

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou
Faculté génie électrique et informatique
Département d'électronique



En vue de l'obtention du diplôme Master en Electronique
Spécialité : Biomédicale

Thème

**Les fractales et les multi fractale dans
l'analyse des images médicales**

Réalisé par:

HASSENA Lydia

Dirigé par :

M^{me} BOUZBOUDJA Ouardia

Promotion : 2017-2018

Remerciement

Avant tous je remercie Allah pour son puissant de m'avoir donné du courage, de la patience et surtout de la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je tiens a remercie madame BOUZBOUDJA pour sa disponibilité permanente et ces conseils judicieux durant la réalisation de ce travail.

Je remercie également monsieur OUALOUCHE et monsieur LAZRI d'avoir accepter de juger ce travail.

Enfin, Les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille pour son soutien et ses encouragements permanents durant la préparation de ce mémoire, et en particulier à mes parents pour leur compréhension, leur présence et leur patience. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je vous aime.

Merci à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études ; particulièrement ma tante Ouardia.

Sommaire

<i>Introduction générale</i>	05
------------------------------------	----

CHAPITRE I : GENERALITE SUR L'IMAGE

1. Introduction.....	08
2. Définition de l'image.....	08
3. Image numérique.....	08
4. Caractéristiques d'une image numérique.....	09
4.1. Dimension.....	09
4.2 Résolution.....	09
4.3 Contraste.....	09
4.4 Bruit.....	10
4.5 Luminance.....	10
4.6 Contours et textures.....	11
5. Notion de texture.....	11
6. Méthodes d'analyse de textures.....	13
6.1 Méthodes structurelles.....	13
6.2 Méthodes statistique.....	13
6.2.1 Méthodes Statistiques de premier ordre.....	13
6.2.2 Méthodes statistiques d'ordre deux.....	14
a) Histogramme des sommes et des différences de niveaux de gris.....	15
b) Matrices de cooccurrences.....	15
c) Matrice de Longueurs de plage.....	16
d) Méthodes fondées sur un modèle.....	17
e) Fonction d'auto corrélation.....	18

Sommaire

f) Les Champs de MARKOV	18
6.3.Méthodes fréquentielles.....	19
6.3.1. Filtres de Gabor.....	19
6.3.2.L'analyse de texture par banc de filtres.....	20
6.3.3. L'analyse de texture par ondelettes.....	20
6.4 Méthodes fractales.....	21
7 Segmentation.....	21
7.1 Approche région.....	22
7.2 Approche frontière.....	22
8. Domaine d'Applications de l'analyse de texture.....	22
9. Conclusion.....	23

CHAPITRE II : LES FRACTAL ET LES MULTIFRACTAL

1 Introduction.....	25
2 Analyse fractal.....	25
2.1 Objet fractal on non fractal.....	25
2.2 Définition d'un objet fractal.....	26
2.3 Caractéristiques d'un objet fractal	26
2.4 Classification des fractales	27
2.4.1 Fractales déterministes.....	27
a) Les systèmes de fonctions itérés.....	27
• ensemble de cantor.....	27
• Le triangle de Sierpinski.....	28
• La courbe de von Koch.....	28
b) Fractales réalisées grâce a une suite de points	29
• Ensembles de Julia.....	29
• Ensemble de Mandelbrot.....	30

Sommaire

c) Ensembles fractals non uniformes	31
2.4.2 Fractals non déterministes.....	32
a) objet fractals naturels.....	32
b) ensembles fractals aléatoires.....	32
2.5 Propriétés des fractales.....	33
2.5.1 Autosimilarité.....	33
2.5.2 La dimension fractale	34
2.6 Définition de la dimension fractale.....	34
2.7 Méthodes de calcul de la dimension fractale.....	36
2.7.1 Méthodes de « comptages de boîtes ».....	36
a) Méthode de box-counting ou BC.....	37
b) Méthode de comptage différentiel des boîtes ou DBC	37
c) Méthode de comptage étendu ou XCM.....	38
2.7.2 Méthodes basée sur le mouvement brownien fractionnaire.....	38
• Méthode de la variance	39
• Méthode du spectre de puissance.....	39
2.7.3 Méthode basée sur la mesure de la surface.....	39
• Méthodes des prismes triangulaires.....	39
• Méthodes de recouvrement des blancs.....	40
• Méthodes des isarithmes	41
3. Lacunarité.....	42
4 Analyse multi fractal.....	43
4.1 Exposant de Hölder.....	44
4.2 spectre multifractal.....	45
4.3 Spectre de singularité.....	45
a) Spectre de Hausdorff	46
b) Spectre de grandes déviations.....	46
c) Spectre de Legendre.....	46

Sommaire

4.4 Méthodes de calcul de spectre multi fractal.....	47
4.4.1 Méthodes dites de « comptages de boite ».....	47
a) Approche géométrique	47
b) Approche statistique.....	48
4.4.2 Méthode basée sur les ondelettes.....	50
a) Méthodes basée sur la transformée en ondelette discrètes.....	50
b) Méthodes basée sur la transformée en ondelettes continues.....	50
c) Méthodes des « maxima du module de la transformée en ondelette	51
d) Méthodes des «coefficients dominants ».....	51
5. Conclusion.....	52

CHAPITRE III : UTILISATION DES FRACTAL SUR DES IMAGES MEDICAL

1. Introduction.....	54
2. utilisation des fractales sur l'os trabiculaire.....	54
3. Utilisation de spectre multifractal sur la mammographie.....	61
4. Utilisation des fractal sur des images cérébrale.....	63
4.1. La Détection des tumeurs cérébrales par l'analyse fractale....	65
4.2. Caractérisation du foyer épileptogène en tomographie par émission mono photonique (TEMP).....	66
5. Conclusion	69
CONCLUSION GENERALE.....	71

BIBLIOGRAPHIE	73
----------------------------	-----------

Chapitre I : Généralité sur l'image

1. Introduction

L'analyse de l'image à travers ses attributs (niveaux de gris ou texture) consiste souvent à extraire un certain nombre de propriétés caractéristique et à les exprimer sous forme paramétrique. Ces derniers, permettent de décrire, de caractériser, d'analyser et de segmenter les images en question. La texture joue un rôle très important dans l'identification et l'extraction des informations thématique contenue dans l'image.

2. Définition de l'image

Une image est la représentation planaire d'un objet, d'une scène située en général dans un espace tridimensionnel. Elle peut être naturelle ou artificielle (peinture, photographie). Elle est considérée comme une fonction $I(x,y)$ définie sur un espace multidimensionnel, tel que x et y sont les coordonnées spatiales d'un point de l'image, et I est une fonction d'intensité lumineuse et de couleur. Sous cet aspect, l'image est inexploitable par la machine, ce qui nécessite sa numérisation.

3. Image numérique

L'image numérique est composée d'un ensemble de point appelés pixels (picture element), qui est l'unité élémentaire de l'image. Celle-ci peut être représentée par un tableau de valeurs à deux dimensions (matrice). Un pixel possède une valeur qui peut être un scalaire et représente un niveau de gris, ou un vecteur représentant une couleur.

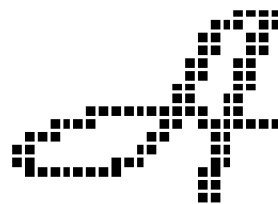


Figure I.1 : Image présentant l'affichage des pixels

4. Caractéristiques d'une image numérique

L'image est un ensemble structuré d'informations caractérisées par les paramètres suivants :

4.1. Dimension

La dimension est la taille de l'image qui se présente sous forme d'une matrice dont les éléments sont des valeurs numérique représentatives des niveaux de gris des pixels.

Dimension=taille=nombre de ligne*nombre de colonne=nombre de pixels.

4.2. Résolution

La résolution d'une image est défini par un nombre de pixel par unité de longueur de la structure à numérisé classiquement en DPI (Dots Per Inch) ou PPP (Pixels Par Pouce).ce paramètre est défini lors de la numérisation est dépend principalement des caractéristiques des matériel utilisé lors de processus de numérisation. C'est la finesse de détails atteinte par un moniteur dans la production d'image. Plus le nombre de pixels est grand plus la résolution est meilleure.



Figure I.2 : exemple de résolution d'une image

4.3. Contraste

Le contraste est défini en fonction des luminances entre deux zones d'image, plus précisément entre les régions sombres et les régions claires de cette image. Si L_1 et L_2 sont les degrés de luminosité respectivement de deux zones voisines A_1 et A_2 d'une image, le contraste C est défini par le rapport :

$$C = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2}$$

4.4. Bruit

Le bruit est un phénomène de brusque variation de niveau d'un pixel par rapport à ces voisins. Il peut provenir de l'éclairage, des dispositifs optiques et électroniques du capteur.

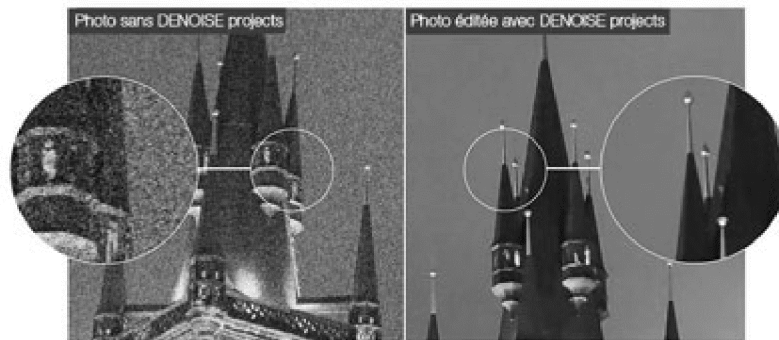


Figure I.3 : image avec bruit (à gauche) et image sans bruit (à droite)

4.5. Luminance

C'est le degré de luminosité des points de l'image. Elle est définie aussi comme étant le quotient de l'intensité lumineuse d'une surface, pour un observateur lointain, le mot luminance est substitué au mot brillance, qui correspond à l'éclat d'un objet.

La moyenne ou luminance (brillance) d'une image numérique en niveau de gris est définie commela moyenne des pixels de l'image :

$$\text{LUM}(\mathbf{I}) = \frac{1}{M \times N} \sum_{x=0}^{M-1} \cdot \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (1.1)$$

Avec : M: Nombre de colonnes, N: Nombre de lignes, $F(x, y)$: La valeur de niveau de gris dans le point (x, y) .

4.6. Contours et textures

Les contours représentent les frontières entre les objets de l'image ou la limite entre deux pixels. L'extraction du contour consiste à identifier dans l'image les points qui séparent deux textures différentes.

Les textures décrivent la structure de ces objets.

5. Notion de texture

La définition littéraire de la texture est : "répétition spatiale d'un même motif dans différentes directions de l'espace". Cette définition est limitative car elle caractérise l'objet indépendamment d'un observateur humain. La notion de texture est utilisée pour traduire un aspect homogène de la surface d'un objet sur une image. La texture se manifeste par une information visuelle qui permet de la décrire qualitativement à l'aide des adjectifs suivants: grossière, fine, lisse, tachetée, granuleuse, marbrée, régulière ou irrégulière.

Haralick élargit la définition en décrivant une texture comme un phénomène à deux dimensions: la première concernant la description d'éléments de base ou primitives (le motif) à partir desquels est formée la texture; la deuxième dimension est relative à la description de l'organisation spatiale de ces primitives. [HARALICK 79]

Unser présente la texture comme une structure disposant de certaines propriétés spatiales homogènes et invariantes par translation. Une autre approche serait encore de définir la texture à partir de deux types d'informations essentielles que comporte l'image:

- les contours, de type monodimensionnel, qui marquent les frontières entre régions homogènes.
- l'aspect de surface, de type bidimensionnel, qui définit les régions homogènes.

Cependant, la description d'une texture peut s'avérer erronée à une autre échelle d'observation, c'est à dire en changeant la résolution. [UNSER 84].

En pratique, on distingue deux grandes classes de textures, qui correspondent à deux niveaux de perception :

➤ **La macro texture (ou texture structurée)**

Présente un aspect régulier, sous formes de motifs répétitifs spatialement placés selon une règle précise (ex : mur de brique, peau de lézard), donc une approche structurale est déterministe.

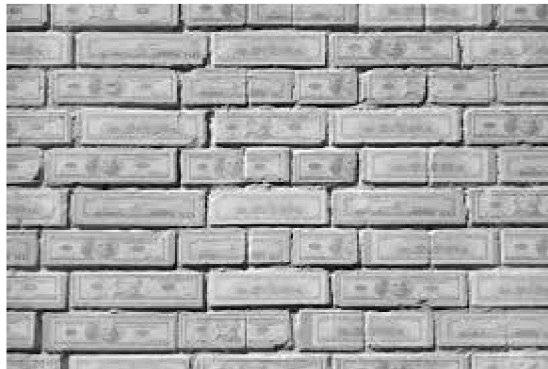


Figure I.4 : exemple de macro texture

➤ **Le micro textures (ou textures aléatoire)**

Les micro textures (ou textures aléatoires) qui présentent un aspect plus chaotique et plus désorganisé (ex : sable, herbe), mais dont l'impression visuelle reste globalement homogène. Les différentes régions d'une image, représentent des textures microscopiques.



Figure I.5 : exemple de micro texture

Gagalowicz propose une synthèse des deux approches en considérant la texture comme "une structure spatiale constituée de l'organisation de primitives ayant chacune un aspect aléatoire, donc une structure hiérarchique à « deux niveaux ». [GAGALOWICZ 83]

6. Méthodes d'analyse de textures

La plupart des méthodes considèrent une texture comme la réalisation d'un champ aléatoire. Parmi les méthodes de caractérisation statistique de la texture on cite :

6.1. Méthodes structurelles

Ils tiennent compte de l'information structurelle et contextuelle d'une forme et sont particulièrement bien adaptées aux textures macroscopiques. Les étapes d'analyse sont

- L'identification des éléments constitutifs;
- La définition des règles de placement

On peut utiliser, pour l'extraction de ses primitives, les techniques de croissance de région, de détection de contours ou de seuillage.

Dans le monde naturel ce cas de textures est faiblement représenté, car une texture naturelle comporte toujours et précisément dans ses règles de placement quelque part de l'aléatoire, d'où la nécessité pour une meilleure analyse de celle-ci d'utiliser l'approche statistique dans l'analyse par approche structurelle. [BOUDGHENE 2012]

6.2. Méthodes statistique

C'est la méthode la plus utilisée en traitement d'images. Du point de vue des méthodes statistiques, la texture est considérée comme la réalisation d'un processus stochastique stationnaire. Des paramètres statistiques sont estimés pour chaque pixel de l'image. Ces méthodes exploitent directement les propriétés statistiques de la texture.

6.2.1. Méthodes Statistiques de premier ordre

L'analyse de texture par cette méthode se fait au niveau de pixel individuel d'une région de l'image à traiter. Les paramètres (la moyenne, la variance, l'entropie, etc...) sont calculés à partir de l'histogramme des intensités :

La moyenne :

$$moy = \frac{1}{N} \sum_{i,j} (g(i,j)) \quad (1.2)$$

La variance :

$$var = \frac{1}{N} \sum_{i,j} (g(i,j) - moy)^2 \quad (1.3)$$

Le skewness :

$$skew = \frac{1}{N} \sum_{i,j} (g(i,j) - moy)^3 \quad (1.4)$$

Le kurtosis :

$$kurt = \frac{1}{N} \sum_{i,j} (g(i,j) - moy)^4 \quad (1.5)$$

Avec : N : est un facteur de normalisation qui correspond au nombre total de pixel.

$g(i, j)$: représente la valeur du niveau de gris du pixel (i, j).

La première équation donne la valeur moyenne des niveaux de gris appartenant à tous les pixels de la région considérée.

La deuxième équation mesure la répartition des niveaux de gris autour de la valeur moyenne. La troisième équation mesure la déviation de la distribution des niveaux de gris par rapport à une distribution symétrique. Pour une déviation par les valeurs élevées, le skewness est positif. Pour une déviation vers les basses valeurs, il est négatif.

La dernière équation caractérise la forme du sommet de l'histogramme. Plus le kurtosis est faible plus le sommet est arrondi. [LHAMEL 2011].

6.2.2. Méthodes statistiques d'ordre deux

La texture est considérée comme la réalisation d'un processus stochastique stationnaire. Des paramètres statistiques sont estimés pour chaque pixel de l'image :

➤ Les propriétés statistiques de la texture (matrices de cooccurrences, matrice de longueurs de plages, matrice de voisinage, moments, fonction d'auto-corrélation, modèle de Markov, modèle autorégressif, modèles issues de la morphologie mathématique)

➤ Les propriétés statistiques à partir d'un plan transformé dans lequel on réécrit l'image de texture (densité spectrale, méthode des extremums locaux, méthodes de transformation de Fourier, ou avec des filtres numériques).

a) Histogramme des sommes et des différences de niveaux de gris

(Gray-Level Sum and Difference Histogram: GLSDH)

Pour caractériser une texture, on utilise souvent les propriétés statistiques de l'histogramme des niveaux de gris. Il associe à chaque niveau de gris, sa probabilité d'apparition dans la texture. L'inconvénient est qu'ils ne considèrent pas les interactions entre pixels voisins.

Afin de diminuer le temps de calcul, on peut réduire la gamme des niveaux de gris (par exemple en 64) et diviser l'image en blocs (par exemple 16x16).

b) Matrices de cooccurrences (Gray-Level Co-occurrence Matrix : GLCM)

HARALICK et WESZKA ont utilisé les matrices de cooccurrence des niveaux de gris, qui sont du second ordre statistique.

Ces matrices contiennent des informations importantes mais difficilement manipulables. Elles sont très performantes pour la caractérisation des interactions spatiales entre pixels dans une texture.

La matrice de cooccurrence MC_t , d'une région texturée R donnée, pour une translation t , est définie pour tout niveaux de gris (a, b) par:

$$MC_t(a, b) = \text{card}\{(s, s + t) \in R^2 / y_s = a, y(s + t) = b\} \quad (1.6)$$

Avec y_s : niveau de gris du site s . Chaque élément (a, b) de la matrice représente le nombre de couples de pixels $(s, s+t)$ ayant respectivement le niveau de gris a et b dans la région considérée, séparée par la translation t . [HAESSE94].

Descripteurs d'haralick

$$\begin{aligned}
 \text{MOYENNE} &= \sum_j \sum_i p(i, j) \\
 \text{VARIANCE}_i &= \sum_j \sum_i (i - \text{MOYENNE})^2 p(i, j) \\
 \text{ENERGIE} &= \sum_j \sum_i (p(i, j))^2 \\
 \text{INERTIE} &= \sum_j \sum_i (i - j)^2 p(i, j) \\
 \text{ENTROPIE} &= - \sum_j \sum_i p(i, j) \log(p(i, j)) \\
 \text{MOMENT DIFFERENTIEL INVERSE} &= \sum_i \sum_j \frac{1}{1 + (i - j)^2} p(i, j)
 \end{aligned}$$

où
(i, j) : coordonnées dans la
matrice
p(i, j) : valeurs normalisées
de la matrice

(1.7)

c) Matrice de Longueurs de plage (Run-Length Matrix : RLM)

On trouve cette méthode en 2 versions :

La première est monodimensionnelle et consiste à représenter la texture par l'histogramme des longueurs de segments de droites de mêmes niveaux de gris dans une dimension donnée.

La deuxième version est bidimensionnelle considère des domaines connexes de taille maximale de luminance constante.

Pour la version monodimensionnelle, chaque segment est une plage et le nombre de pixels dans le segment représente sa longueur. Cette méthode se base sur deux éléments principaux :

Le nombre de pixels et la direction, en associant à chaque direction une matrice des longueurs de plages M_θ ($m_\theta(i, j)$), où $m_\theta(i, j)$ est l'élément m de niveau de gris i et de longueur j dans la direction θ .

Dans une région, la matrice est : $L \times n_\theta$ (avec L : le Nombre de Niveaux de Gris, n_θ : La longueur de la corde maximale de direction θ dans la région). On peut extraire différents attributs de cette matrice : [COCQUEREZ 95]

Nombre de longueurs de plages :

$$NLP = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=1}^{n_\theta} P_\theta(i, j) \quad (1.8)$$

Proportion de petites plages :

$$PPP = \frac{1}{NLP} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=1}^{n_\theta} \frac{P_\theta(i, j)}{j^2} \quad (1.9)$$

Proportion de grandes plages :

$$PGP = \frac{1}{NLP} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=1}^{n_\theta} j^2 P_\theta(i, j) \quad (1.10)$$

Hétérogénéité des niveaux de gris :

$$HNG = \frac{1}{NLP} \sum_{i=0}^{L-1} (\sum_{j=1}^{n_\theta} P_\theta(i, j))^2 \quad (1.11)$$

Hétérogénéité des longueurs de plages :

$$HLP = \frac{1}{NLP} \sum_{j=1}^{n_\theta} (\sum_{i=0}^{L-1} P_\theta(i, j))^2 \quad (1.12)$$

Pourcentage des plages :

$$PP = \frac{NLP}{K} \quad (1.13)$$

Où $K = \text{nombre total de pixels dans la région}$

d) Méthodes fondées sur un modèle

Ces méthodes consistent à choisir un modèle pour représenter le signal. Ce modèle est défini par un certain nombre de paramètres qui caractérisent la texture. Plusieurs modèles peuvent être utilisés, les plus connus sont les modèles d'autorégressif, les modèles Markoviennes et les modèles fractals. Certains de ces modèles ont permis d'obtenir d'excellents résultats en synthèse de textures. Néanmoins l'inconvénient majeur des méthodes fondées sur modèles reste la complexité des algorithmes d'estimation des paramètres d'autant plus qu'ils nécessitent des connaissances a priori sur le contenu déterministe de la texture.

e) Fonction d'auto corrélation

(Auto-Correlation Function: ACF)

La fonction d'auto corrélation (ou d'auto covariance) est un attribut caractérisé par la taille des primitives constituant une texture. Elle permet de mesurer la corrélation locale entre les points d'images [BOUGUELMOUNA98]. Elle s'écrit :

$$R(x, y) = \frac{\sum_{u=0}^{NL} \sum_{v=0}^{NC} I(u, v) I(u+x, v+y)}{\sum_{u=0}^{NL} \sum_{v=0}^{NC} I^2(u, v)} \quad (1.14)$$

Où NL et NC sont respectivement le nombre de ligne et le nombre de colonnes de l'image. Cette fonction définit une moyenne de similarité entre pixels pour une distance (x, y) donnée. L'évolution des moyennes de similarité en fonction des distances (x, y) permet de mesurer la régularité de la texture.

- **Texture grossière** : La fonction décroît lentement lorsque la distance grandit.
- **Texture fine** : La fonction décroît rapidement avec la distance.
- **Textures régulières** : (avec primitives périodiques) : La fonction croît et décroît périodiquement avec la distance. La fonction présente des pics et des vallées.
- **Textures aléatoires** : Il y a seulement un pic autour de [0, 0]. Plus la structure est aléatoire, plus le pic est pointu.
- **Textures directionnelles** : La fonction présente les directions.

f) Les Champs de MARKOV

Les principales applications de ce type de modélisation sont la détection de contours, la restauration ou le lissage d'image, la stéréovision et la classification de texture, etc...

Le principal avantage des champs de MARKOV est de fournir un modèle mathématique simple permettant de prendre en compte les différents niveaux d'interprétation.

Le principe du formalisme Markovien est de définir des énergies locales entre groupes de sites reflétant les interactions entre niveaux de gris. L'énergie globale est alors reliée à la probabilité d'apparition de l'image dans le cadre des champs de GIBBS.

Le niveau de gris d'un pixel est obtenu par une combinaison linéaire des niveaux de gris de ses voisins et d'un bruit blanc, pondéré par les paramètres du modèle. [COCQUEREZ 95]

6.3. Méthodes fréquentielles

Une texture est une répétition d'éléments avec une certaine fréquence. Afin d'extraire ses caractéristiques on procède au filtrage de l'image en utilisant des méthodes spectrales (fourrier, filtres de Gabor, analyse en ondelette).

6.3.1. Filtres de Gabor

Il s'agit de filtres extrayant une information fréquentielle localisée et orientée. Les filtres de Gabor sont le produit de Gaussiennes par des sinus ou des cosinus.

- Sinus / cosinus : analyse en fréquences
- Gaussienne : différents niveaux de lissage (échelles)

Un filtre de Gabor à deux dimensions peut être représenté comme une gaussienne modulée par une onde plane sinusoïdale. Autrement dit, un filtre de Gabor est une fonction sinusoïdale à laquelle on a rajouté une enveloppe gaussienne.

$$GABOR(x, y) = g(x, y) \cdot e^{j\alpha x} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\pi\sigma^2}} (\cos 2\pi f x + j \sin 2\pi f x) \quad (1.15)$$

Paramètres à régler pour définir un filtre de Gabor :

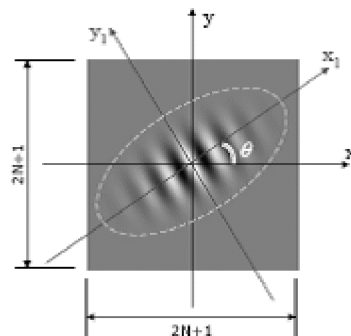


Figure I.6 : Paramètres d'un filtre de Gabor

$$\text{Taille du filtre : } (2N+1)^2 \text{ et } \sigma = \frac{2N+1}{6} \quad (1.16)$$

Orientation : θ avec $x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta$

$$y_1 = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (1.17)$$

Ecart type x-y : $\lambda = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ avec $\sigma_x = \sigma$ si $\lambda \leq 1$ (1.18)

$$\sigma_y = \sigma \text{ si } \lambda > 1$$

Période recherchée: $l = \frac{6\sigma}{f}$ (1.19)

Les filtres de Gabor analysent la structure :

- à différentes échelles (fréquences)
- à différentes orientations (angles)
- à différentes fenêtre d'analyse (variance de gaussienne)

6.3.2 Analyses de texture par banc de filtres

En faisant varier les différents paramètres, plusieurs filtres de réponse impulsionnelle sont obtenus. Une image filtrée \hat{I}_k est déterminée à la sortie de chacun de ces filtres :

$$\hat{I}_k(x, y) = I(x, y) * gabor_k(x, y) \quad (1.20)$$

Ensuite, on peut extraire plusieurs paramètres de l'image comme, par exemple, la moyenne d'énergie dans une fenêtre centrée au pixel considéré:

$$\hat{e}_k(x, y) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{i=x-N}^{x+N} \sum_{j=y-N}^{y+N} \hat{I}_k^2(i, j) \quad (1.21)$$

Pour l'analyse de la texture, on considère en général 5 à 10 orientations et 5 à 10 fréquences.

6.3.3. Analyse de texture par ondelettes

Le principe est analogue à l'utilisation d'un banc de filtres. On utilise en général des trames d'ondelettes redondantes, comportant plus de 3 orientations et invariantes par translation.

Comme précédemment, on peut caractériser les statistiques (moyenne, variance, histogramme) des coefficients d'ondelettes dans chaque sous bande fréquentielle.

Dans ce cas, la texture est caractérisée par les paramètres des modèles de chaque sous-bande.

L'implémentation des ondelettes se fait par application à l'image, d'une cascade de filtres passe haut et passe bas, à plusieurs résolutions, avec ou sans décimation. Deux algorithmes sont souvent utilisés :

- Algorithme de Stéphane Mallat (avec décimation)
- Algorithme à trou (sans décimation)

6.4. Méthodes fractales

La géométrie fractale offre un outil essentiel pour la description des objets naturels ou synthétique ayant des structures complexes et irrégulières. Les textures naturelles, présentent un aspect fragmenté. La mesure de la rugosité est une signature efficace pour la caractérisation de texture naturelle.

L'utilisation de la théorie des fractals est répandue en analyse de texture (même si les textures ne sont pas nécessairement des objets fractals). L'avantage de cette approche réside dans le fait que la dimension fractale est assez peu sensible à la résolution de la texture et est fortement corrélée avec la perception humaine de la rugosité d'une surface, elle permet de mesurer la complexité géométrique d'un ensemble.

7. Segmentation

La segmentation est un traitement dont le but est de partitionner une image en ensembles de pixels appelées régions. Ce n'est pas un but en soit mais un traitement en aval de l'analyse de l'image. À partir d'une image I , on crée une famille de sous-ensembles R_i tels que :

$$- \forall i, R_i \neq \emptyset$$

$$- \forall i, j, R_i \cap R_j = \emptyset$$

$$- \coprod_{\forall i} R_i = I$$

Une région est un ensemble connexe de pixels ayant des propriétés communes (niveaux de gris, texture, etc.) qui les différencient des régions voisines. On peut parfois regrouper les régions par classes dans le but d'identifier les occurrences d'une entité sur l'image (identifier les neurones, les grains d'amidon, etc.). En s'inspirant du processus de perception visuelle de l'humain, on a donné naissance à deux approches couramment appelées approche région et approche frontière.

La notion de région fait référence à des voisinages de pixels aux propriétés similaires ce qui conduit à une partition directe de l'image puisque chaque pixel est affecté à une région. La notion de frontière, au contraire fait référence au phénomène de discontinuité de propriétés entre les pixels séparant deux régions.

7.1. Approche région

Les méthodes de segmentation basées régions partitionnent une image en régions suivant un critère d'homogénéité. Elles sont particulièrement employées dans le cas d'histogrammes multimodaux. On distingue deux approches :

- Segmentation par Agrégation de pixels ou par croissance de régions
- Par division-fusion

7.2. Approche frontière

Les méthodes de détection de frontières par filtres linéaires sont basées sur un parcours de l'image dans une ou plusieurs directions. On étudie les variations des dérivées première ou seconde des niveaux de gris. On peut aussi utiliser des méthodes basées sur la morphologie qui permettent d'extraire un contour moyen d'un objet.

8. Domaine d'applications de l'analyse de texture

L'Analyse de Textures est devenue de plus en plus fréquente dans des domaines variés.

- **En Imagerie Médicale**, des estimateurs de texture permettent de faire la distinction entre tissus sains et pathologiques.
- **En Géologie**, elle peut être utilisée pour analyser des données sismiques et volcaniques.
- **En Imagerie Satellitaire**, où les estimateurs de textures permettent de différencier un champ d'une forêt, ...
- **En Robotique**, on peut illustrer l'exemple de la navigation d'un robot mobile. La texture de la surface permet d'avoir des informations sur l'environnement de la navigation, celle ci détermine la forme, la profondeur, l'orientation et la distance des surfaces visibles.
- **En Compression d'Images**, les attributs texturaux permettent de représenter l'image par un nombre optimal de paramètres et une reconstruction de l'information avec un minimum d'erreurs.
- **En Infographie ou l'Audiovisuel**, la synthèse de texture découle naturellement de l'analyse et conduit à son utilisation pour le réalisme.
- **En Contrôle Non Destructif**, l'analyse de texture est largement utilisée pour l'inspection des surfaces en contrôle de qualité.

9. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit quelques notions sur l'analyse de la texture, la classification et la segmentation d'image. Les méthodes d'analyse de la texture sont très nombreuses et très variées. Elles ont pour but de caractériser une image ou un pixel par un ensemble d'attributs. Parmi toutes ces méthodes nous nous sommes focalisées sur les méthodes basées sur le modèle et plus particulièrement sur le modèle fractale qui forme l'objet des chapitres suivant.

Chapitre II : Analyse fractale et multifractale

1. Introduction

La géométrie fractale et la théorie multifractale sont des outils précieux pour analyser, comprendre et même prévoir divers phénomènes naturels ou industriels. Cette géométrie est utilisée dans les problèmes d'analyse d'images en général et notamment dans le domaine médical. L'inconvénient majeur de l'application de l'analyse fractale sur les images est que celles-ci ne sont pas toujours de nature fractale. L'analyse multifractale est une solution à ce problème, Un ensemble multifractal est composé de sous-ensembles iso-fractals, et chacun des sous-ensembles se révèle être un ensemble fractal s'il exhibe la même structure géométrique à différentes échelles.

Ce chapitre propose les contributions de plusieurs mathématiciens ayant permis l'issue de la géométrie fractale, et fournit aussi une revue plus formelle du concept fractal, tout en spécifiant les différentes catégories existantes, comme la notion de dimension fractale, la lacunarité et enfin les méthodes correspondantes au calcul de dimension fractale et le spectre multifractale.

2. Analyse Fractal

2.1 Objet fractal ou non fractal ?

Un objet est dit non fractal s'il n'y a pas d'apparition de nouvelles formes chaque fois qu'on zoome une de ses parties (Figure II.1). Or dans le cas d'un objet fractal (Figure II.2). Une nouvelle forme est apparue à chaque fois qu'une partie de l'objet est zoomé. Cette forme est plus au moins similaire à la totalité de l'objet lui-même.

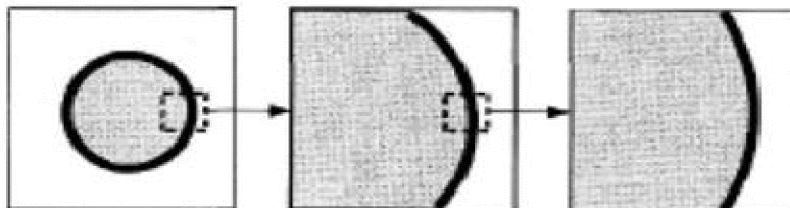


Figure II.1 : Objet non fractal

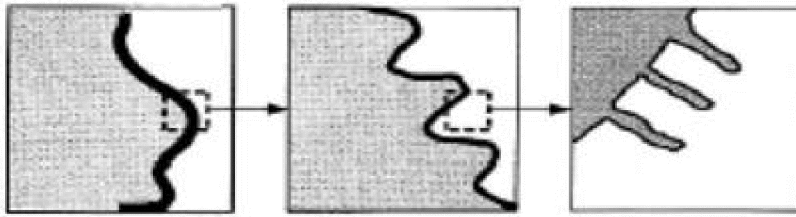


Figure II.2 : Objet fractal

2.2 Définition d'un objet fractal

Le mot fractal est un terme proposé par **Mandelbrot (1975)** qui vient du latin « fractus » et qui signifie irrégulier ou brisé. Il caractérise toutes les formes géométriques qu'on peut imaginer comme faites de parties dont chacune est un modèle réduit du tout.

Généralement, une fractale est un objet composé de plusieurs sous-objets. La caractéristique globale de l'objet est similaire à la caractéristique locale de chacun des sous-objets comme par exemple une tête de chou-fleur, on peut voir qu'elle se brise aisément en bouquets. Chaque bouquet a la forme d'un petit chou-fleur qui se décompose en bouquets plus petits, et ainsi de suite.

On dit qu'un objet est auto similaire si c'est l'union des copies de lui-même à différentes échelles ou le processus est isotrope ou uniforme en toutes directions. Alors, un objet fractal est un objet mathématique qui est issu d'un processus itératif et qui présente un caractère d'autosimilarité.

2.3 Caractéristiques d'un objet fractal

Un objet fractal possède au moins l'une des caractéristiques suivantes :

- il a des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes ;
- il est trop irrégulier pour être décrit efficacement en termes géométriques traditionnels ;
- il est exactement ou statistiquement auto-similaire, c'est-à-dire que le tout est semblable à une de ses parties;

- sa dimension de Hausdorff est plus grande que sa dimension topologique ;

2.4 Classification des fractales

Les fractals sont définis de façon récursive ou itérative, selon la manière avec laquelle elles sont construites. Nous pouvons distinguer deux grandes catégories : les fractals déterministes et les fractals non déterministes.

2.4.1 Fractales déterministes

Ce sont les fractals dont la construction ne dépend pas du hasard. Elles sont souvent construites géométriquement ou avec des méthodes numériques.

Les fractales déterministes sont construites selon des règles itératives bien définies généralement composées d'un initiateur et d'un générateur.

Elles sont de trois types :

a) Les systèmes de fonctions itérés (IFS : Iterated Function System)

Ce type de fractals a une règle de remplacement géométrique fixe. IFS est une théorie mathématique développée par John Hutchinson en 1981, utilisée dans le cadre de la géométrie fractale. Cette théorie est entièrement fondée sur les invariances par changement d'échelle.

Partant de n'importe quelle image, on lui applique chacune des transformations et on fait l'union des figures obtenues. Cette méthode présente les avantages d'être simple donc facile à programmer, de contenir toute l'information d'un dessin complexe dans quelques équations et de regrouper plusieurs fractales dans une approche unifiée.

L'ensemble de Cantor, le triangle de Sierpinski, la courbe de von Koch constituent des exemples appartenant à ce type de fractal

- **ensemble de Cantor**

Pour construire l'ensemble, il prend l'intervalle $[0, 1]$ qu'il divise en trois parties égales et retire le tiers central soit l'intervalle $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Remarquons que les extrémités sont

conservées dans l'ensemble. Ensuite, il enlève le tiers central de chacun des nouveaux segments et ce indéfiniment. De plus, il contient une quantité non-dénombrable de points. Bien que l'ensemble de Cantor ne soit pas le plus visuel, il joue un rôle important dans plusieurs branches des mathématiques.

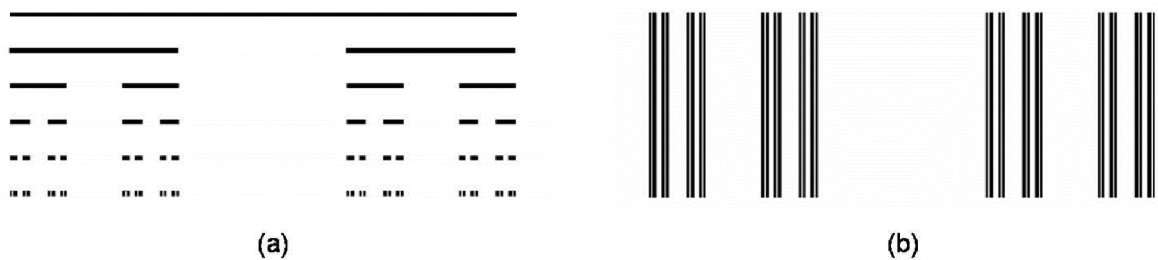


Fig. II.3 : (a) Première étapes de la construction de l'ensemble de Cantor
(b) On utilise des lignes verticales pour faciliter la visualisation ;
l'ensemble de Cantor est formé par les points à la base de chaque ligne.

- **Le triangle de Sierpinski**

Cette construction consiste à prendre un triangle quelconque et à lui retirer le triangle formé par les points milieux de ses trois côtés. Pour chacun des trois triangles ainsi formés, on retire le triangle central de la même façon et on poursuit le procédé jusqu'à l'infini.

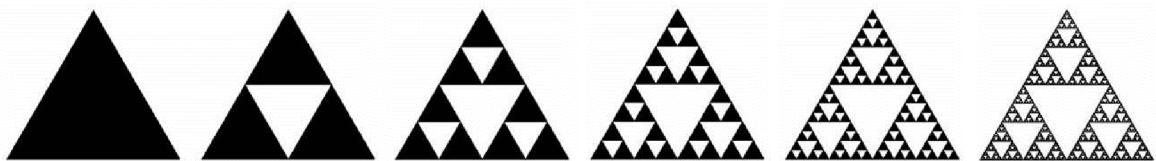


Fig. II.4 : Illustration des premières étapes de la construction du triangle de Sierpinski

La courbe de Von Koch

On prend un segment de longueur 1 et on remplace son tiers central par un « pic » formé de deux segments de longueur $\frac{1}{3}$. On refait le même processus pour chacun des quatre

nouveaux segments et ainsi de suite. À l'infini, on obtient une courbe exclusivement formée de « pics » qui n'a pas de tangente.

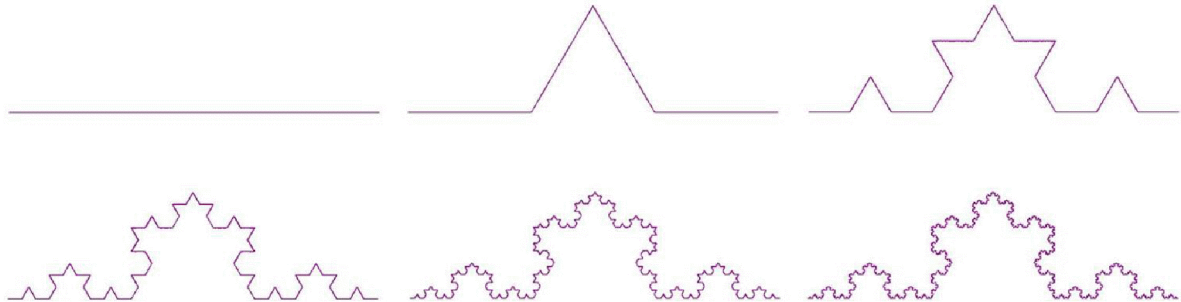


Fig. II.5 : Etapes de la construction d'une courbe de Von Koch

b) Fractales réalisées grâce a une suite de points

Sont des fractales définies par une relation de récurrence pour tout les points de l'espace (tel que le plan complexe). Nous retrouvons dans cette catégorie les ensembles de Mandelbrot et celles de Julia.

- **Ensembles de Julia**

Sont des ensembles obtenus par des itérations du polynôme $z_{n+1} = z_n^2 + c$ dans le plan des nombres complexes.

Pour une valeur de c fixée, on évalue le comportement de la suite. Les points z pour lesquels la suite est bornée forme l'ensemble de Julia rempli associé au point c . Dans certains cas, les points sont rassemblés dans une seule surface connexe alors que pour d'autres valeurs de c , il est formé de points isolés et on dit que l'ensemble est non-connexe.

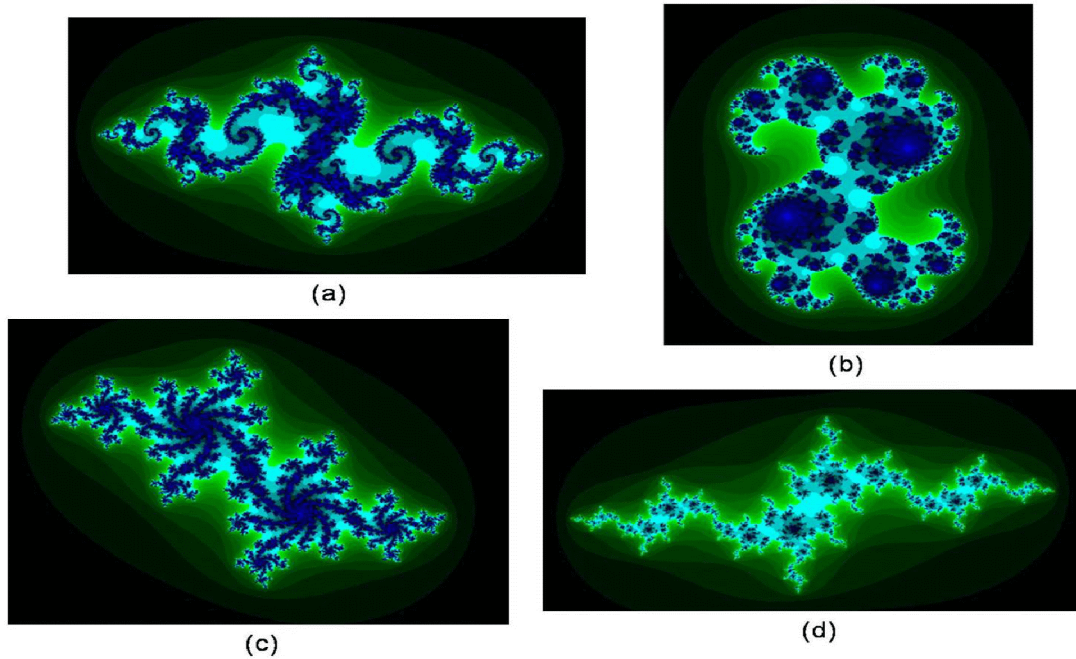


Fig. II.7 : Ensembles de Julia associés au point c (a) $c = -0,8 + 0,168i$ (b) $c = 0,328 + 0,048i$ (c) $c = -0,344 + 0,64i$ (d) $c = -1,096 - 0,264i$. Les couleurs illustrent la vitesse à laquelle la suite diverge. [Josiane 2006]

- **Ensemble de Mandelbrot**

L'ensemble de Mandelbrot est défini par la même suite $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

Cette fois, on fixe le point $z_0 = 0$ et on évalue le comportement de la suite d'itérations pour chaque nombre c du plan. Si le module de z_n est supérieur à 2 la suite va diverger.

Si la suite est bornée, le point c fait partie de M . Avec $M = \{c \in \mathbb{C}\}$

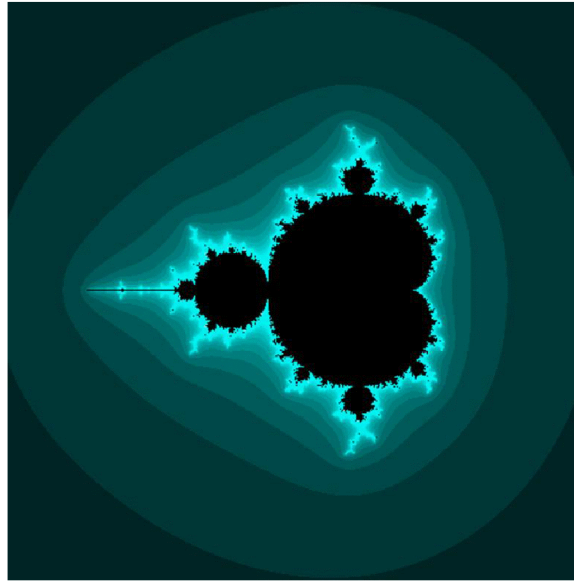


Fig. II.8 : La partie noire constitue l'ensemble de Mandelbrot.

Plus la couleur est foncée plus la suite tend vers l'infini rapidement. [Josiane 2006]

c) Ensembles fractals non uniformes

Une première extension, qui reste dans le cadre déterministe et parfaitement auto-similaire, permet de construire des ensembles fractales non uniforme, en divisant un motif de base en n sous-motifs similaires, mais en utilisant des similitudes de rapports variables $r_i (1 \leq i \leq n)$ pour chacun des sous-motifs. ces ensembles sont également qualifiés de multifractals.

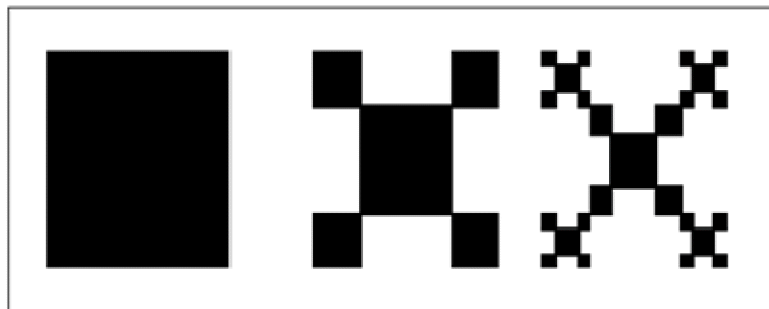


Fig.II.9: Exemple de fractal non uniforme

2.4.2 Fractals non déterministes

Par opposition aux fractales déterministes, il existe des fractales liées au hasard ou à des phénomènes aléatoires (le mode de réplication fait intervenir une composante aléatoire). elles se présentent sous deux formes :

a) objet fractals naturels

Objets aléatoires ou non déterministes, car le processus dynamique qui permet leurs création varie lui même avec le temps de façon aléatoire.

Citant, les vaisseaux sanguins, le paysages fractals (les nuages, les montagnes, les flacons de neige, le chou-fleur...) (la figure montre quelques exemples de fractals naturels).

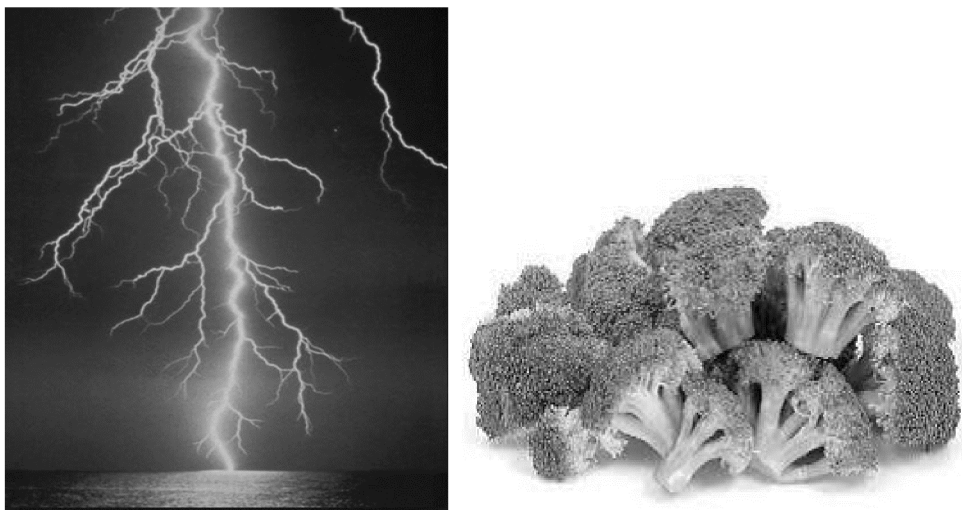


Fig. II.10 : Fractals naturels

b) ensembles fractals aléatoires

Des fractales irrégulières peuvent être construites par simulation en introduisant des composantes aléatoires dans une procédure de construction élaborée au départ pour générer une fractale. Falconer a donné un exemple de variantes aléatoire de courbe de Von Koch dont les principes de modification aléatoire sont illustré dans la (figure II.8).

Les fractales aléatoires sont les plus utilisées dans la pratique, et peuvent servir à décrire de nombreux objets extrêmement irréguliers du monde réel. Elles sont utilisées pour créer des paysages (dans les jeux vidéo par exemple).

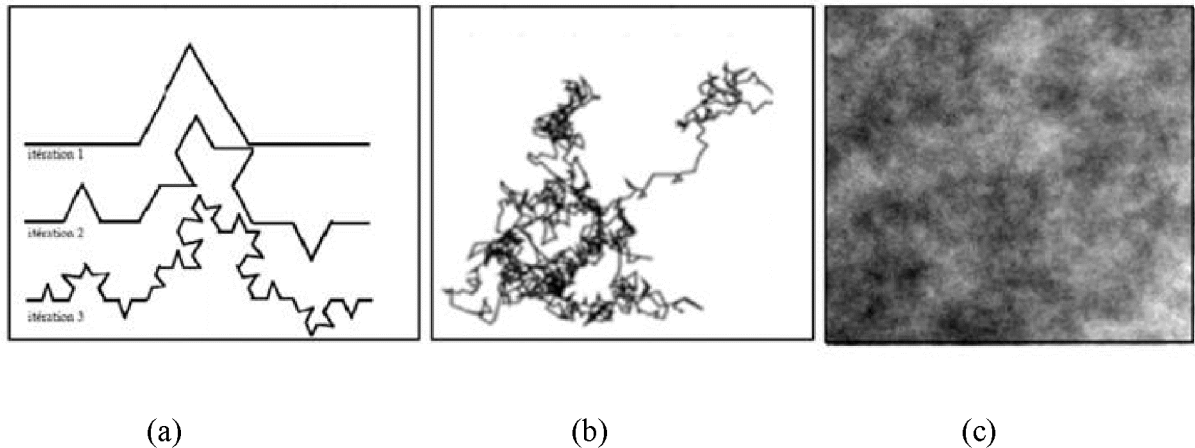


Figure II.11 : exemple de Fractal aléatoire.

- (a) courbe de von koch,*
- (b) mouvement brownien,*
- (c) image en niveaux de gris générée à partir d'un mouvement brownien fractionnaire.*

2.5 Propriétés des fractales

2.5.1 Autosimilarité

Le concept d'autosimilarité ou de similitude interne désigne qu'un objet est composé de parties qui sont des copies de lui-même. Ce qui signifie que les parties ont la même forme, la même structure et les mêmes proportions que l'objet tout entier sauf qu'elles sont à une échelle différente et peuvent être légèrement modifiées (autosimilarité approximative).

2.5.2 La dimension fractale

La deuxième particularité des fractales est leur dimension (Mandelbrot, 1975). Dans la géométrie euclidienne, tous les objets possèdent une dimension entière (0 (un point), 1 (une ligne), 2 (une figure plane), 3 (une figure dans l'espace)).

2.6 Définition de la dimension fractale

La dimension fractale DF est le nombre qui quantifie le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un ensemble géométrique ou d'un objet naturel.

En géométrie euclidienne, la dimension d'un objet se confond avec la dimension topologique de l'espace dans lequel il est plongé. Cette dimension est liée au nombre de paramètres nécessaires pour mesurer un objet. La dimension de quelques figures simples qui sont des entiers naturels : 0 pour un point, 1 pour une courbe, 2 pour une surface et 3 pour un volume.

Pour les objets fractals présentant une structure autosimilaire, leur très forte irrégularité rend inadaptée une description par la géométrie euclidienne. La dimension fractale est introduite pour traduire la façon avec laquelle ces objets remplissent l'espace à toutes les échelles de mesure.

La **dimension de Hausdorff** est introduite en 1919 par le mathématicien Felix

Hausdorff. On couvre un objet F par un ensemble d'éléments de taille $d_i \leq \varepsilon$ de manière que tous les points de l'objet appartiennent à au moins un élément. Le nombre d'éléments n_i pour effectuer le recouvrement doit être le plus petit possible.

On définit alors la dimension de Hausdorff de l'ensemble F par :

$$H_s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N (d_i)^\alpha \quad (\text{II.1})$$

Cette mesure de l'objet est appelée $H_s(F)$ (**Mandelbrot B., 1982**). Elle tend vers une valeur finie unique quand $\alpha = D_h$. La valeur D_h est appelée dimension de Hausdorff

(**Falconer, 2003**). Quand la valeur de la puissance α n'est pas égale à la valeur de la dimension de Hausdorff, la mesure de l'objet $H_s(F)$ tend vers 0 ou l'infini.

Mandelbrot a défini un ensemble fractal comme étant un ensemble pour lequel la dimension de Hausdorff (D_h) est plus grande que sa dimension topologique (D_t) d'où D_h et D_t sont définis comme suit :

- La dimension de Hausdorff-Besicovitch D_h est le rapport des logarithmes entre le nombre N d'homothéties interne de l'objet et l'inverse de la raison r de ces dernières :

$$D_h = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (\text{II.2})$$

Le terme d'homothéties peut être associé à un terme de réduction. Par exemple, une fractal respectant l'équation 1 sera constituée de N modèles pour lesquels la taille a été réduite d'un facteur r .

- La dimension topologique D_t d'un objet correspond au nombre de variable indépendantes nécessaires pour le décrire.

En accord avec (**Mandelbrot, 1967**), de façon analytique, la relation entre l'échelle de mesure δ et la longueur L peut être exprimée comme une loi de puissance :

$$L(\delta) = K\delta^{(1-D)} \quad (\text{II.3})$$

Où K est une constante et D est connue comme la dimension fractale (DF) : un nombre non entier (fractionnaire).

Objet	Dimension fractal	Formule
Cantor	0,6309297534	$\log 2 / \log 3$
Flocon de Koch	1,261859507	$\log 4 / \log 3$
Triangle de Sierpinski	1,584962501	$\log 3 / \log 2$
Tapis de Sierpinski	1,7227	$\log 8 / \log 3$

Tab II.1 : Valeur de dimensions fractales de quelque objet

2.7 Méthodes de calcul de la dimension fractale

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la dimension fractale, chacune ayant ses propres bases théoriques. Ceci peut conduire à des dimensions différentes pour un même objet.

2.7.1 Méthodes de « comptages de boîtes »

La méthode de comptage de boîtes est utilisée pour un objet fractal qui n'a pas de similitude interne.

Cette méthode est utilisée pour les ensembles binaires mais lorsqu'on doit traiter des images codées en niveaux de gris, d'autres méthodes doivent être utilisées.

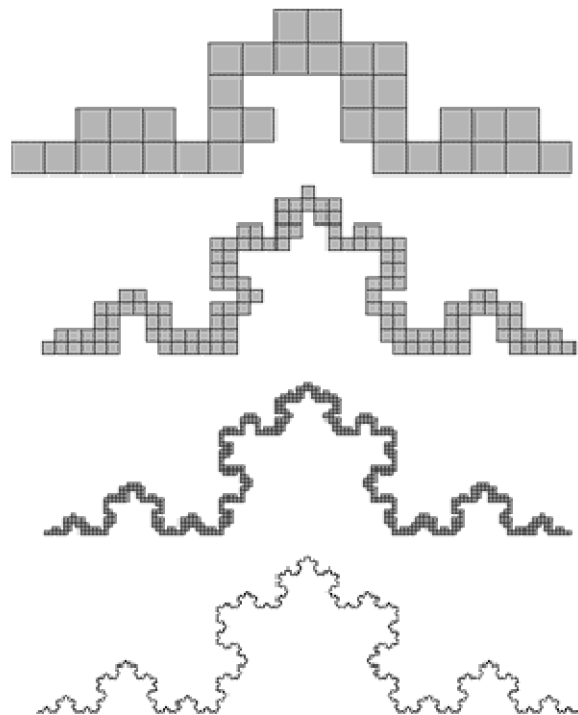


Figure II-12 : Estimation de la dimension fractale du flocon de von Koch par la méthode des boîtes. Images (a) à (d) : le nombre de boîtes utilisées pour recouvrir le flocon augmente au fur et à mesure que la taille des boîtes diminue.

Les méthodes de cette base se divisent en trois classes :

a) Méthode de box-counting ou BC :

Cette méthode a été proposée par (Russel et al. 1980) C'est la méthode la plus simple et la plus utilisée. Elle est performante pour des images auto-similaires et n'est valable que pour des images noir et blanc.

Son principe général est de recouvrir un signal par des boites de taille r . La DF est ainsi donné par :

$$DF = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(r)} \quad (\text{II.4})$$

Où $N(r)$ est le nombre de boites nécessaire pour recouvrir complètement le signal.

Cette formulation nécessite de travailler sur un signal binaire. Étant donné que la plupart des images médicales sont codées en niveaux de gris, l'étape de binarisation engendre une perte d'information.

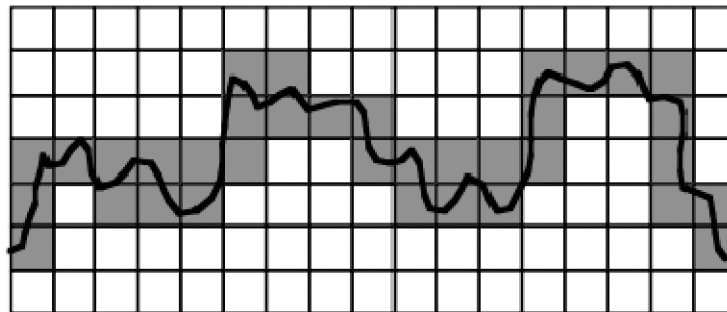


Figure II.13 : mesure de la dimension fractale d'une courbe par la méthode des boîtes

b) Méthode de comptage différentiel des boîtes ou DBC

Cette méthode a été proposée par (Sarkar et Chaudhuri en 1992) dans le but de résoudre les limites du BC. Cette formulation a été nommée DBC qui peut travailler sur des images codées en niveaux de gris. Le principe de cette méthode consiste à partitionner en boîtes de différentes tailles r et la probabilité $N(r)$ est calculé comme la différence entre le maximum et le minimum des niveaux de gris.

c) Méthode de comptage étendu ou XCM

La méthode dite de « comptage étendu » (**Sandau and Kurz**) a été proposée comme une alternative à la BC. La BC est appliquée à plusieurs sous ensembles de l'objet fractal (on partitionne l'objet en block et on applique la BC à chaque block), le maximum des dimensions obtenues est considéré comme la DF de l'objet.

2.7.2 Méthodes basées sur le mouvement brownien fractionnaire (FBM):

Les mouvements browniens fractionnaires fBm (fractional Brownian motion) permettent de décrire les processus stochastiques de type gaussien. Un fBm est essentiellement caractérisé par un paramètre H qui définit sa dimension fractale.

Le paramètre H est un réel prenant ses valeurs sur l'intervalle $[0,1]$. La valeur $H = 0.5$ correspond à la définition usuelle du mouvement Brownien.

Ce paramètre contrôle la rugosité de la texture : plus H est proche de 0, plus l'image est rugueuse et plus H est proche de 1, plus l'image est lisse.

La dimension fractale d'une surface FBM est donnée par la relation suivante :

$$DF = D_T + 1 - H \quad (\text{II.5})$$

Où H est le coefficient de Hurst, appelé aussi exposant de rugosité.

Avec DF = dimension fractale

D_T = dimension topologique

Le mouvement brownien fractionnaire B_H se définit par:

$$Pr \left(\frac{B_H(x+\Delta x) - B_H(x)}{\|\Delta x\|^H} < s \right) = F(s) \quad (\text{II.6})$$

Où F est une fonction de répartition de la variable aléatoire s de type gaussien $N(m, \sigma^2)$.

Il existe aussi une autre définition donnée par (**Mandelbrot et Van Ness 1968**) basée sur l'intégrale d'un mouvement brownien ordinaire $B(t)$ et d'un paramètre spatial ou temporel t :

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t (t-t')^{H-\frac{1}{2}} dB(t') \quad (\text{II.7})$$

$B_H(t)$ n'est pas dérivable, mais $dB(t')$ représente un accroissement différentiel du mouvement brownien par rapport au paramètre spatial ou temporel t . Cette relation permet alors de calculer le MBF à partir des premières valeurs du mouvement brownien ordinaire.

- **Méthode de la variance :**

La méthode de variance est basée sur une modélisation statistique Gaussienne du signal étudié. A partir d'une DF donnée, il est possible d'utiliser une modélisation d'un fBm pour créer un signal correspondant à une telle DF.

- **Méthode du spectre de puissance**

La méthode du spectre de puissance est basée sur le spectre de Fourier dépendant du fBm.

Chaque ligne formant l'image, est transformée dans l'espace de Fourier, puis le spectre de puissance est calculé. Ensuite l'ensemble de ces spectres correspondant à chaque profil de l'image est moyenné. La DF est enfin estimée par la pente de la régression linéaire des différents spectres en fonction d'une taille de grille.

2.7.3 Méthode basée sur la mesure de la surface

Les méthodes dites de « mesure de surface » utilisent les éléments structurants (triangle, carré...) et des opérateurs morphologique (dilatation, érosion) à différentes échelles r et calculant l'aire $A(r)$ de la courbe du $\log A(r)$ en fonction du $\log(r)$. Dans cette classe de méthodes, trois algorithmes sont les plus utilisés :

- **Méthodes des prismes triangulaires**

La méthode de prisme triangulaire a été introduite par Clarke en 1986 (**Clarcke, 1986**) de la façon suivante :

Dans une image en niveau de gris, représentée dans un espace (O, X, Y, Z) , chaque quatre pixels adjacents du plan (O, X, Y) constituent un carré (fenêtre d'analyse). Soit $abcd$ ce

carré de côté s et de centre e . l'idée est alors de calculer la surface du prisme triangulaire de chaque fenêtre d'analyse de taille s , puis de calculer la surface A_s qui correspond au total des surfaces de tous les prismes triangulaires obtenus.

La procédure se répète pour différentes tailles s , et la pente p de la droite de régression de l'ensemble de points $(\log s, \log A_s)$ est calculée pour déterminer la dimension fractale D de l'image suivant l'équation : $D = (2 - P)$.

Un prisme triangulaire est obtenu en reliant les quatre niveaux de gris A, B, C, D ayant respectivement les positions a, b, c, d (angle de la fenêtre d'analyse) avec la valeur moyenne E correspondante (E est affectée à la position e du centre du carré). Sa surface représente la somme des surfaces des quatre triangles $DEA, AEB, BEC,$ et CED qui le forment (figure II.14).

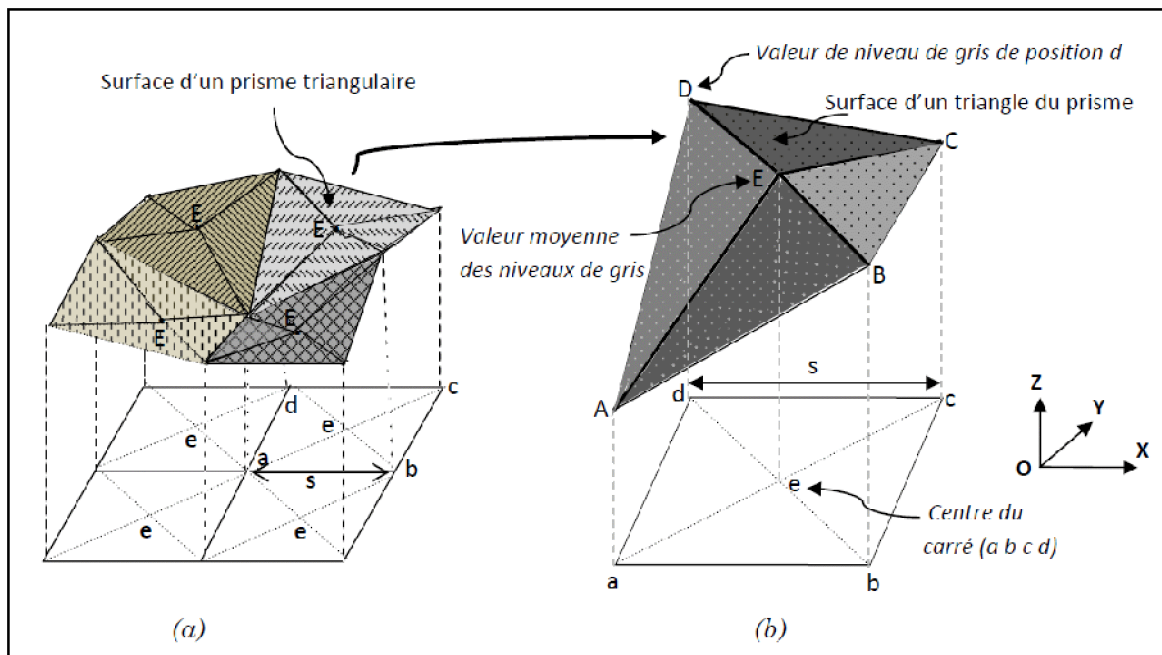


Figure II.14 : méthode des prismes triangulaires

➤ Méthodes de recouvrement des blancs

Le but de cette méthode est de calculer l'aire de la surface des niveaux de gris et ainsi d'estimer la DF de la surface 3D (Peleg et al 1984).

On considère tous les points dans un espace 3D (la troisième dimension étant le niveau de gris) séparés par une distance E , et une surface est recouverte donc avec un élément structurant d'épaisseur $2E$. Cette couverture est déterminée par deux surfaces, l'une dite maximale obtenue par dilatation et l'autre minimale obtenue par érosion.

- **Avantages**

Si l'image avait ses niveaux de gris inversés, la DF estimée ne changerait pas.

- **Inconvénients**

- Cette méthode donne de bonnes estimations seulement lorsque la valeur théorique de la DF est relativement faible (Asvestas et al, 1999). Le résultat de la DF dépend fortement du bruit dans l'image.

➤ **Méthodes des isarithmes**

Une isarithme est un symbole linéaire reliant des points de valeurs égales. Les courbes de niveau (lignes reliant des points de même altitude) sont la forme la plus connue de ce type d'éléments linéaire. En géométrie fractale, l'idée d'utiliser ce symbole est d'approximer la complexité d'une surface en définissant la complexité des lignes de contour (ou isarithme).

Cette méthode a essentiellement un sens dans le cas de signaux 2D. Son principe est de construire des séries d'isarithmes (contours) basées sur les valeurs des niveaux de gris des images. La DF de chaque isarithme peut être estimée et la DF moyenne plus 1 est considérée comme celle de l'image.

- **Avantage :**

(Shelberg et al 1983) ont montré que la méthode pouvait être utilisée pour estimer la DF de surfaces qui ne sont pas auto-similaires. De plus, elle est robuste au bruit aléatoire présent dans les images (QIU et al 1999).

- **Inconvénients :**

La DF calculée par cette méthode dépend fortement de la direction utilisée pour calculer les isarithmes (Lam and DE Cola 2002).

(Clarke 1986) a montré que la méthode est fortement dépendante des valeurs des isarithmes et leurs intervalles utilisés.

3. Lacunarité

Des objets fractals de natures très différentes donnent parfois la même dimension fractale. La mesure de la Lacunarité vient pour pallier cette insuffisance de la dimension de fractale pour caractériser seule les ensembles fractals. La lacunarité est le deuxième paramètre fractal, utilisée pour analyser la répartition spatiale des trous (vide) dans un objet fractal binaire. Le terme Lacunarité vient du mot latin « Lacunas » qui veut dire trous. Elle n'est pas exprimée avec un seul nombre comme la dimension fractale mais varie en fonction de l'échelle d'analyse.

Le rapport entre la variance $var(r)$ sur le carré de la moyenne $moy(r)$ donne la Lacunarité fractale de la taille r . L'opération est répétée autant de fois que nécessaire pour déduire toutes les valeurs de la courbe de la lacunarité $L(r)$, sa formule est donné par :

$$L(r) = \frac{var(r)}{moy(r)^2} \quad (\text{II.8})$$

La lacunarité est de valeur très petite lorsque l'objet fractal est invariant par translation, en présence des vides de taille relativement faible. Par contre, elle prend des valeurs significatives pour des vides de tailles importantes.

L'étude de lacunarité fractale nécessite la binarization de l'image. Plusieurs méthodes de binarization sont possibles. Ce qui se traduit par une segmentation de l'image en deux classes ou son codage avec 1 bit par pixel.

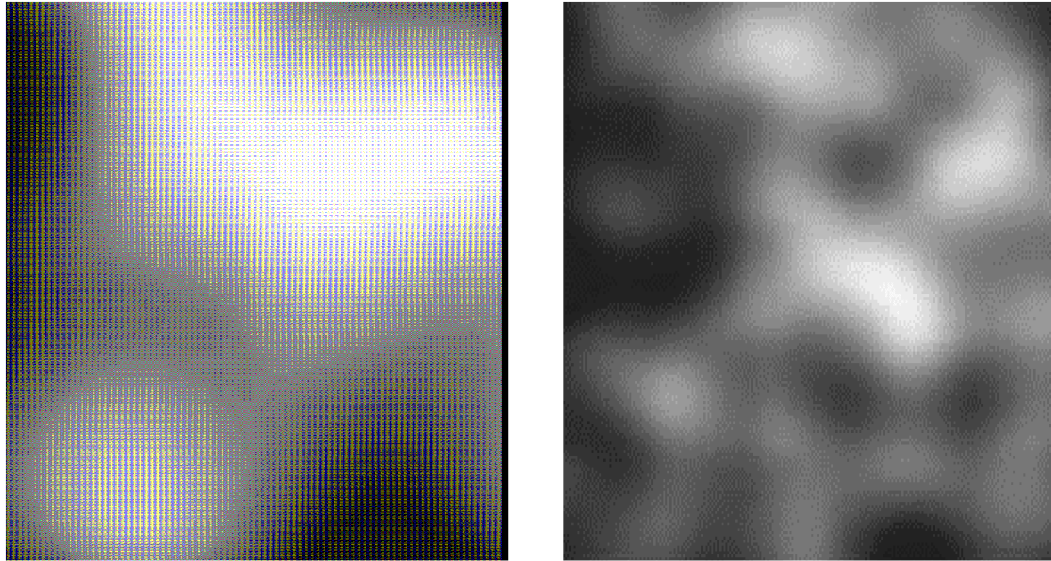


Figure. II.15 : deux surfaces possédant la même dimension fractale et une lacunarité différente.

4. Analyse Multi Fractal

Un objet mono fractal est un objet invariant par des transformations géométriques de dilatation. Sans plus d'information sur l'objet, il est possible de distinguer l'objet lui-même de l'un de ses détails, convenablement dilaté. Un objet multi fractal est plus complexe dans le sens où il est toujours invariant par dilatation et où le facteur nécessaire pour pouvoir distinguer le détail de l'objet entier, dépend du détail observer.

L'analyse multi fractale a pour but l'étude de fonctions dont la régularité ponctuelle peut varier d'un point à un autre. Les premiers outils pour mesurer la régularité sont familiers à tous : continuité, dérivabilité en un point. L'analyse multifractale fournit une description à la fois locale et globale des singularités d'un signal : la première est obtenue via l'exposant de Hölder et la seconde grâce au spectre multifractale (**Testud, 2002**). Ce qui nous donne la répartition des singularités sur le support du signal de façon géométrique et statistique (**Syarry, 2007**).

4.1 Exposant de Hölder

L'exposant de Hölder $h(x_0)$ introduit un continuum entre la continuité, dérivabilité en un point, et permet de repérer précisément la régularité grâce à un paramètre réel positif. Cet exposant au point x_0 d'une fonction f est la limite supérieure de h , tel qu'il existe un polynôme P de degré n ($n \leq h$) et une constante C , pour tout x dans le voisinage de x_0 :

$$|f(x) - P(x)| < C \cdot |x - x_0|^h \quad (\text{II.9})$$

L'exposant de Hölder de f en x_0 est alors :

$$\alpha(x_0) = \sup \{h : f \in C^h(x_0)\} \quad (\text{II.10})$$

On remarque que, puisque f est bornée, on a toujours $f \in C^0(x_0)$, et donc $\alpha(x_0) \geq 0$. Cet exposant rend compte localement, en x_0 , de la régularité de la texture de l'image.

Par exemple, $\alpha(x_0) \geq 1$ indique que l'image est localement dérivable. A contrario, $0 \leq \alpha < 1$ rend compte du fait que l'image est continue mais non dérivable. Dans ce cas, la proximité de 1 pour α indique que l'image est presque aussi régulière qu'une fonction dérivable, tandis qu'un α proche de 0 traduit une forte irrégularité, proche de la discontinuité.

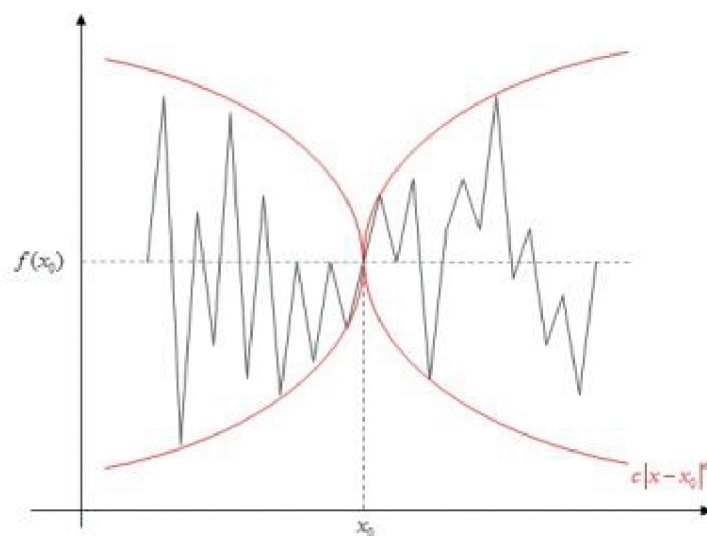


Figure II.16: Enveloppe Hölderienne d'un signal au point x_0 .

4.2 Spectre multifractal :

Les physiciens ont cherchés à calculer la dimension de Hausdorff D_h de S_h . La fonction $h \rightarrow D_h$ appelée spectre de singularités de f . Réaliser l'analyse multi fractale d'une fonction f , c'est déterminer son spectre de singularités. Une formule appelé « formalisme multi fractal », a été établie par **(Parisi et Frisch, 1985)** dans le but de calculer ce spectre. Le formalisme est défini par :

$$D(h) = \inf_q (q \cdot h - \tau(q) + c) \quad (\text{II.11})$$

Où q est un réel, à savoir une constante et $\tau(q)$ est appelé la fonction de répartition.

Le formalisme multifractal utilisant la méthode des boîtes permet d'estimer deux indices.

L'exposant de Hölder ; ce dernier fournit les propriétés locales des singularités contenues dans les images, il s'agit de la valeur (α) , et autre valeur $f(\alpha)$ qui présente la description globale ; cette valeur est obtenue à partir du spectre multifractale.

4.3 Spectre de singularités

Pour définir une description multifractale des images, il convient de pouvoir caractériser les points de mêmes singularités et de distinguer dans une image les différents comportements locaux, plus pratiquement à décrire d'un point de vue géométrique ou statistique la répartition des exposants de Hölder de l'image.

Le spectre de singularités consiste essentiellement à décomposer le signal f (1D ou 2D) en sous-ensembles ayant la même régularité, puis à mesurer la « taille » des sous-ensembles obtenus. Plus précisément, il est défini par l'ensemble des points t où f prend le même exposant de Hölder α , ces points sont regroupés dans des ensembles $E(\alpha)$ qu'on appelle les ensembles iso-Hölder :

$$E(\alpha) = \{t : \alpha(t) = \alpha\} \quad (\text{II.12})$$

Il existe trois types de spectres qui fournissent des informations complémentaires : spectre de Hausdorff F_H , spectre de grandes déviations F_G et le spectre de Legendre F_L .

a) Spectre de Hausdorff

Le spectre de Hausdorff F_H ou spectre géométrique mesure la raréfaction des ensembles de points ayant même exposant de Hölder ponctuel. C'est ce spectre qui donne son nom à l'analyse multifractale, il est fondé sur la dimension de Hausdorff D_H .

Pour calculer ce spectre, on considère que chaque exposant présente un ensemble fractal avec la même régularité et dont on va calculer sa dimension, et que le signal f (1D ou 2D) est formé de l'union de ces ensembles fractals de dimensions différentes.

Plus précisément :

$$f(\alpha) = \dim(Ef(\alpha) = \{t : \alpha(t) = \alpha\}) \quad (\text{II.13})$$

Le couple $(\alpha, f(\alpha))$ fournit une information à la fois locale (via α) et globale (via $f(\alpha)$). Il est désigné sous le nom du spectre de Hausdorff de f . Ce spectre fournit une caractérisation géométrique globale des singularités du signal, d'après la mesure de la répartition globale des différents exposants de Hölder.

b) Spectre de grandes déviations

Une autre possibilité est de donner une caractérisation statistique de la répartition des singularités. Plus précisément, le spectre de grandes déviations $F_G(\alpha)$ mesure la vitesse exponentielle de décroissance de la probabilité de rencontrer une singularité à peu près égale à α à la résolution n quand cette dernière tend vers l'infini.

Bien que le spectre de grandes déviations joue un rôle essentiel dans l'analyse multifractale, les méthodes pour l'estimer demeurent à l'heure actuelle peu développées.

c) Spectre de Legendre

Il existe des limitations dues aux difficultés algorithmiques d'estimation des deux premiers spectres F_H (Hausdorff) et F_G (Grandes déviations). Une façon élégante de dépasser ces obstacles consiste à calculer le spectre de Legendre F_L , qui est la transformée de Legendre d'une certaine quantité qu'on appelle dimensions de Rényi ou dimensions généralisées D_q qui présentent des fonctions de l'ordre de probabilité du moment q .

La transformée de Legendre est une opération mathématique, schématiquement, transforme une fonction définie par sa valeur en un point (dans ce cas les exposants de Hölder) en une fonction définie par sa tangente, cette fonction correspond au spectre.

4.4 Méthodes de calcul du spectre multifractal

Comme pour l'estimation de la DF, plusieurs méthodes existent pour approximer le spectre multi fractal. Nous avons divisé la description des ces méthodes en deux classe : celles dites de « comptage de boites » et celles basée sur les ondelettes.

4.4.1 Méthodes de comptage de boîtes

Les méthodes de comptage de boîtes sont définies à partir des dimensions des boîtes, elles sont appliquées avec différentes techniques statistiques ou bien géométriques.

a) Approche géométrique

Elle est basée sur le calcul d'une mesure d'intensité dans la boîte ou la fenêtre qui couvre le signal en choisissant le type de la mesure:

- La mesure maximale : évalue l'intensité maximale des pixels dans une fenêtre de voisinage de taille ε .
- L'inverse minimum : utilise la valeur d'intensité minimale soustraite de la valeur 1.
- La mesure de sommation calcule la valeur d'intensité totale.
- L'iso compte le nombre de pixels proches qui ont une valeur similaire au pixel central.

Après le calcul de la mesure $\mu(B(x, \varepsilon))$, l'exposant de Hölder est calculé par une régression linéaire entre la valeur logarithmique de la mesure de l'intensité dans chaque boîte B de taille ε pour chaque point x et valeur logarithmique de la taille ε :

$$\alpha = \frac{\log \mu(B(x, \varepsilon))}{\log(\varepsilon)} \quad (II.14)$$

En comptant le nombre de boites $N_\varepsilon(\alpha)$ ayant le même exposant de Hölder α , le spectre multifractal est estimé par :

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(\alpha)}{\ln(\varepsilon)} \quad (II.15)$$

b) Approche statistique

Dite aussi des moments, elle est basée sur le calcul des dimensions généralisées pour les moments d'ordre positifs et négatifs.

La dimension généralisée est définie par :

$$D(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln(Z(q, \varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \quad (II.16)$$

Avec :

$$(Z(q, \varepsilon)) = \sum_{i=1}^{NB(\varepsilon)} \mu_i q(\varepsilon) \quad (II.17)$$

Où q est un entier qui correspond au moment d'ordre de la répartition des mesures μ_i , il est considéré comme un microscope permettant d'explorer différentes régions de la distribution des μ_i .

Et $Z(q, \varepsilon)$ est la fonction de partition. Elle à un comportement en loi de puissance, la courbe peut être approchée par une droite de pente τ appelée exposant d'échelle :

$$Z(q, \varepsilon) \cong \varepsilon^{\tau(q)} \quad (\text{Loi de puissance})$$

Les dimensions fractales sont calculées à partir de la relation :

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (II.18)$$

Si les dimensions $D(q)$ forment une ligne horizontale, le signal est homogène et possède les mêmes propriétés d'échelles : c'est un signal monofractal.

A l'inverse, si les $D(q)$ représentent une courbe, le signal est non-homogène et présente des propriétés d'échelles différentes, il s'agit donc d'un signal multifractal.

Finalement, le spectre multifractal $D(h)$ qui permet de rendre compte de la densité de distribution des irrégularités peut être calculé à partir de la transformée de Legendre :

$$D(h(q)) = h(q) \times q - \tau(q), \quad h(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} \quad (II.19)$$

Où h correspond à l'exposant de Hölder qui mesure l'intensité des irrégularités locales d'un signal.

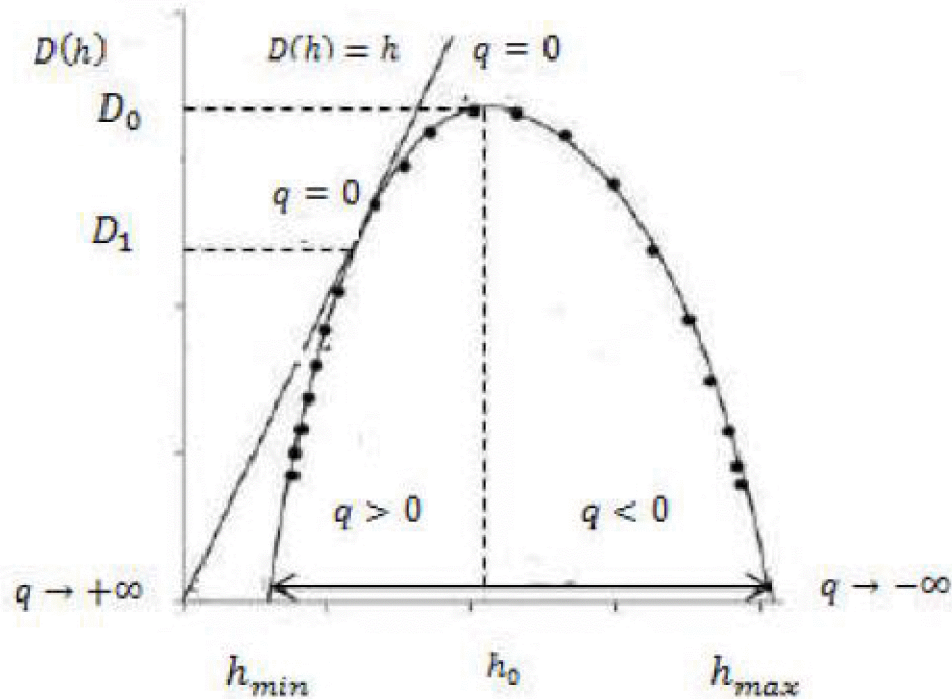


Figure II.17 : Exemple de spectre multifractal avec q le moment d'ordre, $D(q)$ les dimensions fractales et Δ_h la largeur du spectre.

Si le spectre multifractal est réduit à un point, le signal est monofractal. A l'inverse, pour un signal multifractal, le spectre a la forme d'une cloche.

- Pour une image, le $D(h)$ prend ses valeurs dans $[0,2] \cup \{-\infty\}$. La valeur $-\infty$ correspond au cas où l'ensemble iso-Hölder $E_x(h)$ est vide.
- Si $E_x(h)$ est une ligne de l'image, alors $D(h) = 1$.
- Si tous les pixels d'une zone de l'image ont pour exposant h_0 , alors $D(h) = 2$.
- Plusieurs paramètres peuvent être déduits du spectre multifractal tels que la courbure, la largeur Δ_h qui correspond à l'écart entre les deux extrémités du spectre ($\Delta_h = h_{max} - h_{min}$) et la symétrie qui permet de localiser les irrégularités. La largeur du spectre multifractal, à travers l'exposant de Hölder, permet d'estimer la gamme d'intensité des irrégularités locales.

4.4.2 Méthode basée sur les ondelettes

Certaines méthodes utilisent la transformée en ondelette discrètes et d'autres la transformée en ondelette continue.

a) Méthodes basées sur la transformée en ondelette discrètes

Une transformée en ondelettes est dite discrète lorsque les valeurs des translations et des dilatations sont discrètes (pas nécessairement entières). Soit Ψ une ondelette mère. Une famille d'ondelettes, obtenue à partir de Ψ , est entièrement connue par la donnée du triplet (Ψ, a, b) où « a » détermine l'échelle des dilatations et « b » détermine le pas des translations.

Il est connu que la représentation Ψ de l'équation est très redondante et que l'espace continu peut être discrétisé sans perte d'informations. Dans l'équation suivante, le double intégral est remplacé par une double somme.

$$f(x) = \frac{1}{c_\Psi} \sum \sum W_f(a, b) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (\text{II.20})$$

Une transformée en ondelettes discrètes à deux dimensions peut être accomplie en exécutant deux transformées unidimensionnelles séparées. En premier, l'image (signal 2D) est filtrée horizontalement (suivant l'axe des x) et divisée par deux. Par la suite la sous-image sera filtrée verticalement (suivant l'axe des y) et divisée par deux.

On obtient alors une image composée de quatre bandes après une décomposition à un seul niveau.

b) Méthodes basées sur la transformée en ondelettes continues

Une transformée en ondelettes est dite continue lorsque les paramètres structurels des fonctions utilisées (les translations et les dilatations), peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle de \mathbb{R}^2 (les dilatations doivent néanmoins être positives).

Pour que la transformée en ondelettes d'une fonction existe, il faut que cette fonction appartienne à l'ensemble des fonctions de carré sommable que l'on note par $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Autrement dit, il faut que son carré soit fini. Cette condition se traduit par :

$$\int f^2(x)dx < \infty \quad (\text{II.21})$$

Dans ces conditions, la transformée en ondelette continue de la fonction f est définie comme le produit scalaire de f et de l'ondelette: Ψ

$$W_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int f(x) \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (\text{II.22})$$

**c) Méthodes des « maxima du module de la transformée en ondelette »
(MMTO)**

La méthode des « maxima du module de la transformée en ondelette » est basée sur le concept des ondelettes en général et de la transformée en ondelette continues en particulier. Son principe général est basé sur le suivi à différentes échelles des MMTO. Elle a l'avantage d'être plus stable que les autres méthodes de calcul de spectre multi fractal.

d) Méthodes des «coefficients dominants »

L'idée du coefficient dominant est que le coefficient d'ondelette discret est remplacé par celui possédant la plus grande valeur absolue parmi les coefficients existants dans le voisinage spatiale du coefficient remplacé à toutes les échelles. L'avantage de ce formalisme est qu'il est valable pour tous types de singularités (oscillantes et non-oscillantes) et permet de mesurer la totalité du spectre.

5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe de l'analyse multifractale et l'importance de la dimension fractale pour mesurer ou caractériser les objets complexes.

L'intérêt de la géométrie fractale en analyse d'images est justifié par l'auto-similarité des objets anatomiques sur une résolution finie. L'utilisation de cette géométrie repose principalement sur l'estimation d'attributs fractals. Diverses méthodes ont été proposées pour estimer la dimension fractale ou le spectre multifractal. Cette étude énumère l'ensemble de ces algorithmes, leurs principes, leurs avantages et inconvénients, ainsi que leur application dans le domaine de l'analyse des images.

La dimension fractale fournit un aspect global de la texture, tandis que l'analyse multifractale fournit un aspect local et global de la texture.

Dans le chapitre qui suit on s'intéressera à l'utilisation de cette théorie dans le domaine médicale.

Chapitre III : utilisation des fractal sur des images medicale

1. Introduction

La géométrie fractale, comprenant les analyses fractales et multifractales, est un outil en émergence dans de nombreux domaines d'applications et notamment en imagerie médicale. Ces approches ont été largement utilisées par les chercheurs pour étudier les images médicales dans le but d'analyse de texture, de détection d'anomalies, de caractérisation et de classification pour aider le médecin dans son diagnostic.

Elles procurent au pathologiste des outils mathématiques pour quantifier ce qui jusque-là était difficilement mesurable. Par exemple l'œil humain ne suffit pas toujours pour détecter si une lésion qui apparaît sur une radiographie est une tumeur cancéreuse. On a besoin d'une mesure. La dimension fractale est une des mesures utilisées.

Dans le cadre de ce chapitre nous étudierons les applications de la géométrie fractales dans le cas de certaines maladies leur utilisation dans la classification pour caractériser des régions particulières (tumeurs, lésions,...).

2. Utilisation des fractal sur des trabeculation osseuse

L'ostéoporose est une maladie dite « silencieuse » puisque aucun symptôme n'accompagne la perte osseuse. C'est une pathologie du squelette caractérisée par une diminution de la densité de la masse osseuse (DMO) et une altération de la qualité osseuse ayant pour conséquence une augmentation du risque de fracture. Cette maladie touche une partie non négligeable de la population, particulièrement lors de la période de vieillesse et engendre des pertes économiques considérables.

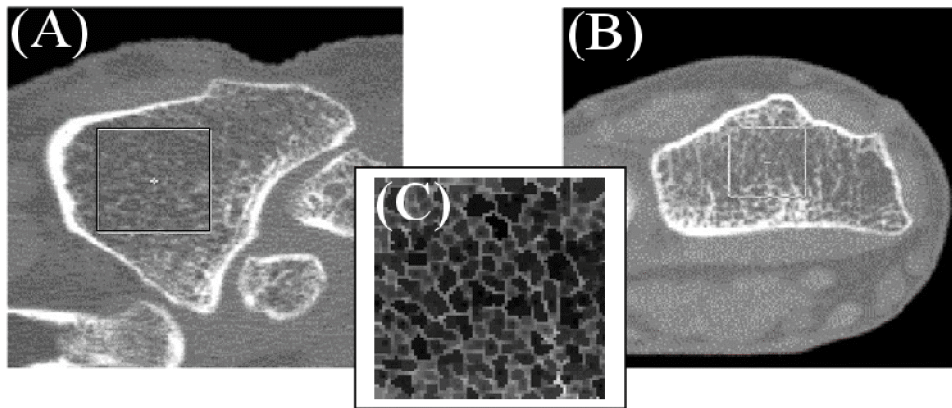


Figure III.1 : (A) et (B) illustrent des images IRM avec des fenêtres indiquant les ROI. (C) figure montrant une ROI de texture trabéculaire osseuse.

Parmi les travaux marquants dans l'imagerie médicale, on peut citer ceux de (**khider, 2011**) où il a appliqué la méthode du comptage de boîtes, la lacunarité fractale et l'analyse spectrale. Les résultats obtenus ont montré la puissance et la robustesse de certaines méthodes comme la lacunarité fractale et l'analyse par spectre de puissance dans la classification des ROI (Régions d'Intérêt) en pathologique et saine. L'insuffisance de la méthode du comptage de boîte dans l'identification des tissus pathologiques est due vraisemblablement non seulement à la taille réduite des ROI utilisées, qui ne dépassent pas les 200x200 pixels, mais aussi à l'insuffisance de la résolution actuelle des appareils d'acquisition par rapport à l'épaisseur des travées osseuses, qui sont de l'ordre de quelques centaines de micromètres seulement.

Aussi, il a été constaté que la technique du comptage de boîte est incapable de caractériser les fonctions composées de parties singulières submergées dans un signal de comportement régulier. Ce qui explique en partie l'insuffisance des résultats obtenus par l'application directe de cette méthode.

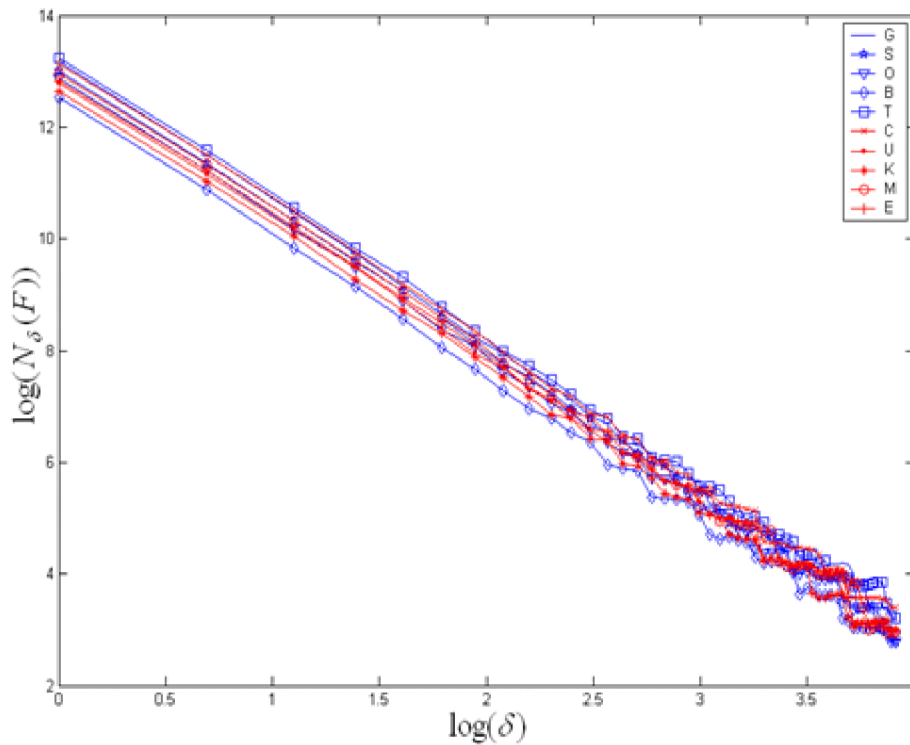


Figure III.4 : *Analyse fractale de 10 ROI d'IRM trabéculaire par la méthode du comptage de boîtes.*

Pour l'analyse multifractale par MMT0-2D, l'auteur a combiné trois paramètres, à savoir, l'exposant de Holder, l'anisotropie et la densité des squelettes de la transformée en ondelettes. Il a aussi utilisé le spectre de grain pour discriminer les cas pathologiques et normaux. Les résultats de traitement montrent que le taux de dépistage de l'ostéoporose dépasse 90%. Ceci montre la puissance et la robustesse de l'analyse multifractale dans l'identification des tissus pathologiques pour les images médicales.

L'utilisation des modes des spectres de grains aide dans la classification des ROI (voir figure III.6) grâce au paramètre α qui vaut approximativement 0.63 pour les cas normaux et 0.65 pour les cas ostéoporotiques.

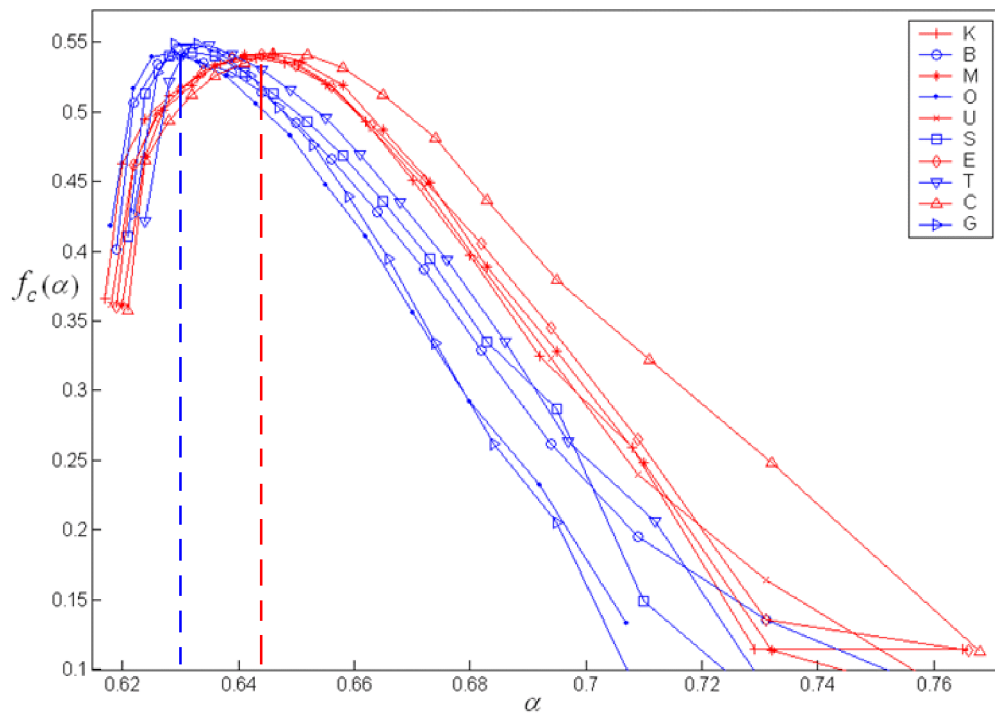


Figure III.5: Spectres multifractals de grains des 10 ROI de type IRM, on peut identifier les deux cas de texture saine (bleu) et pathologique (rouge) à travers les modes des spectres.

Nous avons constaté que la méthode de comptage de boîte ne permet pas une bonne classification des cas sains et pathologiques, compte tenu du chevauchement des résultats obtenus. De plus le changement de tailles des boîtes influe sur les valeurs des dimensions fractales. Par contre les résultats obtenus par l'analyse multifractale sont très satisfaisant ce qui rend cette méthode intéressante pour la classification des cas sains et pathologiques de l'os trabéculaire.

(Korchiyne et al.2012) ont développé une méthode basée sur une approche multifractal pour caractériser et classier des images médicales CT-Scan (Computed Tomography) de textures osseuses en proposant des attributs issus de l'image des singularités et du spectre multifractal.

Les auteurs s'intéressent à l'analyse de deux images osseuses CT-Scan correspondant à deux sujets différents. Un sujet sain et l'autre ostéoporotique. L'étude de la microarchitecture de l'os permet dépister la dégénérescence de l'os due à une pathologie ostéoporotique.

Le dépistage par analyse texturale de l'os consiste à extraire le descripteur de la texture du ROI du sujet sain et le comparer au descripteur du ROI du sujet en question.

Pour cela, ils ont transformé l'image en question en image de Hölder, puis trouver le spectre multifractal. La classification de l'image en deux classes permettra de dévoiler la présence ainsi que la taille d'une dégénérescence si elle existe.

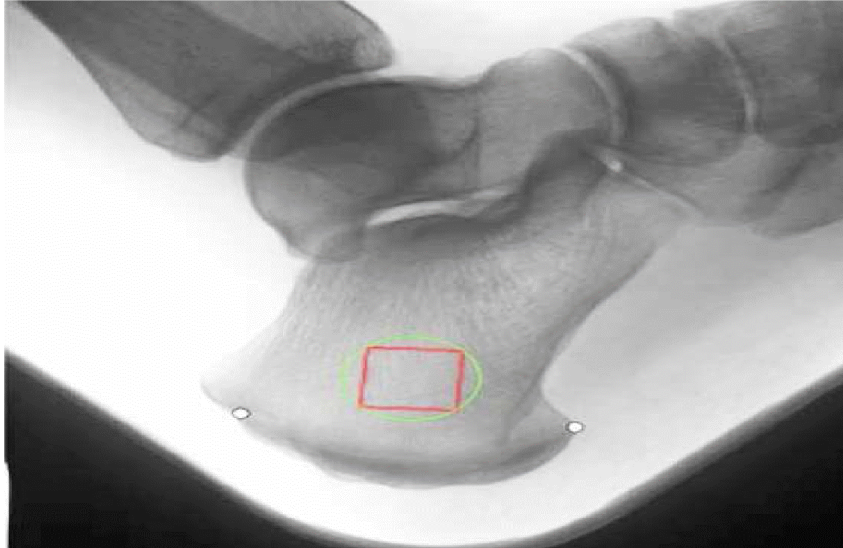


Figure III.6. La région d'intérêt ROI sur le col du fémur de l'os.

Les attributs proposés dans ce travail sont composés des descripteurs de la forme et la position du spectre multifractal de l'image analysée.

Les résultats obtenus sont illustrés dans les figures suivantes :

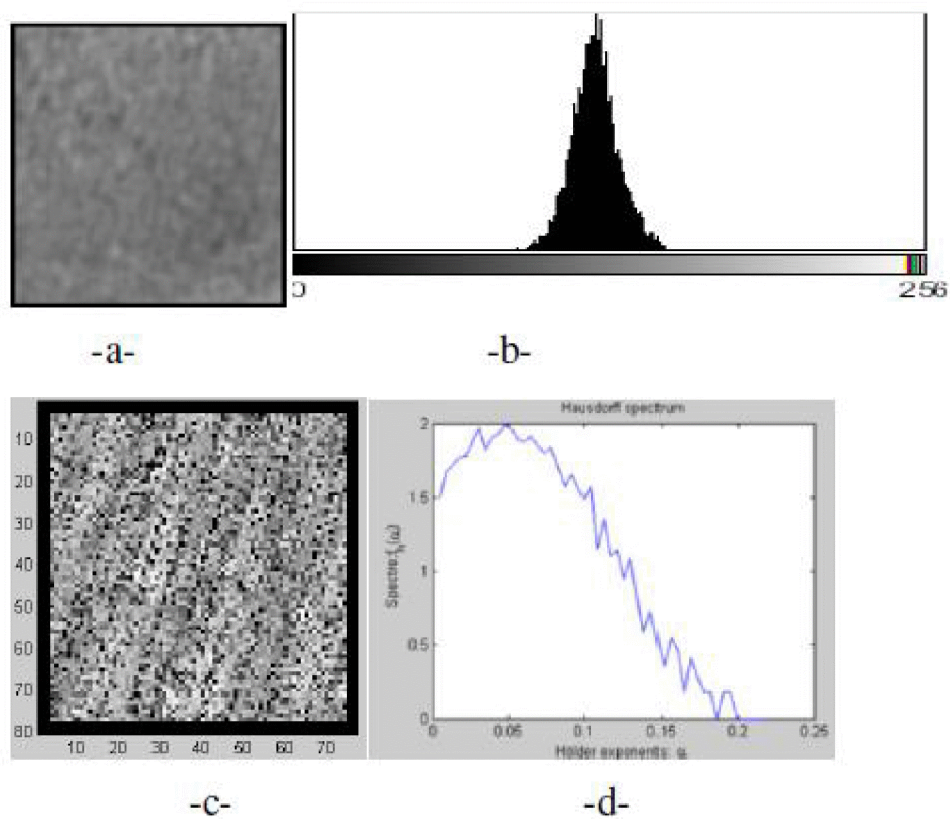


Figure III.7 : (a) ROI d'un sujet sain,
(b) son histogramme,
(c) l'image des irrégularités (de Hölder),
(d) le spectre multifractal de Hausdorff correspondant.

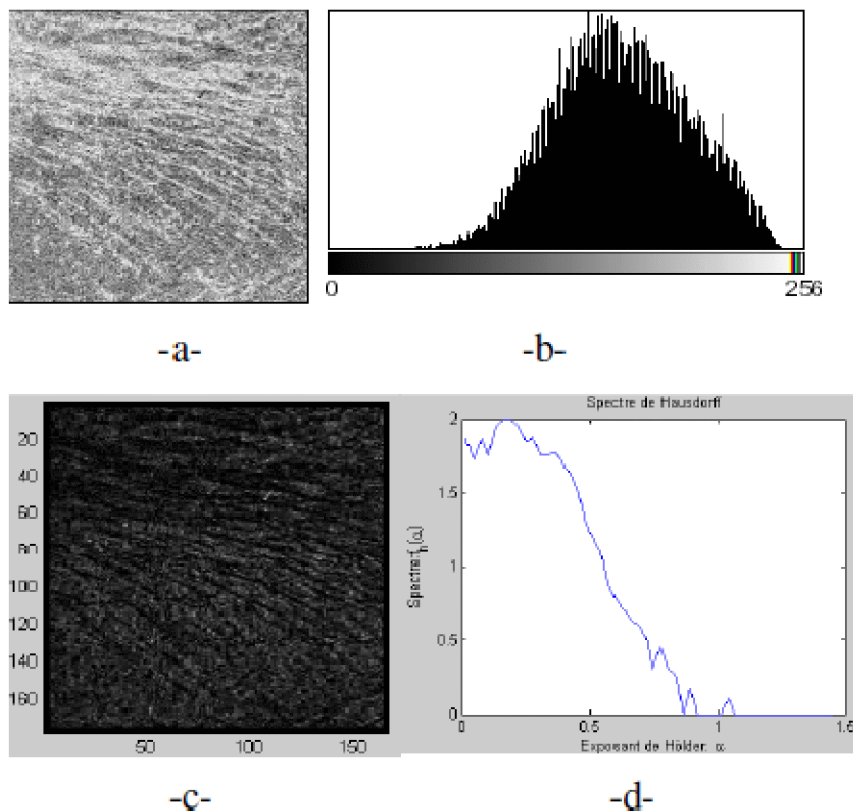


Figure III.8 : (a) ROI d'un sujet pathologique,
 (b) son histogramme,
 (c) l'image des irrégularités (de Hölder),
 (d) le spectre multifractal de Hausdorff correspondant.

Les deux images médicales (Fig.III.7(a)) et (Fig. III.8 (a)) ne présentent pas une différence remarquable, par contre, à partir des images de Hölder (images en fonction de α) correspondant, on peut distinguer entre l'image du sujet sain et l'autre pathologique (Fig. III.7(c)) et (Fig. III.8(c)), ainsi que leurs spectres de Hausdorff correspondants permettent de tirer avec précision beaucoup d'informations statistiques sur la microarchitecture de l'os. Pour le sujet pathologique, le spectre multifractal varie entre 0 et 1.12 sur l'intervalle des valeurs de l'exposant de Hölder α , tandis qu'il varie entre 0 et 0.2 seulement pour celle du sujet sain, se qui montre la régularité de la texture de ce dernier (plus α est grand plus la texture est irrégulière). D'autre part, on voit bien que les valeurs minimales de l'exposant de Hölder ont un spectre maximal $f(\alpha)$ proche de 2 (dimension d'une surface), la zone où il y a des régions. Comme interprétation globale du spectre pour les deux sujets ; on voit bien que le signal du sujet sain décroît régulièrement d'une manière anguleux ce qui montre

l'organisation de la microarchitecture de l'os (Fig. III.7(d)), tandis que l'autre spectre décroît différemment en trois zones (lisse sur l'intervalle $0.5 < f(\alpha) < 1.5$) ce qui montre que cette zone a une microarchitecture discontinu (manque de densité minérale du tissu osseux) (Fig III.8(d)).

La caractérisation de texture par l'analyse de la forme et la position du spectre multifractal est désormais possible en utilisant le spectre multifractal de Hausdorff qui représente le plus exact des spectres pour l'estimation de la dimension fractal des différentes fractalités recouvrant l'image. La méthode proposée basée sur le calcul du spectre multifractal de Hausdorff et de l'image des singularités nous aide à distinguer entre les images médicales CT osseuses normales et celles pathologiques.

3. Utilisation de spectre multifractal sur la mammographie

La mammographie est l'outil principal utilisé pour le dépistage et le diagnostic du cancer du sein. Cependant, des micro-calcifications avec de petites tailles sont difficiles à détecter.

Andrew Einstein et ses collaborateurs ont développé une méthode de diagnostic plus objective, qui exploite les propriétés fractales de ces aspects morphologiques des cellules du sein. L'irrégularité du noyau, qui est observée de manière subjective par le pathologiste, a pu être quantifiée à l'aide de deux dimensions fractales. D'autre part, les cellules se distinguent entre autres par l'existence de vides dans la chromatine. L'irrégularité et la taille de ces vides est un signe de malignité du cancer. Il existe un paramètre fractal et la lacunarité, qui décrit la distribution des vides dans une structure.

(P.Kestener, 2003) a réalisé une analyse multifractale sur des images mammographiques en utilisant la méthode MMTO. Cette analyse lui a permis de discriminer entre les zones grasses et les zones denses à partir du spectre multifractal et de détecter les microcalcifications qui correspondent à des singularités beaucoup plus fortes que celles du tissu de fond. Il a aussi reporté, avec ces **collaborateurs** des résultats intéressants pour la classification des micro-calcifications. Ils ont montré que le spectre multifractal, calculé par la méthode MMTO à travers l'estimation du coefficient de Hurst, permet de discriminer des tissu gras et denses. En effet les auteurs ont trouvé que les premiers avaient un coefficient de Hurst de 0.3 et le second de 0.65. De plus, avec le squelette de la transformée en ondelette, ils ont pu localiser et caractériser les lésions (figure III.9).

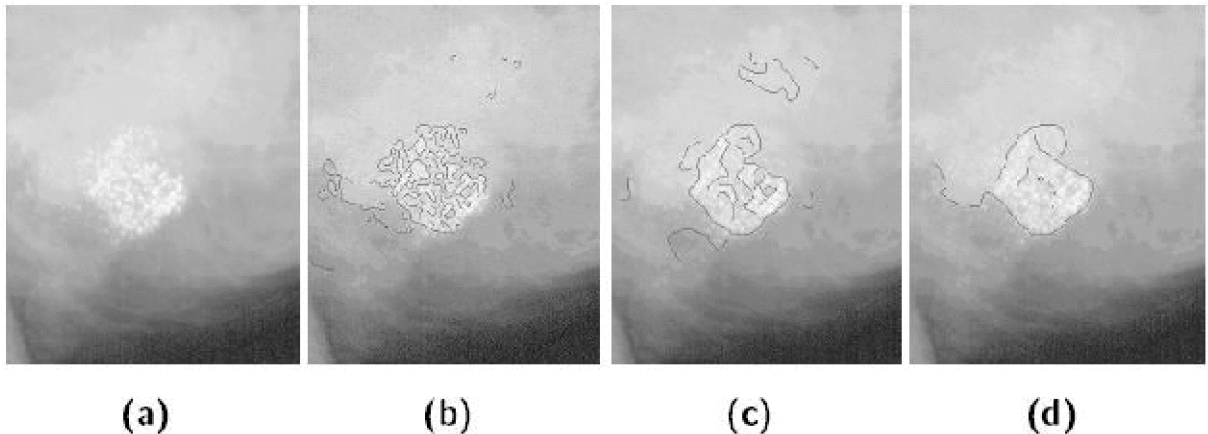


Figure III.9: résultats de la détection de micro calcifications sur les images mammographiques contenant deux foyers d'amas malins. (a) la mammographie originale, (b), (c) et (d) montrent les résultats des chaînes de maxima résultantes après le suivi des maxima à travers les échelles $\alpha=2$, 4 et 8 respectivement.

(Byng et al. 1996) ont utilisé la méthode de « comptage de boîte » pour calculé la surface DF ($x, y, I(x, y)$), où $I(x, y)$ était l'intensité du niveau de gris de pixel (x, y). La DF a été estimé pour la totalité du sein. Les valeurs de la DF obtenue était rangées entre 2.23 (pour un tissu dense) et 2.54 (pour un tissu gras), correspondant a des valeurs de l'exposant de Hurst de 0.77 et 0.46, respectivement.

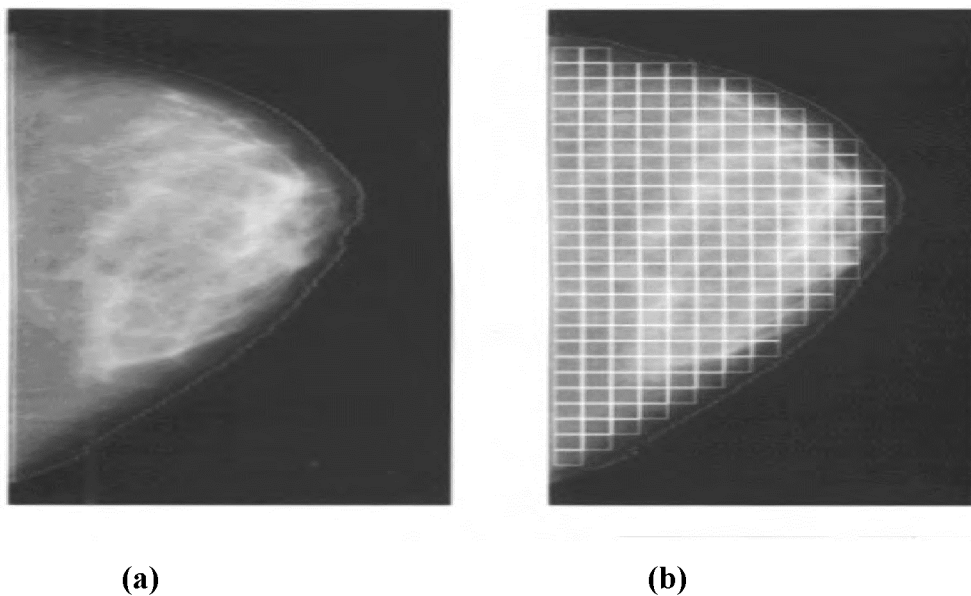


Figure III.10 : (a) Images global (à partir de toute la projection du sein), (b) image régionale (à partir des mesures individuelles pour les petites régions carrées couvrant le sein). Les régions carrées ont 24 pixels d'un côté.

Pour obtenir une caractérisation «régionale» de l'asymétrie, la projection du sein était divisée en régions carrées non chevauchantes couvrant chacune 24×24 pixels, comme le montre la figure III.10.

La méthode utilisé par kestener est plus robuste, puisque byng et al. Ont utilisé la méthode de « comptage de boite ». En plus de ces résultats, kestener a montré que la texture du sein représenté sur des mammographies avait un caractère monofractal.

En effet, l'analyse multifractal a été dans ce cas un outil très intéressant et plus performant que la DF, notamment la méthode MMTO, qui s'est montré très efficace dans la détection des micro-calcifications.

4. Utilisation des fractal sur des images cerebrale

Le cerveau est composé de trois matières principales : la substance blanche (SB), la substance grise (SG) et le liquide céphalorachidien (LCR). La matière blanche est constituée des fibres des cellules nerveuses appelées axones qui permettent la transmission de l'information traitée au niveau de la matière grise. La matière grise contient les Corps des cellules nerveuses.

Les images médicales sont généralement visualisées dans trois plans de coupe (frontal, sagittal et axial) représenté sur la figure III .11. Ces trois vue permettent de se représenter en 3D les structures cérébrales en analysant simultanément leur position sur les coupes correspondante.

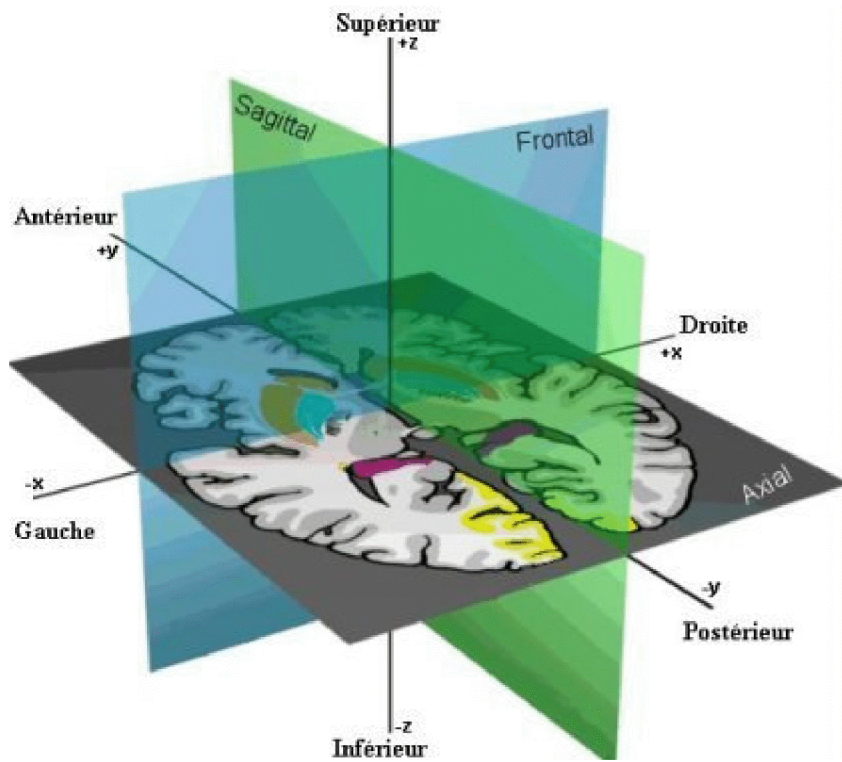
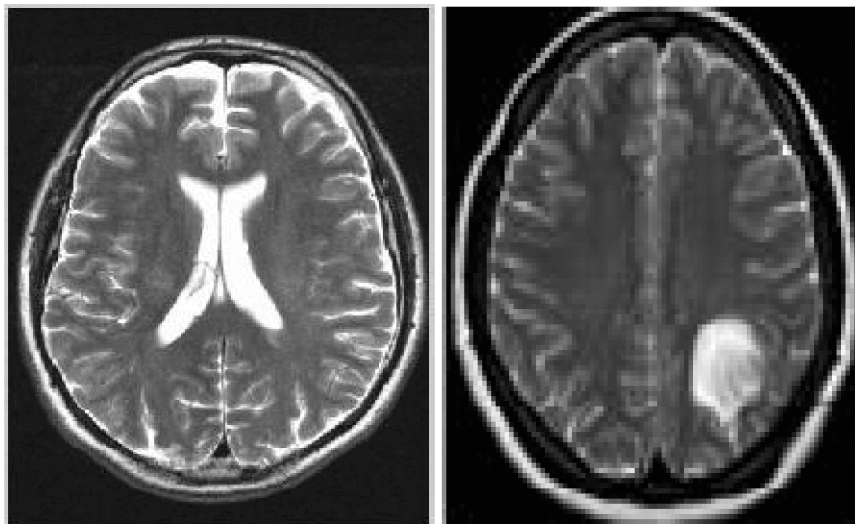


Figure III.11 : les plans de coupe en imagerie médicale.

Les études concernant l'utilisation de la géométrie fractale en imagerie cérébrale sont principalement réalisées sur des images IRM.



(a)

(b)

Figure III.12 : IRM cérébrale : (a) sans pathologie, b) avec pathologie

4.1. La Détection des tumeurs cérébrales par l'analyse fractale

(Zook and Iftekharuddin, 2005) ont présenté un algorithme pour la détection des tumeurs cérébrales sur des images IRM en 2D. Le principe était le suivant: la DF de l'hémisphère gauche du cerveau était comparée avec celle de son opposé, en supposant que la lésion était localisée uniquement dans l'un des deux hémisphères. Les auteurs ont trouvé que les régions avec la tumeur ont une DF plus petite que celle sans la tumeur. Les auteurs ont aussi comparé l'efficacité de différentes méthodes de calcul de la DF (une version modifiée de la méthode de « comptage des boîtes » (MCB), la méthode des triangles (MT) et celle de recouvrement des blancs (MRB)). D'après les résultats qu'ils ont obtenus la méthode des triangles offre la meilleure détection des tumeurs.

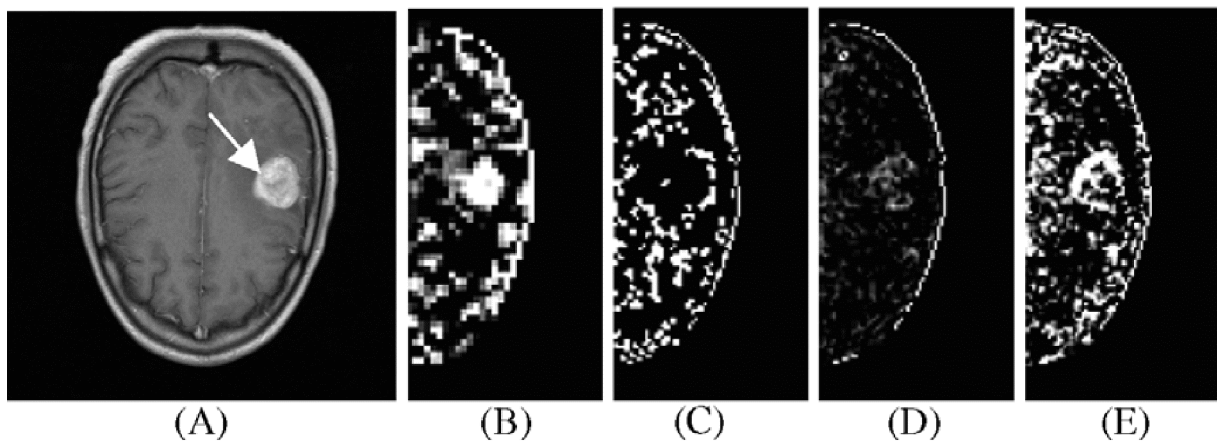


Figure III.13 : (A) une image IRM cérébral pondérée T1 avec l'utilisation de contraste, (B) et (C) résultats de la DF calculée localement sur des petites régions utilisant la MCB, (D) la méthode des « triangles » et (E) la méthode de « recouvrement des blancs ».

Des résultats sont présenté en (figure III.13). La méthode MCB détecte l'intérieure de la lésion avec une DF élevée dans un voisinage 32x32, mais le contraste est identique en ce qui concerne les contours de la tumeur dans un voisinage 64x64 (figure III.13.B ; III.13.C). Pour la même image, la MT détecte la pathologie avec une DF légèrement plus grande et la

MRB décele une partie de la tumeur avec une DF plus élevée (figure III.13.D ; III.13.E). En conclusion dans cette étude, l'algorithme des triangles a été plus prédictif pour des résolutions assez basses, alors que celui de recouvrement des blancs a été plus discriminant avec des résolutions plus élevées. D'après les résultats la méthode des triangles offre la meilleure détection des tumeurs.

Concernant l'analyse multifractale, il y a très peu de travaux référencé. Nous pouvons cité celui de (**takahashi et al.,2006**) qui a appliqué l'analyse multifractale pour décrire l'hétérogénéité de la fluctuation du signal de la substance blanche sur les images IRM pondérées en T2 en tant que nouvelle méthode d'analyse de texture et établi Deltaalpha comme l'indice le plus approprié pour évaluer la complexité structurelle de la substance blanche. Des preuves considérables suggèrent que les processus physiopathologiques qui se produisent dans les régions de la substance blanche profonde peuvent être en partie responsables de la détérioration cognitive et de la démence chez les sujets âgés. Les résultats indiquent l'utilité potentielle de l'application de l'analyse multifractale aux images IRM conventionnelles comme une nouvelle approche pour détecter les changements microstructuraux de la substance blanche.

4.2 Caractérisation du foyer épileptogène en tomographie par émission mono photonique (TEMP) :

L'épilepsie est une maladie neurologique. C'est l'expression d'un fonctionnement anormal, aigu et temporaire du cerveau activité électrique, crise épileptique leader, également appelée crise cométique. Deux examens peuvent être exécutés pour le diagnostic, l'électroencéphalogramme (EEG) et TEMP imagerie. Pour ce dernier cas, deux acquisitions sont réalisées: un examen avant la crise appelé examen inter critique et un autre après la crise, appelé per-critique.

(**R lopes, 2009**) a utilisé la dimension fractal et le spectre multifractal pour caractériser des foyers épileptogènes sur des images de tomographie par émission mono-photonique (TEMP) en période critique et étudier si les deux attributs permettent de distinguer les images per-critique entre des groupes de volontaire et de patient épileptique. Pour cela, différentes méthodes ont été utilisé pour estimer ces deux indices. Concernant la dimension

fractale l'auteur a utilisé trois méthodes (la méthode de comptage différentielle des boites, la variance et le recouvrement des blancs). Les résultats ont montré que la méthode de la « variance » a fourni les meilleurs résultats avec une discrimination à un seuil de 10%.

Pour le spectre multifractal deux algorithmes d'estimation ont été utilisés, celui de « détermination directe du spectre multifractal » et la méthode MMTO. Concernant ce spectre la méthode de MMTO est la plus efficace avec des p-valeurs très faibles (autour de 0.01). Il est intéressant à noter que les procédés les plus efficaces pour la DF et le spectre sont basés sur les ondelettes. Le spectre multifractal semble mieux adapté à différencier les deux populations de l'étude puisque les p-valeurs de ce dernier ont été plus faibles que celle de la DF.

La figure III.14 représente les résultats obtenus par la méthode sur deux patients, ils sont affichés selon trois directions (transversal, coronal et sagittal) pour une meilleure localisation des sources d'ajustement épileptique.

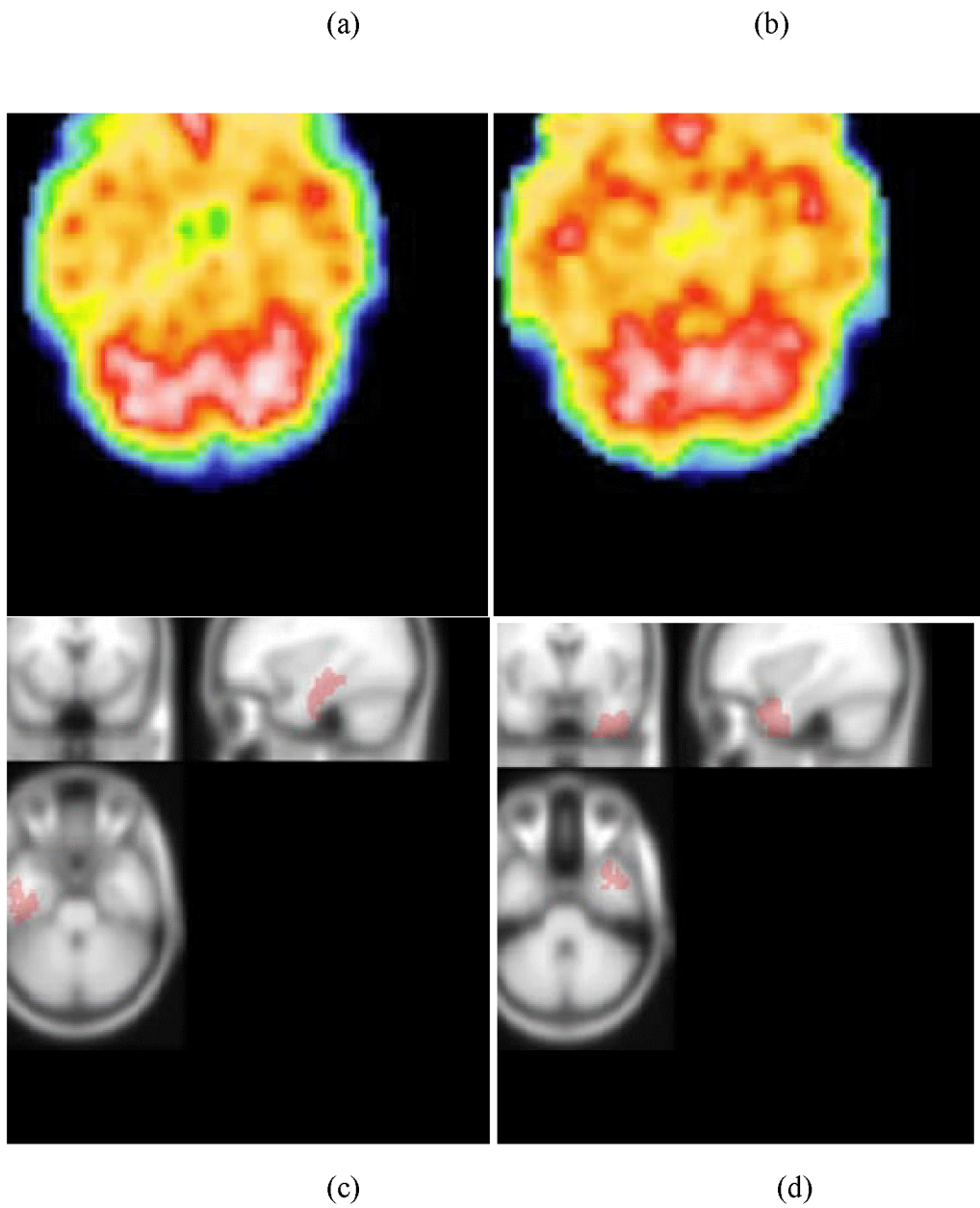


Figure III.14: (a) image inter-critiques

(b) image per-critique

(c) Résultat de la méthode avec une épilepsie au lobe temporal gauche

(d) Résultat de la méthode avec une épilepsie au lobe temporal droit

Affichage suivant trois directions (transversales, coronales et sagittales).

5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié quelques travaux du domaine médical qui mettent en relief l'intérêt de l'outil fractal pour la caractérisation des zones saines et pathologiques de différents organes du corps humain. Il ressort de cette étude que la notion fractale riche en même temps fascinante peut être utile dans beaucoup de domaines notamment dans le domaine médicale.

Pour l'approche fractale, les travaux ont montré la puissance et la robustesse de certaine méthodes comme la lacunarité fractale et l'analyse par spectre de puissance dans la classification des ROI en pathologique et saine.

Le spectre multifractal fournit une description à la fois locale et globale des singularités d'une image, la première (description locale) est obtenue via l'exposant de Hölder ((α)) et la seconde (description globale) grâce au spectre multifractal $f(\alpha)$. Ceux-ci caractérisent de façon géométrique et statistique la répartition des singularités sur le support de la mesure ((l'image)).

A partir de résultats précédents on constate que l'approche multifractale donne des résultats satisfaisants par rapport à l'analyse fractale.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce mémoire l'analyse d'images à base de la géométrie fractale et de la théorie multifractale. Il ressort de ce travail que le formalisme fractal et multifractal est riche et en même temps fascinant ; il offre des outils intéressants dans beaucoup de domaines d'applications et notamment en imagerie médicale.

L'analyse multifractale fournit une description à la fois locale et globale des singularités d'une image : la première (description locale) est obtenue via l'exposant de holder ($h \approx \alpha$) et la seconde (description globale) grâce au spectre multifractal $f(\alpha)$. Ceux-ci caractérisent de façon géométrique et statistique la répartition des singularités sur le support de la mesure (image).

Nous avons étudié un certain nombre de travaux basés sur l'approche fractale ayant pour application l'analyse et la segmentation d'images médicales. Nous avons d'abord considéré les outils de base à savoir le calcul de la dimension fractale d'une image. Nous avons ainsi pu voir que les algorithmes d'estimation de la dimension fractale ont pu être regroupés en trois classes : comptage de boîte, mouvement brownien fractionnaire (fbm) et mesure d'aire. Nous avons pu remarquer que chacune présente des avantages et des inconvénients. Concernant les algorithmes de calcul de spectre multifractal, ont pu être regroupés en deux classes : comptage de boîte et ondelette. Les méthodes basées sur les ondelettes ont semblé fournir des résultats plus stables que celle de l'autre classe. Nous avons pu voir qu'elles couvraient de nombreuses modalités d'imagerie (IRM, scanner), ainsi que des pathologies variées (comme celle de cerveau, du sein ou de la trabéculatation osseuse).

Cependant, dans la grande majorité des cas, les applications recensées ont concerné la discrimination entre deux états (sain / pathologique).

En conclusion, la géométrie fractale peut être un outil efficace dans des problèmes d'analyse d'image en générale, et dans le domaine médical en particulier.

Bibliographie

Bibliographie

- ASVESTAS, P. et al.** (1999). Estimation of fractal dimension of images using a fixed mass approach. « *Pattern Recognition Letters* », vol.20, p.347-354.
- BOUDGHENE STAMBOULI, T.** (2012). Utilisation de l'Analyse Multirésolution pour la Caractérisation des Images Texturées. Thèse de doctorat, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran « Mohamed Boudiaf ».
- BOUGUELMOUNA, A.** (1998). Analyse, synthèse et segmentation supervisée de Mosaïques de textures stochastiques. Thèse Magistère, USTO, Faculté des Sciences, Département d'informatique.
- BYNGY, J. et al.** (1996). Automated analysis of mammographic densities. « *Physics in Medicine and Biology* », n°41, p.909–923.
- CLARCKE, K.** (1986). Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method. « *Computers & Geosciences* », vol.5, p.713-722.
- COCQUEREZ, J.P ; PHILIPP, S.** (1995). Analyses d'Image : Filtrage et Segmentation. Masson, Paris.
- FALCONER, K.** (2003). Fractal Geometry : Mathematical foundation and Application. New-York : John Wiley & Sons, 2003.
- GAGALOWICZ, A.** (1983). Vers un modèle de textures. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris V.
- HAESSE-COAT, V ; RONSIN, J ; D.WANG, D.** (1994). La Texture et ses Différentes Approches. « *Photo-interprétation N° 1993/4-1994/1-2* », p.17-20.
- HARALICK, R.M.** (1979). Statistical and structural approaches to texture. « *Proceedings of IEEE* », vol.67, p. 231-248.
- HAUSDORFF, F.** (1919). Dimension and outer measure. « *Mathematische Annalen* », vol.79, p.157-119.
- JOSIANE, L.** (2006). La géométrie fractale. Mémoire de master à l'université de Québec.

- KESTENER, P.** (2003). Analyse Multifractale 2D et 3D à l'aide de la transformation en ondelettes : applications en mammographie et en turbulence développée. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.
- KESTENER, P. et al.** (2004). Wavelet-based multifractal formalism to assist in diagnosis in digitized. « *Image Anal Stereol* », vol. 20, p.169-175.
- KHIDER, M.** (2011). Analyse multifractale par MMTO-2D : Evaluation sur des images radar et médicales. Thèse de doctorat, Université Houari Boumediene.
- KORCHYINE, R et al.** (2012). Spectre Multifractal : Applications aux images médicales. « *Revue Méditerranéenne des Télécommunications* », vol.2, p.135-136.
- LAM, N. ; DE COLA, L.** (2002). Fractals in Geography. The Blackburn Press (Eds), Caldwell, NJ, p.308.
- LHAMEL, M.** (2011). Segmentation d'images texturées à partir des attributs fractals. Mémoire de magister à l'université de Tizi-Ouzou.
- MANDELBROT, B ; VAN NESS, J.** (1968). Fractional brownian motions, fractional noise and applications. « *SIAM Review* », vol.10, p. 422-437.
- MANDELBROT, B.** (1967). How long is the coast of Britain ? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, vol.156, p.636-638.
- MANDELBROT, B.** (1975). Les objets Fractals : forme, hasard et dimension, Flammarion ed, Paris.
- MANDELBROT, B.** (1977). Fractals: Forme, Chance and Dimension. San Francisco : WH Freeman and company.
- MANDELBROT, B.** (1982). The Fractal Geometry of Nature. San Francisco, CA.
- PARISI, G. ; FRISCH, D.** (1985). Turbulence and Predictability In Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics. North-Holland, Amsterdam.
- PELEG, S. et al.** (1984). Multiple resolution texture analysis and classification. « *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* » vol. 6, p.518-523.
- QIU, H. et al.** (1999). Fractal characterization of hyperspectral imagery. « *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* », vol. 65, p. 63–71.
- RENAUD, L.** (2009). Analyse fractale et multifractale en imagerie médicale : outils, validations et applications. Thèse de doctorat à l'université de Lille1.

- RUSSEL, D. et al.** (1980). Dimension of strange attractors. « *Physical Review Letters* », vol.45, p.1175-1178.
- SARKAR, N ; CHAUDHURI, B.** (1992). An efficient differential Box-counting approach to compute fractal dimension of textural images. « *Pattern. Recognition Letters* », vol.25, p.1035-1041.
- SHELBERG, M ; LAM, N ; MOELLERING, H.** (1983). Measuring the fractal dimension of surfaces. « *Proceedings of the Sixth International Symposium on Computer- Assisted Cartography Auto Carto* », vol. 6, p. 319–328.
- SYARRY, P.** (2007). Optimisation en traitement du signal et de l'image, Ed Hermes.
- TAKAHASHI, T. et al.** (2006) : Multifractal analysis of deep white matter microstructural changes on MRI in relation to early-stage atherosclerosis. *NeuroImage* vol.32, p.1158 – 1166.
- TESTUD, B.** (2002). Transitions de phase dans l'analyse multifractale de mesures auto-similaires. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340, p.653–658.
- UNSER, M.** (1984). Description statistique de la texture. Thèse de doctorat, école Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse.
- UNSER, M.** (1995). Texture classification and segmentation using wavelet frams. « *IEEE trans. Image processing 4* »,p.1549-1560.
- ZOOK, J. ET IFTEKHARUDDIN, K.M.** (2005): Statistical analysis of fractal-based brain tumor detection algorithms. « *Magnetic Resonance Imaging* », vol.23, p.671–678.

Résumé : La géométrie fractale, comprenant les analyses fractales et multifractales, est un outil en émergence dans de nombreux domaines d'applications et notamment en imagerie médicale. Elle consiste à formuler une mesure de l'hétérogénéité globale ou locale d'un signal (1D, 2D ou 3D). En imagerie médicale, son utilisation est souvent limitée au cas 1D ou 2D et ses domaines d'applications restent essentiellement restreints à la discrimination entre deux états (sains/pathologiques) grâce à une analyse globale du signal. L'objectif de cette thèse est de fournir à la fois des outils 3D de mesures des hétérogénéités globale (volume) et locale (voxel) basées sur la géométrie fractale. Les deux indices utilisés sont la dimension fractale et le spectre multifractal (coefficients de Hölder). Etant donné que les algorithmes de ces outils ne peuvent formuler que des estimations de la valeur théorique, nous utilisons des volumes de synthèses fractals et multifractals pour les valider.

L'objectif de ce travail est l'étude d'un ensemble de méthodes utilisant les fractal les multifractale des images médicales. A savoir l'analyse spectrale, la lacunarité et le comptage de boîte.

MOTS-CLES : Analyse fractale, analyse multifractale, Analyse de Texture, dimension fractale, lacunarité fractale, spectre de Hausdorff.