

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE MINISTRE DE  
L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU  
FACULTE DE LA CONSTRUCTION DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE



**MEMOIR DE FIN D'ETUDE**

**FILIERE : CONSTRUCTION MECANIQUE**

*Comparaison des méthodes d'optimisation pour l'identification des endommagements dans les structures mécaniques*

**PRESENTE PAR : SEDDI LYNDA**

**Encadré par ; Mr SLIMANI Mohand**

**Co-encadré par : Mr TIACHACHT Samir**

2024/2025

## *Remerciements*

*A l'issue de ce travail, il m'est particulièrement cher d'exprimer ma Profonde gratitude envers tous ceux qui ont contribué, avec patience et Bienveillance à l'élaboration de ce mémoire tout d'abord, mes sincères Remerciements s'adressent aux membres du jury, dont l'honneur et l'attention portée à l'évaluation de mon travail me sont précieuses*

*Je tiens également à exprime tout ma reconnaissance pour mon promoteur mon Mr SLIMANI Mohand ainsi mon Co- promoteur Monsieur TLACHACT Samir j'ai eu le privilège d'être l'une de vous étudiants et de bénéficier de vous enseignement riche et éclairé tout au long De mon parcours votre générosité votre conseils avisés et votre soutien Inestimable ont été des piliers essentiels dans la réussite de ce projet. Veilliez accepter, Monsieur mes sincères remerciements pour votre Engagement.*





## *Dédicace*

*Ce travail est l'aboutissement d'un long parcours d'apprentissage, d'efforts et de persévérance je souhaite le dédier à ma mère la personne la plus précieuse de ma vie ton amour inconditionnel ta patience et tes sacrifices ont été mon pilier à chaque étape de mon parcours sans ton soutien et tes encouragements ce travail n'aurait pas été possible que ce mémoire soit le reflet de ta force et de ta générosité*

*A mes amis, ceux qui ont été présents dans les moments de doute, qui ont partagé avec moi des instants de joie et de complicité, qui m'ont motivé à toujours aller plus loin. Votre amitié, vos conseils et votre soutien ont rendu cette aventure plus enrichissante et agréable ce travail est aussi le vôtre, et je vous en suis profondément reconnaissant*



# Table Des Matières

<b>REMERCIEMENTS</b> .....	2
<b>DEDICACE</b> .....	3
Listes Des Figures Et Tableaux .....	7
Liste Des Figures.....	7
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	10
<b>CHAPITRE 1 : Concept Theorique De La Methode D'elements Finis</b> .....	1
1 .2. Bref historique sur la MEF .....	3
1 .3. Présentation de la MEF.....	4
1.4. Définition de la MEF .....	4
1.5 Formalisation de la méthode des éléments finis.....	4
1.6. Processus de discrétisation par la méthode des éléments finis.....	5
1 .7. Subdivision du domaine en éléments finis.....	5
1.8 Elaboration de lien contrainte-déplacement et contrainte-déformation .....	5
1.9 Calcule de la matrice constitutive élémentaire .....	5
1.10. Association des matrices constitutives élémentaires .....	6
<b>2.2. Analyse par la méthode des éléments finis d'une barre</b> .....	6
2.2.1 Elément barre 1D suivant l'axe(x) .....	6
2.2 .2 Elément barre 2D suivant l'axe (x, y) :	8
2 .2 .3 Elément barre 3D suivant l'axe (x, y, z) :	9
<b>2.3 MATRICE DE MASSE</b> :.....	11
2.3.1 Matrice de masse d'une barre 1D :.....	11
2.3.2 Matrice de masse pour une barre 2D.....	12
2.3.3 Matrice de masse pour une barre 3D.....	14
<b>3.1 L'analyse dynamique des structures</b> .....	16
<b>3.2 Equation du mouvement</b> .....	16
<b>3.3 Système Masse –Ressort (non amortie)</b> .....	17

3.4 Equations du mouvement .....	17
----------------------------------	----

## **CHAPITRE 2 : Methodes De Detections D'endommagement..... 19**

2.1 Introduction .....	20
------------------------	----

2.2 Methodes de detection basée sur les vibrations .....	20
--	----

2.1 Methodes basées sur les fréquences propres .....	21
--	----

2.2 Methodes basées sur des déformées modales .....	23
---	----

2.2.1 Methodes basées directement sur des déformées modales.....	23
--	----

2.2.2 Methodes basées sur la courbe modale :.....	24
---	----

2.3 Methodes dans le domaine des fréquences.....	31
--	----

2.4 Methodes dans le domaine temps-fréquence .....	35
--	----

2.5 Methode basées sur l'énergie de déformation modale .....	37
--	----

2.6 Methode basée sur le vecteur résiduel modal .....	39
---	----

2.7 Methode de Rapport des changements des fréquences locales ou LFCR .....	41
---	----

2.7.1 Introduction.....	41
-------------------------	----

2.7.2 Recherche Bibliographique sur la méthode :.....	41
---	----

2.8 Présentations de la méthode.....	42
--------------------------------------	----

2.10.1 Structure 31 barres : .....	45
------------------------------------	----

2.10.2 Structure 52 barres .....	50
----------------------------------	----

2.11 Applications numériques (LFCR) .....	57
---	----

2.11.1 Treillis 2D :.....	57
---------------------------	----

2.11.2 Treillis 3D :.....	58
---------------------------	----

## **CHAPITRE 3 : Methode D'optimisations Et Quantifications D'endommagement .....60**

Introduction .....	61
--------------------	----

3.1 Généralités sur les algorithmes d'optimisation.....	62
---	----

3.1.1 Variables du problème .....	62
-----------------------------------	----

3.1.2 Les contraintes.....	62
----------------------------	----

3.1.3 Fonctions objectives.....	63
---------------------------------	----

3.1.4 Limite des variables.....	64
---------------------------------	----

3.2.2 Nombre d'itérations.....	64
--------------------------------	----

3.2.3 Vitesse de convergence.....	65
-----------------------------------	----

3.2.4 Critère d'arrêt .....	65
-----------------------------	----

<b>3.3 Algorithme du Colibri Artificiel (AHA)</b> .....	<b>65</b>
3.3.2. Présentation de l'algorithme AHA.....	66
3.3.2.1 Initialisation .....	66
3.3.2.2 Recherche guidée .....	66
3.3.2.3 Recherche territoriale .....	67
3.3.2.5 l'organigramme de l'Algorithme AHA .....	68
<b>3.5 Optimiseur du Pangolin Chinois (CPO)</b> .....	<b>70</b>
3.5.1 Introduction à l'algorithme .....	70
3.5.2 Présentation de l'algorithme CPO.....	70
3.5.2.1 Initialisation .....	70
3.5.2.2 Phase d'attrait .....	71
3.5.2.3 Phase de prédation .....	71
3.5.2.4 Mise à jour et convergence .....	71
3.5.3 L'organigramme de l'Algorithme CPO.....	71
<b>3.7. Synthèse d'observations</b> .....	<b>80</b>
3.7.1 Applications sur une barre 3D 52 éléments.....	80
3.7.2 Synthèse d'observation.....	87
<b>3.8. Conclusion</b> .....	<b>87</b>
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	<b>88</b>

## Listes Des Figures Et Tableaux

### Liste Des Figures

figure 1 : Barre Soumise A Des Forces De Traction T ; Les Deplacements Et Forces Nodales Positives Sont Tous Dans La Direction X Locale .....	6
Figure 2 : Element Barre 2 Dimensions. ....	8
Figure 3 : Element Barre A 3 Dimensions.....	10
Figure 4 : Schema Des 4 Niveaux De Detection Des Endommagements .....	21
Figure 5 Treillis 2d 31 Elements .....	44
Figure 6 : Treillis 3d 52 Elements.....	45
Figure 7. Les Quatre Modes Propres.....	49
Figure 8. Les Quatre Modes Propres.....	57
Figure 9 : Histogramme Des Valeurs Lfcr D'endommagement De L'element 2. ....	57
Figure 10 : Histogramme Des Valeurs Lfcr Pour L'endommagement Des Elements 9,10. ....	58
Figure 11 : Histogramme Des Valeurs Lfcr Pour L'endommagement De L'element 3. ....	58
Figure 12 : Histogramme Des Valeurs Lfcr Pour L'endommagement Des Elements 15 ,20...59	59
Figure 13 : Mecanisme De Resolution Par Optimisation. ....	61
Figure 14 Images Reelles D'un Colibri. ....	65
Figure 15 : Les Trois Comportements De Vol Des Colibris Sont (A) Vol Axial (B) Vol Diagonal (C) Vol Omnidirectionnel. ....	67
Figure 16 : Modeles De Recherche De Nourriture Et De Migration Des Colibris. ....	68
Figure 17 : L'organigramme De L'algorithme Aha.....	69

Figure 18 : Image Reelle De Chinese Pangolin. ....	70
Figure 19 : L'organigramme De L'algorithme Cpo. ....	72
Figure 20. Barre 2d –Un Seul Endommagement 50 Iterations Et 50 Populations.....	74
Figure 21 Barres 2d–Un Seul Endommagement 50 Iterations Et 100 Populations. ....	74
Figure 22. Barre 2d –Un Seul Endommagement 50 Iterations Et 500 Populations.....	75
Figure 23. Barre 2d –Un Seul Endommagement 50 Populations Et 100 Iterations.....	75
Figure 24. Barre 2d –Un Seul Endommagement 50 Populations Et 200 Iterations.....	76
Figure 25. Barre 2d –Un Seul Endommagement 50 Populations Et 500 Iterations.....	76
Figure 26. Barre 2d –Deux Endommagements 50 Iterations Et 50 Populations .....	77
Figure 27. Barre 2d –Deux Endommagements 50 Iterations Et 100populations.....	77
Figure 28. Barre 2d –Deux Endommagements 50 Iterations Et 500 Populations .....	78
Figure 29. Barre 2d –Deux Endommagements 50 Populations Et 50 Iterations .....	78
Figure 30. Barre 2d –Deux Endommagements 50 Populations Et 200 Iterations .....	79
Figure 31. Barre 2d –Deux Endommagements 50 Populations Et 500 Iterations .....	79
Figure 32. Barre 3d –Un Seul Endommagement 50 Iterations Et 50 Populations.....	81
Figure 33. Barre 3d –Un Seul Endommagement 50 Iterations Et 100 Populations.....	81
Figure 34. Barre 3d –Un Seul Endommagement 50 Iterations Et 500 Populations.....	82
Figure 35. Barre 3d –Un Seul Endommagement 50 Populations Et 100 Iterations.....	82
Figure 36. Barre 3d –Un Seul Endommagement 50 Populations Et 200 Iterations.....	83
Figure 37. Barre 3d –Un Seul Endommagement 50 Populations Et 500 Iterations.....	83

Figure 38.Barre 3d –Deux Endommagements 50 Iterations Et 50 Populations .....	84
Figure 39. Barre 3d –Deux Endommagements 50 Iterations Et 100 Populations .....	84
Figure 40. Barre 3d –Deux Endommagements 50 Iterations Et 500 Populations .....	85
Figure 41. Barre 3d –Deux Endommagements 50 Populations Et 100 Iterations .....	85
Figure 42. Barre 3d –Deux Endommagements 50 Populations Et 200 Iterations .....	86
Figure 43. Barre 3d –Deux Endommagements 50 Populations Et 500 Iterations .....	86

### **Liste Des Tableaux**

TABLEAU 1 : POURCENTAGE DES ELEMENTS ENDOMMAGES BARRE2D.....	46
TABLEAU 2 : COMPARAISON DES FREQUENCES SAINES ET ENDOMMAGEES BARRE 2D. ....	46
TABLEAU 3. POURCENTAGE DES ELEMENTS ENDOMMAGES BARRE3D.....	50
TABLEAU 4. COMPARAISON DES FREQUENCES SAINES ET ENDOMMAGEES BARRE3D. ....	50



**Introduction Générale**

La durabilité des structures face aux sollicitations environnementales (séismes, vents, vagues, choc) représente un enjeu crucial pour la sécurité des personnes et la pérennité des ouvrages tel que les pont, bâtiments et autres infrastructures se détériorent au fil du temps sous l'effet de ces contraintes traditionnellement. La sécurité de ces structures est assurée par des inspections visuelles périodiques, qui sont toutefois limitées en précision et en efficacité, laissant place à d'éventuelles détériorations difficiles à évaluer et rendant l'estimation des dommages pratiquement impossible après des événements majeurs.

L'analyse numérique constitue une alternative majeure permettant de modéliser et simuler des structures complexes avec une grande précision grâce à des méthodes comme les éléments finis, les volumes finis ou les modélisations numériques pour prédire le comportement des systèmes soumis à diverses conditions de charge.

Dans le cadre de la surveillance de la santé des structures (SHM), les méthodes d'identification des endommagements basées sur les vibrations (VBDI) offrent une approche plus quantifiable que l'inspection visuelle en effet les caractéristiques physiques des structures (masse, rigidité, conditions aux limites) influencent directement leurs paramètres vibratoires tel que la fréquence, formes modales, amortissement et les variations. Ces paramètres permettent d'identifier les dommages et parmi les techniques utilisées, on retrouve les analyses des changements de fréquences, des formes de mode, de la courbure modale, de la matrice de flexibilité et de l'énergie de déformation modale.

L'objectif de ce travail est de détecter, localiser et quantifier les dommages dans deux structures treillis 2D et 3D à l'aide de la méthode des éléments finis et du logiciel MATLAB. Pour cela, nous allons calculer les paramètres physiques (masse et rigidité) et les modes (fréquences, vecteurs et valeurs propres) des structures. Avant d'appliquer les techniques de détection d'endommagements afin d'optimiser la précision et l'efficacité du processus, nous intégrons deux algorithmes d'optimisation et menons une étude comparative et leurs performances.

Ce mémoire est organisé en trois parties :

La première partie porte sur la présentation générale de la méthode des éléments finis et son application aux structures treillis.

La deuxième partie comporte la description des différentes méthodes de détection des endommagements basées sur les vibrations et aussi sur l'analyse des résultats obtenus avec la méthode fondée sur les fréquences locales.

La troisième partie porte sur l'identification et quantification des dommages à l'aide des algorithmes d'optimisation, suivie d'une comparaison des performances.

Enfin, une conclusion viendra synthétiser les principales observations et résultats obtenus.





# Chapitre 1



## 1 Introduction

La méthode des éléments finis est une technique numérique utilisée pour la simulation des Problèmes complexes en mécanique des structures et la conception et l'analyse des Dispositifs Électromagnétiques [1].

Le processus des éléments finis est une approche puissante, permettant d'analyser des Structures continues présentant des géométries variées et soumises à différentes conditions de Charge cette méthode implique un grand nombre de calculs, dont la nature répétitive se prête idéalement à la programmation numérique et à la résolution par ordinateur la MEF est donc Une technique moderne, interdisciplinaire, qui mobilise les connaissances de trois domaines Fondamentaux :

- La mécanique des structures : incluant l'élasticité, la résistance des matériaux, la dynamique, la plasticité.
- L'analyse numérique : englobant les méthodes d'approximation, la résolution des systèmes linaires, les problèmes aux valeurs propres.
- L'informatique appliquée : qui couvre les techniques de développement et de maintenance des logiciels complexes.

Ce chapitre illustre de manière concrète comment les méthodes et concepts se complètent et s'appliquent aux problèmes de génie mécanique. Ils constituent Ainsi un arsenal essentiel pour analyser et optimiser des systèmes mécaniques Complexe[2].

### 1.2. Bref historique sur la MEF

La MEF n'est pas l'œuvre d'un seul inventeur, elle a été développée indépendamment par des Ingénieurs, physiciens et des mathématiciens. En 1943, Courant s'est efforcé d'utiliser des Fonctions continues par morceaux définies sur un domaine triangulaire, après cela, il a fallu près d'une décennie pour que cette idée de distribution soit utilisée dans les années cinquante. Un regain d'intérêt pour ce domaine a été manifesté par Ploya Hersh et Weinberger En 1960 Argyries et Kelsey ont introduit à leur tour le concept d'application des principes Énergétiques à la formation des problèmes d'analyse structurelle. Dans la même année, Clougha Introduit le Terme « Méthodes des Éléments finis » dans les années soixante.

L'aspect de convergence de la méthode des éléments finis a été étudié plus rigoureusement. Une de ces études menée par Melesh a conduit à la formulation de la méthode des éléments finis basée sur les principes de l'énergie potentielle minimale, peu de temps après Veubeke a introduit les éléments d'équilibre basés sur les principes de l'énergie potentielle minimale. Tandis que pion a inséré le concept d'élément hybride en utilisant le double principe de l'énergie potentielle minimale et de l'énergie complémentaire minimale. A la fin des années 1960 et dans les années 1970, des progrès considérables ont été réalisés dans le domaine de l'analyse par éléments finis. Les améliorations de la vitesse et des capacités de mémoire des ordinateurs ont largement contribué aux progrès et au Succès de cette méthode dans le domaine de la mécanique des solides, après s'être initialement concentrée sur l'analyse élastique des problèmes de contraintes planes et de déformations planes. La méthode a été étendue avec succès aux cas de l'analyse de problèmes tridimensionnels, des problèmes

Stabilité, de vibration et d'analyse non linéaires. Un nombre infinis de livres sont parus et ont rendu ce domaine intéressant [3].

### **1.3. Présentation de la MEF**

Bien que les premiers calculs avec la méthode des éléments finis remontent à l'année 1943 par les travaux de Courant et ses applications aux problèmes d'électromagnétisme débuté la fin d'année 1960, notamment grâce aux contributions de Silvestre et M.V. K. CHARI. L'essor de la MEF est étroitement lié aux avancées de l'ingénierie et l'informatique. Son utilisation dans des domaines variés tels que l'aéronautique témoigne de sa grande précision. La MEF peut être définie comme une technique numérique permettant d'approximer les solutions d'équations aux dérivées partielles qui décrivent les phénomènes physiques et leurs conditions aux limites. La MEF peut être définie comme une technique numérique permettant d'approximer les solutions d'équations aux dérivées partielles qui décrivent les phénomènes physiques et leurs conditions aux limites [1].

### **1.4. Définition de la MEF**

La méthode des éléments finis est une méthode numérique utilisée pour résoudre les équations qui décrivent les phénomènes présents dans la nature. En effet, le comportement naturel est souvent modélisé à l'aide d'équations différentielles ou intégrales c'est pourquoi, dans les milieux mathématiques la MEF est considérée comme une technique permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles ou des équations intégrales. Lorsqu'elle est appliquée à l'analyse des structures, la MEF constitue une approche puissante pour déterminer les déplacements, les contraintes et les déformations d'une Structure soumise à divers types de charge [4].

### **1.5 Formalisation de la méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis est une technique numérique permettant d'analyser les structures et les milieux continus, particulièrement, lorsque les méthodes analytiques classiques se révèlent insuffisantes pour résoudre des problèmes complexes grâce aux avancées dans ce domaine, des problématiques autrefois considérés comme insurmontables peuvent désormais être traités avec efficacité. Cette approche est largement employée dans la conception et l'optimisation de nombreuses structures telles que les bâtiments, les moteurs thermiques, et électriques ainsi que les coques de navires et les engins spatiaux. Le processus des éléments finis produit un grand nombre d'équations algébriques simultanées résolues par un ordinateur numérique, bien que ces calculs puissent être réalisés sur un ordinateur personnel, la précision des résultats s'améliore au fur et à mesure du traitement d'un plus grand nombre d'équations tout en restant accessible à un coût raisonnable. À l'origine elles sont développées pour l'analyse des contraintes. Cette méthode a vu son champ d'application s'élargir. Aujourd'hui, elle est utilisée pour aborder des problèmes variés, tels que le transfert thermique, la conduction de chaleur, la lubrification, les écoulements du fluide ainsi que les phénomènes électromagnétiques permettant ainsi de résoudre une multitude de défis techniques dans divers domaines [5].

### 1.6. Processus de discrétisation par la méthode des éléments finis

Les principales étapes de la construction d'un modèle par la méthode des éléments finis sont les suivantes :

- Discrétisation du domaine continu en sous-domaines finis ;
- Définition de l'approximation nodale pour chaque sous-domaine ;
- Calcul des matrices élémentaires associées à la formulation intégrale du problème ;
- Assemblage des matrices élémentaires pour obtenir le système global ;
- Intégration des conditions aux limites ;
- Résolutions du système d'équations obtenu [6].

### 1.7. Subdivision du domaine en éléments finis

Cette opération consiste à diviser le domaine continu en sous-domaines distinctes :

$$\sum_{e=1}^{n_e} D_e \text{ tel que } \lim_{e \rightarrow 0} (U_e D_e) = D \quad (1.1)$$

Afin de représenter fidèlement la géométrie souvent complexe d'un domaine d'étude, nous le décomposons en éléments géométriques simple sans chevauchement ni lacune. Néanmoins, lorsqu'une frontière est irrégulière, une approximation est inévitable. Il est crucial d'évaluer l'erreur induite par cette discrétisation et de l'atténuer en ajoutant la forme ou la taille des éléments concernés [6].

### 1.8 Elaboration de lien contrainte-déplacement et contrainte-déformation

Les relations contraintes-déplacements et contraintes-déformations sont nécessaires pour dériver les équations de chaque élément fini, dans le cadre d'une déformation unidimensionnelle disons des directions  $x$ , nous avons la déformation  $\epsilon_x$  liée au déplacement  $U$  est donnée ainsi :

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1.2)$$

Pour des petites déformations, les contraintes doivent être reliées aux déformations par la loi contrainte-déformation, généralement appelée loi constitutive. La capacité à définir précisément le comportement du matériau est primordiale pour obtenir des résultats acceptables. La plus simple des lois contrainte-déformation est la loi de Hooke, souvent en analyse des contraintes, est donnée par :

$$\sigma_x = E \epsilon \quad (1.3)$$

ou :  $\sigma_x$  : contrainte dans la direction  $x$  et  $E$  : module d'élasticité [7].

### 1.9 Calcul de la matrice constitutive élémentaire

Cette phase cruciale consiste à calculer les déplacements  $U_e$  des nœuds du système de manière à ce que les forces internes générées dans chaque élément compensent exactement les forces externes appliquées  $F^e$  tel que :

$$K^e U^e = F \quad (1.4)$$

Avec  $K^e$  : représente la matrice de rigidité d'un élément dérivée de l'énergie de déformation de l'élément (ROCKY, 1979) et donnée par :

$$K_e = \int_0^v B^T D B dv \quad (1.5)$$

Il est également indispensable de déterminer la matrice de masse  $M_e$  pour chaque élément. Cette matrice est obtenue à partir de l'énergie cinétique de l'élément (ROCKY, 1979), dans le Repère locale de l'élément. Elle peut être exprimée par l'équation suivante :

$$M_e = \int_0^v \rho N^T N dv \quad (1.6)$$

$\rho$  : représente la masse volumique du matériau constituant l'élément. Les matrices  $K_e, M_e, U_e$  et  $F_e$  sont exprimés dans le repère globale défini pour l'ensemble de la Structure [8].

### 1.10. Association des matrices constitutives élémentaires

L'association revient à combiner les caractéristiques de chaque élément représenté par les matrices  $K, M$  et  $F$  pour obtenir les propriétés globales de la structure. Ces matrices élémentaires exprimées dans un repère commun, sont additionnées pour former les matrices de la structure complétée. Cette opération revient à sommer l'énergie de déformation et l'énergie cinétique de chaque élément. Cependant, dans le cas des structures composées de poutres, il est nécessaire pour chaque élément d'identifier la position exacte des déplacements nodaux dans le vecteur globale des déplacements de la structure [9].

### 2.2. Analyse par la méthode des éléments finis d'une barre

L'élément barre est un élément fini élastique et prismatique de longueur ( $L$ ) et de module d'élasticité ( $E$ ), généralement représenté par une ligne mais possédant une section transversale d'aire ( $A$ ). Il est défini par deux nœuds situés à ses extrémités qui peuvent uniquement se déplacer dans la direction axiale. L'élément est soumis à des efforts axiaux (traction ou compression), et la relation entre la contrainte ( $\sigma$ ) et la déformation ( $\varepsilon$ ) et les forces nodales  $F_1$  et  $F_2$  ont une convention de signes adoptée. Les forces et déplacements nodaux sont positifs lorsqu'ils agissent dans la même direction. Cet élément est largement utilisé dans l'analyse des structures pour modéliser les comportements en tractions et compression [10].

C'est un élément fini à deux nœuds, possédant un seul degré de liberté dans son repère locale et deux (en 2D) ou trois (en 3D) dans son repère global. Ses propriétés géométriques et matérielles sont définies par une section constante  $S$  et un module d'élasticité longitudinale ( $E$ ). Cet élément travaille exclusivement en traction-compression. Dans la plupart des Logiciel de calcul, l'effort normale ( $N$ ) est considéré comme positif en traction afin de simplifier les développements [11].

#### 2.2.1 Élément barre 1D suivant l'axe(x)

##### Etape1 : Choisir une fonction de déplacement

On considère une variation linéaire de déplacement le long de l'axe  $x$  de la barre, car une fonction linéaire avec des points de départ spécifiques suit un chemin unique. Ces points de départ spécifiques sont les valeurs nodales  $u_1$  et  $u_2$  comme une dissuasion plus approfondie concernant le choix des fonctions de déplacement qui sont données dans la Figure ci-dessus :

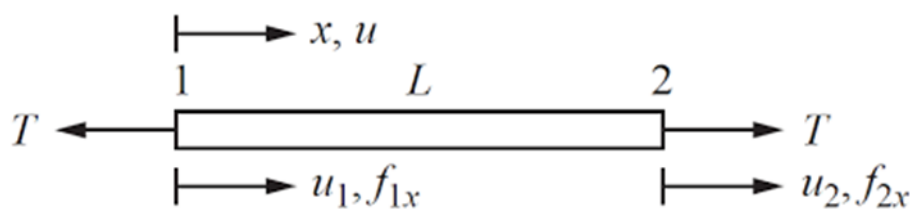


Figure 1 : barre soumise à des forces de traction  $T$  ; les déplacements et forces nodales positives sont tous dans la direction  $x$  locale

on écrit alors :

$$U = a_1 + a_2 x \quad (1.7)$$

Le nombre total de coefficients ai est toujours égale au nombre total de degrés de liberté associés à l'élément. Ici, le nombre total de degrés de liberté est de deux. Les déplacements axiaux aux deux nœuds de l'élément, en utilisant la même procédure, sont exprimés comme suit :

$$u = \left( \frac{u_1 - u_2}{L} \right) x + u_1 \quad (1.8)$$

En convertissant la fonction déplacement de l'équation (1.7) à celle de l'équation (1.8) permet d'exprimer la déformation en termes de déplacements nodaux en utilisant la relation déformation / déplacement donné par l'équation (1.11) puis relier les forces nodales aux déplacements nodaux en forme matriciel, l'équation (1.8) devient :

$$u = [N_1 N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Avec les fonctions de forme suivantes :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}, \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (1.10)$$

Les fonctions de forme  $N_1$  et  $N_2$  sont utilisées pour relier les déplacements locaux aux déplacements globaux  $u_1$  et  $u_2$ .

### Etape 2 : Déformation (relations déformation-déplacement, contrainte-déplacement)

La relation déformation-déplacement est :

$$\varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (1.11)$$

Ou les équations (1.9) et (1.10) sont utilisées pour obtenir l'équation (1.11) et la relations Contrainte-déformation :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (1.12)$$

avec :

$\varepsilon_x$  = La déformation. C'est la variation relative du déplacement le long de l'élément.

$\sigma_x$  = Contrainte.

$E$  = Le module d'élasticité du matériau de la barre (module d'Young).

### Etape 3 : Dérivé de la matrice de rigidité de l'élément et les équations :

La matrice de rigidité de l'élément est dérivée comme suit :

$$T = A \sigma_x \quad (1.13)$$

avec :

$T$  = La force interne dans l'élément de barre qui est liée à la contrainte.

$\sigma_x$  = La contrainte dans l'élément barre.

$A$  = L'aire de la section transversale de l'élément barre.

En utilisant les équations (1.11) et (1.12) dans l'équation (1.13), nous obtenons :

$$T = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (1.14)$$

De plus, selon la convention de signe des forces nodales de la figure1, nous avons :

$$f_{1x} = T \quad (1.15)$$

Lorsque nous remplaçons l'équation (1.14) et (1.15) nous aurons :

$$f_{1x} = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (1.16)$$

De même pour  $f_{2x} = T$  par l'équation (1.14) et (1.15) :

$$f_{2x} = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (1.17)$$

En exprimant l'équation (1.16) et (1.17) sous format matriciel, nous aurons :

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1.18)$$

Puisque  $f = [k]d$ , nous avons à partir de l'équation (1.18) :

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

L'équation (1.19) représente la matrice de rigidité pour un élément barre 1D. ainsi :

A= L'aire de la section transversale de la barre.

E= Le module de Young.

L= Longueur de l'élément.

et l'expression  $\frac{AE}{L}$  est égale la constant de raideur [k].

$f_{1x}$  et  $f_{2x}$ = les forces agissantes aux nœuds 1 et 2 de l'élément barre [7].

### 2.2.2 Elément barre 2D suivant l'axe (x, y) :

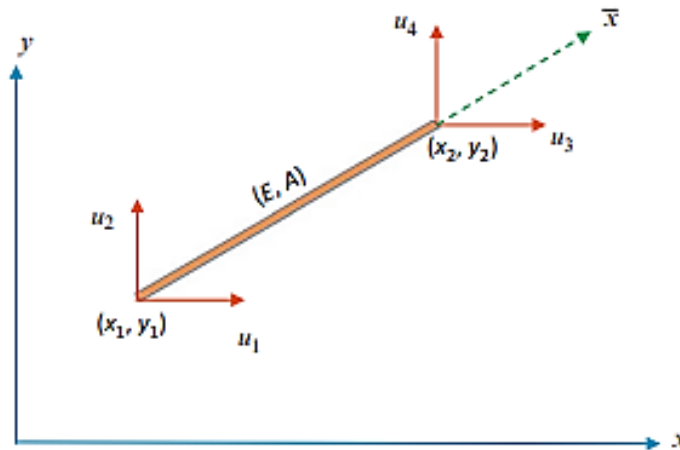


Figure2 : Elément Barre 2 dimensions.

Pour une barre inclinée, comme illustré sur la figure 1, le déplacement nodal au nœud i est donner par :

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

Ou  $U_i$  et  $V_i$  correspondent respectivement aux composantes horizontales et verticales de la force appliquée au nœud selon la convention adoptée. Les déplacements nodaux  $u_i$  et  $v_i$  ainsi que les forces nodales  $U_i$  et  $V_i$  sont positifs lorsqu'ils sont dirigés dans le même sens que les axes de coordonnées x et y et négatifs dans le cas contraire. Examinons maintenant la relation entre déformation et déplacement pour cette élément de barre inclinée en notant  $(l)$  le logeur de l'élément, celle-ci peut être déterminée à partir de la géométrie suivant :

$$l^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (1.21)$$

En différentiant cette relation, on obtient :

$$l dl = (x_j - x_i)(dx_j - dx_i) + (dy_j - dy_i) \quad (1.22)$$

En divisant les deux membres de cette équation par  $(l)$  on obtient :

$$ldl = \alpha(dx_j - dx_i)\beta(dy_j - dy_i) \quad (1.23)$$

Ou les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis comme suit :

$$\alpha = \cos\theta \frac{x_j - x_i}{l}, \beta = \sin\theta \frac{y_j - y_i}{l} \quad (1.24)$$

Après déformations de l'élément sous l'effet de la contrainte, les coordonnées du Nœud i Passent de  $(x_i, y_i)$  à  $(x_i + u_i, y_i + v_i)$  de même, les coordonnées du nœud j évoluent de  $(x_j, y_j)$  à  $(x_j + u_j, y_j + v_j)$  d'où :

$$dx_i = U_i, \quad dy_i = V_i \quad (1.25)$$

De façon similaire :

$$dx_j = U_j, \quad dy_j = V_j \quad (1.21)$$

En remplaçant les équations (1.20) et (1.21) dans l'expression (1.18) et en la divisant par  $(l)$ , on obtient l'expression de la déformation de l'élément barre sous la forme Suivante :

$$\varepsilon = \frac{dl}{l} = \frac{a}{l}(-u_i + u_j) + \frac{\beta}{l}(-v_i + v_j) \quad (1.26)$$

La force axiale de la barre inclinée peut être exprimée sous cette forme :

$$N = AE\varepsilon = \frac{AE}{l} [\alpha(-u_i + u_j) + \beta(-v_i + v_j)] \quad (1.27)$$

La force axiale N est toujours considérée comme positive. La valeur absolue de la Force nodale correspond aux composantes horizontales et verticales de cette Force axiale N, donc :

$$U_i = -N\cos\theta, \quad V_i = -N\sin\theta \quad (1.28)$$

$$U_j = N\cos\theta, \quad V_j = N\sin\theta \quad (1.29)$$

En substituant les expressions (1.24) et (1.25) dans la formule (1.23) nous obtenons la force nodale de l'élément barre sous forme matricielle :

$$\{F^e\} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix} \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = [k^e] \{\delta^e\} \quad (1.30)$$

La matrice de rigidité d'élément barre, notée  $[k]^e$  est symétrique. Nous pouvons également exprimer la formule de cette matrice (1.26) comme suit :

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (1.31)$$

ainsi :

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}; \{F_j\} = \begin{Bmatrix} U_j \\ V_j \end{Bmatrix}; \{\delta_j\} = \begin{Bmatrix} U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (1.32)$$

D'où  $F_i$  et  $F_j$  sont des forces nodales situées aux deux extrémités de l'élément.  $U_i, U_j$  et  $V_j, V_i$  sont respectivement les composantes des déplacements aux nœuds i et j. De plus, nous représentons les sous matrices dans l'expression de la force nodale élémentaire sont indiquées ci-dessous [12] :

$$[k_{ii}] = [k_{jj}] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix}; [k_{ij}] [k_{ji}] = \frac{AE}{le} = \begin{bmatrix} -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$\text{avec : } \alpha = \cos\theta; \beta = \sin\theta. \quad (1.30)$$

### 2.2.3 Élément barre 3D suivant l'axe (x, y, z) :

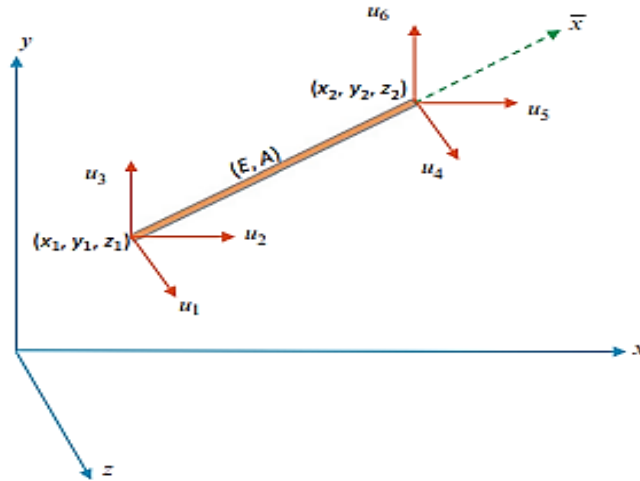


Figure 3 : Elément Barre à 3 dimensions.

Considérons maintenant une barre à deux nœuds dans un système 3D avec des coordonnées  $(x, y, z)$  comme illustré dans la figure (2). En appliquant une démarche similaire à celle utilisée en 2D, nous pouvons déterminer la matrice de rigidité de cet élément. Il est évident que tout déplacement d'un nœud  $i$ , représenté par  $d_{iy}, d_{iz}$  dans le repéré  $(x, y, z)$ , entraîne un déplacement de dix le long de l'axe  $x$ , exprimé ainsi :

$$dx_i = (\cos\theta_x)d_{ix} + (\cos\theta_y)d_{iy} + (\cos\theta_z)d_{iz} \tag{1.34}$$

ainsi :

$$\cos\theta_x = \frac{x_2-x_1}{L}; \cos\theta_y = \frac{y_2-y_1}{L}; \cos\theta_z = \frac{z_2-z_1}{L} \tag{1.35}$$

Dans les formules précédents  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  correspondent aux coordonnées des nœuds (1) et (2) de la barre, la longueur  $L$  de cette dernière est obtenue en calculant la distance entre deux points selon l'expression suivante

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1.36}$$

En appliquant l'équation (1.33) aux nœuds 1 et 2, on obtient les résultats suivants

$$\begin{aligned} d_{1x} &= C_x d_{1x} + C_y d_{1y} + C_z d_{1z} \\ d_{2x} &= C_x d_{2x} + C_y d_{2y} + C_z d_{2z} \end{aligned} \tag{1.37}$$

ainsi :

$C_x = \cos\theta_x$  ,  $C_y = \cos\theta_y$ ,  $C_z = \cos\theta_z$  L'équation (1.34) peut être réécrite sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \end{Bmatrix} \tag{1.38}$$

De façon similaire, la résultante  $r_{ix}$  d'un ensemble des forces nodales  $(r_{ix}, r_{iy}, r_{iz})$  appliquée aux nœuds  $i$  peut être formulée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cx & cy & cz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cx & cy & cz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{Bmatrix} \quad (1.39)$$

En tenant compte des équations (1.35) et (1.37), nous les substituons dans l'équation suivante

$$\begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} \quad (1.40)$$

Nous obtenons l'équation suivante [13] :

$$\begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ & C_y^2 & C_y C_z & -C_x C_y & -C_y^2 & -C_y C_z \\ & & C_z^2 & -C_x C_z & -C_y C_z & -C_z^2 \\ & & & C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ & & & & C_y^2 & C_y C_z \\ & & & & & C_z^2 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

## 2.3 MATRICE DE MASSE :

### 2.3.1 Matrice de masse d'une barre 1D :

Selon le principe d'Alembert, la distribution de la force d'inertie à l'intérieure du corps peut être exploitée pour dériver la matrice de masse [m] à l'aide des fonctions de Formes  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  :

$$[m] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{2x} \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{Bmatrix} \rho \ddot{d}(x) dv \quad (1.42)$$

Nous allons adopter :

$$\ddot{d}(x) = [N_1(x) N_2(x)] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (1.43)$$

L'équation (1.42) devienne :

$$[m] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{2x} \end{Bmatrix} = \rho \int \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{Bmatrix} [N_1(x) N_2(x)] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{2x} \end{Bmatrix} dv \quad (1.44)$$

Etant donné que les accélérations nodales  $\begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{2x} \end{Bmatrix}$  ne dépendent pas de la variable x, l'équation ci-dessus peut être exprimée de la manière suivante :

$$[m] = \rho \int \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{Bmatrix} [N_1(x) N_2(x)] dv \quad (1.45)$$

Pour une barre ayant une section uniforme, l'élément de volume est donné par :

$$dv = A dx \quad (1.46)$$

En revanche, rappelons-nous des expressions des fonctions de formes :

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (1.47)$$

En considérant les équations (1.46) et (1.47), l'équation (1.45) donne :

$$[m] = \rho A \int_0^L \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \left(\frac{x}{L}\right) \end{Bmatrix} \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) \right] dx \quad (1.48)$$

En développant chaque terme de la matrice, en intégrant et en appliquant les bornes 0 Et L, nous obtenons la matrice de masse pour une barre 1D que nous décrivons de la Manière suivante :

$$[m] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

### 2.3.2 Matrice de masse pour une barre 2D

Nous vison désormais à exprimer l'équation dans le système de coordonnées global x-y.

En partant de l'équation de l'élément barre dans le système de coordonnée locale :

$$[\bar{K}] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} + [\bar{m}] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{2x} \end{Bmatrix} \quad (1.50)$$

on a:

$$\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \end{Bmatrix} = [\bar{T}] \begin{Bmatrix} d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} \quad (1.51)$$

En effectuant deux dérives successives de ce vecteur de déplacement, nous obtenons le vecteur accélération suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dot{d}_{1x} \\ \dot{d}_{2x} \end{Bmatrix} = [\bar{T}] \begin{Bmatrix} \dot{d}_{1y} \\ \dot{d}_{2x} \\ \dot{d}_{2y} \end{Bmatrix} \quad (1.52)$$

Nous exprimons le vecteur déplacements sous la forme suivant :

$$\begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{2x} \end{Bmatrix} = [\bar{T}] \begin{Bmatrix} r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{Bmatrix} \quad (1.53)$$

Ou bien la matrice de transfert (passage) est définie comme suit :

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

$$\text{et } C = \cos(\theta), \quad S = \sin(\theta)$$

En substituant tous ces éléments dans l'équation (1.50), l'équation de l'élément devienne :

$$[\bar{K}][\bar{T}] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} + [\bar{m}][\bar{T}] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{1y} \\ \ddot{d}_{2x} \\ \ddot{d}_{2y} \end{Bmatrix} = [\bar{T}] \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{Bmatrix} \quad (1.55)$$

Pour relier les coordonnées globales, il serait nécessaire d'inverser la matrice. Toutefois, cela n'est pas possible car T n'est pas une matrice carrée. Par conséquent, les Équations (1.51) et (1.52) doivent être réécrites sous la forme suivante :

➤ **Déplacement :**

$$\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ 0 \\ d_{2x} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} \quad (1.56)$$

➤ **Accélération :**

$$\begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ 0 \\ \ddot{d}_{2x} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{1y} \\ \ddot{d}_{2x} \\ \ddot{d}_{2y} \end{Bmatrix} \quad (1.57)$$

➤ **Déplacement des forces :**

$$\begin{Bmatrix} r_{1x} \\ 0 \\ r_{2x} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{Bmatrix} \quad (1.58)$$

Nous appliquerons la même démarche pour la matrice de rigidité  $[\bar{K}]$  :

$$\begin{Bmatrix} r_{1x} \\ 0 \\ r_{2x} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ 0 \\ d_{2x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.59)$$

Selon le même principe, le terme suivant de l'équation de masse :

$$[m][\ddot{d}] = \frac{1}{2}\rho AL \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{2x} \end{Bmatrix} \quad (1.60)$$

Elle peut également être écrite de la manière suivante :

$$[m][\ddot{d}] = \frac{1}{2}\rho AL \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ 0 \\ \ddot{d}_{2x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.61)$$

En conséquence, la matrice de masse globale modifiée est définie comme suit :

$$[m^*] = \frac{1}{2}\rho AL \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Conformément à l'équation (1.59), la matrice de rigidité modifiée est :

$$[k^*] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

L'équation (1.55) peut être réécrite sous la forme équivalente suivante :

$$[k^*] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ 0 \\ d_{2x} \\ 0 \end{Bmatrix} + [m^*] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ 0 \\ \ddot{d}_{2x} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ 0 \\ r_{2x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.64)$$

La matrice de transfert devient ainsi :

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

L'équation (1.55) se réécrit alors comme suit :

$$[T]^T [K^*] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} + [T]^T [k^*] [T] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{1y} \\ \ddot{d}_{2x} \\ \ddot{d}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{Bmatrix} \quad (1.67)$$

où :

$$[K] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \end{Bmatrix} + [m] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{1y} \\ \ddot{d}_{2x} \\ \ddot{d}_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{Bmatrix} \quad (1.68)$$

Et la matrice de masse en coordonnées globales x-y peut également s'écrire sous cette forme :

$$[m] = \frac{1}{6} \rho AL \cdot [T]^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot [T] \quad (1.69)$$

### 2.3.3 Matrice de masse pour une barre 3D

La dérivée de la matrice de masse pour élément de barre tridimensionnel (3D) repose sur le même principe que pour l'élément barre (2D). Pour l'élément 3D, l'équation du mouvement prend désormais la forme suivante :

$$[K^*] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ d_{2x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [m^*] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_{2x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ r_{2x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.70)$$

où :

$$[K^*] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

En revanche, les déplacements, les accélérations, et les forces nodales peuvent être représentés de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ d_{2x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & Cy & Cz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \end{Bmatrix} \quad (1.72)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{d}_{2x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & Cy & Cz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{1y} \\ \ddot{d}_{1z} \\ \ddot{d}_{2x} \\ \ddot{d}_{2y} \\ \ddot{d}_{2z} \end{Bmatrix} \quad (1.73)$$

$$\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ d_{2x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & Cy & Cz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{Bmatrix} \quad (1.74)$$

avec :  $Cx = \cos\theta_x$ ,  $Cy = \cos\theta_y$ ,  $Cz = \cos\theta_z$

En représentant la matrice de passage de la manière suivante :

$$[T] = \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & Cy & Cz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

Nous remplaçons tout dans l'équation (1.70) :

$$[m^*][T] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \end{Bmatrix} + [m^*][T] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{1y} \\ \ddot{d}_{1z} \\ \ddot{d}_{2x} \\ \ddot{d}_{2y} \\ \ddot{d}_{2z} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{Bmatrix} \quad (1.76)$$

En multipliant les deux côtés de l'équation précédente par la transposée de [T], nous obtenons la forme suivante :

$$[K] \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \end{Bmatrix} + [m] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_{1x} \\ \ddot{d}_{1y} \\ \ddot{d}_{1z} \\ \ddot{d}_{2x} \\ \ddot{d}_{2y} \\ \ddot{d}_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{Bmatrix} \quad (1.77)$$

La matrice de masse en coordonnées globales x-y-z est :

$$[m] = \frac{1}{2} \rho AL \cdot [T]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [T] \quad (1.78)$$

Elle peut être également exprimée sous la forme :

$$[m] = \frac{1}{6} \rho AL \cdot [T]^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [T] \quad (1.79)$$

D'où la matrice de masse peut-être identifiée ainsi [12] :

$$[m] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 3cx^2 & 3cxcy & 3cxcz & 0 & 0 & 0 \\ 3cxcy & 3cy^2 & 3cycz & 0 & 0 & 0 \\ 3cxcz & 3cxcz & 3cz^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2cx^2 & 2cxcy & 2cxcz \\ 0 & 0 & 0 & 2cxcy & 2cy^2 & 2cycz \\ 0 & 0 & 0 & 2cxcz & 2cycz & 2cz^2 \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

### 3.1 L'analyse dynamique des structures

L'étude des vibrations ou analyse dynamique des structures se focalise sur les mouvements oscillatoires des corps sous l'effet des forces qui leur sont appliquées. Tout objet possédant une masse et des propriétés élastiques est susceptible de vibrer, ce qui rend l'analyse des vibrations essentielle pour quasiment toutes les nouvelles constructions mécaniques que ce soit dès la phase de conception où long du développement. Une évaluation approfondie des vibrations est indispensable pour garantir la performance et la sécurité des structures.

### 3.2 Equation du mouvement

Après la discrétisation des structures, les équations d'équilibre pour chaque nœud en mouvements sont exprimées comme suit :

$$\{Fi\} + \{Fd\} + \{p(t)\} = \{Fe\} \quad (1.81)$$

Dans cette équations les termes  $\{Fi\}$ ,  $\{Fd\}$ ,  $\{p(t)\}$  et  $\{Fe\}$  représenté respectivement :

$\{Fi\}$ = La force d'inertie.

$\{Fd\}$ = La force d'amortissement.

$\{p(t)\}$ = Les charges dynamiques appliquées au système.

$\{Fe\}$ = La force élastique.

Ces termes ne sont pas des vecteurs représentant les différentes forces agissant sur un système, la force élastique peut être exprimée en fonction des déplacements nodaux  $\{\delta\}$  et la matrice de rigidité  $[k]$  comme suite :

$$\{Fe\} = [K]\{\delta\} \quad (1.82)$$

Ici l'élément  $K_{ij}$  de la matrice de rigidité  $[k]$  représente la force élastique au nœud  $i$  causée par un déplacement unitaire au nœud  $j$ . En appliquant le principe d'Amber, la force d'inertie est liée à la matrice de masse  $[M]$  et l'accélération des nœuds, ce qui donne :

$$\{Fi\} = [M] \frac{d^2\{\delta\}}{dt^2} \quad (1.83)$$

Dans cette équation  $[M]$  es la matrice de masse du système et  $\frac{d^2\{\delta\}}{dt^2}$  représente l'accélération des déplacements nodaux pour un amortissement visqueux. La force d'amortissement peut être exprimée à l'aide de la matrice d'amortissement  $[c]$  et la vitesse des nœuds  $\frac{d\{\delta\}}{dt}$  comme suit :

$$\{Fd\} = -[c] \frac{d\{\delta\}}{dt} \quad (1.84)$$

Ici l'élément  $C_{ij}$  de la matrice d'amortissement  $[C]$  est la force d'amortissement au nœud  $i$  causée par une vitesse unitaire au nœud en remplaçant l'expression  $\{Fe\}$   $\{Fi\}$  et  $\{Fd\}$  dans l'équation et on obtient l'équation du mouvement :

$$[M] \frac{d^2\{\delta\}}{dt^2} + [c] \frac{d\{\delta\}}{dt} + K\{\delta\} = \{p(t)\} \quad (1.85)$$

Cette équation est une formule générale de l'équation du mouvement pour un système dynamique avec des amortissements et des forces de rappel linéaires. L'équation du mouvement devient ainsi :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + K\{\delta\} = \{p(t)\} \quad (1.86)$$

Selon le principe de la dynamique, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide et l'accélération de son centre d'inertie cela donne la relation suivante :

$$\{P(t)\} = -M\{a\} \quad (1.87)$$

Où  $\{a\}$  représente l'accélération du centre de la masse du système, et  $M$  est la matrice de masse. En combinant ces relations, l'équation du mouvement pour un système à un degré de liberté (DDL) amortie devient :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = -M\{a\} \quad (1.88)$$

### 3.3 Système Masse –Ressort (non amortie)

Le système le plus simple de vibrations est constitué d'une masse et d'un ressort, en mouvement libre, bien que ce système soit élémentaire, il permet d'expliquer la majorité des phénomènes vibratoires réactionnaires des situations réelles. Par conséquent, nous allons établir l'équation de mouvement en écrivant l'équilibre des forces internes et externes qui agissent sur le système.

### 3.4 Equations du mouvement

Pour un système libre (sans fores externes appliquées), nous posons  $p(t)=0$  dans l'équation du mouvement cela nous donne l'équation de la vibration libre. En pratique, l'amortissement qu'un effet négligeable sur la fréquence naturelle et le mode vibration du système, ce que permet de simplifier l'équation. En négligeant la force d'amortissement, l'équation du mouvement devient :

$$[K]\{\delta\} + [M]\{\ddot{\delta}\} = 0 \quad (1.89)$$

ainsi :

$[K]$  = Est la matrice de rigidité.

$[M]$  = Est la matrice de masse.

$\{\delta\}$  = Est le vecteur des déplacements.

$\{\ddot{\delta}\}$  = Est le vecteur des accélérations.

On suppose que la structure subit un mouvement harmonique simple avec la forme suivante pour les déplacements :

$$\{\delta\} = \{\emptyset\} \cos(\omega t) \quad (1.90)$$

Où  $\{\emptyset\}$  est le vecteur des amplitudes des déplacements.

$\omega$  = Est la fréquence naturelle du système (en rad /s)

$t$  = Temps (s)

En remplaçant  $\{\delta\} = \{\emptyset\} \cos(\omega t)$  dans l'équation, on obtient l'équation homogène suivante :

$$[K]\{\emptyset\} = \omega^2[M]\{\emptyset\} \quad (1.91)$$

Cette équation décrit la relation entre la matrice de rigidité  $[K]$ , la matrice de masse  $[M]$  et les amplitudes des déplacements  $\{\emptyset\}$ . Pour un mouvement harmonique simple, une autre manière d'écrire cette équation est :

$$[K] - \omega^2[M]\{\emptyset\} = 0 \quad (1.92)$$

Cette équation caractéristique permet de déterminer les fréquences naturelles du système. En effet, pour que cette équation soit vérifiée, il doit exister une solution qui n'est pas nulle. Cela implique que le déterminant de la matrice  $([K] - \omega^2[M]) = 0$  c'est-à-dire qu'elle doit être nulle.

Donc :

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (1.93)$$

Cela permet de calculer les valeurs propres  $\omega^2$  qui correspondent au carré des fréquences naturelles du système [14].



**Chapitre 2**

## 2.1 Introduction

Les structures de génie civil et de génie mécanique, telles que les ponts, les bâtiments et les machines, sont constamment soumises à des forces externes et à des conditions environnementales variées. Ces contraintes peuvent entraîner l'apparition de dégradations plastiques, de décollements ou encore de délaminages. La détection précoce de ces endommagements est cruciale pour assurer la sécurité, la fiabilité et la durabilité des structures, et pour prévenir les défaillances catastrophiques. La détection et la localisation des endommagements sont donc des domaines de recherche essentiels pour maintenir l'intégrité structurelle.

Les méthodes de détection des endommagements visent à identifier les signes de dégradation avant qu'ils ne deviennent critiques, permettant ainsi une intervention rapide et une maintenance efficace. Ces méthodes peuvent être basées sur des techniques visuelles, les ultrasons, la thermographie, les rayons x et les courants de Foucault, ainsi que sur des approches basées sur les vibrations et l'analyse modale.

Les approches basées sur les vibrations, en particulier, ont gagné une popularité en raison de leur capacité à surveiller les changements dans les caractéristiques dynamiques des structures, telles que les fréquences naturelles, les formes modales et l'amortissement. Ces paramètres modaux sont influencés par les propriétés physiques de la structure, comme la masse et la raideur. Les méthodes de détection des endommagements par les vibrations permettent de détecter les altérations des réponses dynamiques causées par les dommages structurels et de localiser ces dommages avec précision.

Ce travail vise à explorer les différentes méthodes de détection et de localisation des endommagements, en mettant l'accent sur les approches basées sur les vibrations. Enfin, nous examinerons en particulier comment la détection précoce des dommages est essentielle pour la longévité des structures en génie mécanique et civil.

## 2.2 Méthodes de détection basée sur les vibrations

La détection des endommagements dans les structures est un enjeu majeur pour garantir leur sécurité et leur longévité. Dans ce contexte, les méthodes de détection basées sur les vibrations se sont imposées comme des outils précieux. Elles permettent de surveiller l'évolution des propriétés dynamiques des structures, telles que la rigidité, la masse ou l'amortissement, qui sont directement influencées par l'apparition des dommages.

Ces méthodes reposent sur l'analyse des paramètres modaux, tels que les fréquences naturelles, les formes modales et les coefficients d'amortissement. Lorsqu'un endommagement survient, ces paramètres sont modifiés, offrant ainsi une signature vibratoire caractéristique de l'état de la structure.

Bien que la détection des dommages par vibrations présente l'avantage de pouvoir surveiller des structures complexes et inaccessibles sans contact direct, elle fait face à des défis techniques. Il est parfois difficile d'exciter certaines fréquences, notamment dans les structures massives, et les conditions environnementales pouvant affecter la précision des mesures. Cependant, les avancées technologiques récentes, telles que les capteurs sans contact et les améliorations des méthodes d'analyse modale expérimentales, ont permis de surmonter certains de ces obstacles [15].

Selon la définition de Rytter [16], l'identification des endommagements, peut-Être, Classe en quatre niveaux :



*Figure 4 : schéma des 4 niveaux de détection des endommagements*

Jusqu'à maintenant, la plupart des méthodes d'identification d'endommagements basées sur la réponse vibratoire ne permettent que des identifications de niveau 1 et de niveau 2. Dans la section 2.2 du chapitre 2, nous allons présenter l'ensemble des méthodes de détection actuelles en les classant dans les catégories suivantes :

1. Méthodes basées sur les fréquences propres.
2. Méthodes basées sur les déformations modales.
  - Méthodes basées directement sur les déformations modales.
  - Méthodes basées sur les courbures modales.
  - Méthodes basées sur la flexibilité.
  - Méthodes basées sur la rigidité modale.
3. Méthodes dans le domaine des fréquences (frequency response function (FRF)).
4. Méthodes le domaine temporel et temps-fréquence (HHT et To).
5. Méthodes basées sur l'énergie de déformations modales.
6. Méthodes basées sur le vecteur résiduel modal [17].

### **2.1 Méthodes basées sur les fréquences propres**

La variation des fréquences naturelles d'une structure, due à des changements de masse et de rigidité, est une technique employée pour le développement de méthodes d'identification d'endommagements. Plusieurs chercheurs ont utilisé les fréquences propres comme indicateur clé pour cette identification. , Salawu [18] a résumé les conclusions de 65 articles portant sur la détection d'endommagements à partir des changements de fréquences, soulignant la pertinence de cette approche.

Une raison majeure de l'adoption des techniques d'identification d'endommagements basées sur les fréquences est leur sensibilité à divers types de dommages, qu'ils soient locaux ou globaux. De plus, ces fréquences peuvent souvent être déterminées facilement dans de nombreuses applications, parfois avec l'utilisation d'un seul capteur.

Cependant, un défi important réside dans le fait que les fréquences propres peuvent être facilement influencées par des variations environnementales telles que la température ou l'humidité. Cette sensibilité pose un problème pour une détection fiable des endommagements dans des structures réelles.

Cawley et Adams[19] ont présenté une méthode de détection et de localisation d'endommagements basée sur les fréquences. Leur approche reposée sur l'idée que le ratio de changement des fréquences de deux modes est une fonction permettant de localiser l'endommagement. Pour ce faire, les changements théoriques des fréquences dus à différentes positions de défauts sont calculés et comparés aux valeurs mesurées. Des applications de cette méthode pour les poutres en béton précontraint et en acier ont montré qu'il faut au moins 9 fréquences pour obtenir une précision raisonnable. De plus, la précision de cette méthode dépend de la qualité du modèle théorique et de la géométrie de l'endommagement. Bien que cette méthode soit appréciée pour certains types d'endommagements, elle peut ne pas fonctionner pour d'autres configurations. Des résultats similaires ont été présentés Antonino Marassi [22] présente une technique inverse pour localiser les effets d'entailles dans des poutres en acier en utilisant les changements de fréquence modale. Sous l'hypothèse d'une absence de modification de la masse, les changements des fréquences sont corrélés avec les coefficients de Fourier de la variation de rigidité, qui est inconnue. Cette méthode a donné des résultats satisfaisants aussi bien pour la détection que pour la localisation spatiale des défauts. D'autres résultats pertinents sont présentés par Maeck [23]. Il a noté que ces méthodes ne sont pas capables de distinguer deux défauts symétriques dans une structure symétrique. De plus, ces méthodes présentent des limites lorsque le nombre de fréquences disponibles est inférieur au nombre de paramètres inconnus. Cependant, la difficulté majeure de l'application de ces méthodes sur des structures réelles est que la valeur des fréquences est facilement influencée par les conditions environnementales.

Zhang et al[24] ont employé la surface de décalage des fréquences fondamentales pour détecter les dommages. Leur méthode consiste à mesurer les fréquences à différentes positions sur une plaque après y avoir déplacé une masse auxiliaire. Les variations de fréquences ainsi observées permettent d'identifier les dommages. De même, Lie et al. [25] ont utilisé une méthode de décalage de fréquence causée par une masse auxiliaire pour détecter des dommages sous forme de fente aiguë dans un cylindre de gaz naturel comprimé (CNG).

Wang et al. [26] ont appliqué une masse auxiliaire sur un modèle de voie ferrée pour détecter des supports endommagés sous la voie, tels que des fixations desserrées ou manquantes et du ballast dégradé. Cette méthode s'est avérée particulièrement efficace pour identifier les fixations manquantes ou un ballast gravement endommagé.

Ilanco et al [27] ont étudié les variations de fréquence lorsqu'un corps mobile passe au-dessus d'une fissure sur une plaque, en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz. Ils ont observé un décalage soudain de fréquence lorsque le corps traverse une fissure partielle ou complète. Ce modèle simplifié peut servir à détecter des fissures dans un pont en identifiant les points où ces décalages soudains de fréquence se produisent.

Cao et al [28] ont utilisé les changements de fréquence d'un système véhicule-pont pour localiser des dommages. Une analyse par éléments finis a permis d'établir la relation entre ces changements de fréquence et la gravité des dommages, dont l'amplitude variait de 15% à 25%. Il est important de noter que cette méthode n'a pas été testée pour des dommages mineurs, ce qui souligne la nécessité de comparer les changements de fréquence avec l'intégrité structurelle pour des dégradations de faible ampleur.

L'approche de Dubey et al [29] repose uniquement sur l'utilisation des fréquences naturelles et des modes calculés par éléments finis (EF) pour estimer les propriétés des dommages. Cette méthode permet de suivre l'évolution des fréquences en fonction des réductions de la rigidité en flexion, ce qui offre un moyen de localiser et de quantifier les dommages.

Minkyu et al [30] ont mis en œuvre un système de surveillance basé sur la vision pour mesurer les fréquences propres des poutres en porte-à-faux. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux fournis par un vibromètre laser Doppler (LDV). Leur approche a démontré que les fréquences propres peuvent être un indicateur fiable pour détecter et quantifier les dommages dans les structures. Cependant, bien que le système soit efficace, il ne permet pas encore de fournir des estimations en temps réel de la localisation et de la gravité des dommages.

Pei et al [31] ont démontré que la corrélation non linéaire entre les fréquences naturelles multi-ordres constitue un indicateur clé et sensible aux dommages. La méthode qu'ils proposent permet de maintenir une précision élevée dans l'identification des dommages, même en présence de variations des conditions environnementales et structurelles.

## 2.2 Méthodes basées sur des déformées modales

### 2.2.1 Méthodes basées directement sur des déformées modales

Les déformées modales décrivent la distribution spatiale de l'amplitude de vibration pour chaque fréquence de résonance d'une structure. Plusieurs techniques d'identification d'endommagements s'appuient directement sur ces déformées modales ou sur leurs dérivées.

Allemang et Brown [32] ont introduit le "Modal Assurance Criterion" (MAC), une méthode qui compare deux ensembles de déformées modales correspondant à deux états différents d'une structure pour détecter des dommages. Le coefficient MAC est utilisé comme un indice de similarité entre deux modes. Supposons que  $\Phi^A$  (de taille  $n \times m_A$ ) et  $\Phi^B$  (de taille  $n \times m_B$ ) représentent deux collections de déformées modales correspondant à deux états différents de la structure. Ici,  $n$  est le nombre de degrés de liberté et  $m_A$ ,  $m_B$  sont les nombres de modes à considérer pour les états A et B respectivement. Le coefficient MAC est défini par :

$$MAC_{(i,k)} = \frac{|\sum_{i=1}^n \phi_{ij}^A \phi_{ik}^B|^2}{(\sum_{i=1}^n |\phi_{ij}^A|^2)(\sum_{i=1}^n |\phi_{ik}^B|^2)} \quad (1.94)$$

où :

$MAC_{(i,k)}$  : C'est le coefficient de similarité entre le mode  $j$  de l'état A et le mode  $k$  de l'état B.

$\phi_{ij}^A$  : La valeur du mode  $j$  (l'état A) ou point de mesure  $i$ .

$\phi_{ik}^B$  : La valeur du mode  $k$  (l'état B) ou point de mesure  $i$ .

$\sum_{i=1}^n |\phi_{ij}^A \phi_{ik}^B|^2$  : C'est le produit scalaire entre le mode  $j$  à l'état A et le mode  $k$  à l'état B.

$\sum_{i=1}^n |\phi_{ij}^A|^2$  : La norme au carré du mode  $j$  à l'état A.

$\sum_{i=1}^n |\phi_{ik}^B|^2$  : La norme au carré du mode  $k$  à l'état B.

La valeur  $MAC_{j,j}$  peut être utilisée comme un indicateur d'endommagement. Lorsque le coefficient MAC est égal à 1, les deux modes sont parfaitement corrélés ; au contraire lorsque le coefficient MAC est égal à 0, les deux modes sont complètement dé-corrélés.

Chez Lieven et Ewin [33], dans le cas  $m_A = m_B = m$ , les coefficients « Coordinat Modal Assurance Criterion » (CoMAC) sont utilisés pour localiser l'endroit où les déformées modales ne sont pas corrélées :

$$CoMAC = \frac{|\sum_{i=1}^m \phi_{ij}^A \phi_{ij}^B|^2}{\sum_{j=1}^m (\phi_{ij}^A)^2 \sum_{i=1}^m (\phi_{ij}^B)^2} \quad (1.95)$$

avec :

CoMAC : C'est le Coordinat Modal Assurance Criterion, une mesure de similarité entre Deux modes  $j$  des états A et B.

$\sum_{i=1}^m |\phi_{ij}^A \phi_{ij}^B|^2$  : Le produit scalaires entre  $j$  des états A et B.

$\sum_{i=1}^m (\phi_{ij}^A)^2$  : La norme au carré du mode  $j$  dans l'état A.

$\sum_{i=1}^m (\phi_{ij}^B)^2$  : La norme au carré du mode  $j$  dans l'état B.

$m$  : Le nombre de degrés de liberté (ou points de mesure) dans la structure.

L'utilisation de ces deux techniques pour l'identification d'endommagement a donné de bons résultats dans certains cas. Cependant, ces techniques sont principalement appliquées sur des données numériques et tendent aujourd'hui à être remplacées par d'autres méthodes plus sensibles.

Rongrong Hou et al [34] ont développé une approche combinée, intégrant la régularisation des fréquences naturelles et des rigidités (SRF) ainsi que les facteurs d'échelle modale (MSF), pour détecter les dommages dans une structure. Leur méthode repose sur une optimisation multi-objective

G.M.Harizam et Noor fawzi [35] ont utilisé le filtre Savitzky-Golay et la Méthode des Sensibilités Globales (GSM) pour analyser une structure en poutre. Leurs travaux ont démontré que ces méthodes sont utiles pour identifier et localiser les dommages avec efficacité.

Gorige, R [36] a mis au point un indice basé sur la première forme modale d'une poutre afin d'identifier les zones endommagées. Cette technique s'est avérée efficace non seulement pour la détection des dommages, mais aussi pour fournir une estimation précise de leur taille.

### 2.2.2 Méthodes basées sur la courbe modale :

Plutôt que d'utiliser les déformées modales directement pour obtenir des informations sur le défaut (la source des changements vibratoires), une autre façon est d'étudier leurs dérivées secondes ou les courbes modales. Pour le cas d'une poutre, la relation entre la courbure et le moment fléchissant en un point s'écrit :

$$v''(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (1.96)$$

avec :

$v''(x)$  : Le Déplacement transversale.

$M(x)$  : Moment fléchissant à une section.

$E$  : Module d'élasticité.

$I$  : Moment d'inertie de la section transversale.

Les courbures modales peuvent être déterminées à partir des déformées modales en utilisant la formule suivante :

$$v_i'' = \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} \quad (1.97)$$

avec :

$h^2$  : La distance entre 2 nœuds.

$v_i''$  : C'est la courbure modale, ou la dérivée seconde approximée de la déformée modale

Au point  $i$ .

$v_{i+1}$  : La déformée modale au point  $i + 1$ .

$v_{i-1}$  : La déformée modale au point  $i - 1$ .

Plusieurs études, notamment celle de Pandey, Biswas et Samman [37], ont démontré que la courbure modale est un indicateur plus sensible pour détecter les dommages que les coefficients MAC (Modal Assurance Criterion) et CoMAC (Coordinate Modal Assurance Criterion), qui sont basés sur les déformées modales brutes. Yoon et al [38] ont utilisé la méthode de lissage avec intervalle ("gapped smoothing method") principalement pour localiser la variabilité structurelle dans une structure sans avoir besoin de données de référence provenant d'une structure intacte. Cette méthode est efficace pour identifier des zones de variation de rigidité, ce qui permet de détecter des défauts ou des dommages (Ratcliffe [39], Ratcliffe, Bagairi) [40]). Sur des déformées modales, par exemple pour le cas d'une poutre, la fonction analytique des modes s'exprime ainsi :

$$\phi_n(x) = A(\cos \beta_n x + \operatorname{ch} \beta_n x) + B(\sin \beta_n x + \operatorname{sh} \beta_n x) \quad (1.98)$$

avec :

$\phi_n(x)$  : La forme modale ou la déformation de la structure à la  $n$ ème fréquence propre ou mode de vibration.

$A$  et  $B$  : Des constantes déterminées par les conditions aux limites du problème.

$\beta_n$  : Le paramètre d'onde ou le nombre d'onde associé à la  $n$ ème fréquence propre.

Cos et Sin : Les fonctions trigonométriques classiques.

Cosh et Sinh : Les fonctions hyperboliques.

Ainsi, les coefficients  $A$  et  $B$  et  $\lambda_n$  peuvent être estimés à partir des modes identifiés expérimentalement. Les courbures modales sont ensuite déterminées en effectuant la dérivée seconde des fonctions des modes propres estimés.

Pour détecter l'endommagement, un indice d'endommagement est utilisé, tant pour un mode spécifique que pour l'ensemble des modes. Il est défini par :

$$\delta_n = \phi_n^{(d)} - \phi_n'' \quad (1.99)$$

$$\delta_S = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^{(d)} - \phi_n''}{\max|\phi_n^{(d)} - \phi_n''|} \quad (1.100)$$

avec :

$\delta_S$  : L'indicateur de la différence ou de l'écart entre les courbures.

$\phi_n^{(d)}$  : La courbure modale estimée à partir des données expérimentales.

$\phi_n''$  : La courbure modale théorique ou de référence.

$\delta_S$  : L'indice d'endommagement global.

N : Le nombre totale de modes prise en compte dans l'analyse.

$\max|\phi_n^{(d)} - \phi_n''|$  : La valeur maximale de la différence absolue entre les courbures modales mesurées et théoriques sur l'ensemble des modes avec deux applications correspondant aux deux types de défauts fins et larges.

Les résultats obtenus sont concluants cependant, les cas de défauts multiples n'ont pas été étudiés dans cette analyse.

Selon Ciambella et verstroni [41] ils sont réussis à éviter cet Inconvénient en Utilisant Une solution perturbatrice, ou ils ont démontré que les Courbures modales Ne permettent Pas De déterminer la localisation des Endommagements si elles ne sont pas Correctement Traitées, ainsi les écrivains ont Développé une nouvelle méthode de filtrage Pour les Courbures, ce qui permet une Localisation efficace des endommagements.

Prenan Qiao, Lu, Lestari, Wang [42] ont appliqué cette méthode pour détecter le délaminage dans les panneaux composites. Ils ont utilisé deux systèmes de mesure et un capteur micromètre pour mesurer la forme du mode de courbure, puis ont employé des algorithmes de détection de dommages relativement nouveaux pour évaluer la position de la couche et la taille du défaut, en ne considérant qu'un seul mode.

D'après l'étude menée par Pandey et al[43], ils ont indiqué que le changement absolu de la courbure de la forme des modes peut être un indice efficace pour identifier les défauts dans les structures. La méthode des différences finies centrales a été utilisée pour obtenir la courbure en un point de la structure :

$$\phi_{i,j}'' = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{h^2} \quad (1.101)$$

où h : Est la distance entre les points de mesure.

$\phi_{i,j}$  : Est défini comme les déplacements modaux de  $i^{eme}$  nœud le j mode la courbure modale (MSC) défini par Pandey et al [1] est donne par :

$$MSC_i = \sum_{j=1}^K \left| (\phi_{i,j}^{damag})'' - (\phi_{i,j}^{undamaged})'' \right| \quad (1.102)$$

Où :

K : Définit le nombre de modes considérés alternativement pour considérer l'effet des modes supérieurs pour détecter des dommages multiples.

Plusieurs équipes de recherche ont développé des méthodes innovantes pour détecter et localiser les dommages structurels en exploitant l'analyse des courbures modales et des fréquences naturelles. Celle de Dahak et al [44]. Ont mis au point une méthode de détection de dommages basée sur l'intersection de courbes. Cette approche utilise la courbure de la forme modale d'une structure intacte combinée aux fréquences mesurées. En analysant les variations des courbures modales et des fréquences naturelles, leur méthode permet de localiser efficacement les dommages, et Duc-tuaa et al[45] ont proposé une méthode d'analyse des courbures pour détecter les endommagements dans les structures de type poutre. Ils ont employé des coefficients de dommage le long de la poutre, dont les variations, associées à celles des fréquences naturelles, permettent de repérer les zones endommagées. Pour une localisation plus précise et une estimation de l'ampleur du dommage, ils ont ensuite eu recours à la décomposition en valeurs singulières (SVD), ainsi Dawari et Vesmawala [46] expliquent que les vecteurs propres avant et après l'apparition du dommage constituent la base de la détection des dégradations. La courbure de la forme modale d'une poutre, dans les conditions intactes et endommagées, peut ensuite être estimée numériquement à partir des formes modales de déplacement. Pour une section transversale de poutre avec une rigidité en flexion  $EI$ , soumise à un moment de flexion  $M(x)$ , la courbure  $K(x)$  à la position  $x$  est donnée par :

$$k(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (1.103)$$

Pour une poutre soumise à un moment donné, une réduction de la rigidité due à un endommagement (indiqué par \*) entraînera une augmentation de la courbure. Ainsi, la présence et l'étendue du dommage peuvent être estimées en mesurant le changement de la courbure de la forme modale.

Les courbures sont souvent calculées à l'aide de l'approximation par différences centrales :

$$k = \frac{\phi_{(j+1)i} - 2\phi_{ji} + \phi_{(j-1)i}}{l^2} \quad (1.104)$$

avec :

$i$  : Représente le numéro de la forme modale.

$j$  : Représente le numéro du nœud.

$\phi_{ij}$  : Indique le déplacement modal de la coordonnée  $j$  à la forme modale  $i$ .

$\Delta_x$  : Correspond à la distance entre les nœuds.

Le critère de courbure de la forme modale peut être défini comme la différence des courbures absolues ( $D$ ) entre la structure saine et la structure endommagée pour chaque mode, et peut être représenté comme suit :

$$\Delta = k^*(x) - k(x) \quad (1.105)$$

À l'emplacement d'un dommage, la valeur de la courbure de la forme modale est significativement plus élevée que celle des autres points. En se basant sur les différences de courbure entre les données mesurées pour la structure endommagée et la structure saine, il est ainsi possible d'identifier l'emplacement du dommage dans la structure

Seyed Majid et Ali Massumi [47] ont basé leur étude sur l'analyse de la courbure réelle et de la courbure estimée issues des modes de vibration d'une poutre. Lorsqu'une poutre subit un dommage, la courbure réelle de la zone affectée augmente en raison de la réduction de rigidité. La différence entre la courbure réelle et la courbure estimée est mesurée par l'indice  $DRECD(x)$ , défini comme suit :

$$\text{DRECD}(x) = \phi''_{(x)} - f(\phi(x)) \quad (1.106)$$

ou :  $\phi''_{(x)}$  est la courbure réelle.  $f(\phi(x))$  Est la courbure estimée à partir de la forme modale de la poutre l'estimation de la courbure entre deux points ( $x_m$  et  $x_n$ ) sur la poutre peut être exprimée par une fonction  $f(\phi(x))$  qui est une combinaison linéaire des déplacements aux points ( $x_m$  et  $x_n$ ). Leurs dérivée cette fonction est données par :

$$f(\phi(x)) = A\phi(x_m) + B\phi(x_n) + C(x_m, x_n) \quad (1.107)$$

Les coefficients A, B, et C sont déterminés en utilisant les conditions aux limites du problème.

où :

$$\phi''_{(x_m)} = f(\phi(x_m)) \quad (1.108)$$

et :

$$\phi''_{(x_n)} = f(\phi(x_n)) \quad (1.109)$$

Cela donne ainsi :

$$\frac{\phi(x_m)'' - \phi(x_n)''}{x_m - x_n} = \frac{f(\phi(x_m))'' - f(\phi(x_n))''}{x_m - x_n} \quad (1.110)$$

Ces relations garantissent que la courbure estimée aux points de frontière coïncide avec la courbure réelle à ces mêmes points. Pour calculer la courbure et ses dérivées à chaque point de la poutre, la méthode des différences centrales est utilisée. Par exemple, la première et la seconde dérivée sont données par les formules suivantes :

- **Rotations:**

$$\phi''_{(x_k)} = \frac{\phi_{(x_{k+1})} - \phi_{(x_{k-1})}}{2h} \quad (1.111)$$

- **Courbure :**

$$\phi''_{(x_k)} = \frac{\phi_{(x_{k+1})} - 2\phi_{(x_k)} + \phi_{(x_{k-1})}}{h^2} \quad (1.112)$$

$\Delta x$  est la distance entre les points de mesure.

Ces équations permettent de localiser les dommages dans une poutre en analysant les variations de la courbure, permettant ainsi une détection précise.

Randiligama et al [48] ont également utilisé la courbure des formes modales pour détecter des défauts dans les tours de refroidissement, en combinant ces données avec des réseaux de neurones. De manière similaire, Nguyen et wahab [34] ont associé l'approche de la courbure des formes modales avec des réseaux de neurones convolution- els pour détecter des dommages dans des dalles.

L'analyse de la courbure modale permet de repérer des modifications subtiles dans les zones endommagées, ce qui en fait un outil puissant pour l'identification des dégradations.

### 2.2.3 Méthodes basées sur la flexibilité

L'idée de ces méthodes est d'utiliser la matrice de flexibilité pour estimer le changement de la structure. Comme la matrice de flexibilité est définie comme l'inverse de la matrice de rigidité, chaque colonne représente le déplacement causé par une force d'unité appliquée à un degré de liberté. La matrice de flexibilité peut être estimée à partir des modes propres normalisés par rapport à la matrice de masse ( $\Phi^T M \Phi = I$ ), et les fréquences propres correspondantes :

$$F = \Phi \Omega^{-1} \Phi^T = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j^2} \Phi_j \Phi_j^T \quad (1.113)$$

Où  $\Omega = \text{diag}(\omega_i^2)$  est la matrice des valeurs propres. L'endommagement peut être détecté en comparant la matrice de flexibilité estimée à partir des modes mesurés de l'état endommagé avec celle estimée à partir des modes de l'état sain qui peuvent être déterminés avec la méthode des éléments finis.

La valeur complète de la matrice de flexibilité exige des mesures de tous les modes et de toutes les fréquences propres. En pratique, la matrice de flexibilité ne peut être approximée qu'avec certains premiers modes. A cause de la relation inverse avec le carré des fréquences, la matrice de flexibilité estimée converge rapidement avec l'augmentation de la valeur des fréquences. Donc, une bonne estimation de la matrice de flexibilité peut être obtenue avec quelques-uns des premiers modes Pandey et Biswas [49] et l'identification de l'endommagement en utilisant la matrice de flexibilité est plus sensible aux changements des modes de basse fréquence.

L'utilisation de la matrice de flexibilité comme indicateur d'endommagement a montré des résultats prometteurs. Maeck[23] a démontré son efficacité, bien que cette technique ait été principalement appliquée à des données numériques avec un seul défaut.

La comparaison de divers indicateurs d'endommagement a mis en lumière la supériorité de la flexibilité modale. Zaho et Dewolf [50] ont comparé les fréquences propres, les modes propres et les flexibilités modales dans le cadre d'une application numérique sur une structure à cinq degrés de liberté. Leurs résultats ont conclu que la flexibilité modale est le critère le plus sensible aux défauts.

De nouvelles méthodes basées sur la flexibilité continuent d'émerger comme celle de Berna [51] a présenté une méthode innovante basée sur des vecteurs de localisation d'endommagement (DLV) et Choi et al. [52] ont développé un Nouvel indice combinant la méthode de flexibilité et la méthode DI (damage Indicator) (cf.section suivante). Cette méthode a été testée à la fois sur des données avec Des Défauts multiples, les résultats ont montré qu'elle permet de localiser Simultanément Jusqu'à 4 défauts sur une poutre simple. Ont développé un nouvel indice combinant la méthode de flexibilité et la méthode DI (Damage Indicator, cf. section suivante). Cette approche a été testée sur des données présentant de multiples défauts et a démontré sa capacité à localiser simultanément jusqu'à quatre défauts sur une poutre simple. L'évaluation et la localisation des dommages grâce à la flexibilité modale ont également été améliorées par des approches plus analytiques et optimisées telle que Yan et Ren [53] ont proposé une expression fermée pour la sensibilité de la flexibilité modale en utilisant les dérivées des valeurs et vecteurs propres, afin de localiser et d'évaluer les dommages.

Seyedpour et Montazer [54] ont développé une méthode d'identification des dommages basée sur un indicateur de flexibilité et l'évolution différentielle. Cependant, des défis subsistent,

notamment en matière de coût computationnel. Ashory et al [55], liu et li [56], Masouni et al [57] ont souligné que dans le processus de construction des équations gouvernant les dommages, la matrice de coefficients doit être calculée à plusieurs reprises. Pour les modèles par éléments finis à grande échelle, un grand nombre d'éléments nuls dans l'expansion de la rigidité des éléments, utilisée pour obtenir la matrice de coefficients, peut entraîner d'importantes quantités de calculs inutiles. Pour pallier ces limitations, de nouvelles stratégies sont explorées, Reynders et al [58] ont suggéré une approche reposant sur la flexibilité quasi statique. La combinaison de la matrice de flexibilité modale avec des forces virtuelles entraîne des contraintes non nulles sur de petites parties de la structure, permettant ainsi de rechercher des changements de raideur. Les chercheurs ont prouvé que lorsque la relation entre les contraintes et les déformations est proportionnelle, le rapport entre certaines combinaisons de déformations avant et après les endommagements révèle une variation de la raideur qui est l'inverse de la raideur locale. Cette méthode est appelée flexibilité locale. Dans la même année, Li et al [59] ont présenté une nouvelle approche basée sur le changement de la matrice de flexibilité modale généralisée pour localiser et quantifier des endommagements. Cette approche, en comparaison avec la matrice de flexibilité modale classique, réduit l'effet de troncature des modes d'ordre supérieur. Kazenni et al [60] ont utilisé la variation de la flexibilité modale pour détecter des défauts sur des structures en plaques minces. L'indicateur d'endommagement est formulé à partir de la matrice de flexibilité modale et des équations différentielles de variations des efforts.

#### 2.2.4. Méthodes basées sur la rigidité modale

L'idée est d'utiliser la différence relative de la rigidité modale entre avant et après l'endommagement pour détecter, localiser et aussi quantifier le défaut.

Quelque modification d'algorithme sont développées dans la méthode DI (damage indicator) par Stubbs et al [61]. Considérant une poutre d'Euler Bernoulli, la rigidité modale du mode  $i$  s'écrit :

$$k_i = \int_0^L EI(\phi_i''(x))^2 dx \quad (1.114)$$

où :

$k_i$  : Est la rigidité modale du mode  $i$

$l$  : Est la longueur de la poutre

$E$  : Est le module de Young

$I$  : Est le moment d'inertie de la section transversale de la poutre

$\phi_i''(x)$  : Est la forme modale du mode  $i$  à la position  $x$

Si la poutre est discrétisée en  $N$  éléments, la contribution de l'élément  $j$  à la rigidité modale du mode  $i$  peut être exprimée comme suite :

$$k_{ij} = \int_{\Omega_j} (EI)_j (\phi_i''(x))^2 dx \quad (1.115)$$

Le ratio de rigidité modale de l'élément  $\Omega_j$  est défini par :

$$F_{ij} = \frac{k_{ij}}{k_i} \quad (1.116)$$

$F_{ij}$  : C'est le ratio de rigidité modale de l'élément  $\Omega_j$ .

$k_{ij}$  : C'est la rigidité modale de l'élément  $\Omega_j$ .

$k_i$  : C'est la rigidité modale totale du système.

Etant donné que  $F_{ij} \approx 1$  et  $F_{ij}^{(d)} = 1$  (par exemple pour une poutre discrétisée en 50Eléments,  $F_{i,j} \approx 0,02$  et  $F_{i,j}^{(d)} \approx 0,02$ , on peut considérer que  $\frac{1+F_{i,j}}{1+F_{i,j}^{(d)}} = 1$  en autre, en supposant que la rigidité en flexion est constante sur toute la longueur de l'élément  $\Omega_j$ , cette approximation permet de simplifie les calcule en peu l'exprimées ainsi :

$$\frac{(EI)_j}{(EI)_j^{(d)}} \approx \frac{\left(\int_{\Omega_j} (\phi_i''^{(d)}(x))^2 dx + \int_0^L (\phi_i''^{(d)}(x))^2 dx\right) / \left(\int_0^L (\phi_i''^{(d)}(x))^2 dx\right)}{\left(\int_{\Omega_j} (\phi_i''^{(d)}(x))^2 dx + \int_0^L (\phi_i''^{(d)}(x))^2 dx\right) / \left(\int_0^L (\phi_i''^{(d)}(x))^2 dx\right)} \quad (1.117)$$

où:

$(EI)_j$  : Est la rigidité en flexion de l'élément  $i$ .

$(EI)_j^{(d)}$  : Est la rigidité en flexion estimée pour l'élément  $j$  dans l'état d'endommagement.

$\phi_i(x)$  : Est la forme modale du mode  $i$  à la position  $x$ .

$\Omega_j$  : Représente l'élément  $j$  sur la poutre discrétisée.

$L$  : Est la longueur totale de la poutre.

Les auteurs introduissent l'indicateur d'endommagement  $\beta_{ij}$  :

$$\beta_{ij} = \frac{f_{ij}^{(d)}}{f_{ij}} \text{ Avec } : f_{ij} = \left(\int_{\Omega_j} (\phi_i''(x))^2 dx + \int_0^L (\phi_i''(x))^2 dx\right) / \left(\int_0^L (\phi_i''(x))^2 dx\right) \quad (1.118)$$

Pour créer un indice en utilisant  $n$  modes différentes, ils introduisent l'indicateur d'endommagement  $\beta_j$  :

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^n f_{ij}^{(d)}}{\sum_{i=1}^n f_{ij}} \quad (1.119)$$

Pour que l'indicateur d'endommagement soit indépendant du type de structure, ils proposent l'indicateur d'endommagement  $Z_j$  :

$$Z_i = \frac{\beta_j - \bar{\beta}}{\sigma_\beta} \quad (1.120)$$

Où :

$\bar{\beta}$  Est la moyenne et  $\sigma_\beta$  l'écart de la suite  $\beta_j$ . Des vecteurs de l'indice d'endommagement  $z_j$  sont utilisés pour localiser et quantifier le défaut. La faisabilité et la précision de cette méthodes dépend du nombre de points de mesure (c'est-à-dire du nombre de capteurs).

Choi et al[62] ont développé la méthode de l'indice de dommage modifié (MDI) pour détecter les dommages dans une poutre en bois. Leur approche consiste à reconstruire les modes propres à partir de ceux identifiés expérimentalement, en utilisant une interpolation polynomiale de degré 3 par morceaux (ou 'spline cubique'). Ensuite, ils calculent la dérivée seconde de ces modes propres pour obtenir les courbures modales, qui sont utilisées pour déterminer les indices de dommage (DI). La méthode proposée est capable de localiser les dommages à partir de données expérimentales. Dans certains cas de défauts multiples, l'utilisation des modes propres de fréquence plus élevée s'est avérée plus efficace pour identifier les zones endommagées.

### 2.3 Méthodes dans le domaine des fréquences

Au lieu d'utiliser les paramètres modaux pour détecter les défauts, une autre approche consiste à analyser directement les réponses en fréquences, également appelées Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF).

Wang et al.[63] ont développé une méthode innovante basée sur les FRF pour identifier les dommages dans des structures composées de barres en acier. Cette méthode a montré de bons résultats lorsqu'elle a été appliquée à des données numériques. Cependant, lorsqu'elle a été utilisée sur des données expérimentales, les résultats se sont révélés moins concluants. Les auteurs ont conclu que cette approche n'était pas efficace pour détecter certains petits défauts, comme les fissures.

Sampaio et al[64] proposé une méthode utilisant la différence de courbure des FRF (Fonction de Réponse en Fréquence) exprimer par :

$$\alpha''(\omega)_{i,j} = \frac{\alpha''(\omega)_{i+1,j} - 2\alpha''(\omega)_{i,j} + \alpha''(\omega)_{i-1,j}}{h^2} \quad (1.121)$$

Ou  $\alpha_{i,j}$  est la « repentance FRF » mesure au point  $i$  suit à une force appliquée au point  $j$  la Somme des différences absolues des FRF pour plusieurs fréquence est ensuite calculée :

$$\Delta\alpha''_{i,j} = \sum_w \left| \alpha''(\omega)''^{(d)}_{i,j} - \alpha''(\omega)_{i,j} \right| \quad (1.122)$$

Finalement la somme pour plusieurs forces est calculée et utilisées comme un indicateur d'identification d'endommagement :

$$S_i = \sum_j \Delta\alpha''_{i,j} \quad (1.123)$$

Les résultats obtenus à partir des données numériques ont démontré que la méthode est capable de localiser le défaut même en présence de bruit lorsqu'elle est comparée à d'autres méthodes (comme la méthode DI) sur un cas réel, cette méthode semble offrir de meilleures performances.

Maia et al[65] ont proposé une nouvelle technique, dénommée « Indice De Dommage basé sur la FRF » (FRF\_DI), qui utilise la FRF associée à un indice d'identification des dommages, calculé à l'aide de la formule ci-dessous :

$$FRF\_DI_j = \sum_{\omega} \sum_j \beta_{i,j}(\omega) \quad (1.124)$$

Avec :

$$\beta_{i,j}(\omega) = \frac{\left( (\alpha''^{(d)}_{i,j}(\omega))^2 + \sum_{k=1}^N (\alpha''^{(d)}_{k,j}(\omega))^2 \right) \sum_{k=1}^N \left( (\alpha''^{(d)}_{k,j}(\omega))^2 \right)}{\left( (\alpha''^{(d)}_{i,j}(\omega))^2 + \sum_{k=1}^N (\alpha''^{(d)}_{k,j}(\omega))^2 \right) \sum_{k=1}^N \left( (\alpha''^{(d)}_{k,j}(\omega))^2 \right)} \quad (1.125)$$

Ils ont comparé la méthode FRF\_DI avec d'autres techniques basées sur les modes propres les courbures modales et la méthode DI, en l'appliquant à des cas numériques et expérimentaux sur une poutre présentant un seul défaut, ils ont constaté que la méthode FRF\_DI est plus efficace pour localiser les défauts.

H.Y.Hwang, C.Kim[66] ont également développé une méthode de détection des dommages structuraux en utilisant des FRF pour localiser et évaluer la gravité des dommages de manière similaire. Leur approche utilise plusieurs variables communes pour simplifier les calculs.

Cependant, leur méthode se distingue par l'utilisation d'une approche différente dans l'analyse des matrices de rigidité et l'application des équations de contrainte.

Pour améliorer la robustesse face au bruit, Furukawa et al [67] ont proposé d'autres méthodes basées sur les FRF, intégrant une technique de réduction des erreurs causées par le bruit. Ils ont conclu que la méthode présentée permet une localisation précise, même en présence de bruit significatif.

Wang et al [68] ont utilisé des fonctions de réponse en fréquence partiellement mesurées pour identifier les propriétés dynamiques des articulations au sein d'une structure composée de sous-structures et de structures articulaires.

Salehi et al[69] ont présenté une méthode basée sur un modèle pour la localisation des dommages structurels utilisant les données de la FRF. La méthode a été vérifiée avec succès par une étude de cas numérique. Les études expérimentales montrent qu'elle fonctionne bien lorsqu'on utilise la partie réelle des formes FRF, mais les résultats sont moins indicatifs lorsqu'on utilise la partie imaginaire. La méthode proposée a l'avantage d'utiliser directement les FRF mesurées sans nécessiter d'effectuer une analyse modale préalable.

Mohammad wasif khan et al [70] ont proposé un algorithme de détection des dommages utilisant la FRF pour localiser les dommages et la méthode IMSE pour estimer leur gravité. Cette approche est plus efficace que les méthodes traditionnelles basées sur la forme modale. Elle nécessite seulement un capteur et réduit les coûts de calcul, pouvant être testée sur une structure réelle en laboratoire. Pour la détection des dommages dans une structure, l'équation de réponse dynamique de base pour un système à un degré de liberté est exprimée par :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad (1.126)$$

En conditions de vibration libre amortie, la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) pour un système à un degré de liberté peut être exprimée par :

$$H(\omega) = -\omega(M + K) \quad (1.127)$$

Les FRF analytiques sont mesurés sont présente par :

$$[H^*(\omega)] = [H(\omega) + \omega[M]] \quad (1.128)$$

Il est supposé que la masse de la structure reste constante et que la raideur change :

$$\Delta K = [H] - [H^*] \quad (1.129)$$

En multipliant par  $[H^*]$  on obtient :

$$[H^*][\Delta k] = [H^*][H] - [H^*] \quad (1.130)$$

Sur la base des FRF le paramétré  $\beta_{1,i}$  sera calculé comme suite :

$$\beta_{1,i} = ([H^*])^*[H](:, i) - [I](1, i) \quad (1.131)$$

Hong et al[71] ont validé un algorithme de mise à jour de modèle basé sur les FRF. Cette approche a été testée avec succès sur les données expérimentales d'une structure de cisaillement à quatre étages. La méthode vise à minimiser l'écart entre les FRF analytiques et

expérimentales, ces dernières étant calculées à partir de l'excitation dynamique et des réponses structurelles mesurées simultanément.

Nguyen et al [72] ont intégré la fonction de réponse en fréquence et la mise à jour du modèle pour détecter l'emplacement et le niveau des dommages dans une poutre en acier simplement supportée.

Esfandiari et al [73] ont présenté une nouvelle méthode de mise à jour du modèle basée sur la sensibilité des changements des composantes principales (PC) des fonctions de réponse en fréquence. L'estimation des dommages structurels, ainsi que l'identification de leur emplacement et de leur gravité, sont réalisées grâce à une relation de sensibilité innovante. Cette relation est dérivée en incorporant des données d'analyse en composantes principales (PCA) obtenues à partir de réponses structurelles incomplètes mesurées, dans une formulation mathématique. Elle est ensuite résolue par la méthode des moindres carrés. Pour démontrer la performance de la méthode proposée, celle-ci a été appliquée à un modèle en treillis et à un modèle en ossature.

Jiawang et al [74] ont proposé une méthode de détection des dommages basée sur les FRF et un critère de corrélation CSAS. Validée par des simulations et des tests en laboratoire, cette approche a montré que la plage de fréquence entre les deux premières fréquences naturelles était particulièrement sensible aux dommages. L'augmentation des points de mesure a amélioré la précision de l'identification, et la méthode a démontré sa robustesse face aux erreurs expérimentales et au bruit, offrant ainsi une solution efficace pour la surveillance des structures en temps réel.

Esfandiari et al [75] ont évalué la sensibilité de la fonction de réponse en fréquence pondérée. Ils ont reformulé les équations de sensibilité pondérée en se basant sur une définition différente des paramètres inconnus et ont étudié plusieurs approches de solution. Leurs travaux ont démontré que la méthode des moindres carrés, utilisant des paramètres structurels normalisés comme variables inconnues, est la meilleure méthode d'estimation des paramètres. Pour prouver les performances de cette méthode, elle a été appliquée avec succès à un modèle en treillis et à un modèle en ossature.

Mohammad Hadi Jalali et D.Geff Rideout [76] ont développé une méthode de détection des dommages pour sous-structures en utilisant les FRF. Leur approche consiste à isoler la sous-structure principale, tout en considérant les autres sous-structures comme non endommagées. En combinant les FRF de la structure endommagée et des sous-structures principales, un découplage complet est possible. Cette méthode a été utilisée pour mettre à jour un modèle par éléments finis (EF) afin de localiser, détecter et quantifier les dommages. Les résultats des études de cas numériques et expérimentales ont montré que la méthode était précise et efficace pour identifier et quantifier les dommages dans la sous-structure principale, validant ainsi l'approche FRF.

Blaz Kurenta [77] a utilisé les FRF pour détecter les dommages dans les structures grâce à des expériences. Il a obtenu des FRF de haute qualité, permettant d'analyser les modes de vibrations et de comparer les résultats avec des modèles par éléments finis. Sa méthode a amélioré la précision des modèles et a permis de localiser les dommages de manière fiable,

tout en optimisant les simulations pour mieux comprendre le comportement dynamique des structures.

### 2.4 Méthodes dans le domaine temps-fréquence

L'avantage de ces méthodes est que les données peuvent être obtenues directement à partir des réponses vibratoires en temps indépendamment du domaine modal. Les deux techniques les plus utilisées sont la transformation de Hilbert-Huang (HHT) et la transformation en ondelettes (TO).

Yang et al [78] ont proposé deux méthodes pour tirer des informations sur l'endommagement à partir de la réponse vibratoire. (Le défaut est apparu brutalement à un instant pendant la mesure de la réponse). La première méthode est basée sur "empirical mode decomposition" (EMD) pour décomposer le signal en "intrinsic mode function" (IMF). Pour avoir la première IMF, la procédure est de construire l'enveloppe en bas et en haut d'un signal  $u(t)$  avec l'interpolation polynomiale par morceaux (ou spline). La moyenne  $m$  des deux enveloppes est soustrait du signal :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= u - m_{1,1} \\ u_{1,2} &= u_{1,1} - m_{1,2} \end{aligned} \quad (1.132)$$

$u_{1,k} = u_{1,k-1} - m_{1,k-1}$  (Ou  $m_{1,j}$  est la moyenne des deux enveloppes du signal  $u_{1,j}$ ).

La procédure est répétée jusqu'à ce que la différence entre deux itérations successives soit petite, autrement dit, l'indice  $SD_k$  est petit avec  $SD_k$  définis par la formule suivante :

$$SD_k = \frac{\sum_{t=0}^T |u_{1-k} - u_{1,k-1}|^2}{\sum_{t=0}^T u_{1,k-1}^2} \quad (1.133)$$

Dans les autres propose des valeurs de  $SD$  (écart type) de 0,2 ou 0,3 La première IMF (Intrinsic Mode Function) est obtenue par la formule :

$$c_1(t) = h_{1,k}(t) \quad (1.134)$$

Pour obtenir la deuxième IMF  $c_2(t)$ , les mêmes procédures sont répétées pour le signal Résiduel  $r_1 = u - c_1$ . Ces procédures sont répétées de manière itérative pour obtenir  $n$  IMF<sub>s</sub> ce qui donne la décomposition suivante :

$$u(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) + r_n(t) \quad (1.135)$$

En utilisant les résultats de la décomposition EMD (Empirical Mode Decomposition), l'endommagement peut être détecté dans le temps et localisé dans l'espace. Cependant, la précision de cette détection dépend de l'importance du défaut et du niveau de bruit présent dans le signal.

La deuxième méthode proposée par Yan et al[79] ont proposé une nouvelle technique d'identification des dommages en utilisant la transformation en ondelettes (TO). L'idée principale est d'appliquer la TO sur la réponse vibratoire libre sans amortissement, décrite par l'équation suivante :

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0 \quad (1.136)$$

On obtient ainsi :

$$MW_{(\psi, \ddot{u})}(a, b) + KW_{(\psi, u)}(a, b) = 0 \quad (1.137)$$

En utilisant la relations  $w_{(\psi, u)}(a, b) = a^2 w_{(\psi, \ddot{u})}(a, b)$  l'équation (1.137) s'écrit :

$$\frac{1}{a^2} MW_{(\psi, \ddot{u})}(a, b) + KW_{(\psi, \ddot{u})}(a, b) = 0 \quad (1.138)$$

Dans le cas où il y a le défaut, l'équation précédente peut être réécrite :

$$-\frac{1}{a^2} \Delta MW_{(\psi, \ddot{u}(a))}(a, b) - \Delta KW_{(\psi, \ddot{u}(a))}(a, b) \quad (1.139)$$

$$= \frac{1}{a^2} MW_{(\psi, \ddot{u}(a))}(a, b) + KW_{(\psi, \ddot{u}(a))}(a, b) \quad (1.140)$$

En utilisant le résultat  $RWF_{(a,b)} = \frac{1}{a^2} MW_{(\psi, \ddot{u}(a))}(a, b) + KW_{(\psi, \ddot{u}(a))}(a, b)$ ,

L'endommagement peut-être détecter en temps et localiser en espace. Ils ont proposé également deux indices  $DLIRWF_i(a)$  et  $NDLIRWF_i$  pour localiser le défaut :

$$DLIRWF_i = \sum_b |RWF_i(a, b)| \quad (1.141)$$

$$NDLIRWF_i(a) = \frac{DLRWF_i - \overline{DLIRWF(a)}}{\sigma(a)} \quad (1.142)$$

Où ;

$i$  : Représente l'indice d'un degré de liberté.

$RWF_i(a, b)$  : Est la composant  $i$  du vecteur  $RWF(a, b)$ .

$\overline{DLIRWF(a)}$  et  $\sigma(a)$  : Sont la moyenne et l'écart type des composant du vecteur  $DLIRWF(a)$ .

En réalité, la structure est souvent amortie et soumise à l'excitation du bruit  $F(t)$ , qui est supposé non corrélér avec les réponses, pour prendre en compte ce phénomène, une méthode adoptée est proposée en appliquant la transformée de Fourier (To) ainsi que des procédures similaires sur l'équation suivant :

$$M\ddot{R}_{xxi}(\tau) + C\dot{R}_{xxi}(\tau) + KR_{xxi}(\tau) = R_{Fxi}(\tau) \quad (1.143)$$

Soit :

$$M\ddot{R}_{xxi}(\tau) + C\dot{R}_{xxi}(\tau) + KR_{xxi}(\tau) = 0 \quad (1.145)$$

Où :

$R(.)$  : Est la corrélation entre 2 fonctions.

D'autres chercheurs ont appliqué ces méthodes à des données numériques issues de réponses libres ou sous excitation de bruit. Les résultats démontrent que la méthode est capable de détecter et de localiser les défauts, même en présence de multiples anomalies.

Dang et al [80] ont créé un indice de dommage en combinant un modèle ARMA vectoriel avec la HHT standard. Cette approche offre une nouvelle perspective pour identifier les dégradations.

Bao et Al[81] ont proposé des versions améliorées de la HHT qui ont démontré une meilleure résistance au bruit et des capacités de décomposition des données plus efficaces Han et al[82] ont utilisé la HHT en combinaison avec d'autres techniques, telles que la méthode de décrétement aléatoire (RD), pour améliorer l'identification modale et le diagnostic des pannes.

Aied et al[83] ont appliqué la décomposition empirique en mode (EMD), une composante de la HHT, pour détecter des variations rapides de rigidité dans les réponses en accélération des ponts sous charges mobiles. Leur méthode a montré son efficacité même en présence de signaux bruyants et de profils de charges variables.

Roveri et Cartatera[84] ont également utilisé la HHT pour détecter les dommages d'un pont soumis à des charges mobiles en analysant les réactions en un seul point de mesure.

De même Kunwar et al[85] ont employé la HHT pour identifier les zones de dommages dans les ponts, en se basant sur l'analyse des motifs conjoints temps-fréquence. Cette approche permet une compréhension détaillée de l'évolution des dommages dans le temps et l'espace fréquentiel.

### 2.5 Méthode basées sur l'énergie de déformation modale

L'énergie de déformation est directement liée à la courbure modale dans les poutres, et cette propriété s'applique également aux plaques. Par conséquent, la méthode basée sur l'énergie de déformation modale partage à la fois les avantages et les inconvénients de la méthode basée sur la courbure modale, et certains chercheurs la considèrent même comme un cas particulier de cette dernière.

En général, l'énergie de déformation modale utilisée pour la détection des dommages est basée sur des éléments discrétisés plutôt que sur l'ensemble de la structure. Ainsi, en examinant l'indice de dommage basé sur l'énergie de déformation modale élément par élément, il est possible de localiser un dommage en repérant une variation anormale de cet indice après son apparition.

L'efficacité de la détection de dommages via l'énergie de déformation modale a été démontrée par plusieurs chercheurs, Berhm et al[86] ont développé une approche innovante. Elle repose sur un modèle purement mathématique enrichi par des informations physiques obtenues grâce à un modèle numérique. Cette approche, basée sur l'énergie de déformation modale, leur a permis de localiser et de quantifier précisément l'endommagement.

Dixit et al [87] ont obtenu des résultats expérimentaux robustes pour leur méthode. Cette dernière s'appuie sur l'énergie de déformation modale, elle-même dérivée des fréquences naturelles et des déformées propres correspondantes, confirmant ainsi sa fiabilité.

Guo et al [88, 89] ont utilisé le concept d'énergie de déformations modale fréquentielle dans le Contexte d'une approche bayésienne couplée avec un algorithme d'optimisation pour localiser les dommages dans un treillis. Dans le contexte de l'approche Bayésienne, ils proposent une procédure d'identification des dommages en deux étapes la première étape une estimation de la localisation du dommage est obtenue par la méthode d'énergie modale de déformation. Cette étape utilise une approche fréquentielle pour permettre une quantification de l'ampleur du dommage. La deuxième étape l'information "à priori" fournie par la méthode précédente permet alors d'identifier la moyenne conditionnelle de la densité de probabilité a posteriori et d'estimer la distribution élémentaire du dommage.

La méthode fréquentielle est établie pour une structure linéaire lorsque l'endommagement de type fissuration est supposé rester faible et n'affecter que la raideur de la structure. Ainsi, on obtient :

$$GD = \Lambda = (\lambda_k)_{k=1,\dots,m} = (\tilde{\omega}_k^2 - \omega_k^2)_{k=1,\dots,m} \quad (1.146)$$

Avec :

$$G_{ke} = \Phi_k^t k_e \Phi_k \quad (1.147)$$

Où :

$k_e$  : Est la matrice de rigidité élémentaire de l'élément.

$e, \omega_k, \tilde{\omega}_k$  : Sont les pulsations propres associées respectivement à la structure intacte pour éliminer la rigidité, Guo et al ont introduit l'indice de dommage défini comme :

$$F_e = \frac{U_e^*}{U_e} = 1 - \frac{\Psi_e^*}{\Psi_e} \quad (1.148)$$

Une méthode très utilisée dans la littérature consiste à supposer que l'ampleur du dommage est faible, ce qui conduit à poser  $F_e \approx 1$  de sorte que :

$$d_e \approx 1 - \frac{\psi_e^*}{\psi_e} \quad (1.149)$$

F.El khannoussi et al [90] ont développé un modèle d'analyse de l'énergie de déformation modale et de l'indice de dommage pour une plaque rectangulaire maillée en utilisant  $N_x * N_y$  points de discrétisation dans un espace de coordonnées cartésiennes, cette approche permet de déterminer la densité modale d'énergie de déformation de flexion pour chaque élément de la structure, comme des fissures qui affecte principalement la raideur sans modifier de manière significative la distribution de masse l'énergie de déformation modale de la structure intacte est définie par une expression intégrale qui prend en compte la rigidité de flexion  $D_{ij}$  la forme modale  $\phi_k$  :

$$u_{ijk} = D_{ij} \psi_{ij}^k \quad (1.145)$$

$$D'ou : \psi_{ij}^k = \int_{\Omega_{ij}} \left( \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_k}{\partial y} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} \right)^2 - \nu \left( \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \quad (1.146)$$

Lorsque la structure est endommagée, une modification de la rigidité est introduite, ce qui conduit à une nouvelle densité modale d'énergie de déformation :

$$u_{ijk}^* = D_{ij}^* \psi_{ij}^k \quad (1.147)$$

L'énergie totale de déformation est calculée pour la structure intacte et endommagée les contributions de tous les modes vibratoires retenus :

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^m D_{ij} \psi_{ij}^k \quad (1.148)$$

En supposant que le dommage soit constant par élémentaire de la structure dans son état intacte d'endommager s'écrivant alors :

$$U_e = \sum_{k=1}^m D_e \psi_e^k \quad \text{Et} \quad U_e^* = \sum_{k=1}^m D_e (1 - d_e) \psi_e^k \quad (1.149)$$

La mesure de l'énergie de déformation par éléments finis (EF), associée à des algorithmes spécifiques, s'avère être une approche efficace pour la localisation des fissures. Comme l'ont observé Das et al[88] et E.Manoach et al[91] la méthode de l'énergie de déformation est particulièrement performante pour détecter les endommagements dans les structures, y compris avec des données expérimentales réelles et en présence de bruit. Cette méthode permet d'identifier les anomalies en observant les variations dans les modes de vibration. Cependant, son efficacité dépend fortement de l'intégration de plusieurs modes modaux dans l'analyse, ce qui assure une évaluation plus précise des déformations et des dommages.

Kaveh et Zolghadr[92] ont employé l'algorithme MSEBI et l'algorithme de parthénogenèse cylindrique pour détecter les endommagements d'éléments dans des structures à cadre plan.

Dinh[93] a présenté une méthode en deux étapes, combinant l'indice de dommage basé sur l'énergie de déformation modale normalisée (NMSEDI) et l'algorithme Jaya pour

diagnostiquer les dommages dans les plaques. Deux fonctions objectives, basées sur la modification de la flexibilité modale et la modification de la forme modale, ont été récemment implémentées.

Samir et al [94] ont également présenté une méthode de détection des dommages utilisant le NMSEDI et un algorithme d'optimisation basé sur l'enseignement et l'apprentissage pour détecter l'emplacement et étudier l'étendue des dommages dans les structures de type poutre.

### 2.6 Méthode basée sur le vecteur résiduel modal

Leandro et al [95] et Damir et al[96] ont présenté une méthode de détection des dommages structurels en deux étapes. Dans cette approche, le vecteur de forces résiduelles est d'abord utilisé pour une localisation préliminaire des dommages, tandis que la méthode d'évolution simulée est ensuite employée pour déterminer l'étendue précise des dégradations.

Lie et al[97] ont exploité la différence entre les vecteurs de forces résiduelles virtuelles d'une structure intacte et d'une structure endommagée pour localiser les dommages. Leur méthode combine également l'approche de sensibilité de la réponse pour identifier le degré de dommage local, permettant ainsi une double évaluation.

Nobahari et al [98, 99] ont utilisé le concept de vecteur de force dans leur étude, qui repose sur une méthode basée sur l'indice de dommage des unités de treillis. Ils ont appliqué cette méthode pour localiser les composants endommagés et réduire le volume de calcul en éliminant les unités non endommagées, ce qui améliore l'efficacité.

Wang et al [100] ont exploré les méthodes basées sur les vecteurs de forces résiduelles et leur application dans des structures complexes. Ils utilisent des approches algorithmiques pour détecter les dommages et calculer leur degré, en s'appuyant sur l'analyse des changements modaux.

Z.H.Ding et al[101] ont exploré la méthode RFV (vecteurs forces résiduelles) basée sur l'analyse par éléments finis. Dans le cas d'une structure intacte sans amortissement, son expression est donnée ci-dessous :

$$K\varphi_j = \lambda_j M_{\varphi_j} \quad (1.150)$$

où :

K, M : Représentent la matrice de rigidité globale et la matrice de masse du modèle par éléments finis de la structure intacte.

$\lambda_j$  et  $\varphi_j$  : Représente respectivement la  $j^{eme}$  propre et le vecteur propre associé de la structure intacte.

Ainsi dans le cas où la structures est endommagé sont équations peut être exprimé :

$$k_d \varphi_{dj} = \lambda_{dj} M_d \varphi_{dj} \quad (1.151)$$

Où :

$k_d, M_d$  : Représente la matrice de rigidité globale et la matrice de masse de la structure endommagé.

$\lambda_{dj}, \varphi_{dj}$  : Représente respectivement la valeur propre et le vecteur associé de la structure endommagée en suit ils sont supposés que les dommages structure ne conduisent qu'a une réduction de la rigidité globale de la structure endommagée est donne comme suit :

$$k_d = \sum_{i=1}^{kd} (1 - a_i) k_i \quad (1.151)$$

où :

$k_i$  : Représente la matrice de rigidité de l'élément.

$i$  et  $a_i$  : Est l'étendue des dommages de l'élément.

Ils ont supposé  $a_i = 0$  cet élément est intacte tandis que  $a_i = 1$  signifie que cet élément est totalement endommagé, les dommages à la masse sont facilement observés on suppose que la matrice de masse endommagé reste inchangée  $M = M_d$  dans leur étude, le vecteur de force résiduelle (RFV) est utilisé pour localisation des dommages. En effet lorsque certains éléments sont endommagés le RFV correspondants ne sera pas égale à zéro permettant ainsi de localiser les éléments suspects de cette manière le RVF  $f_j$  provenant de  $j^{eme}$  mode de la structure endommagée est définis par :

$$f_j = \Delta K_{\varphi dj} = (K - \lambda_{dj} M) \lambda_{dj} \quad (1.152)$$

Sa forme détaillé peut-être exprimée comme suite :

$$\begin{pmatrix} f_{1j} \\ f_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{nj} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta K_1^T \\ \Delta K_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta K_n^T \end{bmatrix} \quad (1.153)$$

où :

$\Delta k$  : Représente le changement de la matrice de rigidité globale.

$\Delta k_i$  Pour ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) représente le changement de rigidité de la  $i^{eme}$  liberté.

$N$  : Nombre totale de liberté.

Shuai luo et al[102] ont utilisé un algorithme basé sur l'information modale du premier ordre. Cette approche s'est avérée attractive sur le plan calculatoire, rapide et précise ourla détection des dommages dans les grandes structures.

## 2.7 Méthode de Rapport des changements des fréquences locales ou LFCR

### 2.7.1 Introduction

Le changement de comportement global d'une structure doit être relié à des paramètres locaux décrivant l'endommagement. Dans ce but, il est important de sélectionner des indicateurs d'endommagement qui sont sensibles pour caractériser les changements structurels dus aux endommagements. De nombreuses études ont tenté de déterminer et de localiser les endommagements à partir des changements de fréquences propres. Ces méthodes utilisant uniquement les fréquences propres présentent cependant un certain nombre de limites. Dans ce chapitre, nous allons utiliser une méthode de détection de défauts dans les structures barres d'où cette méthode utilise le concept du rapport des changements des fréquences locales suite à des défauts de fissurations, de déformations et de ruptures de la structure dont les rigidités de ces deux structures sont affectées. Cette méthode a été bien employée dans le cas d'un seul ou de plusieurs endommagements.

### 2.7.2 Recherche Bibliographique sur la méthode :

Les données modales utilisées dans l'analyse d'identification des dommages sont cruciales pour la précision des résultats obtenus. La méthode LFCR (rapport de variation de fréquence locale), basée sur ces fréquences, offre une meilleure précision dans la localisation des dommages, qu'il s'agisse de scénarios impliquant un élément endommagé unique ou plusieurs. S.S. law, Z. Y. shi et L. M. Zhang, [103] ont développé une méthode innovante pour détecter et évaluer les dommages structurels, même en présence de données incomplètes et bruitées. Leur approche s'appuie sur le Local Frequency Change Ratio (LFCR), un indicateur clé pour identifier les zones endommagées. Cette méthode se déroule en trois phases distinctes : d'abord, l'expansion des formes modales mesurées ; ensuite, la localisation du domaine d'endommagement grâce à la différence du quotient d'énergie élémentaire ; et enfin, la quantification de l'endommagement basée sur la sensibilité des fréquences modales. Les chercheurs ont également introduit une nouvelle méthode d'expansion des formes modales, dont l'efficacité, combinée au quotient d'énergie élémentaire, a été démontrée pour gérer les mesures incomplètes. Ils ont aussi abordé la question des erreurs de modélisation en proposant un critère pour sélectionner les éléments endommagés. Des essais ont été menés sur une structure réelle liée à l'Agence Spatiale Européenne (ESA) – vraisemblablement une maquette ou un composant – ainsi que sur une structure de portail métallique à deux étages en laboratoire. Les résultats ont confirmé que cette approche en trois étapes, utilisant le LFCR, est capable de localiser et de quantifier efficacement les dommages dans des structures réelles, même face à des erreurs de mesure aléatoires ou systématiques.

Radzienski et al [104] ] ont introduit une nouvelle méthode de détection des dommages structurels basée sur les paramètres modaux obtenus expérimentalement. Cette méthode cible la détection de dommages dus à la fatigue dans une poutre en aluminium, où les dommages ont été simulés sous forme de découpes de scie de différentes tailles et emplacements. Cela a conduit les auteurs à développer de nouveaux indicateurs basés sur les variations de fréquences naturelles et les formes modales. Leur approche a prouvé son efficacité pour localiser les dommages dans des structures de type poutre.

Dahak et al [105] ont proposé une méthode innovante de localisation des dommages dans une poutre discrétisée en plusieurs zones, chaque zone étant caractérisée par les quatre premières

fréquences naturelles normalisées. L'identification des zones endommagées repose sur la classification de ces fréquences. En présence de dommages symétriques par rapport à un nœud de vibration, les auteurs ont utilisé les fréquences normalisées comme second critère. Des simulations numériques sous ANSYS et des essais expérimentaux sur différentes configurations de dommages ont été réalisés.

Khatir et al [106] ont développé une méthode basée sur le rapport local de changement de fréquence (LFCR) pour évaluer les dommages dans des plaques composites laminées à trois couches ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ). Les auteurs ont utilisé un indicateur spécifique pour identifier les éléments endommagés, qu'ils soient uniques ou multiples. Les résultats de leur étude ont démontré que l'indicateur LFCR permet de détecter avec précision les dommages, même lorsque plusieurs éléments sont affectés. Pour renforcer la fiabilité de cette méthode, les auteurs ont introduit un bruit blanc gaussien à différents niveaux ; même avec un bruit de mesure de 2%, le LFCR a maintenu une précision élevée dans l'identification des dommages.

Zenzen et al[106] ont proposé une approche combinant un réseau neuronal artificiel (ANN) avec un indicateur de dommage modifié, appliquée à une poutre et une plaque composite laminée à trois couches croisées [ $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ]. Cette méthode repose sur l'analyse de fréquence (LFCR) et se distingue par sa capacité à réduire le volume de données nécessaires, en évitant de collecter toutes les caractéristiques modales (fréquences naturelles, facteurs d'amortissement et formes modales). Après l'analyse de quatre scénarios d'endommagement, cette méthode s'est avérée fiable pour localiser et quantifier les dommages dans les structures composites.

Kahouadji et al[107] ont également proposé une approche basée sur le Local Frequency Change Ratio (LFCR) comme indicateur de dommage et des techniques d'optimisation pour réaliser l'identification des dommages. Les résultats ont montré que le LFCR peut détecter et localiser les dommages avec précision, et que les techniques d'optimisation présentées peuvent définir leur gravité avec exactitude.

## 2.8 Présentations de la méthode

L'équation aux valeurs propres d'un système à  $n$  degrés de liberté (ddl) est défini par :

$$K\phi = M\phi A \quad (1.154)$$

Lorsque la structure subit un endommagement, ses propriétés mécanique, telles que la résistance et la rigidité cette matrice peut alors être interprétée comme la somme de la matrice de rigidité  $K_s$  de la structure saine et de la somme des matrices de rigidité élémentaires  $K_j$  multipliées par un facteur de réduction  $a_i$  représentant la diminution de la rigidité en pourcentage ainsi la matrice de rigidité de la structure endommagée  $K_e$  Peut être exprimée comme suit :

$$K_e = K_s + \sum_{j=1}^L \Delta K_j = K_s + \sum_{j=1}^L a_i \cdot K_j \quad (1.155)$$

Les endommagements influencent fortement la rigidité de la structure. Même une légère modification de cette rigidité peut entraîner des variations notables des vecteurs propres  $\phi_i$  et des valeurs propres  $\lambda_i$ , qui caractérisent le comportement dynamique de la structure en cas de légère perturbation de la rigidité de la structure cette relation s'écrit :

$$[(K + \Delta K) - (\lambda_i - \Delta\lambda_i) \cdot M](\phi_i + \Delta\phi_i) = 0 \quad (1.156)$$

En développant cette formule, nous parviendrons à obtenir les résultats suivants

$$k\phi_i + \Delta K\phi_i + K\Delta\phi_i + \Delta K\phi_i = \lambda_i M\phi_i + \Delta\lambda_i M\phi_i + \lambda_i M\Delta\phi_i + \Delta\lambda_i M\Delta\phi_i \quad (1.157)$$

$$\phi_i(K + \Delta K) + \Delta\phi_i(K + \Delta K) = \phi_i(\lambda_i M + \Delta\lambda_i M) + \Delta\lambda_i M\Delta\lambda_i M + \Delta\lambda_i M \quad (1.158)$$

$$\Delta\phi_i((K + \Delta K) - (\lambda_i M + \Delta\lambda_i M)) = \phi_i((\lambda_i M + \Delta\lambda_i M) - (K + \Delta K)) \quad (1.159)$$

Nous mettons :

$$(K + \Delta K) = K \text{ et } (\lambda_i M + \Delta\lambda_i M) = \lambda_i M \quad (1.160)$$

Avec :  $\frac{1}{\phi_i} = \phi_i^T$

$$\Delta\phi_i * \phi_i^T * (K - \lambda_i M) = 0 \quad (1.161)$$

$$\Delta\phi_i(K\phi_i^T - \lambda_i\phi_i^T M) = 0 \quad (1.162)$$

Où :

$$\Delta\phi_i^T(K\phi_i - \lambda_i\phi_i M) = 0 \quad (1.163)$$

$$\Delta\phi_i \cdot \phi_i^T \cdot M\phi_i = \Delta K \cdot \phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i \quad (1.164)$$

Ainsi :

$$\Delta\lambda_i = \frac{\Delta K \cdot \phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i} = \frac{\sum_{j=1}^L a_j \phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i} \quad (1.165)$$

Cette équation exprime la variation de la ième fréquence naturelle la fréquence locale (FL) comme le ratio d'énergie potentielle d'un élément son énergie cinétique, calculé pour différents vecteurs propres :

$$LF_{ij} = \frac{\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i} \quad (1.167)$$

Et : j C'est Elément, i : Mode.

Nous pouvons ensuite déterminer les fréquences locales de la structure saine, notées  $LF_{uij}$  puis calculer celles de la structure endommagée, notées  $LF_{dij}$ .

$$LF_{uij} = \frac{\phi_{iu}^T \cdot k \cdot \phi_{iu}}{\phi_{iu}^T \cdot M \cdot \phi_{iu}}, \quad LF_{dij} = \frac{\phi_{id}^T \cdot k \cdot \phi_{id}}{\phi_{id}^T \cdot M \cdot \phi_{id}} \quad (1.168)$$

Pour localiser les endommagements, nous employons le concept de rapport de variation de fréquence locale (LFCR), défini comme suit :

$$LFCR_{ij} = \frac{|LF_{dij} - LF_{uij}|}{LF_{uij}} \quad (1.169)$$

La méthode  $LFCR_{ij}$  peut être appliquée à l'ensemble des éléments de la structure en utilisant un nombre défini de modes propres, généralement les premiers, pour garantir précision et efficacité.

Lorsqu'un endommagement survient dans l'élément  $j = p$  la valeur de LFCR pour cet élément est définie comme la plus élevée parmi toutes les valeurs LFCR des autres éléments  $j \neq p$ .

## 2.9 Présentations des structures

### 2.9.1 Structure treillis 31 éléments

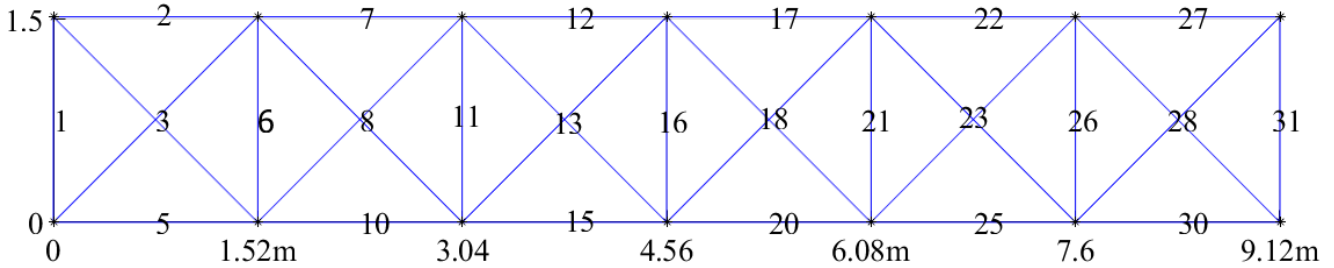


Figure 5 Treillis 2D 31 éléments

Dans cette étude, la structure treillis a été modélisée en éléments finis chaque nœud de cet élément fini possédait deux degrés de liberté : un déplacement normal à la barre selon x et un déplacement autour de l'axe y (voir la Figure 6. Treillis 2D avec 31 éléments). Le nombre total de degrés de liberté (DDL) de cette structure est de 28. Il s'agit d'une structure treillis discrétisée en 31 éléments finis, dont les caractéristiques sont les suivantes : **L=9.12m**; **E=7.10<sup>10</sup>(N/m<sup>2</sup>)**; **Rho=2770 (Kg/m<sup>3</sup>)**; **A=0.0025(m<sup>2</sup>)**

### 2.9.2 Structure treillis 52 éléments

Dans cette étude, la structure treillis 3D a été modélisée en éléments finis chaque nœud de cet élément fini possédait trois degrés de liberté : un déplacement selon x, un déplacement selon l'axe y et un déplacement selon l'axe z le nombre total de degrés de liberté (DDL) de cette structure est de 63.

Il s'agit d'une structure treillis discrétisée en 52 éléments finis, dont les caractéristiques sont les suivantes ; **L= 12m** ; **E=210(N/m<sup>2</sup>)**; **Rho= 7800(Kg/m<sup>3</sup>)**; **A=2\*10<sup>-4</sup> (m<sup>2</sup>)**.

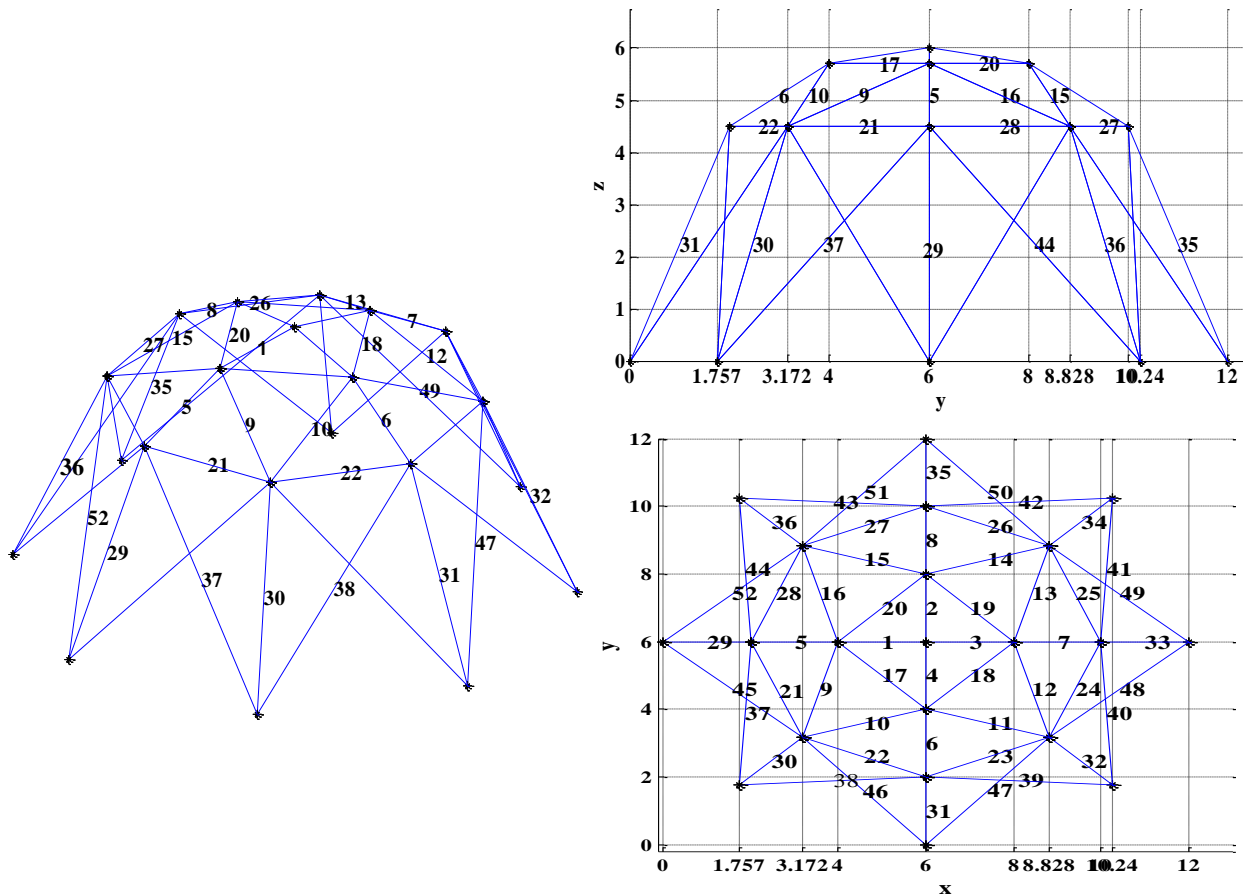


Figure 6 : Treillis 3D 52 éléments.

### 2.10 Programmation de la méthode

Pour programmer la méthode, nous commencerons par introduire des dommages dans les éléments de la structure selon deux scénarios distincts. Dans chaque scénario, nous augmenterons progressivement le nombre d'éléments endommagés. Les fréquences modales de la structure endommagée seront ensuite calculées et comparées à celles de la structure saine. Cette comparaison permettra d'évaluer l'efficacité et la précision de la méthode LFCR dans ces deux cas d'endommagement.

#### 2.10.1 Structure 31 barres :

Chaque élément sélectionné est endommagé à un certain pourcentage, comme indiqué dans le tableau suivant à chaque scénario, le nombre d'éléments endommagés est progressivement augmenté.

	Elément N°	2
31 barres- cas 1	Taux d'endommagement	15%
	Elément N°	9
31 barres- cas 2	Taux d'endommagement	8%
	Elément N°	10
	Taux d'endommagement	5%
	Elément N°	

*Tableau 1 : Pourcentage des éléments endommagés barre2D.*

Nous calculerons ensuite les fréquences de la structure endommagée, que nous comparerons aux fréquences de la structure saine afin de déterminer la différence entre les deux, exprimée en pourcentage.

Auteur	MEF	Cas1	Erreur	Cas2	Erreur
36,09	36,432	36,406	-0,87%	36,316	-0,62%
75,63	76,095	76,094	-0,61%	75,615	0,01%
132,95	133,810	133,560	-0,45%	133,705	-0,56%
220,95	223,379	222,978	-0,91%	223,018	-0,93%
248,58	250,182	250,021	-0,58%	250,009	-0,57%

*Tableau 2 : Comparaison des fréquences saines et endommagées barre 2D.*

```

--- Propriétés des éléments -----
E = 7e10 ; % Module d'Young (Pa)
A = 0.0025; % Section transversale (m²)
Rho = 2770; % Densité (kg/m³)
ep = [E A rho*A]; % Propriétés des éléments

% --- Topologie (connectivité des éléments) -----
Edof = [1 1 2 3 4 ; 2 3 4 5 6; 3 3 4 7 8;4 1 2 5 6;5 1 2 7 8; 6 5 6 7 8;
7 5 6 9 10;8 5 6 11 12;9 7 8 9 10; 10 7 8 11 12;11 9 10 11 12;12 9 10 13 14;13 9 10 15 16; 14
11 12 13 14;15 11 12 15 16;16 13 14 15 16;17 13 14 17 18;18 13 14 19 20;19 15 16 17
18;20 15 16 19 20;21 17 18 19 20;22 17 18 21 22;23 17 18 23 24;24 19 20 21 22;25 19 20 23
24;26 21 22 23 24;27 21 22 25 26;28 21 22 27 28;29 23 24 25 26;30 23 24 27 28;31 25 26 27
28];

% --- Liste des coordonnées des nœuds -----
Coord = [0.00 0.00;0.00 1.52;1.52 1.52;1.52 0.00;3.04 1.52;3.04 0.00;4.56 1.52;4.56
0.00;6.08 1.52;6.08 0.00;7.60 1.52;7.60 0.00;9.12 1.52;9.12 0.00
];

% --- Liste des degrés de liberté -----
Dof = [1 2;3 4;5 6;7 8;9 10;11 12;13 14;15 16;17 18;19 20;21 22;23 24;
25 26;27 28];

% --- Initialiser les matrices globales -----

```

```

K = zeros(28); % Matrice de raideur globale
M = zeros(28); % Matrice de masse globale

% --- Extraction des coordonnées des éléments -----
[Ex, Ey] = coordxtr(Edof, Coord, Dof, 2);
%% Structure Saine
for i = 1:31
    % Calcul des matrices de raideur et de masse locales
    [Ke, Me] = bar2de(Ex(i,:), Ey(i,:), ep);
    K=assem(Edof(i,:),K,Ke);
    M=assem(Edof(i,:),M,Me);
end
b = [ 1 2 28]'; % Nœuds encastrés ou conditions aux limites
[La, Egv] = eigen(K, M, b); % Valeurs propres (La) et vecteurs propres (Egv)
Freq = sqrt(La) / (2 * pi); % Conversion en fréquences naturelles (Hz)

%% Structure Endommagée
Ed=E*ones(31,1);
% 1 End
x=.15; Ed (2) =(1-x) *E;
% 2 End
x1=0.08;Ed(9)=(1-x1)*E;
x2=0.05;Ed(10)=(1-x2)*E;
% 3 End
x1=0.10;Ed(7)=(1-x1)*E;
x2=0.07;Ed(17)=(1-x2)*E;
x3=0.18;Ed(18)=(1-x3)*E
Kd = zeros(28);
for i = 1:31
    epd = [Ed(i) A rho*A];
    [kd,~] = bar2de(Ex(i,:), Ey(i,:), epd);
    Kd = assem(Edof(i,:), Kd, kd);
end
[Lad,Egvd]=eigen(Kd,M,b);
Freqd=sqrt(Lad)/(2*pi);
disp('Auture Moi endommagée ')
FRQ=[[36.09; 75.63; 132.95; 220.95; 248.58] Freq(1:5) Freqd(1:5)]
%% Modal Flexibility
Egv(28,:)=[];Egv(2,:)=[];Egv(1,:)=[];
Egvd(28, :)= []; Egvd(2, :)=[];Egvd(1,:)=[];
Phi_u =Egv; % Formes modales saines
Phi_d = Egvd; % Formes modales endommagées
omega_u = Freq; % Fréquences saines
omega_d =Freqd; % Fréquences endommagées
F_u = 0; F_d = 0;
for i = 1:25
    phi_u = Phi_u(:, i);
    phi_d = Phi_d(:, i);
    F_u = F_u + (phi_u * phi_u.') / (omega_u(i)^2);
    F_d = F_d + (phi_d * phi_d.') / (omega_d(i)^2);
end

```

```

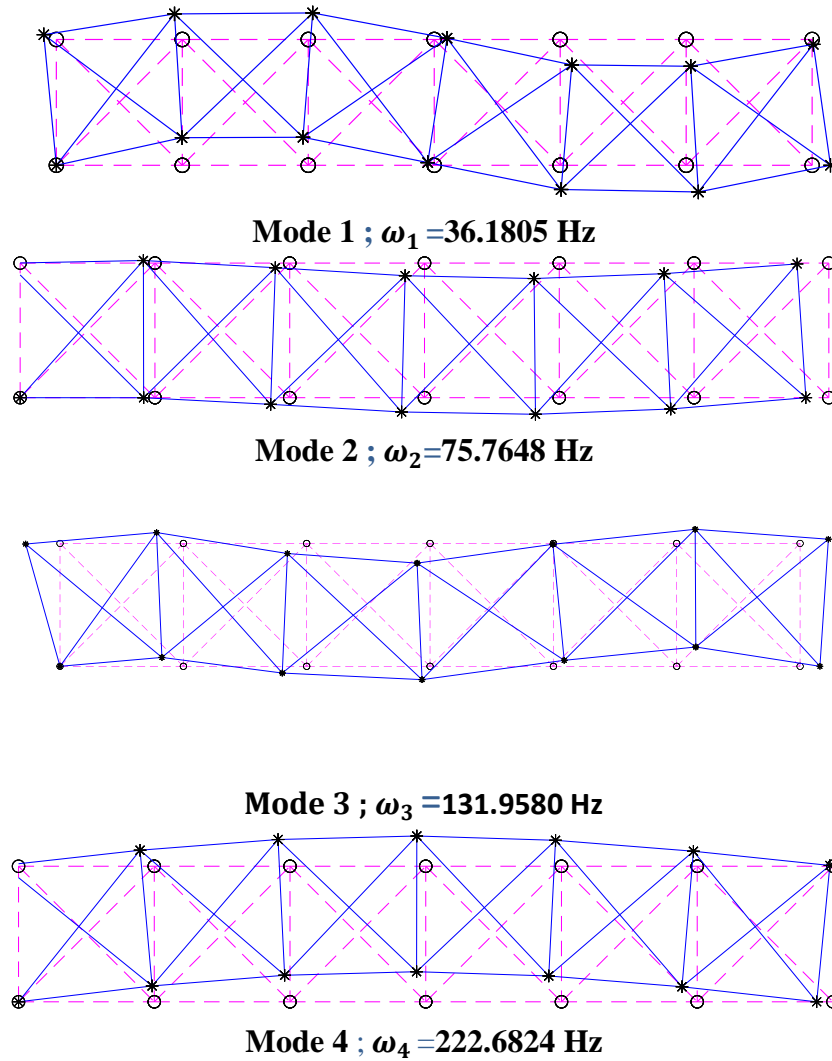
LoFCR = (F_u - F_d) / F_u;
gammaL = max(abs(LoFCR));
gamma=gammaL./max(gammaL);
v=zeros(1,28);
v(3:27)=gamma(1:25)
for i = 1:length(v)

    if v(i) < .2
        v(i)=0 ;
    end
end
Edof_new = Edof;
Edof_new(:,1)=[];
dof_xy=v(Edof_new);

dof_x1 = dof_xy(:,1);
dof_y1 = dof_xy(:,2);
dof_x2 = dof_xy(:,3);
dof_y2 = dof_xy(:,4);
Gamma_x = dof_x1 +dof_x2-1;
Gamma_y = dof_y1 + dof_y2-1;
Vvvv=sum(dof_xy,2)-2;
for i = 1:length(Gamma_x)
    if Gamma_x(i) < 0
        Gamma_x(i)=0 ;
    end
end
for i = 1:length(Gamma_y)
    if Gamma_y(i) < 0
        Gamma_y(i)=0 ;
    end
end
for i = 1:length(Vvvv)
    if Vvvv(i) < 0
        Vvvv(i)=0 ;
    end
end
DILoFCR = max(Gamma_x + Gamma_y ,0)
%Calcul de Gamma_xyz pour 2D
Gamma_xy = (Gamma_x + Gamma_y) - 1
figure
bar([Vvvv Gamma_x Gamma_y ])
grid
set(gca,'xtick',0:2:31)
xlim([0 32])
legend('tous ddl','ddl_x','ddl_y')
ylabel('Flexibiliy (\itDI_L_o_F_C_R)')
xlabel('Elément No.')
```

Le programme nous a permet de calculer les quatre premiers modes propres d'une structure saine et endommagée la comparant leurs déformations modales leurs différences de

déplacement révèlent les zones endommagé une diminution de fréquence indiquant une perte de rigidité ces comparaison permettent d'identifier les régions les plus affectées



*Figure 7. Les quatre modes propres*

## 2.10.2 Structure 52 barres

Nous procéderons de la même manière que pour la structure précédente, comme l'illustre le tableau ci-dessous :

52 barres- cas 1	Elément N°	3
	Taux d'endommagement	15%
52 barres –cas 2	Elément N°	17
	Taux d'endommagement	20%
	Elément N°	20
	Taux d'endommagement	15%

*Tableau 3. Pourcentage des éléments endommagés barre3D.*

Après avoir appliqué les dommages aux éléments, conformément aux tableaux précédents, les fréquences obtenues sont présentées dans le tableau suivant :

Auteur	MEF	Cas1	Erreur	Cas2	Erreur
22,7817	22,7817239	22,4915275	1,27%	22,4652662	1,389%
25,2693	25,2693685	25,2661185	0,01%	25,2086734	0,240%
25,2693	25,2693685	25,2693685	0,00%	25,2270093	0,167%
31,7347	31,7348859	31,7160683	0,06%	31,344192	1,231%
34,094	34,0940102	34,0935916	0,00%	33,656628	1,283%

*Tableau 4. Comparaison des fréquences saines et endommagées barre3D.*

```
clear all;
close all;
clc;

% --- Propriétés des éléments ---
E = 210e9 ; % Module d'Young (Pa)
A = 2e-4; % Aire de la section transversale (m²)
rho = 7800; % Densité (kg/m³)
ep = [E A A*rho]; % Propriétés des éléments

% --- Coordonnées des nœuds (Coord) ---
Coord = [6 6 6;4 6 5.7; 6 4 5.7;8 6 5.7;6 8 5.7;2 6 4.5;3.1716 3.1716 4.5;
```

```
6 2 4.5;8.8284 3.1716 4.5;10 6 4.5;8.8284 8.8284 4.5;6 10 4.5;3.1716 8.8284 4.5;0 6
0;1.7572 1.7572 0;6 0 0;10.2428 1.7572 0;12 6 0;10.2428 10.2428 0;6 12 0;1.7572 10.2428
0];
```

```
% --- Connectivité des éléments (Edof) ---
```

```
Edof=[1 1 2 3 4 5 6;2 1 2 3 13 14 15;3 1 2 3 10 11 12;4 1 2 3 7 8 9;
5 4 5 6 16 17 18;6 7 8 9 22 23 24;7 10 11 12 28 29 30;8 13 14 15 34 35 36;
9 4 5 6 19 20 21;10 7 8 9 19 20 21;11 7 8 9 25 26 27;12 10 11 12 25 26 27;
13 10 11 12 31 32 33;14 13 14 15 31 32 33;15 13 14 15 37 38 39;16 4 5 6 37 38 39;17 4 5 6 7
8 9;18 7 8 9 10 11 12;19 10 11 12 13 14 15;20 4 5 6 13 14 15;21 16 17 18 19 20 21;22 19 20
21 22 23 24;23 22 23 24 25 26 27;24 25 26 27 28 29 30;25 28 29 30 31 32 33;26 31 32 33 34
35 36;27 34 35 36 37 38 39;
28 37 38 39 16 17 18;29 16 17 18 40 41 42;30 19 20 21 43 44 45;31 22 23 24 46 47 48;32 25
26 27 49 50 51;33 28 29 30 52 53 54;34 31 32 33 55 56 57;
35 34 35 36 58 59 60;36 37 38 39 61 62 63;37 16 17 18 43 44 45;38 22 23 24 43 44 45;39 22
23 24 49 50 51;40 28 29 30 49 50 51;41 28 29 30 55 56 57;
42 34 35 36 55 56 57;43 34 35 36 61 62 63;44 16 17 18 61 62 63;45 19 20 21 40 41 42;46 19
20 21 46 47 48;47 25 26 27 46 47 48;48 25 26 27 52 53 54;
49 31 32 33 52 53 54;50 31 32 33 58 59 60;51 37 38 39 58 59 60;52 37 38 39 40 41 42];
```

```
% --- Degrés de liberté (Dof) ---
```

```
Dof = [1 2 3;4 5 6;7 8 9;10 11 12;13 14 15;16 17 18;19 20 21;22 23 24;
25 26 27;28 29 30;31 32 33;34 35 36;37 38 39;40 41 42;43 44 45;46 47 48;
49 50 51;52 53 54;55 56 57;58 59 60;61 62 63];
```

```
% --- Génération des matrices des éléments, assemblage dans les matrices globales ---
```

```
K = zeros(63);
```

```
M = zeros(63);
```

```
% Extraction des coordonnées
```

```
[Ex, Ey, Ez] = coordxtr(Edof, Coord, Dof, 2);
```

```
% --- Assemblage des matrices de raideur et de masse globales ---
```

```
for i = 1:52
```

```

% Calcul des matrices de raideur et de masse locales
[Ke, Me] = bar3e(Ex(i,:), Ey(i,:), Ez(i,:),ep);
K = assem(Edof(i,:), K, Ke);
M = assem(Edof(i,:), M, Me);
end

Mm = 50*eye(63); % 50 sur les 39 premières diagonales, 0 ensuite
Mg = M + Mm;

% --- Affichage pour vérifier ---
disp('Matrice Mg = M + Mm :');
disp(Mg);

%--- Calcul des valeurs propres et fréquences de vibration ----
b=[40:63];
[La, Egv] = eigen(K, Mg, b);
Freq = sqrt(La) / (2 * pi) ;

%Calcul des fréquences
Fra_ART=[1 22.7817 15.2196 12.8051 12.751 12.2222 11.3119
2 25.2693 29.2837 28.6489 28.649 28.6577 28.6529
3 25.2693 29.2837 28.6489 28.649 28.6577 28.6529
4 31.7347 31.6847 29.5398 28.803 28.6618 28.8030
5 34.0940 33.1547 30.2443 29.230 30.0997 28.8030];
Fraz=[Freq(1:5) Fra_ART(:,2)]

Structure Endommagée
Ed=E*ones(52,1);
% 1 End
x=0.15;Ed(3)=(1-x)*E;
% 2 End
x1=0.2;Ed(15)=(1-x1)*E;
x2=0.15;Ed(20)=(1-x2)*E;
% 3 End

```

```

x1=0.10;Ed(8)=(1-x1)*E;
x2=0.15;Ed(14)=(1-x2)*E;
x3=0.2;Ed(15)=(1-x3)*E;
Kd = zeros(63);
for i = 1:52
    epd = [Ed(i) A rho*A]; % Propriétés des éléments
    [kd,~] = bar3e(Ex(i,:), Ey(i,:),Ez(i,:), epd);
    Kd = assem(Edof(i,:), Kd, kd);
end
[Lad,Egvd]=eigen(Kd,Mg,b);
Freqd=sqrt(Lad)/(2*pi);
disp('Auture Moi endommagée ')
FRQ=[Fra_ART(:,2) Freq(1:5) Freqd(1:5)]
% Modal Flexibility
Egv(40:63,:)=[];
Egvd(40:63,:)=[];
Phi_u =Egv; % Formes modales saines
Phi_d = Egvd; % Formes modales endommagées
omega_u = Freq; % Fréquences saines
omega_d =Freqd; % Fréquences endommagées
F_u = 0; F_d = 0;
for i = 1:39
    phi_u = Phi_u(:, i);
    phi_d = Phi_d(:, i);
    F_u = F_u + (phi_u * phi_u.') / (omega_u(i)^2);
    F_d = F_d + (phi_d * phi_d.') / (omega_d(i)^2);
end
LoFCR = (F_u - F_d)/ F_u;
gammaL = max(abs(LoFCR));
gamma=gammaL./max(gammaL);
v=zeros(1,63);
v(1:39)=gamma;
for i = 1:length(v)
    if v(i) < .2

```

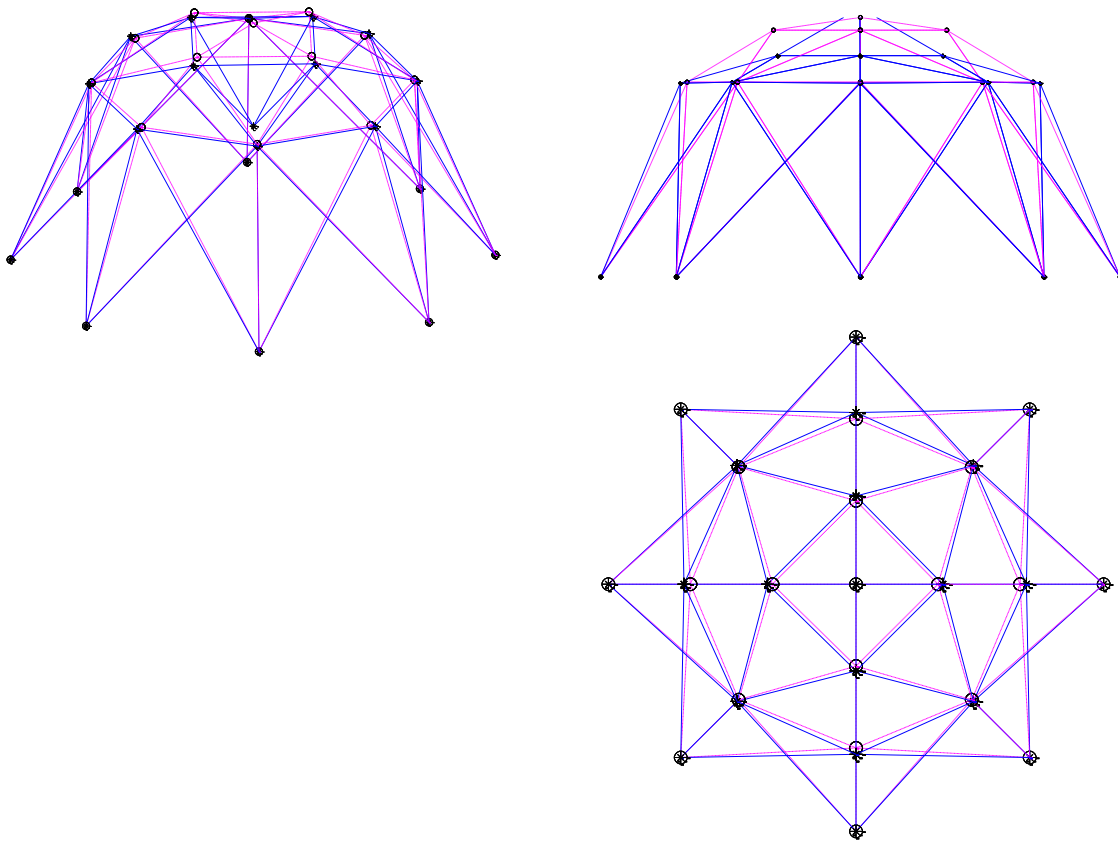
```
v(i)=0 ;
end
end
Edof_new = Edof;
Edof_new(:,1)=[];
dof_xyz=v(Edof_new);
dof_x1 = dof_xyz(:,1);
dof_y1 = dof_xyz(:,2);
dof_z1 = dof_xyz(:,3);
dof_x2 = dof_xyz(:,4);
dof_y2 = dof_xyz(:,5);
dof_z2 = dof_xyz(:,6);
Gamma_x = dof_x1 +dof_x2-1;
Gamma_y = dof_y1 + dof_y2-1;
Gamma_z = dof_z1 + dof_z2-1;
Vvvv=sum(dof_xyz,2)-2;
for i = 1:length(Gamma_x)
    if Gamma_x(i) < 0
        Gamma_x(i)=0 ;
    end
end
for i = 1:length(Gamma_y)
    if Gamma_y(i) < 0
        Gamma_y(i)=0 ;
    end
end
for i = 1:length(Gamma_z)
    if Gamma_z(i) < 0
        Gamma_z(i)=0 ;
    end
end
for i = 1:length(Vvvv)
    if Vvvv(i) < 0
        Vvvv(i)=0 ;
    end
end
```

```

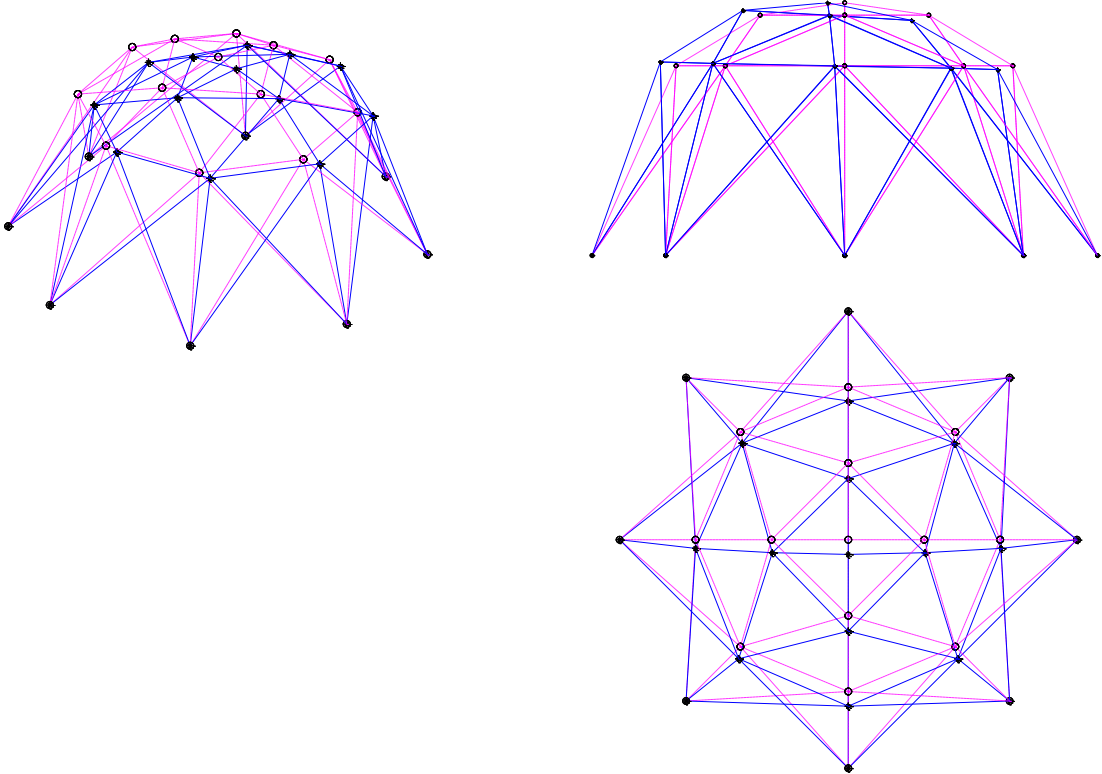
end
end
DILoFCR = max(Gamma_x + Gamma_y + Gamma_z ,0)
%Calcul de Gamma_xyz pour 3D
Gamma_xyz= Gamma_x + Gamma_y + Gamma_z - 2;
figure
bar([Vvvv Gamma_x Gamma_y Gamma_z])
grid
set(gca,'xtick',0:3:52)
xlim([0 53])
legend('tous ddl','ddl_x','ddl_y','ddl_z')
ylabel('Flexibiliy (\itDI_L_o_F_C_R)')
xlabel('Elément No.')

```

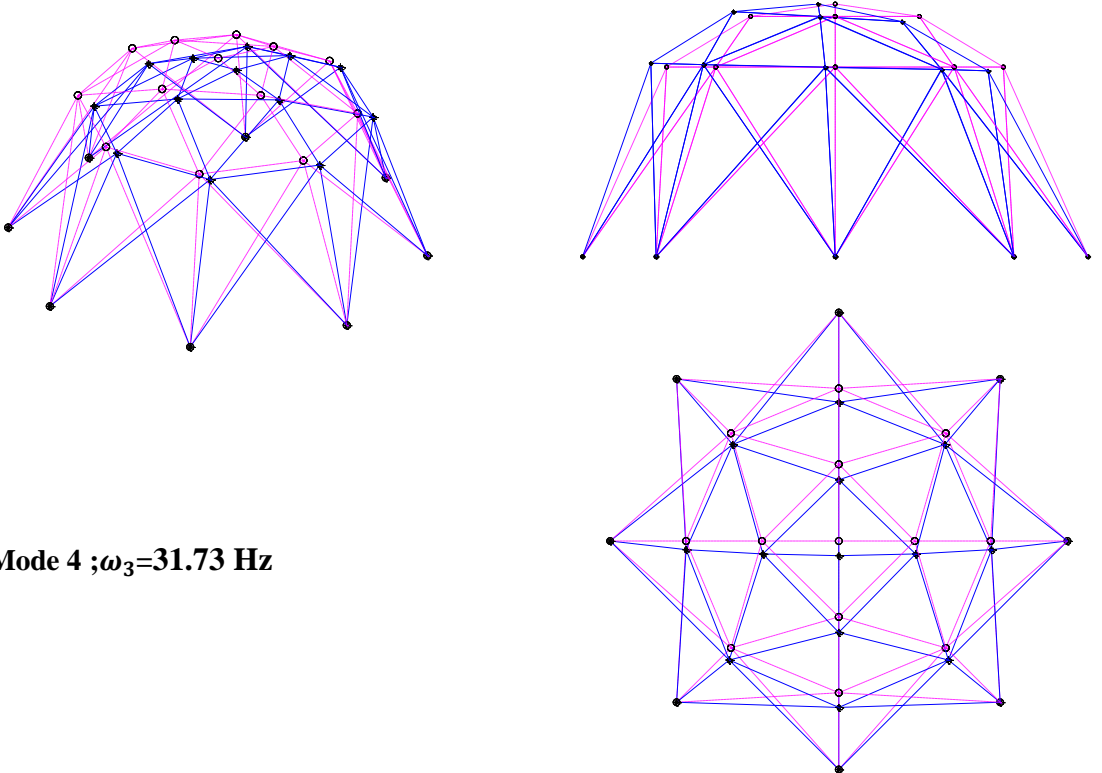
De la même manière on obtient les quatre premiers modes de la structure endommagée et saine présente ci-dessous :



**Mode 1 ;  $\omega_1 = 31.73$  HZ**



Mode 2 ;  $\omega_2 = 25.26$  Hz



Mode 4 ;  $\omega_3 = 31.73$  Hz

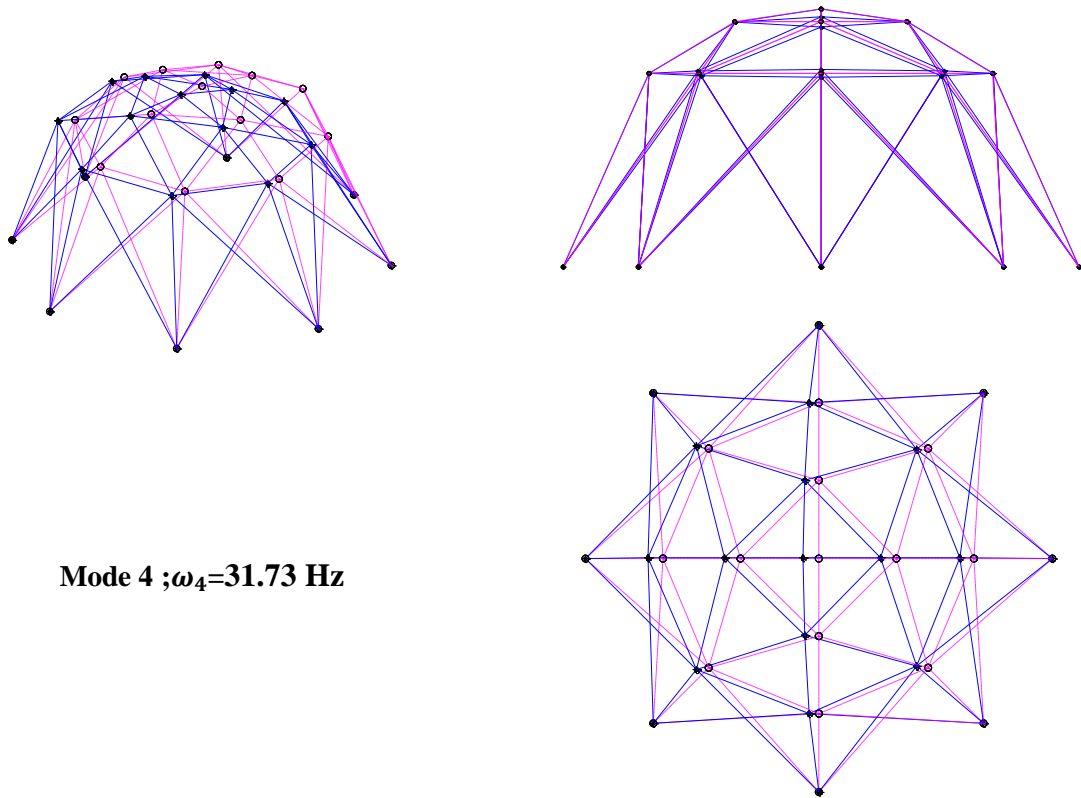


Figure 8. Les quatre modes propres

## 2.11 Applications numériques (LFCR)

### 2.11.1 Treillis 2D :

Dans le premier cas, l'élément 2 est endommagé à 15% l'histogramme ci-dessous présent les valeurs du LFCR pour chaque élément.

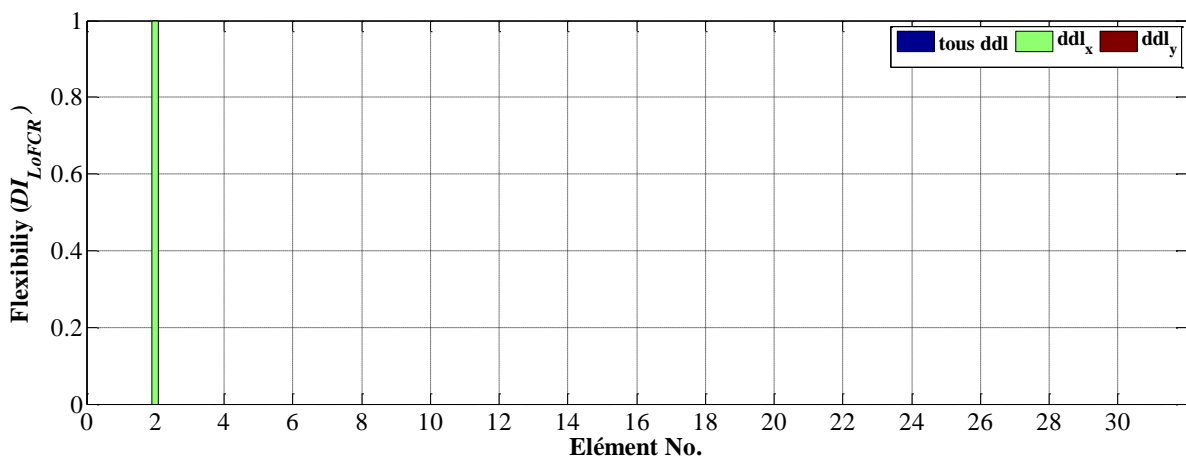


Figure 9 : Histogramme des valeurs LFCR d'endommagement de l'élément 2.

Pour le deuxième cas, nous endommageons l'élément 9 à 8%, l'élément 10 à 5% l'histogramme des valeurs du LFCR obtenues est présenté ci-dessous :

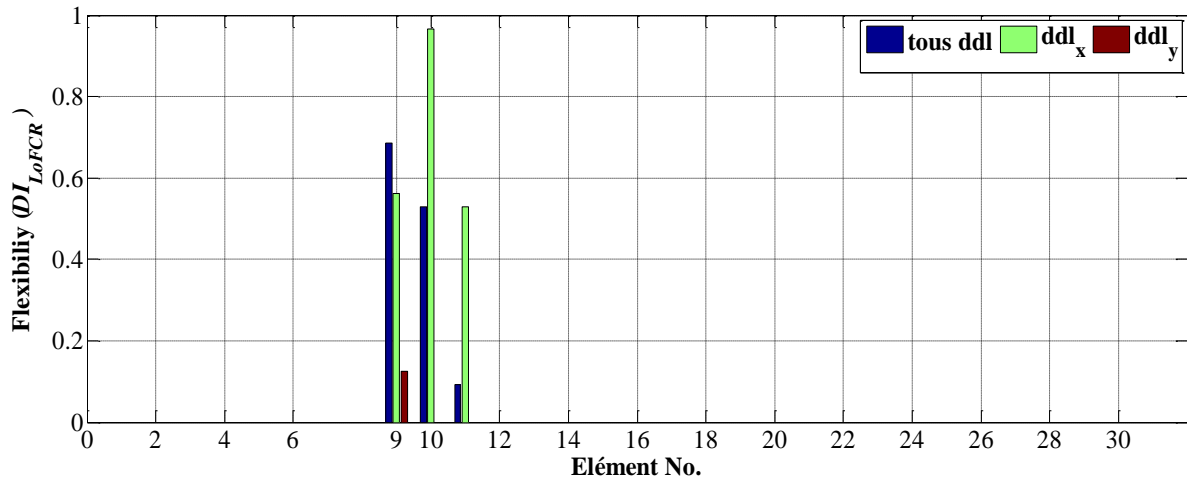


Figure 10 : Histogramme des valeurs LFCR pour l'endommagement des éléments 9,10.

D'après les figures, nous observons que la valeur du LFCR de l'élément endommagé est Toujours la plus élevée, quelle que soit sa position dans le treillis ou le pourcentage de Dommage appliqué.

**2.11.2 Treillis 3D :**

Dans le premier cas, l'élément 3 est endommagé à 15% l'historgramme des valeurs du LFCR obtenues sont présentées ci-dessous :

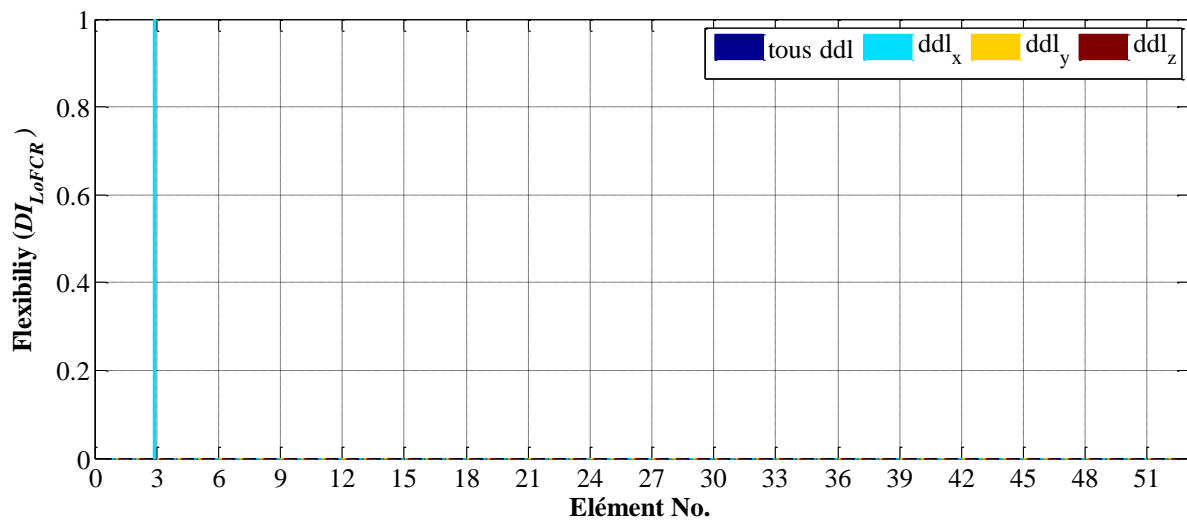


Figure 11 : Histogramme des valeurs LFCR pour l'endommagement de l'élément 3.

Pour 2<sup>ème</sup> cas, nous endommageons l'élément 9 à 8% et l'élément 10 à 5% l'historgramme Des valeurs du LFCR obtenues sont présentées ci-dessous :

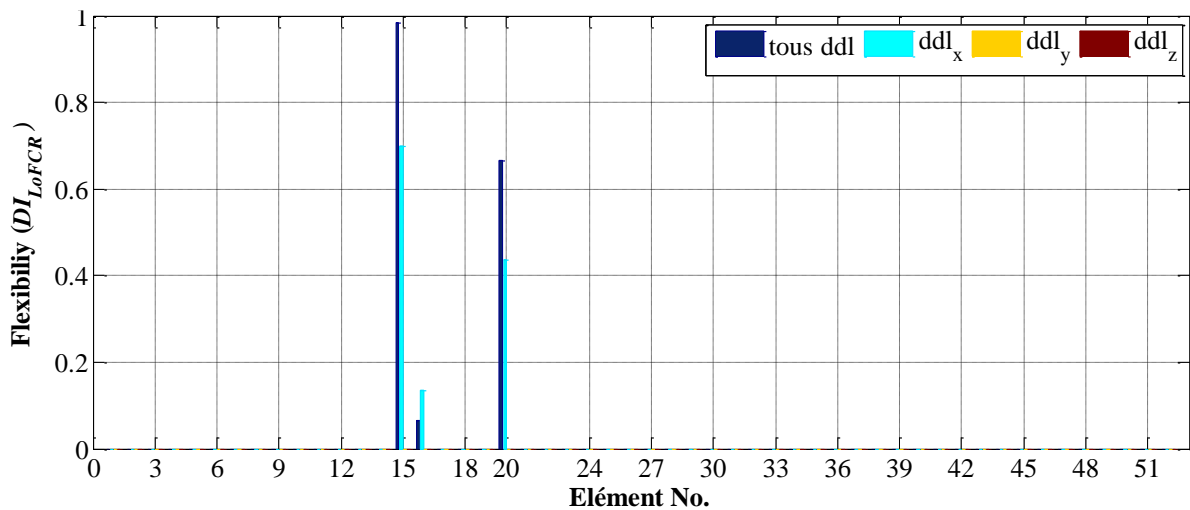


Figure 12 : Histogramme des valeurs LFCR pour l'endommagement des éléments 15,20

### 2.12. Conclusion sur les résultats

Les figures présentées montrent clairement que la valeur du LFCR (Local Frequency Change Ratio) des éléments endommagés est toujours la plus élevée, quelle que soit leur position dans le treillis ou le pourcentage de dommage appliqué. Plus précisément, les figures 7, 8, 9, 11, 12 et 13 illustrent que les valeurs de LFCR des éléments endommagés restent systématiquement les plus importantes. Ces résultats confirment que la méthode basée sur le LFCR permet de localiser avec précision les dommages dans les structures treillis.

A decorative border surrounds the page, featuring a repeating pattern of black hats and feathers. The hats are positioned at the top and bottom corners, while the feathers are at the left and right corners. A central horizontal line runs across the top and bottom, with the hats and feathers placed along it.

# Chapitre 3

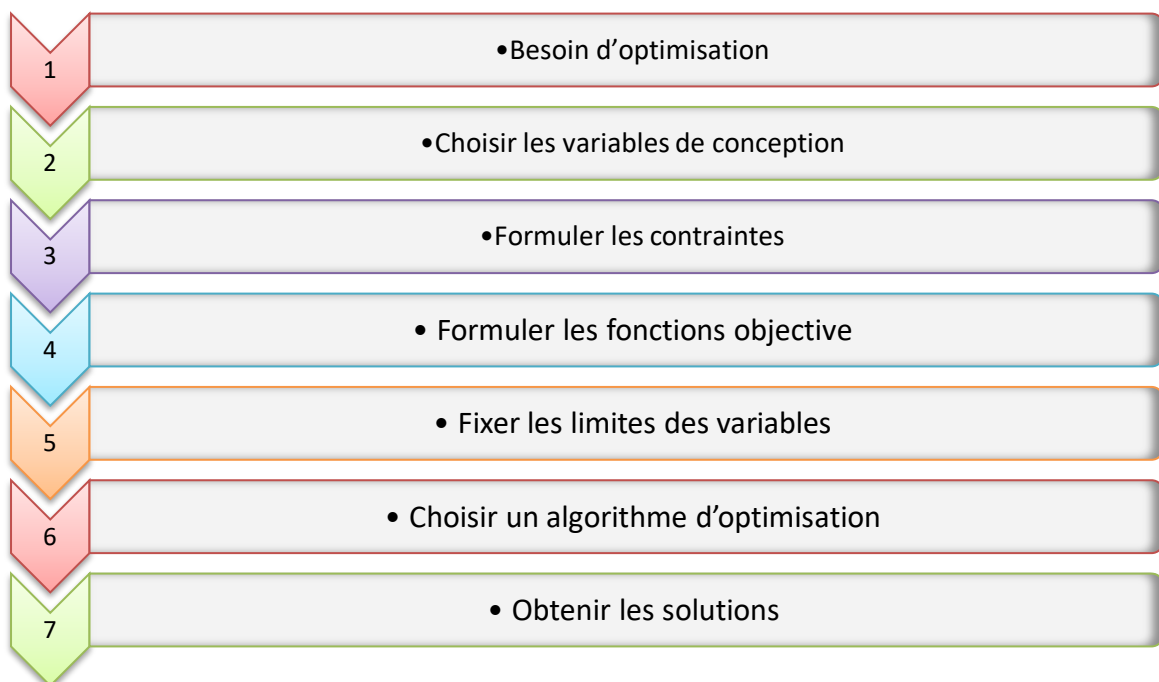
## Introduction

L'optimisation est une discipline des mathématiques appliquées qui vise à déterminer la meilleure solution possible à un problème, en respectant un ensemble de contraintes données. Elle consiste à maximiser ou à minimiser une fonction objective, qui représente par exemple un coût, un poids, un temps, une énergie ou une efficacité. Les problèmes d'optimisation sont omniprésents dans la vie réelle et dans divers domaines tels que l'ingénierie, la gestion, l'économie, l'informatique ou encore la logistique. L'optimisation joue un rôle fondamental dans la prise de décision rationnelle.

Historiquement, les premières méthodes d'optimisation remontent aux travaux de Newton, Lagrange et Cauchy, fondateurs du calcul différentiel et du calcul des variations. Au fil du temps, diverses approches ont vu le jour, telles que les méthodes analytiques classiques, les techniques avancées et les algorithmes inspirés des phénomènes naturels comme les algorithmes génétiques, le recuit simulé ou les réseaux de neurones.

Cependant, l'optimisation ne se limite pas à la recherche de performance dans les calculs. Elle peut également servir à d'autres objectifs essentiels comme la classification ou la prédiction des zones endommagées, ce qui renforce sa valeur dans les démarches de maintenance préventive et de fiabilité des structures.

Les différentes techniques d'optimisation s'appuient sur un ensemble d'algorithmes. Ces algorithmes ont pour but de trouver la solution optimale à un problème donné en générant et en comparant plusieurs solutions alternatives à partir d'une connaissance préalable du système étudié. Le processus d'optimisation suit généralement des étapes bien définies, menant ainsi à la meilleure solution possible en fonction des critères fixés.



*Figure 13 : Mécanisme de résolution par optimisation.*

### 3.1 Généralités sur les algorithmes d'optimisation

#### 3.1.1 Variables du problème

La formulation d'un problème d'optimisation commence par l'identification des variables de conception, également appelées variables du problème, qui évoluent au cours du processus d'optimisation. Un problème de conception implique généralement de nombreux paramètres, dont certains ont une influence cruciale sur les performances ou la faisabilité de la solution. Ces paramètres sélectionnés sont regroupés sous forme de variables de décision, qui peuvent être représentées par une ou plusieurs grandeurs selon la complexité du problème.

La première règle essentielle dans la formulation d'un problème d'optimisation consiste à limiter le nombre de variables de conception au strict nécessaire. Cette approche permet de réduire la complexité du problème. Les résultats initiaux de l'optimisation peuvent ensuite permettre de remplacer les variables existantes par d'autres, plus pertinentes.

On considère généralement un ensemble  $N$  variables réelles regroupées dans un vecteur de conception, noté  $x = [x_1, x_2 \dots x_n]$ . Ces variables ne peuvent pas prendre n'importe quelle valeur arbitrairement, mais doivent respecter un ensemble de contraintes définies par le problème.

#### 3.1.2 Les contraintes

Les contraintes traduisent certaines relations fonctionnelles entre les variables de conception et d'autres paramètres du système, en tenant compte des phénomènes physiques, des conditions de fonctionnement ou des limitations en ressources. Elles servent à garantir que les solutions proposées respectent les exigences techniques, économiques ou pratiques du problème étudié.

La nature et le nombre de contraintes à intégrer dans la formulation dépendent du contexte du problème et des choix de l'utilisateur. Ces contraintes peuvent être exprimées de manière mathématique précise ou, dans certains cas plus complexes, nécessiter des outils de calcul avancés.

Par exemple, la contrainte de résistance maximale dans une structure est une contrainte classique. Si une structure est régulière, il est souvent possible d'établir une relation mathématique explicite entre la contrainte maximale admissible et la structure. Si elle est irrégulière, il devient nécessaire d'utiliser des méthodes numériques, telles que la simulation par éléments finis, pour évaluer cette contrainte. On distingue généralement deux grandes catégories de contraintes :

1. Les contraintes d'inégalité, ou une fonction doit rester inférieure ou supérieure à une certaine valeur ( $gx: g(x) \leq 0$ )
2. Les contraintes d'égalité, ou une fonction doit être exactement égale à une valeur donnée ( $ex: h(x) = 0$ )

##### a) Contrainte d'inégalité

Les contraintes d'inégalité expriment que certaines relations fonctionnelles entre les variables de conception doivent rester inférieures, supérieures ou égales à une valeur limite, souvent liée à une ressource disponible ou à une limite physique.

Par exemple, la contrainte mécanique  $\sigma(x)$  en un point d'un composant doit rester inférieure ou égale à la résistance admissible du matériau :

$$\sigma(x) \leq S_{admissible} \quad (1.170)$$

Selon le cas, certaines contraintes peuvent aussi imposer que la fonction soit supérieure ou égale à une valeur donnée :  $g(x) \geq 0$

### b) contraintes d'égalité

Les contraintes d'égalité imposent que certaines fonctions, dépendant des variables de conception, égalisent exactement une valeur fixée. Cela représente un niveau de précision souvent difficile à atteindre dans les algorithmes d'optimisation. Par exemple, si la déflexion  $\sigma(x)$  d'un point d'un composant doit être exactement égale à 5 mm, la contrainte s'écrit :

$$\sigma(x) = 5 \quad (1.171)$$

Cependant, dans la pratique, les contraintes d'égalité sont délicates à traiter. Pour faciliter leur intégration dans les algorithmes, **elles** sont fréquemment relaxées en les convertissant en deux contraintes d'inégalité équivalentes :

$$\begin{aligned} \sigma(x) &\geq 4 \\ \sigma(x) &\leq 6 \end{aligned} \quad (1.172)$$

Cette approche permet une plus grande souplesse dans la résolution tout en maintenant la contrainte proche de sa valeur cible.

### 3.1.3 Fonctions objectives

Dans un problème d'optimisation, la fonction objective représente le critère à maximiser ou minimiser selon la nature du problème. Les algorithmes d'optimisation se divisent en deux grandes catégories : ceux qui traitent une fonction unique et celles qui gèrent plusieurs fonctions simultanément (optimisation multi-objectifs).

#### a) Fonction objective unique

Dans le cas de l'optimisation à critère unique, on cherche à déterminer la valeur minimale ou maximale d'une fonction  $f(x)$ , selon l'objectif du problème par exemple :

Dans une usine on peut chercher à minimiser le temps de traitement des commandes par convention dans la littérature de l'optimisation, la majorité des problèmes sont formulés sous forme de minimisation ainsi lorsqu'un objectif est à maximiser, on transforme le problème en minimisant l'opposé de la fonction c'est-à-dire  $(-f)$  la formulation mathématique générale d'un optimum local (minimum ou maximum) s'écrit ainsi :

$f: x \rightarrow \mathbb{R}$  On dit que  $\hat{x}_i \in X \in \mathbb{R}^n$  est un optimum local si :

$$f(\hat{x}_i)_{min} \leq f(x) \leq f(\hat{x}_i)_{max} \quad (1.173)$$

#### b) fonction objectives multiples

Dans de nombreux problèmes de conception, il est nécessaire d'optimiser plusieurs critères simultanément. C'est le cas par exemple ; lorsque l'on souhaite minimiser le cout tout en maximisant la performance d'un système, on parle alors d'optimisation multi-objective. Ce type d'optimisation ne cherche pas une unique solution optimale, mais un compromis entre plusieurs objectifs, souvent représenté par un ensemble de solutions dites de Pareto ou aucune solution n'est globalement meilleure que les autres sur tous les critères.

Dans les situations réelles de prise de décision, il est fréquent de devoir optimiser plusieurs critères simultanément, cela conduit à l'optimisation multi-objectifs, ou l'on considère un ensemble  $F$  constitué de  $n = |F|$  fonction objectives  $f_i$  chacune représentant un aspect particulier du problème à améliorer.

L'un des principaux défis de cette approche réside dans la nécessité de trouver un compromis entre des objectifs souvent contradictoires. Reprenons l'exemple d'une usine de production, plusieurs critères telles que :

- ✚ Minimiser le délai entre la commande et l'expédition du produit.
- ✚ Maximiser le profit global.
- ✚ Réduire les coûts.
- ✚ Augmenter la quantité.
- ✚ Réduire l'impact environnemental.

Il est évident que certains de ces objectifs s'opposent naturellement, par exemple améliorer la qualité ou diminuer l'empreinte écologique peut entraîner une hausse des coûts de productions. Face à ces conflits, une approche courante consiste à formuler une fonction globale pondérée  $g(x)$  qui combine les différentes fonctions  $f_i \in F$  selon leur importance relative. Cette fonction est définie comme somme pondérée :

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i f_i(x) \quad (1.174)$$

Ou chaque  $\omega_i$  est un poids associé à la fonction  $f_i$  reflétant sa priorité dans le processus d'optimisation en ajustant ces poids il est possible de privilégier certains objectifs sur d'autres. De plus, l'utilisation de poids signés permet d'intégrer à la fois des objectifs à minimiser et maximiser. Par exemple affecter un poids  $\omega_a = 1$  à la fonction  $f_a$  signifie qu'on cherche à la minimiser, tandis qu'un poids  $\omega_b = -1$  appliqué à  $f_b$  revient à maximiser cette dernière puisque la minimisation de  $-f_b$  équivaut à la maximisation de  $f_b$ . Ainsi que l'on cherche à minimiser ou maximiser la fonction globale  $g(x)$ , les effets sur les fonctions individuelles peuvent être contrôlés finement facilitant l'arbitrage entre objectifs multiples et souvent antagonistes.

### 3.1. 4 L imite des variables

La dernière étape de la formulation d'un problème d'optimisations consiste à définir les bornes minimales et maximales pour chaque variable de conception. Ces limites dépendent du type d'algorithme utilisé. Certains algorithmes n'en ont pas besoin, car les contraintes du problème délimitent déjà l'espace des solutions réalisables, d'autres en revanche nécessitent que la recherche soit effectuée strictement à l'intérieur de ces bornes. En générale, chaque variable de conception  $x_i$  doit respecter la condition suivante :

$$\leq x_i \leq x_i^U \text{ pour } i = 1, 2, \dots, N \quad (1.175)$$

Déterminer ces limites peut parfois être complexe. Une méthode consiste à estimer la solution optimale attendue puis à fixer les bornes de manière à l'englober. Si au cours du processus d'optimisation on remarque qu'une variable optimale se situe très proche de ses bornes il peut être judicieux de réviser ces limites et de relancer l'algorithme une fois les quatre éléments fondamentaux du problème d'optimisation définis les variables, fonctions objectives, contraintes et bornes. Le problème peut être formulé sous une forme mathématique standard appelée format de programmation.

## 3-2 les paramètres d'un algorithme d'optimisation

### 3.2.1 Approximation Initiale

Pour initialiser l'algorithme, il est nécessaire d'avoir une approximation initiale à la solution  $x_o$  (point de départ). Le choix d'une bonne approximation initiale conditionne la convergence ou pas de la solution.

### 3.2.2 Nombre d'itérations

Un algorithme d'optimisation utilise un processus récursif, calcule une nouvelle approximation (itération) à la solution réelle jusqu'à ce que les critères de convergence Soient atteints. En programmation c'est une boucle de répétition ou la nouvelle approximation est construite à partir des approximations antérieures.

### 3.2.3 Vitesse de convergence

Quand on parle de convergence proche d'une solution, on parle de la vitesse à laquelle les termes de l'itération approchent sa limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^q} = \mu, \text{ Ou } \mu > 0 \text{ et } q \text{ est l'ordre de convergence.}$$

En générale, les ordres de convergences son linéaires (P=1) quadratiques (p=2) cubique (p=3) quartiques (P=4) etc. Une méthode d'optimisation avec l'ordre de convergence supérieur arrive à la solution avec peu d'itérations. Le choix d'une méthode avec haute convergence est important pour les problèmes d'une certaine taille ou avec de multiples paramètres par exemple pour une convergence quadratique. On peut dire que le nombre de chiffres corrects est double (au minimum) à chaque pas de calcul ou dit sous une autre forme, l'erreur diminue quadratiquement à chaque itération.

Si un algorithme ne converge pas, ça ne veut pas dire qu'il n'existe pas de solution. Il n'existe aucun algorithme universel dont la convergence soit garantie. En général. Il dépend du choix de l'initialisation  $x_0$  et des propriétés de la fonction (continuité).

### 3.2.4 Critère d'arrêt

Les critères pour arrêter le processus de calcul sont plusieurs. Les plus utilisées sont :

- a) Nombre maximale d'itérations  $N_{max}$ .
- b)  $\|f(x_n)\| < \varepsilon_1$  Valeur de la fonction.
- c)  $\|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon_2$  Différence entre deux approximations successives.

Où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2 \in R$  sont les tolérances choisies en fonction du type de problème en générale. Ce sont des valeurs négligeables ( $\varepsilon_i \approx 10^{-4} - 10^6$ ).

## 3.3 Algorithme du Colibri Artificiel (AHA)

### 3.3.1 Introduction à algorithme

Cet algorithme s'inspire d'un processus biologique, basé sur les comportements des colibris. Grâce à leur grande mobilité, les colibris sont capables de se déplacer rapidement d'un endroit à un autre. De plus, les lieux qu'ils ont visités (appelés les zones de chasse) sont conservés dans leur mémoire. Ils se souviennent efficacement des informations sur chaque fleur dans une zone, notamment le temps mis pour l'atteindre. En conservant toutes ces informations, les colibris décident où aller ensuite pour leur alimentation et évitent de retourner vers les fleurs récemment visitées. Les trois principaux modèles de recherche de nourriture des colibris incluent la recherche guidée, la recherche territoriale et la recherche par migration.



*Figure 14 images réelles d'un colibri.*

Bakir [108] a présenté une version améliorée de l'Artificial Hummingbird Algorithm (AHA) appelée enhanced Artificial Hummingbird Algorithm (en AHA). Elle est destinée à résoudre des problèmes d'optimisation globale et des problèmes de conceptions en ingénierie. Cette version améliorée intègre un opérateur dynamique d'équilibre entre la distance et la fitness (dFDB) permettant de mieux gérer le comportement entre exploration et exploitation. Cet optimal local (en AHA) est testé sur des fonctions benchmark standards des suites CEC2020 où il démontre une meilleure performance statique par rapport à l'AHA d'origine et à plusieurs autres algorithmes de pointe. De plus, la méthode est validée sur trois problèmes pratiques, à savoir, l'extraction de paramètres de cellules solaires à diode unique et double, ainsi que l'optimisation d'un réservoir sous pression. Les résultats expérimentaux confirment que (en AHA) améliore significativement la précision des solutions et la rapidité de convergence, confirmant ainsi son efficacité et sa robustesse pour des applications réelles en ingénierie.

Alsalmi et Marzougui [109] ont proposé une nouvelle variante de l'algorithme Artificial Hummingbird Algorithm (AHA) appelée Oppositinal chaotic Artificial Hummingbird Algorithm (OCAHA). L'OCAHA intègre l'apprentissage opposé (OBL) et des séquences chaotiques basées sur les cartes Gauss/mouse pour améliorer la diversité de la population et éviter la convergence prématurée. L'efficacité de l'OCAHA est évaluée en deux phases, d'abord sur 29 fonctions de tests CEC2017 puis sur 10 cas d'ingénierie complexe. Les résultats montrent que L'OCAHA surpasse la version originale AHA et d'autres algorithmes de pointe en termes de précision des solutions, de rapidité de convergences et de robustesse, tout en réduisant le coût.

### 3.3.2. Présentation de l'algorithme AHA

#### 3.3.2.1 Initialisation

La formulation mathématique de l'AHA est illustrée en construisant la population initiale de  $x$  colibris composée de  $N$  individus, comme indique dans l'équation (1.176) :

$$X_i = L + r(U - L), i = 1, 2, \dots, N \quad (1.176)$$

Où  $L$  et  $U$  représentent respectivement les bornes inférieures et supérieures pour une dimension  $D$ .  $r$  est un vecteur aléatoire dans l'intervalle  $[0,1]$ .

Un tableau des sources de nourriture visitées est créé à l'aide de l'équation (1.177) :

$$VT_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \text{null} & \text{si } i = j \end{cases}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, \quad (1.177)$$

Lorsque  $i = j$  la valeur de  $VT_{ij}$  devient nul et représente la nourriture consommée par un colibri qui a sa source de nourriture spécifique. En revanche, lorsque  $i \neq j$  et que  $VT_{ij}$  est nul cela indique que le colibri  $i$  a visité la source de nourriture  $j$ .

#### 3.3.2.2 Recherche guidée

A ce stade, trois techniques de vol sont utilisées lors de la recherche de nourriture. Le vol omnidirectionnel, le vol diagonal et le vol axial. Le vol axial est défini à l'aide de l'équation :

$$D^i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = \text{randi}([1, d]) \quad i = 1, \dots, d \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.178)$$

Le vol diagonal peut être exprimé à l'aide de l'équation (1.179) :

$$D^i = \begin{cases} \{1, \text{ si } i = P_q(j), i \in [1, K] \\ , P_q = \text{randperm}(kp) \\ , kp \in [2, [r_1 \cdot (d - 2) + 1] \\ 0, \text{ si } i = 1, \dots, d \end{cases} \quad (1.179)$$

Le vol omnidirectionnel est représenté à l'aide de l'équation :

$$D^i = 1 \quad i = 1, \dots, d \quad (1.180)$$

Où le rand  $i$  ( $[1, d]$ ) représente un entier aléatoire entre 1 et  $d$ . Le rand-perm( $k$ ) représente une permutation aléatoire des entiers entre 1 et  $k$ , et  $r_1 \in [0, 1]$  représente un nombre aléatoire.

La formulation du comportement de recherche guidée est donnée par l'équation :

$$V_i(t + 1) = X_{i,t}(t) + a \times D \times (X_i(t) - X_{i,t}(t)), a \in N(0,1) \quad (1.181)$$

Où  $X_{i,t}(t)$  désigne la source de nourriture  $i$  à l'itération  $X_i(t + 1)$  :

$$= \begin{cases} X_i(t), \text{ si } f(x_i(t)) \leq f(v_i(t + 1)) \\ v_i(t + 1), \text{ si } f(x_i(t)) > f(v_i(t + 1)) \end{cases} \quad (1.182)$$

Où  $f$  est la valeur de l'aptitude.

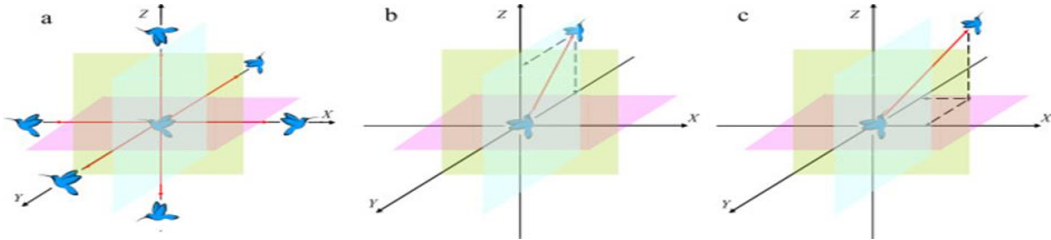


Figure 15 : Les trois comportements de vol des colibris sont (a) vol axial (b) vol diagonal (c) vol omnidirectionnel.

### 3.3.2.3 Recherche territoriale

Un colibri est plus susceptible de chercher une nouvelle source de nourriture après avoir visité sa cible et consommé le nectar de la fleur plutôt que de retourner vers d'autres sources présentes. Par conséquent, il peut facilement se déplacer vers un endroit proche de son territoire, ou une source de nourriture potentiellement meilleure. Il peut être identifié par la modélisation est donné par l'équation (1.183) :

$$V_i(t + 1) = X_{i,t}(t) + b \times D \times (X_i(t) - X_{i,t}(t)), b \in N(0,1) \quad (1.183)$$

### 3.3.2.4 Recherche de nourriture par migration

Dans la dernière phase, l'algorithme préféré d'un colibri s'épuise et migre vers une source précédente au profit plus éloignée. Ce colibri depuis une source de nectar avec un taux de recharge le plus faible vers un autre taux de production aléatoire est décrit par l'équation (1.184) :

$$X_\omega(t + 1) = L + r \times (U - L) \quad (1.184)$$

Où  $X_\omega$  représente la source de nourriture avec la plus faible valeur de fitness.

Un élément crucial de l'algorithme AHA est le tableau de visites. À l'aide des équations (1.183) et (1.184), ce tableau est mis à jour par chaque colibri :

$$VT_{i,k} = VT_{i,k} + 1, \text{ if } k \neq i \& k \neq \text{target}, k = 1, 2, \dots, h_n \\ VT_{i,\text{target}} = 0 \quad (1.185)$$

$$VT_{i,k} = \max_{L \neq i \& L \in h_n} (VT_{i,L}) + 1 \text{ si } k \neq i, k = 1, 2, \dots, h_n$$

Ce tableau de visites indique le temps écoulé depuis la dernière visite du même colibri à chaque source de nourriture. Un long intervalle entre les visites témoigne d'une fréquence de visite élevée.

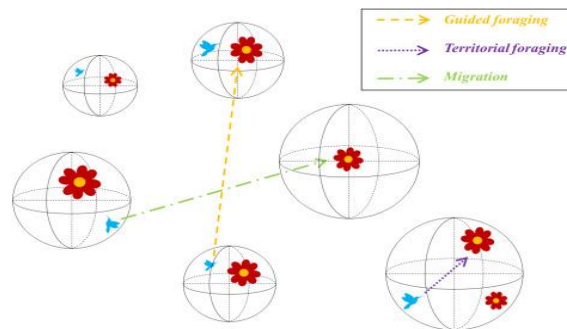


Figure 16 : Modèles de recherche de nourriture et de migration des colibris.

### 3.3.2.5 l'organigramme de l'Algorithme AHA

- **Initialisation** : Génération de la population initiale de colibri et des sources de nourriture puis la phase de recherche et application des trois stratégies de recherche de nourriture.
- **Recherche guidée** : Choix de la meilleure source en fonction des souvenirs du colibri.
- **Recherche territoriale** : Exploration d'une nouvelle source de nourriture proche.
- **Recherche par migrations** : Déplacement vers une nouvelle région si les ressources s'épuisent.
- **Mise à jour des visites** : Modification du tableau des visites en fonction des déplacements des colibris.
- **Evaluation et sélection** : Calcul de la valeur d'aptitude et des meilleures solutions.
- **Condition d'arrêt** : Vérification des critères de convergence (nombre d'itération ou amélioration négligeable).

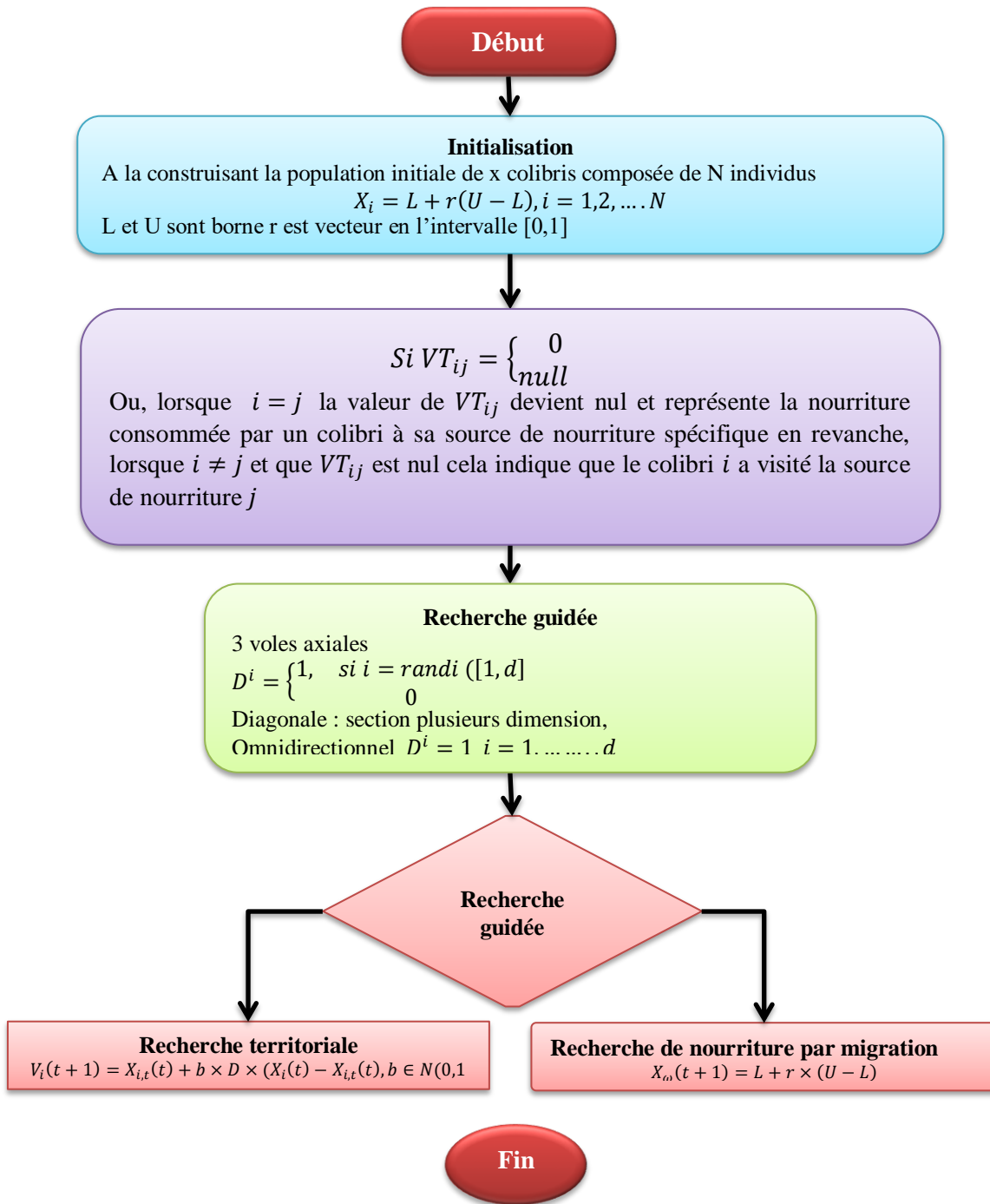


Figure 17 : L'organigramme de l'algorithme AHA.

### 3.5 Optimiseur du Pangolin Chinois (CPO)

#### 3.5.1 Introduction à l'algorithme

Le Chinese Pangolin Optimizer (CPO) est un algorithme méta-heuristique bio-inspiré qui imite les stratégies de chasse du pangolin chinois pour résoudre des problèmes d'optimisation complexes.

Il repose sur deux mécanismes principaux : L'attrait, où le pangolin simule une présence passive pour attirer sa proie, et la prédation, où il détecte sa cible et ajuste sa position pour maximiser l'efficacité de sa capture.

Ces comportements sont traduits en équations mathématiques, permettant une exploration optimale de l'espace de recherche et une convergence rapide vers la solution.

Comparé à d'autres algorithmes méta-heuristiques, le CPO a démontré une grande efficacité dans la résolution de problèmes d'ingénierie et de sélection de caractéristiques, prouvant son adaptabilité et ses performances élevées sur diverses fonctions de référence. Son approche unique est inspirée de la nature. En fait, une méthode prometteuse pour l'optimisation dans des environnements complexes et multidimensionnels.



*Figure 18 : Image réelle de Chinese Pangolin.*

Guo,Z,Liu et Jiang,F(2025)[110] présente le Chinese Pangolin Optimizer CPO comme un nouveau algorithme méta-heuristique bio-inspiré conçu pour résoudre des problèmes complexes de capacité de détection olfactive de traque d'approche rapide et d'alimentation qui ont été modélisées mathématiquement. L'algorithme alterne entre des phases d'exploration (recherche globale) et d'exploitation (recherche locale) assurant ainsi un équilibre entre la découverte de convergence basée sur la théorie des chaînes de Markov confirme sa stabilité et sa fiabilité pour évaluer ses performances. Le CPO a été testé sur 47 fonctions de référence (uni modale, multimodales, fonctions CEC2017, CEC2019, CEC2022) montrant une efficacité supérieure à celle de nombreux algorithmes existants. Il a également été appliqué avec succès à des problèmes concrets tels que l'optimisation de la conception en ingénierie et la sélection de caractéristiques dans des tâches de classification. Les résultats expérimentaux démontrent non seulement sa rapidité de convergence, mais aussi sa capacité à obtenir des solutions précises et robustes.

#### 3.5.2 Présentation de l'algorithme CPO

##### 3.5.2.1 Initialisation

Chaque individu  $X_i$  est initialisé aléatoirement dans l'espace de recherche :

$$X_i = X_{min} + r \cdot (X_{max} - X_{min}) \quad (1.186)$$

Où  $r$  est un nombre aléatoire uniforme dans  $[0, 1]$  :

### 3.5.2.2 Phase d'attrait

Le pangolin ajuste sa position en fonction des solutions voisines :

$$X_i^{t+1} = X_i^t + A \cdot (X_{best} - X_i^t) \quad (1.187)$$

Où A est un coefficient d'attractivité dépendant de la distance entre  $X_i$  et la meilleure solution  $X_{best}$ .

### 3.5.2.3 Phase de prédation

Le pangolin se rapproche rapidement de la meilleure solution en suivant une trajectoire optimisée.

$$X_i^{t+1} = X_i^t + p \cdot (X_{best} - X_i^t) + \lambda \cdot R \quad (1.187)$$

Où p est un facteur de prédation,  $\lambda$  un coefficient d'exploration et R une variable aléatoire pour diversifier la recherche.

### 3.5.2.4 Mise à jour et convergence

La convergence est contrôlée par une fonction de fitness  $f(x)$  et un critère de mise à jour :

$$X_{new} = X_{best} + \gamma \cdot (X_{mean} - X_{best}) \quad (1.188)$$

Où  $\gamma$  est un facteur d'ajustement basé sur la moyenne des solutions.

## 3.5.3 L'organigramme de l'Algorithme CPO

- **Initialisation**

Génération aléatoire de la population de solutions candidates.

Définition des paramètres de l'algorithme, incluant les coefficients d'attrait et de prédation.

- **Phase d'attrait**

Simulation du comportement passif du pangolin pour attirer les solutions optimales.

Mise à jour des positions des individus en fonction de l'attractivité des solutions voisines.

- **Phase de prédation**

Détection des meilleures solutions grâce à une fonction d'évaluations.

Approche rapide vers les solutions optimales en ajustant les positions des individus.

Applications d'une stratégie de fouille pour affiner la recherche autour des solutions prometteuse.

- **Mise à jour et convergence**

Vérification des critères de convergence.

Ajustement des critères de convergence.

Ajustement des paramètres pour améliorer la précision de l'optimisation.

Répétition du processus jusqu'à atteindre une solution optimale ou un seuil prédéfini.

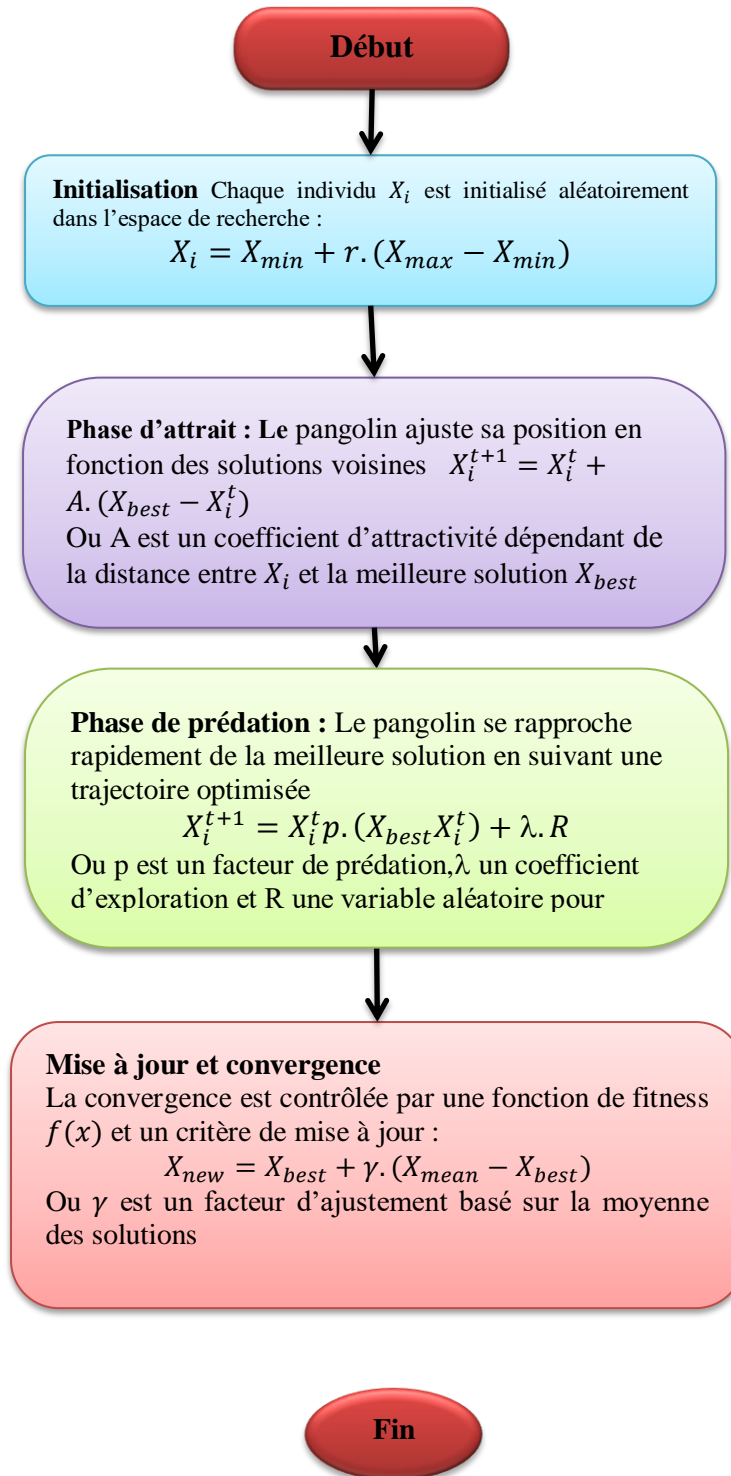


Figure 19 : L'organigramme de l'algorithme CPO.

### 3.6. Résultat d'optimisation

#### 3.6.1 Quantification des dommages

Cette étude propose une approche novatrice pour la quantification des dommages structurels, en intégrant deux techniques d'optimisation implémentées sous MATLAB. La méthodologie débute par la détermination de la profondeur des fissures affectant les éléments endommagés à l'aide de l'indicateur LoFCR. Par la suite, deux méthodes d'optimisation, AHA (Algorithme du Colibri Artificiel) et CPO (algorithme de l'Optimisation par Colonies de Pigeons), sont employées afin d'affiner cette quantification. Les résultats obtenus concernent deux structures en 2D à 31 éléments ainsi qu'une structure en 3D à 52 éléments.

#### 3.6.2 Résultats d'applications

En raison de son importance pratique, le problème d'identification d'endommagement dans les structures a fait l'objet d'une enquête approfondie et de nombreuses méthodes ont été proposées. Dans ce travail, la méthode de détection d'endommagement basée sur la méthode de flexibilité LoFCR a été utilisée.

#### 3.6.3 Application sur une structure barre à 31 éléments

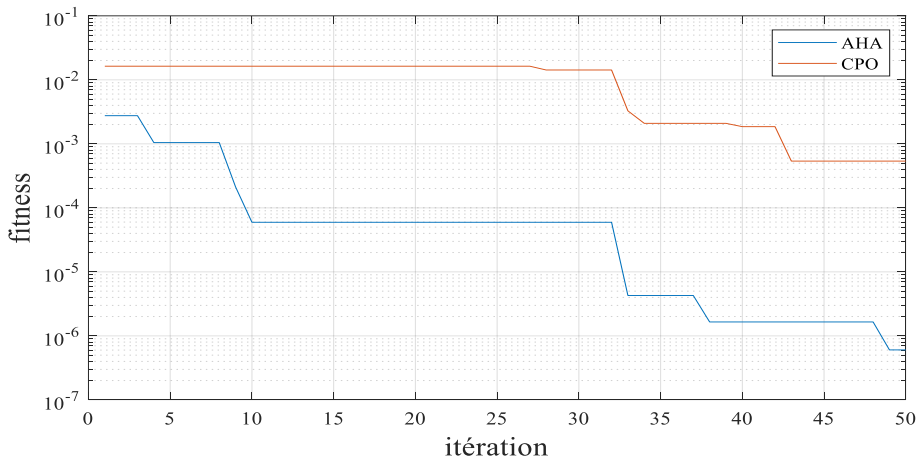
Après la détection des fissures dans les structures à barres 2D et 3D (respectivement 31 et 52 éléments), les méthodes d'optimisation AHA et CPO ont été appliquées afin de quantifier précisément les dommages. Les résultats sont présentés sous forme de tableaux comparatifs. Deux configurations d'expérimentations ont été étudiées pour deux cas distincts :

- **Premier cas** : Le nombre d'itérations a été fixé à 50, tandis que la taille de la population a été modifiée avec trois essais distincts : 50, 100 et 500 individus.
- **Deuxième cas** : Le nombre d'individus dans la population a été maintenu constant à 50, tandis que le nombre d'itérations a varié, avec des simulations menées à 100, 200 et 500 itérations.

Les tableaux fournis permettent d'analyser les performances respectives des méthodes AHA et CPO pour chaque configuration, offrant ainsi une évaluation comparative des résultats obtenus selon les différents paramètres testés

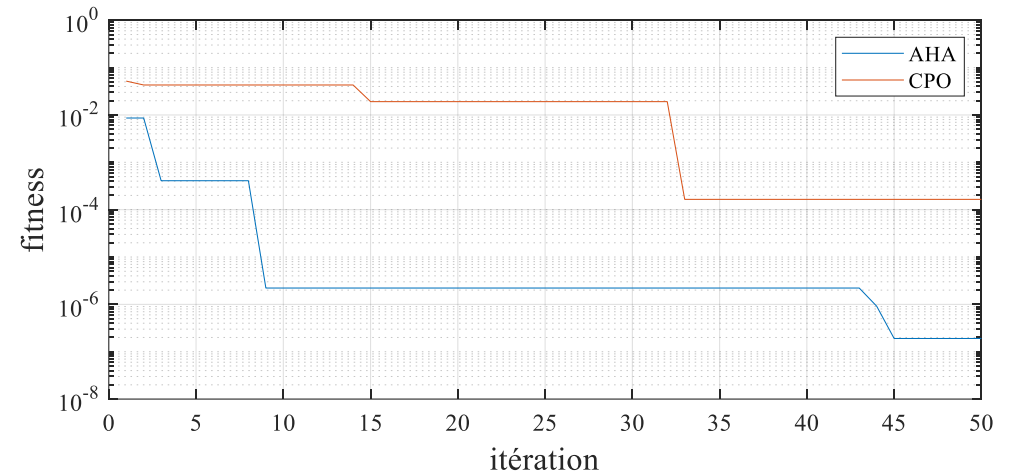
## 1<sup>er</sup> Cas : Structure 2D

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
<b>1</b>	13,175%	0	15,106%	0
<b>10</b>	15,018%	0,797	15,106%	0,643
<b>20</b>	15,003%	1,683	15,106%	1,358
<b>30</b>	15,000%	2,569	15,106%	2,073
<b>32</b>	15,000%	2,746	14,908%	2,216
<b>40</b>	15,000%	3,455	14,983%	2,788
<b>50</b>	15,000%	4,341	14,983%	3,502



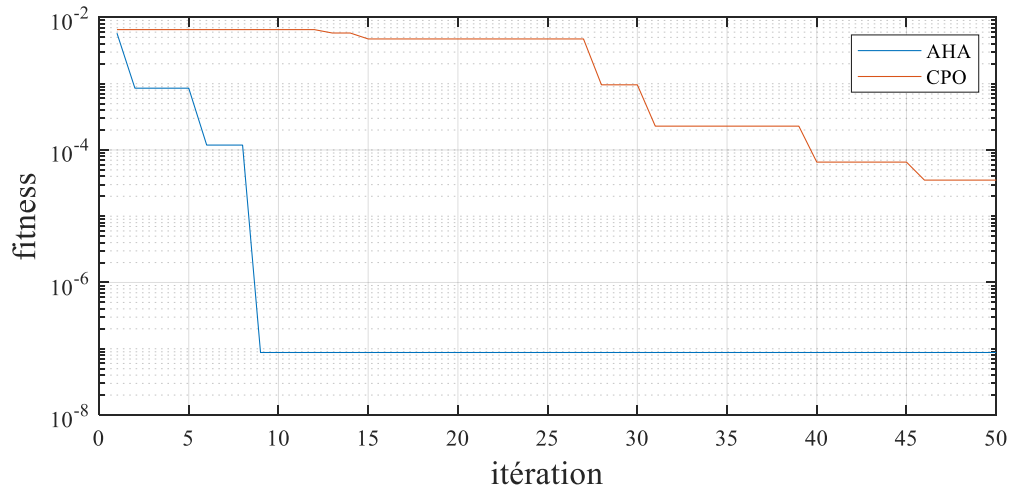
*Figure 20. Barre 2D –un seul endommagement 50 itérations et 50 Populations*

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
<b>1</b>	14,718%	0	15,075%	0
<b>10</b>	15,011%	1,421	15,075%	1,264
<b>20</b>	15,001%	2,999	15,075%	2,668
<b>30</b>	14,999%	4,578	15,075%	4,072
<b>33</b>	15,000%	5,052	15,073%	4,494
<b>40</b>	15,000%	6,157	14,994%	5,476
<b>50</b>	15,000%	7,735	14,995%	6,881



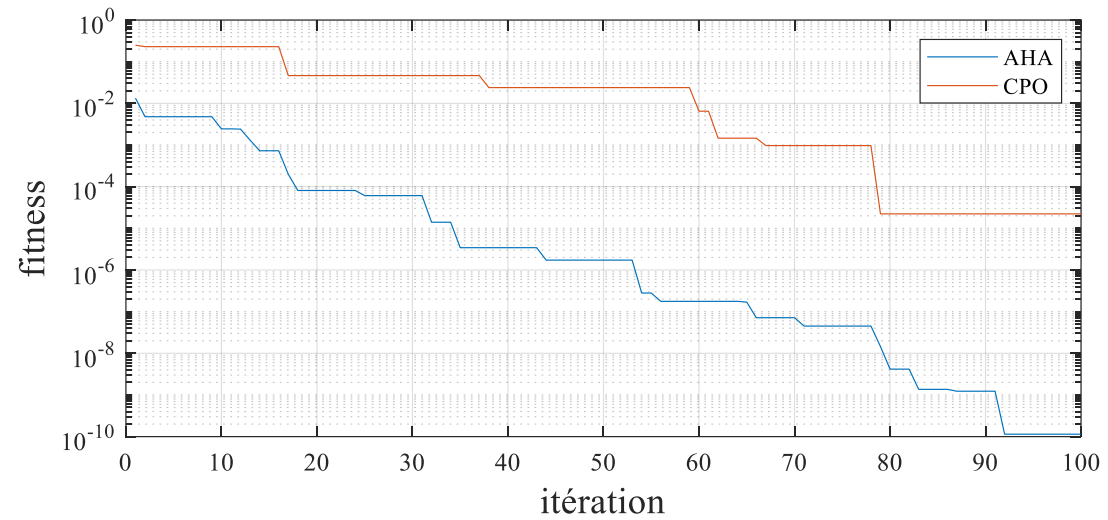
*Figure 21 barres 2D –un seul endommagement 50 itérations et 100 Populations.*

Itération	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
<b>1</b>	15,060%	0	15,041%	0
<b>5</b>	15,000%	2,953	14,980%	2,720
<b>10</b>	15,000%	6,645	14,980%	6,119
<b>20</b>	15,000%	14,027	14,981%	12,918
<b>30</b>	15,000%	21,410	14,981%	19,717
<b>40</b>	15,000%	28,793	15,015%	26,515
<b>50</b>	15,000%	36,176	15,001%	33,314



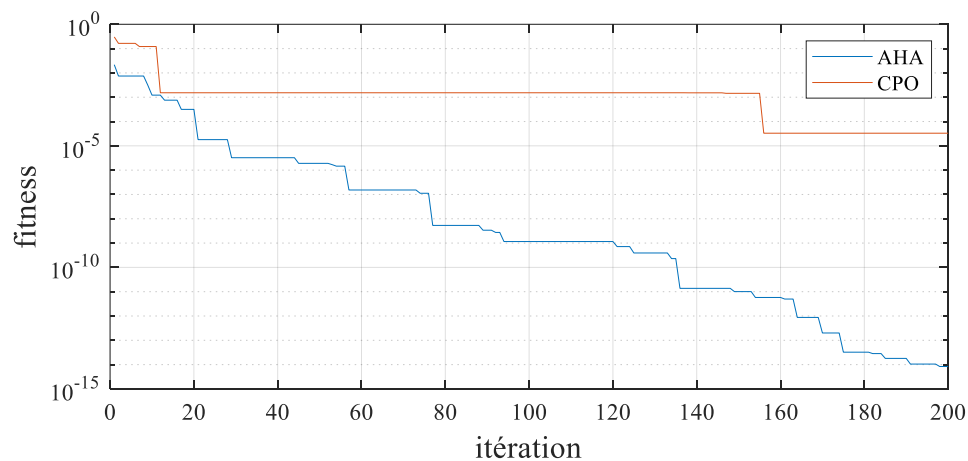
*Figure 22. Barre 2D –un seul endommagement 50 itérations et 500 Populations*

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
<b>1</b>	16,337%	0	12,667%	0
<b>10</b>	15,015%	0,696	12,667%	0,628
<b>20</b>	14,996%	1,470	12,667%	1,325
<b>22</b>	15,000%	1,625	12,667%	1,464
<b>30</b>	15,000%	2,243	12,667%	2,022
<b>40</b>	15,000%	3,017	12,667%	2,719
<b>50</b>	15,000%	3,791	12,667%	3,417
<b>60</b>	15,000%	4,564	14,647%	4,114
<b>70</b>	15,000%	5,338	15,059%	4,811
<b>80</b>	15,000%	6,111	14,997%	5,509
<b>90</b>	15,000%	6,885	14,997%	6,206
<b>100</b>	15,000%	7,658	14,999%	6,903



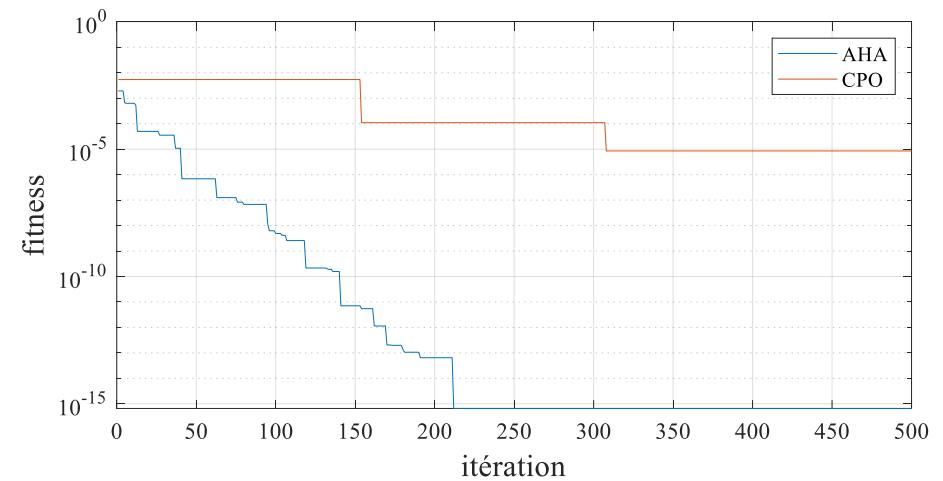
*Figure 23. Barre 2D –un seul endommagement 50 Populations et 100 itérations*

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
1	15,232%	0	15,686%	0
10	15,040%	0,654	15,686%	0,625
30	14,997%	2,108	15,686%	2,015
35	15,000%	2,472	15,686%	2,362
40	15,000%	2,835	15,686%	2,710
50	15,000%	3,563	15,584%	3,404
60	15,000%	4,290	15,584%	4,099
70	15,000%	5,017	15,584%	4,794
80	15,000%	5,744	14,465%	5,488
90	15,000%	6,471	14,465%	6,183
100	15,000%	7,198	15,083%	6,878
200	15,000%	14,468	14,999%	13,825



*Figure 24. Barre 2D –un seul endommagement 50  
Populations et 200 itérations*

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
1	14,95%	0	14,861%	0
13	15,00%	0,837	14,861%	0,822
100	15,00%	6,905	14,861%	6,784
200	15,00%	13,880	15,003%	13,636
300	15,00%	20,855	15,003%	20,489
400	15,00%	27,830	15,000%	27,341
500	15,00%	34,805	15,000%	34,193



*Figure 25. Barre 2D –un seul endommagement 50  
Populations et 500 itérations*

2<sup>eme</sup> cas

AHA			CPO			
Itérations	Élément 9	Élément 10	Élément 9	Élément 10	Temps	Temps
1	1,870%	7,963%	5,038%	4,353%	0	0
10	9,613%	4,932%	5,038%	4,353%	1,163	1,058
20	9,914%	4,960%	5,038%	4,353%	2,456	2,233
30	10,117%	4,994%	5,038%	4,353%	3,749	3,409
40	10,016%	5,004%	8,097%	5,324%	5,042	4,584
50	10,027%	4,995%	9,518%	5,124%	6,334	5,760

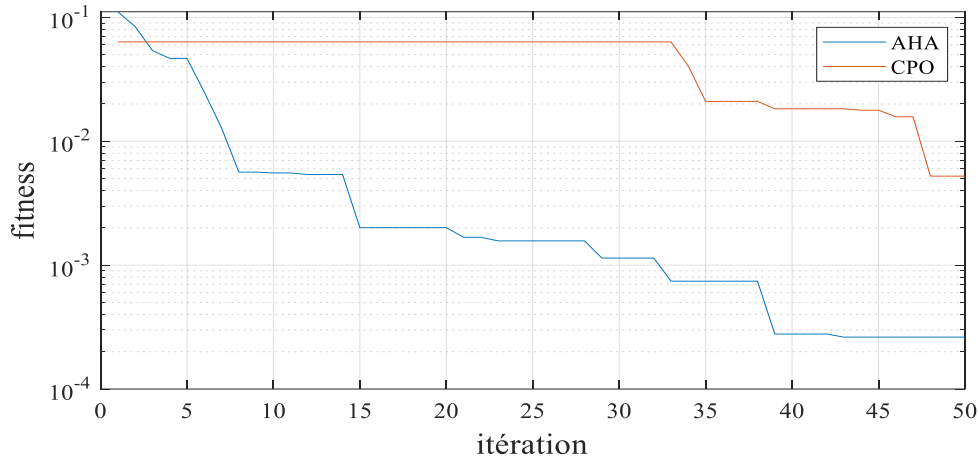


Figure 26. Barre 2D –deux endommagements 50 itérations et 50 Populations

AHA			CPO			
Itérations	Élément 9	Élément 10	Élément 9	Élément 10	Temps	Temps
1	3,181%	5,152%	5,181%	4,893%	0	0
10	10,535%	5,237%	5,181%	4,893%	1,899	1,955
20	10,032%	4,928%	5,181%	4,893%	4,010	4,127
30	9,986%	4,998%	5,181%	4,893%	6,120	6,299
36	10,000%	5,000%	6,994%	5,479%	7,386	7,603
40	10,000%	5,000%	9,952%	4,970%	8,231	8,471
50	10,000%	5,000%	10,005%	5,020%	10,341	10,644

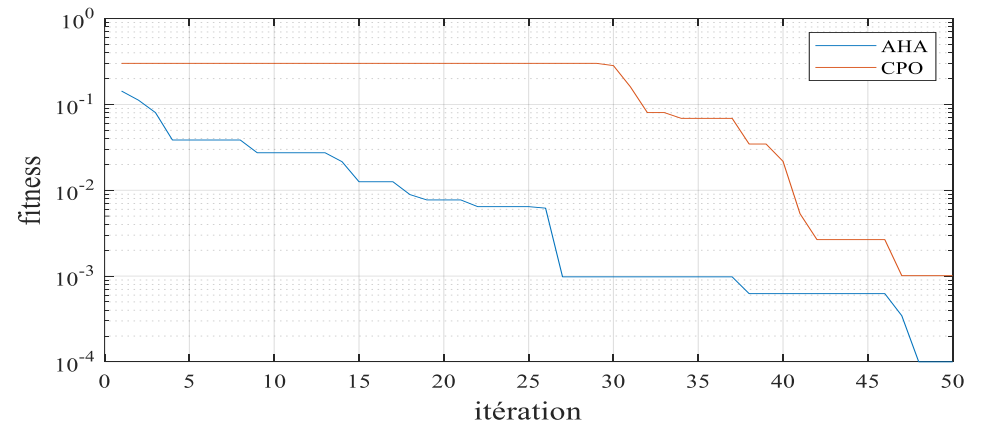
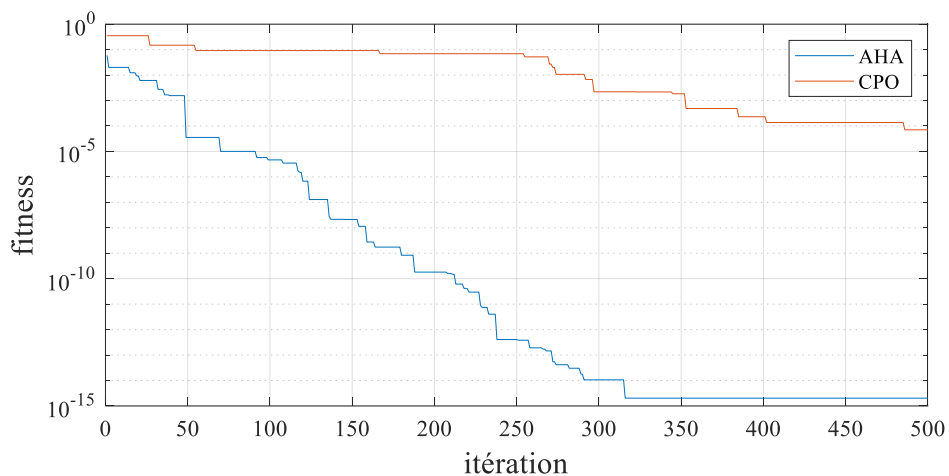


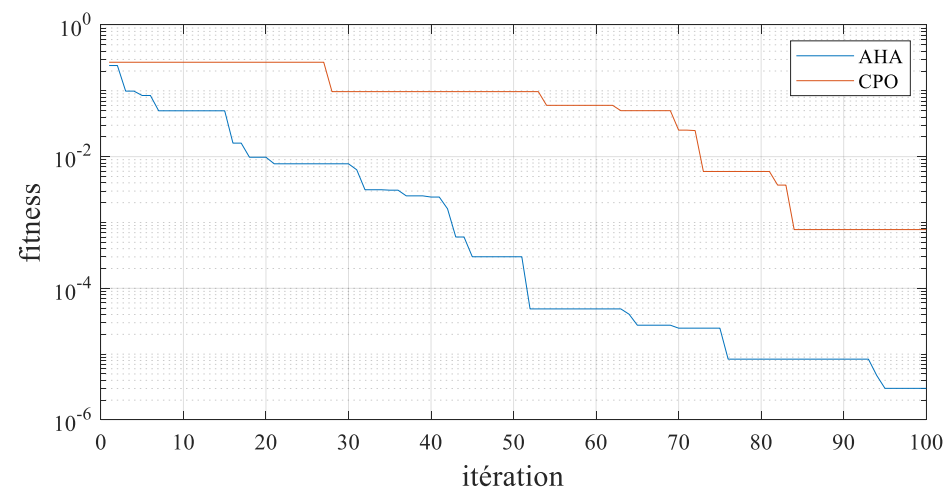
Figure 27. Barre 2D –deux endommagements 50 itérations et 100Populations

AHA			CPO			
Itérations	Élément 9	Élément 10	Élément 9	Élément 10	Temps	Temps
1	6,174%	5,328%	9,453%	4,285%	0	0
10	9,893%	5,021%	9,453%	4,285%	10,251	9,055
20	9,893%	5,021%	8,054%	5,388%	21,642	19,116
30	9,994%	5,003%	8,054%	5,388%	33,032	29,178
35	9,991%	5,002%	10,568%	4,919%	38,727	34,208
40	10,002%	5,000%	10,064%	5,050%	44,422	39,239
48	10,002%	5,000%	9,998%	5,000%	53,535	47,288
50	10,002%	5,000%	9,998%	5,000%	55,813	49,300



**Figure 28. Barre 2D –deux endommagements 50 itérations et 500 Populations**

Itérations	AHA		CPO		TEMPS	TEMPS
	Élément 9	Élément 10	Élément 9	Élément 10		
1	20,461%	1,101%	25,822%	7,984%	0	0
10	10,822%	4,965%	25,822%	7,984%	0,925	0,876
20	10,502%	4,965%	3,958%	6,825%	1,953	1,850
30	9,877%	5,025%	3,958%	6,825%	2,981	2,823
40	10,049%	5,007%	3,958%	6,825%	4,009	3,797
50	9,987%	5,008%	3,958%	6,825%	5,037	4,770
60	9,998%	5,000%	4,411%	5,880%	6,064	5,744
70	10,001%	5,000%	8,275%	5,282%	7,092	6,717
80	10,001%	5,000%	9,373%	5,151%	8,120	7,691
86	10,000%	5,000%	9,999%	4,977%	8,737	8,275
90	10,000%	5,000%	9,999%	4,977%	9,148	8,665
100	10,000%	5,000%	10,022%	4,993%	10,176	9,638



**Figure 29. Barre 2D –deux endommagements 50 Populations et 50 Itérations**

AHA			CPO			
Itérations	Éléments9	Élément10	Éléments9	Élément10	Temps	Temps
1	8,939%	3,974%	13,187%	0,759%	0	0
10	9,634%	5,473%	13,187%	0,759%	0,998	0,951
20	9,928%	5,055%	13,187%	0,759%	2,106	2,007
30	9,873%	5,020%	13,187%	0,759%	3,214	3,064
40	9,984%	5,005%	13,187%	0,759%	4,323	4,120
50	10,000%	5,001%	13,187%	0,759%	5,431	5,177
60	10,000%	5,001%	13,187%	0,759%	6,539	6,233
70	10,001%	5,000%	13,187%	0,759%	7,648	7,290
80	9,999%	5,000%	13,187%	0,759%	8,756	8,346
90	10,000%	5,000%	13,187%	0,759%	9,864	9,403
92	10,000%	5,000%	13,187%	0,759%	10,086	9,614
100	10,000%	5,000%	13,187%	0,759%	10,973	10,459
200	10,000%	5,000%	9,987%	5,004%	22,056	21,025

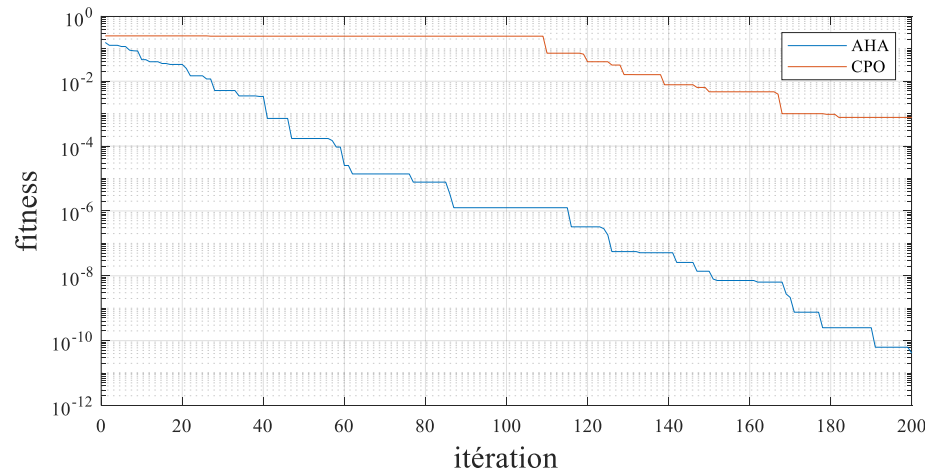


Figure 30. Barre 2D –deux endommagements 50  
Populations et 200 Itérations

AHA			CPO			
Itérations	Élément9	Élément10	Élément9	Élément10	Temps	Temps
1	17,720%	2,415%	6,013%	6,572%	0	0
76	10,000%	5,000%	5,441%	5,783%	6,79	6,78
100	10,000%	5,000%	5,441%	5,783%	8,96	8,95
200	10,000%	5,000%	5,441%	5,783%	18,01	18,00
300	10,000%	5,000%	10,245%	5,003%	27,06	27,05
400	10,000%	5,000%	10,002%	5,002%	36,11	36,09
500	10,000%	5,000%	9,999%	5,001%	45,16	45,14

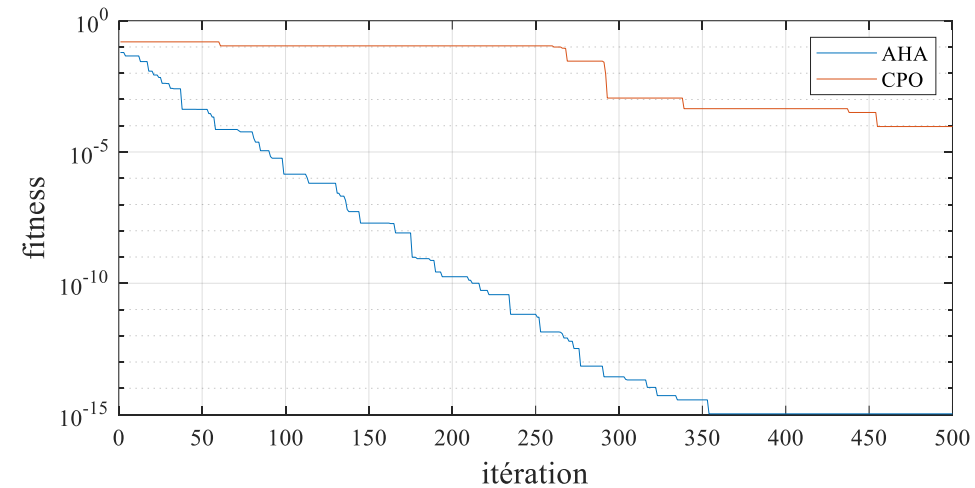


Figure 31. Barre 2D –deux endommagements 50  
Populations et 500 Itérations

### 3.7. Synthèse d'observations

En plus des deux algorithmes d'optimisations précédemment cités, l'étude a aussi examiné l'efficacité des techniques AHA et CPO pour quantifier les fissures dans une barre à 31 éléments les résultats ont révélé que ces méthodes d'optimisation permettent également d'atteindre une quantification précise des dommages.

#### 3.7.1 Applications pur une barres 3D 52 éléments

Après avoir identifié la présence de fissure dans une barre a 52 éléments nous avons mis en œuvre deux approches d'optimisations AHA et CPO afin d'évaluer l'étendue des dommages les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux ci-dessous

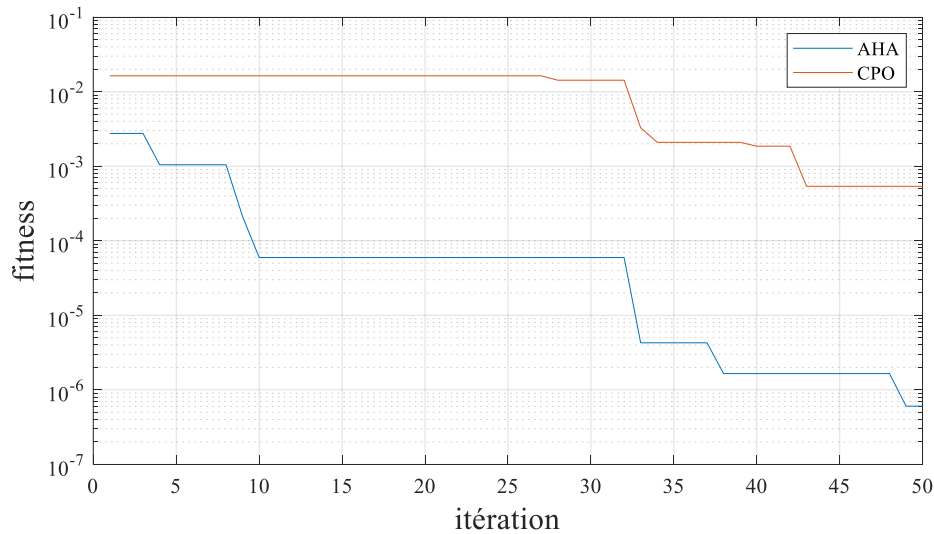
Premiers cas une série d'expérience nous avons fixé le nombre d'itérations à 50 et fait la taille de la population en testant successivement des groups de 50, 100, 500 individus

Deuxième cas nous avons maintenu une population constante de 50 unités et modifié le nombre d'itérations en l'augmentant progressivement à 100, 200 et 500

Ces tableaux offrent une analyse comparative détaillée des performances des deux méthodes d'optimisation, mettant en lumière leurs atouts et leurs limites dans ce contexte spécifique.

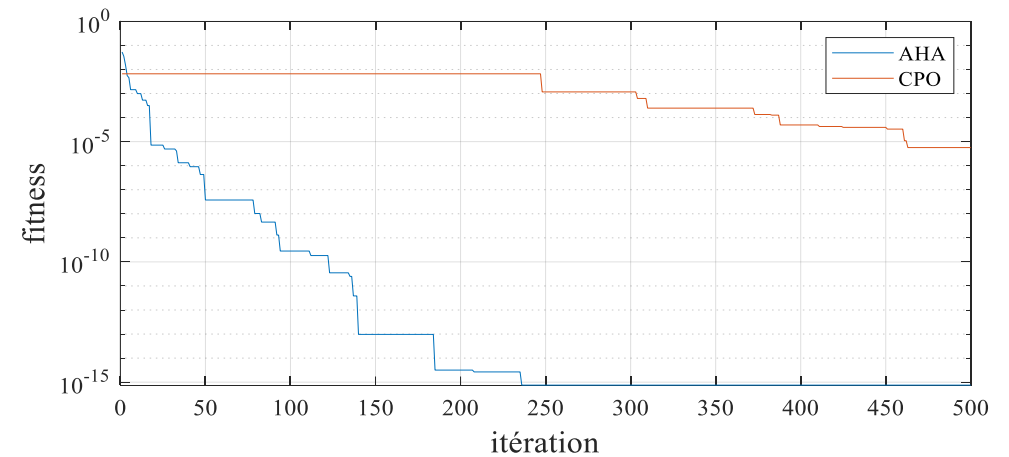
## 1<sup>er</sup> Cas : Structure 3D

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
<b>1</b>	6,169%	0	2,569%	0
<b>10</b>	5,684%	3,034	2,569%	2,701
<b>20</b>	5,668%	6,405	2,569%	5,701
<b>30</b>	5,662%	9,776	2,569%	8,702
<b>40</b>	5,662%	13,146	5,662%	11,702
<b>50</b>	5,662%	16,517	5,662%	14,703



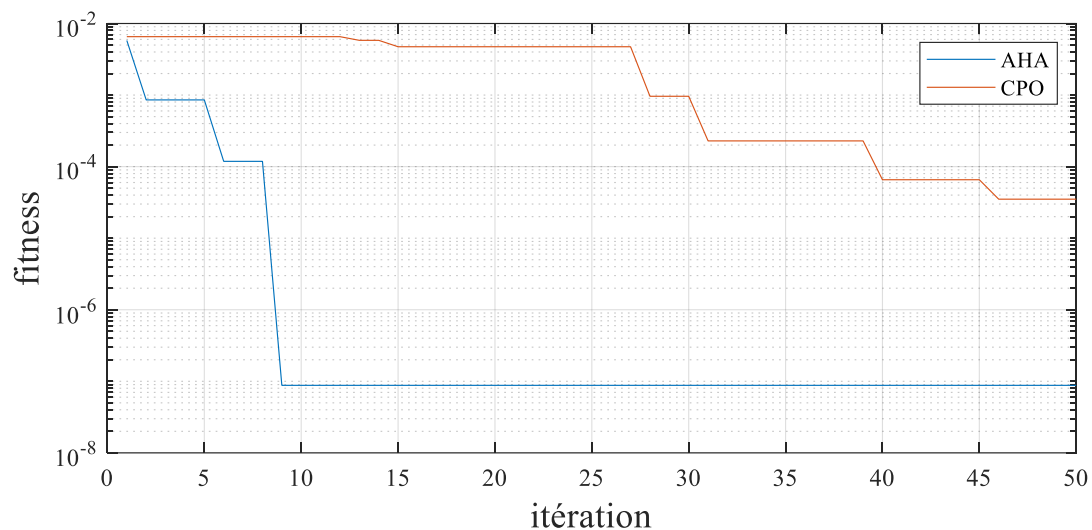
**Figure 32. Barre 3D –un seul endommagement 50 itérations et 50 Populations**

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
<b>1</b>	14,892%	0	14,344%	0
<b>9</b>	15,000%	4,922	14,458%	4,548
<b>10</b>	15,000%	5,537	14,458%	5,117
<b>20</b>	15,000%	11,689	15,239%	10,802
<b>30</b>	15,000%	17,841	15,239%	16,487
<b>40</b>	15,000%	23,993	15,002%	22,172
<b>50</b>	15,000%	30,145	15,002%	27,858



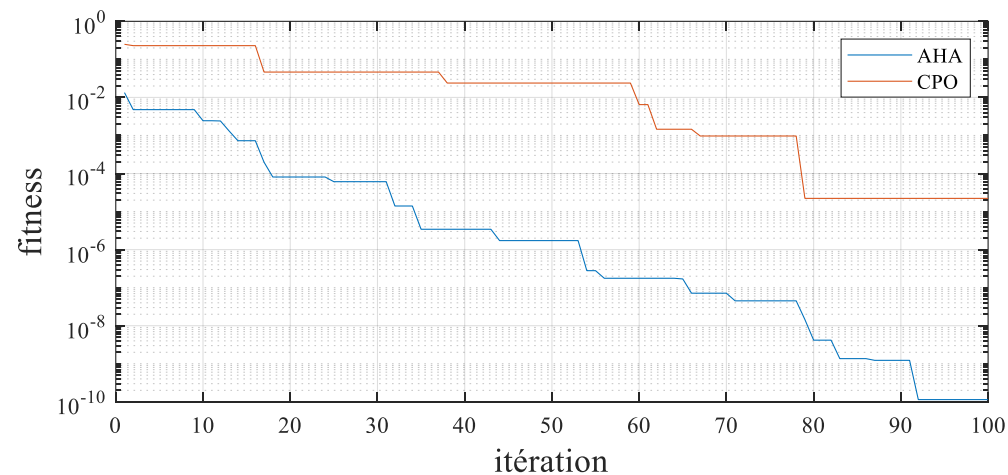
**Figure 33. Barre 3D –un seul endommagement 50 itérations et 100 Populations**

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
1	14,927%	0	15,082%	0
10	15,000%	26,826	15,082%	26,005
20	15,000%	56,632	15,059%	54,899
30	15,000%	86,438	14,988%	83,794
40	15,000%	116,244	15,001%	112,688
46	15,000%	134,128	15,000%	130,025
50	15,000%	146,051	15,000%	141,582



*Figure 34. Barre 3D –un seul endommagement 50 itérations et 500 Populations*

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
1	14,832%	0	18,015%	0
10	15,031%	2,794	12,019%	2,696
20	15,001%	5,899	15,579%	5,691
30	14,999%	9,003	15,579%	8,686
32	15,000%	9,624	15,579%	9,285
40	15,000%	12,108	15,299%	11,681
50	15,000%	15,213	15,299%	14,677
60	15,000%	18,317	14,919%	17,672
70	15,000%	21,422	14,988%	20,667
80	15,000%	24,527	15,000%	23,662
83	15,000%	25,458	15,000%	24,561
90	15,000%	27,631	15,000%	26,658
100	15,000%	30,736	15,000%	29,653



*Figure 35. Barre 3D –un seul endommagement 50 Populations et 100 itérations*

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
1	15,273%	0	11,033%	0
10	14,985%	2,759	16,499%	2,849
20	14,996%	5,824	15,019%	6,015
30	15,000%	8,889	15,019%	9,181
40	15,000%	11,954	15,019%	12,347
50	15,000%	15,019	15,019%	15,512
60	15,000%	18,084	15,019%	18,678
70	15,000%	21,149	15,019%	21,844
80	15,000%	24,215	15,019%	25,010
90	15,000%	27,280	15,019%	28,176
100	15,000%	30,345	15,019%	31,341
156	15,000%	47,509	15,000%	49,070
200	15,000%	60,996	15,000%	62,999

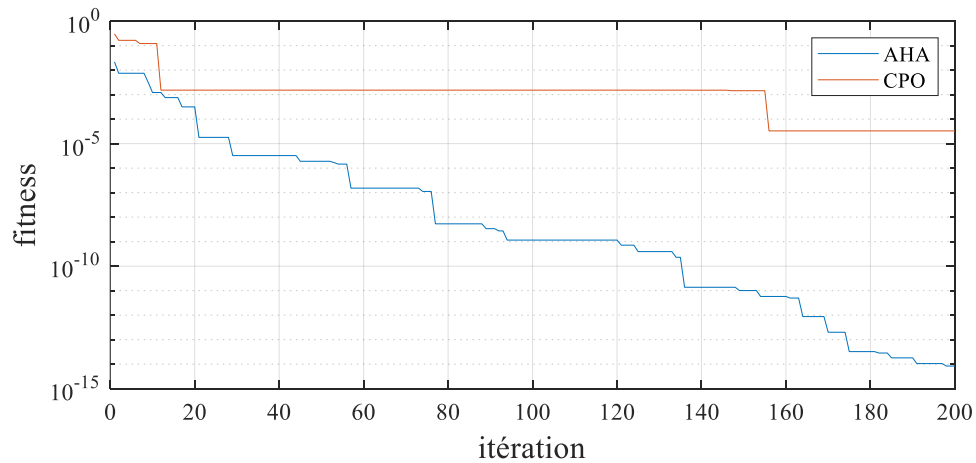


Figure 36. Barre 3D –un seul endommagement 50  
Populations et 200 itérations

Itérations	AHA	TEMPS	CPO	TEMPS
1	14,328%	0	15,083%	0
100	15,000%	29,667	15,083%	27,994
200	15,000%	59,633	15,083%	56,270
300	15,000%	89,600	15,015%	84,547
400	15,000%	119,566	14,999%	112,823
425	15,000%	127,058	15,000%	119,892
500	15,000%	149,532	15,000%	141,100

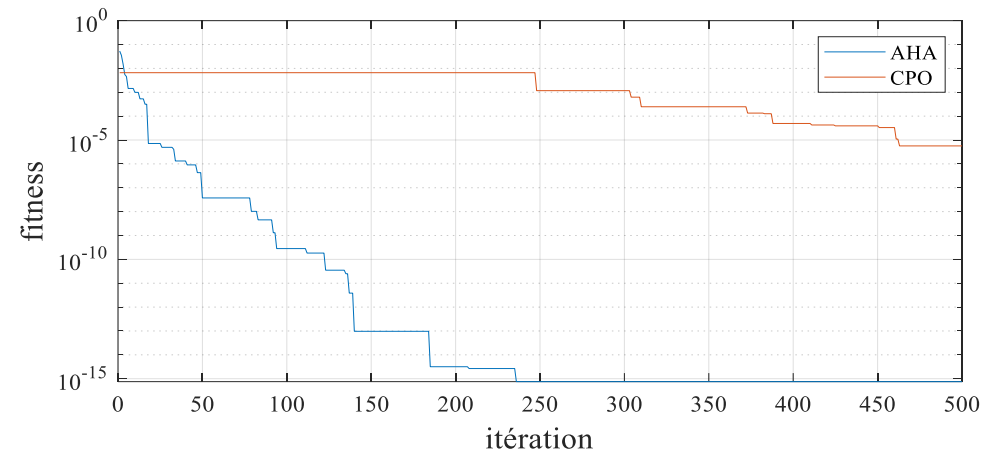
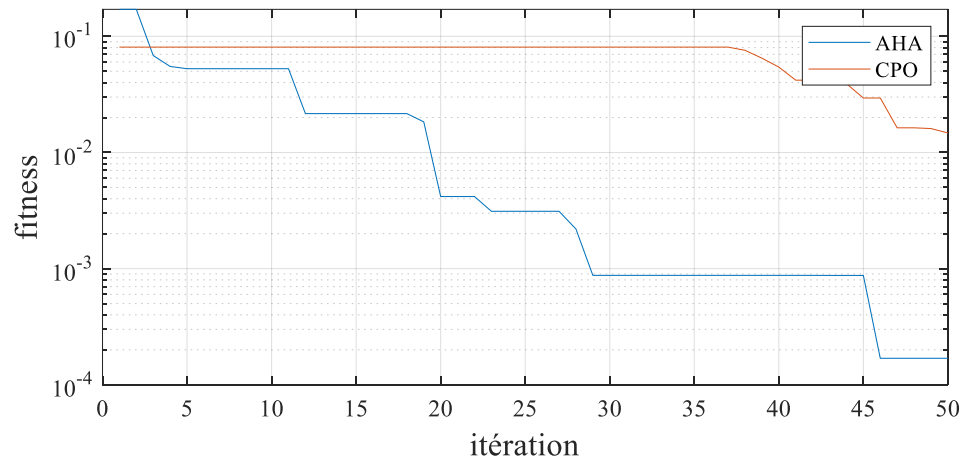


Figure 37. Barre 3D –un seul endommagement 50  
Populations et 500 itérations

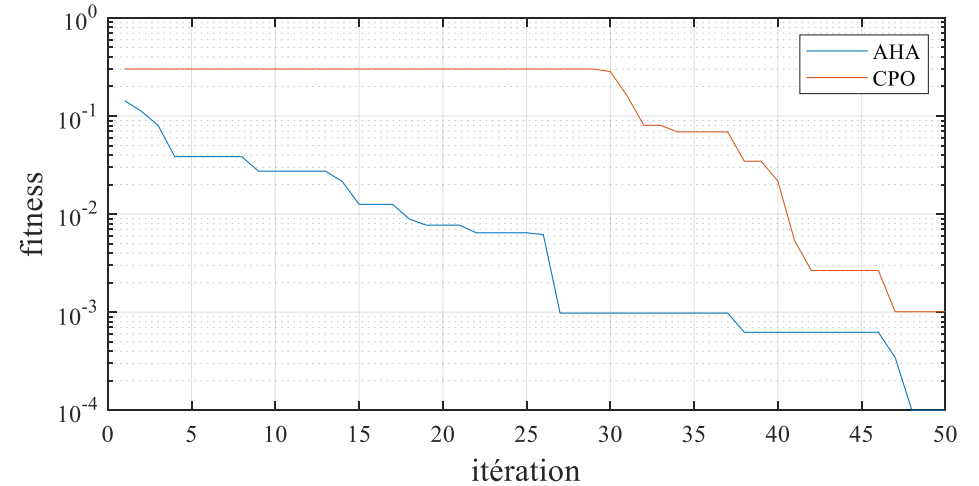
## 2<sup>eme</sup> Cas : Structure 3D

AHA			CPO			
Itérations	Élément15	Élément20	Élément15	Élément20	Temps	Temps
<b>1</b>	21,12%	19,48%	18,733%	18,173%	0	0
<b>10</b>	18,65%	16,12%	18,733%	18,173%	2,996	2,836
<b>20</b>	19,90%	15,07%	18,733%	18,173%	6,324	5,988
<b>30</b>	19,99%	14,98%	18,733%	18,173%	9,653	9,139
<b>40</b>	19,99%	14,98%	19,096%	17,147%	12,982	12,290
<b>46</b>	20,00%	15,01%	19,424%	16,132%	14,979	14,181
<b>50</b>	20,00%	15,01%	19,698%	15,556%	16,310	15,442



*Figure 37. Barre 3D –un seul endommagement 50 Populations et 50 itérations*

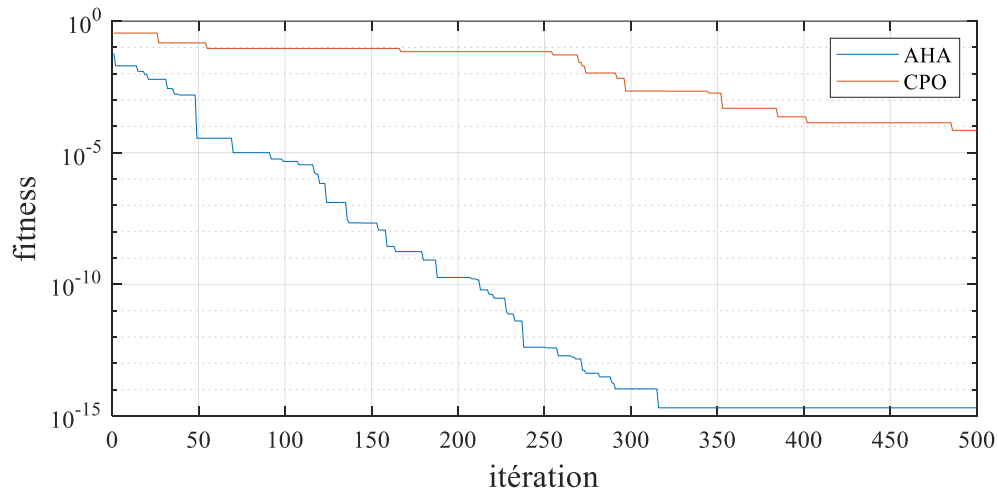
AHA			CPO			
Itérations	Élément15	Élément20	Élément15	Élément20	Temps	Temps
<b>1</b>	18,641%	20,416%	20,267%	11,377%	0	0
<b>10</b>	20,683%	14,338%	20,267%	11,377%	6,198	5,743
<b>20</b>	19,831%	15,279%	20,267%	11,377%	13,084	12,123
<b>30</b>	20,012%	15,019%	12,223%	21,535%	19,970	18,504
<b>40</b>	20,015%	14,992%	20,046%	14,202%	26,856	24,884
<b>50</b>	20,002%	15,001%	20,025%	14,978%	33,742	31,265



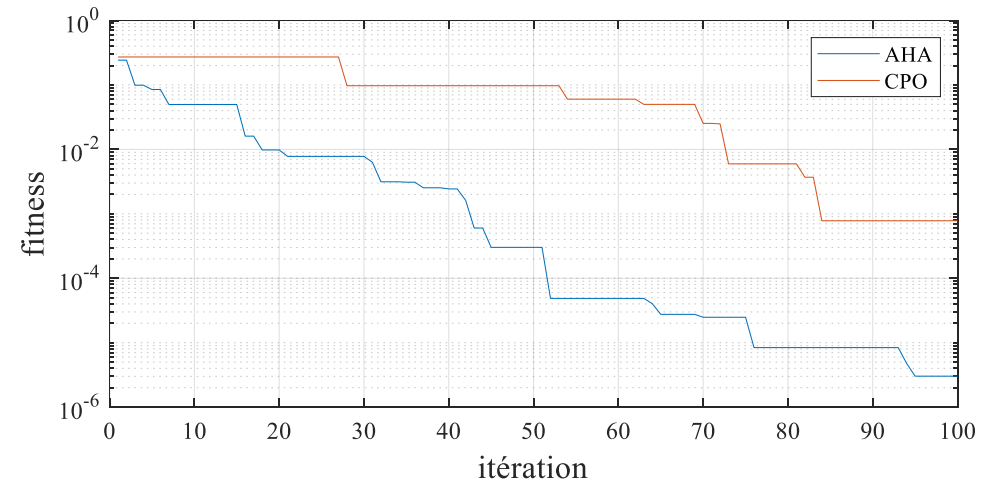
*Figure 39. Barre 3D –deux endommagements 50 itérations et 100 Populations*

AHA			CPO			
Itérations	Élément15	Élément20	Élément15	Élément20	Temps	Temps
1	24,961%	14,672%	14,479%	13,266%	0	0
10	18,827%	16,635%	14,479%	13,266%	3,088	2,885
20	19,951%	15,374%	14,479%	13,266%	6,520	6,090
30	20,190%	14,770%	19,951%	18,283%	9,951	9,296
40	19,942%	15,078%	19,951%	18,283%	13,383	12,501
50	20,007%	14,999%	19,951%	18,283%	16,814	15,707
60	20,001%	15,001%	18,527%	16,838%	20,246	18,912
70	20,000%	15,001%	19,489%	15,959%	23,677	22,118
76	20,000%	15,000%	19,851%	15,102%	25,736	24,041
80	20,000%	15,000%	19,851%	15,102%	27,109	25,323
90	20,000%	15,000%	19,999%	14,974%	30,540	28,529
100	20,000%	15,000%	19,999%	14,974%	33,972	31,734

AHA			CPO			
Itérations	Élément15	Élément20	Élément15	Élément20	Temps	Temps
1	24,961%	14,672%	14,479%	13,266%	0	0
10	18,827%	16,635%	14,479%	13,266%	3,088	2,885
20	19,951%	15,374%	14,479%	13,266%	6,520	6,090
30	20,190%	14,770%	19,951%	18,283%	9,951	9,296
40	19,942%	15,078%	19,951%	18,283%	13,383	12,501
50	20,007%	14,999%	19,951%	18,283%	16,814	15,707
60	20,001%	15,001%	18,527%	16,838%	20,246	18,912
70	20,000%	15,001%	19,489%	15,959%	23,677	22,118
76	20,000%	15,000%	19,851%	15,102%	25,736	24,041
80	20,000%	15,000%	19,851%	15,102%	27,109	25,323
90	20,000%	15,000%	19,999%	14,974%	30,540	28,529
100	20,000%	15,000%	19,999%	14,974%	33,972	31,734

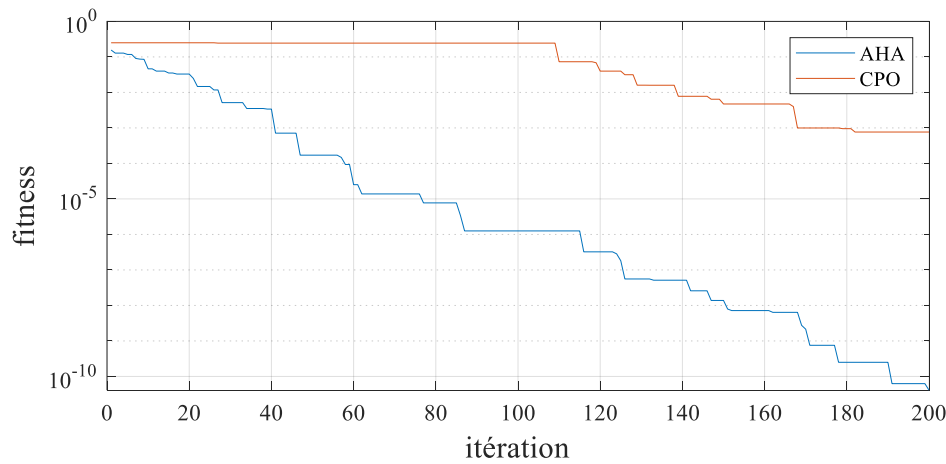


**Figure 40. Barre 3D –deux endommagements 50 itérations et 500 Populations**



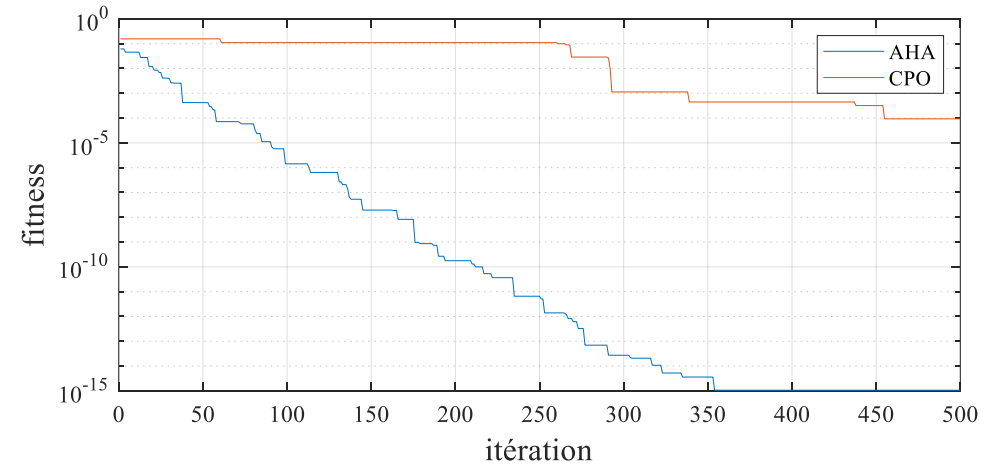
**Figure 41. Barre 3D –deux endommagements 50 Populations et 100 Itérations**

AHA			CPO			
Itérations	Élément15	Élément20	Élément15	Élément20	Temps	Temps
1	16,618%	20,512%	13,366%	21,656%	0	0
10	19,305%	14,300%	13,366%	21,656%	2,856	2,853
20	19,197%	16,000%	13,366%	21,656%	6,030	6,024
30	20,130%	14,876%	13,825%	22,360%	9,203	9,194
40	20,008%	15,110%	13,825%	22,360%	12,377	12,364
50	20,004%	14,998%	13,825%	22,360%	15,550	15,535
60	20,000%	15,001%	13,825%	22,360%	18,724	18,705
63	20,000%	15,000%	13,825%	22,360%	19,676	19,656
70	20,000%	15,000%	13,825%	22,360%	21,897	21,876
80	20,000%	15,000%	13,825%	22,360%	25,071	25,046
90	20,000%	15,000%	13,825%	22,360%	28,244	28,216
100	20,000%	15,000%	13,825%	22,360%	31,418	31,387
200	20,000%	15,000%	20,015%	14,971%	63,153	63,091



**Figure 42. Barre 3D –deux endommagements 50  
Populations et 200 Itérations**

AHA			CPO			
Itérations	Élément15	Élément20	Élément15	Élément20	TEMPS	TEMPS
1	21,286%	15,014%	16,301%	15,665%	0	0
85	20,000%	15,000%	17,685%	18,992%	26,540	21,181
100	20,000%	15,000%	17,685%	18,992%	31,279	24,963
200	20,000%	15,000%	17,685%	18,992%	62,874	50,178
300	20,000%	15,000%	20,004%	15,035%	94,469	75,393
400	20,000%	15,000%	20,000%	15,016%	126,064	100,608
500	20,000%	15,000%	19,999%	14,997%	157,659	125,823



**Figure 43. Barre 3D –deux endommagements 50  
Populations et 500 Itérations**

### 3.7.2 Synthèse d'observation

Cette étude a évalué l'efficacité des algorithmes AHA et CPO pour quantifier les dommages au sein d'une barre 3D composée de 52 éléments.

Les résultats obtenus ont démontré que ces deux méthodes d'optimisation convergent précisément vers l'estimation des dégâts structurels, garantissant ainsi une analyse fiable du comportement mécanique de la barre. De plus, cette approche pourrait être étendue à d'autres types de matériaux et de structures.

Une comparaison approfondie des performances des deux algorithmes en termes de vitesse et de temps de convergence permettrait d'optimiser davantage leur utilisation dans des scénarios de détection et de surveillance des dommages.

### 3.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré les techniques d'optimisation AHA et CPO, en soulignant leurs formulations mathématiques dédiées à l'optimisation des structures mécaniques endommagées. Une attention particulière a été portée à l'influence de la fonction objective dans ces deux approches.

Nous avons également illustré l'efficacité de ces méthodes à travers des applications concrètes sur des barres en 2D et 3D. Les calculs effectués ont permis de démontrer que les algorithmes AHA et CPO offrent une quantification précise des dommages structurels. Ces deux méthodes ont confirmé leur capacité à converger vers une estimation fiable des dégradations dans ce type de modèle mécanique.



**Conclusion générale**

## Conclusion Générale

---

Avec l'essor des technologies et l'émergence de nouvelles tendances, ce mémoire a exploré les principes fondamentaux de la méthode des éléments finis (MEF) et ses applications dans la détection et la quantification des endommagements structurels. La MEF, qui repose sur la discrétisation des structures et la résolution numérique des équations différentielles, s'est révélée être un outil essentiel pour l'analyse des comportements mécaniques et dynamiques des systèmes étudiés.

En associant cette approche à l'identification des paramètres modaux et à l'utilisation de techniques de diagnostic avancées, il a été possible de développer des méthodes efficaces pour détecter et quantifier les dommages. La méthode LFCR, exploitant les variations des fréquences locales, a ainsi été appliquée à des structures 2D et 3D modélisées sous MATLAB via la MEF. La comparaison des fréquences des états sain et endommagé a confirmé la fiabilité de cette approche pour localiser précisément les zones affectées.

La phase de quantification des dommages a ensuite été optimisée grâce à deux algorithmes bio-inspirés, AHA et CPO, qui ont démontré leur capacité à affiner les estimations de rigidité modifiée. Les résultats obtenus ont validé l'efficacité de ces méthodes, notamment en matière de rapidité de convergence et de précision des résultats. L'ensemble de ces travaux met en évidence l'importance de l'intégration de la MEF dans les stratégies de surveillance et de maintenance prédictive des structures. De futures améliorations pourraient inclure le développement de modèles hybrides combinant intelligence artificielle et optimisation avancée, afin de renforcer la robustesse des systèmes en temps réel.

En conclusion, ce mémoire représente une avancée significative dans l'analyse des structures via la MEF et l'optimisation, ouvrant la voie à des solutions plus fiables et performantes pour assurer la sécurité et la durabilité des ouvrages en génie mécanique et civil.



**Références bibliographiques**

## Référence bibliographies

---

1. Saraoui, R., Etude D'une Machine Synchrone Avec La Methode Des Elements Finis, 2010, Universite Mouloud Mammeri.
2. Zahra, B., Etude De La Jonction Poutre-Plaque/Membrane Dans La Modelisation Des Structures Complexes, 2013.
3. Bhavikatti, S., Finite Element Analysis 2005: New Age International.
4. Eugenio, O., Structural Analysis with The Finite Element Method: Linear Statics 2009: Springer Netherlands.
5. Ben Achoura, M.S. And H. Babaarbi, Modelisation D'une Structure Poutre Sous Sollicitation Statique Par La Methode Des Elements Finis, Universite Kasdi Merbah Ouargla.
6. Oudin, H., Methode Des Elements Finis, 2008, Ecole Centrale De Nantes.
7. Logan, D.L., A First Course in The Finite Element Method. Vol. 4. 2011 : Thomson.
8. Rockey, K.C., Et Al., Introduction A La Methode Des Elements Finis. 1979.
9. Lyes, M., Analyse Comparative Des Methodes D'optimisation Pour La Detection D'endommagements Dans Des Structures Mecaniques En Utilisant La Methode De Transmissibilite. Thème, 2024, Université Mouloud Mammeri Tiziouzu.
10. Cook, R.D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis 2007: John Wiley & Sons.
11. Cazenave, M., Methode Des Elements Finis-2e Ed. : Approche Pratique En Mecanique Des Structures 2013 : Dunod.
12. Pavlou, D.G., Essentials of the Finite Element Method: For Mechanical and Structural Engineers 2015: Academic Press.
13. Zhu, B., The Finite Element Method: Fundamentals and Applications in Civil, Hydraulic, Mechanical and Aeronautical Engineering. 2018.
14. Lounas, A., Identification D'endommagements Par La Methode De Rapport Des Changements Des Frequences Locales-Algorithmes D'optimisation, 2022, Universite Mouloud Mammeri Tizi Ouzou.
15. Doebling, S.W., C.R. Farrar, And M.B. Prime, A Summary Review of Vibration-Based Damage Identification Methods. Shock And Vibration Digest, 1998. 30(2): P. 91-105.
16. Kirkegaard, P.H. And A. Rytter, Vibration Based Damage Assessment of a Civil Engineering Structures Using a Neural Networks. 1994.

## Référence bibliographies

---

17. Doebling, S.W., C.R. Farrar, And R.S. Goodman, Effects of Measurement Statistics on the Detection of Damage in The Alamosa Canyon Bridge, 1996, Los Alamos National Lab. (Lanl), Los Alamos, Nm (United States).
18. Salawu, O.S., Detection of Structural Damage Through Changes in Frequency: A Review. *Engineering Structures*, 1997. 19(9): P. 718-723.
19. Cawley, P. And R.D. Adams, The Location of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1979. 14(2): P. 49-57.
20. Adams, R.D., Et Al., A Vibration Technique for Non-Destructively Assessing the Integrity of Structures. *Journal Of Mechanical Engineering Science*, 1978. 20(2): P. 93-100.
21. Banks, H., Et Al., An Experimentally Validated Damage Detection Theory in Smart Structures. *Journal Of Sound and Vibration*, 1996. 191(5): P. 859-880.
22. Morassi, A., Crack-Induced Changes in Eigenparameters of Beam Structures. *Journal Of Engineering Mechanics*, 1993. 119(9): P. 1798-1803.
23. Maeck, J., Damage Assessment of Civil Engineering Structures by Vibration Monitoring. 2003.
24. Zhang, Y., Et Al., Damage Detection in Plates Structures Based on Frequency Shift Surface Curvature. *Journal Of Sound and Vibration*, 2013. 332(25): P. 6665-6684.
25. Lie, S., Y. Zhang, And L. Wang, Damage Detection in Compressed Natural Gas (Cng) Cylinders Based on Auxiliary Mass Induced Frequency Shift. *Experimental Mechanics*, 2015. 55: P. 487-498.
26. Wang, L., Y. Zhang, And S.T. Lie, Detection of Damaged Supports Under Railway Track Based on Frequency Shift. *Journal Of Sound and Vibration*, 2017. 392: P. 142-153.
27. Ilanko, S., Y. Mochida, And J. De Los Rois, Vibration Analysis of Cracked Structures as A Roving Body Passes a Crack Using the Rayleigh-Ritz Method. 2018.
28. Cao, L., W.-Y. He, And W.-X. Ren. Damage Localization and Quantification for Beam Bridges Based on Frequency Variation of Parked Vehicle-Bridge Systems. In *Structures*. 2021. Elsevier.
29. Dubey, A., Et Al. Localisation Et Quantification Des Dommages Geometriques Et Estimation De Leur Taille A L'aide Du Coefficient De Decalage De Frequence Et De La Bibliotheque De Dommages. In *25e Congrès Français De Mécanique*. 2022.

## Référence bibliographies

---

30. Jung, M., J. Koo, And A.J. Choi, Advances in Structural Health Monitoring: Bio-Inspired Optimization Techniques and Vision-Based Monitoring System for Damage Detection Using Natural Frequency. *Mathematics*, 2024. 12(17): P. 1-21.
31. Pei, X.-Y., Et Al., A Deep Learning-Based Structural Damage Identification Method Integrating Cnn-Bilstm-Attention for Multi-Order Frequency Data Analysis. *Buildings*, 2025. 15(5): P. 763.
32. Allemang, R. And D. Brown. A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis, 1st Int. In Modal Analysis Conference. 1983.
33. Lieven, N. And D. Ewins. Spatial Correlation of Mode Shapes, The Coordinate Modal Assurance Criterion (Comac). In Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference. 1988. Kissimmee Florida, Usa.
34. Nguyen, D.H. And M.A. Wahab, Damage Detection in Slab Structures Based on Two-Dimensional Curvature Mode Shape Method and Faster R-Cnn. *Advances In Engineering Software*, 2023. 176: P. 103371.
35. Hasrizam, C. And N. Fawazi. Effect Of Inclusion Lagrange Interpolation Method in Mode Shape Curvature Based Damage Detection. In Iop Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Iop Publishing.
36. Gorgin, R. Damage Identification Technique Based on Mode Shape Analysis of Beam Structures. In Structures. 2020. Elsevier.
37. Pandey, A., M. Biswas, And M. Samman, Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes. *Journal Of Sound and Vibration*, 1991. 145(2): P. 321-332.
38. Yoon, M., Et Al., Local Damage Detection Using the Two-Dimensional Gapped Smoothing Method. *Journal Of Sound and Vibration*, 2005. 279(1-2): P. 119-139.
39. Ratcliffe, C.P., A Frequency and Curvature Based Experimental Method for Locating Damage in Structures. *J. Vib. Acoust.*, 2000. 122(3): P. 324-329.
40. Ratcliffe, C.P. And W.J. Bagaria, Vibration Technique for Locating Delamination in a Composite Beam. *Aiaa Journal*, 1998. 36(6): P. 1074-1077.
41. Ciambella, J. And F. Vestroni, The Use of Modal Curvatures for Damage Localization in Beam-Type Structures. *Journal Of Sound and Vibration*, 2015. 340: P. 126-137.
42. Qiao, P., Et Al., Curvature Mode Shape-Based Damage Detection in Composite Laminated Plates. *Composite Structures*, 2007. 80(3) : P. 409-428.
43. Le, T.T.H., Contribution A La Detection, A La Localisation D'endommagements Par Des Methodes D'analyse Dynamique Des Modifications Structurales D'une

## Référence bibliographies

---

- Poutre Avec Tension : Application Au Suivi Des Cables Du Genie Civil, 2014, Universite Paris-Est.
- 44.Dahak, M., N. Touat, And M. Kharoubi, Damage Detection in Beam Through Change in Measured Frequency and Undamaged Curvature Mode Shape. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2019. 27(1): P. 89-114.
- 45.Ta, D.-T., T.-P. Le, And M. Burman, An Enhanced Single Damage Identification In Beams Using Natural Frequency Shifts and Analytic Modal Curvatures. *Journal Of Science and Technology in Civil Engineering (Jstce)-Huce*, 2023. 17(1): P. 1-15.
- 46.Dawari, V. And G. Vesmawala, Structural Damage Identification Using Modal Curvature Differences. *Iosr Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 2013. 4(43): P. 33-38.
- 47.Alkayem, N.F., Et Al., Inverse Analysis of Structural Damage Based on the Modal Kinetic and Strain Energies with The Novel Oppositional Unified Particle Swarm Gradient-Based Optimizer. *Applied Sciences*, 2022. 12(22): P. 11689.
- 48.Randiligama, S.C.M., Et Al., Damage Assessment in Hyperbolic Cooling Towers Using Mode Shape Curvature and Artificial Neural Networks. *Engineering Failure Analysis*, 2021. 129: P. 105728.
- 49.Pandey, A. And M. Biswas, Damage Detection in Structures Using Changes in Flexibility. *Journal Of Sound and Vibration*, 1994. 169(1): P. 3-17.
- 50.Yuen, M.M.F., A Numerical Study of The Eigenparameters of a Damaged Cantilever. *Journal Of Sound and Vibration*, 1985. 103(3): P. 301-310.
- 51.Bernal, D., Load Vectors for Damage Localization. *Journal Of Engineering Mechanics*, 2002. 128(1): P. 7-14.
- 52.Choi, F., Et Al., Application of the Modified Damage Index Method to Timber Beams. *Engineering Structures*, 2008. 30(4): P. 1124-1145.
- 53.Yan, W.-J. And W.-X. Ren, Closed-Form Modal Flexibility Sensitivity and Its Application to Structural Damage Detection Without Modal Truncation Error. *Journal Of Vibration and Control*, 2014. 20(12): P. 1816-1830.
- 54.Seyedpoor, S. And M. Montazer, A Damage Identification Method for Truss Structures Using a Flexibility-Based Damage Probability Index and Differential Evolution Algorithm. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2016. 24(8): P. 1303-1322.
- 55.Ashory, M., Et Al., Using Continuous Wavelet Transform of Generalized Flexibility Matrix in Damage Identification. *Journal Of Vibroengineering*, 2013. 15(2): P. 512-519.

## Référence bibliographies

---

- 56.Liu, H. And Z. Li, An Improved Generalized Flexibility Matrix Approach for Structural Damage Detection. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2020. 28(6): P. 877-893.
- 57.Masoumi, M., E. Jamshidi, And M. Bamdad, Application of Generalized Flexibility Matrix in Damage Identification Using Imperialist Competitive Algorithm. *Ksce Journal of Civil Engineering*, 2015. 19: P. 994-1001.
- 58.Reynders, E. And G. De Roeck, A Local Flexibility Method for Vibration-Based Damage Localization and Quantification. *Journal Of Sound and Vibration*, 2010. 329(12): P. 2367-2383.
- 59.Li, J., Et Al., A Generalized Flexibility Matrix Based Approach for Structural Damage Detection. *Journal Of Sound and Vibration*, 2010. 329(22): P. 4583-4587.
- 60.Frizzarin, M., Et Al., Damage Detection Based on Damping Analysis of Ambient Vibration Data. *Structural Control and Health Monitoring: The Official Journal of The International Association for Structural Control and Monitoring and of the European Association for The Control of Structures*, 2010. 17(4): P. 368-385.
- 61.Stubbs, N., J.-T. Kim, And C. Farrar. Field Verification of a Nondestructive Damage Localization and Severity Estimation Algorithm. In *Proceedings-Spie the International Society for Optical Engineering*. 1995. Spie International Society for Optical.
- 62.Choi, F.C., Et Al., An Experimental Study on Damage Detection of Structures Using a Timber Beam. *Journal Of Mechanical Science and Technology*, 2007. 21: P. 903-907.
- 63.Wang, Z., R. Lin, And M. Lim, Structural Damage Detection Using Measured Frf Data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997. 147(1-2): P. 187-197.
- 64.Sampaio, R., N. Maia, And J. Silva, Damage Detection Using the Frequency-Response-Function Curvature Method. *Journal Of Sound and Vibration*, 1999. 226(5): P. 1029-1042.
- 65.Maia, N., Et Al., Damage Detection in Structures: From Mode Shape to Frequency Response Function Methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2003. 17(3): P. 489-498.
- 66.Hwang, H. And C. Kim, Damage Detection in Structures Using A Few Frequency Response Measurements. *Journal Of Sound and Vibration*, 2004. 270(1-2): P. 1-14.

## Référence bibliographies

---

67. Furukawa, A., H. Otsuka, And J. Kiyono, Structural Damage Detection Method Using Uncertain Frequency Response Functions. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2006. 21(4): P. 292-305.
68. Wang, M., D. Wang, And G. Zheng, Joint Dynamic Properties Identification with Partially Measured Frequency Response Function. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012. 27: P. 499-512.
69. Azami, M. And M. Salehi, Response-Based Multiple Structural Damage Localization Through Multi-Channel Empirical Mode Decomposition. *Journal Of Structural Integrity and Maintenance*, 2019. 4(4): P. 195-206.
70. Khan, M.W., N. Akmal Din, And R. Ul Haq, Damage Detection in a Fixed-Fixed Beam Using Natural Frequency Changes. *Vibroengineering Procedia*, 2020. 30: P. 38-43.
71. Hong, Y., Et Al. Experimental Model Updating Using Frequency Response Functions. In *Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, And Aerospace Systems 2016*. 2016. Spie.
72. Nguyen, Q.T. And R. Livaoglu, Damage Detection at Storey and Element Levels of High-Rise Buildings: A Hybrid Method. *Neural Computing and Applications*, 2022. 34(15): P. 12765-12788.
73. Esfandiari, A., M.S. Nabiyani, And F.R. Rofooei, Structural Damage Detection Using Principal Component Analysis of Frequency Response Function Data. *Structural Control and Health Monitoring*, 2020. 27(7): P. E2550.
74. Zhan, J., F. Zhang, And M. Siahkouhi, A Step-By-Step Damage Identification Method Based on Frequency Response Function and Cross Signature Assurance Criterion. *Sensors*, 2021. 21(4): P. 1029.
75. Esfandiari, A. And M. Sanayei, More Insight on Function-Weighted Frequency Response Function Sensitivity Method for Analytical Model Updating. *Journal Of Sound and Vibration*, 2021. 509: P. 116143.
76. Jalali, M.H. And D.G. Rideout, Substructural Damage Detection Using Frequency Response Function Based Inverse Dynamic Substructuring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022. 163: P. 108166.
77. Kurent, B., B. Brank, And W.K. Ao, Model Updating of Seven-Storey Cross-Laminated Timber Building Designed on Frequency-Response-Functions-Based Modal Testing. *Structure And Infrastructure Engineering*, 2023. 19(2): P. 178-196.
78. Yang, J.N., Et Al., Hilbert-Huang Based Approach for Structural Damage Detection. *Journal Of Engineering Mechanics*, 2004. 130(1): P. 85-95.

## Référence bibliographies

---

79. Yan, G., Et Al., Structural Damage Detection Using Residual Forces Based on Wavelet Transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010. 24(1): P. 224-239.
80. Dong, Y., Y. Li, And M. Lai, Structural Damage Detection Using Empirical-Mode Decomposition and Vector Autoregressive Moving Average Model. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2010. 30(3): P. 133-145.
81. Bao, C., H. Hao, And Z.-X. Li, Multi-Stage Identification Scheme for Detecting Damage in Structures Under Ambient Excitations. *Smart Materials and Structures*, 2013. 22(4): P. 045006.
82. Han, J., P. Zheng, And H. Wang, Structural Modal Parameter Identification and Damage Diagnosis Based on Hilbert-Huang Transform. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2014. 13: P. 101-111.
83. Aied, H., A. González, And D. Cantero, Identification of Sudden Stiffness Changes in The Acceleration Response of a Bridge to Moving Loads Using Ensemble Empirical Mode Decomposition. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016. 66: P. 314-338.
84. Roveri, N. And A. Carcaterra, Damage Detection in Structures Under Traveling Loads by Hilbert–Huang Transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012. 28: P. 128-144.
85. Kunwar, A., Et Al., Damage Detection in An Experimental Bridge Model Using Hilbert–Huang Transform of Transient Vibrations. *Structural Control and Health Monitoring*, 2013. 20(1): P. 1-15.
86. Brehm, M., V. Zabel, And C. Bucher, An Automatic Mode Pairing Strategy Using an Enhanced Modal Assurance Criterion Based on Modal Strain Energies. *Journal Of Sound and Vibration*, 2010. 329(25): P. 5375-5392.
87. Dixit, A. And S. Hanagud, Single Beam Analysis of Damaged Beams Verified Using a Strain Energy Based Damage Measure. *International Journal of Solids and Structures*, 2011. 48(3-4): P. 592-602.
88. Das, S., P. Saha, And S. Patro, Vibration-Based Damage Detection Techniques Used for Health Monitoring of Structures: A Review. *Journal Of Civil Structural Health Monitoring*, 2016. 6: P. 477-507.
89. Guo, H. And Z. Li, Structural Damage Identification Based on Bayesian Theory and Improved Immune Genetic Algorithm. *Expert Systems With Applications*, 2012. 39(7) : P. 6426-6434.
90. El Khannoussi, F. Detection De Dommages Localises Par Une Approche Bayesienne. In Cfm 2013-21eme Congres Français De Mecanique. 2013. Afm, Maison De La Mecanique, 39/41 Rue Louis Blanc-92400 Courbevoie.

## Référence bibliographies

---

91. Manoach, E., Et Al. Vibration Based Methods for Damage Detection in Structures. In Matic Web of Conferences. 2016. EDP Sciences.
92. Kaveh, A. And A. Zolghadr, Cyclical Parthenogenesis Algorithm for Guided Modal Strain Energy Based Structural Damage Detection. Applied Soft Computing, 2017. 57: P. 250-264.
93. Dinh-Cong, D., Et Al., Damage Assessment in Plate-Like Structures Using a Two-Stage Method Based on Modal Strain Energy Change and Jaya Algorithm. Inverse Problems in Science and Engineering, 2019. 27(2): P. 166-189.
94. Khatir, S., Et Al., Structural Health Monitoring Using Modal Strain Energy Damage Indicator Coupled with Teaching-Learning-Based Optimization Algorithm and Isogeometric Analysis. Journal Of Sound and Vibration, 2019. 448: P. 230-246.
95. Miguel, L.F.F., R.H. Lopez, And L.F.F. Miguel, A Hybrid Approach for Damage Detection of Structures Under Operational Conditions. Journal Of Sound and Vibration, 2013. 332(18): P. 4241-4260.
96. Sedlar, D., Z. Lozina, And D. Vucina, An Implementation of Structural Change Detection Procedure Based on Experimental and Numerical Model Correlation. Journal Of Sound and Vibration, 2012. 331(13): P. 3068-3082.
97. Li, H., Z. Lu, And J. Liu, Structural Damage Identification Based on Residual Force Vector and Response Sensitivity Analysis. Journal Of Vibration and Control, 2016. 22(11): P. 2759-2770.
98. Naderi, A., Et Al., A Swift Technique for Damage Detection of Determinate Truss Structures (2). Engineering With Computers, 2021: P. 1-10.
99. Nobahari, M., M. Ghasemi, And N. Shabakhty, A Fast and Robust Method for Damage Detection of Truss Structures. Applied Mathematical Modelling, 2019. 68: P. 368-382.
100. Wang, Y., Et Al., Damage Detection in Asymmetric Buildings Using Vibration-Based Techniques. Structural Control and Health Monitoring, 2018. 25(5): P. E2148.
101. Ding, Z., Et Al., Structural Damage Detection Based on Residual Force Vector and Imperialist Competitive Algorithm. Struct. Eng. Mech, 2017. 62(6): P. 709-717.
102. Luo, S., Et Al., Residual Mode Vector-Based Structural Damage Identification with First-Order Modal Information. Advances In Materials Science and Engineering, 2021. 2021(1): P. 5526171.
103. Law, S., Z. Shi, And L. Zhang, Structural Damage Detection from Incomplete and Noisy Modal Test Data. Journal Of Engineering Mechanics, 1998. 124(11): P. 1280-1288.

## Référence bibliographies

---

- 104.Radzieński, M., M. Krawczuk, And M. Palacz, Improvement of Damage Detection Methods Based on Experimental Modal Parameters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011. 25(6): P. 2169-2190.
- 105.Dahak, M., N. Touat, And N. Benseddiq, On the Classification of Normalized Natural Frequencies for Damage Detection in Cantilever Beam. *Journal Of Sound and Vibration*, 2017. 402: P. 70-84.
- 106.Zenzen, R., Et Al., A Modified Transmissibility Indicator and Artificial Neural Network for Damage Identification and Quantification in Laminated Composite Structures. *Composite Structures*, 2020. 248: P. 112497.
- 107.Kahouadji, A., Et Al. Vibration-Based Damage Assessment in Truss Structures Using Local Frequency Change Ratio Indicator Combined with Metaheuristic Optimization Algorithms. In *International Conference of Steel and Composite for Engineering Structures*. 2022. Springer.
- 108.Bakir, H., Enhanced Artificial Hummingbird Algorithm for Global Optimization and Engineering Design Problems. *Advances In Engineering Software*, 2024. 194: P. 103671.
- 109.Bhattacharjee, V., Et Al., Oppositional Chaotic Artificial Hummingbird Algorithm on Engineering Design Optimization. *Frontiers In Mechanical Engineering*, 2025. 11: P. 1547819.
- 110.Guo, Z., G. Liu, And F. Jiang, Chinese Pangolin Optimizer: A Novel Bio-Inspired Metaheuristic for Solving Optimization Problems. *The Journal Of Supercomputing*, 2025. 81(4) : P. 517.



