



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
**Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou**  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## **Mémoire de Master**

En Mathématiques  
*Spécialité : Recherche Opérationnelle*

### **Thème**

---

**Ordonnancement, lancement et suivi de production**

---

*Membres du jury :*

Président : **M. Aouane Mohouhand**  
Examinatrice : **Mme Aklouche Fariza**  
Encadrante : **Mme Kheffache Rezika**

*Réalisé par :*

**Mlle Mahrouchi Yamina**

**Année universitaire : 2024–2025**

# Remerciements

---

*Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers Dieu, qui m'a accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à Madame KHEFFACHE R., ma promotrice, pour son encadrement bienveillant, sa disponibilité constante et la richesse de ses conseils tout au long de la réalisation de ce mémoire.*

*Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur ISSAD O., encadreur au sein de l'entreprise ENITEM, pour son accompagnement attentif, son écoute constructive et l'intérêt qu'il a porté à ce travail.*

*Je remercie vivement les membres du jury pour le temps qu'ils consacrent à l'évaluation de ce mémoire, ainsi que pour la qualité de leurs remarques et suggestions.*

*Ma gratitude s'étend à l'ensemble des enseignants du Master Recherche Opérationnelle, pour la qualité de leur enseignement, leur rigueur et leur engagement pédagogique qui ont enrichi mon parcours.*

*Enfin, je remercie toutes les personnes qui m'ont soutenue, encouragée et inspirée tout au long de mon cheminement universitaire, de près comme de loin.*

# Dédicaces

---

*À moi-même, tout d'abord, pour avoir cru en mes rêves, pour ma patience, mon endurance et ma foi en l'avenir, malgré les obstacles et les moments de doute.*

*À mes parents bien-aimés, pour leur amour infini, leur soutien inébranlable, et leurs prières silencieuses qui m'ont donné la force d'avancer.*

*À mes sœurs chéries, Amira et Yasmine, pour leur complicité, leurs mots réconfortants, et leur présence si précieuse tout au long de ce parcours.*

*À ma petite sœur Aya, douce lumière de ma vie, pour sa joie innocente et son amour pur, qui m'ont toujours redonné le sourire.*

*À mes chères grand-mères, Baya et Madouda, sources de tendresse et de sagesse, pour leurs prières murmurées, leurs regards bienveillants et l'amour discret qu'elles m'ont toujours offert.*

*À ma meilleure amie Maya, avec qui j'ai partagé tant de rires, de secrets et de souvenirs, pour son écoute fidèle, sa présence rassurante, et le lien précieux qui nous unit.*

*À mes enseignants, pour leur encadrement généreux, leur savoir partagé, et la confiance qu'ils m'ont accordée.*

*À mes collègues et amis, pour leur aide, leurs encouragements sincères, et les moments de partage qui ont enrichi mon chemin.*

---

*Et à toutes les âmes bienveillantes, qui de près ou de loin, ont semé une graine de motivation dans ce voyage.*

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Dédicaces</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé et Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>vii</b>
<b>1 Présentation de l'organisme d'accueil</b>	<b>1</b>
1.1 Présentation de l'entreprise ENIEM . . . . .	1
1.2 Historique et caractéristiques de l'ENIEM . . . . .	2
1.2.1 Situation géographique . . . . .	2
1.2.2 Création et évolution . . . . .	2
1.2.3 La stratégie de l'ENIEM . . . . .	3
1.2.4 Objectif social et champ d'activité . . . . .	4
1.2.5 Capital social . . . . .	4
1.2.6 Objectifs qualité . . . . .	5
1.2.7 Parts de marché de l'entreprise . . . . .	5
1.3 Les technologies utilisées par l'ENIEM . . . . .	5
1.4 Organisation de l'entreprise ENIEM . . . . .	5
1.4.1 Direction Générale . . . . .	6
1.4.2 Unité Cuisson . . . . .	6
1.4.3 Unité Froid . . . . .	6
1.4.4 Unité Climatisation . . . . .	6
1.4.5 Unité Sanitaire . . . . .	7
1.4.6 Filiale . . . . .	7
1.4.7 Unité Commerciale . . . . .	7
1.4.8 Unité de présentation technique . . . . .	7

## TABLE DES MATIÈRES

---

1.5	Analyse et organisation de l'unité Cuisson . . . . .	8
1.6	Structure et responsabilités du département de production . . . . .	9
1.6.1	Missions du département de production . . . . .	9
1.7	Organisation du service d'ordonnancement . . . . .	9
1.7.1	Présentation du service d'ordonnancement . . . . .	9
1.7.2	Objectifs de l'ordonnancement . . . . .	10
1.7.3	Activités du service d'ordonnancement . . . . .	10
1.7.4	Tâches du chef de service d'ordonnancement . . . . .	11
1.7.5	Tâches des chargés d'étude . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Rappels sur la théorie des graphes</b>	<b>13</b>
2.1	Graphes . . . . .	14
2.1.1	Définitions . . . . .	14
2.1.2	Successeurs / Prédécesseurs . . . . .	15
2.2	Cheminement dans un graphe . . . . .	16
2.2.1	Chaîne . . . . .	16
2.2.2	Le cycle . . . . .	16
2.2.3	Chemin . . . . .	17
2.2.4	Le circuit . . . . .	17
2.3	Graphe connexe . . . . .	18
2.4	Arbres et Forêts . . . . .	18
2.5	Arborescence et Réseaux . . . . .	19
2.5.1	Arborescence . . . . .	19
2.5.2	Réseau . . . . .	19
2.6	Mise en Ordre d'un Graphe . . . . .	19
2.6.1	Définition . . . . .	19
2.6.2	Procédure de détermination des niveaux . . . . .	20
2.7	Recherche de plus court (ou plus long) chemin dans un graphe . . . . .	21
2.8	Algorithmes de résolutions . . . . .	21
2.8.1	Algorithme de BELLMAN . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Problème d'ordonnancement</b>	<b>25</b>
3.1	Définitions et généralités . . . . .	25
3.1.1	Projet . . . . .	26
3.1.2	Tâches / Jobs . . . . .	26
3.1.3	Les ressources . . . . .	26
3.1.4	Les ateliers . . . . .	28
3.1.5	Les contraintes . . . . .	29
3.1.6	Objectifs d'optimisation en ordonnancement . . . . .	29
3.1.7	Autres critères d'optimisation . . . . .	30

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.1.8	Approches de résolution des problèmes d'ordonnancement . . .	31
3.1.9	Optimisation par la programmation mathématique . . . . .	31
3.1.10	Méthodes graphiques d'ordonnancement des projets . . . . .	32
3.2	Méthode PERT . . . . .	32
3.2.1	Historique . . . . .	32
3.2.2	Concepts généraux . . . . .	33
3.2.3	Calcul des dates dans la méthode PERT . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Problématique et résolution</b>	<b>41</b>
4.1	Problématique de l'ordonnancement au sein d'un système de produc- tion industriel . . . . .	42
4.1.1	Position du problème . . . . .	42
4.1.2	Orientation de la recherche . . . . .	43
4.2	Modélisation mathématique . . . . .	44
4.2.1	Modèle d'Optimisation . . . . .	44
4.3	Mise en pratique . . . . .	45
4.3.1	Interprétation des résultats . . . . .	48
4.4	Le programme linéaire . . . . .	50
	<b>Conclusion générale</b>	<b>56</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>

# Résumé et Abstract

---

## Résumé

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'optimisation des systèmes de production et porte plus particulièrement sur l'ordonnancement et la planification des tâches dans une chaîne de fabrication. L'objectif principal est de proposer une modélisation rigoureuse permettant de minimiser la durée totale de réalisation du projet et d'améliorer la gestion des ressources. Pour ce faire, nous avons d'abord appliqué la méthode PERT (Program Evaluation and Review Technique), qui repose sur une représentation graphique du projet et permet de déterminer les dates au plus tôt, au plus tard, les marges ainsi que le chemin critique. Cette étape offre une vision claire des interdépendances entre les tâches et met en évidence les opérations déterminantes pour le respect des délais. Ensuite, nous avons formulé un modèle mathématique basé sur la programmation linéaire, adapté au contexte de l'ordonnancement en milieu industriel. Ce modèle permet d'évaluer de manière quantitative les contraintes de production et d'optimiser la durée globale du projet. L'implémentation a été réalisée à l'aide du logiciel LINGO, ce qui nous a permis de résoudre efficacement le modèle, de calculer la durée optimale du projet et d'identifier les tâches critiques. Les résultats obtenus montrent que l'approche combinée PERT-programmation linéaire constitue un outil puissant pour améliorer la performance et la fiabilité des systèmes de production. Ce travail met ainsi en évidence l'importance des méthodes de recherche opérationnelle dans la planification et l'optimisation industrielle, en offrant des solutions pratiques aux problématiques rencontrées dans le secteur manufacturier.

## **Abstract**

This thesis is part of the field of production systems optimization and focuses specifically on task scheduling and planning within a manufacturing line. The main objective is to provide a rigorous modeling approach that minimizes the total project duration while enhancing resource management. To achieve this, we first applied the PERT (Program Evaluation and Review Technique) method, which relies on a graphical representation of the project and enables the calculation of earliest and latest start times, floats, and the identification of the critical path. This step provides a clear overview of task interdependencies and highlights the operations that are crucial for meeting deadlines. Subsequently, we developed a mathematical model based on linear programming, tailored to the industrial scheduling context. This model allows a quantitative assessment of production constraints and helps optimize the overall project duration. The implementation was carried out using the LINGO software, which made it possible to efficiently solve the model, compute the optimal project duration, and identify the critical tasks. The results demonstrate that the combined PERT–linear programming approach is an effective tool for improving both the performance and reliability of production systems. This work underlines the relevance of operational research methods in industrial planning and optimization, providing practical solutions to challenges commonly faced in the manufacturing sector.

# Introduction générale

---

L'optimisation des processus et de la gestion efficace des ressources sont des enjeux stratégiques dans de nombreux secteurs, en particulier dans l'industrie. La recherche opérationnelle, en tant que domaine scientifique, met à notre disposition des outils mathématiques et algorithmiques permettant de traiter des problématiques complexes en améliorant la performance où en réduisant les coûts. Ces approches offrent la possibilité de modéliser, d'analyser et d'optimiser, et de contrôler de façon optimale les systèmes de production, de logistique et de gestion afin de répondre aux exigences actuelles.

Dans ce cadre, ce mémoire explore l'application des méthodes de la recherche opérationnelle à l'optimisation de l'ordonnancement des tâches de production au sein de l'ENIEM. Pour apporter des solutions concrètes aux défis industriels, nous avons adopté différentes approches, notamment la programmation linéaire et la **Méthode de PERT (Program Evaluation and Review Technic)**, qui permettent une modélisation et une gestion optimisée des processus. L'objectif principal de cette étude est de appliquer les connaissances acquises tout au long de notre parcours universitaire afin d'illustrer l'impact d'une planification optimisée sur la productivité industrielle. En prenant pour cas d'étude, l'assemblage d'un modèle spécifique de cuisinière, nous avons identifié les principales contraintes du processus de production, et proposé des solutions pour améliorer la cadence tout en respectant les contraintes techniques et organisations. Ce mémoire est structuré autour de trois grandes parties :

- **Fondements théoriques** : présentation des concepts clés liés à l'ordonnancement et aux méthodes de la recherche opérationnelle liées à ce sujet.
- **Méthodologie et outils** : élaboration des modèles mathématiques employés, avec une attention particulière portée à la méthode de PERT.
- **Étude de cas industrielle** : application concrète des méthodes développées dans le contexte de l'ENIEM, illustrant leur efficacité dans l'amélioration du processus de production et l'augmentation du profit.

## **Organisation de mémoire**

Le premier chapitre de ce mémoire propose une présentation générale de l'organisme d'accueil. Le deuxième chapitre introduit les notions fondamentales de la théorie des graphes, permettant de mieux comprendre la suite de l'étude. Le troisième chapitre se concentre sur les principes théoriques de l'ordonnancement, en mettant en avant la méthode PERT. Enfin, le quatrième chapitre présente une étude de cas concret réalisée à l'ENIEM, illustrant l'application de la méthode PERT pour la résolution d'un problème spécifique d'ordonnancement. Nous terminons ce mémoire par une conclusion générale.

---

# Chapitre 1

---

## Présentation de l'organisme d'accueil

---

Dans ce chapitre, nous présentons l'organisme d'accueil ainsi que le contexte de notre étude. Cette présentation permet d'établir une vision globale de l'environnement dans lequel s'inscrit notre travail, en définissant les limites du domaine étudié. Elle constitue ainsi une base essentielle à la compréhension de la problématique abordée dans les chapitres suivants.

### 1.1 Présentation de l'entreprise ENIEM

L'Entreprise Nationale des Industries de l'Électroménager (ENIEM) est une EPE/SPA (EPE : Entreprise Publique Économique, SPA : Société par Actions), créée le 2 janvier 1983 par le décret n° 83-19 de 1983, à la suite de la restructuration de la Société Nationale de Fabrication et de Montage de Matériel Électrique et Électronique (SONELEC). Cette dernière était active depuis les débuts de la fabrication d'électroménagers en Algérie, où elle est reconnue comme le leader du secteur.

L'ENIEM dispose de grandes capacités de production et d'une longue expérience dans la fabrication et le développement des différentes branches de l'électroménager, notamment :

- les appareils ménagers domestiques,
- les appareils pour collectivités,
- les lampes d'éclairage,
- les produits sanitaires.

## 1.2 Historique et caractéristiques de l'ENIEM

### 1.2.1 Situation géographique

Le siège social de l'ENIEM se situe au chef-lieu de la wilaya de Tizi-Ouzou. La filiale sanitaire est implantée à Miliana, dans la wilaya de Aïn Defla, et la filiale spécialisée dans les lampes est localisée dans la zone industrielle de Mohammadia, wilaya de Mascara.

Le complexe de production d'appareils ménagers se trouve dans la zone industrielle Aïssat-Idir à Oued-Aïssi, à 7 km du chef-lieu de la wilaya de Tizi-Ouzou. Il s'étend sur une superficie de 40 hectares et relève administrativement de la commune de Tizi-Rached.

### 1.2.2 Création et évolution

L'Entreprise Nationale des Industries de l'Électroménager (ENIEM) est issue de la restructuration de la Société Nationale de Fabrication de Matériel Électrique (SONELEC), dans le cadre de la mise en œuvre des réformes économiques de 1989.

À sa création, l'ENIEM disposait de :

- Le **Complexe d'Appareils Ménagers (CAM)** à Tizi-Ouzou, entré en production en 1971 ;
- L'**Unité de lampes** de Mohammadia, wilaya de Mascara, entrée en production en février 1979.

L'ENIEM est une entreprise publique économique qui a acquis son autonomie le **10 octobre 1989** et est devenue une société par actions avec un capital de **40 000 000 DA**.

Elle est également pionnière dans la certification aux normes de qualité :

- **ISO 9002** en 1998 (Organisation internationale de normalisation) ;
- **ISO 9001** en 2000, renouvelée en 2003 et 2006.



FIGURE 1.1 – Le siège du complexe de production électroménager de Tizi-Ouzou

### 1.2.3 La stratégie de l'ENIEM

À sa création, l'ENIEM avait pour mission principale de répondre aux besoins croissants des consommateurs en équipements électroménagers. Dans un contexte où la demande excédait largement l'offre, et où l'entreprise bénéficiait d'une position quasi-exclusive sur le marché, il n'était pas nécessaire de mettre en place une véritable stratégie concurrentielle. Son objectif se limitait alors à la production et à la distribution de ses produits afin de satisfaire les attentes des ménages.

Cependant, avec l'évolution du paysage économique et l'ouverture du marché à la concurrence, l'ENIEM a dû repenser son approche afin de maintenir sa position et d'assurer sa pérennité. L'entreprise s'est ainsi recentrée sur son cœur de métier et propose aujourd'hui une gamme de produits diversifiés répondant aux besoins du grand public :

- Réfrigérateurs de différentes capacités ;
- Congélateurs verticaux ;
- Cuisinières à 4 et 5 feux ;

- Climatiseurs de type fenêtre et *Split-system*.

Ces équipements sont distribués à travers un vaste réseau d'agents agréés, comptant un total de 200 partenaires, dont 109 spécialisés dans la vente en gros et au détail, et 91 dédiés aux services de maintenance et de réparation après-vente. Cette organisation permet à l'ENIEM de couvrir l'ensemble du territoire national et de garantir un service accessible à tous ses clients.

Dans un souci d'optimisation et de compétitivité, l'entreprise s'est fixé pour objectif de réduire ses coûts de production de 10%. Pour y parvenir, elle mise sur plusieurs axes stratégiques :

- Exploiter au maximum ses capacités de production afin d'atteindre une couverture de 80% du marché local;
- Étendre sa présence à l'international en accédant à de nouveaux marchés.

Grâce à ces initiatives, l'ENIEM cherche à renforcer son positionnement et à s'adapter aux nouvelles exigences du marché, tout en maintenant un niveau de qualité et de service optimal pour ses clients.

### 1.2.4 Objectif social et champ d'activité

Dans le cadre du développement économique et social national, l'entreprise joue un rôle clé en assurant la recherche, le développement et la production d'équipements, de produits et de composants dédiés au secteur de l'électroménager. Son activité couvre plusieurs segments, notamment :

- les équipements électroménagers destinés à un usage domestique;
- les équipements électroménagers à usage industriel;
- les petits appareils ménagers.

En outre, l'entreprise a élargi son champ d'intervention en intégrant des fonctions essentielles telles que la distribution et la promotion du service après-vente, en collaboration avec des entités spécialisées telles que :

- ADIMEL (Entreprise Nationale des Industries de l'Électroménager);
- ENAPEM (Entreprise Nationale des Appareils de Mesure et de Contrôle);
- ENAED (Entreprise Nationale des Appareils Électroniques de Diffusion).

### 1.2.5 Capital social

Depuis le 8 octobre 1989, l'ENIEM a adopté le statut de **société par actions**. Son capital social s'élève à 10 279 800 000 DA, intégralement détenu par le SGP INELEC.

### 1.2.6 Objectifs qualité

L'ENIEM s'engage dans une démarche d'amélioration continue à travers les objectifs suivants :

- accroître la satisfaction des clients;
- développer les compétences du personnel;
- réduire les taux de rebuts;
- optimiser le chiffre d'affaires.

### 1.2.7 Parts de marché de l'entreprise

L'ENIEM détient des parts de marché significatives dans plusieurs segments de l'électroménager :

- 35 % : réfrigérateurs;
- 40 % à 48 % : cuisinières;
- 65 % : climatiseurs;
- 53 % : congélateurs et conservateurs;
- 29 % : chauffe-bains et machines à laver.

## 1.3 Les technologies utilisées par l'ENIEM

Depuis sa création, l'ENIEM adopte des technologies respectant les normes internationales. Celles-ci sont acquises par le biais de licences et d'accords avec des fabricants et fournisseurs de grandes marques étrangères. Le tableau suivant présente les technologies utilisées par l'ENIEM, selon les différentes catégories de produits, ainsi que leur pays d'origine.

Produit	Technologie	Pays d'origine
Réfrigérateurs 200 et 240 L	Bosch	Allemagne
Congélateurs bahut 350 et 480 L et réfrigérateurs 520 L	LMATIC	Liban
Autres réfrigérateurs	Toshiba	Japon
Cuisinières	TECHNOGAZ	Italie
Climatiseurs	AIRWELL	France

TABLE 1.1 – Origine des technologies employées par l'ENIEM

## 1.4 Organisation de l'entreprise ENIEM

L'ENIEM est structurée autour de plusieurs pôles fonctionnels et unités de production, coordonnés par la direction générale.

### 1.4.1 Direction Générale

La direction générale est responsable de la stratégie de développement, de l'assistance et du contrôle de l'entreprise. Elle exerce son autorité hiérarchique et fonctionnelle sur l'ensemble des unités. Elle regroupe les directions centrales suivantes :

- **Direction de la gestion industrielle** : chargée de la production, de l'optimisation des processus et de la maintenance des équipements ;
- **Direction du développement et des partenariats** : responsable de la création de nouveaux produits et de la gestion des collaborations stratégiques ;
- **Direction des finances et de la comptabilité** : assure la gestion financière, la comptabilité et le suivi des investissements ;
- **Direction de la planification et du contrôle de gestion** : coordonne la planification stratégique et l'évaluation des performances économiques ;
- **Direction de la qualité** : garantit le respect des normes de qualité et l'amélioration continue des produits et services.

### 1.4.2 Unité Cuisson

L'unité cuisson a pour mission de produire et développer des équipements de cuisson ainsi que des produits similaires. Ses principales activités incluent :

- la transformation de la tôle ;
- le traitement et le revêtement de surface (émailage, chromage) ;
- l'assemblage des composantes.

### 1.4.3 Unité Froid

Cette unité est chargée de la production et du développement des équipements de réfrigération domestique. Ses activités principales sont :

- la transformation des tôles ;
- le traitement et le revêtement de surface (peinture, plastification) ;
- l'injection plastique et polyplastique ;
- la fabrication de pièces métalliques (condenseur, évaporateur) ;
- l'isolation des équipements ;
- le thermoformage ;
- l'assemblage des différentes pièces.

### 1.4.4 Unité Climatisation

L'unité climatisation a pour objectif de concevoir et développer des équipements de climatisation. Ses activités comprennent :

- la transformation des matériaux ;

- le traitement et le revêtement de surface (peinture);
- l'assemblage des composants.

### 1.4.5 Unité Sanitaire

Cette unité a pour objectif de concevoir et de produire divers équipements sanitaires, tels que les baignoires et les lavabos.

### 1.4.6 Filiale

L'unité de fabrication des lampes d'éclairage domestique et de réfrigérateurs, située à Mohammadia, est devenue une filiale à 100 % de l'ENIEM depuis le 1<sup>er</sup> janvier 1997. Elle porte désormais le nom de FILAMP.

### 1.4.7 Unité Commerciale

Cette unité a pour mission d'assurer l'écoulement des produits sur le marché. Elle analyse les fluctuations du marché en étudiant l'offre et la demande à travers des sondages.

### 1.4.8 Unité de présentation technique

L'objectif de cette unité est d'effectuer des études techniques sur les produits afin de garantir leur faisabilité en fonction des moyens disponibles au sein de l'entreprise.

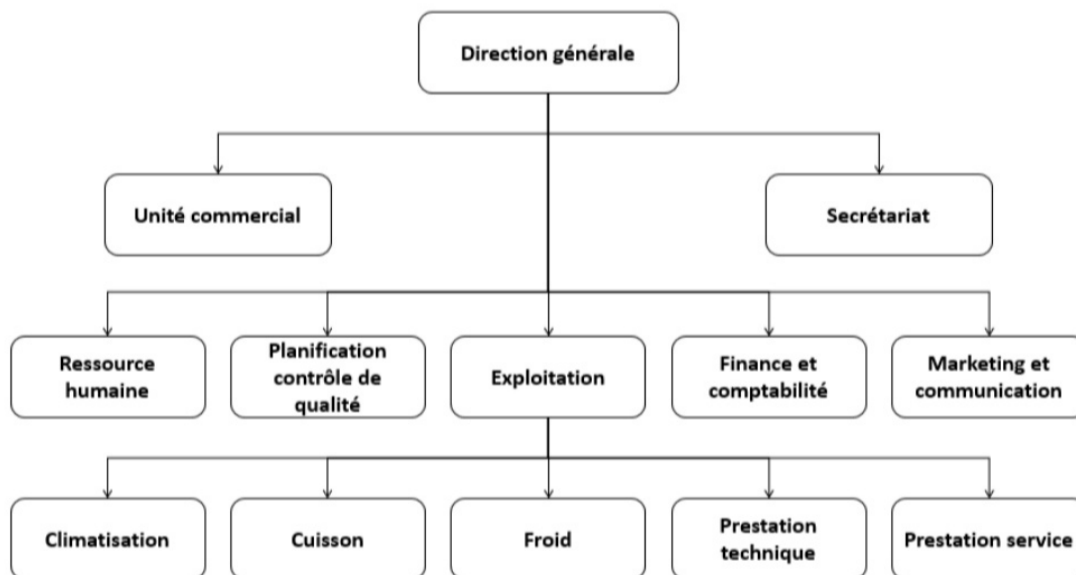


FIGURE 1.2 – Organigramme de l'entreprise

## 1.5 Analyse et organisation de l'unité Cuisson

L'unité Cuisson de l'ENIEM est une structure spécialisée dans la fabrication et le développement de cuisinières, intégrant des technologies modernes et des processus de qualité, performants et conformes aux normes en vigueur. Son organisation repose sur plusieurs départements complémentaires, assurant une production efficace et une gestion rigoureuse des ressources.

### Département de production

Ce département est au cœur des activités de fabrication et se compose des services et ateliers suivants :

- **Service d'ordonnancement** : planifie et coordonne la production afin d'assurer un enchaînement efficace des opérations et une gestion optimale des délais ;
- **Service TRS (Traitement et Revêtement de Surface)** : effectue le traitement et l'application de revêtements protecteurs pour améliorer la durabilité des pièces métalliques ;
- **Atelier mécanique** : assure la fabrication des composants clés, notamment les brûleurs et les rampes de cuisinière ;
- **Atelier tôlerie** : réalise la découpe, le pliage et l'usinage des pièces métalliques utilisées dans l'assemblage des cuisinières, garantissant précision et conformité aux exigences de fabrication ;
- **Atelier d'assemblage final** : effectue la pré-fabrication et l'assemblage complet des cuisinières avant leur mise sur le marché.

### Département technique

Ce département veille au bon fonctionnement des équipements et à l'amélioration continue des processus de fabrication. Il comprend :

- **Service maintenance** : garantit l'entretien et la réparation des machines afin d'assurer une production continue et de réduire les arrêts imprévus ;
- **Service méthode et fabrication** : optimise les méthodes de production en définissant des processus plus efficaces, conformes aux exigences de qualité ;
- **Service développement technique** : travaille sur l'innovation et l'amélioration des performances des cuisinières afin de répondre aux besoins du marché.

### Service de gestion des stocks

Ce service est essentiel pour assurer la disponibilité des matières premières et des composants nécessaires à la production. Ses missions incluent :

- **Réception des composants et des achats** : vérifie et contrôle la qualité des matières premières avant leur utilisation dans la production ;
- **Stockage et approvisionnement** : gère les entrées et sorties de stock afin de garantir un approvisionnement fluide et d'éviter toute rupture.

Grâce à cette structure organisée et performante, l'unité Cuisson de l'ENIEM assure une production maîtrisée, capable de répondre aux exigences du marché tout en garantissant la qualité des produits.

## **1.6 Structure et responsabilités du département de production**

Le département de production est dirigé par un chef de département, assisté d'un secrétariat, d'un service d'ordonnancement et de quatre ateliers. Chaque atelier est supervisé par un responsable, qui assure la liaison avec le service d'ordonnancement et le chef de département afin de signaler d'éventuelles anomalies telles que des pannes, des arrêts de production ou des ruptures de stock. Ces échanges s'effectuent notamment lors de réunions de coordination tenues quotidiennement à 10 heures du matin.

### **1.6.1 Missions du département de production**

Les principales missions du département de production sont les suivantes :

- assurer l'atteinte des objectifs fixés par la direction ;
- garantir la qualité des produits fabriqués ;
- encourager l'amélioration continue des méthodes et des outils de production ;
- élaborer des propositions en vue d'optimiser la qualité et la quantité des produits ;
- s'assurer du bon fonctionnement des équipements de production.

## **1.7 Organisation du service d'ordonnancement**

### **1.7.1 Présentation du service d'ordonnancement**

Le service d'ordonnancement joue un rôle essentiel dans l'organisation de la production en veillant à garantir une fabrication efficace, conforme aux exigences de qualité, aux délais impartis et aux contraintes de coût.

Il intervient notamment dans le choix des programmes de production et veille à l'enchaînement optimal des opérations entre les différents services, jusqu'à l'obtention du produit fini.

De manière générale, l'ordonnancement pilote et coordonne les tâches à court et moyen terme, en optimisant leur exécution à travers une analyse rigoureuse des besoins quantitatifs.

### 1.7.2 Objectifs de l'ordonnancement

L'ordonnancement a pour objectif de traduire les décisions de production, définies par le programme du directeur de production, en actions concrètes permettant de piloter et de contrôler les ateliers.

Cette fonction se décline en trois principales étapes :

- **Élaboration des ordres de fabrication (O.F.)** : cette étape consiste à convertir les décisions de production en ordres formels, permettant d'organiser et de structurer le processus de production ;
- **Élaboration du planning atelier** : le planning est établi en tenant compte des ordres de fabrication ainsi que de la disponibilité des ressources essentielles (matières premières, personnel, machines) ;
- **Lancement et suivi de la production** : il s'agit de fournir aux ateliers les documents nécessaires au bon déroulement des opérations, et de superviser l'avancement de la production pour assurer son efficacité.

Cette organisation permet d'optimiser la gestion des ressources et d'assurer une production fluide et performante.

### 1.7.3 Activités du service d'ordonnancement

Les principales activités du service d'ordonnancement sont les suivantes :

- **Définir et concevoir les méthodes de régulation du travail** dans les différents secteurs, en accord avec la politique adoptée par la direction générale ;
- **Suivre la production** afin d'ajuster les objectifs d'activité de l'entreprise en fonction des prévisions et objectifs de vente du service commercial ;
- **Gérer les matières premières** en veillant à leur disponibilité dans les ateliers pour éviter tout arrêt de travail ;
- **Décider du lancement de la fabrication** en définissant les quantités à produire dans les délais requis, conformément au programme de fabrication et aux cycles de production établis par le service des méthodes ;
- **Rédiger et archiver les documents** nécessaires au déclenchement et au suivi de l'exécution des tâches de production ;
- **Contrôler l'avancement des travaux** en surveillant le respect des délais et en évaluant les éventuelles pertes ou rebuts.

### 1.7.4 Tâches du chef de service d'ordonnancement

Le chef du service d'ordonnancement est responsable de la supervision des opérations de planification et d'organisation de la production. Ses principales missions sont les suivantes [8] :

- Déterminer les besoins en matières premières ;
- Assurer l'approvisionnement de la production en matières premières ;
- Contrôler la consommation des ressources ;
- Superviser la réalisation du programme de production en collaboration avec les ateliers de fabrication ;
- Établir les rapports de réalisation et de consommation ;
- Analyser les écarts de production et en assurer le suivi ;
- Organiser et superviser le travail de ses subordonnés et les assister dans leurs activités ;
- Veiller au respect des normes et procédures de gestion et assurer une bonne collaboration avec les autres services ;
- S'assurer du respect des règles d'hygiène et de sécurité.

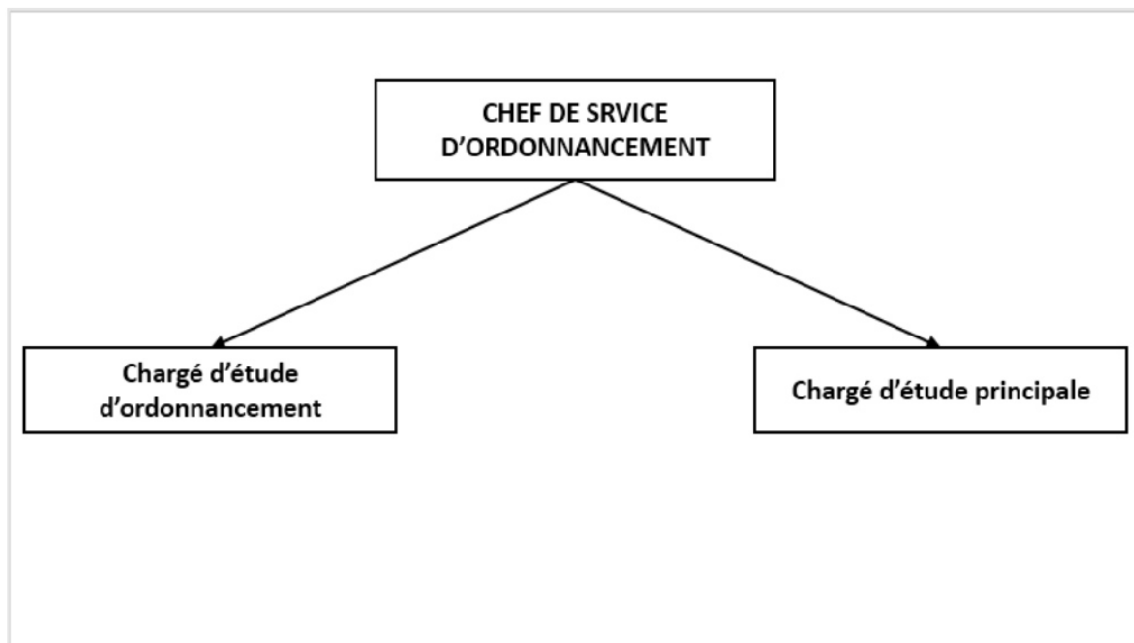


FIGURE 1.3 – Organigramme du service d'ordonnancement

### 1.7.5 Tâches des chargés d'étude

**Le chargé d'étude d'ordonnancement** est responsable des missions suivantes :

- Approuver les approvisionnements du magasin selon les besoins en matières premières ;

- Décider et procéder aux lancements de production ;
- Superviser l'exécution des travaux dans les différentes structures ;
- Surveiller l'état du stock et les rebuts ;
- Veiller au respect des délais ;
- Rédiger les rapports d'activités hebdomadaires en mentionnant les problèmes rencontrés et en proposant des solutions ;
- Analyser les écarts entre les prévisions et les réalisations afin d'en éliminer les causes à l'avenir.

**Le chargé d'étude principal** assume des responsabilités similaires, mais plus étendues, notamment :

- Coordonner les activités de plusieurs chargés d'étude d'ordonnancement ;
- Superviser les projets de plus grande envergure ou de complexité accrue ;
- Assurer une communication efficace entre les différents services impliqués dans la production ;
- Mettre en place des stratégies visant à optimiser les processus de production ;
- Veiller à l'alignement des objectifs de production avec les objectifs stratégiques de l'entreprise.

## Conclusion

Ce stage au sein de l'**ENIEM** nous a offert une immersion précieuse dans les différents secteurs de gestion de la production et les processus mis en place pour en assurer l'efficacité.

L'objectif principal de l'**ENIEM** est d'adapter sa production aux exigences du marché, tant en termes de quantité que de qualité.

À travers cette étude, nous avons eu l'opportunité d'analyser un cas concret, mettant en application les connaissances acquises au cours de notre formation en *recherche opérationnelle*. Cette expérience nous a permis de mieux appréhender les défis réels liés à l'optimisation des flux de production et à la prise de décision en entreprise.

Enfin, ce stage a constitué une transition enrichissante vers le monde professionnel, nous confrontant aux réalités du terrain et nous initiant aux exigences et dynamiques d'une entreprise industrielle.

---

## Chapitre 2

---

# Rappels sur la théorie des graphes

---

### Introduction

La théorie des graphes est une branche essentielle des mathématiques discrètes. Elle permet de modéliser, analyser et de résoudre une grande variété de problèmes. Que ce soit pour représenter des réseaux de transport, des circuits électriques..., ils permettent de structurer des informations complexes sous forme de sommets et d'arêtes, facilitant ainsi leur étude et leur résolution.

L'origine de la théorie des graphes remonte au XVIII<sup>e</sup> siècle avec **Leonhard Euler**, qui introduisit ce concept en résolvant le célèbre **problème des ponts de Königsberg**. Ce problème visait à déterminer s'il était possible de traverser tous les ponts de la ville sans en emprunter un deux fois. Euler démontra que cela était possible, jetant ainsi les bases d'une nouvelle discipline mathématique. Au fil des siècles, d'autres chercheurs comme **Cayley**, **König** et **Erdős** ont enrichi cette théorie, en développant notamment les notions d'arbres, de chemins optimaux et de graphes aléatoires. Aujourd'hui, cette discipline est incontournable, notamment en **intelligence artificielle**, où elle est utilisée pour modéliser des réseaux de neurone et structurer des données complexe.

Ce chapitre est consacré aux notions fondamentales de la théorie des graphes. Nous y présenterons les principales définitions, les propriétés essentielles et plusieurs exemples d'applications, afin de mettre en évidence leur utilité dans la résolution de problèmes concrets.

## 2.1 Graphes

### 2.1.1 Définitions

Un graphe est défini par un couple  $(V(G), E(G))$ , tel que  $V(G)$  est un ensemble non vide d'éléments appelés **sommets**, et  $E(G)$  un ensemble de parties à deux éléments de  $V(G)$  appelés **arêtes**. On distingue deux types de graphes :

#### a. Graphe non-orienté

Un **graphe non-orienté**  $G(V, E)$  est un couple formé de  $V$  **ensemble de sommets** et  $E$  **ensemble d'arêtes**, chaque arête représente une paire de sommets. Dans cet exemple

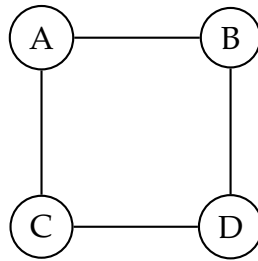


FIGURE 2.1 – Graphe non orienté

A est un sommet et la paire de sommets  $(A,B)$  est une arête.

#### Définitions

- **Ordre d'un graphe** : noté  $n$ , c'est le nombre de ses sommets, c'est-à-dire  $|V| = n$ .
- **Boucle** : est une arête dont les deux extrémités sont confondues (c'est-à-dire qui relie un sommet à lui-même).

#### b. Graphe orienté

Un **digraphe** (ou **graphe orienté**)  $G = (V, E)$  est défini par :

- un ensemble non vide  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , dont les éléments sont appelés **sommets**, avec  $|V| = n$ ;
- un ensemble non vide  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , dont les éléments sont appelés **arcs** du graphe, avec  $|E| = m$ .

Un arc  $u$  allant d'un sommet  $x$  (appelé **extrémité initiale**) vers un sommet  $y$  (appelé **extrémité terminale**) est noté  $u = (x, y)$ .

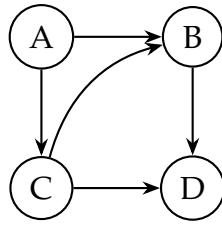


FIGURE 2.2 – Graphe orienté

Dans cette exemple (C,B) est un arc.

### 2.1.2 Successeurs / Prédécesseurs

L'ensemble des successeurs d'un sommet  $x$  est noté :

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V \mid \exists u = (x, y) \in E\}.$$

L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet  $x'$  est noté :

$$\Gamma^-(x') = \{y \in V \mid \exists u = (y, x) \in E\}$$

L'ensemble des voisins (successeurs ou prédécesseurs) du sommet  $x$  est noté :

$$\Gamma(x), = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$$

#### Exemple

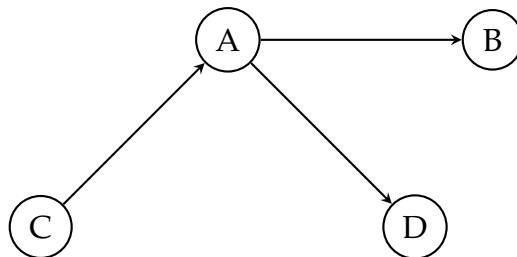


FIGURE 2.3 – Les successeurs et prédécesseurs du sommet A

**Dans cet exemple :**

- $\Gamma^+(A) = \{B, D\}$  : ce sont les sommets atteignables à partir de A.
- $\Gamma^-(A) = \{C\}$  : c'est le sommet ayant un arc vers A.
- $\Gamma(A) = \{B, C, D\}$  : tous les voisins directs de A.

## Degré

On appelle **degré** d'un sommet  $x$  dans un graphe  $G$ , noté  $d(x)$ , le nombre de voisins que possède ce sommet, c'est-à-dire :

$$d(x) = |\Gamma(x)|$$

(si  $G$  est un graphe simple) Pour l'exemple de la figure 2.3, degré de  $A$  :  $d(A) = |\Gamma(A)| = 3$

## Graphe simple

Un graphe est dit **simple** s'il n'admet pas de boucles et s'il y a au plus une arête (ou arc) entre deux sommets quelconques.

## 2.2 Cheminement dans un graphe

### 2.2.1 Chaîne

Une **chaîne** correspond à une suite ordonnée de sommets  $v_0, v_1, \dots, v_p$  tels que deux sommets successifs sont adjacents (on la note  $P_n = (v_1, \dots, v_p)$ ). Les sommets  $v_0$  et  $v_p$  sont appelés les **extrémités** de la chaîne.

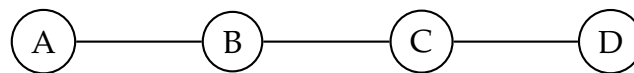


FIGURE 2.4 – Chaîne

Dans une chaîne :

- si aucune **arête** ne se répète pas, on parle de chaîne **simple** ;
- si aucun **sommet** ne se répète, on parle de chaîne **élémentaire**.
- la **longueur** d'une chaîne correspond au nombre d'arêtes qui la composent.

### 2.2.2 Le cycle

Un **cycle** est une chaîne dont les extrémités sont confondues.

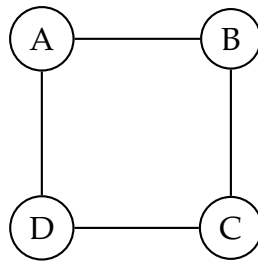


FIGURE 2.5 – Cycle

### 2.2.3 Chemin

Un **chemin** dans un graphe  $G = (V, U)$  est une séquence de sommets  $v_0, v_1, \dots, v_n$  telle que, pour tout  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , on ait  $(v_i, v_{i+1}) \in U$ .

La **longueur** du chemin correspond au nombre de ses arcs.

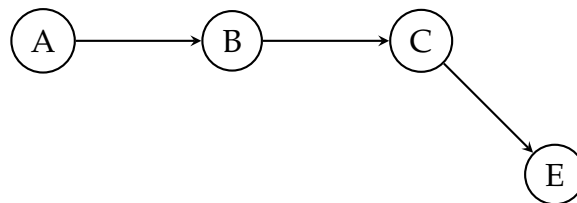


FIGURE 2.6 – Chemin

Un chemin est dit :

- **simple** s'il ne contient aucun arc répété;
- **élémentaire** s'il ne contient aucun sommet répété.

**Remarque :** Tout chemin est une chaîne, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

### 2.2.4 Le circuit

Un **circuit** est un chemin dont les extrémités sont confondues.

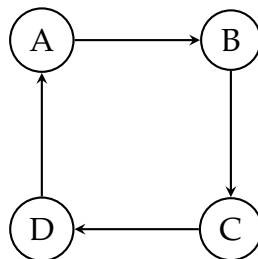


FIGURE 2.7 – Circuit

### 2.3 Graphe connexe

Un graphe est dit **connexe** si, pour tout couple des sommets  $x, y \in V$ , il existe une chaîne reliant  $x$  à  $y$ .

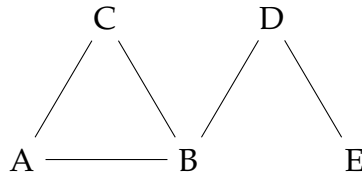


FIGURE 2.8 – Graphe connexe

### 2.4 Arbres et Forêts

Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle. Un **graphe sans cycle** mais qui n'est pas connexe est appelé une **forêt**. Une forêt est donc une union disjointe d'arbres.

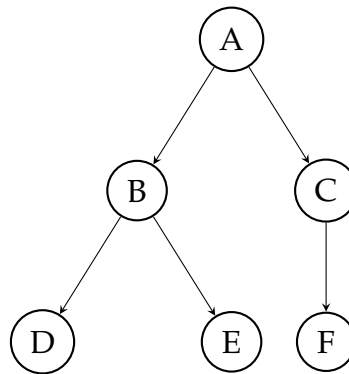


FIGURE 2.9 – Un arbre

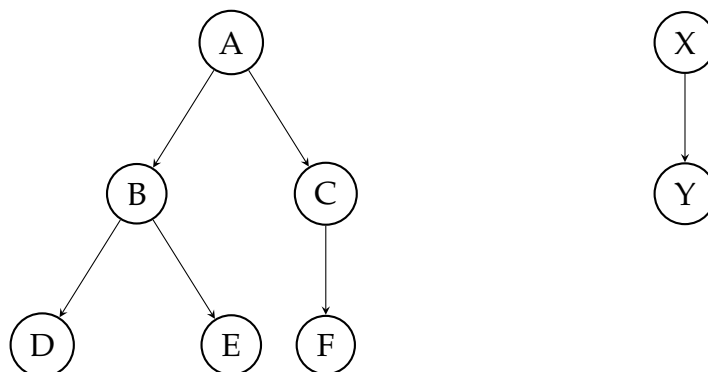


FIGURE 2.10 – Une forêt

## 2.5 Arborescence et Réseaux

### 2.5.1 Arborescence

#### Racine

Soit  $G = (V, U)$  un graphe orienté, et soit  $R \in V$ . On dit que  $R$  est une **racine** de  $G$  s'il existe un chemin allant de  $R$  vers tout sommet  $x \in V \setminus \{R\}$ .

On appelle **arborescence**, tout arbre possédant une **racine**.

#### Exemple

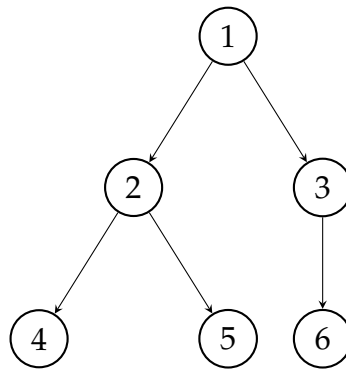


FIGURE 2.11 – Arborescence

### 2.5.2 Réseau

Un **réseau** est un graphe  $G = (V, U)$  muni d'une application  $d : U \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à chaque arc  $u$  une valeur  $d(u) \in \mathbb{R}$ . On note un tel réseau par  $R = (V, U, d)$ . En pratique,  $d(u)$  peut représenter un coût, une distance, une durée, etc.

## 2.6 Mise en Ordre d'un Graphe

### 2.6.1 Définition

Ordonner un graphe consiste à disposer ses sommets dans un certain ordre topologique, de manière à respecter l'orientation des arcs. Cette disposition permet de définir les différents niveaux des sommets.

### 2.6.2 Procédure de détermination des niveaux

La procédure permettant de déterminer les niveaux des sommets d'un graphe se déroule comme suit :

- **Niveau 0** : L'ensemble des sommets de niveau 0 est donné par :

$$N_0 = \{v \in V \mid \Gamma^-(v) = \emptyset\}$$

autrement dit, il s'agit des sommets qui n'ont aucun prédécesseur.

- **Niveau  $i$**  : Les sommets du niveau  $i$  sont définis par :

$$N_i = \{v \in V \mid \Gamma^-(v) \subseteq \bigcup_{j=0}^{i-1} N_j\}$$

Ce sont les sommets dont tous les prédécesseurs ont déjà été classés dans un niveau inférieur.

- **Condition d'arrêt**

On s'arrête lorsque :

$$\bigcup_i N_i = V$$

autrement dit, lorsque tous les sommets du graphe ont été assignés à un niveau.

**Remarque :** Si, à une étape  $k \geq 0$ , on trouve que  $N_k = \emptyset$ , cela signifie que le graphe contient au moins un circuit, et donc qu'il ne peut pas être totalement ordonné.

#### Exemple

Considérons le graphe orienté suivant :

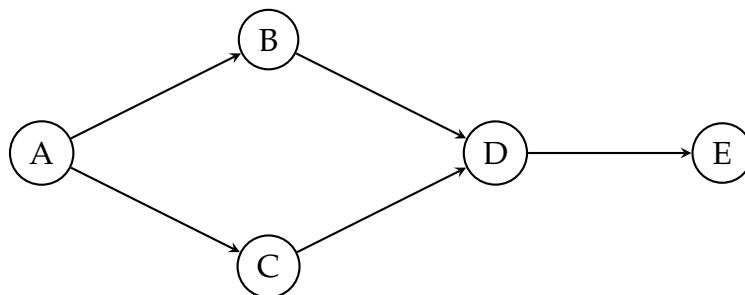


FIGURE 2.12 – Graphe orienté sans circuit

Tableau des prédécesseurs :

$x$	$\Gamma^-(x)$
A	/
B	A
C	A
D	B, C
E	D

Tableau des niveaux :

Niveau	Sommets
$N_0$	A
$N_1$	B, C
$N_2$	D
$N_3$	E

## 2.7 Recherche de plus court (ou plus long) chemin dans un graphe

Soit un graphe orienté,  $G = (V, U)$  avec  $|V| = n$ , où les valuations des arcs sont supposées positives ou nulles. Soient deux sommets  $v_0$  et  $v_{n-1}$  tels qu'il existe au moins un chemin allant de  $v_0$  à  $v_{n-1}$ .

L'une des variantes du problème du plus court chemin consiste à trouver un chemin élémentaire  $\mu$  allant d'un sommet  $x$  à un sommet  $y$ , minimisant la somme des longueurs des arcs empruntés.

Chaque arc  $u$  du graphe est associé à une longueur  $d(u) \geq 0$ , et la longueur totale d'un chemin  $\mu$  est donnée par :

$$d(\mu) = \sum_{u \in \mu} d(u)$$

Un chemin  $\mu$  joignant un sommet  $i$  à un sommet  $k$  est dit de **longueur minimale (ou maximale)** s'il minimise (ou maximise)  $d(\mu)$  parmi tous les chemins possibles entre  $i$  et  $k$ .

## 2.8 Algorithmes de résolutions

Plusieurs algorithmes permettent de résoudre les problèmes de cheminement dans un réseau. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'algorithme de Bellman, qui constitue une méthode efficace pour déterminer les plus courts che-

mins dans un graphe sans circuit.

## Principe

L'idée de l'algorithme de Bellman est de calculer, de proche en proche, l'arborescence des plus courtes distances à partir d'un sommet source  $s$  vers un sommet donnée  $p$ . On ne calcule la plus courte distance du sommet  $s$  ( qui est une racine) vers un sommet  $y$  que si les plus courtes distances du sommet  $s$  à tous les prédécesseurs de  $y$  ont déjà été calculées.

### 2.8.1 Algorithme de BELLMAN

#### Énoncé

**Données :** Un réseau  $R = (X, U, d)$  sans circuit, avec  $d(u) \in \mathbb{R}$  pour tout arc  $u \in U$ .

**Résultat :** Une arborescence des plus courtes distances  $A$ .

#### Étapes de l'algorithme

- **(0) Initialisation :**

Soit  $s$  un sommet de  $X$ , on pose :

$$S := \{s\}, \quad \pi(s) := 0, \quad A := \emptyset.$$

- **Étape(1) :**

Chercher un sommet  $x \in X \setminus S$  dont tous les prédécesseurs sont dans  $S$ .

- Si un tel sommet n'existe pas :

Terminer. Dans ce cas, soit  $S = X$ , soit le sommet  $s$  n'est pas une racine dans  $R$ .

- Si un tel sommet existe, passer à l'étape (2).

- **Étape(2) :**

On pose :

$$\pi(x) = \min_{\substack{u \in U \\ T(u)=x}} \{ \pi(I(u)) + d(u) \}$$

Soit  $u'$  l'arc pour lequel le minimum est atteint, c'est-à-dire :

$$\pi(x) = \pi(I(u')) + d(u')$$

Alors :

$$A := A \cup \{u'\}, \quad S := S \cup \{x\}$$

Aller à (1).

**Remarque :**

L'algorithme de Bellman s'applique aussi à la recherche du plus long chemin. Il suffit de remplacer le min par un max dans l'étape (2).

**Exemple**

Considérons le graphe orienté suivant :

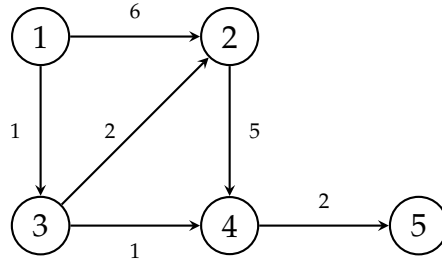


FIGURE 2.13 – Graphe de racine 1

On applique l'algorithme de Bellman pour déterminer les plus courts chemins depuis le sommet 1 vers tous les autres sommets atteignables du graphe.

**Étapes de calcul**

- Initialisation : on pose  $\pi(1) = 0$ ,  $S = \{1\}$ , et  $A = \emptyset$ .
- On traite le sommet 3 (car son prédécesseur 1 est dans  $S$ ) :  
 $\pi(3) = \pi(1) + 1 = 1$   
 $A := \{(1,3)\}$ ,  $S := \{1,3\}$
- On traite le sommet 2 (prédécesseurs 1 et 3 sont dans  $S$ ) :  
 On compare les chemins  $1 \rightarrow 2$  (coût 6) et  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  (coût  $1 + 2 = 3$ )  
 $\pi(2) = 3$ , chemin choisi :  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$   
 $A := A \cup \{(3,2)\}$ ,  $S := \{1,2,3\}$
- On traite le sommet 4 (prédécesseurs 2 et 3 sont dans  $S$ ) :  
 Deux chemins possibles :  
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  : coût  $1 + 1 = 2$   
 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  : coût  $3 + 5 = 8$   
 Minimum = 2  
 $\pi(4) = 2$ , chemin choisi :  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$   
 $A := A \cup \{(3,4)\}$ ,  $S := \{1,2,3,4\}$
- On traite le sommet 5 (prédécesseur 4 dans  $S$ ) :  
 $\pi(5) = \pi(4) + 2 = 2 + 2 = 4$

$$A := A \cup \{(4,5)\}, S := \{1,2,3,4,5\}$$

Ainsi on obtient l'arborescence suivante :

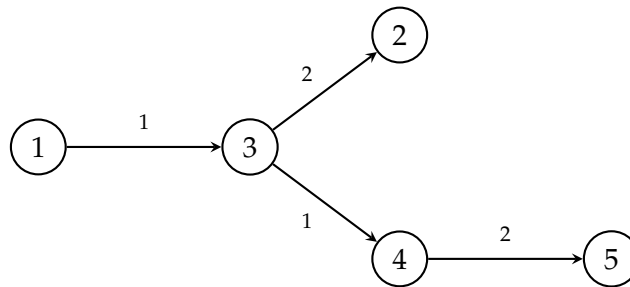


FIGURE 2.14 – Arborescence des plus courts chemins

## Conclusion

La théorie des graphes constitue un outil puissant dans de nombreux domaines, allant des mathématiques appliquées à l'informatique. Ce chapitre introductif a fourni les éléments de base pour manipuler et analyser des graphes. Dans les chapitres suivants, nous verrons comment ces notions sont mise à profit dans la résolution de problèmes concrets.

---

## Chapitre 3

---

# Problème d'ordonnancement

---

### Introduction

L'ordonnancement est une problématique centrale en recherche opérationnelle, notamment dans les domaines de la planification de projets et de la gestion de la production. Il consiste à organiser l'enchaînement des tâches tout en tenant compte des contraintes temporelles et des ressources disponibles, dans le but d'optimiser la performance globale du système étudié. Dans les projets complexes, où les tâches sont nombreuses, il devient indispensable de recourir à des outils de modélisation permettant de structurer et d'analyser le déroulement des activités.

Parmi ces outils, les méthodes basées sur la théorie des graphes telles que la méthode PERT (Program Evaluation and Review Technic) et MPM (Méthode des Potentiels Métra). Dans ce chapitre, nous présenterons les fondements théoriques de l'ordonnancement, les méthodes de résolution avec un focus particulier sur la méthode PERT.

### 3.1 Définitions et généralités

La théorie de l'ordonnancement est une branche de la recherche opérationnelle qui s'intéresse à l'organisation temporelle d'un ensemble d'opérations (ou tâches) nécessaires à la réalisation d'un projet.

Le déroulement de ces divers tâches doit respecter certaines contraintes (délais, contraintes d'enchaînements, contraintes portant sur la disponibilité des ressources requises...).

### 3.1.1 Projet

Dans le contexte de l'ordonnancement, un **projet** désigne un ensemble structuré de tâches ou d'activités à exécuter, reliées entre elles par des relations de précédence et soumises à divers contraintes, telles que la disponibilité des ressources ou la durée d'exécution.

### 3.1.2 Tâches / Jobs

Une tâche  $i$  représente un travail (job), une opération ou un ensemble d'opérations concrètement identifiable, contribuant à la réalisation d'un projet ou d'un processus. Son exécution est complètement définie par les caractéristique suivantes :[14]

- **Caractéristiques temporelles** : Chaque tâche est encadrée par des limites chronologiques bien définies :
  - $s_i$  : date ( ou instant ) de début de la tâche.
  - $C_i$  : date ( ou instant ) de fin de la tâche.
- **Durée d'exécution** : La durée  $p_i$  de la tâche est donnée par :

$$p_i = C_i - s_i$$

Deux modes d'exécution des tâches peuvent être envisagés : le *mode non préemptif* et le *mode préemptif*.

- Dans le **mode non préemptif**, une tâche  $i$  s'exécute sans interruption. Une fois commencée, elle se poursuit jusqu'à son terme, ce qui implique :

$$s_i + p_i = C_i, \quad \forall i \in T.$$

où  $T$  est l'ensemble des tâches

- Dans le **mode préemptif**, l'exécution d'une tâche peut être interrompue puis reprise ultérieurement. La somme des durées sur les différents intervalles d'exécution est égale à  $p_i$ , et on a :

$$s_i + p_i \leq C_i, \quad \forall i \in T$$

### 3.1.3 Les ressources

L'exécution des tâches dans un projet nécessite l'utilisation de diverses *ressources*, telles que les machines, la main-d'œuvre, les matières premières ou encore les moyens financiers. Une *ressource*  $k$  désigne ainsi un moyen humain ou technique impliqué dans la réalisation d'une tâche. Elle est généralement **disponible en quantité limitée**, représentée par une capacité propre à chaque ressource, notée  $Q_k$ , avec  $Q_k \geq 1$ .

On distingue principalement deux **types de ressources** selon leur comportement vis-à-vis de l'utilisation :

- **Ressources consommables** : une fois affectées à une tâche, elles sont totalement utilisées et ne peuvent plus être réutilisées par d'autres tâches. C'est le cas, par exemple, de l'argent, de l'énergie ou des matières premières.
- **Ressources renouvelables** : elles redeviennent disponibles une fois la tâche terminée. On retrouve dans cette catégorie les machines, le personnel, les fichiers ou encore les processeurs.

Parmi les ressources renouvelables, on distingue deux sous-catégories :

- **Ressources disjonctives** (ou non partageables) : elles ne peuvent être allouées qu'à *une seule tâche à la fois*. C'est le cas des machines ou des robots, qui ne peuvent exécuter qu'un seul travail.
- **Ressources cumulatives** (ou partageables) : elles peuvent être utilisées *simultanément par plusieurs tâches*, à condition que la demande cumulée ne dépasse pas leur capacité. Exemples : une équipe d'ouvriers, un poste de travail partagé.[14]

La prise en compte de ces différentes catégories de ressources est cruciale dans les modèles d'ordonnancement. Les *problèmes à ressources disjonctives* couvrent notamment une classe importante d'applications, appelée les *problème d'atelier* ou *de machines*, largement étudiés en recherche opérationnelle. La **nature des ressources** considérées permet ainsi de classer les problèmes d'ordonnancement en différentes familles, comme illustré dans la figure 3.1.

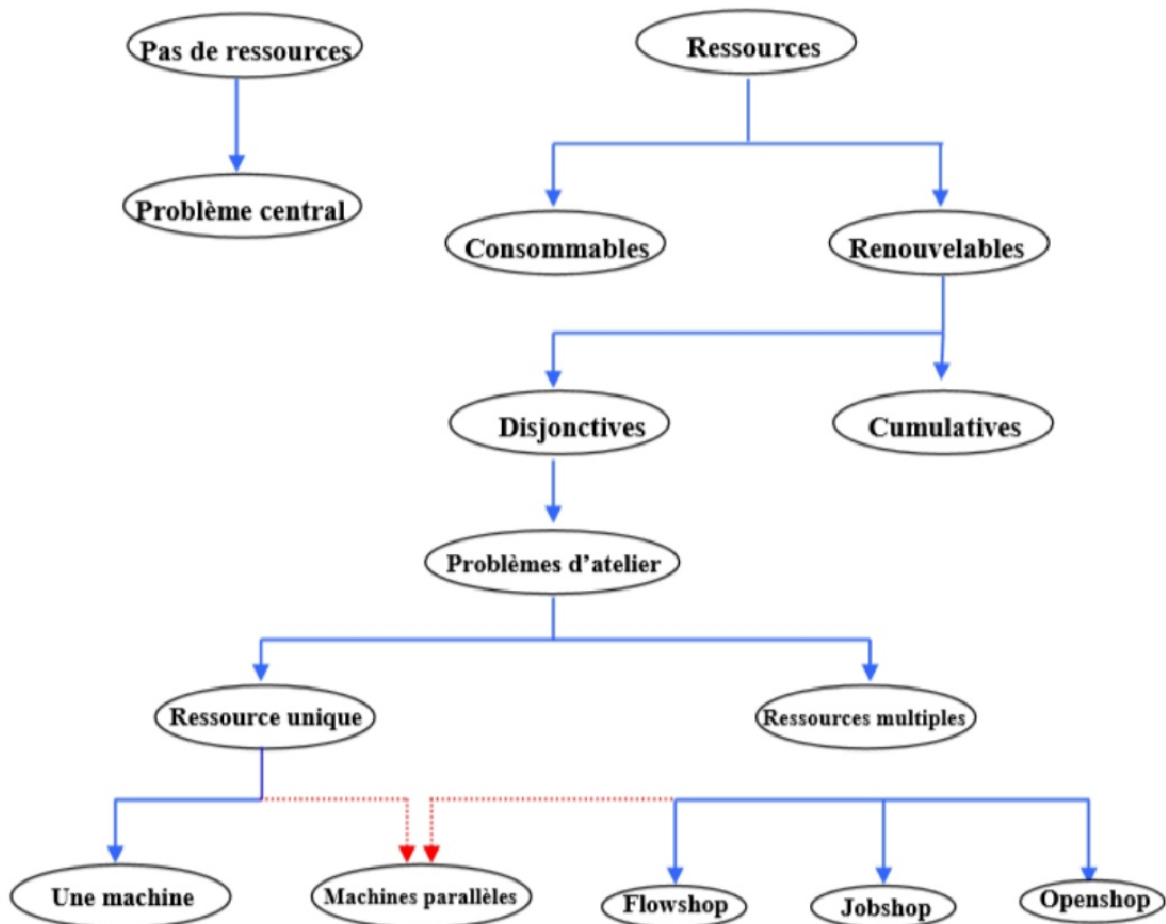


FIGURE 3.1 – Typologie des problèmes d’ordonnancement en fonctions des types de ressources.

### 3.1.4 Les ateliers

Les problèmes d’ordonnancement en atelier peuvent être classés en fonctions du nombre de machines et de leur ordre d’utilisation pour la fabrication d’un produit. La classification dépend du type d’atelier considéré, défini par la configuration des machines et les contraintes de cheminement des tâches.

On distingue principalement trois types d’ateliers :

*flow-shop*, *job-shop* et *open-shop*, comme illustré dans la figure 3.1.

**Atelier de type flow-shop :** Également appelé atelier à cheminement unique, ce type d’atelier se caractérise par une ligne de production composée de plusieurs machines disposées en série. Toutes les tâches passent par les machine dans le même ordre. Dans le cas d’un *flow-shop hybride*, certaines machines peuvent être disponibles en plusieurs

exemplaires identiques fonctionnant en parallèle.

**Atelier de type job-shop :** Aussi appelé atelier à cheminement multiple, il se distingue par un ordre d'exécution des opérations propre à chaque tâche. Chaque produit suit un itinéraire spécifique parmi les machines. Une extension de ce modèle, le *job-shop flexible*, permet à plusieurs machines de réaliser un même sus-ensemble d'opérations, offrant plus de flexibilité dans l'affectation des ressources.

**Atelier de type open-shop :** Ce type d'atelier est moins contraint que les précédents. L'ordre des opérations n'est pas défini à l'avance. L'objectif est alors de déterminer à la fois le cheminement des produits et leur ordonnancement, ces deux aspects pouvant être résolus conjointement. Toutefois, ce modèle reste moins répandu dans les environnements industriels par rapport aux modèles *flow-shop* et *job-shop*. [6]

### 3.1.5 Les contraintes

Les contraintes sont des restrictions imposées sur les valeurs que peuvent prendre les variables de décision, que ce soit sur le temps (pour l'ordonnancement) ou sur les ressources (pour l'affectation des tâches). Elles jouent un rôle clé dans la définition de l'ordonnancement des tâches d'un projet. On distingue principalement trois types de contraintes :

- **Les contraintes potentielles :**
  - **Contraintes d'antériorité :** Une tâche  $j$  ne peut commencer avant qu'une tâche  $i$  ne soit terminée. Par exemple, la construction des piliers ne peut débuter avant la fin des fondations. Cette relation traduit par :  $s_i + p_i \leq s_j$ .
  - **Contraintes de localisation temporelle :** Une tâche doit commencer après une date donnée ou finir avant une date imposée.[10]
- **Contraintes disjonctives :** elles imposent qu'une paire de tâche  $i$  et  $j$  ne soient pas exécutées simultanément. Ce type de contrainte survient lorsque les deux tâches utilisent une ressource unique, comme une machine ou une grue.[9] On a alors :

$$[s_i, s_i + p_i] \cap [s_j, s_j + p_j] = \emptyset$$

Il est donc nécessaire de choisir un ordre d'exécution entre les deux.

- **Les contraintes cumulatives :** Ces contraintes apparaissent lorsque plusieurs tâches utilisent simultanément une ou plusieurs ressources limitées.

### 3.1.6 Objectifs d'optimisation en ordonnancement

Dans le cadre des problèmes d'ordonnancement, l'objectif recherché est souvent l'optimisation d'un ou de plusieurs indicateurs de performance. Il peut s'agir, par exemple,

de minimiser la durée totale d'exécution, les retards, les coûts ou les pénalités, ou encore de satisfaire certaines contraintes spécifiques tout en garantissant la faisabilité de la solution.

Les variables les plus fréquemment utilisées pour formuler la fonction objectif sont les suivantes : [1]

- $C_i$  : date d'achèvement de la tâche  $i$ .
- $d_i$  : date d'échéance ( ou *due date*) de la tâche  $i$ .
- $L_i = C_i - d_i$  : retard associé à la tâche  $i$ .

Parmi les critères les plus courants à minimiser, on peut citer :

- **Temps moyen d'achèvement** :

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$$

Ce critère vise à réduire le temps moyen d'utilisation des ressources, en optimisant l'ensemble du planning de production.

### 3.1.7 Autres critères d'optimisation

Un critère central en ordonnancement est la durée totale nécessaire pour achever l'ensemble des tâches. Ce critère, appelé **makespan**, est défini comme le temps d'achèvement de la tâche la plus tardive :

$$C_{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} C_i$$

Minimiser le makespan revient à organiser les tâches de manière à ce que toutes soient terminées le plus rapidement possible. Cela permet une exploitation optimale des ressources disponibles, notamment les machines, et contribue à une meilleure efficacité globale du système de production.

#### Gestion des retards :

Dans de nombreux contextes industriels, la prise en compte des retards est primordiale. On distingue généralement deux types de mesures liées aux retards :

- **Retard algébrique** ( ou *lateness*) :

$$L_i = C_i - d_i$$

Il s'agit de la différence entre la date effective d'achèvement de la tâche  $i$  et sa date d'échéance  $d_i$ . Ce retard peut être positif (tâche en retard) ou négatif ( tâche terminée en avance).

- **Retard effectif** ( ou *tardiness*) :

$$T_i = \max(0, L_i)$$

Ce critère ne considère que les retards positifs. Si une tâche est terminée à temps ou en avance, son *tardiness* est nul.

Divers objectifs liés aux retards peuvent être envisagés, parmi lesquels :

- Minimisation du **retard maximum** :  $T_{\max} = \max(T_i)$ ,
- Minimisation du **retard moyen** :

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i,$$

- Minimisation du **retard algébrique maximum** :  $L_{\max} = \max(L_i)$ ,
- Minimisation du **nombre de tâches en retard** ( nombre de  $T_i > 0$ ).

### 3.1.8 Approches de résolution des problèmes d'ordonnancement

Une fois la décomposition du projet en tâches élémentaires réalisée, il devient essentiel de déterminer un ordre d'exécution compatible avec l'ensemble des contraintes identifiées. Trouver un tel ordre revient à formuler une solution au problème d'ordonnancement.

Parmi la multitude de solutions possibles, certaines se révèlent plus avantageuses que d'autres en termes de durée ou de coût. L'objectif est donc d'identifier, en fonction d'un critère donné ( par exemple, la minimisation du temps total d'exécution), la solution optimale ou, à défaut, une solution satisfaisante.

Les méthodes de résolution visent à répondre à cet objectif en proposant des outils permettant d'optimiser à la fois la planification des tâches et l'utilisation des ressources. Dans cette section, nous présentons deux approches couramment utilisées : la programmation mathématique et la méthode PERT.

### 3.1.9 Optimisation par la programmation mathématique

Parmi les techniques classiques de la recherche opérationnelle, la programmation mathématique, en particulier la programmation linéaire, occupe une place importante. Cette méthode consiste à modéliser un problème concret à l'aide de fonctions linéaires représentant un objectif à atteindre ( minimisation ou maximisation d'un critère) ainsi que des contraintes à respecter. Ces fonctions dépendent des variables du problème, qui peuvent correspondre, dans le cas de l'ordonnancement, aux dates de début ou la

fin des tâches, à l'affectation des ressources, etc.

Une fois le modèle mathématique établi, il peut être résolu à l'aide d'algorithmes d'optimisation bien connus, tels que :

- L'algorithme du simplexe,
- La méthode du branch and bound,
- ou encore des solveurs spécialisés comme CPLEX, GUROBI, etc.

Cette approche permet de générer des plannings optimisés respectant les contraintes temporelles et de ressources du projet, tout en minimisant la durée globale ou les coûts associés à la réalisation des tâches.

### 3.1.10 Méthodes graphiques d'ordonnancement des projets

Pour représenter graphiquement un projet et organiser l'exécution de ses tâches, plusieurs approches peuvent être utilisées. Ces méthodes, appelées collectivement *méthodes de chemin critique*, permettent de visualiser la planification, d'identifier les dépendances entre tâches, et de détecter les marges de manœuvre.

Parmi les principales, on distingue :

- **Le diagramme de Gantt** : Il s'agit de la méthode la plus ancienne et la plus simple. Elle représente les tâches sur un échelle de temps sous forme de barres horizontales, facilitant ainsi la visualisation de leur enchaînement et de leur durée.
- **La méthode PERT (Program Evaluation and Review Technic, 1956)** : cette méthode utilise un graphe orienté pour représenter les dépendances entre les tâches.
- **La méthode MPM (Méthode des Potentiels Métra, 1958)** : Également fondée sur une représentation graphique, cette méthode positionne les tâches sur les sommets d'un graphe. Elle est largement utilisée dans les logiciels de gestion de projet, tels que Microsoft Project ou GanttProject.

Dans notre travail, nous avons opté pour la méthode de PERT que nous allons présenter dans la section qui suit.

## 3.2 Méthode PERT

### 3.2.1 Historique

La méthode **PERT** a été développée en 1956 à la demande de la marine américaine, dans le cadre du programme de développement des missiles Polaris. Ce projet, d'une

importance stratégique, visait à rattraper le retard technologique des États-Unis face à l'URSS, à la suite du choc provoqué par le lancement du satellite Spoutnik. Impliquant environ 9 000 sous-traitants et 250 fournisseurs, ce programme initialement prévu sur 7 ans a vu sa durée réduite à 4 ans grâce à l'application de la méthode PERT. Cette démarche a été conduite avec l'appui de la société de conseil en stratégie Booz Allen Hamilton.

### 3.2.2 Concepts généraux

#### Représentation

La méthode PERT est une technique d'ordonnancement de projets à long terme. Elle permet de représenter la planification de la réalisation d'un projet suivant un graphe des dépendances. Cette méthode vise principalement à :

- Faciliter la coordination et le suivi de l'avancement du projet;
- Améliorer les prévisions en termes de durée et de coût;
- Identifier le chemin critique du projet, ce qui permet de déterminer :
  - La durée totale du projet;
  - Les tâches pour lesquelles tout retard entraîne l'allongement du projet.

#### Tâche

Une tâche est le déroulement dans le temps d'une action permettant au projet d'avancer vers son état final.

Chaque tâche est représentée par un arc dont la longueur de cet arc représente la durée de réalisation de cette tâche.

#### Étape

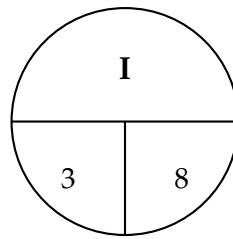
Une **étape** (ou événement) marque soit le **début**, soit la **fin** d'une ou plusieurs tâches. Elle est représentée par un **nœud**, généralement numéroté.

Pour chaque étape, deux dates importantes sont précisées :

- La **Date au plus tôt** : C'est la date avant laquelle une tâche ne peut démarrer.
- La **Date au plus tard** : C'est la date limite de réalisation d'une tâche sans que le projet soit retardé.

Ainsi, une étape est représentée par un rond découpé en trois zones précisé par son numéro, sa date au plus tôt et au plus tard.

### Exemple



- Le cercle représente une **étape PERT**.
- En haut : le **numéro de l'étape (I)**.
- En bas à gauche : la **date au plus tôt (3)**.
- En bas à droite : la **date au plus tard (8)**.

### Réseau

Un réseau PERT ou diagramme PERT est une représentation graphique de l'ensemble des tâches et des étapes constituant un projet. Ce réseau comporte toujours une étape de début et une étape de fin. Il se lit de gauche à droite, avec des flèches orientées dans ce sens, sans possibilité de retour en arrière.

### Règles de la représentation graphique

- Chaque **tâche** possède une **étape de début** et une **étape de fin**.
- Une tâche ne peut commencer que lorsque la tâche précédente est entièrement terminée.
- Deux tâches qui se succèdent immédiatement sont représentées par des **flèches consécutives**.

On distingue trois types de tâches :

#### a. Tâches simultanées

Lorsque deux tâches commencent en même temps, elles partent d'une même étape de début.

### Exemple

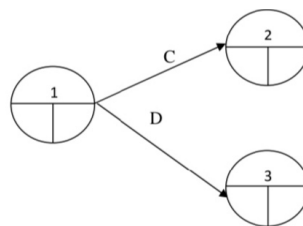


FIGURE 3.2 – Tâches simultanées

b. **Tâches convergentes**

Si deux tâches précèdent une même tâche suivante, elles convergent vers une même étape.

**Exemple**

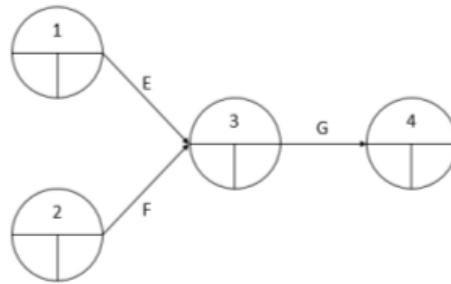


FIGURE 3.3 – Tâches convergentes, la tâche E et F convergent.

c. **Tâches fictives**

Pour respecter certaines contraintes logiques sans influencer la durée du projet, on utilise des **tâches fictives**, représentées par des flèches en pointillés. Elles ont une durée nulle.

**Exemple**

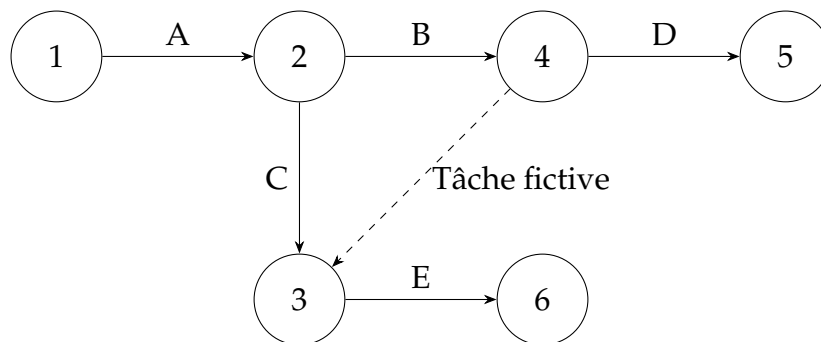


FIGURE 3.4 – Représentation d'une tâche fictive

Ainsi, le réseau PERT se compose de sommets (représentant les étapes) reliés entre eux par des arcs (représentant les tâches). Chaque arc est défini par sa tâche, sa durée, et les sommets qu'il relie, qui déterminent les relations d'antériorité entre les tâches. Ce graphe ne comporte ni boucle ni circuit, et il n'y a qu'un seul arc entre deux sommets.

### 3.2.3 Calcul des dates dans la méthode PERT

La méthode PERT repose sur le calcul des dates de début et de fin pour chaque tâche d'un projet, ainsi que sur l'évaluation des marges de manœuvre disponibles.

#### 1. Date au plus tôt (*Earliest Start - ES*)

La **date au plus tôt** d'une tâche  $i$ , notée  $ES(i)$ , représente la plus petite date à laquelle la tâche peut commencer, en respectant les dépendances vis-à-vis des tâches précédentes.

- **Initialisation :**

$$ES(\text{Début}) = 0$$

- **Formule de récurrence :**

$$ES(i) = \max_{l \in \Gamma^-(i)} (ES(l) + p_l)$$

où :

- $\Gamma^-(i)$  désigne l'ensemble des tâches immédiatement antérieures à  $i$ ,
- $p_l$  est la durée de la tâche  $l$ .

#### 2. Date de fin au plus tôt (*Earliest Finish - EF*)

Une fois  $ES(i)$  connue, la date de fin au plus tôt  $EF(i)$  s'obtient par :

$$EF(i) = ES(i) + p_i$$

#### 3. Date au plus tard (*Latest Start - LS*)

La **date au plus tard** d'une tâche  $i$ , notée  $LS(i)$ , est la date maximale à laquelle la tâche peut commencer sans retarder la fin du projet.

- **Initialisation :**

$$LS(\text{Fin}) = ES(\text{Fin})$$

- **Formule de récurrence (calcul en sens inverse du graphe) :**

$$LS(i) = \min_{j \in \Gamma^+(i)} (LS(j) - p_i)$$

où :

—  $\Gamma^+(i)$  désigne l'ensemble des tâches immédiatement postérieures à  $i$ .

#### 4. Date de fin au plus tard (*Latest Finish - LF*)

$$LF(i) = LS(i) + p_i$$

Ces calculs permettent de connaître pour chaque tâche ses dates de démarrage et de fin optimales dans le cadre du planning projet.

### Marges Totale et Marge Libre

#### 1. Marge Totale (MT - *Total Slack*)

La **marge totale** d'une tâche  $i$ , notée  $MT(i)$ , représente le temps maximal pendant lequel la tâche peut être retardée sans affecter la durée totale du projet.

$$MT(i) = LS(i) - ES(i) = LF(i) - EF(i)$$

Si  $MT(i) = 0$ , la tâche est dite **critique**.

#### 2. Marge Libre (ML - *Free Slack*)

La **marge libre** d'une tâche  $i$ , notée  $ML(i)$ , est le délai dont on dispose pour retarder la tâche sans affecter les tâches suivantes.

$$ML(i) = \min_{j \in \Gamma^+(i)} (ES(j)) - (ES(i) + p_i)$$

Les marges permettent d'identifier les flexibilités dans le planning, et d'agir efficacement sur les tâches non critiques pour ajuster les ressources.

### Chemin critique

Le **chemin critique** est l'enchaînement des tâches pour lesquelles la **marge totale est nulle**. Toute variation de durée sur une de ces tâches entraîne une modification de la

durée totale du projet. Ce chemin détermine donc la durée minimale de réalisation du projet.

## Exemple d'application de la méthode PERT

### Tâches du projet

Tâches	Durée (en jours)	Tâches Antérieures
A	5	-
B	4	-
C	6	A
D	3	A, B
E	5	B
F	4	C
G	7	D
H	8	E
I	5	G
J	6	H, I

TABLE 3.1 – Tableau des tâches, durées et dépendances.

### Niveaux des Tâches

Tâches	Niveau
A	0
B	0
C	1
D	1
E	2
F	2
G	3
H	4
I	4
J	5

TABLE 3.2 – Tableau des niveaux de chaque tâche.

### Calcul des dates au plus tôt et au plus tard

Les dates  $ES$ ,  $EF$ ,  $LS$ ,  $LF$  sont calculées à l'aide des formules présentées précédemment. Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

Tâches	Durée	ES	EF	LS	LF
A	5	0	5	0	5
B	4	0	4	3	7
C	6	5	11	5	11
D	3	5	8	7	10
E	5	4	9	7	12
F	4	11	15	12	16
G	7	8	15	10	17
H	8	9	17	12	20
I	5	15	20	17	22
J	6	17	23	20	26

TABLE 3.3 – Tableau des dates au plus tôt (ES, EF) et au plus tard (LS, LF) des tâches.

### Marge Totale et Marge Libre

Les marges sont calculées à partir des dates précédentes.

Tâches	Marge Totale (MT)	Marge Libre (ML)
A	0	0
B	3	0
C	0	0
D	2	0
E	3	0
F	1	0
G	2	0
H	3	0
I	2	0
J	0	0

TABLE 3.4 – Tableau des marges totales et libres des tâches.

### Chemin Critique

Le chemin critique est constitué des tâches ayant une marge totale nulle. Dans cet exemple, le chemin critique est :

Chemin Critique :  $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow J$

Cela signifie que toute variation dans la durée de ces tâches entraînerait un décalage de la fin du projet.

## **Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions fondamentales de l'ordonnancement ainsi que les principales méthodes de résolution. Nous nous sommes particulièrement concentrés sur la méthode PERT, qui ne constitue pas uniquement une technique de calcul, mais aussi un véritable outil de planification stratégique. Elle permet d'anticiper les risques de retard, de visualiser clairement les interdépendances entre les tâches, et d'optimiser l'utilisation des ressources dans une logique de pilotage global du projet.

---

## Chapitre 4

---

# Problématique et résolution

---

### Introduction

Au sein de l'ENIEM, la planification annuelle de la production est élaborée par la direction chargée de la gestion industrielle, en tenant compte des tendances du marché. Ce plan directeur est ensuite décliné en un calendrier opérationnel que les différentes unités de fabrication doivent suivre de manière rigoureuse. Le service d'ordonnancement joue un rôle clé en assurant la liaison entre les orientations stratégiques de l'entreprise et leur exécution concrète sur les lignes de production. Il s'occupe notamment de la sélection des produits à lancer, de la hiérarchisation des priorités, de l'émission des ordres de fabrication, ainsi que de la préparation des documents de production.

La présente étude s'attache à analyser un cas réel d'organisation des tâches de production dans ce service. Elle vise à proposer des outils méthodologiques permettant une meilleure structuration du travail, en optimisant les délais tout en respectant les contraintes imposées par le processus industriel.

Dans cette perspective, deux approches complémentaires ont été mobilisées :

- D'une part, **la modélisation à l'aide de la programmation linéaire**, qui permet de traduire le problème en un système d'équations et d'inégalités représentant à la fois les contraintes à respecter et l'objectif à atteindre. Cette méthode constitue une base formelle solide pour appuyer les décisions liées à la planification.
- D'autre part, **la méthode PERT (Program Evaluation and Review Technique)**, qui fournit une représentation graphique des différentes activités d'un projet,

en mettant en lumière les relations de dépendance entre les tâches. Elle permet d'identifier les enchaînements critiques, d'évaluer les délais nécessaires à la réalisation complète d'un ensemble d'activités, et de repérer les marges de manœuvre éventuelles.

Enfin, l'utilisation du logiciel **LINGO** permet de résoudre efficacement le modèle mathématique établi et d'obtenir des résultats exploitables dans un contexte industriel concret.

Ce chapitre présentera ainsi les différentes phases de l'étude : identification du problème, élaboration du modèle, construction du réseau de tâches, résolution numérique, puis analyse et interprétation des résultats obtenus. À travers cette démarche, nous montrons comment des outils issus de la recherche opérationnelle peuvent contribuer à améliorer la performance des systèmes de production.

### **4.1 Problématique de l'ordonnancement au sein d'un système de production industriel**

Dans les secteurs industriels, une planification rigoureuse des tâches constitue un levier fondamental pour assurer une gestion opérationnelle efficace. L'ordonnancement des projets a pour objectif principal d'optimiser l'allocation des ressources disponibles, tout en respectant les délais impartis et en maîtrisant les coûts.

Une telle organisation ne se limite pas à garantir la livraison des produits dans les délais ; elle contribue également à l'amélioration de la productivité globale, à la réduction des temps d'inactivité et à la limitation des pertes d'efficacité au sein du système de production.

#### **4.1.1 Position du problème**

L'atelier de montage final de l'unité cuisson de l'entreprise **ENIEM** est confronté à une problématique liée à la cadence de production. Plus précisément, il s'agit d'optimiser le temps d'assemblage du modèle de cuisinière **6550-SFV (SÉCURITÉ DE FLAMME AVEC FOUR VENTILÉ)**. Actuellement, la chaîne de fabrication permet une production quotidienne de **175 unités**, avec un rythme d'une cuisinière toutes les **144 secondes**. Cependant, face à une demande en constante augmentation, l'entreprise cherche à améliorer cette performance en optimisant l'utilisation de ses ressources, tout en garantissant le respect des délais de livraison.

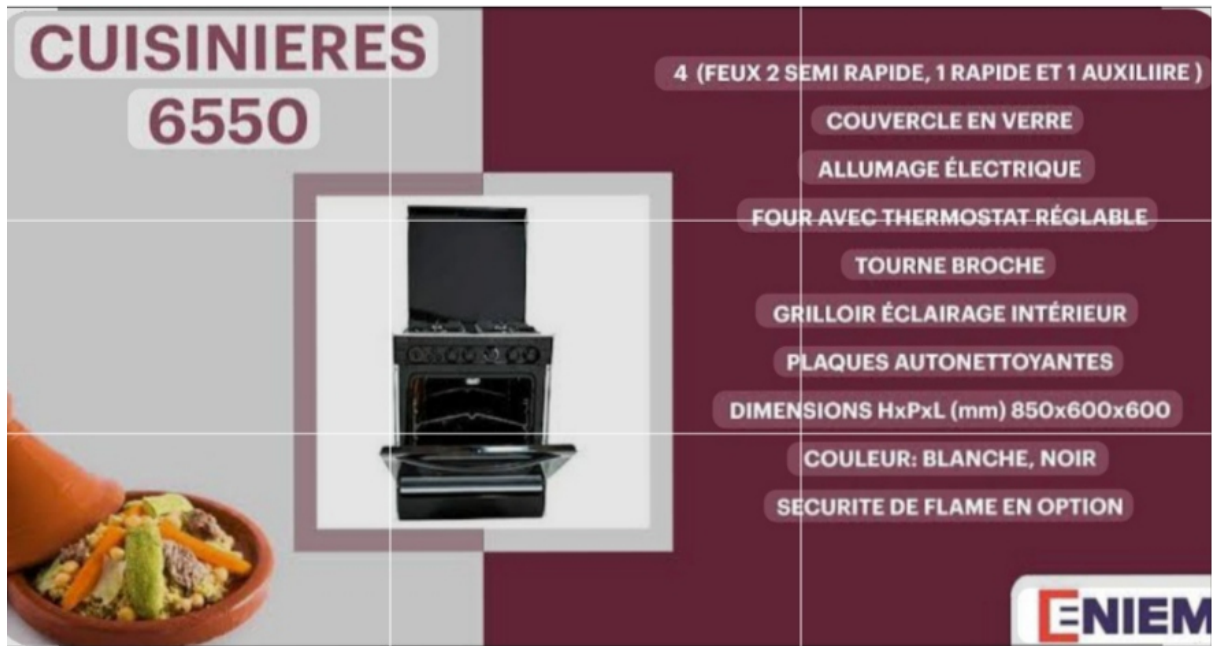


FIGURE 4.1 – Fiche technique du cuisinière 6550-SFV

#### 4.1.2 Orientation de la recherche

La mission consiste à examiner en profondeur le processus actuel d'assemblage des cuisinières dans l'unité cuisson de l'entreprise **ENIEM**, dans le but d'identifier les points de blocage et les dysfonctionnements susceptibles de ralentir la production. L'objectif principal est de proposer une stratégie d'ordonnancement efficace permettant de réduire la durée totale du projet et d'optimiser le déroulement des tâches.

Nous nous focalisons sur l'amélioration de la cadence de production, actuellement fixée à une cuisinière toutes les **144 secondes**, en cherchant à augmenter le nombre d'unités produites quotidiennement sans compromettre la qualité, véritable marque de fabrique de l'entreprise.

L'approche retenue devra prendre en compte l'ensemble des contraintes liées aux ressources humaines, matérielles et techniques. Il s'agit de mettre en place une solution qui fluidifie les opérations, réduit les temps d'attente et améliore l'efficacité globale de la chaîne de production.

Au-delà de l'amélioration de la productivité, cette optimisation vise à renforcer la compétitivité de **ENIEM** sur un marché en constante évolution.

## 4.2 Modélisation mathématique

La première étape de notre approche consiste à élaborer un modèle mathématique rigoureux représentant le problème d'ordonnancement. Ce modèle repose sur la définition formelle des variables de décision, des contraintes de précédence entre les tâches, ainsi que sur la formulation de la fonction objectif.

Dans notre cas, le modèle linéaire a pour objectif de déterminer la **durée minimale d'exécution du projet**, notée  $D_1$ , sans recourir à une stratégie d'accélération.

Nous considérons un ensemble de tâches  $T$ , avec  $i, j \in T$ . Lorsqu'une contrainte de précédence existe entre deux tâches  $i$  et  $j$ , cela signifie que la tâche  $j$  ne peut commencer qu'après la fin de la tâche  $i$ . Cette relation est notée  $i < j$ , où  $j \in \Gamma(i)$ , et  $\Gamma(i)$  désigne l'ensemble des tâches directement succédant à  $i$ .

Les **variables de décision** utilisées sont les suivantes :

- $s_i$  : date de début d'exécution de la tâche  $i$ ,
- $p_i$  : durée d'exécution de la tâche  $i$ ,
- $C_i$  : date de fin de la tâche  $i$ , donnée par  $C_i = s_i + p_i$ ,
- $C_{\max}$  : *makespan*, soit la durée totale du projet (temps d'achèvement de la dernière tâche).

### 4.2.1 Modèle d'Optimisation

L'objectif est de minimiser la durée totale de réalisation du projet, représentée par  $C_{\max}$ , c'est-à-dire la date de fin de la dernière tâche. La fonction objectif s'écrit donc :

$$\min Z = C_{\max}$$

Les contraintes du modèle sont les suivantes :

#### 1. Contraintes de précédence

Pour chaque paire de tâches  $i, j$  telle que la tâche  $i$  précède la tâche  $j$ , on impose :

$$s_j \geq s_i + p_i \quad \forall (i, j) \text{ avec } j \in \Gamma(i)$$

#### 2. Contraintes de complétion du projet

Pour chaque tâche terminale  $i$  (c'est-à-dire sans successeur), on impose que :

$$C_{\max} \geq s_i + p_i \quad \forall i \in T \text{ terminales}$$

### 3. Contraintes de non-négativité

Toutes les dates doivent être positives ou nulles :

$$s_i \geq 0 \quad \text{et} \quad C_{\max} \geq 0 \quad \forall i \in T$$

### 4.3 Mise en pratique

Dans le but de minimiser la durée totale de notre projet, et après avoir modélisé mathématiquement le problème, nous passons à présent à la phase d'application.

Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser la méthode **PERT**, combinée à la **programmation linéaire**. Les différentes tâches d'assemblage sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Dans toute la suite de notre étude, nous supposons que :

- les ressources nécessaires sont disponibles en quantités suffisantes;
- la condition d'absence de cycles dans le graphe est respectée.

#### Tableau des tâches de fabrication de la cuisinière

Tâche(s)	Désignation	Précédence	Durée (s)
<b>1<sup>ère</sup> Zone : Antérieure</b>			
C	Poser les éléments de la carcasse dans le gabarit : groupe fond avec douille, groupe postérieur, et paroi latérale gauche	–	13.038
D	Positionner un ciel carcasse	–	18.888
E	Fixer l'ensemble avec 11 vis TCB NOIR 4.2*13	C,D	23.85
F	Préparer les éléments de la porte	–	17.172
G	Ajuster les charnières	F	12.882
H	Installer le joint de porte	G	19.284
I	Monter la porte four	G	9.198
<b>2<sup>ème</sup> Zone : Extérieure</b>			
J	Poser une façade carcasse et bloquer le gabarit	–	11.652
K	Poser un ensemble paroi latérale carcasse droit et bloquer le gabarit	–	12.732
L	Poser un fond four gaz et bloquer le gabarit	–	13.698
M	Fixer l'ensemble avec 10 vis TCB NOIR avec rondelle 4.2*13	E,J,K	22.39

Tâche(s)	Désignation	Précédence	Durée (s)
N	Visser une douille lampe sur ciel carcasse	D	6.822
O	Débloquer le gabarit et évacuer l'ensemble sur les galets	M	8.658
P	Poser les pieds de la cuisinière	N	7.668
Q	Fixer les grilles de cuisson	O	14.136
R	Vérifier l'alignement des grilles	P	8.340
S	Installer le panneau de contrôle supérieur	N	10.338
<b>3<sup>ème</sup> Zone : Sur la chaîne</b>			
T	Prendre une palette et la positionner sur la table	–	15.876
U	Tirer l'ensemble carcasse et poser la palette	T	3.606
V	Fixer une charnière femelle côté droit	M	9.79
W	Fixer l'autre charnière femelle côté gauche	V	10.47
X	Poser un isolant carcasse après dégagement des trous	W	11.81
Y	Installer un feu clignotant	X	13.71
Z	Effectuer les tests de contrôle final : système électrique, allumage du gaz, thermostat	Y	11.58
<b>4<sup>ème</sup> Zone : Contrôle / Finition</b>			
Ac	Pré-monter 4 pièces (vis/douille)	–	7.200
Ad	Insérer 2 autonettoyants latéraux dans les douilles	Ac	12.372
Ae	Contrôler la conformité de la carcasse	M	9.288
Af	Nettoyer la surface du four	Ad	15.234
Ag	Vérifier l'étanchéité du fond	Ae	11.700
Ah	Effectuer un contrôle final sur l'émaillage	Af	18.000
Ai	Finaliser le montage de la porte	H,I	17.130
Aj	Contrôler la fonctionnalité des boutons	R,S	11.832
Ak	Emballer le produit final pour expédition	Ag,Ah,Ai	9.99

**Tableau des niveaux PERT (trié par niveau croissant)**

Niveau	Tâches
0	C, D, F, J, K, L, T, Ac

1	E, G, N, U, Ad
2	M, H, I, P, S, Af
3	V, Ae, Ai, Ah, O
4	Ag, W, Q
5	R, X
6	Aj, Y
7	Z
8	Ak

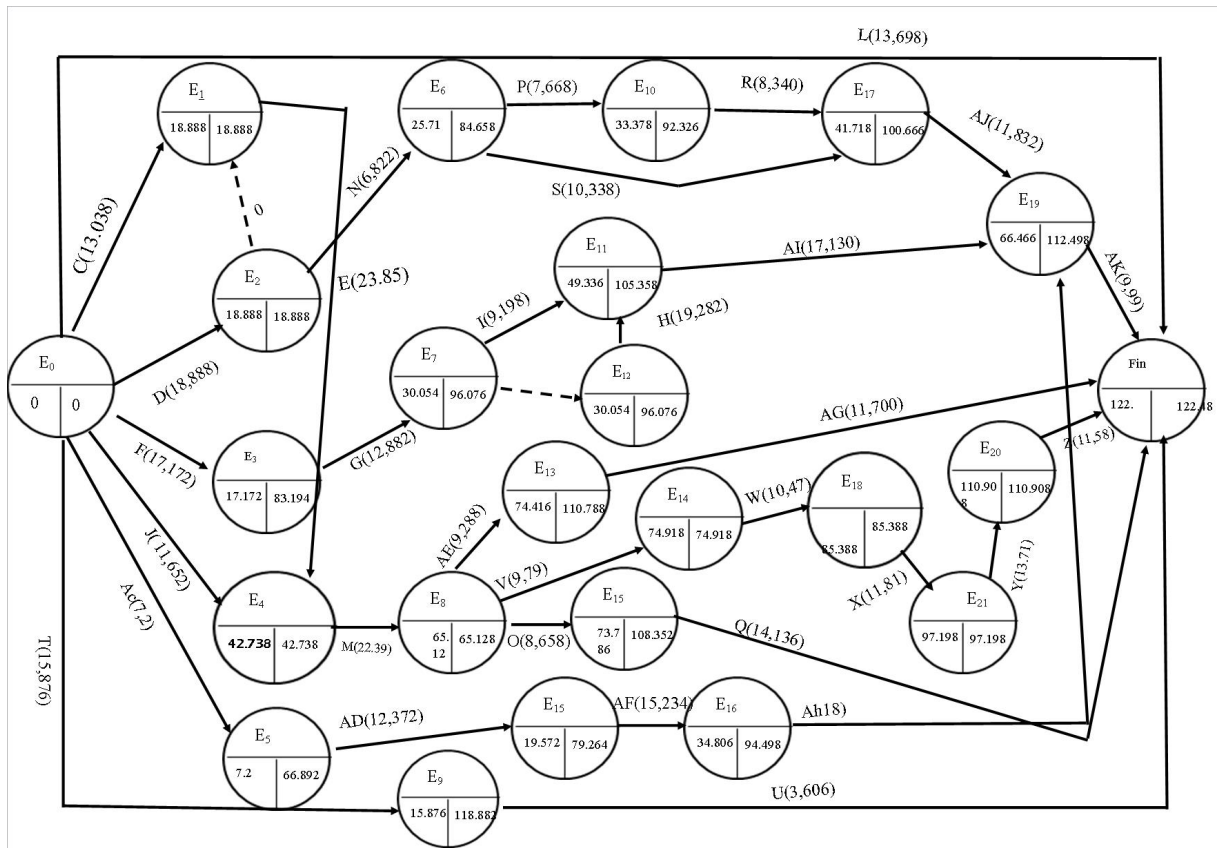


FIGURE 4.2 – Réseau PERT

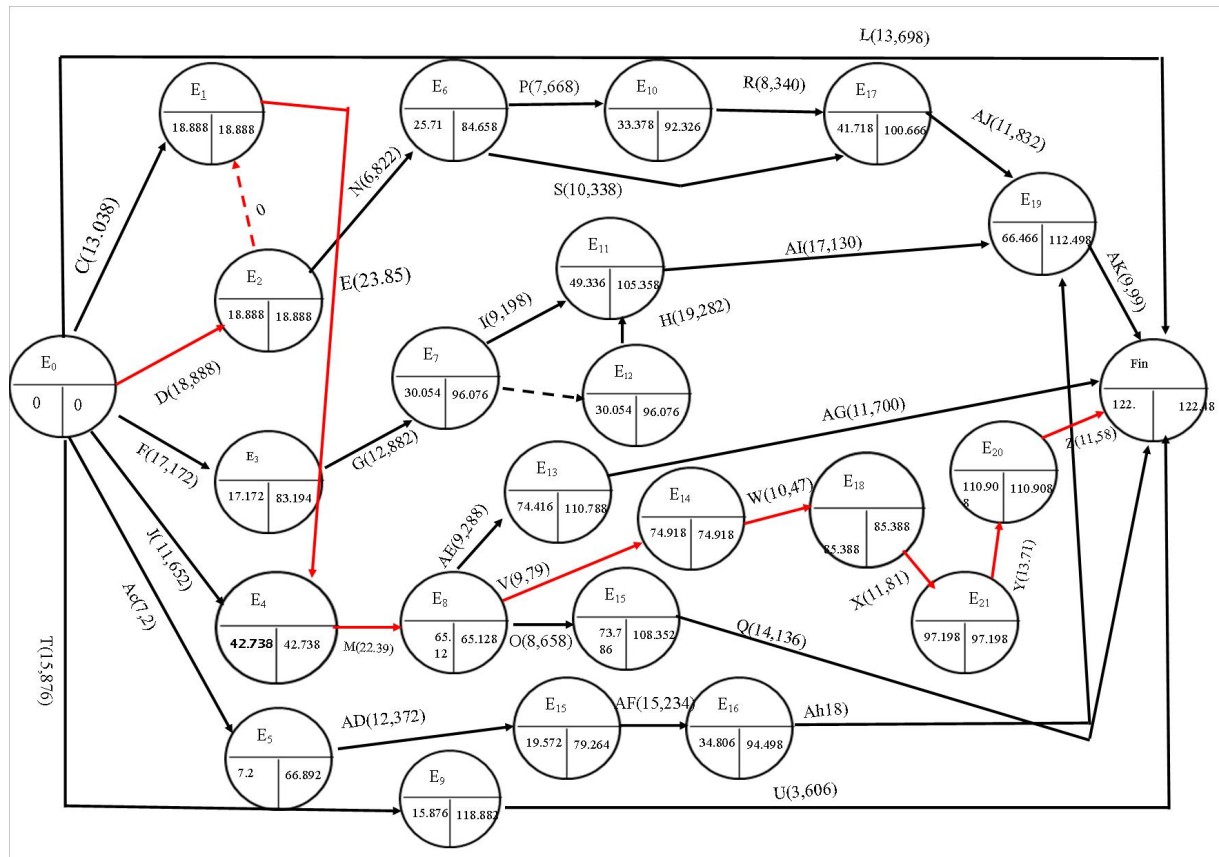


FIGURE 4.3 – Chemin critique du graphe PERT

**Chemin critique :**

$D \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$

**Durée totale du projet (makespan) : 122.488 secondes**

**4.3.1 Interprétation des résultats**

L'analyse des dates au plus tôt et au plus tard, ainsi que du chemin critique, permet de tirer plusieurs conclusions essentielles dans le cadre de notre problématique, qui consiste à **minimiser la durée de production des cuisinières**, tout en respectant la contrainte selon laquelle **les durées des tâches sont fixes** (aucune réduction n'est envisagée).

**Chemin critique**

Le chemin critique identifié est :

$D \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$

Il représente la séquence de tâches déterminant directement la durée totale de fabrication. Tout retard sur l'une de ces tâches entraînerait une augmentation immédiate du temps global de production.

### Durée totale du projet (makespan)

La durée nécessaire à l'exécution des tâches critiques est estimée à :

**122,488 secondes**

### Cadence journalière visée

L'objectif de production est de **175 cuisinières par jour**, avec une journée de travail de **7 heures**, soit :

- Temps disponible par jour :  $7 \times 3600 = 25\,200$  secondes
- Temps moyen alloué par cuisinière :  $\frac{25\,200}{175} \approx \mathbf{144}$  secondes
- Durée de fabrication d'une cuisinière (selon le chemin critique) : **122,488 s**
- Nombre maximal de cuisinières théoriquement produites par jour :  $\frac{25\,200}{122,488} \approx \mathbf{206}$  unités

La durée de fabrication d'une cuisinière est donc **inférieure** au seuil maximal de 144 s. Cela signifie que le système de production est non seulement capable de satisfaire la cadence journalière visée, mais qu'il existe également une **marge de capacité**, permettant théoriquement de produire jusqu'à **206 cuisinières par jour**.

**Gain de production possible :** La marge constatée permet une augmentation potentielle de la production journalière de :

$$206 - 175 = \mathbf{31 \text{ cuisinières}}$$

Ainsi, le système actuel offre une capacité supplémentaire de **31 unités par jour**, ce qui représente une augmentation possible de plus de **17,7%** par rapport à l'objectif initial et l'analyse PERT a permis de :

- Identifier les tâches critiques à surveiller en priorité ;
- Vérifier la compatibilité entre la durée de fabrication et l'objectif de production ;
- Confirmer la cohérence du planning avec les contraintes industrielles.

Cependant, le plan de production proposé est **réaliste et maîtrisé**, garantissant une fabrication régulière conforme aux exigences de l'atelier, tout en offrant une marge de productivité appréciable.

## 4.4 Le programme linéaire

Dans le cadre de ce projet, notre objectif est la **détermination optimale de la durée totale du projet**, en tenant compte des contraintes d'ordonnancement existantes. La durée normale (c'est-à-dire sans compression ni accélération) est d'abord estimée à l'aide de la méthode **PERT**.

Cependant, la complexité du réseau de dépendances entre les tâches rend difficile une résolution manuelle du problème sous forme de programme linéaire. C'est pourquoi nous faisons appel à un outil logiciel spécialisé : **LINGO**.

### Présentation de LINGO

**LINGO** est un logiciel de programmation et d'optimisation développé par *LINDO Systems*. Il permet de formuler, analyser et résoudre efficacement des problèmes mathématiques, même complexes. Il prend en charge plusieurs types de modèles, notamment :

- les programmes linéaires (LP),
- les programmes non linéaires (NLP),
- les programmes entiers mixtes (MIP),
- les modèles quadratiques (QP), entre autres.



FIGURE 4.4 – Logo de LINGO

LINGO propose un **langage de programmation simple et intuitif**, facilitant la création de modèles mathématiques complexes, même pour les utilisateurs ayant peu d'expérience en programmation. Il prend en charge différents types de variables et de contraintes, offrant ainsi une grande flexibilité dans la modélisation de situations réelles.

Grâce à son **interface graphique conviviale**, LINGO permet de saisir, modifier et résoudre les modèles de manière interactive. Les résultats sont présentés de façon claire

et structurée, ce qui en fait un outil efficace pour la prise de décision dans des domaines tels que :

- la recherche opérationnelle,
- la logistique,
- la planification de la production,
- la finance,
- ainsi que d'autres secteurs industriels.

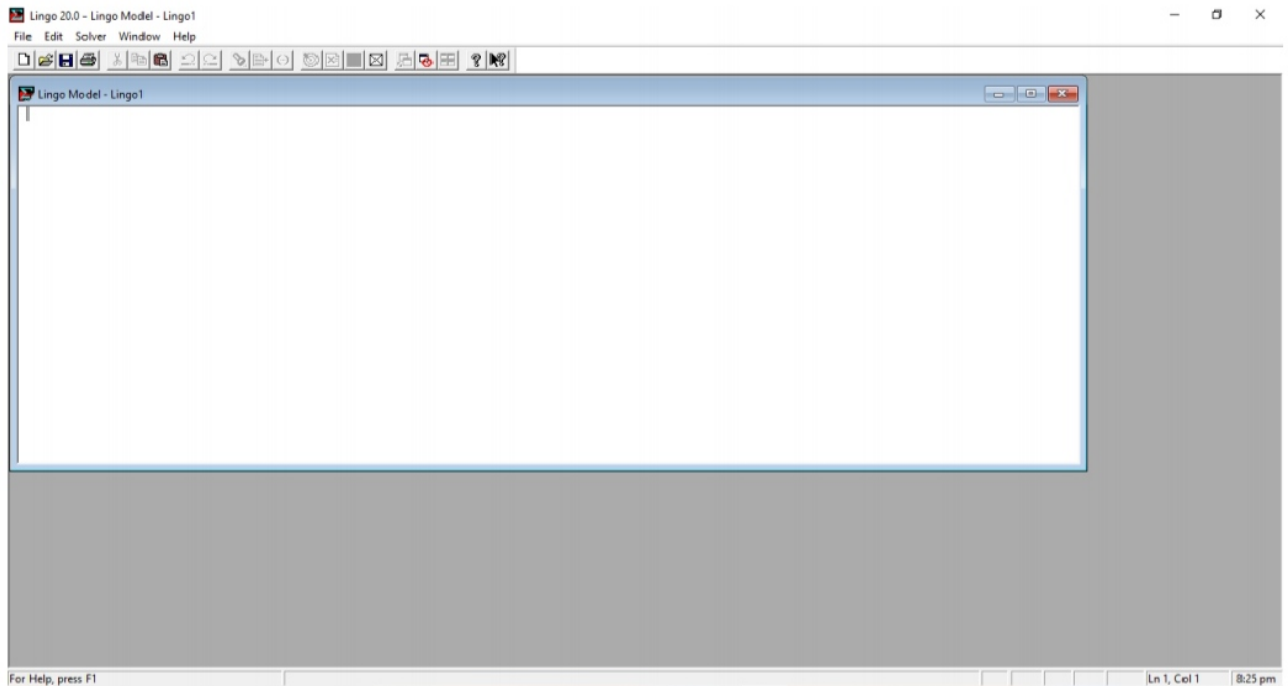


FIGURE 4.5 – Interface graphique de LINGO 20.0

Le modèle linéaire correspondant à notre problème en langage LINGO est présenté ci-dessous :

MODEL :

! Objectif : minimiser la durée totale (Cmax);

MIN = Cmax;

! Contraintes de précédence basées sur le tableau des tâches;

sC >= 0;

sD >= 0;

$sE - sC \geq 13.038;$   
 $sE - sD \geq 18.888;$   
 $sF \geq 0;$   
 $sG - sF \geq 17.172;$   
 $sH - sG \geq 12.882;$   
 $sI - sG \geq 12.882;$   
 $sJ \geq 0;$   
 $sK \geq 0;$   
 $sL \geq 13.698;$   
 $sM - sE \geq 23.85;$   
 $sM - sJ \geq 11.652;$   
 $sM - sK \geq 12.732;$   
 $sN - sD \geq 18.888;$   
 $sO - sM \geq 22.39;$   
 $sP - sN \geq 6.822;$   
 $sQ - sO \geq 8.658;$   
 $sR - sP \geq 7.668;$   
 $sS - sN \geq 6.822;$   
 $sT \geq 0;$   
 $sU - sT \geq 15.876;$   
 $sV - sM \geq 22.39;$   
 $sW - sV \geq 9.79;$   
 $sX - sW \geq 10.47;$   
 $sY - sX \geq 11.81;$   
 $sZ - sY \geq 13.71;$   
 $sAc \geq 0;$   
 $sAd - sAc \geq 7.2;$   
 $sAe - sM \geq 22.39;$   
 $sAf - sAd \geq 12.372;$   
 $sAg - sAe \geq 9.288;$   
 $sAh - sAf \geq 15.234;$   
 $sAi - sH \geq 19.284;$   
 $sAi - sI \geq 9.198;$   
 $sAj - sR \geq 8.34;$   
 $sAj - sS \geq 10.338;$   
 $sAk - sAg \geq 11.7;$   
 $sAk - sAh \geq 18.0;$   
 $sAk - sAi \geq 17.13;$

! Contraintes de non-négativité;

sL >= 0;

sN >= 0;

sO >= 0;

sP >= 0;

sQ >= 0;

sR >= 0;

sS >= 0;

sT >= 0;

sU >= 0;

sV >= 0;

sW >= 0;

sX >= 0;

sY >= 0;

sZ >= 0;

sAc >= 0;

sAd >= 0;

sAe >= 0;

sAf >= 0;

sAg >= 0;

sAh >= 0;

sAi >= 0;

sAj >= 0;

sAk >= 0;

Cmax - sZ >= 11.58;

!END

On obtient les résultats suivants :

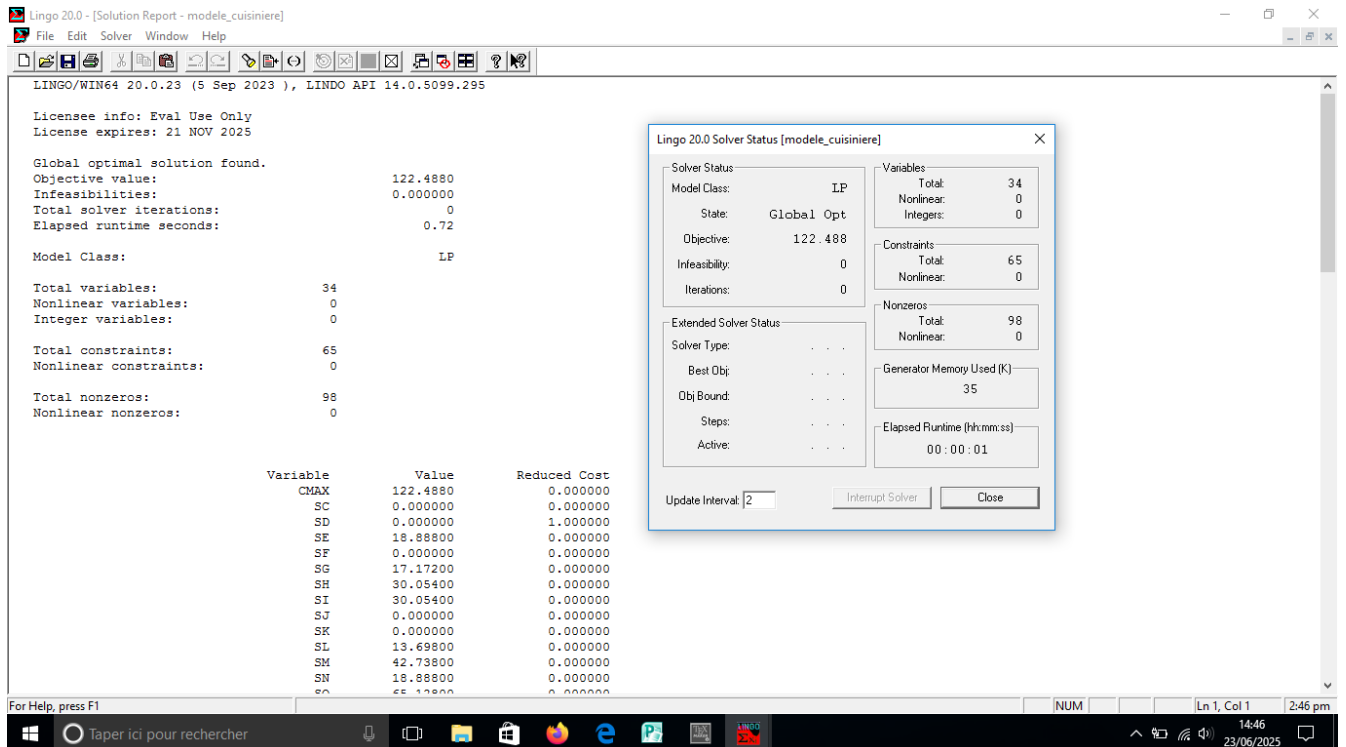


FIGURE 4.6 – Résultats du programme

## Résultat de l'analyse PERT et du modèle LINGO

Les résultats issus de l'analyse du graphe PERT, combinés à la résolution du modèle de programmation linéaire sous LINGO, permettent de déterminer une durée minimale de réalisation du projet.

La durée totale obtenue est :

$$D_1 = 122,488 \text{ secondes}$$

Cette durée correspond au **chemin critique** identifié dans le graphe PERT, c'est-à-dire la séquence de tâches dont les durées cumulées déterminent la durée minimale du projet. Toute modification ou tout retard dans l'une de ces tâches entraînerait un décalage de la date de fin globale.

## Conclusion

L'analyse PERT menée dans le cadre de cette étude sur la chaîne de fabrication des cuisinières à l'ENIEM a permis de valider la faisabilité de l'objectif de production fixé.

**Capacité de production supplémentaire :** La capacité théorique atteint environ **206 cuisinières par jour**, soit un potentiel de :

$$206 - 175 = \mathbf{31 \text{ cuisinières supplémentaires}}$$

Cela représente un gain de productivité de **17.7%**.

Même en l'absence de possibilité d'accélérer les tâches, les **marges identifiées** offrent une flexibilité appréciable dans la planification et la gestion des ressources. Le système de production proposé s'avère ainsi **robuste**, réaliste et parfaitement adapté aux contraintes industrielles de l'atelier de l'ENIEM.

# Conclusion générale

---

L'organisation et la planification des tâches constituent des éléments fondamentaux dans tout processus de production industrielle. Ce mémoire a porté sur l'étude du système de fabrication des cuisinières à l'ENIEM, avec pour objectif de modéliser son fonctionnement et d'identifier des pistes d'optimisation à l'aide des outils de la recherche opérationnelle.

Nous avons tout d'abord réalisé une analyse détaillée des différentes étapes de fabrication, en identifiant les tâches, leurs durées, leurs relations de précédence ainsi que leur répartition sur la chaîne de production. Cette structuration a permis la construction d'un réseau de tâches modélisé selon la méthode **PERT**, permettant de déterminer les dates au plus tôt et au plus tard, les marges, ainsi que le chemin critique.

En parallèle, nous avons proposé un modèle de programmation linéaire pour formaliser le problème d'ordonnancement en prenant en compte les contraintes identifiées. L'ensemble du travail a été implémenté et simulé à l'aide du logiciel **LINGO**, qui s'est révélé être un outil efficace pour la résolution de ce type de problèmes.

L'analyse menée a montré que la capacité théorique de la chaîne peut atteindre environ **206 cuisinières par jour**, contre une production initiale de 175 unités, soit un gain potentiel de **31 cuisinières supplémentaires**, correspondant à une amélioration de productivité de **17,7%**. De plus, même en l'absence de mesures d'accélération des tâches, les **marges identifiées** offrent une flexibilité précieuse dans la planification et l'utilisation des ressources. Le système proposé se révèle ainsi **robuste**, réaliste et bien adapté aux contraintes industrielles de l'atelier de l'ENIEM.

Ces résultats mettent en évidence l'intérêt des méthodes de la recherche opérationnelle dans l'analyse et l'amélioration des systèmes industriels. Le modèle proposé offre une meilleure visibilité sur l'enchaînement des opérations, facilite la planification, et peut contribuer à une utilisation plus efficiente des ressources tout en réduisant les délais.

Enfin, ce travail ouvre la voie à plusieurs perspectives futures, notamment l'intégration de contraintes supplémentaires (ressources limitées, pannes, délais de livraison, etc.), ou l'exploration d'approches plus avancées, telles que les modèles stochastiques ou multi-objectifs, afin de rendre l'ordonnancement encore plus représentatif des réalités industrielles.

# Bibliographie

---

- [1] G.-A. Ahmed. *Ordonnancement de tâches et de périodes d'indisponibilité de durée variable*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2016.
- [2] P. Baptiste. *Optimisation des systèmes de production : Planification et algorithmes*. Nom de l'éditeur, 2001.
- [3] N. Belharrat and Collectif. *La recherche opérationnelle : Théorie des graphes*. Les Pages Bleues, Algérie, 2005.
- [4] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, Paris, 1970.
- [5] V. Bouchitté and B. Goglin. *Graphes et algorithmique des graphes*. n.d. Date de publication non précisée.
- [6] H. Boukef Ben Othman. *L'ordonnancement d'ateliers job-shop flexibles et flow-shop en industries pharmaceutiques : Optimisation par algorithmes génétiques et essais particuliers*. PhD thesis, École Centrale de Lille et École Nationale d'Ingénieurs de Tunis, 2009. Thèse soutenue le 3 juillet 2009.
- [7] J. Carlier and P. Chrétienne. *Problèmes d'ordonnancement : Modélisation, complexité, algorithmique*. Masson, Paris, 1988.
- [8] ENIEM. Document interne. Technical report, ENIEM, n.d. Document non publié.
- [9] R. Faure, B. Lemaire, and C. Picouleau. *Précis de recherche opérationnelle : Méthodes et exercices d'application*. Dunod, 7 édition, 2014.
- [10] R. Faure, C. Roucairol, and P. Tolla. *Chemins et flots, ordonnancement – Recherche opérationnelle appliquée I*. Collection "Programmation". Gauthier-Villars, 1976.
- [11] F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, 9 édition, 2010.

- [12] G. Javel, N. Mebarki, and I. Corthier. *Logistique industrielle et organisation – Cours, exercices et études de cas*. Dunod, 5 edition, 2017.
- [13] D. Maquin. *Éléments de théorie des graphes*. 2003. Version provisoire du 3 mai 2003.
- [14] N. E. Mouhoub. *Algorithmes de construction de graphes dans les problèmes d'ordonnement de projet*. PhD thesis, Université Ferhat Abbas – Sétif, 2011.
- [15] J. Teghem. *Recherche opérationnelle - Tome 1 : Méthodes d'optimisation*. Ellipses, 2012.
- [16] J. Teghem. *Recherche opérationnelle - Tome 2 : Gestion de production, modèles aléatoires, aide multicritère*. Ellipses, 2013.