MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

**Mémoire de Master II**

Spécialité
Mathématique

Option
Modélisation Mathématique

Présenté par :
$M^r$ **HASSAINE SLIMANE**

Sujet :

# Fonctions presque-automorphes. Application aux équations différentielles

Devant le jury d'examen composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $M^r$ M. Morsli | Professeur ; | U.M.M.T.O ; | Président |
| $M^{me}$ M. Smaali | M.C.A ; | U.M.M.T.O ; | Rapportrice |
| $M^{me}$ F. Bedouhene | Professeur ; | U.M.M.T.O ; | Examinateur |
| $M^{me}$ A. Daoui | M.C.B ; | U.M.M.T.O ; | Examinateur |

Soutenu le 30 /9/2015

# Remerciement

Tout d'abord, je remercie **Mademoiselle SMAALI Manel** de m'avoir proposé et encadré ce mémoire, je la remercie encore pour sa patience, sa disponibilité, sa souplesse, son effort et son aide.

Mes remeciements vont également à $M^r$ M. Morsli de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury. De même à $M^{me}$ F. Bedouhene, et à $M^{me}$ A. Daoui de m'avoir honoré d'en faire partie.

De même, je remercie tous mes enseignents qui m'ont aidé durant mon cursus universitaire.

Enfin, je n'oublie pas de remercier tous ceux qui m'ont aidé dans ma vie.

# Dédicace

***Je dédie ce travail :***
***A mes parents qui m'ont éduqué et ensigné, à toute personne contribuant à ma formation et à tous mes amis, particulièrement, la promotion de Master 2 (analyse).***

# Table des matières

# Introduction générale

La notion de presque automorphie a été introduite dans la littérature par S.Bochner il ya une cinquantaine d'années comme une généralisation de la presque périodicité classique au sens de Bohr. Dans cette dernière décennie plusieurs auteurs H.S.Ding,J.A.Goldstien,T.J.Xiao, N'Guérékata,J.Zhang et d'autres, (voir [7],[9],[11])ont donné une riche littérature sur la théorie de la presque automorphie et ces applications aux équations différentielles.
Récemment Xiao, Liang et Zhang introduisent une nouvelle classe de fonctions dite fonctions pseudo-presqe'automorphes .
Les fonctions pseudo-presque automorphes avec poids généralisent les fonctions pseudo-presque automorphes. J.Blot, G.M.Mophou,G.M.N'guérékata et D.Pennequin ont établi des propriétés intéressantes sur les fonctions pseudo-presque automorphes avec poids.
Ce mémoire est structuré en deux chapitres et une annexe :
Dans le premier chapitre, on présente les différentes classes de fonctions presque automorphes ainsi que leur propriétés principales.
Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des solutions presque automorphes de léquation différentielle linéaire $x' = Ax + f$.

# Chapitre 1

# Fonctions presque automorhpes

## 1.1 Rappel sur les fonctions presque périodiques

**Définition 1.1.** Soit $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espace de Banach,une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ est dite presque périodique si :

1. $f$ est continue et
2. Pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un $l(\epsilon) > 0$ tel que tout intervalle $I$ de logueur $l(\epsilon)$ contient un nombre $\tau$ avec la propriété que :

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \epsilon,$$

   pour chaque $t \in \mathbb{R}$.
   Les nombres $\tau$ sont appelés des $\epsilon$ presque-périodes .

**Remarque 1.1.** Toute fonction périodique est presque périodique

**Théorème 1.1.** *(Voir [1])[Caractérisation de Bochner] Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach muni d'une norme notée $\|.\|$, une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ est presque-périodique ssi elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. *$f$ est continue*
2. *De toute suite $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ,on peut extraire une sous suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(t+h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ .*

**Théorème 1.2.** *(Voir [1])[Deuxième caractérisation de Bochner] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ une fonction continue. Alors $f$ est presque périodique ssi pour toute suite $((\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}})$, $\sigma_n, \tau_n \in \mathbb{R}$ il existe une sous suite $((\sigma'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}})$ telle que $(f(t+\sigma'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $g(t)$ et $(f(t+\sigma'_n+\tau'_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(g(t+\tau'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converergent simplement vers la même fonction $h(t)$.*

Nous citons dans la suite les principales propriétés des fonctions presque périodiques définies de $\mathbb{R}$ à valeur dans un espace de Banach $\mathbb{X}$.

**Proposition 1.1.** *(Voir [4])*

1. *Toute fonction presque-périodique est bornée.*
2. *Toute fonction presque-périodique est uniformément continue.*
3. *L'ensemble des fonctions presque-périodique est invariant par translation.*
4. *L'image d'une fonction presque périodique est relativement compacte.*
5. *L'espace des fonctions presque périodiques est complet pour la norme sup.*
6. *La somme et le produit de fonctions presque périodiques est presque périodique.*
7. *La composée de deux fonctions presque périodiques est presque périodique.*
8. *Si $f$ est une fonction presque périodique et $g$ est une fonction uniformément continue alors $g \circ f$ est une fonction presque périodique.*
9. *Soit $f$ une fonction presque périodique dérivable. Si $f'$ est uniformément continue alors $f'$ est presque périodique.*
10. *Si $f$ est une fonction presque périodique, alors la fonction $F$ définie par*
$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$
*est presque périodique ssi l'image de $F$ est relativement compacte dans $\mathbb{X}$*
11. *Si $\mathbb{X}$ est un espace de Banach uniformément convexe, et $f$ une fonction presque périodique, alors la fonction $F$ définie par*
$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$
*est presque périodique ssi*
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t)\| < \infty$$

**Exemple 1.1.** *Un exemple de fonction presque périodique qui n'est pas périodique est le suivant :*
*Considérons la fonction $f$ définie par*

$$f(x) = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x}.$$

*Elle s'écrit comme somme de deux fonctions périodique,l'une de période $2\pi$, l'autre de période $\sqrt{2}\pi$. donc $f$ est presque périodique.*
*Montrons par absurde que $f$ n'est pas périodique. Supposons qu'il existe $\tau \neq 0$, tel que pour tout réel $x$ on aie $f(x+\tau) = f(x)$. On doit avoir*

$$e^{ix}e^{i\tau} + e^{i\sqrt{2}x}e^{\sqrt{2}\tau} = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x},$$

*donc*

$$e^{ix}(e^{i\tau} - 1) + e^{i\sqrt{2}x}(e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0.$$

*En dérivant on obtient*

$$e^{ix}(e^{i\tau}-1)+\sqrt{2}e^{i\sqrt{2}x}(e^{i\sqrt{2}\tau}-1)=0.$$

*En prenant $x=0$, on voit que l'on doit aussi avoir*

$$e^{i\tau}-1+\sqrt{2}(e^{i\sqrt{2}\tau}-1)=0.$$

*Ceci donne, avec l'équation de départ évaluée en $x=0$ que $e^{i\tau}=e^{i\sqrt{2}\tau}=1$.*
*Il existe donc $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}$ tel que*

$$\tau=2k_1\pi et\sqrt{2}\tau=2k_2\pi.$$

*Comme $\tau\neq 0$, on obtient que*

$$\sqrt{2}=\frac{k_2}{k_1},$$

*ce qui est absurde.*

## 1.2 Fonctions presque automorphes

### 1.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 1.2.** Une fonction continue $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{X}$ est dite presque automorphe(p.a.) si pour toute suite de nombres réels $(s'_n)$ on peut extraire une sous suite $(s_n)$ telle que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}f(t+s_n-s_m)=f(t) \tag{1.1}$$

pour chaque $t\in\mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions presque automorphes est noté par $AA(\mathbb{R},\mathbb{X})$ ou $AA(\mathbb{X})$.

**Remarque 1.2.** La définition précédente est équivalente à : De toute suite de nombres réels $(s'_n)$ on peut extraire une sous-suite $(s_n)$, $(s_n)\subset(s'_n)$ telle que.

$$g(t)=\lim_{n\to\infty}f(t+s_n) \tag{1.2}$$

est bien définie pour chaque $t\in\mathbb{R}$ et

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}g(t-s_n) \tag{1.3}$$

pour chaque $t\in\mathbb{R}$.

En effet, on a
$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t),$$
pour chaque $t \in \mathbb{R}$, et
$$\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t),$$
donc
$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t+s_n-s_m) &= \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f((t-s_m)+s_n))\\ &= \lim_{m\to\infty} g(t-s_m)\\ &= f(t)\end{aligned}$$
Réciproquement, on a :
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t+s_n-s_m) = f(t),$$
alors $\lim_{n\to\infty} f(t+s_n-s_m)$ existe pour chaque $t \in \mathbb{R}$.
On pose $g(t-s_m) = \lim_{n\to\infty} f(t+s_n-s_m)$, donc.
$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} g(t-s_m) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t+s_n-s_m)\\ &= f(t),\end{aligned} \tag{1.4}$$
et
$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} f(t+s_m) &= \lim_{m\to\infty} g(t-s_m+s_m)\\ &= g(t)\end{aligned} \tag{1.5}$$

**Remarque 1.3.** : Si dans les deux limites (1,2) et (1,3)la convergence est uniforme en $t \in \mathbb{R}$, alors $f$ est presque périodique.
La notion de presqu'automophie est plus générale que la presque périodicité . .

**Exemple 1.2.** *(Voir[8]) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*
$$f(t) = \sin\left(\frac{1}{2+\cos t+\cos\sqrt{2}t}\right),$$
*alors $f$ est presqu'automorphe, mais $f$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que $f$ n'est pas presque périodique.*

**Exemple 1.3.** *(Voir[10]) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*
$$f(t) = \frac{2+e^{it}+e^{i\sqrt{2}t}}{|\ 2+e^{it}+e^{i\sqrt{2}t}\ |}$$
*alors $f$ est presqu'automorphe, mais $f$ n'est pas presque périodique.*

**Définition 1.3.** une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$, est dite compacte presque automorphe, si pour toute suite de nombres réels$(s'_n)$ on peut extraire une sous-suite $(s_n)$ telle que

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} f(t + s_n),$$

et

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} g(t - s_n),$$

avec limite uniforme sur chaque compact $K \subset \mathbb{R}$. En d'autres termes $\forall K$ compact de $\mathbb{R}$, $\exists (s_n) \subset (s'_n)$ t.q.

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{t\in K} \|g(t) - f(t + s_n)\| = 0$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{t\in K} \|g(t - s_n) - f(t)\| = 0.$$

L'ensemble des fonctions compactes presque-automorphes est noté par $KAA(\mathbb{X})$.

**Remarque 1.4.** On a les inclusions suivantes :

$$AP(\mathbb{X}) \subset KAA(\mathbb{X}) \subset AA(\mathbb{X}) \subset BC(\mathbb{X}).$$

Où $AP(\mathbb{X})$ est l'espace des fonctions presque périodiques et $BC(\mathbb{X})$ est l'espace des fonctions bornées continues.

**Théorème 1.3.** *Supposons que $f, f_1, f_2$ sont presque automorphes et $\lambda$ un scalaire. Alors les assertions suivantes sont vraies*

1. *$f_1 + f_2$ est presque automorphe.*
2. *$\lambda f$ est presque automorphe pour tout $\lambda$ dans $\mathbb{R}$.*
3. *$f_a = f(t + a)$ est presque automorphe pour tout constant $a$ dans $\mathbb{R}$.*
4. *$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty$, c'est-à-dire que $f$ est une fonction bornée.*
5. *$R_f = \{f(t)/t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $\mathbb{X}$.*

**Preuve.** *1. Soit $(s'_n)$ une suite de nombres réels, puisque $f_1 \in AA(X)$ il existe une sous-suite $(s_n) \subset (s'_n)$ telle que*

$$\lim_{m\to\infty n\to\infty} f_1(t + s_n - s_m) = f_1(t),$$

*pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même $f_2 \in AA(\mathbb{X})$ alors il existe une sous suite $(t_n) \subset (s_n)$ telle que*

$$\lim_{m\to\infty n\to\infty} f_2(t + t_n - t_m) = f_2(t).$$

*On a $(t_n) \subset (s_n) \subset (s'_n)$ et*

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty n\to\infty} (f_1 + f_2)(t + t_n - t_m) &= \lim_{m\to\infty n\to\infty} f_1(t + t_n - t_m) + \lim_{m\to\infty n\to\to\infty} f_2(t + t_n - t_m)\\ &= f_1(t) + f_2(t)\\ &= (f_1 + f_2)(t),\end{aligned}$$

*pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $f_1 + f_2$ est presque automorphe*

2. *Comme $f$ est presque automorphe,$\forall (s'_n) \subset \mathbb{R}$ il existe une sous-suite $(s_n)$ de $(s'_n)$ telle que*

$$\lim_{m\to\infty n\to\infty} f(t+s_n-s_m) = f(t),$$

*on a*

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty n\to\infty} (\lambda f)(t+s_n-s_m) &= \lambda \lim_{m\to\infty n\to\infty} f(t+s_n-s_m)\\ &= (\lambda f)(t),\end{aligned}$$

*donc $\lambda f$ est presque automorphe.*

3. *Soit $(s'_n)$ une suite de nombres réels, puisque $f \in AA(\mathbb{X})$, on peut extraire une sous-suite $(s_n) \subset (s'_n)$ telle que*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t+s_n-s_m) = f(t),$$

*alors*

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty m\to\infty} f_a(t+s_n-s_m) &= \lim_{m\to\infty n\to\infty} f(t+s_n-s_m+a)\\ &= \lim_{m\to\infty n\to\infty} f((t+a)+s_n-s_m)\\ &= f(t+a)\\ &= f_a(t).\end{aligned}$$

*Donc $f$ est dans $AA(\mathbb{X})$*

4. *Procédons par l'absurde. Supposons que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| = \infty,$$

*alors il existe une suite de nombres réels $(s'_n)$ tels que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s'_n)\| = \infty.$$

*Puisque $f$ est presque automorphe nous pouvons extraire $(s_n) \subset (s'_n)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

*En particulier $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = g(0) = \alpha$. D'où*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s_n)\| = \|\alpha\| < \infty$$

*qui est une contradiction, on conclut donc que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$ est fini.*
*Il est également facile de remarque que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$$

*et $R_g \subseteq \overline{R_f}$ ou $g$ est la fonction qui apparait dans équivalente de la définition 1.2*

5. *Soit* $(s'_n) \subset \mathbb{R}$. *Puisque* $f$ *est presque automorphe on peut extraire une sous suite* $(s_n)$ *de* $(s'_n)$ *telle que*
$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) = g(0)$$
*Ceci prouve que* $R_f$ *est relativement compact dans* $X$.

**Théorème 1.4.** *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ *est presque automorphe alors la fonction* $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ *définie par*
$$\check{f}(t) = f(-t)$$
*est presque automorphe*

**Preuve.** *: Soit* $(s'_n)$ *une suite de nombres réels. Puisque* $f$ *est presque automorphe on peut estraire une sous-suite* $(s_n)$ *de* $(s'_n)$ *telle que,*$\forall t \in \mathbb{R}$
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(t + s_n - s_m) = f(t)$$
*on a* $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(-t + s_n - s_m) = f(-t)$ *Posons* $\check{f}(t) = f(-t)$, *on a alors,* $\forall t \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \check{f}(t + s_n - s_m) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(-t - s_n + s_m)\\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(-t + s_n - s_m)\\ &= f(-t) = \check{f}(t)\end{aligned}$$

**Théorème 1.5.** *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions presque automorphes qui converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* $f$ *alors* $f$ *est presque automorphe .*

**Preuve.** *Soit* $(s'_n)$ *une suite réelle. Puisque les fonctions* $f_n$ *sont presque automorphes par procédé diagonal on peut extraire une même sous-suite* $(s_n)$ *telle que,*$\forall t \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}$
$$\lim_{n\to\infty} f_i(t + s_n) = g_i(t).(*)$$
*Pour chaque* $t \in \mathbb{R}$, *on observe que la suite* $(g_i(t))$ *est une suite de Cauchy. En effet on peut écrire*
$$g_i(t) - g_j(t) = g_i(t) - f_i(t + s_n) + f_i(t + s_n) - f_j(t + s_n) + f_j(t + s_n) - g_j(t),$$
*et en utilisant l'ingalité triangulaire on btient*
$$\|g_i(t) - g_j(t)\| \le \|g_i(t) - f_i(t + s_n)\| + \|f_i(t + s_n) - f_j(t + s_n)\| + \|f_j(t + s_n) - g_j(t)\|,$$
*Soit alors* $\epsilon > 0$, *puisque* $(f_n)$ *converge uniformément vers la fonction* $f$ *alors il exite* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $i, j > N$ *on a*
$$\|f_i(t + s_n) - f_j(t + s_n)\| < \epsilon.$$

*Maintenant, puisque* $\mathbb{X}$ *est complet et* $(g_i(t))$ *est de Cauchy, donc* $(g_i(t))$ *converge simplement vers une fonction* $g(t)$ *On montre que,*

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t),$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t).$$

*Pour chaque* $t \in \mathbb{R}$*, et tout* $i \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\|f(t+s_n) - g(t)\| \leq \|f(t+s_n) - f_i(t+s_n)\| + \|f_i(t+s_n) - g_i(t)\| + \|g_i(t) - g(t)\|,$$

*soit* $\epsilon > 0$*, il existe alors* $M_1 = M_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\|f(t+s_n) - f_{M_1}(t+s_n)\| < \epsilon,$$

*pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\exists M_2 = M_2(\epsilon, t)$

$$\|g_{M_2}(t) - g(t)\| < \epsilon,$$

*pour chaque* $t \in \mathbb{R}$*.*
*D'où,* $\forall \epsilon > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \exists M = M(\epsilon, t) = \max(M_1, M_2)$ *tel que*

$$\|f(t+s_n) - g(t)\| < 2\epsilon + \|f_M(t+s_n) - g_M(t)\|,$$

*d'après*$(*)$ *pour chaque* $t \in \mathbb{R}$*, il existe un entier naturel* $K = K(t, M)$ *tel que pour tout* $n \geq K$ *on a :*

$$\|f_M(t+s_n) - g_M(t)\| < \epsilon,$$

*Finalement,*

$$\|f(t+s_n) - g(t)\| < 3\epsilon,$$

*d'ou*

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t)$$

*de la même manière on montre que*

$$\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t).$$

*pour chaque* $t \in \mathbb{R}$*.*

**Théorème 1.6.** *L'espace* $(AA(\mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach*

**Preuve.** *: Comme* $AA(\mathbb{X}) \subset BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *d'après le théorème 1.5 on a* $AA(\mathbb{X})$ *est un sous-espace ferme de* $BC((\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ *qui est complét donc,* $(AA(\mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

**Proposition 1.2.** *Nous définissons* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ *par* $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ *où* $f \in \mathbb{AA}(\mathbb{X})$*. Alors* $F \in AA(\mathbb{X})$ *ssi* $R_F = \{F(t)/t \in \mathbb{R}\}$ *est précompacte.*

**Preuve.** *. Il suffit de prouver que $F$ est une fonction presque automorphe si $R_F$ est relativement compact. Soit $(s''_n)$ une suite réelle, alors il existe une sous-suite $(s'_n) \subset (s''_n)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s'_n) = g(t),$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} g(t-s'_n) = f(t),$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et*

$$\lim_{n\to\infty} F(s'_n) = \alpha_1$$

*Nous obtenons alors pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ :*

$$\begin{aligned} F(t+s'_n) &= \int_0^{t+s'_n} f(r)dr \\ &= \int_0^{s'_n} f(r)dr + \int_{s'_n}^{t+s'_n} f(r)dr \\ &= F(s'_n) + \int_{s'_n}^{t+s'_n} f(r)dr, \end{aligned} \tag{1.6}$$

*en utilisant la substitution $\sigma = r - s'_n$ on obtient*

$$F(t+s'_n) = F(s'_n) + \int_0^t f(\sigma + s'_n)d\sigma$$

*En appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons,*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F(t+s'_n) &= \lim_{n\to\infty} F(s'_n) + \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(\sigma + s'_n)d\sigma \\ &= \lim_{n\to\infty} F(s'_n) + \int_0^t \lim_{n\to\infty} f(\sigma + s'_n)d\sigma \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} F(t+s'_n) = \alpha_1 + \int_0^t g(\sigma)d\sigma$$

*Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, nous observons que $R_G$ l'ensemble $R_G = \{G(t) : t \in \mathbb{R}\}$ où*

$$G(t) = \alpha_1 + \int_0^t g(r)dr$$

*est également relativement compact et*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|G(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$$

*pouvons donc extraire une sous-suite $(s_n)$ de $(s'_n)$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} G(-s_n) = \alpha_2$$

*pour un certain* $\alpha_2 \in X$
*Maintenant , nous pouvons écrire*

$$G(t-s_n) = G(-s_n) + \int_0^t g(r-s_n)dr$$

*pour que*

$$\lim_{n\to\infty} G(t-s_n) = \alpha_2 + \int_0^t f(r)dr = \alpha_2 + F(t)$$

*il faut que* $\alpha_2 = 0$
*En utilisant la notation*
$T_s$ *est un opérateur linéaire,* $T_s f = g$ *pour exprimer que*

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t)$$

*où* $s = (s_n)$ *et* $A_s f = T_{-s} T_s f$
*nous obtenons*

$$A_s F = \alpha_2 + F$$

*où* $s = (s_n)$.
*Maintenant on a l'équation*

$$A_s^2 F = A_s \alpha_2 + A_s F = \alpha_2 + \alpha_2 + F = 2\alpha_2 + F$$

*Nous pouvons continuer indéfiniment le processus pour obtenir*

$$A_s^n F = n\alpha_2 + F, n = 1, 2, ...$$

*Mais nous avons,pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A_s^n F(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t)\|$$

*avec* $F(t)$ *qui est une fonction bornée.*

*Ce qui conduit à une contradiction si* $\alpha_2 \neq 0$, *donc* $\alpha_2 = 0$ *et* $A_s F = F$. *Alors* $F$ *est presque automorphe.*

**Corollaire 1.1.** *(Voir [9]) Soit* $\mathbb{X}$ *un espace de Banach uniformément convexe et* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{X}$ *définie par* $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ *où* $f \in \mathbb{AA}(\mathbb{X})$. *Alors* $F \in AA(\mathbb{X})$ *ssi* $F$ *est bornée.*

**Preuve.** *.La preuve utilise les propriétés de la topologie faible pour un espace reflexif ainsi que la convexité uniforme de la norme.*

**Théorème 1.7.** *Soit* $f \in AA(\mathbb{X})$, *si* $h \in L^1(\mathbb{R})$ *alors leur convolution définie par*

$$(f \star h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) h(t-\sigma) d\sigma$$

*appartient à* $AA(\mathbb{X})$

**Preuve.** *: Puisque $f$ est continue et $h \in L^1(\mathbb{R})$ il n'est pas difficile de voir que la fonction $t \to (f \star h)(t)$ est continue. Soit $(s'_n)$ une suite de nombres réels, puisque $f$ est presque automorphe, il existe une sous suite $(s_n) \subset (s'_n)$ tel que*

$$g(t-\sigma) = \lim_{n\to\infty} f(t-\sigma+s_n)$$

*et*

$$f(t-\sigma) = \lim_{n\to\infty} g(t-\sigma-s_n)$$

*pour tous $t, \sigma \in \mathbb{R}$ considèreons alors*

$$(f \star h)(t+s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\sigma+s_n)h(\sigma)d\sigma$$

*pour tous $t, \sigma \in \mathbb{R}$, on a clairement*

$$\|f(t-\sigma+s_n)h(\sigma)\| \leq \|f\|_\infty |h(\sigma)|,$$

*en utilisant le fait que $h \in L^1(\mathbb{R})$ et compte tenu de ce qui précède, on en déduit alors du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que :*

$$\lim_{n\to\infty}(f \star h)(t+s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f(t-\sigma+s_n)h(\sigma)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\sigma)h(\sigma)d\sigma$$
$$= (g \star h)(t)$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$, D'une manière similaire considerons*

$$(g \star h)(t-s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\sigma-s_n)h(\sigma)d\sigma$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on a clairement :*

$$\|g(t-\sigma-s_n)\| \leq \|g\|_\infty |h(\sigma)|$$

*pour chaque $t, \sigma \in \mathbb{R}$, de nouveau par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il en résulte que*

$$\lim_{n\to\infty}(g \star h)(t-s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} g(t-\sigma-s_n)h(\sigma)d\sigma$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\sigma)h(\sigma)d\sigma$$
$$= (f \star h)(t)$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$.*
*$f \star h$ Finalement est presque automorphe.*

**Théorème 1.8.** *Si $f \in AA(\mathbb{X})$ et sa dérivée $f'$ existe et est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f' \in AA(\mathbb{X})$.*

**Preuve.** *On cherche à écrire $f'$ comme une limite uniforme d'une suite de fonctions presque automorphes. On sait que pour tout réel $x$ on a*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} n(f(t+\frac{1}{n}) - f(x).$$

*On pose,*

$$f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)).$$

*On a*

$$\|f'(x) - f_n(x)\| = \|f'(x) - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t)dt\|,$$

$$\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} \|f'(x) - f'(t)\|dt,$$

$$\leq \sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} \|f'(x) - f'(t)\|.$$

*Prenons $\epsilon > 0$; l'uniforme continuité de $f'$ assure l'existence d'un $\delta$ tel que si $|u-v| \leq \delta$ alors*

$$\|f'(t) - f'(v)\| \leq \epsilon.$$

*Il existe $n_0$ tel que pour $n \geq n_0$ on a $\frac{1}{n} \leq \delta$ donc pour $n \geq n_0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $\|f(x) - f_n(t)\| \leq \epsilon$ d'où la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f'$ sur $\mathbb{R}$. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque automorphe d'après le théorème 1.5 $f'$ est presque automorphe.*

**Théorème 1.9.** *Si $f$ est une fonction presque automorphe et $f(t) = 0$ pour tout $t > \alpha$, $\alpha$ constante réelle alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$*

**Preuve.** *Montrons que $f(t) = 0$ pour tout $t \leq \alpha$. on considère la suite des nombres naturels $(n)$. puisque $f$ est presque automorphe on peut extraire une sous-suite $(n_k)$ telle que*

$$\lim_{k\to\infty} f(t+n_k) = g(t)$$

*et*

$$\lim_{k\to\infty} g(t-n_k) = f(t)$$

*Pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Il est clair que pour tout $t \leq \alpha$ on peut trouver $(n_{k_j}) \subset (n_k)$ avec $t + n_{k_j} > \alpha$, pour tout $j$ tel que $f(t+n_{k_j}) = 0$ pour tout $j$ et puisque*

$$\lim_{k\to\infty} f(t+n_{k_j}) = g(t)$$

*On obtient $g(t) = 0$ donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$*

**Proposition 1.3.** *Si $f, g \in AA(\mathbb{X})$ et s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(t) = g(t)$ pour chaque $t \geq t_0$ alors $f = g$*

### 1.2.2 Théorèmes de composition

**Théorème 1.10.** *Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux espaces de Banach et*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*une fonction presque automorphe, si*

$$\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$$

*est une fonction continue. alors la fonction composé :*

$$\phi(f(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{Y}$$

*est presque automorphe.*

**Preuve.** *Soit $(s'_n)$ une suite de nombres réels, puisque $f$ est une fonction presque automorphe, on peut extraire une sous-suite $(s_n)$ telle que,*

$$\lim_{n\to\infty} f(t+s_n) = g(t),$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et*

$$\lim_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t).$$

*Puisque la fonction $\phi$ est continue on a,*

$$\lim_{n\to\infty} \phi(f(t+s_n)) = \phi(\lim_{n\to\infty}(f(t+s_n)) = \phi(g(t)),$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} \phi(g(t-s_n)) = \phi(\lim_{n\to\infty}(g(t-s_n)) = \phi(f(t)).$$

*D'où $\phi f$ est presque automorphe.*

**Définition 1.4.** Une fonction conjointement continue $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est appelée presque automorphe en $t \in \mathbb{R}$ pour chaque $x \in \mathbb{X}$, si de chaque suite de nombres réels $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$G(t,x) = \lim_{n\to\infty} F(t+s_n, x)$$

soit bien définie et

$$\lim_{n\to\infty} G(t-s_n, x) = F(t,x)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et chaque $x \in \mathbb{X}$.

**Théorème 1.11.** *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ une fonction presque automorphe en $t \in \mathbb{R}$ pour chaque $x \in \mathbb{X}$. Supposons que la fonction*

$$u \mapsto f(t,u)$$

*est Lipschitzienne uniformément par rapport a $t \in \mathbb{R}$, alors il existe $L > 0$ tel que.*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$$

*pour tout $(x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ et $t \in \mathbb{R}$. Si $\varphi \in AA(\mathbb{X})$ alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ définie par*

$$F(.) = f(., \varphi(.))$$

*appartient à $AA(\mathbb{X})$*

**Preuve.** *Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ,puisque $f$ est presque automorphe en $t \in \mathbb{R}$ pour chaque $x \in \mathbb{X}$ on peut extraire une sous-suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

1. $\lim_{n\to\infty} f(t+\tau_n, x) = g(t,x)$ *pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{X}$*
2. $\lim_{n\to\infty} g(t-\tau_n, x) = f(t,x)$ *pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{X}$*
3. $\lim_{n\to\infty} \varphi(t+\tau_n) = \psi(t)$, *pour chaque $t \in \mathbb{R}$*
4. $\lim_{n\to\infty} \psi(t-\tau_n) = \varphi(t)$ *pour chaque $t \in \mathbb{R}$*

*Soit $G(t) = g(t,\psi(t))$ nous devons montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} F(t+\tau_n) = G(t)$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} G(t-\tau_n) = F(t).$$

*On a*

$$\begin{aligned} \|F(t+\tau_n) - G(t)\| &\leq \|f(t+\tau_n, \varphi(t+\tau_n)) - f(t+\tau_n, \psi(t))\| + \|f(t+\tau_n, \psi(t)) - g(t,\psi(t))\| \\ &\leq L\|\varphi(t+\tau_n) - \psi(t)\| + \|f(t+\tau_n, \psi(t)) - g(t,\psi(t))\| \end{aligned}$$

*à partir de (3), il en résulte que*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi(t+\tau_n) - \psi(t)\| = 0,$$

*de même ,à partir de l'identité (1), on obtient*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t+\tau_n, \psi(t)) - g(t,\psi(t))\| = 0,$$

*et donc*

$$\lim_{n\to\infty} F(t+\tau_n) = G(t),$$

*en utilisant des arguments similaires comme ci-dessus,nous obtenons que*

$$\lim_{n\to\infty} G(t-\tau_n) = F(t)$$

*Ce qui prouve que $F$ est presque automorphe.*

**Définition 1.5.** Une fonction conjointement continue $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ est dite presque automorphe si la fonction $f(t, x)$ en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $x$ sur n'importe quel sous-ensemble borné $B$ de $\mathbb{X}$,i.e. si de chaque suite de nombres réels $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$G(t, x) = \lim_{n\to\infty} F(t + s_n, x)$$

soit bien définie et

$$\lim_{n\to\infty} G(t - s_n, x) = F(t, x)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$ uniformément par rapport a $x \in B$.
La collection de ces fonctions presque automorphes est notée par $AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X})$

**Théorème 1.12.** *Soit*

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$$

*une fonction presque automorphe . Supposons que* $u \mapsto f(t, u)$ *est uniformément continue pour chaque sous-ensemble borné* $K' \subset \mathbb{X}$ *uniformément pour* $t \in \mathbb{R}$ *(i.e.,pour chaque* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $x, y \in K'$ *et* $\|x - y\| < \delta$ *on a* $\|f(t, x) - f(t, y)\| < \epsilon$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *). Si* $\varphi \in AA(\mathbb{X})$*, alors*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*défine par*

$$F(.) = f(., \varphi(.))$$

*appartient à* $AA(\mathbb{X})$

**Preuve.** *Soit* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels, puisque* $f$ *est presque automorphe en peut extraire une sous-suite* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que*

1. $\lim_{n\to\infty} f(t + \tau_n, x) = g(t, x)$*, pour chaque* $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in B$ *(*$B \subset \mathbb{X}$ *pour chaque sous-ensemble borné)*
2. $\lim_{n\to\infty} g(t - \tau_n, x) = f(t, x)$*, pour chaque* $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in B$ *(*$B \subset \mathbb{X}$ *pour chaque sous-ensemble borné)*
3. $\lim_{n\to\infty} \varphi(t + \tau_n) = \psi(t)$ *,pour chaque* $t \in \mathbb{R}$
4. $\lim_{n\to\infty} \psi(t - \tau_n) = \varphi(t)$ *pour chaque* $t \in \mathbb{R}$

*Soit* $G(t) = g(t, \psi(t))$ *nous deuvons montrer que pour chaque* $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} F(t + \tau_n) = G(t)$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} G(t - \tau_n) = F(t)$$

*maintenant*

$$\|F(t+\tau_n) - G(t)\| \leq \|f(t+\tau_n, \varphi(t+\tau_n)) - f(t+\tau_n, \psi(t))\| + \|f(t+\tau_n, \psi(t)) - g(t, \psi(t))\|$$

*Puisque $\varphi$ est presque automorphe,alors $\varphi$ et $\psi$ sont bornés. Nous pouvons choisir un sous ensemble borné $K$ de $\mathbb{X}$ tel que $\varphi(t) \in K$ et, par (3) et la continuité uniforme de la $x \mapsto f(t,x)$ sur $K$ , on obtient*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t+\tau_n, \varphi(t+\tau_n)) - f(t+\tau_n, \psi(t))\| = 0$$

*de même,selon l'identité (1), on obtient*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t+\tau_n, \psi(t+\tau_n)) - g(t+\tau_n, \psi(t))\| = 0.$$

*et donc*

$$\lim_{n\to\infty} F(t+\tau_n) = G(t).$$

*En utilisant des arguments similaires comme ci-dessus, nous obtenons que*

$$\lim_{n\to\infty} G(t-\tau_n) = F(t)$$

*Ce qui $F$ est presque automorphe.*

## 1.3 Fonctions pseudo presqu'automorphes

**Définition 1.6.** : Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach. Une fonction bornée et continue a valeur moyenne nulle est définie comme une fonction qui appartient à l'ensemble :

$$AA_0(\mathbb{X}) = \{\phi \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X}) : \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi(s)\| ds = 0\}$$

**Définition 1.7.** : Une application $f \in BC(\mathbb{R}; \mathbb{X})$ est pesudo presque automorphe (pseudo compact presque automorphe) si $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in AA(\mathbb{X})$ (respectivement $f_1 \in KAA(\mathbb{X})$) et $f_2 \in AA_0(\mathbb{X})$.
La fonction $f_2$ est appelée partie ergodique de $f$. L'ensemble des fonctions pseudo- presque automorphe sera noté par $PAA(\mathbb{X})$.

**Exemple 1.4.** *([5]) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f(t) = cos(\frac{1}{sint + sin\sqrt{2}t}) + \frac{1}{1+t^2},$$

*cette fonction est pseudo presque automorphe*

**Théorème 1.13.** *([3]) Supposons que $f = g + h$ est une fonction pseudo-presque automorphe, Alors nous avons*

$$\{g(t); t \in \mathbb{R}\} \subset \overline{\{f(t); t \in \mathbb{R}\}}$$

**Corollaire 1.2.** *La décomposition d'une fonction pseudo presque automorphe est unique.*

**Preuve.** *Supposons que* $f = g_1 + \Phi_1$ *et* $f = g_2 + \Phi_2$ *où* $g_1, g_2 \in AA(\mathbb{X})$ *et* $\Phi_1, \Phi_2 \in AA_0(\mathbb{X})$ *par conséquent,*

$$0 = (g_1 - g_2) + (\Phi_1 - \Phi_2)$$

*avec* $g_1 - g_2 \in AA(\mathbb{X})$ *et* $\Phi_1 - \Phi_2 \in AA_0(\mathbb{X})$, *il en résulte d'après le théorème 1.13 que* $(g_1 - g_2) \subset \{0\}$, *d'où* $g_1 = g_2$ *et par suite* $\Phi_1 = \Phi_2$.
*Finalement la décomposition d'une fonction pseudo presque automorphe est unique.*

**Lemme 1.1.** *Si* $x(.) \in PAA(\mathbb{X})$ *alors* $x(. - h) \in PAA(\mathbb{X})$ *où* $h \in \mathbb{R}$

**Preuve.** *Soit* $x(.) \in PAA(\mathbb{X})$ *alors*

$$x(.) = x_1(.) + x_2(.)$$

*où* $x_1(.) \in AA(\mathbb{X})$ *et* $x_2(.) \in AA_0(\mathbb{X})$ *,on a*

$$x(. - h) = x_1(. - h) + x_2(. - h)$$

*d'apres le théorème 1.3* $x_1(. - h) \in AA(\mathbb{X})$. *Montrons que* $x_2(. - h) \in AA_0(\mathbb{X})$ *, on a*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|x_2(t-h)\|dt = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R-h}^{R-h} \|x_2(s)\|ds$$

*donc*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|x_2(t-h)\|dt = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R-h}^{-R} \|x_2(s)\|ds$$
$$+ \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|x_2(s)\|ds + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{R}^{R-h} \|x_2(s)\|ds$$

*puisque* $x_2 \in AA_0(\mathbb{X})$ *et* $x_2(.)$ *bornée donc*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|x_2(t-h)\|dt \leq \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R-h}^{-R} \|x_2\|_\infty ds + 0 + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{R}^{R-h} \|x_2\|_\infty ds$$

$$\leq \lim_{R\to\infty} \frac{h}{2R}\|x_2\|_\infty + \lim_{R\to\infty} \frac{h}{2R}\|x_2\|_\infty$$
$$= 0.$$

*Finalement*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|x_2(t-h)\|dt = 0$$

*donc*

$$x_2(. - h) \in AA_0(\mathbb{X})$$

*alors*

$$x(. - h) \in PAA(\mathbb{X})$$

**Proposition 1.4.** *Soient $f, f_1, f_2 \in PAA(\mathbb{X})$ alors nous avons*

1. $\lambda f \in PAA(\mathbb{X})$
2. $f_1 + f_2 \in PAA(\mathbb{X})$
3. $g(t) = f(-t) \in PAA(\mathbb{X})$

**Preuve.** *:*

1. *Montrons que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in PAA(\mathbb{X})$ donc $(\lambda f) \in PAA(\mathbb{X})$.*
   *$f \in PAA(\mathbb{X})$ alors*
   $$f = f_1 + f_2$$
   *avec $f_1 \in AA(\mathbb{X})$ et $f_2 \in AA_0(\mathbb{X})$ donc*
   $$(\lambda f) = (\lambda f_1) + (\lambda f_2),$$
   *puisque $AA(\mathbb{X})$ est un espace de Banach alors $(\lambda f_1) \in AA(\mathbb{X})$ et puisque $f_2 \in AA_0(\mathbb{X})$ on a*
   $$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|\lambda f_2(s)\| ds = |\lambda| \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \|f_2(s)\| ds = 0$$
   *d'ou $\lambda f_2 \in AA_0(\mathbb{X})$. Finalement $\lambda f \in PAA(\mathbb{X})$*
2. *Soients $f$ et $g$ dans $PAA(\mathbb{X})$ on va montrer que*
   $$f + g \in PAA(\mathbb{X})$$
   *on a $f \in PAA(\mathbb{X})$ donc*
   $$f = f_1 + f_2$$
   *avec $f_1 \in AA(\mathbb{X})$ et $f_2 \in AA_0(\mathbb{X})$ et $g \in PAA(\mathbb{X})$ alors*
   $$g = g_1 + g_2$$
   *avec $g_1 \in AA(\mathbb{X})$ et $g_2 \in AA_0(\mathbb{X})$. On a*
   $$f + g = (f_1 + g_1) + (f_2 + g_2)$$
   *puisque $AA(\mathbb{X})$ est un espace de Banach alors $f_1 + g_1 \in AA(\mathbb{X})$. Mentenant*
   $$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|f_2(s)+g_2(s)\| ds \leq \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|f_2(s)\| ds + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|g_2(s)\| ds = 0$$
   *puisque $f_2 \in AA_0(\mathbb{X})$ et $g_2 \in AA_0(\mathbb{X})$, on aura :*
   $$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|(f_2 + g_2)(s)\| ds = 0$$
   *c'est à dire*
   $$f_2 + g_2 \in AA_0(\mathbb{X})$$
   *d'où*
   $$f + g \in PAA(\mathbb{X}).$$

3. *Puisque* $f \in PAA(\mathbb{X})$ *donc* $f = f_1 + f_2$ *avec* $f_1 \in AA(\mathbb{X})$ *et* $f_2 \in AA_0(\mathbb{X})$ *on obtient* $f(-t) = f_1(-t) + f_2(-t)$ *on a* $g(t) = f(-t)$ *donc*

$$g(t) = f_1(-t) + f_2(-t),$$

*puisque* $f \in PAA(\mathbb{X})$ *d'après le théorème 1.4* $f_1(-t) \in AA(\mathbb{X})$, *montrons que* $f_2(-t) \in AA_0(\mathbb{X})$, *on a*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|f_2(-t)\|dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|f_2(t)\|dt = 0,$$

*car* $f_2 \in AA_0(\mathbb{X})$ *d'ou* $f_2(-t) \in AA_0(\mathbb{X})$, *il vient que* $g(t) \in PAA(\mathbb{X})$

**Théorème 1.14.** $(PAA(\mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach*

**Preuve.** *: Il est clair que* $AA_0(\mathbb{X})$ *est un sous-espace vectoriel de* $BC(\mathbb{X})$. *Pour compléter la preuve il faut montrer que* $AA_0(\mathbb{X})$ *est fermé dans* $BC(\mathbb{X})$ *muni de la norme sup.*
*Soit* $(f_n)$ *une suite de fonction converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* $f$ *c'est à dire*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

*On a*

$$\int_{-R}^{R} \|f(t)\|dt \leq \int_{-R}^{R} \|f(t) - f_n(t)\|dt + \int_{-R}^{R} \|f_n(t)\|dt,$$

*on obtient alors :*

$$\frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|f(t)\|dt \leq \|f - f_n\|_\infty + \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|f_n(t)\|dt,$$

*donc*

$$\lim_{R\to+\infty} \sup \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|f(t)\|dt \leq \|f - f_n\|_\infty,$$

*pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Puisque*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$$

*donc*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \|f(t)\|dt = 0$$

*c'est à dire que*

$$f \in AA_0(\mathbb{X})$$

*d'où* $AA_0(\mathbb{X})$ *est un espace de Banach. Finalement*

$$g \in PAA_0(\mathbb{X}) \Longleftrightarrow g = g_1 + g_2$$

*avec* $g_1 \in AA(\mathbb{X})$ *et* $g_2 \in AA_0(\mathbb{X})$, *et commme*

$$\|g\|_\infty \leq \|g_1\|_\infty + \|g_2\|_\infty$$

*puisque* $AA_0(\mathbb{X})$ *est de Banach et* $AA(\mathbb{X})$ *est de Banach donc*

$$PAA(\mathbb{X})$$

*est de Banach.*

**Théorème 1.15.** *([12]) : Soit* $f = g + \Phi \in PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ *et on suppose les hyppothèses* $(H_1)$ *et* $(H_2)$ *suivantes sont verifiées :*

1. $(H_1)$ $f(t,x)$ *est uniformément continue sur n'importe quel sous-ensemble borné* $K \subset \mathbb{X}$ *uniformément en* $t \in \mathbb{R}$.
2. $(H_2)$ $g(t,x)$ *est uniformément continue sur n'importe quel sous-ensemble borné* $K \subset \mathbb{X}$ *uniformément en* $t \in \mathbb{R}$

*Si* $h \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, *alors* $f(., h(.)) \in PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$

## 1.4 Les fonctions pseudo-presque automorphes avec poids

Dénotons par$L^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions locallement intégrables sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathbb{U}$ défini par

$$\mathbb{U} := \{\rho \in L^1_{loc}(\mathbb{X}) : \rho(x) > 0, \text{ presque pour tout } x \in \mathbb{R}\}$$

Pour $R > 0$ donné, posons

$$m(R, \rho) = \int_{-R}^{R} \rho(x)dx$$

,
Définissons $U_\infty$

$$\mathbb{U}_\infty = \{\rho \in \mathbb{U} : \lim_{R\to\infty} m(R, \rho) = \infty\}$$

et

$$\mathbb{U}_B = \{\rho \in \mathbb{U}_\infty \rho \text{ bornée et } \inf_{x\in\mathbb{R}} \rho(x) > 0\}$$

**Définition 1.8.** Soit $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. On définit

$$PAA_0(\mathbb{R}, \rho) = \{f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X}) : \lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R, \rho)} \int_{-R}^{R} \|f(s)\|\rho(s)ds = 0\}$$

**Définition 1.9.** On définit $PAA_0(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \rho)$ comme la collection de toutes les fonctions $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ qui sont continues par rapport aux deux variables et $F(., y)$ est bornée pour chaque $y \in \mathbb{X}$, et

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{m(R,\rho)} \int_{-R}^{R} \|F(s,y)\|\rho(s)ds = 0,$$

uniformément par rapport à $y \in \mathbb{X}$

**Définition 1.10.** Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}(resp. f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X})$ est dite pseudo-presque automorphe avec poids (ou $\rho$-pseudo-presque automorphe) si elle s'écrit comme suit

$$f = g + \Phi,$$

où $g \in AA(\mathbb{X})(resp. g \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}))$ et $\Phi \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$ $(resp. \Phi \in PAA_0(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \rho))$ On note par $WPAA(\mathbb{R}, \rho)(resp. WPAA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \rho))$ l'ensemble de toutes ces fonctoins

**Remarque 1.5.** ([3]) Quand $\rho = 1$, on obtient les espaces standard $PAA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $PAA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

On donne ici un exemple d'une fonction qui est pseudo presque automorphe avec poids et qui n'est pas pseudo presque automorphe.

**Exemple 1.5.** *Soit $\rho(t) = \exp(t)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ Il est facile de voir que*

$$m(R, \rho) = \exp(R) - \exp(-R)$$

*d'où*

$$\lim_{R\to\infty} m(R,\rho) = \lim_{R\to\infty} (\exp(R) - \exp(-R)) = \infty$$

*et d'ici $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. Posons*

$$f(t) = \sin \frac{1}{2 + cost + cos\sqrt{2}t} + \exp(-t).$$

*Alors que $f$ appartient à $WPAA(\mathbb{R}, \rho)$. La fonction*

$$\sin \frac{1}{2 + cost + cos\sqrt{2}t}$$

*sa composante presque automorphe.*
*la composante ergodique avec poids de $f$ vérifie*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\exp(R) - \exp(-R)} \int_{-R}^{R} \exp(-t)\exp(t)dt = 0$$

*Tandis que*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \exp(-t)dt = +\infty$$

*D'ici, on déduit que $f$n'appartient pas à $PAA(\mathbb{X})$.*
*Citons quelque propriétés fondamentales des fonctions pseudo-presque automorphes avec poids*

**Lemme 1.2.** *([3]) Soit* $f \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ *c'est à dire,* $f = g + \Phi$ *avec* $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*, et* $\Phi \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$ *où* $\rho \in \mathbb{U}_B$*, alors* $g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$*.*

**Théorème 1.16.** *([3]) Pour chaque* $\rho \in \mathbb{U}_B$ *la décomposition d'une fonction pseudo-presque automorphe avec poids* $f = g + \Phi$*, où* $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *et* $\Phi \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$ *est unique.*

**Théorème 1.17.** *([3]) Si* $\rho \in \mathbb{U}_B$*, alors*

$$(WPAA(\mathbb{R}, \rho), \|.\|_\infty)$$

*est un espace de Banach.*

**Théorème 1.18.** *([3]) Soient* $\rho \in \mathbb{U}_B$*,* $f \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R})$*. Alors* $f \star g$ *la convolution de* $f$ *et* $g$ *sur* $\mathbb{R}$*, appartient à* $WPAA(\mathbb{R}, \rho)$*.*

**Définition 1.11.** Soient $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{U}_\infty$. On dit que $\rho_1$ est équivalent à $\rho_2$ ou $\rho_1 \sim \rho_2$ si seulement si $\frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathbb{U}_B$

**Remarque 1.6.** Si deux poids sont équivalents alors les espaces de fonctions pseudo presque automorphes avec poids correspondant coïncident.

**Théorème 1.19.** *([3]) Soit* $\rho \in \mathbb{U}_\infty$*,* $f = g + \Phi \in WPAA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \rho)$ *et on suppose que les hypothès suivantes* $(H_1)$ *et* $(H_2)$ *soient vérifiées*
*Si* $h \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$*, alors* $f(., h(.)) \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$

**Corollaire 1.3.** *([3]) Soit* $\rho \in \mathbb{U}_\infty$*,* $f = g + \Phi \in WPAA(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \rho)$ *et supposons que* $f$ *et* $g$ *sont lipschitziennes en* $x \in \mathbb{X}$ *uniformément en* $t \in \mathbb{R}$ *.*
*Si* $h \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$*, alors* $f(., h(.)) \in WPAA(\mathbb{R}, \rho)$*.*

**Proposition 1.5.** *Soit* $\rho \in \mathbb{U}_\infty$ *et supposons que les limites*

$$\limsup_{s \to \infty} \frac{\rho(s + \tau)}{\rho(s)}$$

*et*

$$\limsup_{R \to \infty} \frac{m(R + \tau, \rho)}{m(R, \rho)}$$

*Sont finies pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$*. Alors l'espace* $WPAA(\mathbb{R}, \rho)$ *est stable par translation.*

**Preuve.** *: Soit* $f \in PAA(\mathbb{R}, \rho)$ *avec* $f = g + \Phi$ *où* $g \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *et* $\Phi \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$ *nous allons montrer que*

$$f_\tau(.) = f(. - \tau) \in WPAA(\mathbb{R}, \rho),$$

$f_\tau(.) = g(. - \tau) + \Phi(. - \tau)$ *et* $f_\tau(.) = g_\tau(.) + \Phi_\tau(.)$ *où* $g_\tau(.) = g(. - \tau)$ *et* $\Phi_\tau(.) = \Phi(. - \tau)$

*on a déjà vu que* $g_\tau \in AA(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*. il reste à montrer que* $\Phi_\tau \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$*. Rappelons que* $\Phi_\tau \in PAA_0(\mathbb{R}, \rho)$ *si et seulement si*

$$\Phi_\tau \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$$

*et*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\|\Phi_\tau(t)\|\rho(t)dt=0$$

*Nous avons*

$$\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\|\Phi_\tau(t)\|\rho(t)dt=\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\|\Phi(t-\tau)\|\rho(t)dt$$

,

$$=\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R-\tau}^{R-\tau}\|\Phi(s)\|\rho(s+\tau)ds$$

$$=\frac{m(R+\tau,\rho)}{m(R,\rho)}\frac{1}{m(R+\tau,\rho)}\int_{-R-\tau}^{R-\tau}\|\Phi(s)\|\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}\rho(s)ds$$

$$\limsup_{R\to+\infty}\frac{m(R+\tau,\rho)}{m(R,\rho)}\frac{1}{m(R+\tau,\rho)}\int_{-R-\tau}^{R-\tau}\|\Phi(s)\|\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}\rho(s)ds$$

$$\leq\limsup_{R\to+\infty}\frac{m(R+\tau,\rho)}{m(R,\rho)}\frac{1}{m(R+\tau,\rho)}\int_{-R-\tau}^{R-\tau}\|\Phi(s)\|\limsup_{s\to+\infty}\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}\rho(s)ds$$

*et puisque les limites*

$$\limsup_{s\to\infty}[\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)}]$$

*et*

$$\limsup_{R\to\infty}[\frac{m(R+\tau,\rho)}{m(R,\rho)}]$$

*Sont finies pour tout* $\tau\in\mathbb{R}$, *et* $\Phi\in PAA_0(\mathrm{R},\rho)$, *Alors il s'ensuit que*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{m(R,\rho)}\int_{-R}^{R}\|\Phi_\tau(t)\|\rho(t)dt=0$$

*et finallement* $\Phi_\tau\in PAA_0(\mathbb{R},\rho)$

## 1.5 Fonctions Asymptotiquement presque automorphes

On définit $C_0(\mathbb{R}_+,\mathbb{X})$ par

$$C_0(\mathbb{R}_+,\mathbb{X})=\{\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{X},\varphi\text{continue et }\lim_{t\to\infty}\|\varphi(t)\|=0\}$$

**Définition 1.12.** Une fonction continue $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{X}$ est asymptotiquement presque automorphe s'il existe $g\in AA(\mathbb{X})$ et $h\in C_0(\mathbb{R}_+,\mathbb{X})$ tel que

$$f(t)=g(t)+h(t),t\in\mathbb{R}_+$$

la collection de toutes les fonctions asymptotiquement presque automorphe est notée par $AAA(\mathbb{X})$.
les fonction $g$ et $h$ sont appelées les termes principal et correctif de la fonction $f$

**Remarque 1.7.** La restriction de toute fonction presque automorphe sur $\mathbb{R}_+$ est un fonction asymptotiquement presque automorphe, il suffit de prendre $h(t) = 0$

**Théorème 1.20.** *Si $f, f_1, f_2$ sont des fonctions asymptotiqument presque automorphe alors les fonctions*

$$f_1 + f_2, \lambda f$$

*où $\lambda$ est un scalaire sont des fonctions asymptotiqument presque automorphe*

**Preuve.** *1)Supposons que $f_1$,$f_2$ sont dans $AAA(\mathbb{X})$ alors $f_1 = g_1 + h_1$ avec $g_1 \in AA(\mathbb{X})$ et $h_1 \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$.*
*$f_2 = g_2 + h_2$ tel que $g_2 \in AA(\mathbb{X})$ et $h_2 \in C_0(R_+, \mathbb{X})$ alors*

$$f_1 + f_2 = g_1 + h_1 + g_2 + h_2,$$

$$= (g_1 + g_2) + (h_1 + h_2),$$

*puisque $g_1 \in AA(\mathbb{X})$ et $g_2 \in AA(\mathbb{X})$ alors $g_1 + g_2 \in AA(\mathbb{X})$. Comme*

$$\|h_1 + h_2\| \leq \|h_1\| + \|h_2\|,$$

*donc*

$$\lim_{t\to\infty} \|h_1(t) + h_2(t)\| \leq \lim_{t\to\infty} \|h_1(t)\| + \lim_{t\to\infty} \|h_2(t)\| = 0,$$

*puisque $h_1, h_2$ sont dans $C_0(R_+, \mathbb{X})$, on obtient que $h_1 + h_2 \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$*
*2)Supposons que $\lambda$ est un scalaire et $f \in AAA(\mathbb{X})$, nous montrons que $(\lambda f) \in AAA(\mathbb{X})$.*
*Puisque $f \in AAA(\mathbb{X})$ alors*

$$f = g + h,$$

*tel que $g \in AA(\mathbb{X})$ et $h \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$.*
*alors*

$$\lambda f = \lambda g + \lambda h$$

*On a $g \in AA(\mathbb{X})$ donc $(\lambda g) \in AA(\mathbb{X})$, car $AA(\mathbb{X})$ est un espace de Banach.*
$\lim_{t\to\infty} \|(\lambda h)(t)\| = |\lambda| \lim_{t\to\infty} \|h(t)\| = 0$, *alors $(\lambda h) \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.*
*On obtient que $(\lambda f) \in AAA(\mathbb{X})$*

**Lemme 1.3.** *Si $f \in AAA(\mathbb{X})$ c'est à dire*

$$f = h + \Phi$$

*où $h \in AA(\mathbb{X})$ et $\Phi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ alors*

$$\{\overline{h(t) : t \in \mathbb{R}}\} \subset \{\overline{f(t) : t \in \mathbb{R}_+}\}$$

**Preuve.** *puisque $h$ est presqe automorphe il existe une suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\tau_n \to \infty$ telle que*

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} h(t+\tau_n) \tag{1.8}$$

$$h(t) = \lim_{n\to\infty} g(t-\tau_n) \tag{1.9}$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$*
*maintenant pour $t_0$ fixé nous avons $t_0 + \tau_n \to \infty$ d'après (1.8) on a*

$$f(t_0+\tau_n) = h(t_0+\tau_n) + \Phi(t_0+\tau_n) \to g(t_0)$$

*d'où*

$$\lim_{n\to+\infty} f(t_0+\tau_n) = g(t_0)$$

*par consiquent*

$$g(t_0) \in \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}_+\}},$$

*on déduit donc que*

$$\overline{\{g(t) : t \in \mathbb{R}\}} \subset \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}_+\}}$$

*d'après (1.8) et (1.9) on a*

$$\overline{\{g(t) : t \in \mathbb{R}\}} = \overline{\{h(t) : t \in \mathbb{R}\}}$$

*donc*

$$\overline{\{h(t) : t \in \mathbb{R}\}} \subset \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}_+\}}.$$

**Théorème 1.21.** *([5]) L'espace $(AAA(\mathbb{X}), \|.\|_{AAA})$ est un espace de Banach, où si $f = g+h$ avec $g \in AA(\mathbb{X})$ et $h \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ on a*

$$\|f\|_{AAA} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| + \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|h(t)\|$$

**Preuve.** *Conséquence directe du lemme précédent.*

**Théorème 1.22.** *La décomposition d'un fonction asymptotiquement presque automorphe est unique.*

**Preuve.** *Soit*

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{X}$$

*une fonction asymptotiquement presque automorphe admettant deux décompositions*

$$f(t) = g_i(t) + h_i(t), t \in \mathbb{R}^+, i = 1,2$$

*avec les termes principaux $g_1, g_2$ et les termes correctifs $h_1, h_2$ alors pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$ nous avons*

$$g_1(t) - g_2(t) + h_1(t) - h_2(t) = 0$$

*avec* $g_1(t) - g_2(t) \in AA(\mathbb{X})$ *et* $h_1(t) - h_2(t) \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$. *D'où* $g_1 - g_2 = h_2 - h_1$ *par suite* $g_1 - g_2 \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ *et donc*

$$\lim_{t\to\infty}(g_1(t) - g_2(t)) = 0$$

*Considèrons maintenant la suite* $(n)$ *des nombres naturels . Puisque* $g_1 - g_2$ *est presque automorphe nous pouvons extraire une sous-suite* $(n_k) \subseteq (n)$ *telle que*

$$\lim_{k\to\infty} g_1(t + n_k) - g_2(t + n_k) = F(t)$$

*et*

$$\lim_{k\to\infty} F(t - n_k) = g_1(t) - g_2(t)$$

*pour chaque* $t \in \mathbb{R}$ *ceci prouve* $F(t) = 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *et par conséquent* $g_1(t) - g_2(t) = 0$ *aussi . il en résulte que* $h_1(t) - h_2(t) = 0$ *pour chaque* $t \in \mathbb{R}^+$

**Théorème 1.23.** *Soit* $\mathbb{X}$ *est un espace de Banach sur le corps* $\mathbb{K}$ , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , *soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$ *et* $\nu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *des fonctions asymptotiquement presque automorphe alors les fonctions suivantes sont aussi asymptotiquement presque automorphes*

1. $f_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$ *define par*
$$f_a(t) = f(t + a)$$
*pour chaque a fixé dans* $\mathbb{R}_+$
2. $\nu f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$ *define par*
$$(\nu f)(t) = \nu(t).f(t)$$

**Preuve.** *1)On a* $f \in AAA(\mathbb{X})$ *alors*

$$f(t) = g(t) + h(t),$$

*telle que* $g \in AA(\mathbb{X})$ *et* $h \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ *soit* $a \in \mathbb{R}$, *on a*

$$f_a(t) = f(t + a) = g(t + a) + h(t + a)$$

*pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *puisque* $g(t) \in AA(\mathbb{X})$, *on obtient* $g(t + a) \in AA(\mathbb{X})$. *et*
*On a*

$$\lim_{t\to\infty} \|h(t + a)\| = \lim_{t\to\infty} \|h(t)\| = 0.$$

*C'est à dire* $h(t + a) \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ *donc* $f_a(t) \in AAA(\mathbb{X})$
*2)On a* $f \in AAA(\mathbb{X})$ *alors*

$$f(t) = g(t) + h(t),$$

*telle que* $g \in AA(\mathbb{X})$ *et* $h(t) \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ $v \in AAA(\mathbb{X})$ *alors*

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t),$$

*telle que* $v_1 \in AA(\mathbb{X})$ *et* $v_2 \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$
*La fonction* $vf$ *est continue et*

$$(vf)(t) = v(t)f(t) = (v_1(t) + v_2(t))(g(t) + h(t))$$

$$= v_1(t)g(t) + v_2(t)(g(t) + h(t)) + v_1(t)h(t)$$

*puisque* $v_1(t)g(t) = \frac{1}{2}[(v_1(t) + g(t))^2 - (v_1(t))^2 - (g(t))^2]$ *et* $v_1(t), g(t) \in AA(\mathbb{X})$ *donc* $v_1(t)g(t) \in AA(\mathbb{X})$.
*On a*

$$\begin{aligned} \|v_2(t)(g(t) + h(t)) + v_1(t)h(t)\| &\leq \|v_2(t)g(t) + v_2(t)h(t)\| + \|v_1(t)h(t)\| \\ &= \|v_2(t)g(t)\| + \|v_2(t)h(t)\| + \|v_1(t)h(t)\| \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\|\|v_2(t)\| + \|v_2(t)h(t)\| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|v_1(t)\|\|h(t)\| \end{aligned}$$

*puisque* $\lim_{t\to\infty} \|h(t)\| = 0$ *et* $\lim_{t\to\infty} \|v_2(t)\| = 0$ *on obtient*

$$\lim_{t\to\infty} \|v_2(t)(g(t) + h(t)) + v_1(t)h(t)\| = 0.$$

*donc* $v_2(t)(g(t) + h(t)) + v_1(t)h(t) \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ *c'est à dire* $(vf) \in AAA(\mathbb{X})$

**Théorème 1.24.** *Soit* $f$ *est une fonction dans* $AAA(\mathbb{X})$ *alors*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty$$

**Preuve.** *On a* $f \in AAA(\mathbb{X})$ *alors*

$$f(t) = g(t) + h(t),$$

*telle que* $g \in AA(\mathbb{X})$ *et* $h \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$
*on obtient*

$$\|f(t)\| = \|h(t) + g(t)\| \leq \|g(t)\| + \|h(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|h(t)\|$$

*donc* $\|f(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|h(t)\|$ *implique*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|h(t)\| < \infty$$

*puisque* $g \in AA(\mathbb{X})$ *donc* $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t)\| < \infty$, *et* $\lim_{t\to\infty} \|h(t)\| = o$, *donc* $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|h(t)\| < \infty$

**Proposition 1.6.** *([5]) Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset AAA(\mathbb{X})$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ *alors* $f \in AAA(\mathbb{X})$

### 1.5.1 Différentiation et intégration de fonctions asymptotiquement presque automorphes

Dans cette section , nous discutons de certaines situations dans les quelles les dérivés et intégrales de fonctions asymptotiquement presque automorphes.

**Définition 1.13.** Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach,$\mathbb{X}$ est dit parfait si toute fonction bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ avec une dériviée presque automorphe est nécessairement presque automorphe

**Théorème 1.25.** *Soit $\mathbb{X}$ est un espace de Banach parfait et*

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$$

*une fonction asymptotiquement presque automorphe avec $g$ et $h$ les termes pricipal et correctif respectivement . Supposons que $g'(t)$ existe pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $h'(t)$ existe pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ . Si en outre $f'(t)$ est asymptotiquement presque automorphe, alors $g'(t)$ et $h'(t)$ sont les termes principal et correctif de $f'(t)$ respectivement.*

**Preuve.** *Nous savons que $h'(t)$ existe sur $\mathbb{R}^+$, puisque $f'(t)$ est asymptotiquement presque automorphe, écrivons*

$$f'(t) = G(t) + H(t), t \in \mathbb{R}^+$$

*avec $G(t)$ et $H(t)$ sont les termes principal et correctif respectivement, nous devons montrer que $G(t) = g'(t)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $H(t) = h'(t)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$.*
*Prenons les fonctions $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ et $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{X}$ definies par*

$$\alpha(t) = \int_t^{t+\eta} G(s)ds, t \in \mathbb{R}$$

$$\beta(t) = \int_t^{t+\eta} H(s)ds, t \in \mathbb{R}^+$$

*pour un nombre réel fixé $\eta$, noter que $\beta$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et nous avons l'inégalité*

$$\|\beta(t)\| \leq |\eta|. \sup_{s \in I_\eta} \|H(s)\|$$

*où $I_\eta = [t + \eta, t]$ ou $I_\eta = [t, t + \eta]$ en fonction du signe de $\eta$. Puisque*

$$\lim_{t\to\infty} \|H(t)\| = 0$$

*on en déduit que*

$$\lim_{t\to\infty} \|\beta(t)\| = 0$$

*aussi, $\alpha$ est definie et continue sur $\mathbb{R}_+$ est bornée sur $\mathbb{R}$, puisque $G$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et comme $\mathbb{X}$ est un espace de Banach parfait, on en déduit que $\alpha$ est presque automorphe.*
*Considérons maintenant les égalités*

$$\alpha(t) + \beta(t) = \int_t^{t+\eta} G(s)ds + \int_t^{t+\eta} H(s)ds,$$

$$= \int_t^{t+\eta} (G(s) + H(s))ds,$$

*c'est à dire*

$$\alpha(t) + \beta(t) = \int_t^{t+\eta} f'(s)ds = f(t+\eta) - f(t).$$

*on a*

$$f(t+\eta) - f(t) = \alpha(t) + \beta(t)$$

*donc*

$$f(t+\eta) - f(t) = [g(t+\eta) - g(t)] + [h(t+\eta) - h(t)]$$

*où* $t \in \mathbb{R}^+$ *et* $\eta$ *est choisi de telle que* $t + \eta \geq 0$ *par l'unicité de la décomposition de la fonction asymptotiquement presque automorphe* $f(t+\eta) - f(t)$ *on a*

$$\alpha(t) = g(t+\eta) - g(t), t \in \mathbb{R}^+$$

$$\beta(t) = h(t+\eta) - h(t), t \in \mathbb{R}^+$$

*d'où*

$$G(t) = \lim_{\eta \to 0} \frac{\alpha(t)}{\eta} = \lim_{\eta \to 0} \frac{g(t+\eta) - g(t)}{\eta} = g'(t), t \in \mathbb{R}^+$$

*et*

$$H(t) = \lim_{\eta \to 0} \frac{\beta(t)}{\eta} = \lim_{\eta \to 0} \frac{h(t+\eta) - h(t)}{\eta} = h'(t), t \in \mathbb{R}^+$$

**Théorème 1.26.** *Soit* $\mathbb{X}$ *un espace de Banach et* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$ *une fonction asymptotiqueme presque automorphe. Considérons la fonction* $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$ *definie par*

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds$$

*et* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ *définie par*

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds, t \in \mathbb{R}$$

*où* $g$ *est le terme principal de* $f$*. Supposons que l'image de* $G$ *est relativement compacte dans* $\mathbb{X}$ *et que*

$$\int_0^\infty \|h(t)\|dt < \infty$$

*où* $h$ *est le terme correctif de* $f$*, alors* $F$ *est une fonction asymptotiquement presque automorphe, son terme principal est*

$$G(t) + \int_0^\infty h(s)ds$$

*et son terme correctif est*

$$H(t) = -\int_t^\infty h(s)ds$$

**Preuve.** *Comme l'image de $G$ est relativement compacte, par la Proposition 1.2, on a que $G(t)$ est presque automorphe il en est de même pour*

$$G(t) + \int_0^{\infty} h(s)ds$$

*car l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} h(s)ds$ existe dans $\mathbb{X}$. Maintenant la fonction continue $H(t) = -\int_t^{\infty} h(s)ds, t \in \mathbb{R}^+$ satisfait la propriété $\lim_{t\to\infty} \|H(t)\| = 0$.*
*Enfin observons que nous pouvons écrire*

$$F(t) = G(t) + \int_0^{\infty} h(s)ds + H(t), t \in \mathbb{R}$$

**Corollaire 1.4.** *([9]) Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach uniformément convexe, et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$ une fonction dans $AAA(\mathbb{X})$. Soit*

$$F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$$

*une fonction définie par*

$$F(t) = \int_0^{t} f(s)ds$$

*et soit la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ définie par*

$$G(t) = \int_0^{t} g(s)ds,$$

*où $g$ est le terme principal de $f$. Supposons que $G$ est bornée dans $\mathbb{X}$ et que $\int_0^{\infty} \|h(t)\|dt < \infty$ où $h$ est le terme correctif de $F$, alors $F$ est dans $AAA(\mathbb{X})$ son terme principal est*

$$G(t) + \int_0^{\infty} h(s)ds,$$

*et son terme correctif est*

$$H(t) = -\int_t^{\infty} h(s)ds$$

### 1.5.2 Théorèmes de composition

**Théorème 1.27.** *Soient $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ deux espaces de Banach et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction asymptotiquement presque automorphe avec*

$$f(t) = g(t) + h(t)$$

*où $g$ et $h$ sont ses termes principal et correctif respectivement. Soit*

$$\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$$

*une fonction continue. Supposons qu'il existe un compact $B$ qui contient les fermetures de $\{f(t)/t \in \mathbb{R}^+\}$ et $\{g(t)/t \in \mathbb{R}^+\}$.*
*Alors la fonction*

$$\phi(f(.)) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Y}$$

*est asymptotiquement presque automorphe*

**Preuve.** *Comme $g$ est presque automorphe, alors $\phi(g(t))$ est presque automorphe d'après le théorème 1.10 comme étant composée d'une fonction continue et une fonction presque automorphe. Puisque $\phi(f(t))$ et $\phi(g(t))$ sont continues,la fonction*

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Y}$$

*définie par*

$$\Gamma(t) = \phi(f(t)) - \phi(g(t)), t \in \mathbb{R}^+$$

*est aussi continue*
*Soit $\epsilon > 0$ donné, par continuité uniforme de $\phi$ sur l'ensemble compact $B$,nous pouvons choisir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que*

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon$$

*pour tout $x, y \in B$ tels que $\|x - y\|_X < \delta$. D'autre part ,puisque*

$$\lim_{t\to\infty} \|h(t)\| = 0$$

*il existe $t_0 = t_0(\delta) > 0$ tel que*

$$\|f(t) - g(t)\|_{\mathbb{X}} = \|h(t)\|_{\mathbb{X}} < \delta,$$

*pour chaque $t > t_0$.*
*Maintenant,si $t > t_0$ on obtient*

$$\|\Gamma(t)\|_{\mathbb{Y}} = \|\phi(f(t)) - \phi(g(t))\|_{\mathbb{Y}} < \epsilon$$

*Ce qui prouve que*

$$\lim_{t\to\infty} \|\Gamma(t)\| = 0$$

*La fonction $\phi(f(t))$ est alors asymptotiquement presque automorphe son terme principal est $\phi(g(t))$ et son terme correctif est $\Gamma(t)$.*

Soit $C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions conjointement continue $\psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ telle que $\lim_{t\to\infty} \|\psi(t, x)\| = 0$ uniformément sur les parties bornées de $\mathbb{X}$. On a alors les définitions suivantes :

**Définition 1.14.** Une fonction conjointement continue
$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ , $(t, x) \mapsto F(t, x)$ est dite asymptotiquement presque automorphe si

$$t \mapsto F(t, x)$$

est asymptotiquement presque automorphe uniformément sur n'importe quel sous ensemble bornée $B \subset \mathbb{X}$ , autrement dit

$$F = H + \Phi$$

où $H \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X})$ et $\Phi \in C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X})$.
l'ensemble de ces fonctions est noté par

$$AAA(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X})$$

**Définition 1.15.** une fonction conjointement continue

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$$

$$(t, x) \mapsto F(t, x)$$

est appelée compact asymptotiquement presque automorphe si

$$t \mapsto F(t, x)$$

est compact asymptotiquement presque automorphe uniformément sur n'importe quel sous ensemble borné $B \subset \mathbb{X}$, autrement dit

$$F = H + \Phi$$

où

$$H \in KAA(\mathbb{R} \times \mathbb{X})$$

et

$$\Phi \in C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X})$$

Soit $KAAA(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X})$ l'ensemble des ces fonctions.

**Théorème 1.28.** *Soit $F \in AAA(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ et posons*

$$F = H + \Phi$$

*où*

$$H \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X})$$

*et*

$$\Phi \in C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X}).$$

*Supposons que $H$ est Lipschitz en $x \in \mathbb{X}$ uniformément en $t$ alors il existe $L > 0$ tel que*

$$\|H(t, x) - H(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

*pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ , $t \in \mathbb{R}$. Si*

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$$

*est asymptotiquement presque automorphe , alors la fonction*

$$\Gamma(t) = F(t, g(t)) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$$

*est asymptotiquement presque automorphe*

**Preuve.** *Soit*

$$F = H + \Phi$$

*où* $H \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X})$ *et* $\Phi \in C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X})$ *et soit*

$$g = h + \varphi$$

*où* $h \in AA(\mathbb{X})$ *et* $\varphi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$. *On a*

$$F(t, g(t)) = H(t, h(t)) + [F(t, g(t)) - H(t, h(t))]$$

$$= H(t, h(t)) + [H(t, g(t)) - H(t, h(t)) + \Phi(t, g(t))].$$

*Comme la fonction* $g$ *est bornée, on a clairement* $t \mapsto \Phi(t, g(t))$ *qui est dans* $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$. *Maintenant*

$$\begin{aligned} \|H(t, g(t)) - H(t, h(t))\| &\leq L\|g(t) - h(t)\| \\ &\leq L\|\varphi(t)\| \end{aligned} \tag{1.10}$$

*, d'où la fonction*

$$t \mapsto H(t, g(t)) - H(t, h(t))$$

*est dans* $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$.*De plus d'après le théorème 1.11*

$$t \mapsto H(t, h(t))$$

*est presque automorphe. On déduit finalement que* $F$ *est asymptotiquement presque automorphe.*

**Théorème 1.29.** *Supposons que*

$$F = G + \Phi$$

*est asymptotiquement presque automorphe où*

$$G \in AA(\mathbb{R} \times \mathbb{X})$$

*et*

$$\Phi \in C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X})$$

*avec*

$$x \mapsto G(t, x)$$

*uniformément continue sur chaque sous ensemble bornée* $B \subset \mathbb{X}$ *uniformément en* $t \in \mathbb{R}_+$ *Si*

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$$

*est asymptotiquement presque automorphe, alors la fonction*

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$$

$$t \mapsto \Gamma(t, g(t))$$

*est asymptotiquement presque automorphe*

**Preuve.** *Ecrivons* $g = \alpha + \beta$ *où* $\alpha \in AA(\mathbb{X})$ *et* $\beta \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$. *On alors*

$$F(t, g(t)) = G(t, \alpha(t)) + F(t, g(t)) - G(t, \alpha(t))$$

$$= G(t, \alpha(t)) + G(t, g(t)) - G(t, \alpha(t)) + \Phi(t, g(t))$$

*d'après le théorème 1.11, il résulte que la fonction* $t \mapsto G(t, \alpha(t))$ *est presque automorphe. Comme* $g$ *est bornée et* $\Phi \in C_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{X})$ *il en résulte que* $t \mapsto \Phi(t, g(t))$ *appartient à* $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$. *Puisque* $g(t), \alpha(t)$ *sont bornées ,il existe un ensemble borné* $K \subset \mathbb{X}$ *tel que*

$$g(t), \alpha(t) \in K$$

*pour chaque* $t \in \mathbb{R}_+$, *en utilisant le fait que* $\beta \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$ *il en résulte que pour tout* $\delta > 0$ *fixe il existe* $A > 0$ *tel que*

$$\|g(t) - \alpha(t)\| = \|\beta(t)\| < \delta,$$

*pour* $t > A$. *Donc pour tout* $\epsilon > 0$ *donné on a*

$$\|G(t, g(t)) - G(t, \alpha(t))\| < \epsilon$$

*pour* $t > A$, *donc la fonction* $G(t, g(t)) - G(t, \alpha(t))$ *est dans* $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{X})$. *Finalement la fonction* $t \mapsto F(t, g(t))$ *est asymptotiqument presque automorphe.*

## 1.6 Les fonctions presque automorphes et les opérateurs linéaires

**Proposition 1.7.** *Si* $A$ *est un opérateur linéaire borné sur* $\mathbb{X}$ *et*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*est une fonction presque automorphe alors*

$$(Af)(t)$$

*est aussi presque automorphe*

**Preuve.** *Comme* $A$ *est un opérateur bornée sur* $\mathbb{X}$ *alors continue sur* $\mathbb{X}$ *et puisque* $f$ *est presque automorphe donc,pour toute suite de nombres réels* $(s'_n)$ *on peut extraire une sous-suite* $(s_n)$ *telle que*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f(t + s_n - s_m) = f(t),$$

*on obtient*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (Af)(t + s_n - s_m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} A(f(t + s_n - s_m))$$

$$= A(\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f(t + s_n - s_m)),$$

$$= A(f(t)).$$

*alors* $A(f) \in AA(\mathbb{X})$

**Théorème 1.30.** *Supposons que $A$ est un opérateur linéaire borné sur $\mathbb{X}$ et*

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

*est presque automorphe pour chaque $x_0 \in D(A)$ le domaine de $A$ alors $\inf_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| > 0$ ou $x(t) = 0$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$*

**Preuve.** *Supposons que $\inf_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| = 0$ et soit $(s'_n)$ une suite de nombres réels telle que $\lim_{n\to+\infty} \|x(s'_n)\| = 0$, on peut extraire une sous-suite $(s_n) \subseteq (s'_n)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} x(t+s_n) = y(t)$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} y(t-s_n) = x(t)$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$.*
*Maintenant,*

$$x(t+s_n) = e^{tA}e^{s_nA}x_0 = e^{tA}x(s_n).$$

*alors*

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} x(t+s_n) = e^{tA} \lim_{n\to\infty} x(s_n) = 0,$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$, d'où $x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$*

**Théorème 1.31.** *([9]) Soit $T = (T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ un $C_0-$groupe d'opérateurs linéaires. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction presque automorphe telle que pour tout $x \in \mathbb{X}$ la fonction*

$$T(t)x : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*est presque automorphe. Alors la fonction*

$$T(t)f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{X},$$

*est presque automorphe.*

# Chapitre 2

# Solutions presque automorphes de l'équation $x' = Ax + f$

Nous considérons dans un espace de Banache $\mathbb{X}$, l'équation différentielle

$$x'(t) = Ax(t) + f(t). \tag{2.1}$$

Nous présentons diverses conditions pour assurer l'existance d'une solution presque automorphe de cette équation .

**Définition 2.1.** Une solution (forte ou classique) de l'équation (2.1) est une fonction $x(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ telle que (2.1) est vraie pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

## 2.1 Le cas $A$ scalaire

**Théorème 2.1.** *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach. Si $A$ est un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re\lambda \neq 0$ et*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*une fonction presque automorphe, alors toute solution borneé de* (2.1) *est presque automorphe.*

**Preuve.** *Déterminons dans un premier lieu les solutions bornées de notre équation.*
*On sait que les solutions de l'équation homogène sont données par*

$$x(t) = C.e^{\lambda t}$$

*où $C \in \mathbb{X}$. On cherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, ce qui conduit à chercher $x$ sous la forme $y(t) = C(t)e^{\lambda t}$. On doit avoir*

$$C'(t)e^{\lambda t} + \lambda C(t)e^{\lambda t} = \lambda C(t)e^{\lambda t} + f(t),$$

*donc* $C'(t) = e^{-\lambda t}f(t)$. *On déduit que les solutions sont données par*

$$x(t) = e^{\lambda t}(C + \int_0^t e^{-\lambda s}f(s)ds).$$

*On doit à présent distinguer deux cas.On pose* $a = Re\lambda$

– *premier cas :*$a > 0$.
  *Comme* $\lim_{t\to+\infty}|e^{\lambda t}| = \lim_{t\to+\infty} e^{at} = +\infty$, *il est nécessaire que*

$$\lim_{t\to+\infty}(C + \int_0^t e^{-\lambda s}f(s)ds) = 0.$$

  *On prend donc*

$$C = -\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}f(s)ds$$

  *(cette intégrale existe bien car en notant* $M = sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|$ *on a* $0 \leq \|e^{-\lambda s}f(s)\| \leq Me^{-as}$*). Le seul candidat est donc*

$$x_1(t) = -e^{\lambda t}\int_t^{+\infty} e^{-\lambda s}f(s)ds,$$

  *donc*

$$x_1(t) = -\int_t^{\infty} e^{\lambda(t-s)}f(s)ds$$

– *Deuxième cas :*$a < 0$.
  *On procède de la même manière,cette fois-ci en considérant le fait que* $\lim_{t\to-\infty}|e^{\lambda t}| = \lim_{t\to-\infty}|e^{at}| = +\infty$. *on trouve*

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^t e^{\lambda(t-s)}f(s)ds$$

*Montrons maintenant que* $x_1(t)$ *est presque automorphe. Soit alors* $s = t - r$, *nous pouvons écrire* $x_1(t)$ *sous la forme*

$$x_1(t) = -\int_{-\infty}^0 e^{\lambda s}f(t-s)ds.$$

*Considérons* $(s'_n)$ *une suite de nombres réels . puisque* $f$ *est presque automorphe , alors il existe une sous -suite* $(s_n) \subset (s'_n)$ *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} f(t + s_n) = g(t)$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} g(t - s_n) = f(t)$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} f(t-s+s_n) = g(t-s)$$

*pour chaque $s \in \mathbb{R}$, d'où*

$$x_1(t+s_n) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s} f(t-s+s_n)ds$$

*on remarque que :*

$$\|e^{\lambda s} f(t-s+s_n)\| \leq e^{(Re\lambda)s} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$$

*et notons que la fonction $e^{Re\lambda} s \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$ est dans $L^1(-\infty, 0)$ car $Re\lambda > 0$. En appliquant alors le théorème de la convergence dominée de Lebesgue en remarque que $g$ est continue et bornée, nous obtenons*

$$\lim_{n\to\infty} x_1(t+s_n) = \lim_{n\to\infty}(-\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s} f(t-s+s_n)ds)$$
$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s} \lim_{n\to\infty}(f(t-s+s_n))ds$$

*donc*

$$\lim_{n\to\infty} x_1(t+s_n) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s} g(t-s)ds$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Posons $y(t) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s} g(t-s)ds$. Nous pouvons appliquer le même raisonnement pour obtenir que*

$$\lim_{n\to\infty} y(t-s_n) = x_1(t)$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$.*
*On montre de la même manière que $x_2(t)$ est presque automorphe*

**Théorème 2.2.** *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach uniformément convexe. Si $A$ est un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re\lambda = 0$ et*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*une fonction presque automorphe, alors toute solution borneé de (2.1) est presque automorphe.*

**Preuve.** *les solutions sont données par*

$$x(t) = e^{\lambda t}(C + \int_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds).$$

*On a $\lambda = ib$ et $e^{\lambda t}$ est bornée par suite la solution $x(t)$ est bornée ssi $\int_0^t e^{-\lambda s} f(s)ds$ l'est aussi. Dans ce cas $x(t)$ est presque automorphe d'après le corollaire 1.1*

## 2.2 Le cas A est un opérateur linéaire borné

**Théorème 2.3.** *Soit $A$ un opérateur linéaire*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

*et*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

*est une fonction presque automorphe alors chaque solution bornée $x(t)$ de (2.1) est presque automorphe*

**Preuve.** *Soit $B$ un opérateur linéaire inversible de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $B^{-1}AB$ triangulaire avec la représentation*

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

*où $\lambda_1, \lambda_2, ......\lambda_n$ sont les valeurs propres de $A$*

*Soit $x(t)$ une solution bornée de (2.1) et on pose*

$$y(t) = B^{-1}x(t)$$

*alors $y(t)$ est aussi bornée et satisfait à l'equation*

$$y'(t) = B^{-1}x'(t) = B^{-1}Ax(t) + B^{-1}f(t)$$

$$= (B^{-1}AB)y(t) + B^{-1}f(t).$$

*remarque alors que :*

$$B^{-1}f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

*est presque automorphe puisque $B^{-1}$ est un opérateur linéaire borné. Nous pouvons écrire l'equation ci-dessus comme suit*

$$y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + c_{12}y_2(t) + ... + c_{1n}y_n(t) + g_1(t)$$

$$y_2'(t) = ....................\lambda_2 y_2(t) + ...c_{2n}(t) + g_2(t)$$

$$.................................................$$

$$y_{n-1}'(t) = ..........\lambda_{n-1}y_{n-1}(t) + c_{n-1}y_n(t) + g_{n-1}(t)$$

$$y_n'(t) = .................................\lambda_n y_n(t) + g_n(t)$$

*où*

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), ....., y_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

*et*
$$(g_1(t), ........, g_n(t)) = B^{-1}f(t), t \in \mathbb{R}^n.$$
*Maintenant* $y_n(t)$ *est une solution presque automorphe de dernière équation, on remonte jusqu'à* $y_1(t)$. *Ce qui prouve que* $y(t)$ *est presque automorphe et par conséquent*

$$x(t) = By(t)$$

*est presque automorphe.*

**Théorème 2.4.** *Supposons que* $A$ *est un opérateur linéaire borné auto-adjoint dans un espace de Hilbert* $\mathbb{X}$ *qui vérifie la propriété*

$$m_1\|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq m_2\|x\|^2$$

*pour chaque* $x \in \mathbb{X}$, *où*
$$m_1 < m_2 < 0$$
*Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ *presque automorphe, alors la solution presque automorphe* $x(t)$ *de l'equation differentielle* (2.1) *est donnée par la représentation :*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

*ou*
$$x(t) = \int_{0}^{\infty} e^{As}f(t-s)ds$$

*et l'on a*
$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{|m_2|} sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|$$

**Preuve.** *Remarquons au début que notre équation admet une seule solution bornée sur l'axe réel.*
*En effet, si* $x_1(t), x_2(t)$ *étaient deux solutions bornées, leur différence* $v(t)$ *est une solution bornée sur* $\mathbb{R}$, *de l'équation homogène associeé* $v'(t) = Av(t)$.
*En multipliant scalairement par* $v(t)$, *on déduit la relation*

$$\langle v'(t), v(t)\rangle = \langle Av(t), v(t)\rangle$$

*et aussi l'égalité*
$$\langle v(t), v'(t)\rangle = \langle v(t), Av(t)\rangle = \langle Av(t), v(t)\rangle,$$

*on obtient donc que :*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 = \langle Av(t), v(t)\rangle \leq m_2\|v(t)\|^2 \leq 0,$$

*et par coséquent la fonction $\|v(t)\|^2$ est non-croissante. En intégrant de -R à 0, on trouve l'inégalité*

$$\frac{1}{2}(\|v(0)\|^2 - \|v(-R)\|^2) \leq m_2 \int_{-R}^{0} \|v(\sigma)\|^2 d\sigma,$$

*ou bien*

$$\frac{1}{2|m_2|}(\|v(-R)\|^2 - \|v(0)\|^2) \geq \int_{-R}^{0} \|v(\sigma)\|^2 d\sigma.$$

*Comme $\|v(t)\|^2$ reste bornée, elle aura une limite finie pour $t \to -\infty$, et cette limite est positive, on déduit que*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} \|v(\sigma)\|^2 d\sigma = \infty.$$

*Par conséquent,*

$$\lim_{R\to\infty} \|v(-R)\|^2 = \infty$$

*aussi, absurde puisque $\lim_{t\to-\infty} \|v(t)\|^2 < \infty$*

*Remarquons maintenant que toute solution $w(t)$ de l'équation $w'(t) = Aw(t)$ ne s'annule jamais si $w(0) \neq 0$. Par conséquent, dans l'inégalité*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 \leq m_2\|w(t)\|^2,$$

*on peut diviser par $\|w(t)\|^2$, et on en déduit que*

$$\frac{d}{dt} \ln \|w(t)\|^2 \leq 2m_2$$

*, en intégrant ensuite de 0 à $t > 0$, on obtient*

$$\ln \frac{\|w(t)\|^2}{\|w(0)\|^2} \leq 2m_2 t,$$

*ou donc $\frac{\|w(t)\|^2}{\|w(0)\|^2} \leq e^{2m_2 t}$, et enfin $\|w(t)\|^2 \leq e^{2m_2 t}\|w(0)\|^2$, où encore, puisque $w(t) = w(0)e^{At}$, $\|w(0)e^{At}\| \leq e^{m_2 t}\|w(0)\|$, ici $w(0)$ est un élément arbitraire de $X$ par conséquent, pour tout $t > 0$, on a l'inégalité*

$$\|e^{At}\| \leq e^{m_2 t}$$

*qui est fondamentale dans le reste de la démonstration.*

$$\|x(t)\| = \| \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} f(s) ds\| \leq \int_{-\infty}^{t} \|e^{A(t-s)} f(s)\| ds$$
$$\leq \int_{-\infty}^{t} \|e^{A(t-s)}\|.\|f(s)\| ds$$

*pour chaque $t - r > 0$*

$$\|x(t)\| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} \|f(s)\| \int_{-\infty}^{t} e^{m_2(t-r)} dr$$

*puisque* $\int_{-\infty}^{t} e^{m_2(t-r)}dr = \frac{1}{|m_2|}$ *on a*

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{|m_2|} \sup_{s\in\mathbb{R}} \|f(s)\|$$

*pour chaque* $t \in \mathbb{R}$, *ce que prouve qui* $x(t)$ *est borné sur* $\mathbb{R}$ *,soit* $(s'_n)$ *une suite arbitrare dans* $\mathbb{R}$ *puisque* $f$ *est presque automorphe , nous pouvons extraire une sous -suite* $(s_n) \subset (s'_n)$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} f(t-s+s_n) = g(t-s)$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} g(t-s-s_n) = f(t-s)$$

*pour chaque* $t, s \in \mathbb{R}$, *écrivons*

$$x(t+s_n) = \int_0^{\infty} e^{As} f(t-s+s_n)ds,$$

*On a*

$$\|e^{As}f(t-s+s_n)\| \leq \|e^{As}\|.\|f(t-s+s_n)\| \leq \|e^{As}\|. \sup_{r\in\mathbb{R}} \|f(r)\|$$

*comme* $\|e^{As}\| \leq e^{m_2 s}$ *donc*

$$\|e^{As}f(t-s+s_n)\| \leq e^{m_2 s} \sup_{r\in\mathbb{R}} \|f(r)\|$$

*pour chaque* $s > 0$. *Nous appliquons alors le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour obtenir :*

$$\lim_{n\to\infty} x(t+s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{As} f(t-s+s_n)ds$$

$$= \int_0^{\infty} e^{As} \lim_{n\to\infty} f(t-s+s_n)$$

*d'où*

$$\lim_{n\to\infty} x(t+s_n) = \int_0^{\infty} e^{As} g(t-s)ds$$

*pour tout* $\mathbb{R}$. *Posons*

$$y(t) = \int_0^{\infty} e^{As} g(t-s)ds, t \in \mathbb{R}$$

*comme ci-dessus , nous pouvons écrire*

$$y(t-s_n) = \int_0^{\infty} e^{As} g(t-s-s_n)ds, n = 1, 2, 3, ......$$

*et obtenir*

$$\lim_{n\to\infty} y(t-s_n) = x(t)$$

*pour tout* $t \in \mathbb{R}$

## 2.3 Le cas $A$ est un générateur infinitésimal d'un $C_0$-groupe d'opérateurs

On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est continue et $A$ est un générateur d'un $C_0$-groupe d'opérateurs linéaires
$T = (T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{X}$. Rapplons-nous d'abord la définition d'une solution "mild" :

**Définition 2.2.** Une fonction $x(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ avec la représentation intégrale

$$x(t) = T(t)x(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

est appeleé une solution "mild" de l'équation différentielle(2.1)

**Remarque 2.1.** Chaque solution forte de (2.1) est une solution "mild" de (2.1) et toute solution "mild" de (2.1) qui est dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est une solution forte de (2.1)

**Théorème 2.5.** *supposons que la fonction $T(t)x : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est presque automorphe pour chaque $x \in \mathbb{X}$ et que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \bigcap L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ alors chaque solution "mild" de (2.1) limité à $\mathbb{R}^+$ est asymptotiquement presque automorphe*

**Preuve.** *Soit*

$$x(t) = T(t)x(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

*est une solution "mild" de (2.1) et considèrons $\nu(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{X}$ tel que*

$$\nu(t) = \int_t^\infty T(t-s)f(s)ds$$

*$\nu(t)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et*

$$\lim_{t\to\infty} \|\nu(t)\| = 0$$

*en effet,en utilisant le principe d'uniforme bornitude,on a*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\| = M < \infty$$

*Alors*

$$\|\nu(t)\| \leq M \int_t^\infty \|f(s)\|ds \to 0, t \to \infty$$

*Maintenant la fonction*

$$u(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*défini par*

$$u(t) = T(t)x(0) + \int_0^\infty T(t-s)f(s)ds$$

$$= T(t)(x(0) + \int_0^\infty T(-s)f(s)ds)$$

*est presque automorphe puisque*

$$T(-t)f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*est une fonction continue et*

$$\int_0^\infty \|T(-s)f(s)\|ds \leq M \int_0^\infty \|f(s)\|ds < \infty$$

*donc* $\int_0^\infty T(-s)f(s)ds$ *existe dans* $\mathbb{X}$*. maintenant, nous remarquons que*

$$x(t) = u(t) - v(t)$$

$t \in \mathbb{R}^+$ *de façon que* $x(t)$ *soit asymptotiquement presque automorphe.*

**Lemme 2.1.** *(Voir [9]) Soit*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*une fonction avec une image relativement compacte dans* $\mathbb{X}$ *et* $T = (T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *un* $C_0$*-groupe d'opérateurs linéaires tel que l'ensemble*

$$\{T(t)x/t \in \mathbb{R}\}$$

*est relativement compact dans* $\mathbb{X}$*, pour chaque* $x \in \mathbb{X}$*. Alors*

$$\{T(t)f(t)/t \in \mathbb{R}\}$$

*est relativement compact dans* $\mathbb{X}$

**Théorème 2.6.** *Suposons que*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*est une fonction presque automorphe et*

$$T(t)x : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*est presque automorphe pour chaque* $x \in \mathbb{X}$*, alors toute solution "mild" de* (2.1) *avec une image relativement compacte dans* $\mathbb{X}$ *est presque automorphe.*

**Preuve.** *Soit* $x$ *une solution "mild" avec une image relativement compacte dans* $\mathbb{X}$*. Remarquons que* $T(t)x(0)$ *est presque automorphe. Soit alors*

$$\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$

*définie par*

$$\nu(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

*puisque*
$$\nu(t) = x(t) - T(t)x(0)$$
*son image est relativemment compacte dans* $\mathbb{X}$. *Maintenant comme* $T(-t)x$ *est presque automorphe pour chaque* $x \in \mathbb{X}$, *l'ensemble* $\{T(-t)x : t \in \mathbb{R}\}$ *est relativement compact dans* $\mathbb{X}$ *pour chaque* $x \in \mathbb{X}$. *Par suite, on déduit (d'après le lemme 2.1) que l'ensemble* $\{T(-t)\nu(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *est relativement compacte dans* $\mathbb{X}$. *On a*
$$T(-t)\nu(t) = \int_0^t T(-s)f(s)ds$$
*et puisque* $T(-s)f(s)$ *est presque automorphe la fonction* $T(-t)\nu(t)$ *est alors presque automorphe (d'après le théorème 1.31 ). D'où* $\nu(t)$ *est presque automorphece. Finalement* $x(t)$ *est presque automorphe comme somme de deux fonctions presque automorphes.*

**Corollaire 2.1.** *Soit* $\mathbb{X}$ *un espace de Banach uniformément convexe et*
$$T(t)x : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$
*est presque automorphe pour chaque* $x \in \mathbb{X}$, *supposons aussi la fonction*
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$
*est un presque automorphe. alors chaque solution "mild" bornée* $x(t)$ *de* (2.1) *est presque automorphe*

**Théorème 2.7.** *([9]) Soit* $\mathbb{X}$ *un espace de Banach et* $T = (T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un* $C_0$*-semigroupe engendré par l'opérateur linéaire* $A$. *Supposons que le semigroupe est asymptotiqument stable c'est à dire que :*
$$\lim_{t\to\infty} T(t)x = 0$$
*pour chaque* $x \in \mathbb{X}$ *Soit*
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$
*une fonction presque automorphe .*
*Si* $x(t)$ *est une solution "mild" de (2.1) avec une image relativement compacte dans* $\mathbb{X}$, *alors* $x(t)$ *est presque automorphe*

**Théorème 2.8.** *([9]) Supposons que* $A$ *est un opérateur borné et*
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$$
*est presque automorphe. Soit* $x(t)$ *une solution forte de (2.1)avec une image relativement compacte dans* $\mathbb{X}$ *, Suposons aussi qu'il existe un sous-espace fini* $\mathbb{X}_1$ *de* $\mathbb{X}$ *avec les propriétés suivante :*

1. $e^{tA}u \in \mathbb{X}_1$ , $\forall u \in \mathbb{X}_1$,$\forall t \in \mathbb{X}_1$
2. $Ax(0) \in \mathbb{X}_1$
3. $(e^{tA} - I)f(s) \in \mathbb{X}_1$,$\forall t, s \in \mathbb{R}$

*Alors* $x(t)$ *est presque automorphe,*

# Annexe

## 2.4 Operateus linéaires

**Définition 2.3.** Prenons deux espaces normés $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ et un opérateur linéaire

$$A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$$

nous définissons la norme de $A$ par

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{\mathbb{X}}=1} \|Ax\|_{\mathbb{Y}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{Y}}}{\|x\|_{\mathbb{X}}}$$

**Définition 2.4.** Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces de Banach. un opérateur linéaire $A$ de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$ est dit continu au point $x \in \mathbb{X}$ si pour toute suite $(x_n) \subset X$ tel que $x_n \to x$ , nous avons

$$Ax_n \to Ax$$

c'est à dire que :

$$\|Ax_n - Ax\|_{\mathbb{Y}} \to 0$$

quand

$$\|x_n - x\|_{\mathbb{X}} \to 0$$

**Définition 2.5.** Soit $A$ un opérateur linéaire

$$A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$$

sur un espace de Banach $\mathbb{X}$. On dit que $A$ est borné s'il existe une constante réelle positive $M$ telle que

$$\|Ax\|_{\mathbb{Y}} \leq M\|x\|_{\mathbb{X}}$$

pour tout $x \in \mathbb{X}$

**Remarque 2.2.** 1. L'ensemble des operateurs bournés de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$ est noté par $B(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$

2. Un opérateur linéaire $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ est continue ssi $A$ est borné

**Exemple 2.1.** *Soient $a, b$ deux constantes réelles et $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = C[a, b]$ qui est l'ensemble de toutes les fonctions continues de $[a, b]$ ,muni de la norme sup. $\|\|_\infty$. Soit l'opérateur définie par.*

$$(Af)(t) = \int_a^t f(s)ds,$$

*pour chaque $t \in [a, b]$ et $f \in C[a, b]$.*
*puisque on a*

$$\|(Af)\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \| \int_a^b f(s)ds\| \leq (b-a)\|f\|_\infty$$

*alors l'opérateur linéaire $A$ est continue.*

### 2.4.1 Adjoint pour les opérateurs bornés

**Définition 2.6.** -Soient $(\mathbb{H}_1, \langle ., .\rangle_1, \|.\|_1)$ et $(\mathbb{H}_2, \langle ., .\rangle_2, \|.\|_2)$ deux espaces de Hilbert Soit $A \in B(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$, pour chaque $y \in \mathbb{H}_2$ la fonctionnelle

$$x \mapsto \zeta_y = \langle Ax, y\rangle_2$$

est linéaire et bornée donc du théorème de représentation de Riesz il existe un unique $y^* \in \mathbb{H}_1$ tel que $\forall x \in \mathbb{H}_1$

$$\langle Ax, y\rangle_2 = \zeta_y(x) = \langle x, y^*\rangle_1$$

la transformation

$$A^* : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_1$$

définie par

$$y \mapsto y^* = A^*y$$

est appelé adjoint de l'opérateur $A$. Compte tenu de ce qui précède, on a :

$$\langle Ax, y\rangle_2 = \langle x, A^*y\rangle_1$$

pour chaque $x \in \mathbb{H}_1, y \in \mathbb{H}_2$

**Proposition 2.1.** *Si $A : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ est un opérateur linéaire borné alors $A^* \in B(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ de plus*

$$\|A\| = \|A^*\|$$

**Proposition 2.2.** *si*

$$A : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$$

*est un opérateur linéaire borné alors $A^*A \in B(\mathbb{H}_1)$ et $AA^* \in B(\mathbb{H}_2)$. De plus*

$$\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A^*\|^2 = \|A\|^2$$

**Proposition 2.3.** *Si $A, B$ sont des opérateurs linéaires bornés sur $\mathbb{H}_1$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors*

1. $I^* = I$
2. $O^* = O$
3. $(A+B)^* = A^* + B^*$
4. $(\lambda A) = \overline{\lambda} A^*$
5. $(AB)^* = A^* B^*$

**Définition 2.7.** un opérateur linéaire borné

$$A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

est appelé auto-adjoint(self-adjoint ) ou symétrique si

$$A^* = A$$

**Exemple 2.2.** *Soit l'opérateur $A$ défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par*

$$(Ax)(t) = e^{-|t|} x(t),$$

*$A$ est un opérateur borné continue auto-adjoint puisque on a*

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} x(t) \overline{y(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{e^{-|t|} y(t)} dt \\ &= \langle x, Ay \rangle \end{aligned}$$

**Proposition 2.4.** *Si $A \in B(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ alors on a à la fois $A^*A$ et $AA^*$ sont auto-adjoints.*

**Proposition 2.5.** *Soit $A : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ est un opérateur borné auto-adjoint alors on a les propriétés suivantes*

1. *$\langle Ax, x \rangle_1 \in \mathbb{R}$ pour chaque $x \in \mathbb{H}_1$*
2. *$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle Ax, x \rangle_1|}{\|x\|^2}$*
3. *Si $B \in B(\mathbb{H}_1)$ est auto-adjoint et $AB = BA$ alors $AB$ est aussi auto-adjoint*

### 2.4.2 L'opérateur inverse

**Définition 2.8.** Un opérateur $A \in B(\mathbb{H})$ est appelé inversible s'il existe $B \in B(\mathbb{H})$ tel que

$$AB = BA = I$$

dans ce cas l'opérateur $B$ est appelé opérateur inverse de $A$ et noté par $B = A^{-1}$

**Définition 2.9 (Principe d'uniforme bornitude).** Soit $F$ une famille non vide d'opérateurs bornés sur un espace de Banach $\mathbb{X}$. Si pour tout $x \in \mathbb{X}$, $\sup_{A \in F} \|Ax\| < \infty$, alors

$$\sup_{A \in F} \|A\| < \infty.$$

## 2.5 Semi-groupes des opérateurs liéaires

**Définition 2.10.** Une famille d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est dite un semi-groupe lorsque

1. $T(0) = I$ ; et
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour chaque $s, t \geq 0$.
   Si en plus
3. $\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\| = 0$, alors le semi-groupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit uniformément continue

**Définition 2.11.** un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est dite $c_0$-semigroupe (ou semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés) si

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\| = 0$$

pour chaque $x \in \mathbb{X}$ .
Observons que si

$$(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$$

est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés, on peut lui associer un opérateur $(D(A), A)$ appelé son générateur infinitésimal défini par

$$D(A) = \{u \in \mathbb{X} : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)u - u}{t} existe\}$$

et

$$Au = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)u - u}{t}$$

pour chaque $u \in D(A)$

**Remarque 2.3.** notons qu'un opérateur $A$ est un générateur infinitésmal d'un semi-groupe uniformément continue d'opérateurs bornés $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ si et seulement si $A$ est borné, dans ce cas, il peut être démontré que

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

### 2.5.1 Les propriétés de base de Semi-groupes

**Théorème 2.9.** *Soit*

$$(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$$

*un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés alors*

1. *Il exist des constantes $C, \zeta$ telles que*

$$\|T(t)\| \leq Ce^{\zeta t}, \forall t \in \mathbb{R}^+$$

2. *Le générateur infinitesmal $A$ de semi-groupe $T(t)$ est un opérateur fermé défini par densité*
3. *L'application*
$$t \mapsto T(t)x$$
*de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{X}$ est continue pour chaque $x \in \mathbb{X}$*
4. *l'équation différentielle donnée par*
$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$
*est vérifiée pour tout $x \in D(A)$*
5. *Pour tout $x \in \mathbb{X}$, on a*
$$T(t)x = \lim_{s \to 0}(e^{tA_s})x$$
*avec*
$$A_s x = \frac{T(s)x - x}{s}$$
*où la convergence ci-dessus est uniforme sur tout compact dans $\mathbb{R}^+$*
6. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) > \zeta$*
*l'intégrale*
$$R(\lambda, A)x = (\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^{\infty} e^{-\zeta t}T(t)xdt$$
*définit un opérateur borné $R(\lambda, A)$ sur $\mathbb{X}$ dont l'image est $D(A)$ et*
$$(\lambda I - A)R(\lambda, A) = R(\lambda, A)(\lambda I - A) = I$$
*Si $\zeta = 0$ en (1)ci dessus, alors le semi-groupe corresopondant est uniformément continu. De plus, $(T(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit un $c_0$-groupe de contraction.*

**Théorème 2.10.** *Soit*
$$A : D(A) \to \mathbb{X}$$
*un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach $\mathbb{X}$, alors $A$ est le générateur infintesmal d'un $c_0$ semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ si et seulement si*

1. *$A$ est un opérateur linéaire fermé densément défini*
2. *La résolvante $\rho(A)$ de $A$ contient $\mathbb{R}^+$ et*
$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda > 0$$

**Théorème 2.11.** *Soit*
$$A : D(A) \to \mathbb{X}$$
*un opérateur linéaire sur $\mathbb{X}$, alors $A$ est le génerateur infinitesmal d'un $c_0$ semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ satisfaisant*
$$\|T(t)\| \leq Ce^{\zeta |t|}$$
*si et seulement si*

1. *A est un opérateur fermé défini densément*
2. *Pour chaque* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $|\lambda| \geq \zeta$ *est dans* $\rho(A)$ *et pour chaque* $\lambda$*,on*

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{C}{(|\lambda| - \zeta)^n}$$

# Conclusion

Nous nous somme intéressés aux propriétés principales des différentes classes de fonctions presque automorphes. Notre travail a inclus un exemple d'étude de la stabilité des solutions de l'équation différentielle linéaire $x' = Ax + f$ où $f$ est une fonction presque automorphe.

# Bibliographie


[**1** ] S.Bochner,A new approach to almost periodicity,Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A. 48 : 2039-2043,1962

[**2** ] H.Bohr,Almost Periodic ,Chelsea Publishing Company,New York (1998)

[**3** ] J.Blot,G.M.Mophou,G.M.N'Guérékata,D.Pennequin,Weighted pseudo almost automorphic functions and applications to abstract differential equations,Nonlinear Analysis,71 (2009) 903-909

[**4** ] C. Corduneanu, N. Gheorghiu and V.Barbu, Almost periodic functions,Chelsea Publishing Company (1989)

[**5** ] T.Diagana,Almost Automorphic ,Type and AlmostPeriodic Type Functions in Abstract spaces, Springer International Publishing Switzerland 2013

[**6** ] T.Diagana,Weighted pseudo almost periodic functions and applications,C.R.A.S,Volume 343,$N^0$ 10,(2006),643-646

[**7** ] J.Liang,T,J.Xia,Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions,Journal of Mathematical Analysis and Applications,Volume 340,(2008),1493-1499

[**8** ] G.M.N'Guérékata,Almost automorphic solutions to second-ordr semilinear evolution ,Nonliear Analysis,Vol.71(2009),432-435

[**9** ] G.M.N'Gurérékata Almost Automorphic and Almost Periodic Function in Abstract Spaces . Springer Sience+Business Media New York 2001

[**10** ] G.M.N'Guérékata,Notes on almost periodicity in topological vector spaces,Int'I.J of math.and Math Sci.,Volume 9,(1986),201-206

[**11** ] T.J.Xiao,J.Liang,J.Zhang,Pseudo almost automorphic solutions to semilinear differential equations in Banach spaces ,Semigroup Form 76,(2008)

[**12** ] C.Zhang,Pseudo almost periodic functions and their applications,thesis,University of Western Ontario (1992)

[**13** ]J.Wu,Theory and applications of Partial Functional Differential Equations,Applied Mathematical Sciences ,Vol.119,Springer-Verlag,New York (1996)

[**14** ] J.-J Xiao,X,-X. Zhu,J. liang ,Pseudo-almost automorphic mild ,solutions to nonautonomous differential equations and applications,Nolinear Analysis Vol.70 (2009)4079-4085

[**15** ] T.-J.Xiao,J.liang and J.Zhang,Pseudo almost automorphic functions to semilinear differential equations in Banach spaces,Semigroup Forum,Vol.76 (2008),518-524