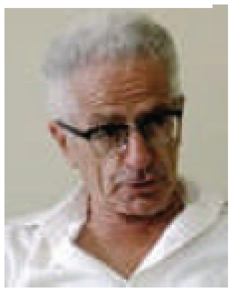
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAERE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université MOULOUD MAMMERI de TIZI-OUZOU
Faculté des sciences

En vue d'obtention du diplôme de Master en Recherche Opérationnelle



Mémoire de Fin d'études

Thème

Résolution d'un problème multi objectif linéaire et fractionnaire en nombres entiers.

Proposé et dirigé par :

Mr : Chebbah Mohamed

Réalisé par :

Mr : Belkadi Mourad
Mr : Koulougli Ahcene

Devant le jury

Mr : SADI.B, Président
Mr : CHEBBAH.M, Rapporteur
Mr : OUANES.M, Examinateur
Mr : KASDI.K, Examinateur

Promotion 2013/2014

Remerciements

Nous remercions dieu tout puissant d'avoir guidé nous pas vers les portes du savoir tout en illuminant nos chemins, et nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener ce travail à terme

Nous remercions vivement, monsieur **Chebbah.M** qui dés le début nous a permis de mener à bien ce travaille, d'abord en acceptant de le diriger et puis par son aide précieuse reflétée par une orientation objective et une patience sans limite.

Nous tenons à remercier monsieur **Sadi.B**, de nous faire l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Nous remercier l'ensemble du jury formé de :

Monsieur **Ouanes.M** et monsieur **Kasdi.K** d'avoir accepté d'examiner notre travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents qui n’ont jamais cessés de nous encourager, ainsi pour leur aide, leurs compréhention et leurs soutien

A la mémoire de celui sans qui je ne serais jamais

arrivé à ce que je suis aujourd’hui, je cite mon père.

A ma mère pour ses inlassables encouragements.

A mes sœurs Karima et son mari Hamid et Nadia et son mari Ahcene.

A la mémoire de ma grand-mère paternel.

A ma femme Lydia et ses parents Hacéne et Malika, a ses frères Redha et sa femme et Hamou et sa femme.

A mon oncle Amirouche a mon ami Houcine et à toute la famille et à tous ceux qui me sont chers

Table des Matières

Introduction

L'une des principales missions pour lesquelles la recherche opérationnelle s'est vouée est l'aide à la décision et à la gestion.

Depuis les années 70, les activités de recherche en Recherche Opérationnelle au niveau mondiale n'ont cessé de se développer tant au niveau de ses concepts théoriques et de l'amélioration techniques de ses outils d'optimisation qu'au niveau applicatifs où elle intervient de manière cruciale dans des secteurs de plus en plus nombreux et diversifiés comme : « la production industrielle, la planification, le transport, l'informatique, les télécommunications, l'énergie, mais aussi dans les banques et les assurances…. etc. Les modèles traditionnels développés dans le cadre des méthodes quantitatives de gestion considéraient en général un critère unique, pour lequel il existe une solution optimale. Les algorithmes mis au point consistent alors à définir un moyen d'atteindre, le plus rapidement possible, une telle solution. Cependant, dans de nombreux cas, cette modélisation ne traduit pas exactement la réalité.

La plupart des problèmes réels intervenant en mathématiques de décision sont de nature qui impose la prise en compte de plusieurs critères qui sont souvent antagonistes. Tout décideur est obligé de tenir compte du maximum d'éléments en sa possession, pour aboutir à la meilleure décision possible.

Ainsi pour mieux appréhender la réalité, l'approche multicritère devient incontournable. Il est utile dans ce cas de définir un concept d'optimalité, d'étudier les propriétés et les conditions d'existence des solutions et déterminer des méthodes pratiques de recherche des décisions relatives à ce concept d'optimalité.

Dans un problème multicritère, l'ordre introduit sur l'espace des critères est partiel, ce qui traduit l'impossibilité de comparer les solutions entre elles. L'ensemble des points de recherche tels qu'il n'existe aucun point qui est strictement meilleur que tous les autres simultanément sur tous les critères est appelé « front de Pareto »du problème. Il s'agit de l'ensemble des meilleurs « compromis » réalisables entres les critères. Le but de l'optimisation est d'identifier cet ensemble de compromis.

La première notion d'optimalité en multi objectif aété introduite par Edgeworth en 1881. Elle a été utilisée de manière plus formelle par l'économiste italien Pareto[19]. Cette notion est appelée efficacité, optimalité selon Pareto ou encore non dominance.

Dans le cadre de la programmation mathématique multicritère, nous nous sommes particulièrement intéressés au cas où les critères sont linéaires fractionnaires, les contraintes sont linéaires et les variables de décision sont entières. Les problèmes en question sont connus sous le nom de problèmes linéaires multicritères fractionnaires en nombres entiers.

C'est ainsi que dans notre travail, nous présentons des méthodes exactes pour la résolution des problèmes fractionnaires linéaires en nombres entiers.

Pour cela nous avons structuré notre mémoire comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la programmation linéaire uni-critère dans le cas général, aux différentes méthodes de résolution d'un problème linéaire.

Au chapitre 2, on s'intéressera à la programmation linéaire multi-objectif aux différents théorèmes d'existence de solutions efficaces et présentera aussi la méthode du simplexe multicritère

Au chapitre 3, on s'intéressera à l'étude des problèmes MOILP.On présentera deux méthodes de résolution d'un problème MOILP, citons celle de Gupta et la méthode Abbas-Moulai ainsi qu'un exemple d'application résolu par la méthode de Abba-Moulai.

Au chapitre 4 Le chapitre quatre aborde la programmation linéaire fractionnaire multicritère. Des caractérisations de l'ensemble des solutions efficaces , leur détermination graphique, des propriétés géométrique des ensembles de solutions fortement et faiblement efficaces ainsi que quelques méthodes de résolution y sont présentées.

Une conclusion générale termine ce mémoire de master.

Chapitre 1

Introduction à la programmation linéaire

1.1. Introduction :

La programmation linéaire (PL) est une branche de la programmation mathématique (résolution de programmes économiques à l'aide des mathématiques). Trois types de problèmes relèvent de la programmation mathématique :

– la programmation linéaire, où les données sont linéaires,

– la programmation non linéaire, où une partie des données sont représentées sous la forme de fonctions non linéaires,

– la programmation en nombre entiers, où certaines variables ou la totalité doivent être entières.

Quelques rappels :

Tout problème de programmation linéaire peut se former de la manière suivante :

Trouver les valeurs des variables $x = (x_j, j = \overline{1,n})$ qui maximisent ou minimisent la fonction linéaire suivantes :

$Z = Z(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_j) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots. + c_j x_j + \ldots. c_n x_n$

$= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow$ max (min) (1)

Sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1j}\, x_j + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2j}\, x_j + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}\ x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{ij}\, x_j + \cdots . + a_{in}\, x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mj}\, x_j + \cdots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$ (3)

Ou $c_j, j = \overline{1, n}$ représentent les couts des différents produits

Les coefficients $c_j$et $a_{ij}(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) sont supposés être des nombres réels, en plus on considère que l'entier m est inférieur ou égal à n, tous les nombres $b_i(i = \overline{1, m}$) sont tous positifs ou nuls et le rang du système (2) est inférieur ou égal à m.

Définition 1 :

- la fonction Z est appelée $fonction\ objective$.
- Les contraintes (2) sont appelées.
  contraintes principales, ou essentielles.
- Les contraintes (3) sont dites $directes$ ($non\ in$é$galit$é).

Remarque 1 :

Si l'objectif consiste à minimiser une fonction linéaire :

$$Z = Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1\ x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_j\, x_j + \ldots + c_n\, x_n$$

Alors on maximisera la fonction linéaire opposée :

$$\bar{Z} = -Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -c_1\ x_1 - c_2\, x_2 - \ldots - c_j\, x_j - \ldots - c_n\, x_n$$

Ecriture matricielle d'un problème de programmation linéaire :

Pour écrire le problème de programmation linéaire (1)-(2)-(3) sous forme compacte, on utilise la forme matricielle (vectorielle). Pour ce faire on introduit les notations suivantes :

Soient $I = \{1,2, \dots, i, \dots . m\}$ l'ensemble d'indice lignes et
$J = \{1,2, \dots, j, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des colonnes.

Ainsi l'ensemble des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ s'écrira sous la forme vectorielle :

$x = x(J) = (x_j, j \in J)$.

De manière analogue on aura :

$$c = c(J) = \left(c_j \, , j \in J\right), b = b(I) = (b_i, i \in I)$$

L'ensemble des coefficients $a_{ij}, i \in I, j \in J$ sera représenté sous forme d'une matrice A d'ordre $(m \times n)$:

$$A = A(I, J) = \left(a_{ij}, i \in I, j \in J\right) = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \, a_{m2} \dots a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On écrit souvent A de la manière suivante :
$A = \left(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n\right)$, Ou a_j est un vecteur colonne :

$$a_j = A(I, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Avec ces nouvelles notations, le problème (1)-(3) peut être écrit sous forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} Z = Z(x) = c'x \to max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ici c' est le transposé de$c$, la matrice A est en général la matrice de condition du problème et b vecteur (second membre).

1.2 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode itérative. Elle démarre d'un point extrême (sommet de départ) et passe au sommet voisin, et ceci constitue une itération de l'algorithme du simplexe. Pour cela, on doit définir le point extrême de départ et le test d'arrêt.

Soit le problème standard de programmation linéaire suivant :

$$c_1 \ x_1 + c_2\, x_2 + \ldots . + \ldots . c_n\, x_n \to max \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1j}\, x_j + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2j}\, x_j + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ a_{i1}\ x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}\, x_j + \cdots . + a_{in}\, x_n = b_i \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}\, x_j + \cdots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{3}$$

Ici on suppose $b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0$, et $rangA = m \leq n$.

Le problème (1)-(3) peut être écrit sous sa forme matricielle :

$$\begin{cases} c'x \to max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Ou $A = A(I,J)$ est la matrice des conditions $a_j = A(I,j)$ les colonnes de A,

$c'(J) = c'(J)$ Le vecteur des couts, $b = b(I)$ le vecteur des contraintes(second membre), $x = x(J) = (x_j, j \in J)$ le vecteur des paramètres, $I = \{1,2, \dots, m\}, J = \{1,2, \dots n\}$ les ensembles d'indices des lignes et des colonnes de sa matrice A.

Problème standard et solution de base :

Définition 1 :

Tout vecteur x vérifiant les contraintes (2) et (3) est appelé solution réalisable (admissible) du problème (1)-(3).

Définition 2:

Une solution réalisable x^0 est $optimale$ si $c'x^0 = \max\,(c'x)$, pour toute solution réalisable x.

Définition 3 :

Une solution réalisable x est dite $de\ base$ si $(n - m)$ de ses composantes sont nulles, et aux autres $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}$, correspondent m vecteurs $a_{j1}, a_{j2}, \dots a_{jm}$ de la matrice de condition A linéairement indépendants.

L'ensemble $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ est appelé $ensemble\ des\ indices\ de\ base$;

$$J_H = J \backslash J_B\ ensemble\ des\ indices\ hors\ base.$$

Autrement :

Une solution réalisable $x = x(J)\ est\ solution\ de\ base$ si $x_H = x(J_H) = 0$,

$$\det A_B \neq 0\,, ou\ A_B = A(I, J_B)$$

La matrice A_B est appelée $matrice\ de\ base, x_j, j \in J_B\ les\ composants\ de$

$$base;\ x_j, j \in J_H\ les\ composants\ hors\ base.$$

Définition 4 :

Une solution de base x est dite $non\ dégénérée$ si $x_j > 0, j \in J_B$.

L'accroissement de la fonctionnelle de la fonction objective Z est égale à :

$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x$.

Construisons le m-vecteur $y = y(I)$ $vecteur\ des\ potentiels$:

$$y' = c'_B A_B^{-1};$$

Et vecteur $\Delta = \Delta(J) = \left(\Delta_j, j \in J\right)$, est dit vecteur $estimations$:

$$\begin{cases} \Delta' = y'A - c' \\ \Delta_j = y'a_j - c_j, j \in J \end{cases}$$

Critère d'optimalité :

Théorème 1 : Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ. L'inégalité $\Delta_H = \Delta(J_H) \geq 0$ est suffisante et dans le cas de la non dégénérescence elle est nécessaire pour l'optimalité de$\{x, A_B\}$.

Algorithme du simplexe

1. Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ.
2. Calculer $y' = c'_B A_B^{-1}$ et $\Delta_j = y'_{a_j} - c_j, j \in J_H$.

Si $\Delta_j \geq 0, j \in J_H$

Stop, $x\ est\ solution\ optimale$.

Si non :

Soit $j_0 \in J_H$: Δ_{j0}= (min Δ_j/ Δ_j< 0)

Si $A_B^{-1}a_{j0} \leq 0$

Stop le maximum de la fonction objective tend vers l'infinie

Si non :

Déterminer :j_1 /$\theta^0 = \theta_{j1} = \min\left\{\frac{x_j}{x_{jj0}} / x_{j0j} > 0, j \in J_B\right\}$

Calculer $\bar{x}$=$\bar{x}(J) = (\bar{x}(J_B), \bar{x}(J_H))$

$$\bar{x}(J_B) = x(J_B) - \theta A_B^{-1}a_{j0}, \overline{x_J} = 0, j \in J_H \backslash j_0, \overline{x_{J0}} = \theta^0$$

Poser $\overline{J_B} = (J_B \backslash j_1) \cup j_0, \overline{J_H}$=$(J_H \backslash j_0) \cup j_1, \overline{A_B}$=$A(I, \overline{J_B})$, d'où $\{\bar{x}, \overline{A_B}\}$, la nouvelle solution réalisable de base puis aller en (2).

Exemple 1.1

Nous allons résoudre le problème de programmation linéaire suivante, par la méthode du simplexe :

$$\begin{cases} Z = 2x_1 + x_2 \to max \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

On a $j = \{1,2,3,4,5\} et\ J_B = \{3,4,5\}, J_H = \{1,2\}\ avec\ A_B = I_3$, donc solution réalisable de base est $x = (0,0,4,5,6)$, dressons alors le premier tableau du simplexe.

c			2	1	0	0	0	
c_B	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_j
0	a_3	4	1	1	1	0	0	4
0	a_4	5	-2	3	0	1	0	/
0	a_5	6	2	-3	0	0	1	3
$Z = 0$		Δ_j	-2	-1	0	0	0	

On remarque que la relation $\Delta_j \geq 0, \forall j \in J_H$, n'est pas vérifiée, donc la solution réalisable de base initiale n'est pas optimale, on doit alors changer la base de la manière suivante :

$\min_{j \in J_H} \Delta_j = \Delta_1 = -2, donc\ j_0 = 1$, de là le vecteur a_1 va rentrer dans la nouvelle base , et calculons $\theta^0 = \min_{j \in J_B} \theta_j$:

$\theta_3 = \frac{4}{1} = 4, \theta_5 = \frac{6}{2} = 3, d'ou\ \theta^0 = \theta_{j1} = \min_{j \in J_B} \theta_j = \theta_5 = 3$, de là, le vecteur a_5 va sortir de la base, et la nouvelle solution $\bar{x}$, dressons le $2^{éme}$ tableau du simplexe :

c			2	1	0	0	0	
c_B	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_j
0	a_3	1	0	5/2	1	0	-1/2	2/5
0	a_4	11	0	0	0	1	1	/
2	a_1	3	1	-3/2	0	0	1/2	/
$\bar{Z}$ = 6		$\bar{\Delta}_J$	0	-4	0	0	1	

La nouvelle solution de base est donc $\bar{x}$ = (3,0,1,1,1,0) de plus elle n'est pas optimale car $\overline{\Delta_2} = -4 < 0$.

On doit alors changer la base une autre fois :

$\min_{j \in J_H} \bar{\Delta}_J = \overline{\Delta_2} = -4$, donc le vecteur a_2 va rentrer dans l nouvelle base comme $\theta_{j1} = \min_{j \in J_B} \theta_j = \theta_3$, donc le vecteur a_3 sortira de la base.

D'où, on obtient : $\bar{\bar{J_B}}$ = {2,4,1}, $\bar{\bar{J_B}}$ = {5,3}, pour déterminer la nouvelle solution $\bar{\bar{x}}$, dressons le 3^{éme} tableau du simplexe :

c			2	1	0	0	0	
c_B	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_j
1	a_2	5/2	0	1	2/5	0	-1/2	
0	a_4	11	0	0	0	1	1	
2	a_1	18/5	1	0	3/5	0	1/5	
$\bar{\bar{Z}}$ = 38/5		$\bar{\bar{\Delta}}_J$	0	0	8/5	0	1	

La nouvelle solution de base est donc $\bar{\bar{x}}$=(18/5,2/5,0,11,0), comme $\bar{\bar{\Delta}}_J \geq 0, \forall j \in \bar{\bar{J}}_H$, l'algorithme s'arrête et le solution obtenue est optimale, avec $\bar{\bar{Z}} = 38/5$.

1.3 La M-méthode :

Le mathématicien américain Tcharness a proposé cette méthode pour résoudre les programmes linéaire.

On constitue le problème (P) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \bar{Z} = c'x - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \rightarrow max, \\ [Ax]_i + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n+m}; \end{cases} \qquad (P)$$

Ou $M \gg 0$ (un nombre positif très grand).

Le vecteur $X = (0, b) = (x = 0, x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m})$ est une soltution de base réalisable de (P).

Ici on choisi M suffisamment grand de telle sorte à avoir $c'x - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \leq 0, \forall x \geq 0, \forall x_{n+i} \geq 0$ et ceci dans le but d'avoir une solution optimale, le problème (P) admet une solution optimale car c'est le maximum d'une fonction bornée sur un ensemble de contraintes non vide.

On résout le problème (P) par la méthode du simplexe avec une solution réalisable de base de départ $\{(0, b), A_B\}$ et on obtient une solution optimale $\{X^0 = (x^0, x^0_{n+i}, \overline{1, m}), A^0_B\}$.

Interprétation de la solution de (P)

a. S'il existe au moins un indice i_0 tel que $x^0_{n+i0} \neq 0$, alors les contraintes de (P) sont contradictoires, c'est-à-dire, $\exists x \,/ Ax = b$.
b. Si x^0_{n+i}=0, $\forall i = \overline{1, m}$, alors x^0 est solution optimale de (P).

Exemple 1.2 : Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} Z = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \rightarrow max \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ x_3 + x_6 = 2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

Il n'est pas évident de déterminer une solution de base initiale, on doit donc ajouter une variable artificielle x_7, on obtient alors le $M - probl$ème suivant :

$$\begin{cases} Z = x_1 - 3x_2 - 2x_3 - Mx_7 \rightarrow max \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ x_3 + x_6 = 2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7} \end{cases} \qquad \text{(PM)}$$

Ou M est un nombre positif assez grand. Ici on a une solution de base de départ :

$\bar{x} = (0,0,0,0,6,2,3)$, avec $\overline{J_B}$={7,5,6}, $\overline{J_H} = \{1,2,3\}$, et $A_B = A(I, \overline{J_B})$,

Calculons le potentiel $\bar{y}$ et les estimation $\bar{\Delta}$:

$$\bar{y}' = \overline{c'_B}\,\overline{A_B^{-1}} = (-M,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-M,0,0),$$

$$\overline{\Delta_j} = \bar{y}' a_j - c_j, j \in J$$

$\overline{\Delta_j} = 0, j \in \overline{J_B}, \overline{\Delta_1} = \bar{y}' a_1 - c_1 = (-M,0,0) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 = -2M - 1,$

$\overline{\Delta_2} = \bar{y}' a_2 - c_2 = (-M,0,0) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 = M + 3,$

$\overline{\Delta_3} = \bar{y}' a_3 - c_3 = (-M,0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 = -M + 2,$

$\overline{\Delta_4} = \bar{y}' a_4 - c_4 = (-M,0,0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = M.$

Dressons le premier tableau du simplex :

c			1	-3	-2	0	0	0	-M	
$\overline{c_B}$	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\bar{\theta}_j$
-M	a_7	3	2	-1	1	-1	0	0	1	3/2
0	a_5	6	4	2	1	0	1	0	0	3/2
0	a_6	2	0	0	1	0	0	1	0	/
$\bar{Z} = -3M$		$\bar{\Delta}_J$	-2M-1	M+3	-M+2	M	0		0	

La solution de départ n'est pas optimale, car le critère d'optimalité n'est pas vérifier.

a_1 rentre dans la base, à la place de a_7 , et on obtient le nouveau tableau du simplexe suivant :

c			1	-3	-2	0	0	0	-M	
$\overline{\overline{c_B}}$	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\bar{\bar{\theta}}_J$
1	a_1	3/2	1	-1/2	½	-1/2	0	0	½	/
0	a_5	0	0	4	-1	2	1	0	-2	0
0	a_6	2	0	0	1	0	0	1	0	/
$\bar{\bar{Z}} = 3/2$		$\bar{\bar{\Delta}}_J$	0	5/2	5/2	-1/2	0	0	M+1/2	

La nouvelle solution est $\bar{\bar{x}} = \left(\frac{3}{2}, 0,0,0,0,2,0\right)$, avec $\bar{\bar{Z}} = \frac{3}{2}$, elle n'est pas optimale , donc on doit changer une autre fois la base en introduisant a_4 à la place de a_5.

Dressons le nouveau tableau du simplexe :

c			1	-3	-2	0	0	0	-M	
$\widetilde{c_B}$	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\tilde{\theta}$
1	a_1	3/2	1	-1/2	1/4	0	1/4	0	0	
0	a_4	0	0	2	-1/2	1	1/2	0	-1	
0	a_6	2	0	0	1	0	0	1	0	
$\tilde{Z}$ = 3/2		$\widetilde{\Delta_J}$	0	7/2	9/4	0	1/4	0	M	

Le critère d'optimalité est vérifié, donc la solution optimale du problème (PM) est :

$\tilde{x} = \left(\frac{3}{2}, 0,0,0,0,2,0\right), avec\ \tilde{Z} = 3/2.$

comme

$\widetilde{x_7} = 0$, donc la solution optimale du problème (P) est $x^0 = (\frac{3}{2}, 0,0)$, avec $Z^0 = 3/2$.

1.4 Méthode duale du simplexe

Etant donné le problème primal de programmation linéaire:

$$\begin{cases} c'x \rightarrow max \\ Ax = b; \\ x \geq 0; \end{cases} \qquad \text{(p)}$$

et son dual:

$$\begin{cases} \text{b}'\text{y} \rightarrow \min \\ \text{A}'\text{y} \geq c, \\ \text{y} \in \mathcal{R}^m \end{cases} \qquad \text{(D)}$$

Définition1

De l'ensemble J, choisissons un sous ensemble $J_B \in J$ et soit $A_B = A(I, J_B)$ une sous matrice inversible de A.

En utilisant la matrice A_B , on construit le vecteur y:

$y' = C'_B \, A_B^{-1}$ (1)

Le vecteur y est dit plan dual basique et A_B la matrice de base si

$A'_H \, y \geq c_H$ (2)

Ou $A_H = A(I, J_H)$ ou $J_H = J \setminus J_B$.

Définition2

Un plan dual basique y est dit non dégénéré si $XA'_H \; y > c_H$.

En utilisant un plan dual basique de départ y, on construit les vecteurs suivants:

$\delta(J) = A'y - c$, $x(J) = (x(J_B), x(J_H))$, $x(J_B) = x_B = A_B^{-1} b$, $x(J_H) = x_H = 0$, appelés Coplan et pseudo plan respectivement du problème(P).

Remarque1:

Par construction $\delta(J_B) = 0$ et $\delta(J_H) \geq 0$.

Si y est un plan dual basique alors δ et x sont dits basiques.

Algorithme dual du simplexe:

Considérant un plan dual basique y avec sa matrice de base A_B .

En utilisant A_B , on calcule le pseudo plan x = ($x_B = A_B^{-1}$b, X_H=0).

Si $x_B \geq 0$ Alors x est optimale pour le problème (P),et y optimal du dual(D) sinon, on calcule x_{j0} =min x_j $(\, x j<0, j \in jB$) de la l'indice j_0 doit sortir de la base et la colonne a_{j0} doit sortir de A_B ,c'est à dire, on change de base ($A_B \rightarrow \bar{A}_B$).

Le changement de base entraine le changement du plan dual y ($y \rightarrow \bar{y}$)qui entraine aussi la changement du coplan δ ($\delta \rightarrow \bar{\delta}$).

Ce changement de coplan se fera de la manière suivante: $\bar{\delta} = \delta + \Delta\,\delta$, ou

$$\Delta\,\delta_j = \begin{cases} \sigma, j = j_0 \, . \\ 0, j \in J_B \setminus j_0 \end{cases}$$

Ou' σ est le pas dual positif ou nul.

$\Delta\, \delta_j = \sigma x_{j0j}$, $j \in J_H$ ou x_{j0j} est la jéme composante du vecteur $A_B^{-1}\, a_J$.

Pour que $\bar{\delta}$ soit un coplan, il faut avoir un pas maximal $\sigma°$:

$$\sigma° = \min_{x_{j0j}<0,\, j\in J_H} \left\{ \frac{-\delta_j}{x_{j0j}} \right\} = \frac{-\delta_{j1}}{x_{j0j1}} .$$

La nouvelle base sera $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$, et $\bar{A}_B$ =A ($I, \bar{J}_B$), la nouvelle itération débutera avec $\bar{x} = (\bar{x}_B) = (\bar{A}_B^{-1} b , \bar{x}_H = 0)$.

Remarque2 :

Les problèmes du type:

$$\begin{cases} Z = c'x \rightarrow min \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0, \\ b \geq 0, c \geq 0, \end{cases}$$

Sont résolus dans la plupart des cas par la méthode duale du simplexe , car en ajoutant des variables d'écart, on obtient facilement la solution de base de départ. Par contre si on utilise la méthode du simplexe, on ajoute des variables d'écart et des variables artificielles et ceci, augmente la dimension du problème.

Exemple.1.3

Soit le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} z = x_1 + 2\,x_2 + 3x_3 \rightarrow min \\ 2x_1 + 2\,x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

Transformons le problème sous forme canonique:

$$\begin{cases} \bar{z} = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow max \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_6 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_7 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7} \end{cases} \qquad (P_1)$$

Pour travailler avec une matrice de base identité on transforme (p_1) au

Problème suivant:
$$\begin{cases} \bar{z} = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow max \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ +x_1 - x_2 - 4x_3 + x_5 = -3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = -6 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = -3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7} \end{cases} \qquad (P_2)$$

Soit $A_B = (a_4\ _, a_5\ , a_6\ , a_7\ )= I_4$, une telle matrice inversible avec j_B = (4, 5, 6,7),

j_H = (1, 2,3).En utilisant A_B , on calcule le vecteur des potentiels y:

$Y'C'_B\ \ A_B^{-1}$= (0, 0, 0,0),

De la = $y'A_H$ = (0, 0, 0,0) ≥ C'_H = (-1,-2,-3), donc y est un plan dual, ce qui veut dire que la matrice A_B est de base.

La copla basique initial est donc égal à δ = $A'y$ - c = -c= (1, 2, 3, 0, 0, 0,0).

Le tableau dual du simplexe aura alors la forme suivante:

base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	-2	-2	-2	1	1	0	0	0
a_5	-3	1	-1	-4	0	1	0	0
a_6	-6	-1	-1	2	0	0	1	0
a_7	-3	-2	-1	2	0	0	0	1
	Δ	1	2	3	0	0	0	0
	σ	1	2	/	/	/	/	/

Les composantes du pseudo plan x_B ne sont pas toutes positives, donc le critère d'optimalité n'est pas vérifié.

On a $x_6 = -6 = min\ x_j{}_{\ x_{j<0, j\in J_B}}$, donc a_6 sort de la base.

De plus x_{j1j} = $[A_B^{-1}\ a_j]$ = $[\ a_j\ ]$, $\sigma_1 = \underset{x_{j1j<0, j\in J_H}}{min} \left\{\frac{-\delta_1}{x_{j1j}}\right\} = \min(1{,}2) = 1$

Et $\sigma_2 = \frac{-\delta_2}{x_{j1}} = \frac{-2}{-1} = 2$, donc le vecteur a_1 va rentrer dans x_6 à la place de a_6 et on passe à la nouvelle itération.

Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_4	10	0	0	-3	1	0	0	0
a_5	-9	0	-2	-2	0	1	0	0
a_1	6	1	1	-2	0	0	1	0
a_7	9	0	1	-2	0	0	0	1
	Δ	0	1	5	0	0	1	0
	σ	/	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	/	/	/	/

on a x_5 =- 9 < 0, donc a_5 *sort de la* base et sera remplacée par a_2 , qui correspond au pas minimum $\sigma_2 = \frac{1}{2}$, par suite on passe à l'autre itération:

Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_4	10	0	0	-3	1	0	-2	0
a_2	$\frac{9}{2}$	0	1	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0
a_1	$\frac{3}{2}$	1	0	-2	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0
a_7	$\frac{9}{2}$	0	0	-3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	1
	Δ	0	0	4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
	σ	/	/	/	/	/	/	/

Ici toutes les composantes de x sont positives donc $X = (\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0,10,0,0, \frac{9}{2})$, est une solution optimale du problème de départ, et $z° = \frac{21}{2}$.

1.5 La méthode Branch and Bound

La méthode de Branch and Bound est utiliser pour résoudre les problèmes de programmation linéaire mixte.

Le principe de cette méthode est le branching (Séparation) et puis les évaluations.

On procédera à la séparation des solutions réalisable en sous ensembles de solutions réalisables.

On éliminera dans la recherche les branches non réalisables (pas de solution réalisable).

Pour l'exploitation des branches on adopte les techniques suivantes :

- Explorer les branches qui pourraient vraisemblablement contenir la solution optimale.
- Ajouter l'exploration d'une branche et ses descendant lorsqu'on peut évaluer une branche pouvant contenir la solution optimale.

Théorie de la méthode de Branch and Bound dans le cas de programmation linéaire : (avec des contraintes d'intégrité maximisation)

On adoptera la terminologie suivante :

On appelle PLVM programme linéaire aux variables mixtes.

On associer au PLVM un programme linéaire sans contraintes d'intégrité

1. On résout le programme linéaire et on obtient à la fin la solution optimale et un Z_{BS} (la valeur de la fonction à l'optimal).
   $BS\text{: } borne\ supérieure$
2. On considère la solution optimale du programme linéaire les plus proches et réalisable on obtient avec cette nouvelle solution la valeur Z_{BI} Pour la fonction objectif. $BI\text{: } borne\ inférieure$

Ou $Z_{BI} \leq Z_{opt} \leq Z_{BS}$

Présentation de l'algorithme « Branch and Bound »

Les méthodes de « Branch and Bound » sont essentiellement constituées des trois éléments principaux suivants:

Procédure de séparation

Cette procédure déterminera, à chaque fois qu'il sera nécessaire de séparer un sous ensemble de solutions.

Le nombre de sous ensembles crées n'est pas nécessairement identique à chaque séparation, il peut dépendre du résultat de l'analyse du sous problème parent.

Procédure d'évaluation

Cette procédure consiste à analyser un sous problème : pour l'essentiel, cette analyse vise à évaluer la valeur optimale de la fonction objectif du sous problème, plus précisément à déterminer une borne supérieur de cette valeur.

Procédure de cheminement

Cette procédure indique quels sous ensemble analyser et dans quel ordre. Bien évidement, il est souhaitable d'examiner le moins de sous ensembles possibles : certains d'entre eux pourront ne pas être séparés car, par exemple, leur analyse mettra en évidence qu'ils ne contiennent pas de solutions meilleures que celles déjà trouvées. Un tel sous ensemble - ou le nœud correspondant de l'arborescence - est alors sondé ou bien encore que cette branche de l'arborescence est élaguée. C'est parce que certains sous ensembles de solutions ne devront pas être examinés explicitement que les méthodes Branch and Bound sont appelées méthodes d'énumération implicite.

Lorsqu'un nœud de l'arborescence est sondé, il conviendra de remonter dans l'arborescence vers un autre nœud situé à un niveau supérieur ou égale dans l'arborescence.

1.6 La Méthode de Balas

La méthode de Balas est une méthode arborescente, comme toute autre technique arborescente (Branch and Bound) cette méthode à des limites au delà d'une dimension.

Cette méthode peut être classé dans la classe des problèmes NP-difficile.

Nœuds de séparation (branching) :

Chaque nœud de (sommet) S_t correspond à une solution partielle.

Ce nœud correspond à deux sous ensembles d'indices pour les variables.

Soient :

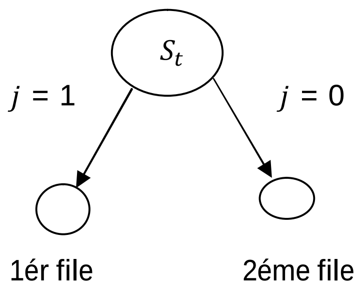
$F(t)$ Les sous ensembles d'indices fixés à 0 ou à 1 pour les variables au niveau du nœud S_t

$F(t) \rightarrow F_0(t)$ indice de variables fixé à 0

$F(t) \rightarrow F_1(t)$ indice de variable fixé à 1

$L(t)$ Les sous ensembles d'indices de variables non fixés (libres).

Pour faire le branching on choisira donc une variable telle $j \in L(t)$, à ce moment on aura deux files



Remarque 1:

Le problème posé c'est comment choisir sur le quel on fera le branching (séparation)

Pour cela écrivons le problème sur n'importe quelle nœud (sommet) S_t

$$Z_t = \sum_{j\in L(t)} C_j x_j + \sum_{j\in F_1(t)} C_j \rightarrow Min$$

$$\sum_{j\in L(t)} a_{ij} n_j \leq b_i - \sum_{j\in F_1(t)} a_{ij} = S_i$$

$$i = \{1,2,\dots,m\}$$

Nous appelons l'évaluation $(S_t) = \sum_{j\in F_1(t)} C_j$ valeurs meilleur pour ce nœud

S_t Est un nœud quelconque de l'arborescence

Les tests sur les nœuds (les sommets S_t)

Après création d'un nœud S_t et son evaluation il faut faire les testes suivants :

1. On abandonne un nœud si l'évaluation S_t est supérieur ou égale a $Z_{trouvée}$ valeur de la solution provisoire trouvé.
2. x solution obtenu en posant $x_j = 0$ et $j \in L(t)$ est solution réalisable pour $pl_{(0,1)}$comme avec $S_t \geq 0 \ \forall\, t \in \{1,\dots,m\}$ alors le nœud est terminal et en (S_t) $son\ evaluation\ Min\ Z_t$

Décision de séparation au niveau d'un sommet (nœud)

Comment séparer au niveau d'un sommet ? (quelle variable de séparation à choisir)

Balas à donné une technique pour minimiser le nombre de branching à effectuer et cela comme suivant :

Soit deux sous ensemble $Q(t)$ et $R(t)$ définis comme suit :

$Q(t) = \{i/\ S_i < 0\}\ i = 1..m$

$R(t) = \{j \in L(t)/\exists i \in Q(t), a_{ij} < 0\}$

Mesure de proximité :

Balas propose pour ses solutions (pour $P(t) < 0$)

$$P(t) = \sum_{i\in Q(t)} s_i = \sum_{i\in\{1,\dots.m\}} \min(0, s_i)$$

La proximité d'une solution si on fixe x_j à 1 est la suivante

$$P(t,j) = \sum_{i=\overline{1\dots m}} \min(0, s_i - a_{ij})$$

Le terme $(S_i - a_{ij})$ est le second membre

Si on fixe x_j à 1 :

Pour déterminer la variable x_{j^*} à choisir pour faire le branchig (Separation) la methode propose de choisir l'indice $j^* \in R(t)$

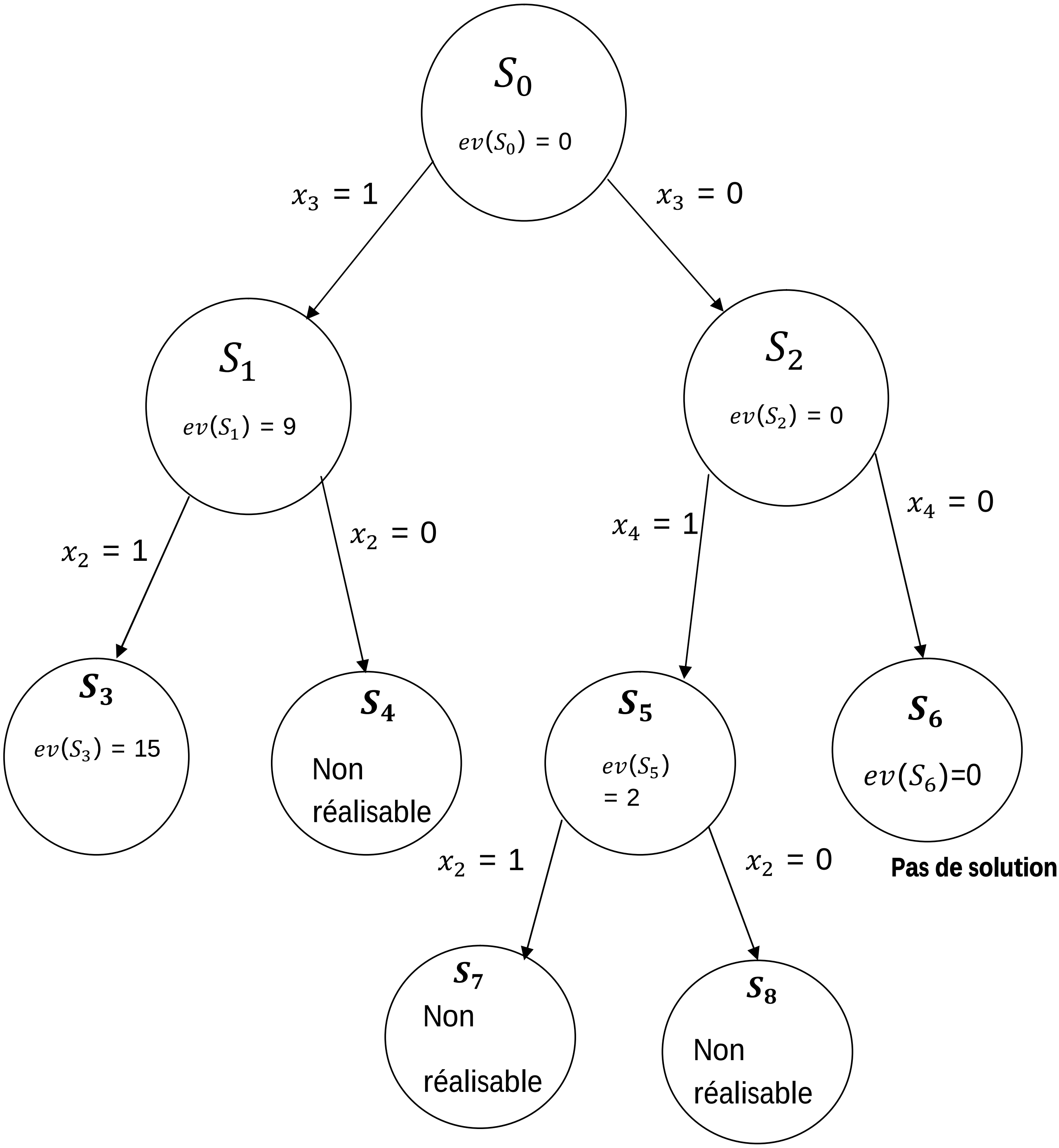
$$P(t,j^*) = \max\big(P(t,j)\big)\ j \in R(t)$$

Conclusion :

- $P(t,j^*) = 0$ la solution obtenue pour $x_{j^*} = 1$ et $\forall j \in L(t)$ est une nouvelle solution réalisable (neud terminal).
- En cas d'ex aequo on choisi la variable de cout faible.

Exemple.1.4.1 : Résoudre avec la méthode de Balas l'exemple suivant :

$$\begin{cases} Z = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow min \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 3x_5 \leq -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 \leq -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ x_j \in \{0,1\} \quad j = \overline{1,..,5} \end{cases}$$



Conclusion :

Avec la méthode de Balas (Algorithme) on a trouvé :

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = 1$$

$$x_3^* = 1$$

$$x_4^* = 0$$

$$x_5^* = 0$$

$est\ solution\ optimale$ et $Z(x^*) = 15$.

Chapitre 2

Programmation multi-objectif

2.1 Introduction

La programmation multi-objectif cherche à optimiser plusieurs composantes d'un vecteur de fonctions coûts. Contrairement à l'optimisation mono-objectif, la solution d'un problème multi objectif (MOP) n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions connues comme l'ensemble des solutions Pareto optimales (PO). Toute solution de cet ensemble est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur un composant du vecteur sans la dégradation d'au moins un autre composant du vecteur.

2.2 Concepts de base

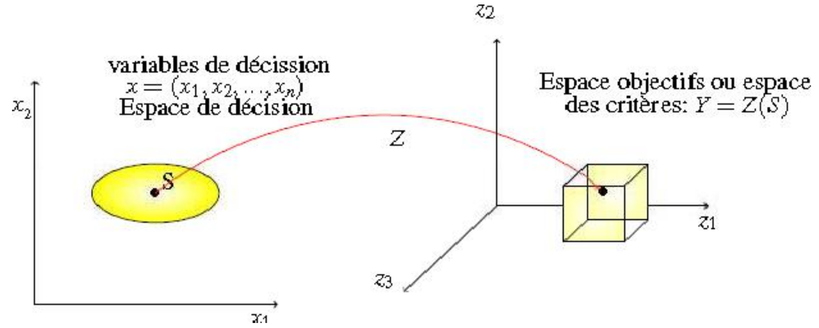
Mathématiquement, un problème d'optimisation multi-objectif (MOP) peut être défini de la manière suivante :

$$(\text{MOP})\begin{cases} \max(min)\ z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \ldots, Z_r(x)) \\ \quad\quad s.c\ \ x \in s \end{cases}$$

Où $r \geq 2$ est le nombre de fonctions objectifs, $X = (x_1\ , x_2\ , \ldots, x_n)$ est le vecteur représentant les variables de décisions, S={ $x \in R^n$ / $g_j(x) \leq 0$, $x \geq 0$} représente l'ensemble des solutions réalisables associées à des contraintes d'égalités, d'inégalités et des bornes explicites (espace de décision). $Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \ldots, Z_r(x))$ est le vecteur des critères à optimiser.

Z_i et g_j , $i \leq r\ et\ j \leq m$ sont des fonctions à valeurs réelles du vecteur de décision.

L'ensemble $Y = Z(S)$ représente les points réalisables dans l'espace des critères (espace objectif), et $Z(x)$ =($Z_1(x)$, $Z_2(x)$, … , $Z_r(x)$) avec $Y_i = Z_i(x)$ représente un point de l'espace des critères.



Exemple: Représentation l'espace des décisions et l'espaces des objectifs correspondant où $n = 2$.

2.3. Définitions

Remarque **:** Ces relations sont définies pour un problème de minimisation.

- **Dominance**

Définition 1 : (Dominance)

Soient deux vecteurs critères $y = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$ et

$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_r)$, on dit que Y domine Zsi et seulement si

$$et \qquad \begin{cases} \forall\, j \in [1, \ldots, r] & y_j \leq z_j \\ \exists i \in [1, \ldots, r] & y_i < z_i \end{cases}$$

si y domine z, alors y est au moins aussi bon que z sur tous les critères et meilleurs que lui sur au moins un des critères.

Définition 2 : (Dominance forte)

Soient deux vecteurs critères y **=** $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ et z= $(z_1, z_2, \ldots, z_r)$, on dit que y domine fortement z si et seulement si :

$$\forall\, i \in [1, \ldots, r] \qquad y_i < z_i$$

Si y domine fortement z, alors y est meilleur que z sur tous les critères.

Définition 3 : (Dominance faible)

Soient deux vecteurs critères y **=** $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ et z= $(z_1, z_2, \dots, z_r)$, on dit que y domine faiblement z si et seulement si :

$$\forall i \in [1, \dots, r] \qquad y_i \leq z_i$$

Definition4 :(non-dominance)

Soit y^* un vecteur critère $\in Y$, on dit que Y^* est non dominé si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur critère $y \in$Y tel que :

$\forall$ i$\in [1, \dots, r]$ $\qquad y_i \leq y_i$*****

et $\qquad y_i < y_i{}^*$ $\qquad$ pour au moins un indice i.

Dans la cas contraire, on dit que $Y_i{}^*$ dominé.

- **Efficacité**

Definition1: (Pareto optimale)

Une solution x ***** $\in S$ est Pareto optimale si et seulement s'il n'existe pas une solution $x \in S$, tel que $Z(x)$ domine $Z(x^*)$, i.e $Z_i(x) < Z_i(x^*)$pour au moins un indice i.

La définition de la Pareto optimalité découle directement de la notion de dominance. Elle signifie qu'il est impossible de trouver une solution qui améliore les performances sur un critère sans que cela entraine une dégradation des performances sur au moins un autre critère. Elles forment le front Pareto. Les solutions Pareto optimales sont aussi connus sous le nom de solutions efficaces, non-dominées ou non inferieures.

Définition 2 : (Efficacité forte)

Une solution x ***** $\in s$ est dite fortement efficace, s'il n'existe aucun vecteur $x \in s$ tel que $x \neq x$***** et $z_i(x) < z_i(x^*)$

Une solution est fortement efficace si son vecteur critère est fortement non dominé.

Définition 3 : (efficacité faible)

Une solution x ***** $\in s$ est dite faiblement efficace, s'il n'existe aucun vecteur $\in s$ tel que $z_i(x) \leq z_i(x^*)$

Une solution est faiblement efficace si son vecteur critère est faiblement dominé.

Définition 4 : (le point idéal)

Le vecteur idéal $y^* = (y_1{}^*, y_2{}^*, \ldots, y_r{}^*)$ est le vecteur qui optimise chacune des fonctions objectives z_i , i.e. : $y_i{}^*$ = $\min(z_i(x))$, $x \in s$

Il est clair que si le vecteur idéal est réalisable, il est la solution du problème (MOP), mais ce n'est pas en général possible à cause des conflits qui existent entre les critères.

Définition 5 : (point anti-idéal)

Le vecteur $y^* = (y_1{}^*, y_2{}^*, \ldots, y_r{}^*)$ défini par :
$y_i{}^*$ = $max(z_i(x))$, $x \in s$ est le point anti-idéal .

Définition 6 : (vecteur de référence)

Un vecteur de référence $Y^* = (y_1{}^*, y_2{}^*, \ldots, y_r{}^*)$ est un vecteur qui définit le but à atteindre par chaque objectif z_i.

Définition 7 : (Front de Pareto)

C'est l'ensemble des vecteurs de décision qui ne sont pas dominé

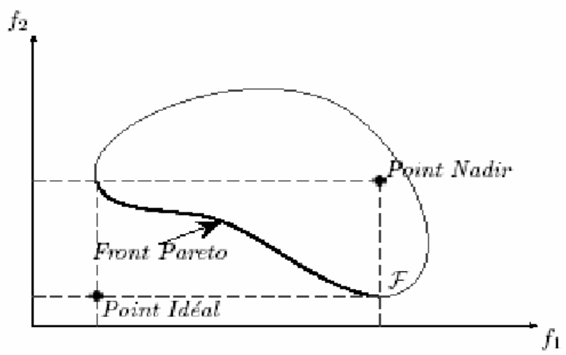


Fig.1.2. Point Nadir et point Idéal

Définition 8 : (Convexité)

Un ensemble A est convexe, si et seulement si l'équivalence suivante est vérifiée :

$$x \in \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{y} \in \mathrm{A} \Leftrightarrow segment(x, y) \subset \mathrm{A}$$

La convexité est le premier indicateur de la difficulté du problème. En effet, plusieurs méthodes d'optimisation sont incapables de résoudre d'une façon optimale des problèmes non convexes. Mais il existe d'autres indicateurs tout aussi importants, notamment la continuité, la nature des variables de décision (entières ou réelles), . . .

Comment tester qu'une solution est efficace :

Théorème 2 : Soit $x \in S$ est efficace (respectivement faiblement efficace) s'il existe

$$\lambda \in \Lambda = \left\{\lambda \in R^r / \sum_{j=1}^{r} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \right\}$$

(respectivement $\exists \lambda \in \overline{\Lambda} = \left\{\lambda \in R^r / \sum_{j=1}^{r} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$) tel que $\bar{x}$minimise le problème des somme pondérée donné par : $\begin{cases} \min \lambda' C x \\ s.c\ x \in S \end{cases} \quad (P_\lambda)$

Théorème 3 : Si S possède un point efficace, alors au moins un point extrême de S est efficace .

Preuve :

Soit $\bar{x}$ un point efficace de S. D'après le théorème 2, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que

$$\lambda' \bar{x} = \min_{x \in S} \lambda' x$$

Comme une fonction linéaire atteint son maximum en un point extrême, donc $\bar{x}$ est extrême efficace.

Théorème 4 : Soit $x \in S$ un point extrême associé à une base efficace B, alors $x\ est\ efficace.$

Preuve :

Puisqu'il existe un $\lambda \in \Lambda$ pour lequel B est une base optimale par le théorème 2 , $x\ est\ efficace$.

Théorème 5 : Soient B et $\bar{B}$ deux base $efficace$s adjacentes obtenues à partir d'$un\ pivot\ efficace$, et soient x et $\bar{x}$ les points extrêmes associés à B et à $\bar{B}$ respectivement. Alors, l'arête $(x, \bar{x})\ est\ efficace$.

Théorème 6 : Soit $(x, v)\ une$ l'arête $efficace\ infinie$ de S.
Alors, $x\ est\ un\ point\ extr$ê$me\ efficace$ associé à une base efficace B.

2.4 Méthode du simplexe multicritère

La méthode du simplexe multicritère consiste à générer un premier point efficace à partir d'une solution de base réalisable, puis à recenser (énumérer) tous les autres points efficaces. Cependant cette méthode ne teste pas toutes les bases car certaines sont dominées de manières évidente.

Etant donné le problème:

$$\begin{cases} maxZ_1 = c^1x \\ maxZ_2 = c^2x \\ \quad\quad \cdots \\ maxZ_k = c^kx \\ Ax = b,\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le tableau du simplexe (en considérant séparément chaque objectif) est donné par le tableau(1).

Dans ce tableau, on suppose sans perte de généralité que les m première variables sont dans la base soient:

j_B: ensemble des indices basiques.

j_N: ensembles des indices hors base.

					C^1	C_1^1	....	C_m^1	C_{m+1}^1	....	C_j^1	....
					C^2	C_1^2	....	C_m^1	C_{m+1}^2	....	C_j^2	....
					$\vdots$ $\vdots$				$\vdots$ $\vdots$		$\vdots$ $\vdots$	
					C^k	C_1^k	......	C_m^k	C_{m+1}^k	....	C_j^k	....
C_B^1	C_B^2	C_B^j	C_B^k	base	B	a_1	......	a_m	a_{m+1}	....	a_j	....
C_1^1	C_1^2	C_1^j	C_1^k	a_1	b_1	1		0	x_{1m+1}	....	x_{1j}	....
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$		0 $\vdots$ 0 $\vdots$	$\ddots$	0 $\vdots$ 0 $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$		$\vdots$ $\vdots$	
C_m^1	C_m^2	C_m^j	C_m^k	a_m	b_m	0		1	x_{mm+1}	....	x_{mj}	....
						0	0	0	Δ_{m+1}^1		Δ_j^1	
						$\vdots$ $\vdots$	0	0	Δ			
						0	0	$\vdots$ $\vdots$	Δ_{m+1}^i	....	Δ_j^1	....
						$\vdots$ $\vdots$	0	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$			
						0	0	0	Δ_{m+1}^k	....	Δ_j^k	....

$$Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 = C^1 b \\ Z_0^2 = C^2 b \\ \vdots \\ Z_0^k = C^k b \end{pmatrix}$$

De la théorie du simplexe uni-critère on a :

1- $\Delta_j^i = \sum_{r \in J_B} C_r^i x_{rj} - C_j^i$,j$\in J_N$, $\forall i = 1, \dots, k$
Et

$Z_0^i = \sum_{r \in J_B} C_r^i b_r$, $\forall r = 1, \dots, k$

Si $\Delta_j^i \geq 0 \forall j \in J_N$, alors $x° = t_{(b,0)}$ $(b \in R^{m^+}, 0 \in R^{n-m})$ est une solution maximale pour le critère i.
2- Si on introduit la $j^{éme}$ variable dans la base, nous obtenons une nouvelle solution $x_1$et un nouveau vecteur $\hat{z}_0 = z_0 - \theta_j \Delta_j$ ou':

$$\hat{z}_0 = \begin{pmatrix} \hat{Z}_0^1 \\ \hat{Z}_0^2 \\ \vdots \\ \hat{Z}_0^K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0^1 \\ Z_0^2 \\ \vdots \\ Z_0^k \end{pmatrix} - \theta_j \begin{pmatrix} \Delta_j^1 \\ \Delta_j^2 \\ \vdots \\ \Delta_j^k \end{pmatrix}$$

3- θ_j=min$\{\frac{b_r}{x_{rj}} / x_{rj} > 0\}$ $\forall j \in J_N$
$r \in J_B$

Remarques:

1- Soit $x°$ une solution basique réalisable
a- S'il existe un j$\in J_N$ tel que tous les $\Delta_j^{(i)} \leq 0$,avec au moins une inégalité stricte et si θ_j>0 ,alors la solution courante $x°$ est la dominée.
En effet:

Si on introduit la $j^{éme}$variable, on obtient un point extrême adjacent x^1 pour lequel $\hat{z}_0 \geq z_0$ avec au moins une inégalité stricte, car:

$\theta_j \Delta_j \leq 0$,donc $\hat{z}_0 = z_0 - \theta_j \Delta_j \geq z_0$.
b- S'il existe un j$\in J_N$ tel que $\Delta_j^{(i)} \geq 0$ avec au moins une inégalité stricte et si de plus θ_j>0,alors l'introduction de la jeme variable de base mène a une solution dominée.

En effet:

Si on introduit la variable j dans la base, on aura un nouveau point extrême $x_1$pour lequel:
$\hat{Z}_0 = Z_0 - \theta_j \Delta_j \leq Z_0$. avec au moins une inégalité stricte.

2- Soit x° une solution basique réalisable s'il existe $j_1, j_2 \in J_N$ tel que:
$\theta_{j_1} \Delta_{j_1} \leq \theta_{j_2} \Delta_{j_2}$ avec au moins une inégalité stricte, alors l'introduction de la variable d'indice j_2 dans la base conduit à une solution dominée par celle résultant de l'introduction de la variable d'indice j_1.
En effet:

$\theta_{j_1} \Delta_{j_1} \leq \theta_{j_2} \Delta_{j_2}$ avec au moins une inégalité stricte, cela implique que $Z_0 - \theta_{j_2} \Delta_{j_2} \leq Z_0 - \theta_{j_1} \Delta_{j_1}$ avec au moins une inégalité stricte.

Résumé de la méthode

1- S'il existe un indice $i \in \{1, \dots, k\}$tel que $\Delta_j^i \geq 0 \; \forall j \in J_N$, alors le $ième$ critère à son maximum et la solution basique correspondante est non dominée à condition qu'il n'existe pas de colonne k avec $\Delta_k^i = 0$.

2-D'après les deux remarques précédentes ,seules les colonnes(variables) non comparables à zéro et les variables $j, k \in J_N$ telle que : $\theta_k \Delta_k$ incomparable à $\theta_j \Delta_j$ sont admissibles pour une introduction dans la base.
Dans ce cas ,on ne peut dire si la solution correspondante $\bar{x}$ est dominée ou pas.
Pour cela, on considère le test dit de non dominance énoncé par le théorème suivant:

Théorème 7 :

Soit le problème :

$$\max \; v = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$$

$$Cx - \xi \geq C\bar{x}$$

$$x \in S = \{x \in R^n \backslash Ax = b, x \geq 0\}$$

$\xi \in R^n, \xi \geq 0 \; et \; \bar{x} \in S$.

Alors:

- $\bar{x}$ est efficace si et seulement si $max\ v = 0$
- $\bar{x}$ est dominée si et seulement si $max\ v > 0$.

Exemple:

Soit le problème multicritère suivant :

$$\max Z_1 = 0.5x_1 + 0.1x_2$$
$$\max Z_2 = 2x_1$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ 3x_1 + x_2 \leq 300 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \ MaxZ_1 = 0.5x_1 + 0.1x_2$$
$$MaxZ_2 = 2x_1$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\ x_1 + x_4 = 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$x_1 = (0,0,200,300)^t$ est une solution de base réalisable associée à la base

$(a_3, a_4) = I_2$ et $z(x) = \binom{Z_1(x)}{Z_2(x)} = \binom{0}{0}$.

le tableau simplexe initiale est :

			C^1	0.5	0.1	0	0
			C^2	2	0	0	0
C_B^1	C_B^2	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	200	1	2	1	0
0	0	a_4	300	3	1	0	1
		$z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 = 0 \\ z_0^2 = 0 \end{pmatrix}$	Δ^1	-0.5	-0.1	0	0
			Δ^2	-2	0	0	0

Il n'existe pas un $i \in \{1,2\}$ tel que $\Delta_j^i \geq 0$ tel que $\forall j \in J_N = \{1,2\}$, donc aucun objectif n'est a son maximum .

$\Delta_1\binom{-0.5}{-2} \leq 0$, x_1 est dominé.

$\theta_1 = \min\left\{\frac{200}{1}, \frac{300}{3}\right\} = 100$ (atteint pour $r = 4$).

$\theta_2 = \min\left\{\frac{200}{2}, \frac{300}{1}\right\} = 100$ (atteint pour $r = 3$).

$\theta_1\Delta_1 = 100\binom{-0.5}{-2} = \binom{-50}{-200}$.

$\theta_2\Delta_2 = 100\binom{-0.1}{0} = \binom{-10}{0}$.

$\theta_1\Delta_1 \leq \theta_2\Delta_2$.

Introduisons a_1 dans la base à la place de a_4 ,on aura alors le tableau suivant:

			C^1	0.5	0.1	0	0
			C^2	1	0	0	0
C_B^1	C_B^2	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_3	100	0	5/3	1	-1/3
0.5	1	a_1	100	1	1/3	0	1/3
		$z_1 = \begin{pmatrix} z_1^1 = 50 \\ z_1^2 = 200 \end{pmatrix}$	Δ^1	0	-1/30	0	1/6
			Δ^2	0	2/3	0	2/3

$\exists i = 2 \; tel \; que \Delta_j^i > 0 \; \forall j \in J_N$,ce qui implique que le 2éme critère est à son maximum.

D'après le résumé, le point extrême x_2=(100,0,100,0)^t.

$\theta_2 = \min\left\{\frac{300}{5}, \frac{300}{1}\right\} = 60$ (atteint pour $r = 3$)

$\theta_4 = \min\left\{\frac{300}{1}\right\} = 300$ (atteint pour $r = 1$).

$\theta_2\Delta_2 = 60 \begin{pmatrix} -1/30 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 40 \end{pmatrix}$.

$\theta_4\Delta_4 = 300 \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix}$.

$\theta_2\Delta_2 < \theta_4\Delta_4$.

Donc $a_2$rentre dans la base et $a_4$sort de la base d'après la remarque.

Dressons alors le 3éme tableau simplexe:

			C^1	0.5	0.1	0	0
			C^2	1	0	0	0
C_B^1	C_B^2	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0.5	0	a_2	60	0	1	3/5	-1/5
0.1	1	a_1	80	1	0	-1/5	6/15
		$z_2 = \begin{pmatrix} z_2^1 = 46 \\ z_2^2 = 160 \end{pmatrix}$	Δ^1	0	0	1/50	78/75
			Δ^2	0	0	-2/5	4/5

$\Delta^1 \geq 0$,alors le premier objectif est à son maximum et puisqu'il n'existe pas de colonne k telle que Δ_k^1 =0 avec $k \in J_N$,alors est non dominé.

$\theta_3 = \min\left\{\frac{60}{3/5}\right\} = 100$ (atteint pour r=2).

$\theta_4 = \min\left\{\frac{80}{6/15}\right\} = 100$ (atteint pour r=1).

$\theta_3\Delta_3 = 100\begin{pmatrix}1/50\\-2/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-40\end{pmatrix}$.

$\theta_4\Delta_4 = 200\begin{pmatrix}78/75\\4/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}208\\250\end{pmatrix}$. $\theta_3\Delta_3 < \theta_4\Delta_4$.

Puisque l'introduction de a_3 dans la base conduit à une base exploré, donc on introduira a_4.

			C^1	0.5	0.1	0	0
			C^2	2	0	0	0
C_B^1	C_B^2	Base	B	a_1	a_2	a_3	a_4
0.1	0	a_2	100	½	1	1/2	0
0	0	a_4	200	15/6	0	-1/2	1
			Δ^1	-39/15	0	81/150	0
			Δ^2	-2	0	0	0

Il n'existe pas un $i \in \{1,2\}$ tel que$\Delta_j^i \geq 0 \ \forall j \in \{1,3\}$ donc aucun objectif n'est à son maximum.

$\Delta_1 = \binom{-39/15}{-2} < 0 \Rightarrow x_4 = (0,100,0,200)^t$est dominé.

En considérant le problème initial(1)seuls les points extrêmes x^2 =(250,0).et x^3=(100,300) sont non dominés avec $z(x_*^2) = \binom{100}{250}$ et $z(x_*^3) = \binom{130}{100}$.

On a recensé deux solutions efficaces.

Conclusion:

La méthode du simplexe multicritère nous apporte clarté et précision dans toutes ses étapes donc facilité d'application, cependant en pratique, elle peut être non efficace, car la solution désirée peut être sur arête et non un point extrême efficace.

Chapitre 3

Méthodes multi-objectif linéaire en nombre entiers

3.1 Introduction

Dans un problème multi-objectif, lorsque, les fonctions $Z_i(x)$ pour $i = 1, \dots, r$ sont linéaires et que l'ensemble des solutions réalisables S est défini par des contraintes linéaires, alors, on parle de problème linéaire multi-objectif (MOILP). Ainsi, si les variables x prennent des valeurs entières dans le problème (MOILP), on parle alors de problème d'optimisation multi-objectif linéaire en nombres entiers noté (MOILP).

3.2 Formulation du problème

Un problème (MOILP) est formulé comme suit :

$$(\text{MOILP})\begin{cases} \max(Z_1, Z_2, \dots, Z_r) \\ Z_i = C_i(x) \\ x \in S \end{cases}$$

Ou : $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \, Ax \leq b, x \geq 0, x \; entier\}$

r:Nombres d'objectifs à minimiser ou à maximiser.

C_i: Vecteur des coefficients pour $i = 1, \dots, r$.

A: la (m, n) matrice des contraintes, $rg\ A = m \leq n$.

Z_i : Critère à maximiser ou à minimiser pour $i = 1, \dots\dots r$.

3.3 Définitions et théorèmes

Définition 1 : (l'Optimalité de Pareto)

$x^* \in S$ Est efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que :

$cx \geq cx^*$,$cx \neq cx^*$

Autrement dit :

$x^* \in S$ est efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que $Z_i(x) \geq Z_i(x^*)$ pour $i = 1, \dots\dots, r$ et $Z_i(x) > Z_i(x^*)$ pour au moins un indice i.

Définition 2 : (l'optimalité de Slater ou faible efficacité)

$x^* \in S$ est dite faiblement efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que $Cx > Cx^*$.

Autrement dit :

$x^* \in S$ est faiblement efficace si et seulement s'il n'existe aucun autre vecteur $x \in S$ tel que $Z_i(x) \geq Z_i(x^*)$ pour $i = 1, \dots\dots, r$.

Remarque 1 : Dans le cas où le décideur veut minimiser les critères $Z_i, i = 1, \dots\dots r$, on a des définitions analogue au définition 1 et 2 suffi d'inverser les inégalités correspondantes car $minZ_i(x) = -\max\left(-Z_i(x)\right)$.

Notons par X^s l'ensemble des solutions des Slater et par X^p l'ensemble des solutions de Pareto.

Théorème 1 : Soit $x^0 \in S$, alors :

S'il existe $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_r) \geq 0$ tel que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \; Z_i(x^0) = max_{x \in S} \; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \; Z_i(x)$; alors $x^0 \in X^s$.

S'il existe $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_r) > 0$ tel que et, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \; Z_i(x^0) = max_{x \in S} \; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \; Z_i(x) \; x^0 \in X^p$ et $\sum \lambda_i = 1$.

Ce résultat signifie que pour trouver un optimum de Pareto ou de Slater, il suffit d'optimiser la fonction représentant une combinaison linéaire pondérée des critères. Cependant, le théorème 1 ne permet pas la caractérisation de toutes les solutions optimales selon Pareto ou selon Slater.

Par ailleurs, le résultat du théorème 2 assure que sous les hypothèses de convexité et de continuité, cette condition devient nécessaire et suffisante.

3.4. Quelques méthodes de résolution d'un problème multi-objectif linéaire en nombres entiers

3.4.1 Méthode de Gupta

Gupta a proposé une méthode avec deux techniques pour la construction de l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOILP). La première procédure de cette méthode est basée sur la méthode des coupes qui consiste à restructurer l'ensemble S des solutions réalisables du problème relaxé correspondant (sans la condition d'intégrité). La deuxième procédure est basée sur le contrôle de fonctions objectives.

Soit le problème (P_1) qui maximise le premier objectif (ou un objectif quelconque) de (MOILP), qui est défini comme suit :

$$(P_1)\begin{cases} max Z_1 = C^1 x \\ x \in S' \end{cases}$$

Où $S' = \{x \in R^n \ / \ Ax = b, x \geq 0\}$ i.e c'est l'ensemble des solutions réalisables du problème relaxé.

Notons par :

S_1:La région obtenue après application des coupes de Gomory.

$Z_1^* = Z_1^1$ =La valeur optimale de Z_1 dans le problème (P_1).

$x_1^1 = (x_{1,j})$: La solution entière correspondante à Z_1^*. C'est la solution basique réalisable de la région obtenue après les coupes de Gomory sur S_1.

Z_i^* : La valeur de Z_i pour $i \in I' = \{2, \dots, k, \dots r\}$ correspondant à x_1^1.

$(Z_1^1, Z_2^1, \dots\dots, Z_r^1)$ Représente le premier r-uplet efficace.

x_1=solution sous $(Z_1^1, Z_2^1, \dots\dots, Z_r^1)$.

B_1 =base associée à X_1.

a_{1j}:Vecteur activité de $x_{1,j}$ approprié à la région tronquée.

$y_{1j} = (B_1^{-1})a_{1j}$.

$I_1 = \{j \,/ a_1, j \in B_1\}$

$N_1 = \{j / a_1, j \notin B_1\}$

$j_1 = \{j / j \in N_1 \; et \; Z_{1,j}^{c^1} - C_j^1 = 0\}$ où :

$Z_{1,j}^{c^1} = C_{B_1}^1 y_1, C_j^1$ est la $j^{éme}$ compasante du vecteur C^1 et $C_{B_1}^1$ est le vecteur des coûts des variables basique associées à B_1, dans C^i.

Pour $k \geq 2$,

S_k: est la région de S_1 obtenue après l'application de la coupe :$\sum_{j \in N_{k-1} \setminus \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$

$x_k = (x_{k,j})$ est la solution entière obtenue dans la région tronquée de la coupe par $\sum_{j \in N_{k-1} \setminus \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$ ou $j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$

B_k: Base associée à x_k.

a_{kj} : Vecteur activité de $x_{k,j}$ approprié à la région tronquée.

$y_{kj} = B_k^{-1} a_{kj}$

$I_k = \{j / a_{k,j}, j \notin B_k\}$

$\Gamma_k = \{j / j \in N_k, Z_{k,j}^{C^1} - C_j^1 > 0 \; et \; Z_{k,j}^{C^i} - C_j^i < 0 \; pour \; au \; moins \; un \; indice \; i \in I'\}$

Où : $Z_{k,j}^{C^i} = C_{B_k}^i y_{kj}, C_{B_k}^i$ est un vecteur des coûts des variables basiques associées à B_k dans C^i

Γ_k : L'ensemble correspondant à la solution x_k.

Définition 3 : Une arête E_{jk} incidente à x_k est définie par l'ensemble :

$$E_{jk} = \left\{ x = (x_i) \in R^n / \begin{bmatrix} x_i = x_{ki} - \theta_{jk} y_{k,i_{jk}}, i \in I_k \\ x_{jk} = \theta_{jk} \\ x_i = 0 \; pour \; tout \; i \in N_k - \{j_k\} \end{bmatrix} \right\}$$

Où : $0 \leq \theta_{jk} \leq min \left\{ \frac{x_{ki}}{y_{k,i_{jk}}}, \; y_{k,i_{jk}} > 0 \right\}$ et θ_{jk} et $\theta_{jk} y_{k,i_{jk}}$ sont des entiers $\forall i \in I_k$.

Définition 4 : L'arête incidente à un point entier réalisable est dite dominée si toutes les solutions le long de cette arête rendent dominé le r-uplet $(Z_1, \dots, Z_r)$.

Théorème 2: Toutes les solutions entières réalisables du problème (P_1) alternatives à la solution x_1 sur une arête E_{j1} incidente à x_1, $(j_1 \in \Gamma)$ dans S' (ou dans une région tronquée S_k) sont dans le demi espace ouvert :$\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j < 1$.

Théorème 3: La solution entière réalisable du problème (P_1) qui n'est pas sur l'arête E_{j1}, incidente à x_1, $(j_1 \in \Gamma_1)$ est dans le demi espace fermé :

$$\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j \geq 1 \qquad (1)$$

Corollaire 2 :La solution entière réalisable qui n'est pas sur l'arête E_{jk} incidente à x_k dans la région tronquée de S_k, $j_k \in \Gamma_k$, $k \geq 2$, est dans le demi espace fermè

$$\sum_{j \in N_k - \{j_k\}} x_j \geq 1 \qquad (2)$$

Remarque :

1-Les coupes (1) et (2) sont des générations des coupes de Dantzig. Dans le cas où Γ_1 (ou bien Γ_k) est vide, les coupes (1) et (2) correspndant aux de Dantzig sont : $\sum_{j \in N_1} x_j \geq 1$ où $\sum_{j \in N_k} x_j \geq 1$

Les coupes (1) et (2) sont préférables à celle de Dantzig car elles éliminent seulement un point à la fois

2- Si pour un $a_j \in \Gamma_1(\neq \emptyset), \theta = \min\{\frac{x_{ki}}{y_{k,i_{jk}}}, y_{k,i_{jk}} > 0\}$ où $y_{1,j}$ correspond à la solution X_1, alors aucun solution entière réalisable ne peut être obtenue sur l'arête E_j.

Ci-dessus sont données les différentes étapes pour la résolution du problème (P).

Algorithme

Etape1 : Calculer la solution optimale entière X_1^1 du problème (P_1)

- Si $\Gamma_1 = \emptyset$, X_1^1 est l'unique solution optimal entière du problème (P_1) de valeur Z_1^1. Calculer z_i^1, $i \in I_k$ et enregistrer $(z_1^1, z_2^1, \dots\dots, z_r^1)$ comme étant le premier r-uplet.
- Si $\Gamma_1 \neq \emptyset$, déterminer toutes les solutions alternative X_1^1 ainsi des r-uplets. Supprimer tous les r-uplets dominés pour obtenir l'ensemble des r-uplets efficace Eff_0. Enregistrer $(z_1^1, z_2^1, \dots\dots, z_r^1)$ comme étant le premier r-uplet efficace pour lequel z_2 a une valeur maximal pour tous les r-uplets appartenant à Eff_0.
- Si toutes les deuxièmes composantes sont identiques, choisir un r-uplet avec la plus petite valeur z_3. Continuer le processus chaque fois que cette contrainte se présente. Soit $(z_1^1, z_2^1, \dots\dots, z_r^1)$ le r-uplet enregistré

Etape2 : Choisir un indice $j_1 \in \Gamma_1$. Trouver le plus petite θ pour le prochain pivot.

- Si $\theta_{j1} < 1$, aucune solution réalisable ne peut être sur l'arête E_{j1}.
- Si $\theta_{j1} \geq 1$, déterminer toutes les solutions entières réalisables le long de l'arête E_{j1}.

Soit S_1 l'ensemble de tous les r-uplets correspondant à l'arrête E_{j1}. L'ensemble Eff_1 est l'ensemble de r-uplets de la forme $(z_1^1, z_2^1, \dots\dots, z_r^1)$ potentiellement non dominées à l'étape 2.

-Tronquer l'arête E_{j1} par la coupe : $\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j \geq 1$.

-Appliquer la méthode duale du simplexe et les coupes de Gomory si c'est nécessaire pour avoir une solution entière réalisable $x = (x_{2,j})$ dans la région tronquée S_2

Etape3 :

- Choisir $j_2 \in \Gamma_2$ et balayer toutes les solutions qui sont sur l'arête E_{j2} correspondant à j_2.
- Lire les nouveaux r_uplets obtenus.
- Augmenter l'ensemble Eff_1 avec ces r-uplets pour construire l'ensemble Eff_2.
- Supprimer tous les r-uplets dominés et poser Eff_2 l'ensemble restant.
- Tronquer l'arête E_{j2} par la coupe $\sum_{j \in N_2 - \{j_2\}} x_j \geq 1$.

Etape k :

- Choisir $j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$ et explorer $E_{j_{k-1}}$ pour avoir les solutions entières possibles.
- Lire les r-uplets correspondants et augmenter l'ensemble Eff_{k-2} en ajoutant ces r-uplets pour construire Eff_{k-1}.
- Tronquer l'arête $E_{j_{k-1}}$ par la coupe :$\sum_{j \in N_{k-1} - \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$.
- Obtenir la solution entière optimale X_k de la région. Ceci marque le début de l'état $(k + 1)$.

$\boldsymbol{Etape\ (k+1)}$: Ce processus se termine à l'étape $(k + 1)$ quand :

- L'ensemble $\Gamma_k = \emptyset$ et $z_{k,j}^{C^1} - C_j^1 > 0 \ \forall \ j \in N_k$
- $\Gamma_k \neq \emptyset$ mais tout les $j \in \Gamma_k$ produisent des l'arête dominés.

Remarque : Il arrive parfois que l'algorithme développé par Gupta s'arrête sans avoir énuméré toutes les solutions efficaces. Par conséquent des solutions efficaces pouvant intéresser le décideur peuvent être ratées.

3.4.2 Méthode de Abbas et Moulai

C’est une méthode de coupes. Elle est appropriée à la résolution des problèmes (MOLPE). La première itération consiste à déterminer une solution entière réalisable pour le problème relaxé. La seconde itération nous permet de trouver toutes les solutions entières alternatives à la solution optimale obtenue (si elles existent) et obtenir la première solution entière efficace du problème principal. Dans la prochaine étape, nous introduisons une coupe afin de calculer les autres solutions entières efficaces restantes en utilisant la méthode duale du simplexe.

L’algorithme s’arrête quand tout le domaine de décision est exploré.

Soit le problème (MOLPE) suivant:

$$(P_1)\begin{cases} \max z_1(x) = C^1x \\ \max z_2(x) = C^2x \\ \vdots \\ \max z_r(x) = C^rx \\ s.c. \\ x \in S \\ x \ entier, \end{cases}$$

Cet algorithme adopte les mêmes notation que celles de la méthode de Gupta.

<u>procédure:</u>

<u>Etape1 :</u> Résoudre le problème (P_1) et trouver la solution optimal entière x_1^1 du problème dans S1 et construire Γ_1.

Si $\Gamma_1 = \emptyset$, x_1^1 est l’unique solution optimale entière du problème $p_1$de valeur z_1^1.

- Calculer les valeurs de z_i^1, $i \in 2, \ldots, r$ et enregistrer $(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_2^1)$ comme étant le premier r-uplet.
- Tronquer le point x_1^1 par la coupe $\sum_{j \in N_1} x_j \geq 1$

En appliquant la méthode duale du simplexe et des coupes de Gomory si nécessaire, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée S_2.

- Lire le r-uplet correspondant **(**z_1^1, z_2^1**,....., **z_r^1**)** et l'ajouterà eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des r-uplets efficaces pour obtenir eff_1.

Si $\Gamma_1 \neq \emptyset$ choisir un indice $j_1 \in \Gamma_1$ et calculer le nombre θ_{j_1} correspond à x_1^1.

- Si $\theta_{j_1} < 1$ choisir un indice $j_1 \in \Gamma_1$ et appliquer la coupe : $\sum_{j \in N_1 - j_1} x_j \geq 1$.
  - En appliquant la méthode duale du simplexe et si nécessaire des coupes de Gomory successives, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée S_2.
  - Enregistrer **(**z_1^2, z_2^1**,....., **z_r^2**)** r-uplet dans Eff_0. s'il n'est pas dominé par l'un des r-uplets efficaces précédemment déterminés pour obtenir Eff_1.

- Si $\theta_{j_1} \geq 1$, déterminer toutes les solutions entières réalisables $x_1^q, q \in \{2, \dots, p_k\}$**.**
  alternatives à x_1^1 le long de l'arête E_{j1}.
  - Tronquer le point x_1^q par la coupe $\sum_{j \in N_1} x_j \geq 1$.
  - En appliquant la méthode duale du simplexe et des coupes de Gomory si nécessaire, on obtient une solution réalisable entière x_2^1 dans la région tronquée S_2. Lire le r-uplet correspondant **(**z_1^1, z_2^1**,....., **z_r^1**)** et l'ajouter à Eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des r-uplets efficaces pour obtenir Eff_1.

Exemple d'application: (méthode Abbas & Moulai)

Soit le problème multicritère suivant :

$$\max Z_1(x) = C^1 x = 3x_1 + 2x_2$$

$$\max Z_2 = C^2 x = -2x_1 - x_2$$

$$(P)\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Etape2 :</u>

Résolution du problème $(P1)$:

$$\max Z_1(x) = C^1 x = 3x_1 + 2x_2$$

$$(P1)\quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution de base réalisable optimale de la région tronquée S_1 est donnée par le tableau **II.1** suivant :

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2	1	0	0	0	1	0
x_2	0	0	1	0	0	-1	1
x_3	2	0	0	1	0	-1	-3
x_4	2	0	0	0	1	1	-3
6	$Z_j^1 - C_j^1$	0	0	0	0	1	2
-4	$Z_j^2 - C_j^2$	0	0	0	0	-1	-2

Tableau 1

$I_1 = \{1,2,3,4\}$, $N_1 = \{5,6\}$ $\quad \Gamma_1 = \{j/j \in N_1,\ Z_{1,j}^1 - C_j^1 = 0\} = \emptyset$

$z_1^1 = z_1(x_1^1) = 6$, $z_2^1 = z_2(x_1^1) = -4$

L'unique solution optimale $x_1^1 = (2{,}0)$ produit le premier r-uplet efficace (2,0) par suite, $Eff_0 = (6, -4)$.

Etape2 :

$\Gamma_1 = \emptyset$, x_1^1 est l'unique solution. Ce point entier est tronqué en utilisant la coupe $x_5 + x_6 \geq 1$

En utilisant le duale du simplexe, on obtient une solution réalisable : $x_2^1 = (1,1)$ donnée par le tableau 2 optimal suivant :

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1	1	0	0	0	0	-1	1
x_2	1	0	1	0	0	0	2	-1
x_3	3	0	0	1	0	0	-2	-1
x_4	1	0	0	0	1	0	-4	1
x_5	1	0	0	0	0	1	1	-1
5	$Z_j^1 - C_j^1$	0	0	0	0	0	1	1
-3	$Z_j^2 - C_j^2$	0	0	0	0	0	0	-1

Tableau 2

Le r-uplet $(5, -3)$ correspondant à x_2^1 est non dominée par rapport au précédant de Eff_0. par conséquent, il est ajouter à Eff_0 pour obtenir $Eff_1 = \{(6, -4), (5, -3)\}$ avec :

$I_2 = \{1,2,3,4,5\}$

$N_2 = \{6,7\}$,

Etape3 $\Gamma_2 = \emptyset$, Ce point entier est tronqué en utilisant la coupe $x_6 + x_7 \geq 1$

En utilisant le duale du simplexe, on obtient une solution réalisable : $x_3^1 = (0,2)$ donnée par le tableau 3 optimal suivant

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	0	0	0	-2	0	1
x_2	2	0	1	0	0	0	3	0	-1
x_3	4	0	0	1	0	0	-1	0	-1
x_4	0	0	0	0	1	0	-5	0	1
x_5	2	0	0	0	0	1	2	0	-1
x_7	1	0	0	0	0	0	1	1	-1
4	$Z_j^1 - C_j^1$	0	0	0	0	0	0	0	1
-2	$Z_j^2 - C_j^2$	0	0	0	0	0	1	0	-1

Tableau 3

Le r-uplet $(4, -2)$ correspondant à x_3^1 est non dominé par rapport aux précédents de Eff_0 et de Eff_1. Par conséquent, il est rajouté pour obtenir Eff_2 = {(6, –4), (5, –3), (4, –2)} avec :

I_2 = {1,2,3,4,5,7} et N_2 = {6,8}, Γ_2 = {6}

Etape4

Comme $\Gamma_2 \neq \emptyset$, prendre $j_3 = 6$. Après examen de l'arête E_6, on a $\emptyset_{j_2} \leq min\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1}\right\} = 0$ correspondant à la valeur x_2. La solution $x_4^1 = (1,0)$ n'a pas d'alternative sur cette arête.

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
x_8	1	0	−1	0	0	0	0	0	1	−3
x_3	4	0	−1	1	0	0	0	0	0	−4
x_4	4	0	1	0	1	0	0	0	0	−2
x_5	1	0	−1	0	0	1	0	0	0	−1
x_7	1	0	−1	0	0	0	0	1	0	−2
x_6	1	0	0	0	0	0	1	0	0	−1
3	$Z_j^1 - C_j^1$	0	2	0	0	0	0	0	0	3
−2	$Z_j^2 - C_j^2$	0	−2	0	0	0	1	0	0	−2

Tableau 4

Le r-uplet $(3, -2)$ correspondant à x_4^1 est dominé par rapport au r-uplet $(4, -2)$. Par conséquent Eff_3 = {(6, –4), (5, –3), (4, –2)} avec :

I_3 = {1,8,3,4,5,7,6} et N_3 = {2,9}, $\Gamma_3 = \emptyset$.

Etape5

Comme $\Gamma_3 = \emptyset$, le point entier est tronqué en utilisant la coupe $x_2 + x_9 \geq 1$.

Après application du dual du simplex on obtient une solution réalisable : $x_5^1 = (0,1)$ donnée par le tableau5 optimal suivant

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_8	2	0	0	0	0	0	0	0	1	−2	−1
x_3	5	0	0	1	0	0	0	0	0	−3	−1
x_4	3	0	0	0	1	0	0	0	0	−3	1
x_5	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	−1
x_7	2	0	0	0	0	0	0	1	0	−1	−1
x_6	1	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	0
x_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	−1
2	$Z_j^1 - C_j^1$	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
−1	$Z_j^2 - C_j^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

Tableau 5

La solution $x_5^1 = (0,1)$ donne le r-uplet non dominé $(2, -1)$.

Donc on augmente $Eff_5 = \{(6,-4), (5,-3), (4,-2), (2,-1)\}$

Etape6

Comme $\Gamma_5 = \emptyset$, le point entier est tronqué en utilisant la coupe $x_{10} + x_9 \geq 1$.

Après application du dual du simplex on obtient une solution réalisable : $x_6^1 = (0,0)$ donnée par le tableau6 optimal suivant

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_9	1	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−1
x_8	4	−1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	−2
x_3	8	−2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	−3
x_4	4	−2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	−1
x_5	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_7	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	−1
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	−1
x_2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	$Z_j^1 - C_j^1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	$Z_j^2 - C_j^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Tableau 6

La solution $x_6^1 = (0,0)$ donne le r-uplet non dominé (0,0) .

Donc on augmente $Eff_6 = \{(6,-4),(5,-3),(4,-2),(2,-1),(0,0)\}$

Avec $N_6 = \{9,8,3,5,7,6,2,10\}$ et $I_6 = \{1,11\}$.

Etape7 :

Comme $\Gamma_6 = \emptyset$, le point est tronqué en utilisons la coupe $x_1 + x_{11} \geq 1$.

L'application du dual du simplex provoque l'impossibilité de l'opérartion de pivot.Donc une infaisabilité indiquant ainsi que toutes les solution efficace du problème (P) ont été trouvées.

Cette infaisabilité est donnée par le tableau 12 suivant

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_9	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
x_8	7	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-3
x_3	12	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-4
x_4	4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	3	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
x_7	5	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-2
x_6	1	0	-2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-3
x_{11}	2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2
x_{10}	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1
x_1	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 →
-2	$Z_j^1 - C_j^1$	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	$Z_j^2 - C_j^2$	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Tableau 7

La variable x_1 est sélectionnée pour sortir de la base B et x_2 et x_{12} est variables hors base entrant en principe dans la base B mais le vecteur ligne est positif ou nul. Ceci implique que l'opération pivot est impossible.

Conclusion En plus de sa convergence la méthode de Abbas & Moulai est nous donne toutes les solutions efficaces contrairement à celle de Gupta qui peut s'arrêter sans nous donner toutes les solutions efficaces.

Chapitre 4 Programmation multi objectif linéaire et fractionnaire en nombres entiers

4.1 Introduction Le problème de la programmation multi objectif linéaire fractionnaire ($MOLFP$:Multiple Objective Linear fractional Programming program) est l'un des modèles les plus utilisées dans la prise de décision à objectifs multiples. Dans de nombreuses situation réelles modélisables par la programmation mathématique, les variables intervenant dans la modélisation sont soumises à être totalement en nombres entiers. On parle alors de programmation multi objectif linéaire fractionnaire en nombres entiers ($MOILFP$:Multiple Objective Integer Linear fractional Programming program).une variété très grande de problèmes est formulée et résolut en utilisant la programmation en nombres entiers. Parmi les problèmes connus, on note les problèmes de voyageur de commerce, sac à dos, de gestion, de planification de la production, d'optimisation de réseaux de télécommunication. Dans ce chapitre on présente le problème fractionnaire linéaire uni critère et la résolution résolution du problème de programmation multicritère linéaire fractionnaire en nombres entiers (MOLFPE) basées sur le processus des coupes de Gomory [1].

4.1.1 Programmation fractionnaire linéaire uni critère

Les programmes fractionnaires consistent à optimiser un objectif donné sous forme d'un quotient de deux fonctions soumis à un ensemble de contraintes.

le problème fractionnaire linéaire uni critère se modélise comme suit :

$$Max\ \frac{C^{'} X + C_0}{D^{'}\ X + d_0}$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} AX \leq\ A_0 \\ X\ \geq\ 0 \end{cases}$$

Où

$$C\ =\ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}, D\ =\ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}\ ,\ X\ =\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\ ,\ A_0\ =\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Où C_0, d_0 sont des scalaires réels, C et D sont des vecteurs de R^n , A est une matrice d'ordre (*m* x *n*), A_0 est un vecteur de R^m. Comme nous allons le constater, si une solution optimale pour un programme fractionnaire linéaire existe alors un point extrême optimal existe, en outre tout minimum local est un minimum global et tout maximum local est un maximum global, d'où une procédure qui se déplace d'un point extrême a un adjacent est une approche réalisable pour résoudre un tel problème.

Lemme

Soit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{C}' \boldsymbol{X} + \boldsymbol{C_0}}{\boldsymbol{D}' \boldsymbol{X} + \boldsymbol{d_0}}$

Et soit S un ensemble convexe tel que $D' X + d_0 \neq 0$ sur S alors,

f est a la fois pseudo-convexe et pseudo-concave sur S

4.1.2 Stratégie de résolution:

La forme particulière des programmes fractionnaires a fait que de nombreux auteurs ont élaboré des méthodes de résolution spécifiques qui se sont avérées plus efficaces que l'application directe de méthodes générales de la programmation non linéaire.
Dans la littérature émergent trois grandes stratégies de résolution d'un programme fractionnaire.
– *La résolution directe* : le programme est traité sous sa forme originale. Elle a été utilisée pour les programmes hyperboliques en variables continues et entières.

– *La résolution par paramétrisation* : à l'inverse de la résolution directe, on construit un problème à objectif simplifié, combinaison linéaire du numérateur et du dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre, tout en gardant inchangé l'ensemble des contraintes. Une séquence de résolutions de ce type de problème fournit une solution du programme fractionnaire. Cette méthode a été utilisée pour les différents programmes fractionnaires linéaires et non linéaires, en variables continues comme en variables discrètes, sur des domaines bornés.

– *La résolution d'un programme équivalent* : un changement de variables permet lui aussi de simplifier l'objectif, mais en transportant la difficulté sur l'ensemble des contraintes. Par exemple, un programme fractionnaire concave-convexe est transformé en un programme concave, et un programme hyperbolique en un programme à objectif linéaire, avec des contraintes additionnelles.

4.1.3 Représentation graphique de la programmation fractionnaire linéaire :

Comme l'a noté Steuer[32], les programmes linéaires fractionnaires présentent un intérêt particulier mis en évidence par la linéarité des courbes niveaux de leurs fonctions critères. En effet, pour illustrer cet aspect, considérons une $\overline{\mathbb{Z}}$-courbe niveau quelconque de la fonction critère :

$$\overline{\mathbb{Z}} = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta}$$

après simplification, nous obtenons :

$$\overline{\mathbb{Z}}\,(q^t x + \beta) = (p^t x + \alpha)$$

ce qui entraîne

$$\beta - \alpha = (p - \overline{z}\,q)^{\mathrm{t}} x$$

qui est une expression linéaire de la $\overline{\mathbb{Z}}$- courbe niveau de la fonction critère. Puisque $\overline{\mathbb{Z}}$ est quelconque, on voit que chaque courbe niveau du critère fractionnaire linéaire est linéaire sur S, à condition que le dénominateur ne soit pas nul sur S. Donc, si un programme fractionnaire linéaire uni-critère possède une solution optimale, alors au moins un point extrême de S est optimal.

En dépit de la linéarité de la courbe niveau de la fonction objectif, les courbes niveaux ne sont pas parallèles (pour $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $\neq \omega q$, $\forall\, \omega \in R$).comme ils le sont en programmation linéaire. L'ensemble rotation est l'ensemble de tous les points d'intersection entre la 0-courbe niveau du numérateur et la 0-courbe niveau du dénominateur.

L'ensemble rotation est appelé *point de rotation* dans R^2 et axe de rotation dans R^3. Les points de cet ensemble sont déterminés par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} p^t x = -\alpha \\ q^t x = -\beta \end{cases}$$

Exemple illustratif :

Soit le programme fractionnaire linéaire suivant :

$$maximiser\ \mathbb{Z} = \frac{2x_1 + 4x_2 + 2}{3x_1 + x_2 - 2}$$

$$S.C \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

Dont le graphe est donne par la figure 1 :

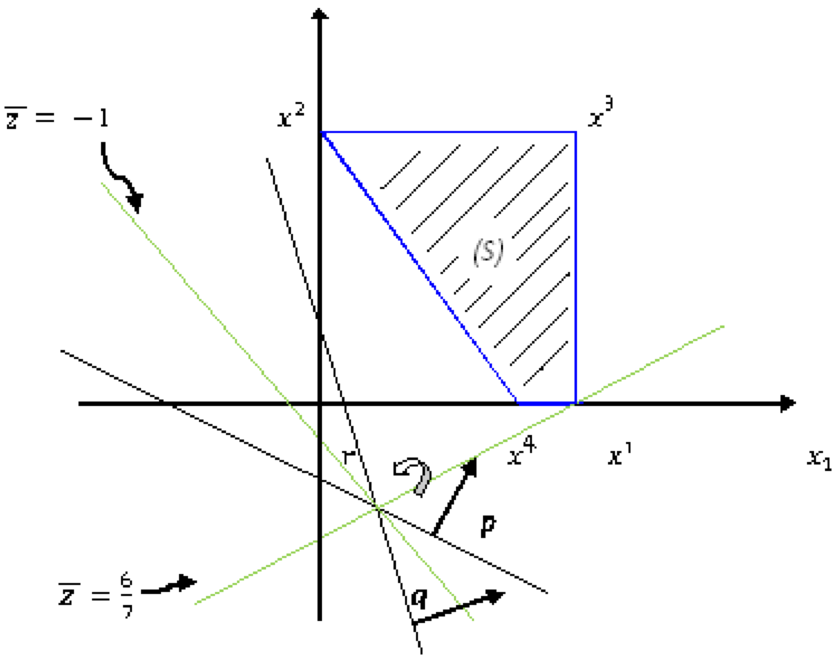


Figure 1.

Le problème a quatre extrémités x^1, x^2 , x^3 et x^4 don les valeurs du critère sont comme suit :

$x^1 = (4{,}0) \quad \mathbb{z}(x^1) = 1 \qquad\qquad x^3 = (4{,}3) \quad \mathbb{z}(x^3) = \frac{11}{6}$

$x^2 = (0{,}3) \quad \mathbb{z}(x^2) = 14 \qquad\qquad x^4 = (3{,}0) \quad \mathbb{z}(x^4) = \frac{8}{7}$

$\boldsymbol{r} = (1, -1)$

Alors la courbe de niveau $\overline{\mathbb{z}}$ est l'ensemble des points $x = (x_1 , x_2)$ satisfaisant l'équation :

$$\overline{\mathbb{z}}\beta - \alpha = (p - \overline{\mathbb{z}}q)^{\mathrm{t}}x \iff (-2\overline{\mathbb{z}} - 2\overline{\mathbb{z}}) = (2 - 3\overline{\mathbb{z}})x_1 + (4 - \overline{\mathbb{z}})x_2$$

Donc pour:

$\overline{\mathbb{z}} - 1 \iff x_1 + x_2 = 0 : courbe\ de\ niveau\ (-1)$

$\overline{\mathbb{z}} = \frac{8}{7} \iff -x_1 + 2x_1 = -3 : courbe\ de\ niveau\ (\frac{8}{7})$

Les lignes vertes représentent les 0-courbes niveaux du numérateur et du dénominateur dont l'intersection est le point de rotation $\boldsymbol{r} = (1, -1)$.

La flèche circulaire dénote le gradient de la fonction fractionnaire linéaire critère et indique le sens et l'angle avec lesquels se déplacent les courbes de niveaux, donc en faisant déplacer la courbe de niveau -1 autour du point de rotation suivant le sens de rotation trigonométrique, nous pouvons voir que le point optimal est x^2 de valeur optimal $\mathbb{z}^* = 14$.

Méthode de A. Cambini et al.[6]

On considère le programme fractionnaire linéaire continu(P):

$$(P)\begin{cases} Max\ z = \frac{cx+\alpha}{dx+\beta} \\ \quad x \in S \end{cases}$$

Ou $S = \{x \in R^n\ Ax = b, x \geq 0\}$ avec $\propto et\ \beta$ sont des réels, c et d sont des vecteurs de R^{1*n}, A est une matrice réelle de format $m * n$ et b un vecteur de R^m.

Définition 4.1

On dira que x^* est solution optimale niveau pour le est une problème (P) si et seulement si x^* est solution optimale du problème (P_θ) pour certaine valeur de θ:

$$(P_\theta) = \begin{cases} Max\ cx + \alpha \\ x \in S \\ dx + \beta = \theta \end{cases}$$

L'algorithme de Cambini et al.[6] génère une séquence finie x^k, $k = \overline{1, l}$ de solutions optimales niveau dont la première est trouvé de la façon suivante:

Résoudre le programme linéaire (P_0)\{Min $dx + \beta\ x \in S$\},soit x^0 la solution optimale(car sa fonction objectif est bornée).si x^0 est unique, alors elle est une solution niveau, sinon résoudre le programme linéaire

$(P_1)\{\ Max\ \{cx + \alpha\ ; x \in S\}$.

Si (P_1) n'admet pas de solution, alors la valeur de la fonction objectif est infinie; sinon une solution optimale x^1 de (P_1) est aussi une solution optimale niveau.

Theoreme 4.1 ([6]).Si $J = \{j \in N\ > 0\} = \emptyset$, ou $\hat{\gamma} = \hat{\beta}\hat{C} - \hat{\alpha} d_N$ est tel que $\hat{\gamma}_j \leq 0$ pour tout indice hors base $j \in N$,alors x^k est une solution optimale du problème (P).

Algorithme

Etape1. Trouvé la solution optimale niveau x^1.

Si une telle solution n'existe pas, alors $sup\{\frac{cx+\propto}{dx+\beta}\ /x \in S\} = +\infty$,terminer.sinon,poser $k = 1$et aller à l'étape 2.

Etape2. si$J = \{j \in N\ \backslash \hat{d}_j > 0\} = \emptyset$,terminer x^k est une solution optimale du problème (P). Sinon, soit s tel que $\frac{\hat{c}_s}{\hat{d}_s} = \max\ (\frac{\hat{c}_j}{\hat{d}_j})$.

Si $\hat{\gamma}_s > 0$,aller à l'étape 3.Sinon, terminer, x^k est une solution optimale de (P)

Etape3. La variable hors base x_s entre dans la base au moyen d'une opération pivot, poser $k = k + 1$ et aller à l'étape 2.si une telle opération n'est pas possible, terminer: $sup \{\frac{cx+\propto}{dx+\beta} \ / x \in S\} = \frac{\hat{c}_s}{\hat{c}_s}$.

4.2 Programmation multi objectifs linéaire fractionnaire en nombres entiers

4.2.1 Formulation du problème:

Considérons, le problème d'optimisation fractionnaire linéaire multicritère en nombres entiers (MOLFPE) donné sous la forme mathématique suivante :

$$(P)\begin{cases} max z_1(x) = \frac{c^1x+\alpha^1}{d^1x+\beta^1} \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ max z_r(x) = \frac{c^rx+\alpha^r}{d^rx+\beta^r} \\ \quad s.c \\ \quad x \in S \\ \quad x \ entier \end{cases}$$

Où : k représente le nombre d'objectifs $(r \geq 2)$ **.**

S = $\{\mathcal{R}^n \ / Ax \leq b, x \geq 0\}$ est l'ensemble des solutions réalisables.

A est une m× n matrice, $b \in \mathcal{R}^m$ et c^i**,** d^i sont des 1 × n vecteurs, α^iet β^i sont des scalaires pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. **;** $d^i x + \beta^i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Le but de traiter ce type de problème (MOLFPE) est de déterminer toutes les solutions efficaces . Plusieurs approches utilisent le concept basé sur la résolution d'une séquence finie de programmes uni-critères fractionnaires linéaires en nombres entiers.

Considérons donc le programme fractionnaire linéaire uni-critère en nombres entiers donné sous la forme suivante :

$$(P_1)\begin{cases} max z_1(x) = \dfrac{c^1x + \alpha^1}{d^1x + \beta^1} \\ x \in s; ; x\ entier \end{cases}$$

Notons qu'au lieu de Z_1, on peut de la même manière considérer le problème (PL) avec un autre objectif Z_1, l∈ {1, ... ,r }.

4.2.2 Méthodes de résolution d'un problème d'optimisation fractionnaire linéaire multicritère en nombres entiers

4.2.3 la méthode de Moulai Mustapha[1]

Considérons le problème fractionnaire linéaire en nombre entiers à objectifs multiples donné par

$$(P)\begin{cases} \max Z_1(x) = \dfrac{C^1x + \alpha^1}{d^1x + \beta^1} \\ \vdots \\ \max Z_r(x) = \dfrac{C^1x + \alpha^r}{d^rx + \beta^r} \\ s.c \\ x \in S \\ x\ entier \end{cases}$$

Afin de résoudre (P),on cherche l'ensemble des solutions réalisables de (P_1) suivant:

$$(P_1)\begin{cases} \max Z_1(x) = \dfrac{C^1x + \alpha^1}{d^1x + \beta^1} \\ s.c \\ x \in S \\ x\ entier \end{cases}$$

Les notations suivantes sont adoptées:

$S_1 = \{x \in B^x / A_1(x) \leq b_1, A_1 \in R^{m_1 * n_1}, b_1 \in R^{m_1}, x \geq 0\}$ est la région tronquée de S obtenue par des coupes successive de Gomory.

Z_1^1 est la valeur optimale de $z_1$dans le problème (P_1).

$x_1^1 = \{x_{1,j}^1\}$ est la solution entière de Z_1^1 obtenue sur S_1

Z_i^1 est la valeur de $z_i, i \in \{2, \dots, r\}$ Correspondant à la solution x_1^1

β_1^1est la base de S_1.

$a_{1,j}^1 \in R^{m_1 * 1}$ sont les vecteurs d'activité de $a_{1,j}^1$ appropriés à la région tronquée

$S_1 \;\; y_{1,j}^1 = (y_{1,ij}^1) = (\beta_1^1)^{-1} a_{1,j}^1 \; ou \;\; y_{1,j}^1 \in R^{m_1 * 1}$

$$I_1 = \{j : a_{1,j}^1 \in \beta_1^1\}$$

$$N_1 = \{j : a_{1,j}^1 \notin \beta_1^1\}$$

c_j^1 =la $j^{\text{éme}}$ composante de vecteur c^1.

$d_j^1 = la \; j^{\text{éme}} \; composante$ de vecteur d^1.

$c_{1,1}^1 = \sum_{i \in I_1} c_i^1 \;\; y_{1,ij}^1$.

$d_{1,1}^1 = \sum_{i \in I_1} d_i^1 \;\; y_{1,ij}^1$.

$z_1(x_1^1) = \frac{z_{1,1}^1}{c_{1,2}^1}$ ou $z_{1,1}^1 = c^1 x_1^1 + \alpha^1$ et $z_{1,2}^1 = d^1 x_1^1 + \beta^1$

$y_{1,j}^1 = z_{1,2}^1 \left(c_j^1 - c_{ij}^1\right) - z_{1,1}^1 \left(d_j^1 - d_{ij}^1\right)$ le cout réduit relatif à la $j^{\text{éme}}$ composante de vecteur gradient réduit $\overline{y_1^1}$

$$\Gamma_1 = \{j / j \in N_1 \;\; et \;\; \overline{y_{1,J}^1} = 0\}$$

pour $k \geq 2$

$S_k = \{S_1 = \{x \in \mathcal{R}^{n_k} / A_k x \leq b_k, A_k \in R^{m_k * n_k}, b_k \in R^{m_k}, x \geq 0\}$ est la région tronquée courante de s obtenue par l'application de la coupe

$\sum_{j \in N_{k-1} - \{j_{k-1}\}} x_j \geq 1$ ou

$j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$.

$x_k^1 = \{x_{k,j}^1\}$ est la $j^{\text{éme}}$ solution optimale entière du problème(P_1) obtenue sur S_k

$a_{k.j}^1 \in R^{m_k} * 1$ sont les vecteurs activités de $x_{k,j}^1$ appropriés à la région courant s_{k-1}

$y_{k,j}^1 = \left(y_{k,ij}^1\right) = (B_k^1)^{-1} a_{k.j}^1 \ ou \ \ y_{k,j}^1 \in R^{m_k} * 1.$

$I_k = \{j : a_{k,j}^1 \in \beta_k^1\}.$

$N_k = \{j : a_{k,j}^1 \notin \beta_k^1\}.$

c_j^1 =la $j^{\text{éme}}$ composante de vecteur p^1.

$d_j^1 = la \ j^{\text{éme}} \ composante$ de vecteur q^1.

$c_{k,1}^1 = \sum_{i \in I_1} c_i^1 \ y_{k,ij}^1$.

$d_{k,1}^1 = \sum_{i \in I_1} d_i^1 \ y_{k,ij}^1$.

$z_1(x_k^1) = \frac{z_{k,1}^1}{c_{k,2}^1}$ ou $z_{k,1}^1 = c^1 x_k^1 + \alpha^1$ et $z_{k,2}^1 = d^1 x_k^1 + \beta^1$

$y_{k,j}^1 = z_{k,2}^1\left(c_j^1 - c_{ij}^1\right) - z_{k,1}^1\left(d_j^1 - d_{ij}^1\right)$ le cout réduit relatif à la $j^{\text{éme}}$ composante de vecteur gradient réduit $\overline{y_k^1}$

$\Gamma_k = \{j / j \in N_k \ \ et \ \ \overline{y_{k,J}^1} = 0\}.$

Théorème 3 : Le point x_k^1 de s est une solution optimale du problème fractionnaire (P_1)si est seulement si le vecteur gradient réduit $\overline{y_{k,J}^1} \leq 0$ pour tout indice $j \in N_k$

Corollaire 2 : La solution x_k^1 du problème (P_1) est unique si est seulement si le vecteur gradient réduit $\overline{y_{k,J}^1} \leq 0$ pour tout indice $j \in N_k$.

Théorème 4 : Toutes les solutions réalisables x_k^q, $q \in \{2, \dots, p_k\}$ du problème fractionnaire linéaire (P_1) alternatives àx_k^1 sur l'arête E_{Jk} de la région S (ou la région tronquée (S_k) dans la direction d'un vecteur $a_{k,jk}^1$, $j_k \in \Gamma_k$ existent dans le demi-espace ouvert

$\sum_{j \in N_k - \{j_k\}} x_j < 1$.

Théorème 5 : Une solution réalisable entière du problème fractionnaire linéaire (P_1) n'appartient pas à l'arête E_{Jk}, $j_k \in \Gamma_k$ de la régionS_k à travers une solution réalisable entière x_k^1 du problème (P_1) appartient au demi-espace fermé $\sum_{j \in N_k - \{j_k\}} x_j \geq 1$.

Algorithme:

a. Résoudre le problème (P_1) par la méthode de Cambini.

b. Donner la solution optimale entière x_1^1 sur S_1, notons qu'a la place du problème (P_1), on peut considérer d'une manière analogue le problème (P_i) avec un objectif (Z_i) pour un indice quelconque $i \in \{2, \dots, r\}$, construire l'ensemble Γ_1.

Etape2: Si $\overline{y_{1,J}^1} < 0$ pour tout indice $j \in N_1$, x_1^1 et l'unique solution optimale sur S_1 et Z_1^1 est la valeur optimale de Z_1. calculer les valeurs Z_i^1 et Z_i donnée par x_1^1,

$i \in \{2, \dots, r\}$.

Enregistrer le premier vecteur effacer comme $(Z_1^1, Z_2^1, \dots, Z_r^1)$ pour construire l'ensemble Eff_0 si $\Gamma_1 = \emptyset$, l'arête E_{j1} ne contient pas de solution réalisable entière alternatives à x_1^1.Tronquer le point x_1^1 par la coupe suivante:$\sum_{j \in N_k} x_j > 1$

par application de la méthode dual de simplexe, on obtient une solution réalisable entière $x_2^1 = (x_{2,j}^1)$ dans la région tronquée S_2. $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ à l'ensemble des solutions efficaces Eff_0 s'il n'est pas dominée par l'un des précédents vecteurs entière efficace. Par conséquence Eff_0 devient Eff_1.

Sil existe au moins un indice$j_1 \in N_1$ pour lequel $\overline{y_{1,J}^1} = 0$, calculer le nombre

$\theta j_1 = \min \{\frac{x_{2,j}^1}{y_{1,ij_1}^1} / y_{1,ij_1}^1 > 0\}$ correspondant à la solution x_1^1 .

a) Si $\theta_{j1} \geq 1$, déterminer toutes les solutions entières réalisable x_1^q, $q \in \{2, \dots, p_1\}$ alternatives à x_1^1 le long de l'arête E_{j1} et leurs vecteur critères correspondants. Tronquer l'arête E_{j1} par la coupe $\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j > 1$. Une solution réalisable entière $x_2^1 = (x_{2,j}^1)$ dans la région tronquée S_2 est obtenue et son vecteur critère correspondant est ajouté à l'ensemble Eff_0 s'il n'est pas dominé par l'un des vecteurs critères efficace précédemment déterminés pour obtenir Eff_1.

b) Si $\theta_{j1} < 1$ pour tout indice $j_1 \in \Gamma_1$,choisir un indice quelconque j_1 et appliquer directement la coupe $\sum_{j \in N_1 - \{j_1\}} x_j \geq 1$ pour déterminer une solution réalisable entière $x_2^1 = (x_{2,j}^1)$ dans la région tronquée s_2.Son vecteur critère correspondant est ajouté à l'ensemble Eff_0s'il n'est pas dominé par l'un des vecteurs précédemment déterminés. Eff_0 devientEff_1 .

Etape k: choisir un indice $j_{k-1} \in \Gamma_{k-1}$ et explorer l'arête E_{jk-1} pour déterminer les solutions entières réalisables x_{k-1}^q ,$q \in \{2, \dots, p_k\}$ alternative àx_{k-1}^1.Augmenter l'ensembleEff_{k-1} par les vecteurs critères non dominés correspondant pour construire Eff_k l'arête E_{jk-1} est tronquée par la coupe $\sum_{j \in N_{k-1} - \{j_k\}} x_j \geq 1$ la solution entière obtenue sur la région tronquée $s_k$sera soit une solution réalisable pour le problème (p_1) alternative à x_{k-1}^1 ou la prochaine meilleure solution x_k^1 ou un point non entier. Ceci marque le début de l'étape $k + 1$.

Etape finale: la procédure s'arête lorsque la méthode duale du simplexe est irréalisable, indiquant ainsi que la région tronquée courante ne contient aucun point réalisable entier et que l'ensemble des points efficaces est complètement déterminé.

Exemple d'application : Soit le problème de la programmation fractionnaire linéaire en nombres entiers à trois critères suivant :

$$(P)\begin{cases} max\,\dfrac{3x_1 - x_2 - 22}{x_1 + 2x_2 + 2} \\ max\,\dfrac{-2x_1 + 2}{x_2 + 1} \\ \max 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1\ et\ x_2\ entiers \end{cases}$$

Etape1 :

Résoudre le problème relaxé(P_1):

$$(P_1)\begin{cases} max\,\dfrac{3x_1 - x_2 - 22}{x_1 + 2x_2 + 2} \\ x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0\ et\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution de base réalisable optimale du domaine tronqué est donnée par le tableau :

$I_1 = \{1,4\}$ et $N_1 = \{2,3\}$ $\Gamma_1 = \{j/j \in N_1, \bar{\gamma}_j = 0\} = \emptyset$

$Z_1^1 = -4$,
$Z_2^1 = -2$ et $Z_3^1 = 4$

L'unique solution optimale $x_1^1 = (2,0)$ produit le r-uplet efficace $(-4, -2,4)$ et donc $Eff_0 = \{(-4, -2,4)\}$.

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	2	1	4	1	0
x_4	2	0	-6	-1	1
p_j	-16	0	13	4	0
q_j	4	0	2	1	0
$\bar{\gamma}_j$	-4	0	-84	-32	0

Tableau. 1

Etape2 :

$\Gamma_1 = \emptyset$ donc on tronc le point par la coupe :

$$x_3 + x_2 \geq 1$$

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	3	0	0	1
x_4	3	0	-5	0	1	-1
x_3	1	0	1	1	0	-1
p_j	-19	0	10	0	0	3
q_j	3	0	1	0	0	1
$\bar{\gamma}_j$	-19/3	0	-49	0	0	-28

Tableau. 2

Comme $\Gamma_2 = \emptyset$ donc $x_2^1 = (1,0)$ est une solution unique.

x_2^1 produit le r-uplet efficace $(-19/3,0,2)$qui n'est pas dominer par le précédent donc on augmente $Eff_1 = \{(-4,-2,4),(-19/3,0,2)\}$.

Eatpe3 :

Comme $\Gamma_2 = \emptyset$, $x_2^1 = (1,0)$ est une solution unique. Ce point entier est tronqué par la coupe :
$x_2 + x_5 \geq 1$.

L'application de la méthode du simplexe produit la solution $x_3^1 = (0,0)$ donnée par le tableau suivant :

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	2	0	0	0	1
x_4	4	0	-4	0	1	0	-1
x_3	2	0	2	1	0	0	-1
x_5	1	0	1	0	0	1	-1
p_j	-22	0	7	0	0	0	3
q_j	2	0	0	0	0	0	1
$\bar{\gamma}_j$	-22/2	0	-14	0	0	0	-27

Tableau. 3

$\Gamma_3 = \emptyset$ donc $x_3^1 = (0,0)$ est une solution unique.

$x_3^1 = (0,0)$ produit le r-uplet efficace $(-11,2,0)$ qui n'est pas dominer par les précédents donc on auras $Eff_3 = \{(-4,-2,4), (-\frac{19}{3}, 0,2), (-11,2,0)\}$

Etape4

Comme $\Gamma_3 = \emptyset$, x_3^1 Ce point entier est tronqué par la coupe :
$x_2 + x_6 \geq 1$.

Lors de l'application de la méthode duale du simplexe, l'opération usuelle de pivot devient impossible indiquant que le domaine restant ne contient aucun point entier réalisable et que toutes les solutions efficaces du problème étudié ont été obtenues.

Cette impossibilité de pivoter est donnée par le tableau du simplexe suivant :

B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	-1	1	1	0	0	0	0	1
x_4	5	0	-3	0	1	0	0	-1
x_3	3	0	3	1	0	0	0	-1
x_5	2	0	2	0	0	1	0	-1
x_6	1	0	1	0	0	0	1	-1
p_j	-25	0	4	0	0	0	0	3
q_j	1	0	-1	0	0	0	0	1
$\bar{\gamma}_j$	-25	0	21	0	0	0	0	-28

Tableau. 4

La variable x_1 est sélectionnée pour sortir de la base.

Et x_7 est la variable qui doit rentrer dans la base. Seulement, le vecteur ligne toutes ses composantes positives ce qui implique l'impossibilité de l'opération de pivot et par suite l'arrêt de l'algorithme.

Partie informatique

La résolution sous win Gulf

Le WIN GULF est un logicile pour le résulution des problémes linéaire et fractionnaire.

Exemple:

Soit le probleme suivant:

$$\max z = \frac{150x_1 + 250x_2 + 75x_3 + 125x_4 - 25911}{1{,}74 + \frac{1}{420}x_1 + \frac{1}{420}x_2 + \frac{1}{420}x_3 + \frac{1}{420}x_4}$$

Avec les contraintes :

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 250$

$25x_1 + 30x_2 + 2{,}5x_3 + 3{,}5x_4 \leq 5615$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad sont \ entières$

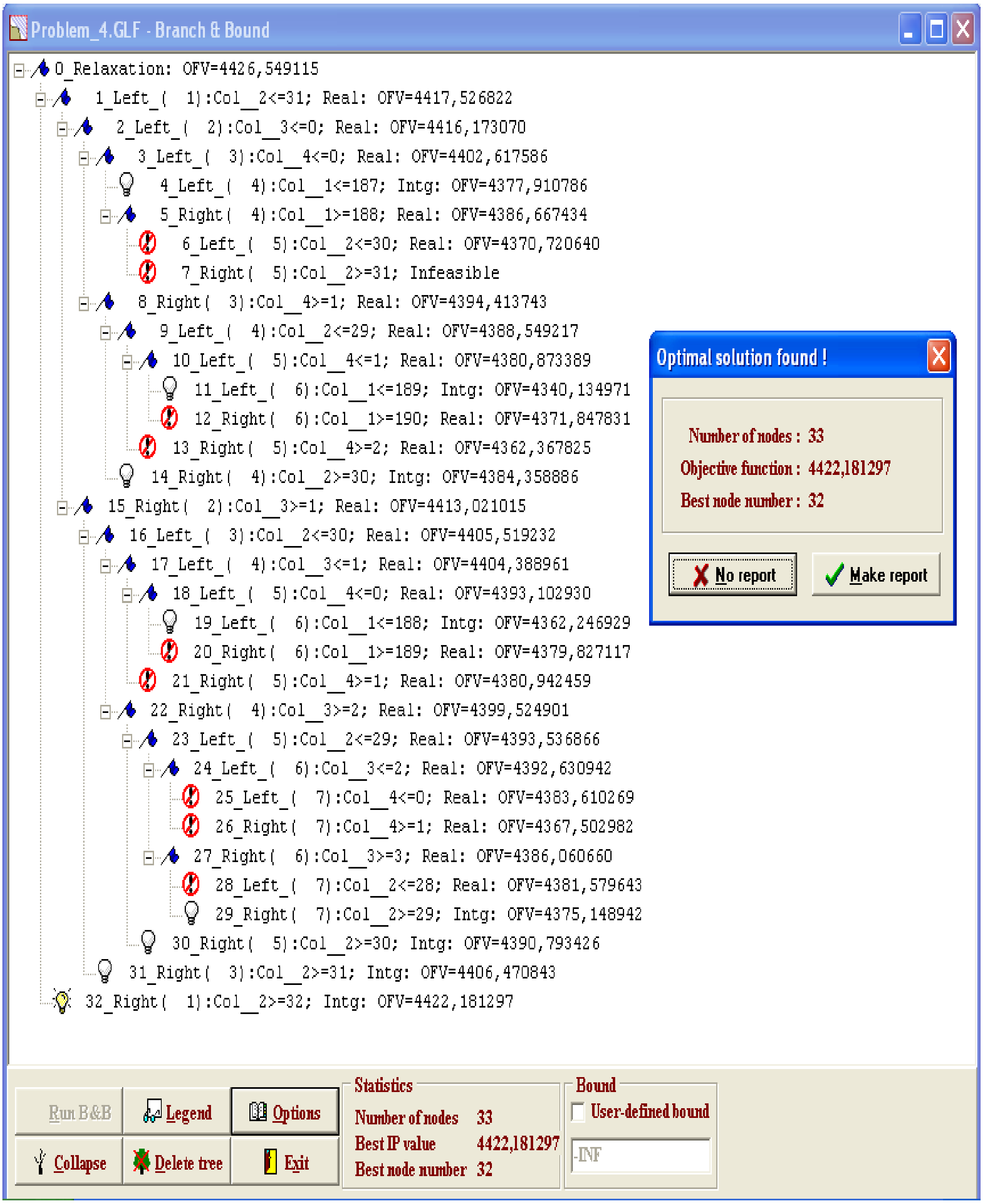


Figure 1 : illustration sous winGULF.

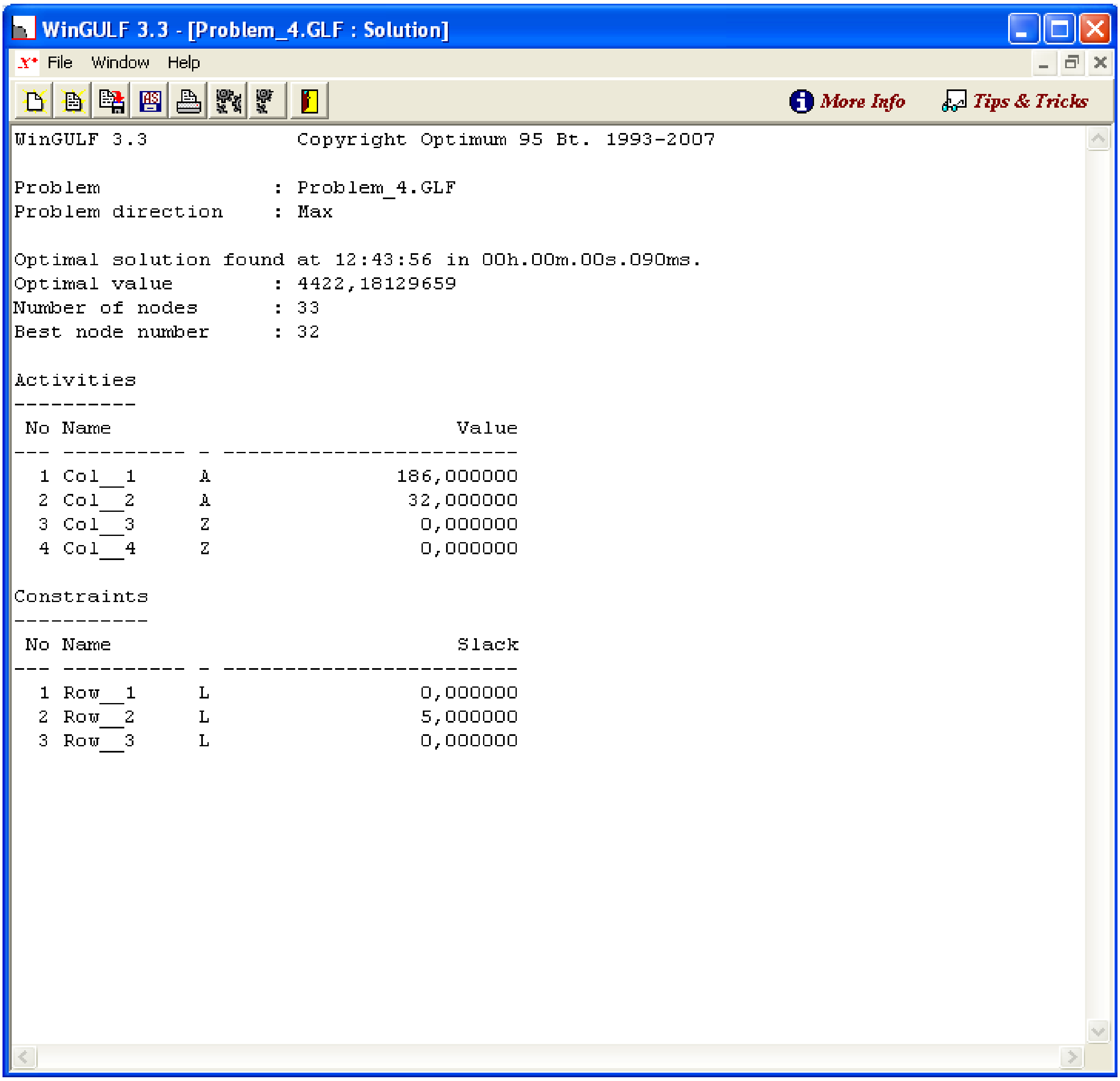


Figure 2 : illustration winGULF (rapport complet)

Conclusion Générale

Avant l’apparition de l’analyse multicritére, le sproblèmes de décision se ramenaient plus souvant à l’optimisation d’une seule fonction économique. Cette approche avait le mérite de déboucher sur des peoblèmes mathématiques bien posés mais qui ne représentaient pa sla réalité.

Dans ce modeste travail, on avons donné une vue panoramique des méthodes d’optimisation fractionnaire linéaire discrète uni-critère et multicritère. On peut conclure que ces méthodes sont basées sur l’optimisation continue, vu l’utilisation successives des algorithmes de la méthode du simplexe, et la méthode duale du simplexe.

Les deux méthodes exactes concernant l’optimisation fractionnaire linéaire en nombres entiers à objectifs multiples représentent un résultat important dans la littérature compte tenu

des propriétés spécifiques du problème (MOLFPE). Bien que l'avantage principal de ces méthode soit le fait qu'aucune optimisation non linéaire n'est exigée, elle présente néanmoins

un inconvénient alourdissant la complexité de l’algorithme. Cet inconvénient est caractérisé par la recherche de toutes les solutions réalisables entières du problème de programmation

fractionnaire linéaire entier relaxé (P1).

Donc le problème reste ouvert aux autres chercheurs pour développer de meilleures méthodes de résolution de ce type de problèmes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abbas M. et Moulaï M., Integer linear fractional programming with multiple objective, Journal of the Italian operations research society,Ricerca Operativa, vol 2; pp. 256-265 (2002).

[2] Abbas M. et Moulaï M., Constrained multipleobjective integer linear fractional prog gramming problem, European Journal of Operational Research, Issue of the 12th Mini Euro Conférence, Brussels, Belgium April, 2 – 5, (2002).

[3] Abbas M. et Moulaï M., A modified versionof Gupta's algorithm for multicriteria integer linear programs, Quarterly Journal BelgiumFrench and Italian of Operations Research Societies (4OR), pp. 22-35 (2002).

[4] Abbas M. et Moulaï M., Solving multiple objective integer linear programming, Journal of the Italian operations research society (Ricerca operativa), Vol. 29 n° 89 pp.15-38 (1999).

[5] Abbas M., and Moulaï M., Penalties Method for Integer Linear Fractional Programs, Belgian Journal of Operations Research, Statisticsand computer sciences, Vol. 37/4 (1997)

[6] Bitran G.R., and Novaes G., Linear Programmingwith a fractional objective functionOperations Research 24, pp. 675-699, (1976).

[7] Cambini A. et Martein L., A modified version ofMarto's algorithm for the linear fractional problem, Methods of Operational Research53, pp. 33-44 (1986).

[8] Chergui M.E.A and Moulai M., An exact method for a discrete multiobjective linear fractional optimization, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences, pp. 1-12 (2008).

[9] Choo E.U., Proper efficiency and the linear fractional vector maximum problem, Operational Research 32(1) pp. 216-220, (1984).

[10] Choo, E.U. and Atkins, D.R., Connectedness in Multiple Objective Linear Fractional Programming", Management Science Vol. 29, No 2, pp. 250-255, (1983).

[11] Craven B. D., Fractional Programming, Helderman, Berlin, (1988).

[12] Gupta R. and Malhorta R., Multi Critaria integer linear programming problem, cahier de CERO 34 (1992).

[13] Granot D. and Granot F., On integer and mixed integer fractional programming problems, Ann. Discrete Math., 1, pp. 221-231, (1977).

[14] Klein D. and Hannan E., An algorithm for multiple objective integer linear program- ming problem, European journal of operational research 9, pp. 152-159, (1982).

[15] Kornbluth, J. S. H., and Steuer, R. E., Multiple objective linear fractional program- Ming, Management Science 27 (1981), pp. 1024-1039.

[16] Martos B., Hyperbolic programming, Naval Res. Logist. Quart., 11, pp. 135-155, (1964).

[17] Moulaï M., Optimisation multicritère fractionnaire linéaire en nombres entiers. Thèse de Doctorat.2002.

[18] Nykowski I. and Zolkiewski Z., A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem, European Journal of Operational Research 19(1), pp. 91-97, (1985).

[19] Pareto A., Cours d'économie politique, vol. 1 et 2,F. Rouge, Lausanne, (1896).

[20] Schaible S. and Ibaraki T., Fractional programming, European Journal of Operational Research, 12, pp. 325-338, (1983).

[21] Steuer R., Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and

[23] Yann C., Siarry P., Optimisation multiobjectif, groupe Eyrolles, 2002.