alpha$ -stable.

Les lois stables permettent de modéliser les distributions à queue lourde contrairement à les lois gaussiennes qui négligent les informations qui sont dans la queue de distribution.

Donc le problème de modélisation des grands changements financiers peut être résolu avec l'utilisation des lois stables.

## Chapitre 3

# Mesures de Risque pour la Somme de Pertes Financières

Initialement, la théorie du risque a été développée autour de l'hypothèse d'indépendance entre les différentes variables aléatoires intervenant dans la modélisation. L'évolution continue des risques et des produits d'assurance mène à des réflexions visant à relâcher cette hypothèse. Bien que, dans la théorie, l'hypothèse d'indépendance permette une plus grande facilité de modélisation, l'indépendance ne représente, en pratique, qu'un cas d'exception. Si l'indépendance ne s'exprime que d'une seule façon, il existe de nombreuses possibilités de définir la dépendance. Pour cette raison la mesure de risque pour la somme de pertes a plusieurs formes, elle dépend de la mesure de dépendance choisie.

L'objet de ce chapitre est l'évaluation des cumules de pertes financières et pour vérifier notre but nous traitons les sections suivantes :

Dans la première section nous allons définir la mesure de dépendance et nous présentons les mesures les plus usuelles telles que Pearson  $r$ , Spearman  $\rho$  et Kendall  $\tau$ .

Dans la deuxième section nous introduisons la notion de copule comme structure de dépendance nous donnons sa définition, ses propriétés, des exemples de cette mesure, . . . etc.

Dans la troisième section nous sommes intéressés à la mesure de risque de distorsion pour la somme de pertes, nous traitons deux approches distinctes, et nous finirons cette section par un exemple.

## 3.1 Mesures de Dépendance

L'objet de cette section est de définir ce qu'est une mesure de dépendance et de présenter les mesures les plus usuelles *Embrechts et al. (2001)*, *Embrechts et al. (1999)*, *Charpentier (2003)*, *Popier (2010)*.

### 3.1.1 Définitions

Nous donnons dans cette partie deux définitions intéressantes : mesure de dépendance et mesure de concordance.

**Définition 3.1** (*Mesure de dépendance*)

*Une mesure de dépendance est une application qui associe à deux variables aléatoires un réel permettant de quantifier la force de la dépendance qui lie ces deux variables aléatoires.*

Elle est définie par :

$$\delta : \quad \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X_1, X_2 \rightarrow \delta(X_1, X_2)$$

Donc la mesure de dépendance permet de mesurer le degré de dépendance entre deux variables aléatoires, mais dans certain cas cette mesure n'a pas des bonnes propriétés pour les applications statistiques ou financières, pour cette raison la notion de mesure de concordance a été introduite. Cette mesure n'est rien d'autre qu'une mesure de dépendance qui possède un certain nombre de bonnes propriétés, elle est définie comme suit :

**Définition 3.2** (*Mesure de concordance*)

*Une mesure de dépendance  $\delta$  est une mesure de concordance si elle possède les propriétés suivantes :*

1.  $\delta(X_1, X_2) = \delta(X_2, X_1)$  (*symétrie*);
2.  $-1 \leq \delta(X_1, X_2) \leq 1$  (*normalisation*);
3.  $\delta(X_1, X_2) = 1 \iff (X_1, X_2) =_{loi} (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U))$  où  $U \sim \mathbf{U}[0; 1]$  (*comonotonie*);
4.  $\delta(X_1, X_2) = -1 \iff (X_1, X_2) =_{loi} (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1 - U))$  où  $U \sim \mathbf{U}[0; 1]$  (*antimonotonie*);

5. Si  $f$  est strictement monotone,

$$\delta(f(X_1), X_2) = \begin{cases} \delta(X_1, X_2), & \text{si } f \uparrow, \\ -\delta(X_1, X_2), & \text{si } f \downarrow, \end{cases}$$

**Remarque 3.1** La plupart des mesures de dépendance utilisées en pratique vérifient la propriété :

$$X_1 \text{ et } X_2 \text{ indépendantes} \implies \delta(X_1, X_2) = 0.$$

### 3.1.2 Coefficient de corrélation de Pearson

Le coefficient de corrélation de Pearson ou le coefficient de corrélation linéaire est la première et le plus souvent employé dans la pratique comme mesure de dépendance.

**Définition 3.3** (Coefficient de corrélation de Pearson)

Soit deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  admettant des moments jusqu'à l'ordre 2. Le coefficient de corrélation de Pearson  $r$  entre  $X_1$  et  $X_2$  est défini par :

$$r(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}}.$$

On dit que la dépendance entre deux variables aléatoires est forte si le coefficient de corrélation de Pearson est grand en valeur absolue.

Le coefficient de corrélation linéaire n'est pas une mesure de concordance. En effet, il n'a pas les propriétés 3 et 4 de la définition d'une mesure de concordance.

La popularité de la corrélation linéaire provient de la facilité avec laquelle elle peut être calculée et c'est une mesure scalaire de la dépendance dans des distributions elliptiques (membres de distribution Gaussien et t-distribution de Student). Cependant la plupart des variables aléatoires conjointement ne sont pas elliptiquement distribuées, et employant la corrélation linéaire comme une mesure de la dépendance dans de telles situations pourrait prouver très fallacieux. Au plus dans le cas où nous voulons de modéliser un certain scénario à des distributions de queue lourdes, le coefficient de corrélation linéaire n'est pas défini en raison des deuxièmes moments infinis. Pour ces raisons il apparut des mesures de dépendance pour pallier les défauts de cette mesure.

### 3.1.3 Coefficient de corrélation des rangs de Kendall

Le coefficient de corrélation des rangs de Kendall, ou  $\tau$  de Kendall peut mieux alternativement remplacer le coefficient de corrélation linéaire comme mesure de la dépendance pour les distributions non elliptique, pour lesquelles le coefficient de corrélation linéaire est inadéquat et souvent fallacieux. Ce coefficient de corrélation utilise les concepts de concordance et de discordance définis comme suit :

**Définition 3.4** (*Concordance de couples*)

*Les couples  $(X_1, X_2)$  et  $(Y_1, Y_2)$  sont en concordance si  $(X_1 < Y_1$  et  $X_2 < Y_2)$  ou  $(X_1 > Y_1$  et  $X_2 > Y_2)$ .*

**Définition 3.5** (*Disconcordance de couples*)

*Les couples  $(X_1, X_2)$  et  $(Y_1, Y_2)$  sont en disconcordance si  $(X_1 < Y_1$  et  $X_2 > Y_2)$  ou  $(X_1 > Y_1$  et  $X_2 < Y_2)$ .*

**Définition 3.6** (*Coefficient de corrélation des rangs de Kendall*)

*Soit  $(X_1, X_2)$  et  $(Y_1, Y_2)$  deux vecteurs aléatoires i.i.d dont les fonctions de répartition marginales sont continues. Le coefficient de corrélation des rangs de Kendall  $\tau$  est défini par*

$$\tau(X_1, X_2) = P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0].$$

Donc le  $\tau$  de Kendall mesure la différence entre la probabilité que deux couples indépendants mais de même loi soient en concordance et la probabilité qu'ils soient en disconcordance. Si la probabilité de couples considérés soit en concordance est plus souvent que la probabilité de disconcordance, on obtiendra un  $\tau$  positif.

Le  $\tau$  de Kendall est une mesure de concordance, il vérifie les propriétés de la définition d'une mesure de concordance.

### 3.1.4 Coefficient de corrélation des rangs de Spearman

Le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, ou  $\rho$  de Spearman, fait également appel aux notions de concordance et de disconcordance en comparant le couple dont on veut mesurer la dépendance à une version indépendante de ce couple.

**Définition 3.7** (*Coefficient de corrélation des rangs de Spearman*)

Soient les vecteurs aléatoires  $(X_1, X_2)$ ,  $(Y_1, Y_2)$  et  $(Z_1, Z_2)$  i.i.d. Le coefficient de corrélation des rangs de Spearman  $\rho$  est défini par

$$\rho(X_1, X_2) = 3P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Z_2) > 0] - P[(X_1 - Y_1)(X_2 - Z_2) < 0].$$

C'est une mesure de dépendance alternative au coefficient de corrélation linéaire pour les distributions non elliptiques.

Le  $\rho$  de Spearman est une mesure de concordance, il possède les propriétés de la définition d'une mesure de concordance.

## 3.2 Copules comme structure de dépendance

Les copules permettent l'introduction et la caractérisation d'une forme très flexible de dépendance entre différentes variables aléatoires, elle prennent mieux en compte certains faits en finance (leptokurticité, asymétrie, dépendance des queues). La copule s'exprime comme une fonction des distributions marginales des variables aléatoires et permet de faire le lien entre ces distributions marginales et la distribution multivariée. De manière alternative, on dit qu'elle est elle-même une distribution multivariée dont les distributions marginales sont uniformes. Pour une introduction à la théorie de copule, nous nous référons *Brahimi (2011)*, *Nelsen (2006)*, *Kpanzou (2007)*, *Canela et Collazo (2006)*.

Même si les copules sont de plus en plus utilisées en finance, elles ont été peu mises en œuvre sur le thème des valeurs extrêmes.

Au début nous donnons une idée générale du concept de la fonction de répartition multivariée et nous donnons une définition exacte et des rapports fondamentaux nécessaires.

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_d$  des variables aléatoires, avec les fonctions de répartition marginale  $F_1, F_2, \dots, F_d$  respectivement et fonction de répartition joint  $H$ . La structure de la dépendance des variables est représentée par la fonction  $H$  comme suit :

$$H(x_1, \dots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d).$$

L'une des fonctions de répartition marginale  $F_j$  peut être obtenue à partir de  $H$  en laissant  $x_i \rightarrow \infty$  pour tous  $i \neq j$ .

**Définition 3.8** (*Fonction de Répartition Multivariée ou Joint*)

Une fonction  $H : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  est une fonction de répartition multivariée si les conditions suivantes sont satisfaisantes :

1.  $H$  est continue à droite.
2.  $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} H(x_1, \dots, x_d) = 0$  pour  $i = 1, \dots, d$ ,
3.  $\lim_{x_i \rightarrow +\infty} H(x_1, \dots, x_d) = 1$  pour  $i = 1, \dots, d$ ,
4. Pour tout  $(a_1, \dots, a_d)$  et  $(b_1, \dots, b_d)$  avec  $a_i \leq b_i$  pour  $i = 1, \dots, d$  l'inégalité suivante prise :

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} H(x_{1_{i_1}}, \dots, x_{d_{i_d}}) \geq 0,$$

où  $x_{j_1} = a_j$  et  $x_{j_2} = b_j$  pour tous  $j$  et  $x_{j_k} \in [0, 1]$  pour tous  $j$  et  $k$ .

Par une transformation d'intégrale de probabilité, la fonction de répartition joint  $H$  est séparée en une fonction de répartition marginale et une partie qui décrit la structure de la dépendance. Ceci peut être établi par :

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_d) &= P[X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d] \\ &= P[F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_d(X_d) \leq F_d(x_d)] \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \end{aligned}$$

Si la variable aléatoire  $X$  a une fonction de répartition continue  $F$ , alors  $F(X)$  est distribuée selon une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Nous définissons les propriétés de la fonction  $C$ , appelée la fonction de copule.

**Définition 3.9** (*Fonction de Copule*)

Une copule de dimension  $d$  est une fonction  $C$  de  $[0, 1]^d$  et à valeurs dans  $[0, 1]$  possédant les propriétés suivantes :

1.  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$  si  $u_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, d$ ,

2.  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  pour tous  $u_i \in [0, 1]$ ,
3.  $C$  est  $d$ -croissant, pour tout  $(a_1, \dots, a_d)$  et  $(b_1, \dots, b_d)$  avec  $a_i \leq b_i$  pour  $i = 1, \dots, d$  l'inégalité suivante prise :

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1_{i_1}}, \dots, u_{d_{i_d}}) \geq 0,$$

où  $u_{j_1} = a_j$  et  $u_{j_2} = b_j$  pour tout  $j$  et  $u_{j_k} \in [0, 1]$  pour tout  $j$  et  $k$ .

Cette définition prouve que  $C$  est une fonction de répartition multivariée avec les marges uniformément distribuées.

**Corollaire 3.1** (*Densité de Copule*)

Le rapport entre la fonction de densité multivariée  $h(x_1, \dots, x_d)$  et la densité de copule  $c$  est donné par

$$h(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i).$$

Pour ceux qui sont intéressés au preuve de ce corollaire voire *Brahimi (2011)*.

**Théorème 3.1** (*Théorème de Sklar*)

Soit  $H$  une distribution de dimension  $d$  avec les marginales  $F_1, \dots, F_d$ . Alors il existe une copule  $C$  telle que pour tous  $x_1, \dots, x_d \in \bar{R}^d$ ,

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),$$

si les marginales  $F_1, \dots, F_d$  sont tous continus, alors  $C$  est unique. Réciproquement, si  $C$  est une copule et  $F_1, \dots, F_d$  sont des fonctions de répartition, alors la fonction  $H$  définie au-dessus est une distribution de dimension  $d$  avec les marginales  $F_1, \dots, F_d$ .

Pour la preuve de ce théorème voir *Brahimi (2011)*.

Le théorème de Sklar donne une représentation canonique d'une distribution multivariée, par la donnée des distributions marginales et de la structure de dépendance qui peut être représentée par une copule.

L'analyse d'une problématique multivariée a un grand intérêt en pratique pour les applications à l'assurance et à la finance. Le théorème de Sklar est un résultat intéressant dans l'analyse de ce genre de problématique car il indique qu'une problématique multivariée peut être décomposée en deux étapes, tout d'abord l'identification des distributions marginales, puis l'analyse de la structure de dépendance entre les composantes.

**Remarque 3.2** *Dans le cas où les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes, la fonction copule prend la forme de la «copule de production» :*

$$C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = F_1(x_1) \dots F_d(x_d).$$

### 3.2.1 Exemples de copules

Il existe un grand nombre de copules adaptées à différentes situations ; nous sommes intéressés aux deux familles de copule les plus généralement étudiées : copule elliptique et copule archimédienne.

#### Les copules elliptiques

La copule elliptique est simplement la copule de la distribution elliptique telle que cette classe de distributions fournit une source riche des distributions multivariées qui contribue plusieurs des propriétés traitables de distribution normale multivariée. Deux exemples typiques de cette famille sont la copule gaussienne et la t-copule.

##### La copule gaussienne

Cette copule est simplement dérivée d'une distribution gaussienne multivariée  $\phi_\Sigma$  avec la matrice de corrélation  $\Sigma$ , en transformant les marginales par l'inverse de distribution normale standard  $\phi$ , elle est donnée par

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi_\Sigma(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_d)).$$

##### La t-copule

La t-copule est dérivée de la même manière que la copule gaussienne via une fonction multivariée de t-distribution  $t_{\Sigma, v}$  avec la matrice de corrélation  $\Sigma$ ,  $v$  degrés de liberté et avec la fonction de répartition marginale  $t_v$ , cette copule est donnée par :

$$C(u_1, \dots, u_d) = t_{\Sigma, v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)).$$

Il y a cependant des inconvénients pour les copules elliptiques ; parmi celles-ci celles qui sont limitées pour avoir la symétrie radiale.

Pour beaucoup d'applications de finances ou d'assurance nous avons besoin de modèles qui tiennent compte d'une dépendance plus forte entre les pertes extrêmes. Ce genre d'asymétries ne peut pas être modelé avec la copule elliptique.

### Les copules archimédiennes

Cette famille contient beaucoup de familles paramétriques intéressantes de copule et la classe des copules archimédiennes tient compte d'une grande variété de différentes structures de dépendance.

Une caractéristique clef de la copule archimédienne est le fait que toutes les informations sur la structure de dépendance de dimension  $d$  sont contenues dans un générateur univarié. Ainsi la représentation archimédienne ramène l'étude d'une copule multivariée à une fonction univariée simple.

#### Définition 3.10 (Pseudo-inverse du générateur de la copule)

Soit  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  (générateur de la copule) est une fonction continue, strictement décroissante et convexe tels que  $\varphi(1) = 0$ . Le pseudo-inverse du  $\varphi$  est la fonction  $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$  donnée par

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Au plus,  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$  dans  $[0, 1]$ , et

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Finallement, si  $\varphi(0) = \infty$ , alors  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ .

#### Définition 3.11 (Copule Archimédienne)

Une copule archimédienne est définie par la formule

$$C(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)),$$

où  $\varphi$  est le générateur de la copule  $C$ .

Dans le cas bivarié la copule archimédienne avec les marginales  $u$  et  $v$  est donnée par

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Nous donnons dans le tableau ci-après trois exemples des copules archimédiennes.

Famille de Copule	Générateur	Copule Bivariée
Franck	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$ , $\theta \neq 0$	$-\frac{1}{\theta} \ln\left\{1 + \frac{(e^{-\theta}(u-1))(e^{-\theta}(v-1))}{e^{-\theta}-1}\right\}$
Clayton	$(t^{-\theta} - 1)/\theta$ , $\theta \geq -1, \theta \neq 0$	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$
Gumbel	$(-\ln t)^\theta$ , $\theta \geq 1$	$\exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\}$

TAB. 3.1 – Copules archémediennes avec leurs générateurs.

La figure ci-dessous donne la densité de copule des trois exemples précédents des copules archimédiennes.

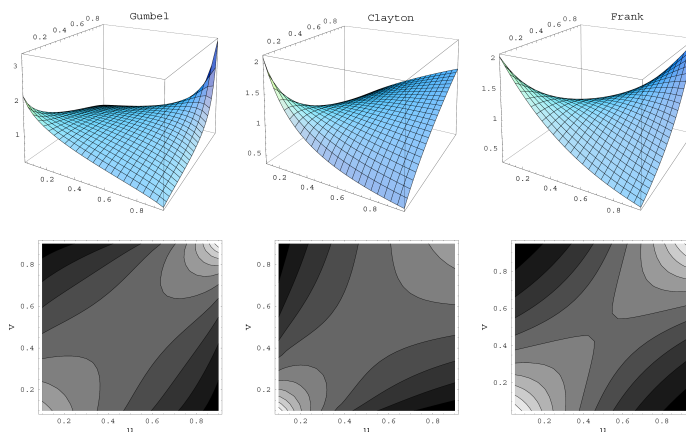


FIG. 3.1 – Densité de copule pour trois familles archimédiennes (Franck, Clayton, Gumbel).

### 3.2.2 Distorsion de Copule

L'importance croissante de la copule dans les modèles statistiques a lancé plusieurs méthodes pour produire de nouvelles classes de telles fonctions. L'objectif final de ces investigations est d'obtenir des familles plus flexibles des fonctions de répartition multivariée, ayant une variété de propriétés intéressantes comme des dépendances de queue, l'asymétrie, . . . , etc.

L'étude de distorsion est d'intérêt général puisqu'elle peut être employée pour produire, d'une manière flexible, de nouvelles familles de copule, elle a été considérée par plusieurs auteurs *Frees and Valdez (1997)*, *Valdez and Xiao (2009)*, *Durante, Foschi and Sarkoci (2009)*, *Durrleman et al. (2009)*.

**Définition 3.12** (*Distorsion de Copule*)

Soit  $C$  une copule bivariée et  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  un bijection strictement croissant. Une distorsion de copule est définie par

$$C^\Gamma(u, v) = \Gamma^{-1}(C(\Gamma(u), \Gamma(v))).$$

De *Nelsen (2006)*  $C^\Gamma$  est une copule si  $\Gamma$  est concave, continue et strictement croissante avec  $\Gamma(0) = 0$  et  $\Gamma(1) = 1$ .

Il y a certaines familles existantes des fonctions de distorsion, parmi lesquelles les plus fréquemment employées sont :

$$\Gamma_r(s) = s^r, \text{ pour } 0 < r \leq 1,$$

$$\Gamma_\delta(s) = \frac{\ln(\delta s + 1)}{\ln(\delta + 1)}, \text{ pour } \delta > 0,$$

$$\Gamma_\nu(s) = \frac{s^\nu}{2 - s^\nu}, \text{ pour } 0 < \nu \leq 1/3,$$

$$\Gamma_{\zeta, \vartheta}(s) = \frac{(\zeta + \vartheta)s}{\zeta s + \vartheta}, \text{ pour } \zeta, \vartheta > 0.$$

**Exemple 3.1** (*Distorsion de la Copule Archimédienne*)

Considérer d'appliquer la déformation comme dans la définition précédente sur une copule archimédienne bivariée. On a :

$$C^\Gamma(u, v) = \Gamma^{-1}(C(\Gamma(u), \Gamma(v))).$$

Nous avons  $\Gamma^{[-1]} = \Gamma^{-1}$ , alors

$$C^\Gamma(u, v) = \Gamma^{[-1]} \varphi^{[-1]}(\varphi(\Gamma(u)) + \varphi(\Gamma(v)))$$

il est facile de montrer que  $\Gamma^{[-1]} \varphi^{[-1]} = (\varphi \circ \Gamma)^{-1}$ , donc

$$C^\Gamma(u, v) = (\varphi \circ \Gamma)^{-1}((\varphi \circ \Gamma)(u) + (\varphi \circ \Gamma)(v)).$$

**Remarque 3.3** La copule  $C^\Gamma$  est aussi une copule archimédienne avec le générateur  $(\varphi \circ \Gamma)$  qu'il faut vérifier la condition de convexité telle que  $\Gamma$  vérifiant les conditions précédentes.

### 3.2.3 Copules et mesures de dépendance

Il existe en statistique un certain nombre de mesure de dépendance comme on l'a vu dans la section précédente, parmi lesquelles on peut citer le  $\rho$  de Spearman et le  $\tau$  de Kendall, ces coefficients sont associés à la structure de dépendance du couple, donc on peut les exprimer en fonction de la copule comme suit :

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1,$$

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv.$$

On pourra vérifier que le coefficient de corrélation de Pearson n'a pas l'expression simple et dépend de la copule  $C$  mais également des distributions marginales : ce coefficient n'est pas, comme on l'a vu, une mesure de dépendance.

**Remarque 3.4** Le taux de Kendall de la copule archimédienne peut être exprimé comme une intégrale du générateur et de son dérivé, par

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Pour plus de détail voir *Nelsen (2006)*.

### 3.3 Mesures de Risque de Distorsion pour la Somme de Pertes

Le but principal de cette section est d'étudier les mesures de risque pour le vecteur de pertes  $X = (X_1, \dots, X_d)$  et de mesurer non seulement le risque des marginales  $X_i$  séparément mais de mesurer le risque commun de  $X$  provoquée par la variation de ses composantes et de leur dépendance possible.

Nous étudions la mesure de risque de distorsion de la somme de variables aléatoires dépendantes et nous traitons deux approches distinctes de cette mesure qui conservent la propriété de cohérence. La première, basée sur les espérances distordues, agit sur la fonction de survie de la somme. La seconde, applique des déformations simultanées sur la fonction de survie de la somme et sur la structure de dépendance des risques, représentée par une copule. *Brahimi et al.(2010)* ont proposé des mesures qui tiennent en compte les fluctuations des pertes et des corrélations éventuelles entre les composantes d'un risque multivarié.

#### 3.3.1 Cadre d'analyse

Dans cette partie nous analysons notre problème qui est le calcul de mesure de risque de distorsion pour la somme de pertes.

Nous traitons le vecteur de risque de pertes  $X = (X_1, \dots, X_d)$ ,  $d \geq 2$  et nous discutons le calcul du MRD de la somme  $Z$  de ses composantes.

La mesure de risque de distorsion pour la variable aléatoire  $Z = \sum_{i=1}^d X_i$  est donnée par

$$\rho_g(Z) = \int_0^{+\infty} g(1 - G(z))dz,$$

avec  $G(z)$  est la fonction de répartition de la v.a  $Z$ .

Dans le cas où  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes et identiquement distribuées, leur somme  $Z$  a de fonction de répartition  $G$  qui est la convolution des distributions marginales de  $X$ .

Dans l'autre cas où  $X_1, \dots, X_d$  sont dépendantes avec une fonction de répartition joint  $H$  et des marginales continues  $F_i$ , le problème devient différent puisque comme on l'a vu dans les deux sections précédentes que la dépendance peut s'exprimer aux nombreuses possibilités, donc sa résolution dépend de la mesure de dépendance choisie i.e que le calcul de MRD de la somme de v.a a des plusieurs formes. Plusieurs auteurs ont discuté la MRD, quand appliqués aux sommes de v.a, qui ont utilisé une certaine mesure de dépendance classique comme Pearson  $r$ , Spearman  $\rho$  et Kendall  $\tau$ , pour ceux qui sont intéressés à de ce type de calcul de MRD pour la somme de v.a consultez *Darkiewicz et al. (2004)*.

Dans notre étude nous contribuons la notion de copule pour fournir plus de flexibilité aux MRD de la somme de v.a en termes de perte et structure de dépendance.

### 3.3.2 Distorsion de la fonction de survie de la somme

Dans ce paragraphe nous discutons le calcul de la mesure de risque de distorsion de la somme de pertes par une déformation qui agit sur la fonction de survie de la somme.

La mesure de risque représentée par cette déformation est donnée par :

$$\rho_g(Z) = \int_0^{+\infty} g(1 - G(z))dz, \quad (3.1)$$

Le problème surgit dans le calcul de  $G(z)$ .

Comme on l'a vu dans la partie consacrée à la copule que le théorème de Sklar est un résultat bien connu qui déclare que pour n'importe quel vecteur aléatoire  $X$ , sa fonction de répartition multivariée a la représentation

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (3.2)$$

Ceci signifie que la MRD de la somme est une fonction de la copule  $C$  et les marginales  $F_i$ . Par conséquent, on doit tenir compte de la structure de dépendance et du comportement des queues de marge. Ces deux aspects ont une influence importante en mesurant les risques.

### Calcul de la fonction de répartition de la v.a $Z$

Soit le vecteur de risque de pertes  $X = (X_1, \dots, X_d)$ ,  $d \geq 2$ , avec une fonction de répartition joint  $H$  et des marginales continues  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

La fonction de répartition de la v.a  $Z = \sum_{i=1}^d X_i$  est

$$G(t) = \int_{A(t)} dH(x_1, \dots, x_d), \text{ pour } t \geq 0,$$

$$\text{où } A(t) = \{(x_1, \dots, x_d) : 0 \leq \sum_{i=1}^d x_i \leq t\}$$

Utilisant la représentation (3.2), nous obtenons

$$G(t) = \int_{A(t)} dC(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Si nous supposons que la copule  $C$  et les marginales  $F_i$  sont différentiables avec les densités  $c$  et  $f_i$ , respectivement, puis

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{A(t)} c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i) dx_1 \dots dx_d. \\ &= \int_0^t \int_0^{t-x_d} \dots \int_0^{t-\sum_{i=0}^{d-2} x_{d-i}} c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i) dx_1 \dots dx_d. \end{aligned}$$

Par un changement des variables  $F_i(x_i) = u_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , nous trouvons

$$G(t) = \int_0^{F_d(t)} \int_0^{F_{d-1}(t-F_d^{-1}(u_d))} \dots \int_0^{F_1(t-\sum_{i=0}^{d-2} F_{d-i}^{-1}(u_{d-i}))} c(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d. \quad (3.3)$$

Selon (3.3), le calcul du MRD correspondant à  $Z$ , donné en (3.1), exige la connaissance de la densité de copule et les marginales du vecteur  $X$ .

En particulier, pour le cas bivarié ( $d = 2$ ), nous avons

$$G(t) = \int_0^{F_2(t)} \int_0^{F_1(t-F_2^{-1}(u_2))} c(u_1, u_2) du_1 du_2.$$

Dans le cas où  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants, nous avons  $c(u_1, u_2) = 1$  et donc

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^{F_2(t)} \int_0^{F_1(t-F_2^{-1}(u_2))} du_1 du_2 \\ &= \int_0^{F_2(t)} F_1(t - F_2^{-1}(u_2)) du_2 \\ &= \int_0^t F_1(t - x) dF_2(x), \end{aligned}$$

ce qui est la convolution des marginales  $F_i$ .

Ce type de déformation mène à une déformation simple des marges et en préservant la structure de copule.

### 3.3.3 Distorsion de la fonction de survie de la somme et de la copule

Il peut se produire que le modèle (représenté par la copule  $C$ ) choisi, pour adapter les données, ne fournit pas assez d'informations sur la structure de dépendance. Ceci nous mène de transformer  $C$  à une copule plus flexible  $C^\Gamma$  de la même classe.

La fonction de répartition joint  $H$  du vecteur  $X$  peut être représentée, par l'intermédiaire du théorème de Sklar comme :

$$H(x_1, \dots, x_d) = C^\Gamma(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Cette transformation affecte la fonction de répartition joint  $H$  et par conséquent la fonction de répartition  $G$  de la somme  $Z$ . Leur nouvelle forme serait dénotée par  $G^\Gamma$ .

Par cette transformation et par une transformation sur la fonction de survie de la somme nous obtenons la formule de MRD de la somme de v.a :

$$\rho_g^\Gamma(Z) = \int_0^{+\infty} g(1 - G^\Gamma(z)) dz. \quad (3.4)$$

### Calcul de la fonction de répartition transformée de la v.a $Z$

Soit le vecteur de risque de pertes  $X = (X_1, \dots, X_d)$ ,  $d \geq 2$ , avec une fonction de répartition joint  $H$  et des marginales continues  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

La fonction de répartition transformée de la v.a  $Z = \sum_{i=1}^d X_i$  est

$$G^\Gamma(t) = \int_{A(t)} dH(x_1, \dots, x_d), \text{ pour } t \geq 0,$$

Par l'utilisation de la représentation (3.4), nous obtenons

$$G^\Gamma(t) = \int_{A(t)} dC^\Gamma(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Si la copule  $C^\Gamma$  et les marginales  $F_i$  sont différentiables avec les densités  $c^\Gamma$  et  $f_i$ , respectivement, nous trouvons

$$G^\Gamma(t) = \int_{A(t)} c^\Gamma(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i) dx_1 \dots dx_d.$$

Par un changement des variables  $F_i(x_i) = u_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , nous déduisons la formule finale de  $G^\Gamma(t)$

$$G^\Gamma(t) = \int_0^{F_d(t)} \int_0^{F_{d-1}(t-F_d^{-1}(u_d))} \dots \int_0^{F_1(t-\sum_{i=0}^{d-2} F_{d-i}^{-1}(u_{d-i}))} c^\Gamma(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d.$$

Donc le calcul du MRD correspondant à  $Z$  dans ce cas, requiert la connaissance de la densité de copule distordue et les marginales du vecteur  $X$ .

**Remarque 3.5** *Dans le cas où  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendants, nous avons  $C^\Gamma = C$  et donc  $\rho_g^\Gamma(Z) = \rho_g(Z)$ .*

La mesure de distorsion obtenue par des transformations sur la structure de dépendance et la queue de distribution est appelée la mesure de risque de distorsion du copule **MRDC**.

La MRDC ajuste la véritable mesure de probabilité de donner plus de poids aux événements de plus gros risque et moins de poids sur la structure de dépendance.

En d'autres termes, les transformations simultanées rapportent une nouvelle mesure de risque bornée par l'espérance et la mesure de Wang comme :

$$E(Z) \leq \rho_g^\Gamma(Z) \leq \rho_g(Z). \quad (3.5)$$

### 3.3.4 MRD pour la somme de deux pertes dépendantes avec des distributions de Pareto

Dans cette partie nous essayons d'appliquer les résultats obtenus dans ce chapitre et qui concerne le calcul de la mesure de risque de distorsion pour la somme de pertes et nous voulons vérifier les inégalités (3.5) à l'aide d'un exemple concret.

Dans tout notre mémoire on s'intéresse à l'étude dans le domaine de l'assurance et de la finance et surtout pour les grandes variations (le cas des valeurs extrêmes), pour cette raison nous prenons les marginales qui ont des distributions de Pareto comme exemple.

La copule de Clayton est la structure de dépendance qui est adapté à notre choix (marginales de Pareto), elle exhibe une forte dépendance dans la queue gauche et une dépendance relativement faible dans la queue droite.

Nous traitons le vecteur de pertes  $X = (X_1, X_2)$  avec ses marginales qui sont de Pareto, donc leurs distributions sont données par  $F_i(x_i) = 1 - x_i^{-1/\alpha_i}$ ,  $x_i > 1$ ,  $0 < \alpha_i < 1$ ,  $i = 1, 2$ . Comme on l'a dit, la dépendance entre ces risques peut être représentée par la copule de Clayton  $C_\theta$ , et donc le taux de Kendall de  $C_\theta$  est donné par  $\tau = \frac{\theta}{\theta+2}$ .

On considère les fonctions de distorsion de la fonction de survie et de la copule respectivement comme suit :  $g(x) = x^{1/\rho}$ ,  $\rho \geq 1$  et  $\Gamma(t) = t^{1/\delta}$ ,  $\delta \geq 1$ . La copule obtenue par la transformation  $\Gamma$  est  $C_\theta^\Gamma$  qui est aussi une copule de Clayton avec générateur  $(\varphi \circ \Gamma) = (t^{-\theta/\delta} - 1)/\theta$  et leur taux de Kendall est  $\tau^\Gamma = \frac{\theta/\delta}{\theta/\delta+2}$ .

La fonction de répartition de la somme  $Z = X_1 + X_2$  est :

$$G^\delta(t; \theta, \alpha_1, \alpha_2) = \int_0^{1-t^{-1/\alpha_2}} \int_0^{1-(t-(1-v)^{-\alpha_2})^{-1/\alpha_1}} c_\theta^\delta(u, v) du dv.$$

où  $c_\theta^\delta$  est la densité de  $C_\theta^\delta$ , elle est obtenue par :

$$\begin{aligned} c_\theta^\delta(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_\theta^\delta(u, v) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (u^{-\theta/\delta} + v^{-\theta/\delta} - 1)^{-\delta/\theta} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial}{\partial v} (u^{-\theta/\delta} + v^{-\theta/\delta} - 1)^{-\delta/\theta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (-\theta/\delta) v^{-\theta/\delta-1} (-\delta/\theta) (u^{-\theta/\delta} + v^{-\theta/\delta} - 1)^{-\delta/\theta-1} \\ &= v^{-\theta/\delta-1} (-\theta/\delta) u^{-\theta/\delta-1} (-\theta/\delta - 1) (u^{-\theta/\delta} + v^{-\theta/\delta} - 1)^{-\delta/\theta-2} \\ &= (\theta/\delta + 1) u^{-\theta/\delta-1} v^{-\theta/\delta-1} (u^{-\theta/\delta} + v^{-\theta/\delta} - 1)^{-\delta/\theta-2}. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\delta = 1$ ,  $c_\theta$  est la densité de  $C_\theta$ , elle est donnée par

$$\begin{aligned} c_\theta(u, v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_\theta(u, v) \\ &= (\theta + 1) u^{-\theta-1} v^{-\theta-1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta-2}. \end{aligned}$$

La figure ci-après représente les deux densités de copule précédentes  $c_\theta^\delta$  et  $c_\theta$  telles que cette figure donne l'effet de la distorsion de copule.

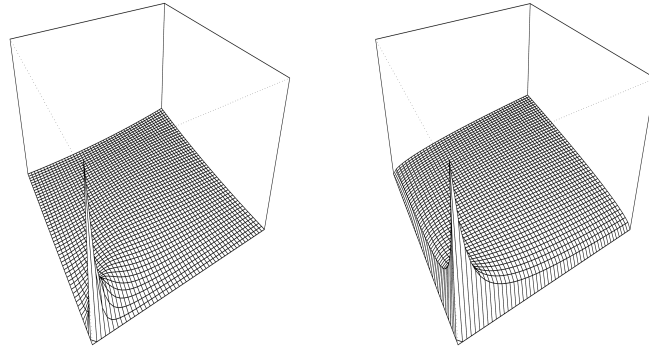


FIG. 3.2 – Densité de la copule de Clayton avec  $\theta = 2$  et leur densité de copule distordue avec  $\delta = 4$ .

La MRD et la MRDC de la variable aléatoire  $Z$  sont respectivement

$$\rho_g(Z) = \int_2^{+\infty} (1 - G(t))^{1/\rho} dt \quad \text{et} \quad \rho_g^\Gamma(Z) = \int_2^{+\infty} (1 - G^\delta(t))^{1/\rho} dt.$$

*Brahimi et al. (2010)* ont choisi un modèle de Pareto avec  $\theta = 3/2$ ,  $\alpha_1 = 1/3$ ,  $\alpha_2 = 1/5$ , ils ont obtenu les résultats suivants pour deux différents paramètres de distorsion  $\rho = 1.2$  et  $\rho = 1.4$  et pour des valeurs distinctes du paramètre de distorsion de la copule.

$\delta$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6
$\tau^\Gamma$	0.428	0.333	0.272	0.230	0.200	0.176	0.157	0.130	0.111
$\rho_g^\Gamma(\mathbf{Z})$	1.225	1.030	0.988	0.969	0.964	0.961	0.958	0.953	0.950

TAB. 3.2 – MRDC et tau de Kendall transformé de la somme de deux risques de distributions de Pareto avec le paramètre de distorsion de queue  $\rho = 1.2$ .

La MRD prend les valeurs 1.225 et 2.091 pour les deux différents paramètres de distorsion  $\rho = 1.2$  et  $\rho = 1.4$ .

$\delta$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6
$\tau^\Gamma$	0.428	0.333	0.272	0.230	0.200	0.176	0.157	0.130	0.111
$\rho_g^\Gamma(\mathbf{Z})$	2.091	1.801	1.736	1.712	1.703	1.699	1.694	1.685	1.680

TAB. 3.3 – MRDC et tau de Kendall transformé de la somme de deux risques de distributions de Pareto avec le paramètre de distorsion de queue  $\rho= 1.4$ .

La MRDC augmente avec la valeur de paramètre de distorsion et diminue avec la valeur de paramètre de distorsion de la copule.

On peut résumer le tableau 3.2 par le graphique suivant :

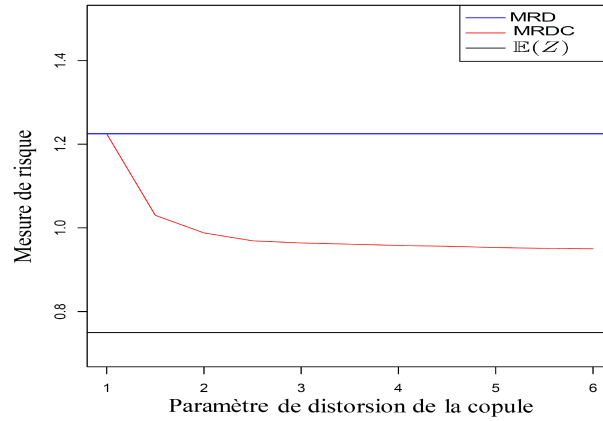


FIG. 3.3 – Mesure de risque de la somme de deux risques de distributions de Pareto avec le paramètre de distorsion de queue  $\rho = 1.2$ .

On remarque d'après ce graphique que pour  $\delta = 1$ , la MRD et la MRDC prend la même valeur, parce qu'il n'y a aucune déformation sur la structure de dépendance.

Quand  $\delta$  augmente, la MRDC diminue, à une certaine valeur de  $\delta$ ; la MRDC devient constante, mais toujours plus grande que l'espérance.

D'après cet exemple on constate que les inégalités (3.5) sont satisfaisantes pour n'importe quelle valeur du paramètre de distorsion de la copule.

# Conclusion et perspectives

En se basant sur la théorie des copules, nous avons exposé le principe de la mesure de risque de distorsion. Nous avons développé deux approches pour le calcul de cette mesure de risque. La première est basée sur la transformation de la fonction de survie et la deuxième s'applique à la fois sur la transformation de la fonction de survie et la structure de dépendance représentée par une copule. Comme conclusion, cette nouvelle mesure est supérieure à l'espérance mathématique et inférieure de la prime de Wang.

Les perspectives pour nos futurs travaux de recherche sont résumées en trois points :

- Méthode de calcul numérique pour cette nouvelle mesure risque.
- Inférence statistique de la mesure proposée, à savoir l'estimation ponctuelle et l'estimation par intervalle.
- Estimation des paramètres de distorsion.

# Bibliographie

- [1] Abozou Kpanzou, T., (2007). Copulas in Statistics. African Institute for Mathematical Sciences (AIMS). University of Stellenbosch.
- [2] Acerbi, C., (2003). Coherent Representations of Subjective Risk Aversion. Milano, Italy.
- [3] Acerbi, C., (2002). Spectral Measures of Risk : a Coherent Representation of Subjective Risk Aversion. Milano, Italy.
- [4] Acerbi, C., (2001). Risk Aversion and Coherent Risk Measures : a Spectral Representation Theorem. Milano, Italy.
- [5] Acerbi, C., Tasche, D., (2001). Expected Shortfall : a natural coherent alternative to Value at Risk. Milano, Italy.
- [6] Adam, E., (2001). L'analyse fractale des marchés financiers. Finama Asset Management.
- [7] Alvarez, A., Olivares, P., (2005). Méthodes d'estimation pour des lois stables avec application en finance. Journal de la Société Française de Statistique, tome 146, N°4.
- [8] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., (1999). Coherent measures of risk. Mathematical Finance, Vol 9, N°3, 203-228.
- [9] Avouyi-Dovi, S., Guégan, D., (2001). Valeurs extrêmes et séries temporelles : Applications à la finance. Université d'Evry, France.
- [10] Bakshi, G., Panayotov, G., (2008). Projet de Théorie Financière. ISFA M2R SAF.
- [11] Basle Committee on Banking Supervision, (1998). Operational risk management, Bank for International Settlements.
- [12] Benkhelifa, L., (2009). Estimation du paramètre de distorsion pour les mesures de risques. Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme

- de magistère en mathématique, université Mohamed Kheider, Biskra, Algérie.
- [13] Benameur, S., (2009). Sur l'estimation de l'indice des valeurs extrêmes. Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de magistère en mathématique, université Mohamed Kheider, Biskra, Algérie.
  - [14] Benlagha, N., Grun-Réhomme, M., Vasechko, O., (2009). Les sinistres graves en assurance automobile : Une nouvelle approche par la théorie des valeurs extrêmes. *Revue MODULAD*, N°39.
  - [15] Bezat, A., Nikeghbali, A., (2000). La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché, ENSAE.
  - [16] Brahimi, B., (2011). Statistics of Bivariate Extreme Values. A Thesis Presented For The Degree of Doctor of Sciences, University Mohamed Kheider, Biskra, Algeria.
  - [17] Brahimi, B., Meraghni, D., Necir, A., (2010). Distortion risk measures for sums of dependent losses. *Journal Afrika Statistika* Vol 5, N°9, 260-267.
  - [18] Canela, M.A., Collazo, E.P., (2006). Modelling dependence in Latin American markets using copula functions.
  - [19] Charpentier, A., (2010). Mesures de risque. Université Rennes 1, France.
  - [20] Charpentier, A., (2003). Tail distribution and dependence measures. ENSAE/CREST.
  - [21] Clauss, P., (2010). Statistique des risques extrêmes-Application à la mesure du risque de marché. Ensai.
  - [22] Clauss, P., (2010). Atelier de théorie des valeurs extrêmes-Application en finance quantitative. Ensai.
  - [23] Costinot, A., Riboulet, G., Roncalli, T., (2000). Stress testing et théorie des valeurs extrêmes : une vision quantifiée du risque extrême. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.
  - [24] Cotter, J., Dowd, K., (2006). Extreme Spectral Risk Measures : An Application to Futures Clearinghouse Margin Requirements. Munich Personal RePEc Archive MPRA.
  - [25] Cotter, J., Dowd, K., (2007). Exponential Spectral Risk Measures. University College Dublin.

- [26] Darkiewicz, G., Dhaene, J., Goovaerts, M.J., (2004). Distortion risk measures for sums of random variables. *Blätter der DGVMF*, Springer Berlin/Heidelberg 26, 631-641.
- [27] De Haan, L., Ferreira, A., (2006). *Extreme Value Theory-An Introduction*. Springer, New York.
- [28] Dekkers, A.L.M., de Haan, L., (1989). On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *The annals of statistics* 4, 1833-1855.
- [29] Denaul, M., (2001). Coherent allocation of risk capital.
- [30] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R., Laeven, R., (2006). Risk measurement with equivalent utility principles. *Statistics & Decisions* 24, 1-25.
- [31] Dhaene, J., Vanduffel, S., Tang, Q., Goovaerts, M. J., Kaas, R., Vyncke, D., (2006). *Risk Measures and Comonotonicity : a Review*. Pensions Institute, London.
- [32] Dhaene, J., Laeven, R.J.A., Vanduffel, S., Darkiewicz, G., Goovaerts, M.J., (2006). Can a Coherent Risk Measure be Too Subadditive ?.
- [33] Dowd, K., Cotter, J., Sorwar, G., (2008). *Spectral Risk Measures : Properties and Limitations*. Banking & Finance Subject Area, UCD Business Schools.
- [34] Dowd, K., Cotter, J., (2007). *Spectral Risk Measures and the Choice of Risk Aversion Function*.
- [35] Dowd, K., Cairns, A.J.G., Blake, D., (2006). Mortality-dependent financial risk measures. *Insurance, Mathematics and Economics* 38, 427-440.
- [36] Durante, F., Foschi, R., Sarkoci, P., (2009). Distorted copulas : constructions and tail dependence.
- [37] Durrleman, V., Nikeghbali, A., Roncalli, T., (2000). A simple transformation of copulas. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.
- [38] Durrleman, V., Nikeghbali, A., Roncalli, T., (2000). Which copula is the right one ?. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.
- [39] Eberlein, E., Frey, R., Kalkbrener, M., Overbeck, L., (2007). *Mathematics in Financial Risk Management*.

- [40] El-Adlouni, S., Bobée, B., Ouarda, T., (2007). Caractérisation des distributions à queue lourde pour l'analyse des crues. Rapport de Recherche N° R-929.
- [41] Embrechts, P., McNei, A., Straumann, D., (1999). Correlation and dependence in risk management : Properties and pitfalls.
- [42] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T., (1997). Modelling External Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin.
- [43] Embrechts, P., Lindskog, F., McNei, A., (2001). Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. Department of Mathematics. ETHZ CH-8092 Zürich Switzerland.
- [44] Fisher, R.A., Tippett, L.H.C., (1928). Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 24, 180-190.
- [45] Föllmer, H., Schied, A., (2008). Convex and coherent risk measures.
- [46] Föllmer, H., Schied, A., (2002). Convex measures of risk and trading constraints.
- [47] Frees, W.E., Valdez, E.A., (1997). Understanding relationships using copulas. University of Wisconsin–Madison.
- [48] Garrido, J., (2009). Analysis and Review of Risk Measures : VAR, CVAR, What to Use? Department of Mathematics and Statistics Concordia. University, Montreal, Canada.
- [49] Genest, C., Mackay, J., (1986). The joy of copulas : bivariate distributions with uniform marginals. The American Statistician, Vol 40, N° 4, 280-283.
- [50] Gzyl, H., Mayoral, S., (2006). On a relationship between distorted and spectral risk measures. Munich Personal RePEc Archive (MPRA).
- [51] Hamidi, B., Hurlin, C., Kouontchou, P., Maillet, B., (2010). Towards a Well-diversified Risk Measure : A DARE Approach.
- [52] Hardy, M.R., (2006). An Introduction to Risk Measures for Actuarial Applications. U.S.A.
- [53] Hervé, F.D., (2004). La VAR comme instrument de mesure des risques de marché?.Crédit Local.
- [54] Heyde, C.C., Kou S.G., Peng, X.H., (2006). What Is a Good Risk Measure : Bridging the Gaps between Data, Coherent Risk Measures, and Insurance Risk Measures. Columbia University.

- [55] Heyde, C.C., Kou S.G., Peng, X.H., (2009). What Is a Good External Risk Measure : Bridging the Gaps between Robustness, Subadditivity, and Insurance Risk Measures. Columbia University.
- [56] Jorion, P., (2002). La gestion de risque après le 11 sptembre 2001. University of california, Irvine.
- [57] J.P. Morgan , (1996). Risk Metrics Technical Document, Fourth Edition, New York.
- [58] Këllezi, E., Gilli, M., (2000). Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures. University of Geneva, Switzerland.
- [59] Lehrer, E., (2007). Coherent risk measures induced by partially specified probabilities.
- [60] Longin, F., (1998). Value at Risk : Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes. Annales d'économie et de statistique N°52 .
- [61] Mark Reesor, R., McLeish, D.L., (2002). Risk, Entropy, and the Transformation of Distributions, Canada.
- [62] Markowitz, H., (1952). Portfolio Selection. Journal of finance 7, 77-91.
- [63] Marsalle, L., (2010). Lois  $\alpha$ -stables, d'après Nikias et Shao, Laboratoire Paul Painlevé.
- [64] Meraghni, D., (2008). Modelling distribution tails. A Thesis Presented For The Degree Of Doctor of Sciences, University Mohamed Kheider, Biskra, Algeria.
- [65] Mseddi, S., (2008). Gestion des risque et valeur de l'entreprise. Thèse présentée pour obtenir le grade de docteur. Université de Cergy-Pontoise, Paris.
- [66] Necir, A., Zitikis, R., (2011). Coupled risk measures and their empirical estimation when losses follow heavy-tailed distributions. ArXiv.1105.6031v1[math.ST].
- [67] Nelsen, R.B., (2006). An introduction to copulas, second edition. Springer, New York.
- [68] Nolain, G., Salhi, Y., Werlé, S., (2007). Optimisation de portefeuille selon le critère de la Value at Risk. ISFA - Université Lyon 1.
- [69] Ouaar, F., (2010). Estimation empirique de la mesure spectrale des risques financiers. Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de magistère en mathématique, université Mohamed Kheider, Biskra, Algérie.

- [70] Peng, J., (2009). Value at Risk and Tail Value at Risk in Uncertain Environment. Institute of Uncertain Systems, Huanggang Normal University, Hubei 438000, China.
- [71] Peng, J., Li, S., (2010). Spectral Measures of Uncertain Risk. Institute of Uncertain Systems, Huanggang Normal University, Hubei 438000, China.
- [72] Polbennikov, S., Melenberg, B., (2005). Mean Coherent Risk and Mean-Variance Approaches in Portfolio Selection : an Empirical Comparison. Tilburg University, The Netherlands.
- [73] Popier, A., (2010). Copules. Université du Maine, Le Mans.
- [74] Raggad, B., (2009). Fondements de la théorie des valeurs extrêmes, ses principales applications et son apport à la gestion des risques du marché pétrolier. Mathematics and Social Sciences n° 186, 29-63.
- [75] Riboulet, G., Roncalli, R., (1999). Les mesures des risques de marché-les aspects méthodologiques. Groupe de Recherche Opérationnelle. Crédit Lyonnais.
- [76] Théron, P.E., (2006). Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière. THESE présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat. Université Claude Bernard- Lyon 1, France.
- [77] Valdez, E.A., Xiao, Y., (2009). On the distortion of a copula and its margins. Munich Personal RePEc Archive (MPRA).
- [78] Veretennikov, P., (2008). Risk measures : acceleration of Monte Carlo methods when calculating VAR, ES and PFE.
- [79] Wang, S.S., (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. Insurance, Mathematics et Economics, 17, 43-54.
- [80] Wang, S.S., (1996). Ordering of risks under PH-transforms. Insurance, Mathematics et Economics, 18, 109-114.
- [81] Wang, S.S., (2002). A risk measure beyond coherence, Cuncun, Mexico.
- [82] Wang, S.S., (1996). Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density, ASTIN Bulletin 26, 71-92.
- [83] Wang, S.S., Young, V.R., (1998). Ordering risks : Expected utility theory versus Yaari's dual theory of risk. Insurance : Mathematics and Economics, 22, 145-161.

- [84] Wang, S.S., Young, V.R., Panjer, H.H., (1997). Axiomatic characterization of insurance prices. *Insurance : Mathematics and Economics*, 21, 173-183.
- [85] Wirch, J. L., Hardy, M. R., (2000). Ordinig of Risk Measure for Capital Adequacy.
- [86] Wirch, J. L., Hardy, M. R., (2001). Distortion risk measure : coherence and stochastic dominance Paper available in [www.gloriamundi.com](http://www.gloriamundi.com).

## Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de la mesure de risque financier. L'étude des mesures de risque a été développée autour de l'hypothèse d'indépendance entre les différentes composantes d'un vecteur de perte, mais ça ne correspond pas à la réalité.

La dépendance entre ces composantes a une grande importance pour évaluer le risque. Brahim et al. (2010) ont proposé une mesure de risque pour la somme de pertes avec la copule comme mesure de dépendance, par une transformation simultanée de la queue de distribution et la copule à l'aide de deux fonctions de distorsion. Cette nouvelle mesure de risque MRDC est plus grande que l'espérance, et moins grande que la mesure de risque de Wang. Le principal avantage de cette propriété est de réduire la prime de Wang.

**Mots Clés :** Mesure de risque, Prime de Wang, Mesure de dépendance, Fonction de distorsion.

## Abstract

This memory is devoted to the study of the measurement of financial risk. The study of measurements of risk was developed around the assumption of independence between the various components of a vector of loss, but that does not correspond to the reality.

Dependence between these components has a great weight to evaluate the risk. Brahim et al. (2010) proposed a measure of risk for the sum of the losses with the copula as dependence measure by a simultaneous transformation in the tail of distribution and the copula using two functions of distortion. This new measurement of risk CDRM is larger than the expectation and less than the measurement of risk of Wang. The main advantage of this property is to reduce the premium of Wang.

**Keywords:** Risk measure, Premium of Wang, Dependence measure, Function of distortion.

## ملخص

هذه المذكرة مكرسة لدراسة مقاييس الخطر المالية. دراسة مقاييس الخطر ظهرت عن طريق فرضية الاستقلال بين مختلف مركبات شعاع الخسارة. لكن هذا لا يتوافق مع الواقع. الارتباط بين هذه المركبات له وزن لتقدير الخطر. برا هيمي و آخرون (2010) اقترحوا مقياس الخطر من أجل مجموع الخسائر بمراقبة الذيل و الرابط في نفس الوقت باستخدام دالة التشوه. هذا المقياس الجديد قد تميز بأنه أكبر من الأمل الرياضي و أقل من مقياس المخاطر المشوهة لوانغ. الميزة الرئيسية لهذه الخاصية هي للتقليل من قسط وانغ.

**المصطلحات:** مقياس المخاطر، قسط وانغ، مقياس الارتباط، دالة التشوه.