



UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Automatique

Par

Lamia OUHIB

THEME

Observation et commande des systèmes de Takagi-Sugeno :

Synthèse \mathcal{D} -stable

Soutenue publiquement devant le jury :

| | | | |
|----------------|------------|----------------------------------|--------------------|
| Said DJENNOUNE | Professeur | Univ Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou | Président |
| Redouane KARA | Professeur | Univ Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou | Directeur de thèse |
| Hacène HABBI | Professeur | Univ M'Hamed Bougara, Boumerdès | Examineur |
| Salim LABIOD | Professeur | Univ Med Seddik Benyahia, Jijel | Examineur |
| Dalil ICHALAL | Professeur | Univ d'Every- Paris Saclay | Examineur |
| Rabah MELLAH | Professeur | Univ Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou | Examineur |

Année : 2023/2024

Observation et commande des systèmes de Takagi-Sugeno :

Synthèse \mathcal{D} -stable

Résumé : Ce travail traite de la synthèse d'observateurs et de lois de commande pour les systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles de Takagi-Sugeno sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité. Cette dernière permet d'améliorer les performances du système en assignant les valeurs propres des matrices liées à sa dynamique dans une région définie du plan complexe appelée région LMI.

Dans le contexte de l'observation des systèmes TS classiques à Variables de Décision Non Mesurables, nous avons proposé de nouvelles conditions LMIs génériques de synthèse de quatre types d'observateurs basés sur l'approche \mathcal{L}_2 : l'observateur Proportionnel, l'observateur Proportionnel Intégral (PI), l'observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI) et un autre observateur permettant d'estimer conjointement l'état et les défauts actionneurs. Nous nous sommes aussi intéressés au développement d'un observateur proportionnel lipschitzien intégrant un retour supplémentaire de sortie dans sa fonction d'activation dont le but est d'éliminer l'influence des constantes de lipschitz sur les conditions de synthèse.

Nous avons ensuite étendu les principaux résultats obtenus pour l'observation des systèmes TS classiques aux systèmes TS interconnectés. L'estimation simultanée des états et des paramètres variant dans le temps a aussi été examinée pour ce type de système.

Dans le contexte de la commande des systèmes TS classiques à Variables de Décision Mesurables, nous avons proposé la synthèse sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité de trois types de lois de commande : la commande en présence de saturation d'actionneurs, la poursuite de trajectoire générée par un modèle de référence et la commande tolérante aux défauts actionneurs.

Plusieurs résultats de simulation ont été présentés afin d'illustrer l'efficacité des approches proposées.

Mots-clés : Systèmes TS, \mathcal{D} -stabilité, Observateur, approche \mathcal{L}_2 , approche lipschitzienne, Systèmes TS interconnectés, commande en présence de saturation d'actionneurs, poursuite de trajectoire, commande tolérante aux défauts.

TS systems observation and control: A \mathcal{D} -stability design

Abstract: This work deals with the design of observers and control laws for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno models under \mathcal{D} -stability constraints. The \mathcal{D} -stability can improve system performances by assigning the eigenvalues of its dynamics matrix in a prescribed region of the complex plan called LMI region.

For standard TS systems with unmeasurable premise variables, we propose new generic LMI conditions for the design of four types of observers based on the \mathcal{L}_2 approach: Proportional observer, Proportional Integral observer, Proportional Multi-integral observer and an observer which estimates simultaneously the state vector and the actuator faults. A lipschitzian proportional observer is also studied. It uses an additional output feedback in its activation functions to eliminate the influence of lipschitz constants on the design conditions.

Standard TS systems observer design results have been extended to interconnected TS systems. The estimation of states and time variant parameters has also been addressed for those systems.

In the context of \mathcal{D} -stability based control design for standard TS systems with measurable premise variables, input constrained control, tracking control and fault tolerant control have been investigated.

Different simulation results have been presented to highlight the effectiveness of the proposed approaches.

Key-words: TS systems, \mathcal{D} -stability, Observer, \mathcal{L}_2 approach, lipschitzian approach, interconnected TS systems, input constrained control, tracking control, fault tolerant control.

Avant-propos

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au sein du Laboratoire de Conception et de Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) de l'Université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Redouane Kara, Professeur à l'Université de Mouloud Mammeri et directeur de ma thèse, de m'avoir fait confiance dans mes choix et mes orientations. Je lui suis sincèrement reconnaissante pour son encadrement et ses innombrables conseils.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur Said Djennoune, Professeur à l'Université de Mouloud Mammeri, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Je voudrais aussi remercier Mr Hacène Habbi, Professeur à l'Université M'Hamed Bougara de Boumerdès, Mr Salim Labiod, Professeur à l'Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel, Mr Dalil Ichalal, Professeur à l'Université d'Every-Paris Saclay et Monsieur Rabah Mellah, Professeur à l'Université de Mouloud Mammeri, d'avoir accepté d'examiner mon mémoire de thèse et de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury.

Enfin, je dédie ce travail à ma très chère mère, Bahia Ouhib, pour son indéfectible soutien.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Résumé/Abstract | 1 |
| Avant-propos | 2 |
| Table des matières | 3 |
| Liste des figures | 6 |
| Liste des tableaux | 10 |
| Notations et acronymes | 11 |
| 1 Introduction générale..... | 12 |
| 2 Sur les systèmes de Takagi-Sugeno | 17 |
| 2.1 Introduction | 17 |
| 2.2 Présentation du modèle de Takagi-Sugeno | 17 |
| 2.3 Obtention des modèles TS | 19 |
| 2.4 Transformation par secteurs non linéaires | 20 |
| 2.5 Analyse de stabilité des systèmes TS | 23 |
| 2.5.1 Stabilité quadratique | 23 |
| 2.5.2 Stabilité non quadratique dépendant des dérivées temporelles des fonctions d'activation..... | 23 |
| 2.5.3 Stabilité non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'activation..... | 25 |
| 2.6 Stabilisation des systèmes TS | 27 |
| 2.6.1 Loi de commande PDC | 27 |
| 2.6.2 Loi de commande non-PDC | 27 |
| 2.7 Synthèse d'observateurs pour les systèmes TS | 29 |
| 2.7.1 Observation des systèmes TS à Variables de Décision Mesurables (VDM) | 29 |
| 2.7.2 Observation des systèmes TS à Variables de Décision Non Mesurables (VDNM) | 30 |
| 2.8 Réduction du conservatisme des conditions de synthèse des systèmes TS | 35 |
| 2.9 Conclusion..... | 36 |
| Bibliographie..... | 36 |
| 3 \mathcal{D}-Observation des systèmes de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables..... | 39 |
| 3.1 Introduction | 39 |
| 3.2 Position du problème | 40 |
| 3.3 Estimation d'état..... | 43 |
| 3.3.1 Observateur Proportionnel \mathcal{L}_2 | 43 |
| 3.3.1.1 Définitions et propriétés relatives à la \mathcal{D} -stabilité | 43 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.3.1.2 | Combinaison de la \mathcal{D} -stabilité et de l'approche \mathcal{L}_2 | 45 |
| 3.3.1.3 | Approche par pseudo-perturbation | 47 |
| 3.3.1.4 | Approche par pseudo-incertitudes constantes | 49 |
| 3.3.1.5 | Approche par pseudo-incertitudes bornées | 51 |
| 3.3.2 | Observateur Proportionnel \mathcal{L}_2 basé sur le lemme de Finsler..... | 58 |
| 3.3.2.1 | Approche par pseudo-perturbation | 58 |
| 3.3.2.2 | Approche par pseudo-incertitudes constantes | 62 |
| 3.3.2.3 | Approche par pseudo-incertitudes bornées | 65 |
| 3.3.3 | Observateur Proportionnel Lipschitzien à retour de sortie multiple..... | 77 |
| 3.4 | Estimation d'état et des entrées inconnues | 84 |
| 3.4.1 | Observateurs PI et PMI \mathcal{L}_2 basés sur le lemme de Finsler..... | 84 |
| 3.4.1.1 | Synthèse d'un observateur Proportionnel Intégral (PI)..... | 85 |
| 3.4.1.2 | Synthèse d'un observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI) | 90 |
| 3.4.2 | Observateurs \mathcal{L}_2 d'état et des défauts actionneurs..... | 94 |
| 3.5 | Conclusion | 105 |
| | Bibliographie..... | 105 |
| 4 | \mathcal{D}-Observation des systèmes interconnectés de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables..... | 110 |
| 4.1 | Introduction | 110 |
| 4.2 | Position du problème | 111 |
| 4.3 | Estimation d'état..... | 112 |
| 4.3.1 | \mathcal{D} -stabilité | 113 |
| 4.3.2 | Relaxation de la \mathcal{D} -stabilité par le lemme de Finsler | 120 |
| 4.4 | Estimation d'état et des paramètres variant dans le temps..... | 130 |
| 4.4.1 | Cas d'un système linéaire | 130 |
| 4.4.2 | Extension aux systèmes TS interconnectés à VDNM | 133 |
| 4.5 | Conclusion..... | 139 |
| | Bibliographie..... | 140 |
| 5 | Commandes \mathcal{D}-stables des systèmes de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Mesurables..... | 142 |
| 5.1 | Introduction | 142 |
| 5.2 | Position du problème | 143 |
| 5.3 | Etat de l'art sur la \mathcal{D} -stabilisation des systèmes de Takagi-Sugeno..... | 145 |
| 5.3.1 | Synthèse quadratique | 145 |
| 5.3.2 | Synthèse non quadratique | 150 |

| | |
|---|------------|
| 5.3.2.1 Synthèse dépendant des dérivées temporelles des fonctions d'activation (\mathcal{D} -stabilisation non quadratique locale) | 150 |
| 5.3.2.2 Synthèse indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'activation (\mathcal{D} -stabilisation non quadratique globale) | 151 |
| 5.4 \mathcal{D} -stabilisation des systèmes de Takagi-Sugeno en présence de saturation d'actionneurs | 153 |
| 5.4.1 Commande PDC contrainte des systèmes TS | 155 |
| 5.4.1.1 Quelques notions préliminaires | 155 |
| 5.4.1.2 Synthèse de la loi de commande contrainte | 156 |
| 5.4.1.3 Relaxation | 158 |
| 5.4.2 Commande PDC saturante des systèmes TS | 159 |
| 5.4.2.1 Représentation polytopique de la saturation | 159 |
| 5.4.2.2 Synthèse de la loi de commande saturante | 160 |
| 5.4.3 Commande PDC saturante des systèmes TS incertains | 162 |
| 5.5 Poursuite \mathcal{D} -stable de trajectoire générée par un modèle de référence..... | 168 |
| 5.5.1 Aperçu sur la poursuite de modèle de référence des systèmes linéaires | 169 |
| 5.5.2 Poursuite \mathcal{D} -stable sans observateur | 172 |
| 5.5.2.1 Synthèse non quadratique locale | 172 |
| 5.5.2.2 Synthèse non quadratique globale | 181 |
| 5.5.3 Poursuite \mathcal{D} -stable avec observateur : Synthèse non quadratique locale | 184 |
| 5.6 Commande \mathcal{D} -stable tolérante aux défauts actionneurs..... | 192 |
| 5.7 Conclusion..... | 205 |
| Bibliographie..... | 206 |
| 6 Conclusion générale et perspectives | 212 |
| Annexe A : Stabilité au sens de Lyapunov..... | 215 |
| Annexe B : Eléments d'analyse et d'optimisation convexe | 218 |
| Annexe C : Matrices A_i et fonctions d'activation du modèle TS(3.146) | 221 |
| Annexe D : Paramètres de la pile à combustible à membrane échangeuse de protons (PEMFC)..... | 222 |

Liste des figures

| | |
|--|----|
| Fig.2.1. Architecture du modèle de Takagi-Sugeno..... | 19 |
| Fig.2.2. Secteurs non linéaires (global à gauche, local à droite) | 21 |
| Fig.3.1. Région LMI usuelle | 44 |
| Fig.3.2. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.1) | 54 |
| Fig.3.3. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.1) | 54 |
| Fig.3.4. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.1) | 54 |
| Fig.3.5. Pseudo-perturbations (Théorème 3.1) | 55 |
| Fig.3.6. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.2) | 55 |
| Fig.3.7. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.2) | 56 |
| Fig.3.8. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.2) | 56 |
| Fig.3.9. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.3) | 57 |
| Fig.3.10. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.3) | 57 |
| Fig.3.11. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.3) | 57 |
| Fig.3.12. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.4) | 67 |
| Fig.3.13. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.4) | 68 |
| Fig.3.14. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.4) | 68 |
| Fig.3.15. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.5) | 69 |
| Fig.3.16. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.5) | 69 |
| Fig.3.17. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.5) | 69 |
| Fig.3.18. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.6) | 70 |
| Fig.3.19. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.6) | 70 |
| Fig.3.20. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.6) | 71 |
| Fig.3.21. Populations de cellules (cancéreuses et effectrices) et cytokine IL-2 pour $c=10^{-7}$.. | 74 |
| Fig.3.22. Populations de cellules (cancéreuses et effectrices) et cytokine IL-2 pour $c=6.10^{-4}$. | 75 |
| Fig.3.23. Populations de cellules (cancéreuses et effectrices) et cytokine IL-2 pour $c=0,05$... | 75 |
| Fig.3.24. Populations de cellules (cancéreuses et effectrices) et cytokine IL-2 réelles et leurs estimées pour $c=0,1$ | 76 |
| Fig.3.25. Erreurs d'estimation d'état pour $c=0,1$ | 76 |
| Fig.3.26. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC pour $c=0,1$ | 77 |
| Fig.3.27. Domaines de faisabilité du Théorème 3.4 ('o' en rouge) et Théorème 3.1 ('+' en bleu) | 77 |
| Fig.3.28. Plans de phase | 82 |
| Fig.3.29. Evolution des états du système et de leurs estimées | 83 |
| Fig.3.30. Erreurs d'estimation d'état | 83 |

Liste des figures

| | |
|---|-----|
| Fig.3.31. Migration des valeurs propres des matrices locales A_i-L_iC | 83 |
| Fig.3.32. Structure d'un observateur Proportionnel-Intégral (PI) | 85 |
| Fig.3.33. Entrée : Vitesse de dilution | 88 |
| Fig.3.34. Estimation de la concentration C_A par l'observateur PI | 89 |
| Fig.3.35. Estimation de l'entrée inconnue par l'observateur PI..... | 89 |
| Fig.3.36. Distribution des valeurs propres des matrices $(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i\tilde{C})$ (observateur PI) | 89 |
| Fig.3.37. Structure d'un observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI) | 91 |
| Fig.3.38. Estimation de la concentration C_A par l'observateur PMI..... | 93 |
| Fig.3.39. Estimation de l'entrée inconnue par l'observateur PMI | 93 |
| Fig.3.40. Distribution des valeurs propres des matrices $(\bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C})$ (observateur PMI) | 93 |
| Fig.3.41. Classification des défauts selon leur localisation | 94 |
| Fig.3.42. Défauts actionneurs les plus répandus | 94 |
| Fig.3.43. Défauts capteurs les plus répandus | 95 |
| Fig.3.44. Evolutions temporelles des différents types de défauts | 95 |
| Fig.3.45. Défauts additif et multiplicatif | 96 |
| Fig.3.46. Evolution des états du système et de leurs estimées..... | 103 |
| Fig.3.47. Défauts actionneurs et leurs estimés..... | 104 |
| Fig.3.48. Distribution des valeurs propres des matrices locales \tilde{A}_i | 104 |
| Fig.3.49. Distribution des valeurs propres des matrices locales $A_i - L_iC$ | 104 |
| Fig.4.1. Principe de fonctionnement d'une PEMFC | 115 |
| Fig.4.2. Eléments d'une PEMFC | 116 |
| Fig.4.3. Un système de pile à combustible et ses auxiliaires | 116 |
| Fig.4.4. Estimation de la pression de la cathode (Théorème 4.1) | 119 |
| Fig.4.5. Estimation de la pression partielle de l'azote (Théorème 4.1) | 119 |
| Fig.4.6. Estimation de la vitesse angulaire du groupe moto-compresseur (Théorème 4.1) .. | 120 |
| Fig.4.7. Estimation de la pression dans les tuyaux d'alimentation d'air (Théorème 4.1) | 120 |
| Fig.4.8. Distribution des valeurs propres des matrices $(A_{j_i}^i - L_{j_i}^i C_i)$ (Théorème 4.1) | 120 |
| Fig.4.9. Estimation de la pression de la cathode (Théorème 4.2) | 128 |
| Fig.4.10. Estimation de la pression partielle de l'azote (Théorème 4.2) | 129 |
| Fig.4.11. Estimation de la vitesse angulaire du groupe moto-compresseur (Théorème 4.2) . | 129 |
| Fig.4.12. Estimation de la pression dans les tuyaux d'alimentation d'air (Théorème 4.2) ... | 129 |
| Fig.4.13. Distribution des valeurs propres des matrices $(A_{j_i}^i - L_{j_i}^i C_i)$ (Théorème 4.2) | 130 |
| Fig.4.14. Système nominal (bleu) et système avec variations paramétriques (rouge) | 138 |
| Fig.4.15. Etats (en bleu) et leurs estimées (en rouge) | 138 |
| Fig.4.16. Estimation des paramètres $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ (estimées en 'rouge') | 139 |

Liste des figures

| | |
|--|-----|
| Fig.4.17. Erreurs d'estimation d'état..... | 139 |
| Fig.5.1. Fonction de saturation symétrique..... | 143 |
| Fig.5.2. Réacteur à cuve agitée en continu (CSTR) | 148 |
| Fig.5.3. Comparaison des états du système en boucle fermée (stabilité exponentielle et \mathcal{D} - stabilité) | 149 |
| Fig.5.4. Commande appliquée au système (stabilité exponentielle en trait rouge et \mathcal{D} -stabilité en trait bleu) | 149 |
| Fig.5.5. Migration des valeurs propres des matrices locales $A_i+B_iF_j$ (stabilité exponentielle et \mathcal{D} -stabilité) | 150 |
| Fig.5.6. Etats du système en boucle fermée..... | 152 |
| Fig.5.7. Signal de commande..... | 153 |
| Fig.5.8. Migration des valeurs propres des matrices $\left(A_i + B_i F_{jkl} \left(\sum_{l=1}^2 v_l(z(t)) P_l \right)^{-1} \right)$ | 153 |
| Fig.5.9. Schéma de principe de l'architecture anti-windup | 154 |
| Fig.5.10. Comparaison des surfaces de Lyapunov des Théorèmes 5.1-5.3..... | 161 |
| Fig.5.11. Etats du système en boucle fermée pour les commandes PDC contrainte, saturante et classique..... | 161 |
| Fig.5.12. Signal de commande sat(u(t)) pour les commandes PDC contrainte, saturante et classique..... | 162 |
| Fig.5.13. Migration des valeurs propres du système en boucle fermée pour les commandes PDC contrainte, saturante et classique | 162 |
| Fig.5.14. Bras de robot flexible..... | 165 |
| Fig.5.15. Région LMI $S(\beta,s,\theta)$ considérée dans l'exemple 5.4..... | 166 |
| Fig.5.16. Evolution des états du système en boucle fermée (Stabilité exponentielle : trait bleu, \mathcal{D} -stabilité : trait rouge) | 167 |
| Fig.5.17. Signal de commande saturé sat(u(t))(Stabilité exponentielle : trait bleu, \mathcal{D} -stabilité : trait rouge) | 167 |
| Fig.5.18. Migration des valeurs propres du système en boucle fermée | 168 |
| Fig.5.19. Pendule inversé sur chariot | 177 |
| Fig.5.20. Signal de référence $u_r(t)$ et perturbation $d(t)$ | 178 |
| Fig.5.21. Région parabolique $y^2=-a^2x$ | 178 |
| Fig.5.22. Performances de poursuite de la position et de la vitesse angulaires pour $a=15$ (Théorème 5.5) | 179 |
| Fig.5.23. Erreurs de poursuite pour différentes valeurs de a (Théorème 5.5) | 178 |
| Fig.5.24. Signal de commande $u(t)$ pour différentes valeurs de a (Théorème 5.5) | 180 |
| Fig.5.25. Distribution des valeurs propres des matrices $(A_i + \Delta A_i - B_i K_j)$ pour différentes valeurs de a (Théorème 5.5) | 180 |
| Fig.5.26. Position angulaire en boucle fermée et son erreur de poursuite (Théorème 5.6) ... | 182 |
| Fig.5.27. Vitesse angulaire en boucle fermée et son erreur de poursuite (Théorème 5.6) | 183 |

Liste des figures

| | |
|---|-----|
| Fig.5.28. Signal de commande $u(t)$ (Théorème 5.6) | 183 |
| Fig.5.29. Distribution des valeurs propres des matrices $\left(A_i + \Delta A_i - B_i K_{jkl} \left(\sum_{l=1}^2 v_l(z(t)) P_l \right)^{-1} \right)$.. | 183 |
| Fig.5.30. Performances de poursuite relatives à la position angulaire (Théorème 5.7) | 189 |
| Fig.5.31. Performances de poursuite relatives à la vitesse angulaire (Théorème 5.7) | 190 |
| Fig.5.32. Performances d'estimation d'état relatives à la position angulaire (Théorème 5.7) | 190 |
| Fig.5.33. Performances d'estimation d'état relatives à la vitesse angulaire (Théorème 5.7) | 190 |
| Fig.5.34. Signal de commande $u(t)$ (Théorème 5.7) | 191 |
| Fig.5.35. Distribution des valeurs propres des matrices $A_i - L_i C$ | 191 |
| Fig.5.36. Distribution des valeurs propres des matrices $A_i - \Delta A_i - B_i K_j$ | 191 |
| Fig.5.37. Schéma de principe d'une commande tolérante aux défauts active | 192 |
| Fig.5.38. Classification des méthodes FTC | 193 |
| Fig.5.39. Etats du système en boucle fermée (sans et avec FTC) | 203 |
| Fig.5.40. Estimation des défauts actionneurs | 204 |
| Fig.5.41. Signaux de commande | 204 |
| Fig.5.42. Erreurs d'estimation d'état | 204 |
| Fig.5.43. Erreurs d'estimation des défauts actionneurs | 205 |
| Fig.5.44. Distribution des valeurs propres des matrices $(A_i - L_i C)$ (à gauche) et $(A_i + \Delta A_i - B_i F_j)$ (à droite) | 205 |
| Fig.A.1. Illustration de la stabilité au sens de Lyapunov | 215 |
| Fig.A.2. Illustration de la stabilité asymptotique | 215 |
| Fig.B.1. Exemples d'ensemble convexe et non convexe | 218 |
| Fig.B.2. Exemple de fonction convexe et non convexe | 218 |

Liste des tableaux

| | |
|--|-----|
| Tableau 3.1. Comparaison des taux d'atténuation des Théorèmes 3.1-3.6 | 70 |
| Tableau 3.2. Comparaison des performances entre le Théorème 3.4 et le Théorème 4 dans [Ichalal et al., 2008] | 71 |
| Tableau 3.3. Description des termes constituant le modèle de Kirschner-Panetta | 73 |
| Tableau 3.4. Valeurs des paramètres du modèle de K-P | 73 |
| Tableau 3.5. Classification des méthodes de diagnostic..... | 97 |
| Tableau 3.6. Valeurs propres de \tilde{A}_i et $(A_i - L_i C)$ | 105 |
| Tableau 5.1. Résultats numériques des Théorèmes 5.2 et 5.3 | 161 |
| Tableau 5.2. Paramètres du modèle non linéaire du bras flexible | 165 |
| Tableau 5.3. Solutions du théorème 5.5 pour différentes valeurs de a | 179 |
| Tableau C.1. Matrices A_i et fonctions d'activation du modèle TS(3.146) | 221 |
| Tableau D.1. Constantes du modèle (4.42-4.45) | 222 |
| Tableau D.2. Paramètres du modèle (4.18-4.21) | 222 |
| Tableau D.3. Matrices et fonctions d'activation du sous-modèle (4.28) | 223 |
| Tableau D.4. Matrices et fonctions d'activation du sous-modèle (4.29) | 223 |

Notations et acronymes

Notations

| | |
|---------------------------|--|
| \mathbb{R} | Ensemble des nombres réels |
| \mathbb{R}^n | Espace réel Euclidien de dimension n |
| $\mathbb{R}^{n \times m}$ | Espace de matrices réelles de dimension $n * m$ |
| \mathbb{C} | Ensemble des nombres complexes |
| $Re(z)$ | Partie réelle d'un nombre complexe |
| $Im(z)$ | Partie imaginaire d'un nombre complexe |
| z^* | Conjugué d'un nombre complexe |
| $X > 0$ (resp. $X < 0$) | Matrice définie positive (resp. négative) |
| X^T | Transposée de la matrice X |
| X^{-1} | Inverse de la matrice X |
| I | Matrice identité de dimension appropriée |
| $Sym(X)$ | $Sym(X) := X + X^T$ |
| X_h | $X_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i$ |
| X_h^{-1} | $X_h^{-1} = (\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i)^{-1}$ ou $X_h^{-1} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i^{-1}$ |
| \dot{X}_h | $\dot{X}_h = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i(z(t)) X_i$ |
| $(*)$ | Quantité transposée dans une matrice |
| \otimes | Produit de Kronecker |
| $Co\{\}$ | Enveloppe convexe |

Acronymes

| | |
|-------------|---|
| LMI | Linear Matrix Inequality |
| BMI | Bilinear Matrix Inequality |
| VDM | Variable de Décision Mesurable |
| VDNM | Variable de Décision Non Mesurable |
| PDC | Parallel Distributed Compensation |
| LPV | Linear Parameter Varying |
| FLQ | Fonction de Lyapunov Quadratique |
| FLNQ | Fonction de Lyapunov Non Quadratique |
| FLIC | Fonction de Lyapunov à Intégrale Curviligne |
| FLF | Fonction de Lyapunov Floue |
| PI | Proportionnel Intégral |
| PMI | Proportionnel Multi-Intégral |
| UIO | Unknown Input Observer |
| EDO | Equation Différentielle Ordinaire |

1

Introduction générale

L'étude d'un système physique requiert le développement d'un modèle mathématique suffisamment représentatif de celui-ci. Le modèle permet de comprendre les effets combinés des variables du système ainsi que les principaux mécanismes régissant ce dernier. Une modélisation judicieuse d'un système consiste à trouver un modèle suffisamment précis pour décrire la réalité mais peu complexe afin de permettre son exploitation à des fins de commande, d'estimation ou de diagnostic.

Les modèles linéaires reposent sur une théorie bien maîtrisée. Ils permettent de représenter le système autour d'un point de fonctionnement donné. Leur validité est donc vérifiée que dans une zone restreinte de l'espace de fonctionnement. Les systèmes de contrôle développés sur la base de ces modèles peuvent fournir des performances dégradées dès que l'on s'éloigne du point de fonctionnement. Il est donc impératif de prendre en considération les non-linéarités du système lors de la phase de modélisation.

Les modèles non linéaires quant à eux permettent de décrire le comportement des systèmes réels dans une plage de fonctionnement plus large fournissant une meilleure précision que celle obtenue par des modèles linéaires. Les systèmes de contrôles élaborés à partir de ces modèles sont souvent plus performants. L'inconvénient majeur des modèles non linéaires réside dans la complexité de leur structure mathématique, ce qui rend leur exploitation quelque peu difficile. La théorie relative aux modèles non linéaires n'a pas de cadre général mais traite de classes spécifiques de systèmes, citons à titre d'exemples, les systèmes polynomiaux, les systèmes bilinéaires, les systèmes à paramètres variant dans le temps, les systèmes lipschitziens, etc.

Tomohiro Takagi et Michio Sugeno ont proposé, au milieu des années 80, une alternative intéressante pour représenter les systèmes non linéaires [Takagi et Sugeno, 1985]. L'idée principale du modèle de Takagi-Sugeno (TS) est de représenter le comportement du système non linéaire par un ensemble de modèles locaux simples (généralement linéaires) interpolés par des fonctions d'activation non linéaires satisfaisant des propriétés de somme convexe. Le formalisme TS permet de réécrire les systèmes non linéaires de manière plus facile à étudier en les décomposant en différentes unités simples et maîtrisables. Cette structure particulière permet de généraliser les concepts développés dans l'automatique linéaire aux systèmes non linéaires. De plus, un modèle de connaissance non linéaire peut être exactement représenté par un modèle TS dans un compact de l'espace d'état grâce à la méthode des secteurs non linéaires [Tanaka et Wang, 2001]. Les fonctions d'activation des modèles TS dépendent de variables dites de décision ou de prémisse. Ces dernières peuvent être mesurables (entrées/sorties du système) ou non mesurables (états du système). Il est important de souligner que les modèles TS à Variables de Décision Non Mesurables permettent de représenter une classe plus large de systèmes non linéaires que ceux à Variables de Décision Mesurables.

L'analyse de stabilité et la synthèse d'observateurs ou de lois de commande des systèmes non linéaires décrits par des modèles TS se basent essentiellement sur la seconde méthode de Lyapunov aboutissant à des conditions sous formes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs) [Boyd et al., 1994] qui peuvent être résolues par les algorithmes d'optimisation convexes tels que l'algorithme du point intérieur [Gahinet et al., 1994]. Les conditions obtenues sont seulement suffisantes (et non nécessaires) et souffrent souvent de conservatisme dont la réduction représente un enjeu majeur au sein de la communauté scientifique [Sala, 2009], [Lam, 2018].

L'estimation d'état des systèmes dynamiques est une des principales problématiques de la théorie de contrôle. Elle a fait l'objet d'un nombre considérable de travaux dans la littérature. La recherche sur l'estimation d'état des systèmes linéaires et non linéaires remonte aux années 70 [Luenberger, 1971], [Thau, 1973]. Dans [Efimov et Fridman, 2011], les auteurs ont proposé un observateur à mode glissant d'ordre supérieur (super-twisting) pour les systèmes non linéaires localement lipschitziens en prenant en compte la présence de perturbations. Un observateur à grand gain est proposé dans [Khalil et Praly, 2014] pour les systèmes non linéaires soumis à des incertitudes et des bruits de mesure. Une possible application au contrôle robuste des systèmes non linéaires à non-minimum de phase a été discutée. Les auteurs de [Chakrabarty et Corless, 2019] ont développé un observateur à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires. L'observateur proposé a pour particularité de reconstruire des entrées inconnues non bornées.

La synthèse d'observateurs pour les systèmes TS peut être divisée en deux classes : la première considère que les fonctions d'activation dépendent de variables mesurables [Lendek et al., 2010], [Xie et al., 2016]. Elle aboutit dans la majorité des cas à une dynamique d'erreur d'estimation d'état qui peut s'écrire sous la forme d'un système TS autonome, ce qui facilite l'analyse de stabilité. La seconde suppose que les variables de décision ne sont pas mesurables [Ichalal et al., 2011], [Pan et al., 2021]. Dans ce cas, il n'est plus possible d'exprimer simplement la dynamique de l'erreur d'estimation d'état car le système et l'observateur possèdent des fonctions d'activation différentes. Ce problème peut être résolu en utilisant l'approche lipschitzienne [Ichalal et al., 2007] ou le théorème de la valeur moyenne [Ichalal et al., 2011]. Une autre manière d'appréhender ce problème est d'exprimer le système sous forme perturbée ou incertaine et de minimiser l'effet de ses « pseudo-perturbations » ou « pseudo-incertitudes » sur l'erreur d'estimation d'état.

La stabilisation d'un système dynamique consiste à trouver une loi de commande qui le stabilise en satisfaisant certaines performances. Pour les systèmes TS, la loi de commande la plus répandue est la PDC pour Parallel Distributed Compensation. Cette dernière dépend des mêmes fonctions d'activation que le système TS considéré. Elle permet de calculer les gains de retour d'état pour chaque modèle local. Une fonction de Lyapunov quadratique peut être utilisée pour analyser la stabilité du système en boucle fermée. Cette approche aboutit à un ensemble de conditions LMIs dépendant d'une matrice commune ce qui peut être source de conservatisme. Pour réduire ce conservatisme, d'autres fonctions de Lyapunov ont été proposées comme par exemple les fonctions de Lyapunov à commutations [Jabri et al., 2012] ou les fonctions de Lyapunov Non quadratiques [Mozelli et al., 2009]. Ces dernières font apparaître, dans le cas continu, les dérivées temporelles des fonctions d'activation dans les conditions de stabilité perdant ainsi la propriété de convexité. Une façon de contourner ce problème, est de supposer que les dérivées des fonctions d'activation sont bornées ou d'utiliser des fonctions de Lyapunov à intégrale curviligne. Ces dernières conduisent à une stabilisation globale contrairement aux fonctions de Lyapunov non quadratiques.

Réponse lente, dépassement important ou oscillations, assurer la stabilité asymptotique d'un système en boucle fermée ne garantit pas pour autant une bonne réponse de son régime transitoire. Le concept de \mathcal{D} -stabilité a été introduit afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée. Il s'agit de définir des contraintes LMIs permettant de placer les valeurs propres de la matrice définissant la dynamique du système en boucle fermée dans une région spécifique \mathcal{D} du plan complexe, appelée aussi région LMI [Bachelier, 1998]. Cette région permet de définir des performances liées par exemple à la rapidité, l'amortissement ou le coût énergétique.

Les premiers travaux traitant de la « \mathcal{D} -stabilisation » (ou de stabilisation sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité) des systèmes TS ont été proposés dans [Hong et Nam, 2003] et [Toulotte, 2008]. Dans ces travaux, et afin d'imposer des contraintes de \mathcal{D} -stabilité, des LMIs supplémentaires

sont ajoutées à celles garantissant la stabilité asymptotique. La principale limitation de cette approche est que les conditions LMIs proposées sont seulement valables pour une région LMI spécifique. Les auteurs de [Nguang et Shi, 2006] ont proposé une définition générale de la \mathcal{D} -stabilité pour les systèmes non linéaires. Cette condition de synthèse basée sur la théorie de Lyapunov est générique du fait qu'elle permet aux concepteurs de choisir une région LMI selon leur convenance. Dans [Cherifi, 2017], l'auteur a proposé la synthèse de commande stabilisantes (PDC et non PDC) pour les systèmes TS à Variables de Décision Mesurables sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité basées sur des fonctions de Lyapunov quadratiques et non quadratiques. Les conditions de synthèse présentées sont valables quelque soit la région LMI considérée.

Motivations

Les travaux présentés dans cette thèse ont été principalement motivés par

- l'intérêt porté par la communauté scientifique au formalisme TS qui permet une certaine maîtrise et une simplicité dans l'analyse des systèmes non linéaires,
- le peu de travaux de recherches (articles et thèses) qui exploitent le caractère générique du concept de \mathcal{D} -stabilité dans la synthèse de lois de commandes ou d'observateurs pour les systèmes non linéaires décrits par des modèles TS,
- certaines problématiques de contrôle qui ont peu ou pas été explorées au regard du concept de \mathcal{D} -stabilité.

Problématique générale

La problématique traitée dans ce travail de thèse est de proposer de nouvelles conditions génériques de synthèse d'observateurs et de lois de commandes pour les systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles TS sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité. Cette dernière permet d'assigner les valeurs propres des matrices définissant la dynamique de l'erreur d'estimation d'état ou celle du système en boucle fermée dans une région LMI qui peut être choisie selon la convenance de l'utilisateur.

Principales contributions

Les principales contributions de notre travail peuvent être résumées par les points suivants :

- Proposition d'une condition de synthèse générique alliant la \mathcal{D} -stabilité et l'approche \mathcal{L}_2 ,
- Proposition de nouvelles conditions de synthèse \mathcal{D} -stable de multi-observateurs pour les systèmes TS standards et les systèmes TS interconnectés à Variables de Décision Non Mesurables (VDNM),
- Relaxation des conditions de synthèse des multi-observateurs par le biais du lemme de Finsler,
- Prise en compte de la \mathcal{D} -stabilité dans la conception de commandes PDC en présence de saturation d'actionneurs,
- Développement de commandes en poursuite de trajectoire et de commande tolérante aux défauts actionneurs sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité.

Organisation de la thèse

Cette thèse regroupe six chapitres organisés comme suit :

Chapitre 1 : Introduction générale : Ce présent chapitre donne un bref aperçu sur le contexte, les motivations et les principales contributions de cette thèse.

Chapitre 2 : Sur les systèmes de Takagi-Sugeno : Ce chapitre propose un état de l'art sur la stabilité, la stabilisation et la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles de Takagi-Sugeno.

Chapitre 3 : \mathcal{D} -observation des systèmes de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables : Dans ce chapitre, nous présentons les différents résultats que nous avons obtenus dans la synthèse de multi-observateurs pour les systèmes TS à Variables de Décision Non Mesurables (VDNM) sous conditions de \mathcal{D} -stabilité.

Chapitre 4 : \mathcal{D} -observation des systèmes interconnectés de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables : Dans ce chapitre, nous étendons les principaux résultats obtenus dans le chapitre 3 aux systèmes TS interconnectés. L'estimation d'état et des paramètres variant dans le temps est aussi examinée.

Chapitre 5 : Commandes \mathcal{D} -stables des systèmes de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Mesurables : Ce chapitre aborde la synthèse « \mathcal{D} -stable » de différentes lois de commandes des systèmes TS à Variables de Décision Mesurables (VDM). Trois types de commandes sont étudiés : la commande en présence de saturation d'actionneurs, la poursuite de trajectoire générée par un modèle de référence et la commande tolérante aux défauts.

Chapitre 6 : Conclusions et perspectives : Enfin, ce dernier chapitre résume les résultats obtenus dans cette thèse et met l'accent sur les suites possibles de ce travail de recherche.

Publications

Articles publiés

- **Ouhib, L. and Kara, R. (2023).** Proportional Observer design based on \mathcal{D} -stability and Finsler's Lemma for Takagi-Sugeno systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume 452, issue C, pages 61-90. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.07.006>
- **Ouhib, L. and Kara, R. (2023).** Observer design based on \mathcal{D} -stability and Finsler's lemma for interconnected Takagi-Sugeno systems with immeasurable premise variables, *Journal of Control and Decision*, DOI: 10.1080/23307706.2023.2192002

Bibliographie

[Bachelier, 1998] Bachelier, O. (1998). *Commande des systèmes linéaires incertains : placement de pôles robuste en \mathcal{D} -stabilité*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Toulouse, France.

[Boyd et al., 1994] Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

[Cherifi, 2017] Cherifi, A (2017). Contribution à la commande des modèles Takagi-Sugeno : approche non-quadratique et synthèse \mathcal{D} -stable. Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, Mai 2017.

[Chakrabarty et Corless, 2019] Chakrabarty, A., & Corless, M. (2019). Estimating unbounded unknown inputs in nonlinear systems. *Automatica*, 104, 57–66

[Efimov et Fridman, 2011] Efimov, D., Fridman, L., 2011. Global sliding-mode observer with adjusted gains for locally Lipschitz systems. *Automatica* 47, 565–570.

[Gahinet et al., 1994] Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J., and Chilali, M. (1994). The LMI control toolbox. In *IEEE conference on decision and control*, volume 2, pages 2038–2038. Institute Of Electrical Engineers INC (IEE).

[Hong et Nam, 2003] Hong, S. K. and Nam, Y. (2003). Stable fuzzy control system design with pole-placement constraint : an LMI approach. *Computers in Industry*, 51(1) :1–11.

- [Ichalal et al., 2007] Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., Maquin, D., 2007. Conception d'observateurs pour un modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables, in: 8ème Conférence Internationale Des Sciences et Techniques de l'Automatique, STA'2007. p. CDROM.
- [Ichalal et al., 2011] Ichalal, D., Marx, B., Maquin, D., Ragot, J., 2011. On observer design for nonlinear Takagi- Sugeno systems with unmeasurable premise variable, in: Advanced Control of Industrial Processes (ADCONIP), 2011 International Symposium on. IEEE, pp. 353–358.
- [Jabri et al., 2012] Jabri, D., Guelton, K., Manamanni, N., Jaadari, A., and Chinh, C. D. (2012). Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 14(2) :40–49.
- [Khalil et Praly, 2014] Khalil, H.K., Praly, L., 2014. High-gain observers in nonlinear feedback control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 24, 993–1015.
- [Lam, 2018] Lam, H.K. (2018). A review on stability analysis of continuous-time fuzzy-model-based control systems: From membership-function-independent to membership-function-dependent analysis. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67, 390–408.
- [Lendek et al., 2010] Lendek, Zs., Guerra, T., Babuska, R., 2010a. On non-PDC local observers for TS fuzzy systems, in: IEEE International Conference on Fuzzy Systems. pp. 1–7.
- [Luenberger, 1971] Luenberger, D., 1971. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*16, 596–602.
- [Mozelli et al., 2009] Mozelli, L. A., Palhares, R.M., Souza, F.O., and Mendes, E.M. A. M. (2009b). Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, 45 :1580–1583.
- [Nguang et Shi, 2006] Nguang, S. K. and Shi, P. (2006). Robust H-infinity output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic D-stability constraints : An LMI approach. *Information Sciences*, 176(15) :2161–2191.
- [Pan et al., 2021] J. Pan, A.-T. Nguyen, T.-M. Guerra, D. Ichalal, A unified framework for asymptotic observer design of fuzzy systems with unmeasurable premise variables, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 29 (10) (2021) 2938–2948.
- [Sala, 2009] Sala, A. (2009). On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems. *Ann. Rev. in Control*, 33(1), 48–58.
- [Takagi et Sugeno, 1985] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-15(1),116–132.
- [Tanaka et Wang, 2001] Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. JohnWiley and Sons.
- [Thau, 1973] Thau, F.E., 1973. Observing the state of non-linear dynamic systems†. *International journal of control* 17, 471–479.
- [Toulotte, 2008] Toulotte, P.-F., Delprat, S., Guerra, T.-M., and Boonaert, J. (2008). Vehicle spacing control using robust fuzzy control with pole placement in LMI region. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(5) :756–768.
- [Xie et al., 2016] Wen-Bo Xie, Cheng-Chew Lim, Jian Zhang and Ling Huang, New Approaches to Observer Design and Stability Analysis for T-S Fuzzy System with Multiplicative Noise, *Journal of the Franklin Institute*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2016.11.001>

2

Sur les systèmes de Takagi-Sugeno

Sommaire

| | |
|---|----|
| 2.1. Introduction | 17 |
| 2.2. Présentation du modèle de Takagi-Sugeno | 17 |
| 2.3. Obtention des modèles TS | 19 |
| 2.4. Transformation par secteurs non linéaires | 20 |
| 2.5. Analyse de stabilité des systèmes TS | 23 |
| 2.5.1. Stabilité quadratique | 23 |
| 2.5.2. Stabilité non quadratique dépendant des dérivées temporelles des fonctions d'activation..... | 23 |
| 2.5.3. Stabilité non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'activation . | 25 |
| 2.5.4. Stabilisation des systèmes TS | 27 |
| 2.5.5. Loi de commande PDC | 27 |
| 2.6. Loi de commande non-PDC | 27 |
| 2.6.1. Synthèse d'observateurs pour les systèmes TS | 29 |
| 2.6.2. Observation des systèmes TS à Variables de Décision Mesurables (VDM) | 29 |
| 2.6.3. Observation des systèmes TS à Variables de Décision Non Mesurables (VDNM) | 30 |
| 2.7. Réduction du conservatisme des conditions de synthèse des systèmes TS | 35 |
| 2.8. Conclusion | 35 |
| Bibliographie | 36 |

2.1. Introduction

Ce deuxième chapitre est dédié à la présentation des résultats fondamentaux relatifs à la stabilité, la stabilisation et l'estimation des modèles flous de Takagi-Sugeno. Dans un premier temps, nous nous intéressons à la représentation TS des systèmes non linéaires ainsi que les différentes approches permettant d'obtenir de tels modèles. Ensuite, l'analyse de stabilité via l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques et non quadratiques est abordée. Nous passerons aussi en revue quelques résultats importants sur la synthèse de lois de commande et d'observateurs. Nous terminons ce chapitre par présenter quelques schémas de relaxation permettant de réduire le conservatisme des conditions de synthèse.

2.2. Présentation du modèle de Takagi-Sugeno

La modélisation constitue une étape cruciale et incontournable dans l'analyse des systèmes physiques. Un « bon » modèle doit être suffisamment précis pour décrire la réalité mais peu complexe afin de permettre son exploitation ultérieure à des fins de commande ou d'observation.

L'un des modèles d'état les plus couramment utilisés pour la description du comportement dynamique des systèmes non linéaires est présenté dans [Khalil, 2002]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)), \end{cases} \quad (2.1)$$

2 Sur les systèmes de Takagi-Sugeno

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. Les fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont non linéaires et lisses.

Sous certaines hypothèses et selon la complexité des fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$, le système (2.1) est souvent réécrit sous la forme quasi-linéaire suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t), \\ y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))u(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Les matrices $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, et $D(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times m}$, sont respectivement appelées matrice de dynamique, de commande, d'observation et d'action directe.

La classe de système (2.2) peut être représentée par un modèle dit de Takagi-Sugeno (TS) [Takagi & Sugeno, 1985], également appelé multi-modèle à états couplés ou modèle affine par morceaux.

Dans sa forme originelle, un modèle TS est constitué par un ensemble de sous-modèles linéaires pondérés par des fonctions d'appartenance non linéaires décrit par r règles floues de la forme :

R_i : Si ($z_1(t)$ est M_{i1}) et ($z_2(t)$ est M_{i2}) et... et ($z_p(t)$ est M_{ip}) Alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

où M_{ij} sont des ensembles flous, $z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)$ représentent des variables de prémisses qui peuvent dépendre des variables d'état, de l'entrée, de signaux exogènes, de variables mesurées ou non mesurées, les matrices constantes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, et $D_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ définissent la dynamique des sous-modèles.

L'opérateur « et » étant considéré comme l'opérateur de multiplication, le sous-modèle i contribue au modèle global par la fonction d'appartenance $\omega_i(z(t))$ définie par

$$\omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu(M_{ij}), \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad (2.4)$$

où $\mu(M_{ij}) \in [0,1]$ est le degré d'appartenance de la variable de prémisses $z_i(t)$ à l'ensemble flou M_{ij} .

Les fonctions d'appartenance normalisées appelées communément fonctions d'activation sont

$$h_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))}. \quad (2.5)$$

Ces dernières vérifient les propriétés de somme convexe

$$\begin{cases} 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1, \\ \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \forall t \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, r\}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le modèle TS global est alors obtenu en utilisant la somme pondérée des sous-modèles i (voir Figure 2.1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)). \end{cases} \quad (2.7)$$

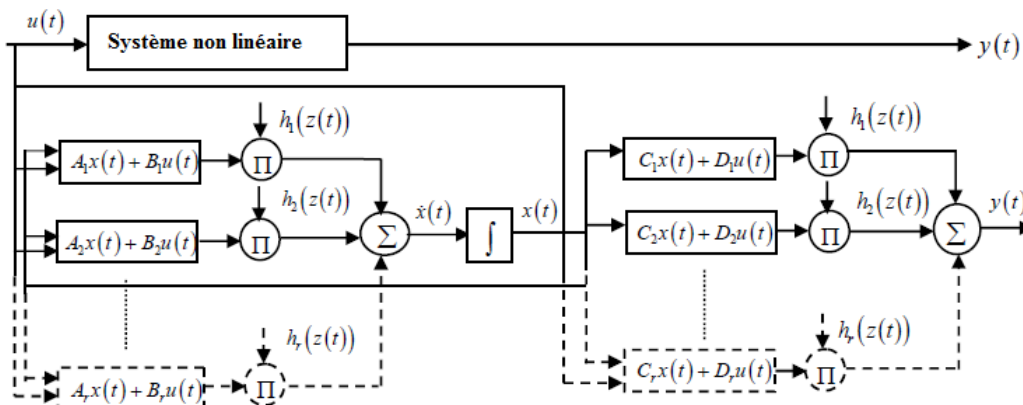


Fig.2.1. Architecture du modèle de Takagi-Sugeno.

La représentation des systèmes non linéaires par les modèles de Takagi-Sugeno est particulièrement appréciée pour sa généricité et pour permettre l'utilisation de techniques issues de la théorie des systèmes linéaires largement maîtrisées par la communauté scientifique. En plus, les modèles TS peuvent facilement être déduits sans aucune perte d'information par l'utilisation de la transformation par secteurs non linéaires à partir de l'expression analytique du modèle non linéaire du système.

Remarque 2.1

Les fonctions d'activation peuvent dépendre de l'état $x(t)$, de l'entrée $u(t)$ ou de la sortie $y(t)$. Cependant, l'utilisation de la commande $u(t)$ comme variable de prémisse conduit à l'apparition d'une boucle algébrique pouvant compliquer la synthèse du correcteur.

2.3. Obtention des modèles TS

Dans la littérature, il existe principalement trois manières d'obtenir un modèle TS :

- Par identification à partir des données expérimentales des entrées et des sorties lorsqu'aucun modèle de connaissance non linéaire n'est disponible [Babuska, 1998], [Gasso et al., 2000]. Cette approche soulève cependant trois problématiques majeures :
 - (i) Le choix approprié des variables de prémisses $z(t)$,
 - (ii) La décomposition de l'espace de fonctionnement du système en un nombre de zones fini,
 - (iii) la détermination de la structure du multi-modèle et l'identification des paramètres des sous-modèles.

Ces trois problèmes sont rarement résolus simultanément parce qu'ils présentent des degrés de complexité assez importants. Généralement, les variables de prémisses et les fonctions d'activation sont définies a priori, l'identification consiste alors à déterminer les paramètres

des sous-modèles par minimisation de l'erreur de modélisation. Le lecteur intéressé trouvera dans la thèse [Orjuela 2008] un état de l'art complet sur l'identification des multi-modèles.

- Par linéarisation d'un modèle non linéaire autour d'un ensemble de points de fonctionnement [Johansen et al., 2000], [Tanaka & Wang, 2001]. La qualité de l'approximation du modèle non linéaire dépend fortement du choix de ces points ainsi que des fonctions d'appartenance. Néanmoins, il n'existe pas de méthode systématique pour les déterminer.

Le développement de Taylor au 1^{er} ordre du modèle non linéaire (2.1) autour des points de fonctionnement (x_i, u_i) , pour $i=1, \dots, r$ aboutit au modèle suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + f_i), \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t) + g_i), \end{cases} \quad (2.8)$$

où

$$A_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_i, u_i)}, B_i = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(x_i, u_i)}, C_i = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x_i, u_i)}, D_i = \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)_{(x_i, u_i)}, \quad (2.9)$$

$$f_i = f(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i, g_i = g(x_i, u_i) - C_i x_i - D_i u_i. \quad (2.10)$$

Dans le cas où les points de linéarisation ne sont pas des points d'équilibre du modèle non linéaire, les termes constants f_i et g_i apparaissent dans le développement de Taylor ce qui rend l'analyse de stabilité ou la synthèse de loi de commande moins évidente.

- Par réécriture polytopique ou décomposition en secteurs non linéaires [Tanaka et al., 1998], [Morère, 2001] : Cette approche utilise la transformation polytopique convexe des termes non linéaires. Elle permet d'obtenir un modèle TS représentant exactement le système non linéaire dans un compact de l'espace d'état.

Dans ce manuscrit, la majorité des modèles TS utilisés sont issus de la transformation par secteurs non linéaires. Cette dernière est détaillée dans la section suivante.

2.4. Transformation par secteurs non linéaires

La transformation par secteurs non linéaires repose principalement sur le lemme suivant :

Lemme 2.1 [Morère, 2001]

Soit $f(x(t), u(t))$ une fonction continue et bornée sur le domaine $D = [x_0, x_1] \times [u_0, u_1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , avec $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^m$. Alors il existe deux fonctions

$$F_i : [x_0, x_1] \times [u_0, u_1] \mapsto [0, 1] (i = 1, 2)$$

$$(x(t), u(t)) \mapsto F_i(x(t), u(t))$$

avec $F_1(x(t), u(t)) + F_2(x(t), u(t)) = 1$ telles que

$$f(x(t), u(t)) = F_1(x(t), u(t))h_1 + F_2(x(t), u(t))h_2, \quad (2.11)$$

pour tout $h_1 \geq \max_{x, u \in D} \{f(x, u)\}$ et $h_2 \leq \min_{x, u \in D} \{f(x, u)\}$. Les fonctions F_1 et F_2 sont définies par

$$F_1(x(t), u(t)) = \frac{f(x(t), u(t)) - h_2}{h_1 - h_2}, \quad (2.12)$$

$$F_2(x(t), u(t)) = \frac{h_1 - f(x(t), u(t))}{h_1 - h_2}. \quad (2.13)$$

De manière générale, on choisit

$$h_1 = \max_{x, u \in D} \{f(x, u)\}, \quad (2.14)$$

$$h_2 = \min_{x, u \in D} \{f(x, u)\}. \quad (2.15)$$

Remarque 2.2

Il est évident que la décomposition en secteurs non linéaires n'est pas unique. Différents modèles TS peuvent être obtenus pour un seul modèle non linéaire selon les variables de prémisses choisies. De plus, le nombre de sous-modèles est relié exponentiellement au nombre p de variables de prémisses $r=2^p$.

Remarque 2.3

Si les non-linéarités sont bornées sur l'ensemble de l'espace d'état, le modèle TS représente exactement le système non linéaire ; la décomposition en secteurs non linéaires est dite globale. Si au moins une non-linéarité n'est pas bornée, le modèle TS représente localement le système non linéaire sur un espace compact. Dans ce cas, la décomposition en secteurs non linéaire est locale (Figure 2.2).

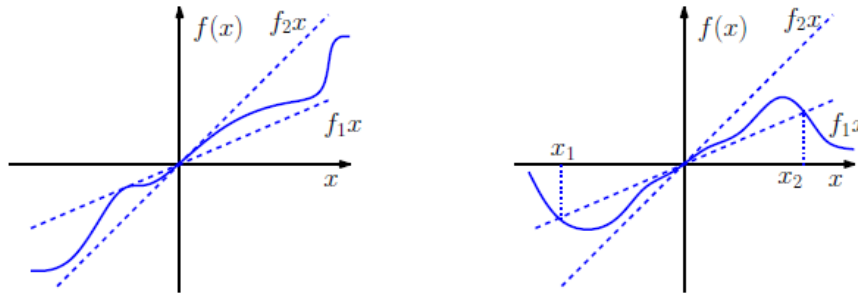


Fig.2.2. Secteurs non linéaires (global à gauche, local à droite).

Exemple 2.1

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \sin(x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)x_2^2(t) - 3x_2(t) + (2 + \sin(x_1(t)))u(t). \end{cases} \quad (2.16)$$

La première étape consiste à écrire le système précédent sous forme quasi-LPV

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & \sin(x_1) \\ x_2^2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + \sin(x_1) \end{bmatrix} u = A(x)x + B(x)u. \quad (2.17)$$

où $x = [x_1 \ x_2]^T$.

2 Sur les systèmes de Takagi-Sugeno

On définit l'ensemble des variables de prémisse $V_z = \{z_1, z_2\}$

$$z_1(x_1) = \sin(x_1), \quad (2.18)$$

$$z_2(x_2) = x_2^2. \quad (2.19)$$

Dans une 2^{ème} étape, on applique la Transformation Polytopique Convexe définie dans le Lemme 2.1 à chaque variable de prémisse $z_j(x(t))$ ($j = 1, 2$) pour $x_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x_2 \in [0, 1]$. On réalise alors pour chaque variable de prémisse une décomposition en deux parties

$$z_1(x_1) = F_{1,1}(z_1)z_{1,1} + F_{1,2}(z_1)z_{1,2}, \quad (2.20)$$

$$z_2(x_2) = F_{2,1}(z_2)z_{2,1} + F_{2,2}(z_2)z_{2,2}, \quad (2.21)$$

où

$$F_{j,1}(z_j) = \frac{z_j(x) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}},$$

$$F_{j,2}(z_j) = \frac{z_{j,1} - z_j(x)}{z_{j,1} - z_{j,2}} = 1 - F_{j,1}(z_j)$$

On choisit par exemple

$$\begin{cases} z_{j,1} = \max_x \{z_j(x)\}, \\ z_{j,2} = \min_x \{z_j(x)\}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Les matrices $A(x)$ et $B(x)$ sont ensuite évaluées en prenant en compte les équations (2.20) et (2.21) :

$$A(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} -1 & z_1(x_1) \\ z_2(x_2) & -3 \end{bmatrix} = F_{1,1} \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_2(x_2) & -3 \end{bmatrix} + F_{1,2} \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_2(x_2) & -3 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$A(z_1, z_2) = F_{1,1}F_{2,1} \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,1} & -3 \end{bmatrix} + F_{1,1}F_{2,2} \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,2} & -3 \end{bmatrix} + F_{1,2}F_{2,1} \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,1} & -3 \end{bmatrix} + F_{1,2}F_{2,2} \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,2} & -3 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$B(z_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + z_1(x_1) \end{bmatrix} = F_{1,1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + z_{1,1} \end{bmatrix} + F_{1,2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + z_{1,2} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Ce qui revient à écrire

$$B(z_1) = F_{1,1}F_{2,1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + z_{1,1} \end{bmatrix} + F_{1,1}F_{2,2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + z_{1,1} \end{bmatrix} + F_{1,2}F_{2,1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + z_{1,2} \end{bmatrix} + F_{1,2}F_{2,2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + z_{1,2} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Une représentation TS du système (2.16) est alors donnée par

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^4 h_i(z) (A_i x + B_i u), \quad (2.27)$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$h_1(z) = F_{1,1}F_{2,1}, h_2(z) = F_{1,1}F_{2,2}, h_3(z) = F_{1,2}F_{2,1}, h_4(z) = F_{1,2}F_{2,2}.$$

2.5. Analyse de stabilité des systèmes TS

L'analyse de la stabilité des systèmes TS est principalement basée sur l'approche de Lyapunov (voir Annexe A) où les conditions de décroissance de la dérivée temporelle d'une fonction positive sont recherchées. La plupart des problèmes d'analyse et de synthèse sont exprimés sous forme de contraintes LMIs (Voir Annexe B) portant exclusivement sur les sommets des polytopes ce qui conduit à des conditions suffisantes et non nécessaires.

Soit le système TS autonome suivant

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i x(t). \quad (2.28)$$

2.5.1. Stabilité quadratique

Considérons la Fonction de Lyapunov Quadratique (FLQ)

$$V(x) = x^T P x, \quad (2.29)$$

où $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive dite matrice de Lyapunov.

Le système TS est globalement asymptotiquement stable si $\dot{V}(x) < 0$, c'est-à-dire

$$\dot{V}(x) = \text{Sym}(x^T P \dot{x}) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) \text{Sym}(P A_i) \right) x < 0. \quad (2.30)$$

La négativité de chacun des termes de la somme est une condition suffisante à la négativité de la somme, les fonctions d'activation $h_i(z(t))$ étant positives.

Lemme 2.2 [Tanaka & Sugeno, 1992]

Le modèle TS (2.28) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telles que les LMIs suivantes sont vérifiées pour $i \in \{1, \dots, r\}$

$$A_i^T P + P A_i < 0. \quad (2.31)$$

Rappelons que le Lemme 2.2 ne fournit que des conditions suffisantes car les inégalités (2.31) ne font apparaître aucune information sur les fonctions d'activation $h_i(z(t))$. De plus, il s'agit de trouver une matrice P commune satisfaisant simultanément les r LMIs, ce qui conduit à un certain conservatisme. Plusieurs travaux qui ont suivi ont eu pour but de réduire le conservatisme des conditions proposées par [Tanaka & Sugeno, 1992], on peut citer les travaux de [Blanco et al., 2001], [Tanaka et al., 2003] et [Feng, 2006] qui considèrent des fonctions de Lyapunov polyquadratiques encore connues sous le nom de fonctions de Lyapunov floues (FLF : Fuzzy Lyapunov Function) et qui font l'objet de la section suivante.

2.5.2. Stabilité non quadratique dépendant des dérivées temporelles des fonctions d'activation

2 Sur les systèmes de Takagi-Sugeno

Soit la Fonction de Lyapunov Non Quadratique (FLNQ) suivante

$$V(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) P_i \right) x = x^T P_h x. \quad (2.32)$$

La fonction (2.32) possède la même structure que le système TS analysé ; les variables de décision P_i sont pondérées via les fonctions d'activation $h_i(z)$ ce qui donne plus de flexibilité réduisant dans une certaine mesure le conservatisme des contraintes LMIs.

La dérivée temporelle de la FLNQ est

$$\dot{V}(x) = x^T \left(\text{Sym}(P_h A_h) + \dot{P}_h \right) x. \quad (2.33)$$

Le système TS (2.28) est stable si

$$\text{Sym}(P_h A_h) + \dot{P}_h < 0. \quad (2.34)$$

Dans l'inégalité précédente, on remarque l'apparition des dérivées temporelles des fonctions d'activation $h_i(z)$ dans le terme $\dot{P}_h = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i(z) P_i$ ce qui entraîne la perte de la propriété de convexité. Pour remédier à ce problème majeur, plusieurs solutions ont été proposées. Une première approche présentée par [Tanaka et al., 2003] consiste à supposer que les bornes des dérivées temporelles des fonctions d'activation sont connues :

$$|\dot{h}_k(z(t))| \leq \varphi_k. \quad (2.35)$$

Ainsi, l'analyse de la stabilité non quadratique des systèmes TS aboutit aux conditions LMIs énoncées par le lemme suivant :

Lemme 2.3 [Tanaka et al., 2003]

Supposons que

$$|\dot{h}_\rho(z(t))| \leq \varphi_\rho, \quad (2.36)$$

où $\varphi_\rho \geq 0$. Le système (2.28) est stable s'il existe $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ tels que

$$P_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.37)$$

$$\sum_{\rho=1}^r \varphi_\rho P_\rho + \frac{1}{2} \{ A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i \} < 0, \quad i \leq j. \quad (2.38)$$

Dans le même article, les auteurs proposent de relaxer les conditions de stabilité du Lemme 2.3 en considérant la propriété suivante :

$$\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(z(t)) = 0, \quad \forall z(t). \quad (2.39)$$

Lemme 2.4 [Tanaka et al., 2003]

Supposons que

$$|\dot{h}_\rho(z(t))| \leq \varphi_\rho, \quad \rho = 1, \dots, r-1. \quad (2.40)$$

Le système (2.28) est stable s'il existe $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{r-1}$ tels que

$$P_1, \dots, P_r > 0, \quad (2.41)$$

$$P_\rho \geq P_r, \quad \rho = 1, 2, \dots, r-1, \quad (2.42)$$

$$\sum_{\rho=1}^{r-1} \varphi_\rho (P_\rho - P_r) + \frac{1}{2} \{A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i\} < 0 \quad i \leq j. \quad (2.43)$$

Présenté par [Mozelli et al.,2009] , le Lemme 2.5 permet de réduire le conservatisme des conditions de stabilité précédentes en introduisant une variable supplémentaire X :

Lemme 2.5 [Mozelli et al.,2009]

Supposons que $|\dot{h}_k| \leq \varphi_k, k \in \{1, \dots, r\}$. Le système (2.28) est stable si les LMIs suivantes sont satisfaites

$$P_i = P_i^T > 0, \quad (2.44)$$

$$P_i + X \geq 0, \quad (2.45)$$

$$\tilde{P}_\varphi + \frac{1}{2} \{A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i\} < 0, \quad i \leq j, \quad (2.46)$$

où $\tilde{P}_\varphi = \sum_{k=1}^r \varphi_k (P_k + X)$, φ_k sont des scalaires et $X = X^T$.

Il est important de noter que les résultats précédents ne permettent pas d'aboutir à des conditions de stabilité globales. La dérivée des fonctions d'activation peut se mettre sous la forme

$$\dot{h}_i(z(t)) = \sum_{i=1}^r \dot{z}(t) \frac{\partial h_i(z(t))}{\partial z(t)}. \quad (2.47)$$

Imposer une borne à $\dot{h}_i(z(t))$ revient donc à borner $\dot{z}(t)$ ce qui conduit à restreindre le domaine de validité du système TS dans lequel la stabilité est garantie (communément appelé domaine d'attraction).

2.5.3. Stabilité non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'activation

Afin d'éviter les inconvénients des Fonctions de Lyapunov Floues, une autre alternative consiste à utiliser des Fonctions de Lyapunov sous forme d'Intégrale Curviligne (FLIC ou Line Integral Lyapunov Function en anglais) ne faisant plus apparaître les dérivées des fonctions d'activation dans les conditions de stabilité [Khalil, 2002]

$$V(x(t)) = 2 \int_{\Gamma(0,x(t))} f^T(\psi) d\psi. \quad (2.48)$$

2 Sur les systèmes de Takagi-Sugeno

$\Gamma(0, x(t))$ est une trajectoire quelconque de l'origine à l'état actuel $x(t)$. $\psi \in \mathbb{R}^n$ représente un vecteur de déplacement fictif et $d\psi$ est un vecteur de déplacement infinitésimal.

Pour que la fonction (2.48) soit une fonction de Lyapunov, il faut que l'intégrale curviligne soit indépendante du chemin parcouru [Rhee and Won, 2006]. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour vérifier l'indépendance du chemin de (2.48) est donnée par le lemme suivant

Lemme 2.6 [Zill and Cullen, 2000]

Soit $f(x) = [f_1(x) \dots f_n(x)]^T$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $V(x(t))$ soit indépendante du chemin est

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j. \quad (2.49)$$

En se basant sur ce lemme, les auteurs [Rhee and Won, 2006] ont démontré que la FLIC (2.48) est indépendante du chemin parcouru en choisissant $f(x)$ comme suit

$$f(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) P_i x, \quad (2.50)$$

où $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une fonction symétrique définie positive donnée par

$$P_i = \bar{P} + D_i > 0, \quad (2.51)$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & 0 & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

$$D_i = \begin{bmatrix} d_{11}^{\alpha_{i1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^{\alpha_{i2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn}^{\alpha_{in}} \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

Remarque 2.4 [Cherifi, 2017]

Il est important de noter que les éléments diagonaux de (2.53) sont alternés en fonction des règles Si-Alors, réécrite dans [Rhee and Won, 2006], sous la forme

$R_i : \text{Si } (z_1(t) \text{ est } M_1^{\alpha_1}) \text{ et } \dots \text{ et } (z_l(t) \text{ est } M_l^{\alpha_l}) \text{ et } \dots \text{ et } (z_p(t) \text{ est } M_p^{\alpha_p})$

Alors $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \forall i \in \{1, \dots, r\}$.

Si une variable de prémisses appartient au même ensemble flou de différentes règles, alors les éléments de la diagonale liés à cette variable seront égaux.

De plus, cette structure ne peut être employée pour les systèmes non linéaires dont une ou plusieurs non-linéarités dépendent de plusieurs variables de prémisses.

Les premières conditions de stabilité d'un système TS autonome utilisant une FLIC sont énoncées par le lemme suivant

Lemme 2.7 [Rhee and Won, 2006]

Le système (2.28) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices \bar{P} , D_i et $X \geq 0$ satisfaisant

$$P_i = \bar{P} + D_i > 0, \quad (2.54)$$

$$P_i A_i + A_i^T P_i + (s-1)X < 0, \quad (2.55)$$

$$P_i A_j + A_j^T P_i + P_j A_i + A_i^T P_j - 2X \leq 0, \quad i < j. \quad (2.56)$$

Pour $i, j = 1, \dots, r$ et $1 < s \leq r$.

s est le nombre maximal de règles floues actives simultanément.

2.6. Stabilisation des systèmes TS

2.6.1. Loi de commande PDC

La première loi de commande développée pour les systèmes TS est la loi de commande par compensation distribuée parallèle (ou PDC pour Parallel Distributed Compensation) introduite par [Wang et al.,1996]. Cette commande par retour d'état non linéaire possède les mêmes fonctions d'activation que le système TS et est définie comme suit

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) = K_h x(t), \quad (2.57)$$

$K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont les matrices des gains de retour d'état de chaque modèle local. La synthèse consiste donc à déterminer ces matrices pour que le système en boucle fermée ait certaines performances.

En substituant la loi de commande PDC (2.57) dans le système TS (2.7), le système en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + B_i K_j) x(t) = (A_h + B_h K_h) x(t). \quad (2.58)$$

Le lemme suivant présente des conditions suffisantes de stabilité du système (2.58).

Lemme 2.8 [Wang et al.,1996]

Le système (2.7) est asymptotiquement stable via la loi de commande (2.57) s'il existe une matrice X symétrique définie positive et des matrices M_j telles que les conditions LMIs suivantes sont vérifiées

$$A_i X + X A_i^T + B_i M_j + M_j^T B_i^T < 0, \quad i, j \in \{1, \dots, r\}. \quad (2.59)$$

Les gains de la loi de commande PDC sont donnés par

$$K_j = M_j X^{-1}. \quad (2.60)$$

Les conditions précédentes étant quelque peu contraignantes, plusieurs schémas de relaxation ont été proposés dans la littérature (voir §2.8).

2.6.2. Loi de commande non-PDC

Cette commande a été proposée dans l'article [Guerra & Vermeiren, 2004] et est donnée par

$$u(t) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i \right) \left(\sum_{j=1}^r h_j(z(t)) F_j \right)^{-1} x(t) = K_h F_h^{-1} x(t), \quad (2.61)$$

où $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices à déterminer.

En remplaçant la loi de commande (2.61) dans l'expression du système (2.7), le système en boucle fermée s'écrit alors comme suit

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left(A_i + B_i K_j \left(\sum_{k=1}^r h_k(z(t)) F_k \right)^{-1} \right) x(t) = (A_h + B_h K_h F_h^{-1}) x(t). \quad (2.62)$$

Les auteurs de [Jaadari et al., 2012] ont proposé des conditions quadratiques de synthèse en utilisant le lemme de relaxation de Finsler.

Lemme 2.9 [Jaadari et al., 2012]

Le modèle TS (2.7) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande (2.61) s'il existe $\varepsilon > 0$ et des matrices $P = P^T > 0$, K_j et F_j , $i \in \{1, \dots, r\}$ telles que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\Gamma_{ii} < 0, \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad (2.63)$$

$$\frac{2}{r-1} \Gamma_{ii} + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i \neq j, \quad (2.64)$$

avec

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \text{Sym}(A_i F_j + B_i K_j) & * \\ F_j - P + \varepsilon(A_i F_j + B_i K_j) & -2\varepsilon P \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Les conditions (2.63)-(2.64) ne sont pas strictement LMIs car elles dépendent du paramètre ε . Cependant, les auteurs de [Oliveira et al., 2011] ont préconisé de choisir ε dans une famille logarithmique telle que $\varepsilon = \{10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 10^5, 10^6\}$ afin d'éviter une recherche exhaustive de solutions faisables.

Dans le contexte des fonctions de Lyapunov non quadratiques dont la dérivée temporelle dépend de la dérivée des fonctions d'activations $h_i(z(t))$ et en supposant qu'il existe des scalaires φ_k tels que, $\forall k \in \{1, \dots, r\}, |\dot{h}_k(z(t))| < \varphi_k$, le lemme suivant a été proposé dans [Tanaka et al., 2003].

Lemme 2.10 [Tanaka et al., 2003]

Supposons qu'il existe φ_k tels que $\forall k \in \{1, \dots, r\}, |\dot{h}_k(z(t))| < \varphi_k$. Le système (2.7) est localement asymptotiquement stable par la loi de commande (2.61), avec $F_j = P_j$, s'il existe des matrices symétriques $P_j > 0$ telles que les conditions suivantes sont satisfaites avec :

$$\text{Sym}(A_i P_j + B_i K_j) - \sum_{k=1}^r \varphi_k P_k < 0. \quad (2.66)$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les conditions données par le Lemme 2.10 ne garantissent que la stabilité locale dans un espace d'état restreint appelé « domaine d'attraction ». Ainsi, plusieurs travaux ont porté sur la stabilisation locale et l'estimation du domaine d'attraction, citons à titre d'exemple [Guerra et al., 2012], [Lee et al., 2012].

2.7. Synthèse d'observateurs pour les systèmes TS

Dans cette section, nous rappelons les principaux résultats concernant la synthèse d'observateurs pour les systèmes TS, nous nous concentrons principalement sur ceux dont les variables de prémisses ne sont pas mesurables. Considérons pour cela le système TS suivant

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \quad (2.67)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (2.68)$$

Le multi-observateur de type Luenberger [Luenberger 1971] est le plus étudié dans la littérature, il est défini par

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \quad (2.69)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \quad (2.70)$$

La synthèse des gains de l'observateur L_i passe par l'étude de la stabilité de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (2.71)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état $\dot{e}(t)$ dépend fortement de la connaissance ou non des variables de décision intervenant dans les fonctions d'activation. On peut distinguer donc deux cas selon que les variables de prémisses soient mesurables ou non.

2.7.1. Observation des systèmes TS à Variables de Décision Mesurables (VDM)

Dans ce premier cas, le système et l'observateur utilisent les mêmes variables de décision ce qui permet de factoriser les fonctions d'activation lors de l'évaluation de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état qui s'écrit

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i - L_i C)e(t) = (A_h - L_h C)e(t). \quad (2.72)$$

La synthèse des gains L_i de l'observateur nécessite l'analyse de la stabilité du système TS autonome (2.72).

Dans [Patton et al., 1998], l'analyse de stabilité via une Fonction de Lyapunov Quadratique a mené aux conditions LMIs énoncées dans le lemme suivant :

Lemme 2.11 [Patton et al., 1998]

L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ et des matrices K_i telles que les conditions suivantes sont satisfaites

$$\text{Sym}(PA_i - K_i C) < 0. \quad (2.73)$$

Les gains L_i de l'observateur sont

$$L_i = P^{-1}K_i. \quad (2.74)$$

2.7.2. Observation des systèmes TS à Variables de Décision Non Mesurables (VDNM)

Dans le cas où les variables de décision ne sont pas accessibles à la mesure, il n'est plus possible d'écrire la dynamique de l'erreur d'estimation d'état sous forme d'un système TS autonome :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) - \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i C e(t)). \quad (2.75)$$

Les auteurs de [Bergsten and Palm, 2000] et [Bergsten et al., 2001] ont proposé des conditions de convergence de l'erreur d'estimation en se basant sur un observateur du type Thau-Luenberger [Thau, 1973]. Les fonctions d'activation sont supposées être de nature lipschitziennes.

Lemme 2.12 [Bergsten and Palm, 2000]

L'erreur d'estimation d'état entre le système et l'observateur converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe des matrices P , Q , des matrices K_i et un scalaire positif $\gamma > 0$ tels que :

$$\text{Sym}(PA_i - K_i C) < -Q, \quad (2.76)$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \gamma^2 I & P \\ P & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.77)$$

Dans [Ichalal, 2009], l'auteur a proposé deux méthodes pour la reconstruction d'état des systèmes non linéaires décrits par des modèles TS à VDNM. La première approche est basée sur les hypothèses de Lipschitz. Dans ce cadre, de nombreux travaux ont été menés [Ichalal et al., 2010], [Moodi et Bustan, 2018], [Xie et al., 2019]. La seconde approche fait appel à la norme \mathcal{L}_2 qui est définie comme suit

Définition 2.1

La norme \mathcal{L}_2 d'un signal $s(t)$ de carré intégrable est définie par

$$\|s(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} s(t)^T s(t) dt}. \quad (2.78)$$

Définition 2.2 (Gain \mathcal{L}_2)

La norme \mathcal{L}_2 induite d'un système est définie par

$$\sup_{\|u(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}, \quad (2.79)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie à énergie bornée, au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ du système considéré. Cette norme est une mesure du plus grand taux d'amplification énergétique de $u(t)$ sur $y(t)$.

Afin de mettre à profit l'approche \mathcal{L}_2 , le système observé dont les fonctions d'activation sont non mesurables (fonction des états du système) est réécrit sous forme pseudo-perturbée ou pseudo-incertaine.

Approche par pseudo-incertitudes bornées

Considérons le système TS dont les fonctions d'activation dépendent de l'état $x(t)$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)), \quad (2.80)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (2.81)$$

Le système précédent peut être réécrit sous la forme suivante

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \left[h_i(\hat{x}(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) + (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))) (A_i x(t) + B_i u(t)) \right]. \quad (2.82)$$

Les matrices suivantes sont alors définies

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^r (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))) A_i = A \Sigma_A(t) E_A, \quad (2.83)$$

$$\Delta B(t) = \sum_{i=1}^r (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))) B_i = B \Sigma_B(t) E_B, \quad (2.84)$$

où

$$A = [A_1 \quad \cdots \quad A_r], \quad \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_n \end{bmatrix}, \quad E_A = [I_n \quad \cdots \quad I_n]^T, \quad B = [B_1 \quad \cdots \quad B_r],$$

$$\Sigma_B(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_m \end{bmatrix}, \quad E_B = [I_m \quad \cdots \quad I_m]^T, \quad \delta_i(t) = h_i(x) - h_i(\hat{x}).$$

Grâce aux propriétés de convexité des fonctions d'activation, on peut écrire $-1 \leq \delta_i(t) \leq 1$. Ce qui permet de borner les termes incertains comme suit

$$\Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) \leq I, \quad (2.85)$$

$$\Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) \leq I. \quad (2.86)$$

Le système (2.80) devient alors

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t)) ((A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u(t)). \quad (2.87)$$

Le système TS à variables de décision non mesurables (2.87) se résume alors à un système incertain à variables de décision connues.

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est ainsi donnée

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t)) ((A_i - L_i C)e(t) + \Delta A(t)x(t) + \Delta B(t)u(t)). \quad (2.88)$$

En définissant le vecteur $e_a(t) = \begin{bmatrix} e^T(t) & x^T(t) \end{bmatrix}^T$, on obtient le système augmenté suivant

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\hat{x}(t)) h_j(x(t)) (\bar{A}_{ij}(t) e_a(t) + \bar{B}_j(t) u(t)), \quad (2.89)$$

où

$$\bar{A}_{ij}(t) = \begin{bmatrix} \Phi_i & \Delta A(t) \\ 0 & A_j \end{bmatrix}, \bar{B}_j(t) = \begin{bmatrix} \Delta B(t) \\ B_j \end{bmatrix}, \Phi_i = A_i - L_i C. \quad (2.90)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état dépendant de $e_a(t)$ et $u(t)$, le problème de synthèse de l'observateur (2.69) revient à calculer des gains L_i pour que

- les matrices $A_i - L_i C$ soit stables,
- l'erreur $e_a(t)$ soit le moins sensible à $u(t)$.

Lemme 2.13 [Ichalal, 2009]

Le système (2.89) est stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $u(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par γ , s'il existe deux matrices symétriques définies positives P_1 et P_2 , des matrices K_i , et des scalaires positifs λ_2, λ_3 et $\bar{\gamma}$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$

$$\begin{bmatrix} \psi_i & 0 & 0 & P_1 A & P_1 B \\ 0 & A_j^T P_2 + P_2 A_j + \lambda_2 E_A^T E_A & P_2 B_j & 0 & 0 \\ 0 & B_j^T P_2 & -\bar{\gamma} I + \lambda_3 E_B^T E_B & 0 & 0 \\ A^T P_1 & 0 & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ B^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.91)$$

où

$$\psi_i = \text{Sym}(P_1 A_i - K_i C) + I. \quad (2.92)$$

Les gains de l'observateur sont calculés par

$$L_i = P_1^{-1} K_i. \quad (2.93)$$

Le taux d'atténuation γ est obtenu par

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (2.94)$$

La preuve de ce lemme est principalement basée sur la condition de synthèse proposée dans [Boyd et al., 1994] assurant la convergence de $e_a(t)$ vers zéro et la bornitude par γ du gain \mathcal{L}_2 du transfert de $u(t)$ vers $e_a(t)$

$$\dot{V}(e_a(t)) + e_a^T(t) e_a(t) - \gamma^2 u(t)^T u(t) < 0. \quad (2.95)$$

Approche par pseudo-incertitudes constantes

Considérons le système TS suivant

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)), \quad (2.96)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)). \quad (2.97)$$

On ajoute et on soustrait le terme $\sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$ à l'équation (2.96)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) + \sum_{i=1}^r (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t)). \quad (2.98)$$

Grâce à la propriété de somme convexe, l'équation suivante est vérifiée

$$\sum_{i=1}^r (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))) X_i = \sum_{i,j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (X_i - X_j) = \sum_{i,j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) \Delta X_{ij}. \quad (2.99)$$

L'équation (2.98) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\dot{x}(t) = \sum_{i,j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) ((A_j + \Delta A_{ij}) x(t) + (B_j + \Delta B_{ij}) u(t)). \quad (2.100)$$

La sortie du système peut s'écrire de la même manière

$$y(t) = \sum_{i,k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) ((C_k + \Delta C_{ik}) x(t) + (D_k + \Delta D_{ik}) u(t)). \quad (2.101)$$

Le système (2.100)-(2.101) est décrit sous forme incertaine dont les incertitudes sont parfaitement connues et constantes.

L'observateur proposé est de la forme

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i,j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (A_j \hat{x}(t) + B_j u(t) + L_j (y(t) - \hat{y}(t))), \quad (2.102)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i,k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (C_k \hat{x}(t) + D_k u(t)). \quad (2.103)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'exprime alors comme suit

$$\dot{e}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) h_k(x(t)) (\Phi_{jk} e(t) + \Gamma_{ijk} x(t) + S_{ijk} u(t)), \quad (2.104)$$

où

$$\Phi_{jk} = A_j - L_j C_k,$$

$$\Gamma_{ijk} = \Delta A_{ij} - L_j \Delta C_{ik},$$

$$S_{ijk} = \Delta B_{ij} - L_j \Delta C_{ik}.$$

On considère l'état augmenté $\tilde{x} = \begin{bmatrix} e(t)^T & x(t)^T \end{bmatrix}^T$. Le système augmenté suivant est alors défini

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) h_k(x(t)) (\tilde{M}_{ijk} \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{ijk} u(t)), \quad (2.105)$$

$$\tilde{M}_{ijk} = \begin{bmatrix} \Phi_{jk} & \Gamma_{ijk} \\ 0 & A_i \end{bmatrix}, \tilde{B}_{ijk} = \begin{bmatrix} S_{ijk} \\ B_i \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Lemme 2.14 [Ichalal, 2009]

2 Sur les systèmes de Takagi-Sugeno

L'erreur d'estimation d'état (2.105) converge asymptotiquement vers zéro et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $u(t)$ vers $e(t)$ est borné s'il existe des matrices symétriques et définies positives P_1 et P_2 , des matrices K_i et un scalaire positif $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{bmatrix} X_{1jk} & \Theta_{ijk} & \Psi_{ijk} \\ \Theta_{ijk}^T & X_{2i} & P_2 B_i \\ \Psi_{ijk}^T & B_i^T P_2 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.107)$$

où

$$X_{1jk} = A_j^T P_1 + P_1 A_j - K_j C_k - C_k^T K_j^T + I,$$

$$X_{2i} = A_i^T P_2 + P_2 A_i,$$

$$\Theta_{ijk} = P_1 \Delta A_{ij} - K_j \Delta C_{ik},$$

$$\Psi_{ijk} = P_1 \Delta B_{ij} - K_j \Delta D_{ik}.$$

Les gains de l'observateur sont

$$L_j = P_1^{-1} K_j. \quad (2.108)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (2.109)$$

Approche par pseudo-perturbation

Le système TS défini par les équations (2.96)-(2.97) peut être réécrit comme

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + \omega_1(t)), \quad (2.110)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t))(C_i x(t) + D_i u(t) + \omega_2(t)), \quad (2.111)$$

avec

$$\omega_1(t) = \sum_{i=1}^r (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t)),$$

$$\omega_2(t) = \sum_{i=1}^r (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))(C_i x(t) + D_i u(t)).$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) ((A_i - L_i C_j) e(t) + \omega_1(t) - L_i \omega_2(t)). \quad (2.112)$$

Lemme 2.15 [Ichalal, 2009]

L'erreur d'estimation d'état (2.112) converge asymptotiquement vers zéro et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t) = \begin{bmatrix} \omega_1^T(t) & \omega_2^T(t) \end{bmatrix}^T$ vers $e(t)$ est borné par γ s'il existe une matrice symétrique définie positive P , des matrices K_i et un scalaire $\bar{\gamma}$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i - K_i C_j - C_j^T K_i^T & P & -K_i \\ P & -\bar{\gamma} I & 0 \\ -K_i^T & 0 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.113)$$

Les gains de l'observateur sont

$$L_i = P^{-1} K_i. \quad (2.114)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (2.115)$$

2.8. Réduction du conservatisme des conditions de synthèse des systèmes TS

Les problèmes d'analyse et de synthèse de correcteurs ou d'observateurs se réduisent souvent à garantir la négativité d'une matrice polytopique du type

$$X_{hh} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) X_{ij} < 0. \quad (2.116)$$

Pour assurer la négativité de la somme X_{hh} , l'approche la plus simple consiste à imposer la négativité de chaque terme X_{ij} pour $i, j \in \{1, \dots, r\}$. La seule propriété des fonctions d'activation utilisée est leur positivité, une grande partie de l'information est donc perdue. Les conditions de stabilité sont seulement suffisantes et non nécessaires. De plus, le problème de co-négativité des différents termes conduit dans la plupart du temps à des contraintes LMIs très conservatives. Dans ce contexte, plusieurs schémas de relaxation ont été proposés dont les plus connus sont présentés par les lemmes suivants.

Lemme 2.16 [Tanaka et Sano, 1994]

Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, \forall h_i > 0, \forall h_j > 0$, la condition (2.116) est vérifiée si les conditions suivantes le sont

$$\begin{cases} X_{ii} < 0 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, r, \\ X_{ij} + X_{ji} < 0 & \text{pour } i, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } i < j. \end{cases} \quad (2.117)$$

Lemme 2.17 [Tuan et al., 2001]

Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, \forall h_i > 0, \forall h_j > 0$, la condition (2.116) est vérifiée si les conditions suivantes le sont

$$\begin{cases} X_{ii} < 0 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, r, \\ \frac{2}{r-1} X_{ii} + X_{ij} + X_{ji} < 0 & \text{pour } i, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } 1 \leq i \neq j \leq r. \end{cases} \quad (2.118)$$

Lemme 2.18 [Liu and Zhang, 2003]

L'inégalité (2.116) est vérifiée s'il existe des matrices Y_{ii} et $Y_{ij} = Y_{ji}^T$ pour $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ telles que les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned}
 X_{ii} + Y_{ii} &< 0, \\
 X_{ij} + Y_{ij} + X_{ji} + Y_{ji} &< 0, \\
 \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1r} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{r1} & Y_{r2} & \cdots & Y_{rr} \end{bmatrix} &< 0.
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

2.9. Conclusion

Issue de la logique floue, les multi-modèles de Takagi-Sugeno ont connu un intérêt grandissant chez les automaticiens comme outil permettant d'exprimer le comportement non linéaire des systèmes par une interpolation de modèles linéaires autour de plusieurs points de fonctionnement. Ces multi-modèles peuvent être obtenus de trois manières différentes : par linéarisation autour de points de fonctionnement judicieusement choisis, par identification à partir de données expérimentales ou par décomposition en secteurs non linéaires. Cette dernière n'est pas unique pour le même système non linéaire ce qui peut conduire à des résultats différents en analyse et en synthèse.

Les résultats d'analyse de stabilité et de synthèse de correcteurs ou d'observateurs se basent principalement sur le choix d'une fonction de Lyapunov (quadratique ou non) aboutissant généralement à la résolution de conditions LMIs qui sont seulement suffisantes car seules les caractéristiques de positivité et de somme unitaire des fonctions d'activation sont prises en compte.

Quelques résultats importants sur la synthèse de commandes PDC et non PDC stabilisantes ont été présentés dans le cadre quadratique et non quadratique. Dans le contexte de la synthèse d'observateurs, on s'est surtout intéressé aux modèles TS à Variables de Décision Non Mesurables.

Bibliographie

- [Babuska, 1998] Babuska R., *Fuzzy modeling for control*. Control engineering technology and systems. Delft University of Technology, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [Bergsten and Palm, 2000] Bergsten, P. et Palm, R. (2000). Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems. In *9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, San Antonio, Texas, USA.
- [Bergsten et al., 2001] Bergsten, P., Palm, R., et Driankov, D. (2001). Fuzzy observers. In *10th IEEE International Fuzzy Systems Conference*, pages 700–703, Melbourne, Australia.
- [Bernal & Guerra, 2010] Bernal, M. and Guerra, T. M. (2010). Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi–Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(4) :815–822.
- [Blanco et al., 2001] Blanco, Y., Perruquetti, W., and Borne, P. (2001). Non quadratic stability of nonlinear systems in the takagi-sugeno form. In *Control Conference (ECC), 2001 European*, pages 3917–3922. IEEE.
- [Boyd et al., 1994] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., et Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in system and control theory*. Studies in Applied and Numerical Mathematics, Philadelphia.
- [Feng, 2006] Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *Fuzzy systems, IEEE Transactions on*, 14(5) :676–697.
- [Gasso, 2000] Gasso, K. (2000). *Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multimodèle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France

- [Guerra & Vermeiren, 2004] Guerra, T.M., Vermeiren, L., 2004. LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica* 40, 823–829.
- [Guerra et al., 2012] Guerra, T.-M., Bernal, M., Guelton, K., and Labiod, S. (2012). Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, 201 :40–54.
- [Ichalal, 2009] Ichalal, D. (2009). *Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- [Ichalal et al., 2010] Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., and Maquin, D. (2010). State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables. *IET Control Theory and Applications*, 4(5):897–908.
- [Jaadari et al., 2012] Jaadari, A., Guerra, T.-M., Sala, A., Bernal, M., and Guelton, K. (2012). New controllers and new designs for continuous-time Takagi-Sugeno models. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1–7, Brisbane, Australia.
- [Johansen et al., 2000] Johansen, T. A., Shorten, R., and Murray-Smith, R. (2000). On the interpretation and identification of dynamic takagi-sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(3) :297–313.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- [Lee et al., 2012] Lee, D. H., Park, J. B., and Joo, Y. H. (2012). A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. *Information Sciences*, 185(1) :230–248.
- [Liu and Zhang, 2003] Liu, X. and Zhang, Q. (2003). New approaches to h1 controller designs based on fuzzy observers for ts fuzzy systems via lmi. *Automatica*, 39(9) :1571–1582.
- [Luenberger 1971] Luenberger, D.G. (1971) An Introduction to Observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16, 596-620.
- [Marquez et al., 2013] Marquez, R., Guerra, T.-M., Kruszewski, A., and Bernal, M. (2013). Improvements on Nonquadratic Stabilization of Takagi-Sugeno Models via Line-Integral Lyapunov Functions. In *IFAC International Conference on Intelligent Control and Automation Science*, pages 473–478.
- [Moodi et Bustan, 2018] Moodi, H. and Bustan, D. (2018). Unmeasurable premise avoidance in T-S fuzzy observers. In 2017 5th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA), pages 144–149.
- [Morère, 2001] Morère, Y. (2001). *Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Valenciennes.
- [Mozelli et al., 2009] Mozelli, L. A., Palhares, R.M., Souza, F.O., and Mendes, E.M. A. M. (2009b). Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, 45 :1580–1583.
- [Ohtake et al., 2003] Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2003). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integr Comput-Aid E*, 10(4) :333_341.
- [Oliveira et al., 2011] Oliveira, R. C. C. F., Oliveira, M. C. D., and Peres, P. L. D. (2011). Robust State Feedback LMI Methods for Continuous-Time Linear Systems : Discussions, Extensions and Numerical Comparisons. In *IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, pages 1038–1043, Denver, USA.
- [Orjuela 2008] Orjuela, R. (2008). *Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- [Patton et al., 1998] R. J. Patton, J. Chen, and C. J. Lopez-Toribio. Fuzzy observer for nonlinear dynamic systems fault diagnosis. *IEEE Conference on Decision and Control*, 1:84 – 89, 1998.

- [Rhee and Won, 2006] Rhee, B. J. and Won, S. (2006). A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9) :1211–1228.
- [Takagi & Sugeno, 1985] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1) :116–132.
- [Tanaka & Sugeno, 1992] Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, 45(2) :135–156.
- [Tanaka & Wang, 2001] Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. John Wiley and Sons.
- [Tanaka and Sano, 1994] Tanaka, K. and Sano, M. (1994). A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 2(2) :119–134.
- [Tanaka et al., 1998] Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based designs. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 6(2) :250–265.
- [Tanaka et al., 2003] Tanaka, K., Hori, T., and Wang, H. O. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 11(4) :582–589.
- [Thau, 1973] Thau, F. E. (1973). Observing the state of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 17 :471–479.
- [Tuan et al., 2001] Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T., and Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 9(2) :324–332.
- [Wang et al., 1996] Wang, H. O., Tanaka, K., and Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 4(1) :14–23.
- [Xie et al., 2019] Xie, W.-B., Li, H., Wang, Z.-H., and Zhang, J. (2019). Observer-based controller design for a TS fuzzy system with unknown premise variables. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(4):907–915.
- [Zill and Cullen, 2000] D.G. Zill, M.R. Cullen, *Advanced Engineering Mathematics*, second ed., Jones and Bartlett, London, UK, 2000.

3

D-Observation des systèmes de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables

Sommaire

| | |
|---|------------|
| 3.1. Introduction | 39 |
| 3.2. Position du problème | 40 |
| 3.3. Estimation d'état | 43 |
| 3.3.1. Observateur proportionnel \mathcal{L}_2 | 43 |
| 3.3.2. Observateur proportionnel \mathcal{L}_2 basé sur le lemme de Finsler | 58 |
| 3.3.3. Observateur proportionnel lipschitzien à retour multiple de sorties | 77 |
| 3.4. Estimation d'état et des entrées inconnues | 84 |
| 3.4.1. Observateurs PI et PMI \mathcal{L}_2 basés sur le lemme de Finsler | 84 |
| 3.4.2. Observateur \mathcal{L}_2 d'état et des défauts actionneurs | 94 |
| 3.5. Conclusion | 105 |
| Bibliographie | 105 |

3.1. Introduction

Ce troisième chapitre est consacré à l'étude et à la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires décrits par des modèles de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables (VDNM).

Notre choix s'est porté sur les modèles TS à VDNM car ils présentent un certain nombre d'avantages, à savoir :

- une représentation exacte du système non linéaire étudié,
- la description d'une large classe de systèmes non linéaires,
- la possibilité d'utiliser un seul modèle TS dans la conception de bancs d'observateurs pour la localisation des défauts actionneurs et capteurs,
- l'amélioration de la sécurité de transmission dans le cadre du cryptage basé sur les multi-modèles chaotiques [Cherrier et al. 2007].

L'observation des systèmes TS à VDNM a connu un intérêt certain ces vingt dernières années [Ichalal, 2009], [Nagy-Kiss, 2010], [Bezzaoucha, 2013], [Srinivasarengan, 2018]. Elle reste un domaine de recherche encore ouvert et toujours d'actualité.

Dans [Yoneyama, 2009], la synthèse de filtres stables permettant l'estimation de l'état du système et la minimisation de l'effet des perturbations sur l'erreur d'estimation d'état est proposée. Les auteurs de [Ichalal et al., 2011] ont utilisé le théorème de la valeur moyenne pour la synthèse d'un observateur proportionnel. La méthode proposée a ensuite été étendue à l'atténuation des perturbations par l'analyse de gain \mathcal{L}_2 . Un contrôleur H_∞ robuste basé sur un observateur a été synthétisé dans [Asemani et Majd, 2013]. Les conditions suffisantes de stabilité exprimées sous forme de LMIs ont été démontrées en utilisant le lemme de Finsler. Les auteurs de [Moodi et Farrokhi, 2014] ont développé un contrôleur basé sur un observateur en tenant en compte des contraintes sur l'entrée. De plus, une fonction de Lyapunov floue a été utilisée afin de réduire le conservatisme des conditions de synthèse. Un observateur adaptatif a été développé dans [Liu et al., 2018] pour estimer l'état du système et les défauts actionneur en présence de perturbations.

Dans [Vu et Do, 2019], une nouvelle méthode de synthèse d'observateur pour les systèmes TS incertains a été examinée. La reconstruction des états et des défauts en présence d'incertitudes a été possible grâce à un observateur à entrées inconnues. De plus, l'observateur ne nécessite pas la connaissance des bornes des incertitudes

La synthèse d'observateurs que nous proposons de développer se base principalement sur la notion de \mathcal{D} -stabilité [Chilali et al., 1999]. Cette dernière permet une meilleure maîtrise de la dynamique des observateurs synthétisés en plaçant les valeurs propres des matrices liées à la dynamique de l'erreur d'estimation d'état dans une région LMI spécifique.

Dans la section 3.2, nous présentons la problématique de synthèse d'observateurs pour la classe de systèmes non linéaires décrits par des modèles TS à VDNM.

La section 3.3 est dédiée à l'estimation d'état sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité. En premier lieu, un multi-observateur proportionnel du type Luenberger basé sur le concept de \mathcal{D} -stabilité et sur l'analyse de gain \mathcal{L}_2 est examiné. Ensuite, le lemme de Finsler est utilisé afin de réduire le conservatisme des conditions de synthèse obtenues en introduisant des degrés de liberté supplémentaires. Enfin, un multi-observateur proportionnel basé sur les conditions de lipschitz est introduit. Ce dernier utilise un retour de sortie supplémentaire dans ses fonctions d'activation afin d'éliminer l'influence des constantes de lipschitz sur les conditions de synthèse.

Dans la section 3.4, on examine la synthèse \mathcal{D} -stable d'observateurs pour l'estimation d'état et des entrées inconnues. Dans un premier temps, les résultats obtenus dans la section 3.3 sont généralisés à la synthèse d'observateurs PI et PMI. Finalement, un observateur \mathcal{D} -stable permettant l'estimation simultanée des états et des défauts actionneurs est présenté.

3.2. Position du problème

Dans cette section, nous exposons les principales problématiques abordées dans ce chapitre en définissant les différents objectifs à atteindre.

Partie I : Estimation d'état des systèmes de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables

○ Synthèse d'un multi-observateur proportionnel

On considère les systèmes non linéaires décrits par le multi-modèle TS à VDNM suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur des entrées et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des sorties mesurables. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont les matrices d'état, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ représentent les matrices d'influence des entrées et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est la matrice d'observation ou de sorties. r est le nombre de sous-modèles. Les fonctions d'activation $h_i(x(t))$ dépendant de l'état vérifient la propriété de somme convexe

$$\begin{cases} 0 \leq h_i(x(t)) \leq 1, \\ \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1, \forall i \in \{1, \dots, r\}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Hypothèse 3.1

Les paires (A_i, C) sont supposées observables.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la synthèse d'un multi-observateur proportionnel de type Luenberger donné par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))), \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

où $\hat{x}(t)$ représente le vecteur d'état estimé. Les matrices de gain L_i sont déterminées de telle sorte que l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converge vers zéro avec une dynamique prédéfinie par un placement des valeurs propres des matrices locales $(A_i - L_i C)$.

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'écrit

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) - \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))). \quad (3.4)$$

Nous remarquons que les fonctions d'activation du système (3.1) et celles de l'observateur (3.3) dépendent de variables différentes $x(t)$ et $\hat{x}(t)$. Afin d'analyser la stabilité du système (3.4), on se propose de réécrire le système (3.1) sous forme pseudo-perturbée ou pseudo-incertaine dont les fonctions d'activation dépendent de l'état estimé $\hat{x}(t)$.

Les objectifs de synthèse du multi-observateur (3.3) peuvent être résumés par les points suivants

- (i) Placement des valeurs propres des matrices locales $(A_i - L_i C)$ dans une région LMI bien définie (\mathcal{D} -stabilité),
- (ii) Minimisation de l'effet des variables de décision non mesurables sur l'erreur d'estimation d'état en utilisant l'approche \mathcal{L}_2 ,
- (iii) Réduction du conservatisme des conditions de \mathcal{D} -stabilité proposées en se basant sur le lemme de Finsler.

○ **Synthèse d'un multi-observateur proportionnel lipschitzien**

Nous proposons, pour le système (3.1), la synthèse d'un observateur de type Luenberger utilisant un retour de sortie supplémentaire dans ses fonctions d'activation comme suit

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))), \\ \hat{z}(t) = H \hat{x}(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t). \end{cases} \quad (3.5)$$

Les fonctions d'activation $h_i(z(t))$ sont supposées lipschitziennes et les variables de prémisses sont de la forme $z(t)=Hx(t)$.

Les gains de l'observateur L_i et K sont calculés pour que la dynamique de l'erreur d'estimation d'état soit \mathcal{D} -stable et pour éliminer l'influence des constantes de lipschitz sur les conditions de synthèse.

Partie II : Estimation d'état et des entrées inconnues des systèmes de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables

○ **Synthèse de multi-observateurs PI et PMI**

Dans ce cas, on suppose que le système est soumis au vecteur d'entrées inconnues $d(t)$ influant sur les états du système et sur sa sortie à travers les matrices E_i et G

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)), \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t). \end{cases} \quad (3.6)$$

Nous proposons de développer des observateurs Proportionnel Intégral (PI) et Proportionnel Multi-Intégral (PMI) basés sur la \mathcal{D} -stabilité et le lemme de Finsler. Ces observateurs permettent l'estimation simultanée des états du système et des entrées inconnues sans recourir au découplage exact de ces dernières de l'erreur d'estimation d'état. Comme leur nom l'indique, les observateurs PI et PMI utilisent une ou plusieurs actions intégrales et se basent sur certaines hypothèses sur les entrées inconnues mais ne nécessitent pas de contraintes structurelles comme l'observateur à entrées inconnues.

○ **Estimation d'état et des défauts actionneurs**

Soit un système non linéaire défaillant décrit par le modèle TS suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i f_a(t)), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $f_a(t)$ est le vecteur des défauts actionneur et E_i est la matrice de répartition des défauts.

Nous proposons de généraliser l'observateur présenté dans [Zhang et al., 2008] aux systèmes TS à VDNM

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{f}_a(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \dot{\hat{f}}_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) \Gamma K_i ((\dot{y}(t) - \dot{\hat{y}}(t)) + \lambda (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \quad (3.8)$$

Les matrices de gains L_i, Γ et K_i de l'observateur sont déterminées de telle sorte à assurer la \mathcal{D} -stabilité des dynamiques des erreurs d'estimation d'état $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ et d'estimation des défauts $e_{f_a}(t) = f_a(t) - \hat{f}_a(t)$.

De plus, de nouvelles conditions LMIs permettant de s'affranchir de l'utilisation de contraintes égalités sont proposées.

3.3. Estimation d'état

3.3.1. Observateur Proportionnel \mathcal{L}_2

Dans cette partie, nous proposons la synthèse « \mathcal{D} -stable » du multi-observateur proportionnel défini en (3.3). Des conditions suffisantes de stabilité sont présentées sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires.

Selon la réécriture du système TS (3.1), trois approches de synthèse sont développées : *Approche par pseudo-perturbation*, *approche par pseudo-incertitudes constantes* et *approche par pseudo-incertitudes bornées*.

Mais avant de s'intéresser à la synthèse d'observateurs, nous présentons dans la section suivante quelques définitions et propriétés de base relatives au concept de \mathcal{D} -Stabilité.

3.3.1.1. Définitions et propriétés relatives à la \mathcal{D} -stabilité

Pour les systèmes linéaires et les systèmes polytopiques convexes, le concept de \mathcal{D} -stabilité consiste à vérifier si les valeurs propres d'une matrice sont comprises dans une région définie notée \mathcal{D} du plan complexe [Chilali et Gahinet, 1996].

Définition 3.1. (Région LMI) [Chilali et al., 1999]

Un sous-ensemble \mathcal{D} du plan complexe est appelé région LMI s'il existe une matrice symétrique $L = [L_{kl}] \in \mathbb{R}^{q \times q}$ et une matrice $M = [M_{kl}] \in \mathbb{R}^{q \times q}$ telles que :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(z) < 0\}, \quad (3.9)$$

où la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}}(z)$ est donnée par

$$f_{\mathcal{D}}(z) = L + zM + z^*M^T. \quad (3.10)$$

z^* désigne le conjugué de z .

En d'autres termes, une région LMI est une région du plan complexe qui est caractérisée par une LMI en fonction de z et z^* , ou de $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$. Les régions LMI sont donc des ensembles convexes.

Définition 3.2 (\mathcal{D} -stabilité) [Chilali et al., 1999]

Soit une région LMI définie par (3.9), un système non linéaire $\dot{x} = f(x)x$ est dit \mathcal{D} -stable s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ vérifiant $\frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x(t))}{V(x(t))} \in \mathcal{D}$, i.e :

$$L \otimes V(x(t)) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x(t)) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x(t)) < 0. \quad (3.11)$$

Dans la suite, nous considérons les régions LMI définies ci-dessous garantissant des performances liées à la rapidité, l'amortissement et le coût énergétique.

- Le demi-plan gauche avec un taux de décroissance β pour le critère de rapidité est défini par les matrices $L=2\beta$ et $M=1$. Si on substitue les matrices L et M dans l'inégalité (3.11), on retrouve la condition de stabilité exponentielle assurant un taux de décroissance β

$$\dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) < 0. \quad (3.12)$$

- Le secteur conique défini par son apex situé en $(\alpha, 0)$ et son angle θ par rapport à l'axe imaginaire pour le réglage du facteur d'amortissement. Les matrices définissant cette région LMI sont

$$L = \begin{bmatrix} -2\alpha \cos \theta & 0 \\ 0 & -2\alpha \cos \theta \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

- Le cercle défini par son centre $(-q, 0)$ et son rayon s permettant de considérer le coût énergétique en évitant un éloignement des valeurs propres dans la partie gauche du plan complexe. Il est défini par les matrices suivantes

$$L = \begin{bmatrix} -s & q \\ q & -s \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

L'intersection des trois régions LMI précédentes prend en considération les performances de rapidité, d'amortissement et de coût énergétique (Figure 3.1).

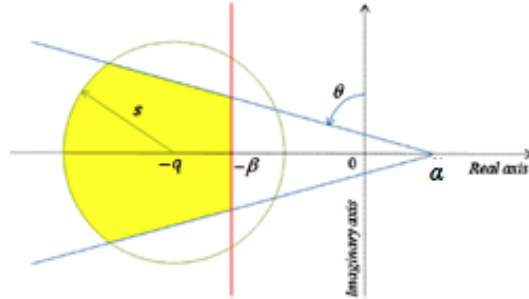


Fig.3.1. Région LMI usuelle.

Les matrices L et M de cette région sont données comme suit

$$L = \begin{bmatrix} 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & q \\ 0 & 0 & 0 & q & -s \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Les conditions de \mathcal{D} -stabilité sont exprimées en utilisant le produit de Kronecker dont les principales propriétés sont rappelées ci-dessous.

Propriétés du produit de Kronecker [Graham,1981], [Lancaster et Farahat, 1972]

Soit un scalaire $\mu \in \mathbb{R}$ et des matrices A, B et C de dimensions appropriées. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées

$$A \otimes (B + \mu C) = (A \otimes B) + \mu(A \otimes C), \quad (3.16)$$

$$(A + \mu B) \otimes C = (A \otimes C) + \mu(B \otimes C), \quad (3.17)$$

$$(A \otimes C)(B \otimes D) = (AB \otimes CD), \quad (3.18)$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T, \quad (3.19)$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}, \quad (3.20)$$

$$\|A \otimes B\|_2 = \|A\|_2 \cdot \|B\|_2. \quad (3.21)$$

3.3.1.2. Combinaison de la \mathcal{D} -stabilité et de l'approche \mathcal{L}_2

Dans cette section, nous proposons une condition générique de synthèse permettant de combiner le concept de \mathcal{D} -stabilité et la technique \mathcal{L}_2 .

Premièrement, nous modifions l'inégalité (3.11) comme suit

$$L \otimes V(x(t)) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x(t)) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x(t)) + (I \otimes y^T)(I \otimes y) - \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) < 0, \quad (3.22)$$

où $\omega(t)$ représente une perturbation et γ un scalaire positif.

On peut aussi écrire

$$L \otimes V(x(t)) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x(t)) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x(t)) < -(I \otimes y^T)(I \otimes y) + \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega). \quad (3.23)$$

L'inégalité précédente (3.23) est examinée selon la région LMI prise en compte.

Cas 1 : Demi-plan gauche avec un taux de décroissance β

Dans ce cas, $L=2\beta$ et $M=I$. L'inégalité (3.23) devient alors

$$2\beta V(x(t)) + \dot{V}(x(t)) < -(I \otimes y^T)(I \otimes y) + \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega). \quad (3.24)$$

On intègre l'inégalité (3.24) de 0 à T_f

$$2\beta \int_0^{T_f} V(x(t)) dt + \int_0^{T_f} \dot{V}(x(t)) dt < - \int_0^{T_f} (I \otimes y^T)(I \otimes y) dt + \gamma^2 \int_0^{T_f} (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) dt. \quad (3.25)$$

Le terme $2\beta \int_0^{T_f} V(x(t)) dt + \int_0^{T_f} \dot{V}(x(t)) dt$ étant positif, on aura

$$\int_0^{T_f} (I \otimes y^T)(I \otimes y) dt < \gamma^2 \int_0^{T_f} (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) dt. \quad (3.26)$$

Cas 2 : Cercle défini par son centre $(-q,0)$ et son rayon s

Rappelons que les matrices M et L de cette région sont définies par

$$L = \begin{bmatrix} -s & q \\ q & -s \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

On remplace L et M dans l'inégalité (3.23)

$$\begin{bmatrix} -sV(x(t)) & qV(x(t)) + \frac{1}{2}\dot{V}(x(t)) \\ qV(x(t)) + \frac{1}{2}\dot{V}(x(t)) & -sV(x(t)) \end{bmatrix} < -(I \otimes y^T)(I \otimes y) + \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega). \quad (3.28)$$

Lemme 3.1 (Complément de Schur) [Boyd et al., 1994]

Soient trois matrices constantes M , L et P de dimensions appropriées où M et P sont symétriques, alors $P > 0$ et $M + L^T P^{-1} L < 0$ si et seulement si

$$\begin{bmatrix} M & L^T \\ L & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (3.29)$$

Nous appliquons le complément de Schur au terme gauche de l'inégalité (3.28), ce qui nous donne

$$-sV(x(t)) + s^{-1}V^{-1}(x(t)) \left(qV(x(t)) + \frac{1}{2}\dot{V}(x(t)) \right) \left(qV(x(t)) + \frac{1}{2}\dot{V}(x(t)) \right) < -(I \otimes y^T)(I \otimes y) + \gamma^2(I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega), \quad (3.30)$$

$$\left(\frac{q^2}{s} - s \right) V(x(t)) + \frac{q}{s} \dot{V}(x(t)) + \frac{1}{4s} \frac{\dot{V}^2(x(t))}{V(x(t))} < -(I \otimes y^T)(I \otimes y) + \gamma^2(I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega). \quad (3.31)$$

ou encore

$$\left(\frac{q^2}{s} - s \right) V(x(t)) + \frac{q}{s} \dot{V}(x(t)) < -(I \otimes y^T)(I \otimes y) + \gamma^2(I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) - \frac{1}{4s} \frac{\dot{V}^2(x(t))}{V(x(t))}. \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{q^2}{s} - s \right) V(x(t)) + \frac{q}{s} \dot{V}(x(t)) < -(I \otimes y^T)(I \otimes y) + \gamma^2(I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega). \quad (3.33)$$

En intégrant l'inégalité précédente de 0 à T_f , on obtient

$$\left(\frac{q^2}{s} - s \right) \int_0^{T_f} V(x(t)) dt + \frac{q}{s} \int_0^{T_f} \dot{V}(x(t)) dt < - \int_0^{T_f} (I \otimes y^T)(I \otimes y) dt + \gamma^2 \int_0^{T_f} (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) dt. \quad (3.34)$$

Si on choisit $q \geq s$, le terme $\left(\frac{q^2}{s} - s \right) \int_0^{T_f} V(x(t)) dt + \frac{q}{s} \int_0^{T_f} \dot{V}(x(t)) dt$ est positif et

$$\int_0^{T_f} (I \otimes y^T)(I \otimes y) dt < \gamma^2 \int_0^{T_f} (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) dt. \quad (3.35)$$

Cas 3 : Secteur conique défini par son apex situé en $(\alpha, 0)$ et son angle θ par rapport à l'axe imaginaire

$$L = \begin{bmatrix} -2\alpha \cos \theta & 0 \\ 0 & -2\alpha \cos \theta \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Les matrices L et M sont remplacées dans l'inégalité (3.23)

$$\begin{bmatrix} -2\alpha \cos \theta V(x(t)) + \dot{V}(x(t)) \cos \theta & 0 \\ 0 & -2\alpha \cos \theta V(x(t)) + \dot{V}(x(t)) \cos \theta \end{bmatrix} < -(I \otimes y^T)(I \otimes y) + \gamma^2(I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega). \quad (3.37)$$

Le complément de Schur permet d'écrire

$$-2\alpha \cos \theta V(x(t)) + \dot{V}(x(t)) \cos \theta < -(I \otimes y^T)(I \otimes y) + \gamma^2(I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega). \quad (3.38)$$

Encore une fois, on intègre l'inégalité (3.38) de 0 à T_f

$$-2\alpha \cos \theta \int_0^{T_f} V(x(t))dt + \cos \theta \int_0^{T_f} \dot{V}(x(t))dt < - \int_0^{T_f} (I \otimes y^T)(I \otimes y)dt + \gamma^2 \int_0^{T_f} (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega)dt. \quad (3.39)$$

En choisissant $\alpha=0$ et θ de sorte que $\cos \theta > 0$, le terme

$$-2\alpha \cos \theta \int_0^{T_f} V(x(t))dt + \cos \theta \int_0^{T_f} \dot{V}(x(t))dt \text{ est positif, ce qui permet d'avoir}$$

$$\int_0^{T_f} (I \otimes y^T)(I \otimes y)dt < \gamma^2 \int_0^{T_f} (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega)dt. \quad (3.40)$$

Sachant que $\|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z^T(t)z(t)dt$, l'inégalité (3.40) s'exprime comme

$$\|I \otimes y\|_2^2 < \gamma^2 \|I \otimes \omega\|_2^2. \quad (3.41)$$

Grâce à la propriété du produit de Kronecker (3.21), on peut écrire

$$\|y\|_2^2 < \gamma^2 \|\omega\|_2^2. \quad (3.42)$$

Le scalaire positif γ représente donc le taux d'atténuation entre la perturbation $\omega(t)$ et la sortie $y(t)$. Par conséquent, l'inégalité (3.22) garantit la \mathcal{D} -stabilité du système et la bornitude du gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers la sortie $y(t)$.

Remarque 3.1

Le taux d'atténuation γ est aussi appelé performance H_∞ quadratique.

Remarque 3.2

La condition (3.22) peut être réécrite en ajoutant une matrice de pondération $Q > 0$ comme suit [Tseng et al., 2001]

$$L \otimes V(x(t)) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x(t)) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x(t)) + (I \otimes y^T)Q(I \otimes y) - \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) < 0. \quad (3.43)$$

Dans les paragraphes suivants, nous nous baserons sur l'inégalité (3.22) pour la synthèse d'un observateur proportionnel selon les trois approches citées plus haut.

3.3.1.3. Approche par pseudo-perturbation

Dans cette approche, le terme impliquant la différence entre la fonction d'activation dépendant de l'état et celle dépendant de son estimé est considéré comme une perturbation additive bornée $\omega(t)$.

Le système (3.1) peut alors s'écrire comme

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + \omega(t)), \quad (3.44)$$

où

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^r (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))) (A_i x(t) + B_i u(t)). \quad (3.45)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est

$$\dot{e}(t) = (A_{\hat{i}} - L_{\hat{i}} C) e(t) + \omega(t). \quad (3.46)$$

Hypothèse 3.2

Le système (3.1) est stable : les matrices A_i sont des matrices de Hurwitz.

Hypothèse 3.3

L'entrée $u(t)$ est bornée : $|u(t)| < \rho, \rho > 0$.

On constate que la dynamique de l'erreur d'estimation d'état dépend aussi de la pseudo-perturbation $\omega(t)$. Le problème de synthèse de l'observateur est la recherche des gains L_i pour que

- les matrices $A_i - L_i C$ soient \mathcal{D} -stables,
- l'erreur d'estimation d'état $e(t)$ soit le moins sensible possible à $\omega(t)$.

Théorème 3.1 [Ouhib et Kara, 2023]

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.46) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e(t)$ est borné s'il existe une matrice symétrique définie positive P , des matrices X_i et un scalaire positif $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$\begin{aligned} & \min_{P, X_i} \bar{\gamma} \\ & \begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_i C)) + I & * \\ M^T \otimes P & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$L_i = P^{-1} X_i. \quad (3.48)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (3.49)$$

Preuve. Considérons la Fonction de Lyapunov Quadratique suivante

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t), \quad P = P^T > 0. \quad (3.50)$$

Sa dérivée par rapport au temps s'écrit

$$\dot{V}(e(t)) = \text{Sym}(e^T(t) (PA_{\hat{i}} - PL_{\hat{i}} C) e(t) + e^T(t) P \omega(t)). \quad (3.51)$$

Le système (3.46) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e(t)$ est borné si

$$L \otimes V(e) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(e) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(e) + (I \otimes e^T)(I \otimes e) - \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) < 0. \quad (3.52)$$

En remplaçant, $V(e)$ et $\dot{V}(e)$ par leurs expressions respectives (3.50) et (3.51) dans l'inégalité (3.52), on obtient

$$L \otimes e^T P e + \text{Sym}(M \otimes (e^T (P A_{\hat{h}} - P L_{\hat{h}} C) e + e^T P \omega)) + (I \otimes e^T)(I \otimes e) - \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) < 0. \quad (3.53)$$

L'utilisation de la propriété (3.18) du produit de Kronecker dans l'inégalité précédente permet d'écrire

$$(I \otimes e^T)(L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P A_{\hat{h}} - P L_{\hat{h}} C)) + I)(I \otimes e) + \text{Sym}((I \otimes e^T)(M \otimes P)(I \otimes \omega)) - \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) < 0. \quad (3.54)$$

L'inégalité (3.54) sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} (I \otimes e^T) & (I \otimes \omega^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P A_{\hat{h}} - P L_{\hat{h}} C)) + I & * \\ M^T \otimes P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I \otimes e) \\ (I \otimes \omega) \end{bmatrix} < 0. \quad (3.55)$$

L'inégalité (3.55) est satisfaite si

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P A_{\hat{h}} - P L_{\hat{h}} C)) + I & * \\ M^T \otimes P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.56)$$

Finalement, la condition suffisante du Théorème 3.1 est obtenue en considérant les changements de variables $X_i = P L_i$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$. ■

3.3.1.4. Approche par pseudo-incertitudes constantes

Cette méthode est aussi basée sur l'introduction de $h_i(\hat{x}(t))$ dans l'équation du système ; la différence entre les fonctions d'activation est exprimée comme une incertitude constante.

L'expression du système (3.1) peut s'exprimer comme suit

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x})(A_i x + B_i u) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) - \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) \right) (A_i x + B_i u). \quad (3.57)$$

Grâce à la propriété de somme convexe des fonctions d'activation, les équations suivantes sont satisfaites

$$\sum_{i=1}^r (h_i(x) - h_i(\hat{x})) A_i = \sum_{i,j=1}^r h_i(x) h_j(\hat{x}) (A_i - A_j) = \sum_{i,j=1}^r h_i(x) h_j(\hat{x}) \Delta A_{ij}, \quad (3.58)$$

$$\sum_{i=1}^r (h_i(x) - h_i(\hat{x}))B_i = \sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(\hat{x})(B_i - B_j) = \sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(\hat{x})\Delta B_{ij}. \quad (3.59)$$

Par conséquent, l'équation (3.57) devient

$$\dot{x} = \sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(\hat{x})\left((A_j + \Delta A_{ij})x + (B_j + \Delta B_{ij})u\right). \quad (3.60)$$

On écrit l'observateur (3.3) sous la même forme

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i,j=1}^r h_i(x)h_j(\hat{x})\left(A_j\hat{x} + B_j u + L_j(y - \hat{y})\right). \quad (3.61)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est

$$\dot{e} = (A_{\hat{h}} - L_{\hat{h}}C)e + \Delta A_{\hat{h}\hat{h}}x + \Delta B_{\hat{h}\hat{h}}u = (A_{\hat{h}} - L_{\hat{h}}C)e + \begin{bmatrix} \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} & \Delta B_{\hat{h}\hat{h}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

L'objectif de synthèse est donc de déterminer les gains L_i pour que les matrices $(A_i - L_i C)$ soient \mathcal{D} -stables tout en atténuant l'influence de $u(t)$ et de $x(t)$ sur l'erreur $e(t)$.

Théorème 3.2

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.62) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t) = [x^T(t) \ u^T(t)]^T$ vers $e(t)$ est borné s'il existe une matrice symétrique définie positive P , des matrices X_j et un scalaire positif $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$

$$\min_{P, X_j} \bar{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_j - X_j C)) + I & * & * \\ M^T \otimes \Delta A_{ij}^T P & -\bar{\gamma}I & 0 \\ M^T \otimes \Delta B_{ij}^T P & 0 & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.63)$$

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$L_j = P^{-1}X_j. \quad (3.64)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (3.65)$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle du Théorème 3.1. Elle est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov quadratique (3.50) et sur la condition de synthèse

$$L \otimes V(e) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(e) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(e) + (I \otimes e^T)(I \otimes e) - \gamma^2 (I \otimes x^T)(I \otimes x) - \gamma^2 (I \otimes u^T)(I \otimes u) < 0. \quad (3.66)$$

■

3.3.1.5. Approche par pseudo-incertitudes bornées

Définissons d'abord les matrices suivantes

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^r (h_i(x) - h_i(\hat{x})) A_i = A \Sigma_A(t) E_A, \quad (3.67)$$

$$\Delta B(t) = \sum_{i=1}^r (h_i(x) - h_i(\hat{x})) B_i = B \Sigma_B(t) E_B, \quad (3.68)$$

où

$$A = [A_1 \quad \dots \quad A_M], \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_M(t) I_n \end{bmatrix}, E_A = [I_n; \dots; I_n]$$

$$B = [B_1 \quad \dots \quad B_M], \Sigma_B(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_M(t) I_m \end{bmatrix}, E_B = [I_m; \dots; I_m]$$

$$\delta_i(t) = h_i(x) - h_i(\hat{x}).$$

La propriété de convexité des fonctions d'activation permet d'écrire

$$-1 \leq \delta_i(t) \leq 1. \quad (3.69)$$

Par conséquent,

$$\Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) \leq I, \quad (3.70)$$

$$\Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) \leq I. \quad (3.71)$$

Le système (3.1) s'exprime alors comme un système incertain dont les incertitudes sont bornées

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) ((A_i + \Delta A(t))x + (B_i + \Delta B(t))u). \quad (3.72)$$

On en déduit aisément l'expression de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$\dot{e} = (A_h - L_h C)e + \Delta A(t)x + \Delta B(t)u = (A_h - L_h C)e + [\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Théorème 3.3

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.73) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t) = [x^T(t) \quad u^T(t)]^T$ vers $e(t)$ est borné s'il existe une matrice

symétrique définie positive P , des matrices X_i et des scalaires positifs λ_1, λ_2 et $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$\min_{P, X_i, \lambda_1, \lambda_2} \bar{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_i C)) + I & 0 & 0 & * & * \\ 0 & -\bar{\gamma}I + \lambda_1(I \otimes E_A^T E_A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\gamma}I + \lambda_2(I \otimes E_B^T E_B) & 0 & 0 \\ M^T \otimes A^T P & 0 & 0 & -\lambda_1 I & 0 \\ M \otimes B^T P & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.74)$$

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$L_i = P^{-1} X_i. \quad (3.75)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (3.76)$$

Preuve. En suivant les mêmes étapes que précédemment, on aboutit à la condition suffisante

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_i C)) + I & * & * \\ M^T \otimes \Delta A^T(t) P & -\bar{\gamma}I & 0 \\ M^T \otimes \Delta B^T(t) P & 0 & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.77)$$

Cette condition ne peut être résolue car les incertitudes $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$ dépendent du temps. Pour cette raison, nous isolons ces dernières des termes constants.

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_i C)) + I & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\gamma}I & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} + \Omega(t) < 0, \quad (3.78)$$

avec

$$\Omega(t) = \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} M \otimes PA \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \otimes \Sigma_A(t) E_A & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M \otimes PB \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \otimes \Sigma_B(t) E_B \end{bmatrix} \right\} < 0. \quad (3.79)$$

Lemme 3.2 (Inégalité de Young) [Xie et De Souza, 1992]

Pour toutes les matrices X et Y de dimensions appropriées, la propriété suivante est vérifiée

$$\text{Sym}(X^T Y) \leq X^T \Lambda^{-1} X + Y^T \Lambda Y, \quad \Lambda > 0. \quad (3.80)$$

En utilisant la relation de Young, la matrice $\Omega(t)$ peut être majorée comme suit

$$\Omega(t) \leq \begin{bmatrix} M \otimes PA \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1^{-1} I \begin{bmatrix} M^T \otimes A^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \otimes E_A^T \Sigma_A^T(t) \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 I \begin{bmatrix} 0 & I \otimes \Sigma_A(t) E_A & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M \otimes PB \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_2^{-1} I \begin{bmatrix} M^T \otimes B^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \otimes E_B^T \Sigma_B^T(t) \end{bmatrix} \lambda_2 I \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \otimes \Sigma_B(t) E_B \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

L'application du complément de Schur à l'inégalité (3.78) avec la matrice $\Omega(t)$ bornée par (3.81) permet d'aboutir à la contrainte (3.74) du Théorème 3.3. ■

Remarque 3.3

Dans les approches par pseudo-incertitudes, nous n'avons pas considéré le système augmenté $e_a(t) = [e(t)^T \ x(t)^T]^T$ car nous avons constaté que les conditions obtenues requièrent la \mathcal{D} -stabilité des matrices A_i , ce qui constitue une vraie source de conservatisme pour les conditions de synthèse.

Exemple 3.1 : Application des Théorèmes 3.1-3.3 à un exemple académique

Soit le système TS composé de deux modèles locaux

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) (A_i x + B_i u), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (3.82)$$

Les matrices du système sont

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,25 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les conditions initiales du système et celles de l'observateur sont $x(0) = [0,5 \quad -0,5 \quad 0,7]^T$ et $\hat{x}(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ respectivement.

Les fonctions d'activation sont données par

$$h_1(x) = \frac{1 - \tanh(x_1)}{2}, h_2(x) = 1 - h_1(x) = \frac{1 + \tanh(x_1)}{2}. \quad (3.83)$$

Afin de synthétiser les gains L_i de l'observateur, nous considérons la région LMI de la Figure 3.1.

Test du Théorème 3.1 : La résolution des contraintes (3.47) pour $\beta=13$, $\alpha=0$, $\theta=\pi/2.34$, $s=5$ et $q=17$ donne les matrices suivantes

$$P = \begin{bmatrix} 10.2960 & 14.5888 & 19.2115 \\ 14.5888 & 47.3346 & 39.0586 \\ 19.2115 & 39.0586 & 42.2637 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 28.7689 & -5.4524 \\ 18.1149 & -17.5351 \\ -15.1003 & 14.0057 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 30.2864 & -5.4159 \\ 23.1979 & -15.2254 \\ -19.5869 & 12.8739 \end{bmatrix}.$$

Le taux optimal d'atténuation est $\gamma_{min} = 4,2702$.

Les états réels et estimés, les erreurs d'estimation d'état et la distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC sont illustrés par les Figures 3.2-3.4.

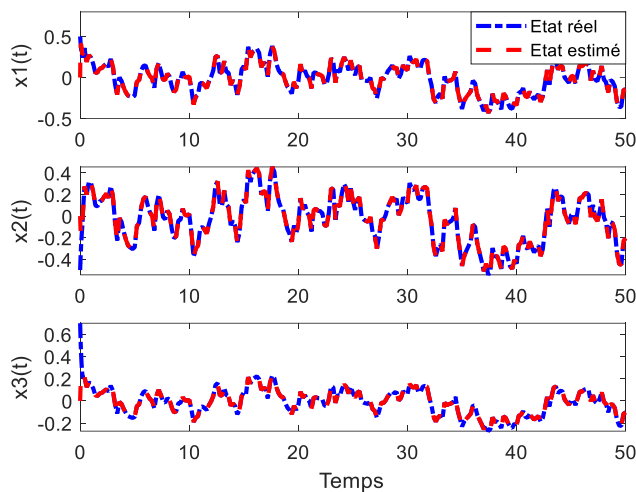


Fig.3.2. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.1).

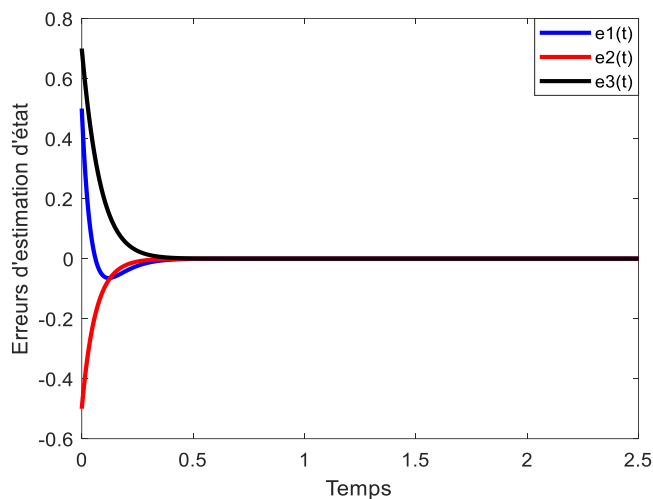


Fig.3.3. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.1).

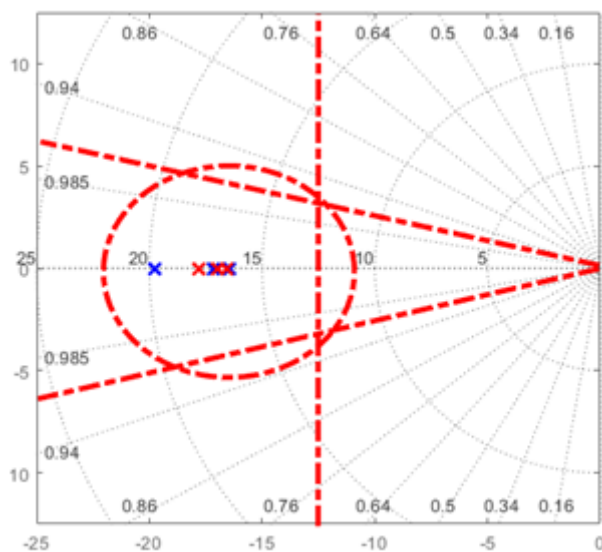


Fig.3.4. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.1).

Les pseudo-perturbations $\omega(t)$ sont représentées par la Figure 3.5.

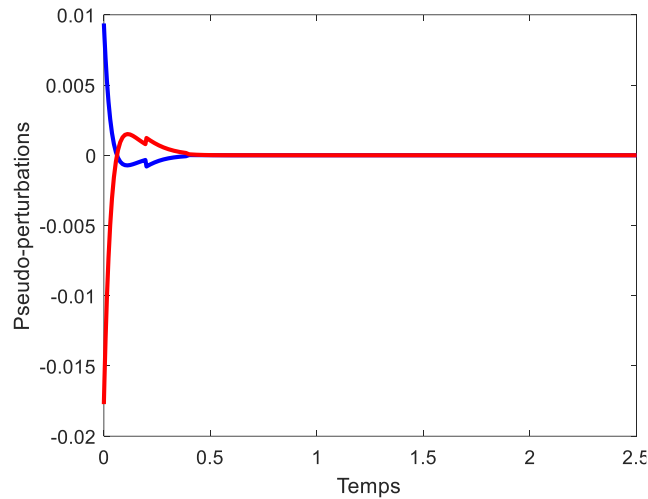


Fig.3.5. Pseudo-perturbations (Théorème 3.1).

Test du Théorème 3.2 : La résolution des contraintes (3.63) aboutit aux matrices

$$P = \begin{bmatrix} 14.0064 & 18.1292 & 25.3707 \\ 18.1292 & 46.3146 & 42.4022 \\ 25.3707 & 42.4022 & 51.1364 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 27.3755 & -1.8567 \\ 17.1832 & -16.0791 \\ -13.5355 & 10.9473 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 29.4841 & -1.7506 \\ 22.8881 & -14.2149 \\ -18.9245 & 10.2656 \end{bmatrix}.$$

Le taux d'atténuation optimal est $\gamma_{min} = 11,9581$.

Les résultats de simulation sont représentés par les Figures 3.6-3.8.

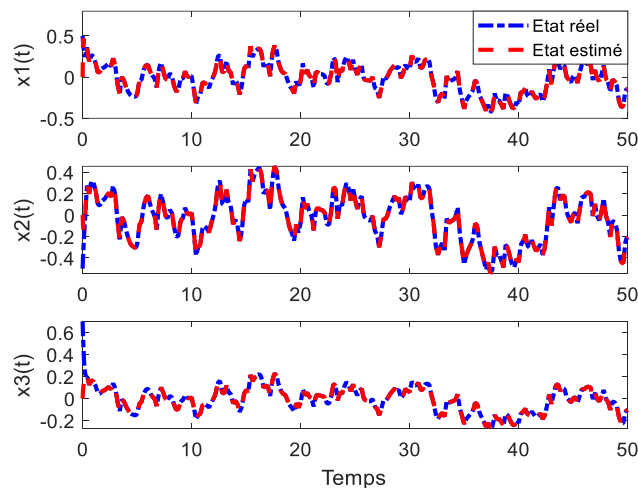


Fig.3.6. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.2).

Test du Théorème 3.3 : L'application du Théorème 3.3 donne les matrices

$$P = \begin{bmatrix} 10.5226 & 15.4903 & 19.6021 \\ 15.4903 & 49.8758 & 40.6390 \\ 19.6021 & 40.6390 & 42.7864 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 30.3245 & -6.6703 \\ 18.6632 & -17.8720 \\ -16.3279 & 14.8704 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 30.8042 & -5.3784 \\ 23.9142 & -16.3121 \\ -20.5498 & 13.9861 \end{bmatrix}.$$

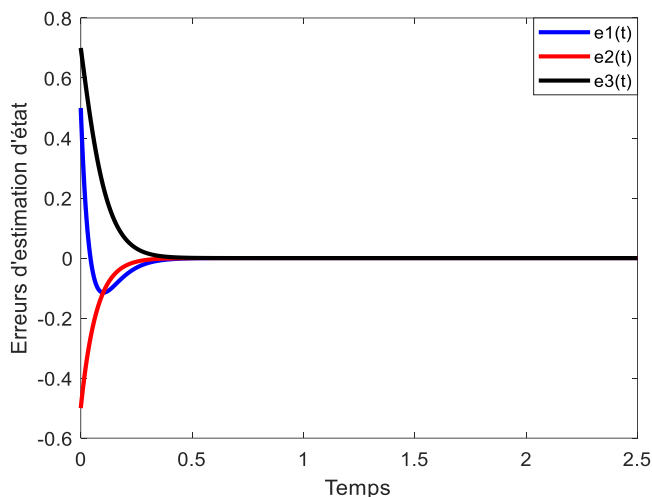


Fig.3.7. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.2).

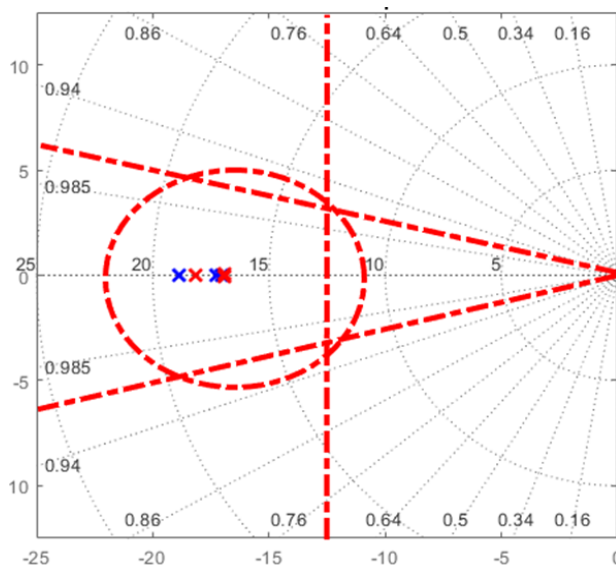


Fig.3.8. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.2).

Le taux d'atténuation optimal est $\gamma_{min} = 44,1722$.

Les Figures 3.9-3.11 montrent les résultats du Théorème 3.3.

Les résultats de simulation présentés sont satisfaisants ; les erreurs d'estimation d'état convergent vers zéro et les valeurs propres des matrices locales A_i-L_iC sont contenues dans la région LMI souhaitée. Contrairement à la stabilité asymptotique ($L=0, M=1$), la \mathcal{D} -stabilité permet une meilleure maîtrise de la dynamique de l'observateur synthétisé.

Cependant, les approches proposées présentent un certain degré de conservatisme surtout pour les systèmes ayant un nombre élevé de modèles locaux (du fait de l'utilisation d'une matrice commune dans la fonction de Lyapunov). Afin d'aboutir à des contraintes de \mathcal{D} -stabilité plus relâchées, nous proposons dans la section suivante l'utilisation du Lemme de Finsler [Jaadari et al., 2012] dans la synthèse de l'observateur proportionnel (3.3).

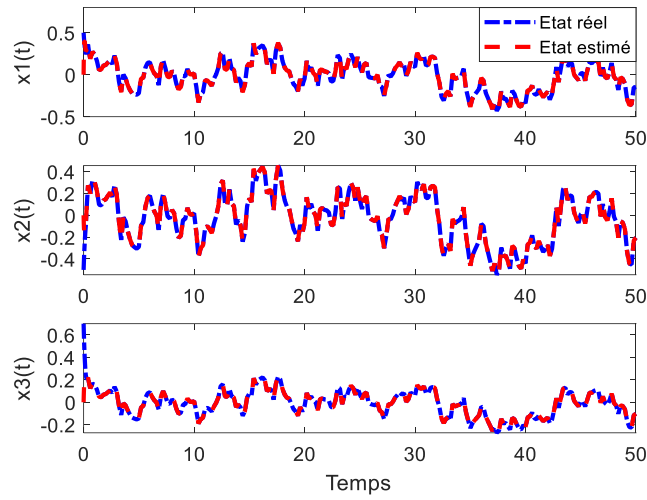


Fig.3.9. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.3).

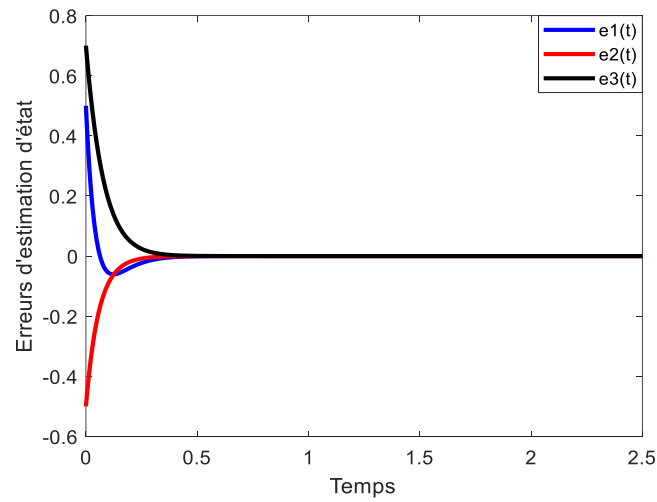


Fig.3.10. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.3).

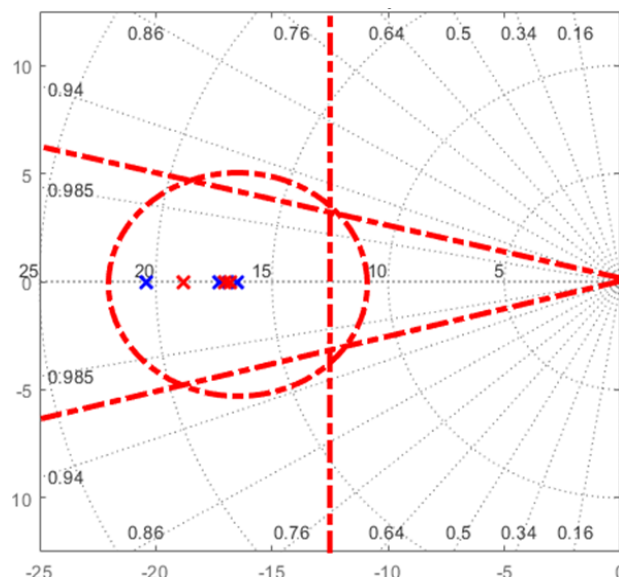


Fig.3.11. Distribution des valeurs propres des matrices $A_i - L_i C$ (Théorème 3.3).

3.3.2. Observateur Proportionnel \mathcal{L}_2 basé le lemme de Finsler

Dans cette partie, nous proposons des conditions moins conservatives de synthèse de l'observateur proportionnel via l'utilisation du lemme de Finsler. Ce dernier permet de relaxer les conditions de \mathcal{D} -stabilité grâce à l'introduction de variables de décision supplémentaires augmentant ainsi le nombre de degrés de liberté ce qui permet d'améliorer les trois approches proposées ci-dessus.

3.3.2.1. Approche par pseudo-perturbation

Rappelons l'expression de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état utilisée dans l'approche par pseudo-perturbation

$$\dot{e}(t) = (A_{\tilde{h}} - L_{\tilde{h}}C)e(t) + \omega(t). \quad (3.84)$$

Les hypothèses 3.2 et 3.3 sont supposées être vérifiées.

Théorème 3.4 [Ouhib et Kara, 2023]

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.84) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e(t)$ est borné s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$, une matrice symétrique définie positive P , des matrices X_i , Y_i , V_i et un scalaire positif $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$\min_{P, X_i, Y_i, V_i} \bar{\gamma} \left[\begin{array}{ccccccc} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_iC)) + I & * & * & 0 & * & 0 & \\ M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_iC) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_i Y_i^T) & * & * & * & * & \\ M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_iC) & -(M^T \otimes \varepsilon V_i^T) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon V_i) & 0 & * & 0 & \\ 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_i^T) & 0 & \bar{\gamma} I & 0 & 0 & \\ M^T \otimes P & M^T \otimes \varepsilon P & M^T \otimes \varepsilon P & 0 & -G & 0 & \\ 0 & I \otimes Y_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -G^{-1} \end{array} \right] < 0, \quad (3.85)$$

où $G > 0$.

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$L_i = P^{-1} X_i. \quad (3.86)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (3.87)$$

Preuve. A partir de l'expression (3.84), on peut écrire

$$(M \otimes \dot{e}) = M \otimes ((A_{\tilde{h}} - L_{\tilde{h}}C)e) + (M \otimes \omega). \quad (3.88)$$

En utilisant la propriété (3.18) du produit de Kronecker, on obtient

$$(M \otimes I)(I \otimes \dot{e}) = (M \otimes (A_{\tilde{h}} - L_{\tilde{h}}C))(I \otimes e) + (M \otimes I)(I \otimes \omega). \quad (3.89)$$

L'égalité précédente peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} M \otimes (A_{\hat{h}} - L_{\hat{h}}C) & (M \otimes I) & -(M \otimes I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I \otimes e) \\ (I \otimes \omega) \\ (I \otimes \dot{e}) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.90)$$

Rappelons que le système (3.84) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e(t)$ est borné si

$$L \otimes V(e) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(e) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(e) + (I \otimes e^T)(I \otimes e) - \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) < 0. \quad (3.91)$$

On remplace $V(e)$ et $\dot{V}(e)$ par leurs expressions respectives $e^T P e$ et $\text{Sym}(e^T P \dot{e})$ dans l'inégalité précédente

$$(I \otimes e^T)(L \otimes P)(I \otimes e) + (I \otimes e^T)(M \otimes P)(I \otimes \dot{e}) + (I \otimes \dot{e}^T)(M^T \otimes P)(I \otimes e) + (I \otimes e^T)(I \otimes e) - \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) < 0. \quad (3.92)$$

L'inégalité (3.92) sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} (I \otimes e^T) & (I \otimes \omega^T) & (I \otimes \dot{e}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \otimes P + I & 0 & * \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ M^T \otimes P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I \otimes e) \\ (I \otimes \omega) \\ (I \otimes \dot{e}) \end{bmatrix} < 0. \quad (3.93)$$

Lemme 3.3 (Lemme de Finsler)[Jaadari et al., 2012]

Soient un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et des matrices $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que $\text{rang}(R) < n$, les propositions suivantes sont équivalentes

$$a) x^T Q x < 0, \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n; x \neq 0, R x = 0\}, \quad (3.94)$$

$$b) \exists Y \in \mathbb{R}^{n \times m}; Q + Y R + R^T Y^T < 0. \quad (3.95)$$

En utilisant le lemme de Finsler, l'inégalité (3.93) sous la contrainte (3.90) donne

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + I & 0 & * \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ M^T \otimes P & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \otimes (A_{\hat{h}} - L_{\hat{h}}C) & (M \otimes I) & -(M \otimes I) \end{bmatrix} + (*) < 0. \quad (3.96)$$

Soient $U_1 = (I \otimes P)$, $U_2 = (I \otimes \varepsilon Y_{\hat{h}}^{-1} P)$ et $U_3 = (I \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}}^{-1} P)$ avec $\varepsilon > 0$, l'expression précédente devient

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P A_{\hat{h}} - P L_{\hat{h}} C)) + I & & & * & * \\ \hline (M^T \otimes P) + M \otimes (\varepsilon Y_{\hat{h}}^{-1} P A_{\hat{h}} - \varepsilon Y_{\hat{h}}^{-1} P L_{\hat{h}} C) & & -\gamma^2 I + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon Y_{\hat{h}}^{-1} P) & & * \\ M \otimes (\varepsilon Z_{\hat{h}}^{-1} P A_{\hat{h}} - \varepsilon Z_{\hat{h}}^{-1} P L_{\hat{h}} C) & & (M \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}}^{-1} P) - (M^T \otimes \varepsilon P Y_{\hat{h}}^{-T}) & & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}}^{-1} P) \end{array} \right] < 0. \quad (3.97)$$

L'inégalité précédente est divisée comme indiqué ci-dessus

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12}^T & T_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.98)$$

Soit

$$N = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}, \quad (3.99)$$

et

$$Q = \begin{bmatrix} (I \otimes Y_h^T) & 0 \\ 0 & (I \otimes Z_h^T) \end{bmatrix}. \quad (3.100)$$

Lemme 3.4 (Congruence) [Boyd et al., 1994]

Soient deux matrices T et N , si T est définie négative (resp. positive) et N est une matrice de plein rang, alors la matrice $N^T T N$ est définie négative (resp. positive).

La transformation de congruence (Lemme 3.4) permet d'obtenir les résultats suivants

$$N^T T N < 0, \quad (3.101)$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} Q \\ Q^T T_{12}^T & Q^T T_{22} Q \end{bmatrix} < 0. \quad (3.102)$$

Après substitution de T_{11} , T_{12} , T_{22} et Q , on a

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h - PL_h C)) + I & * & * \\ (M^T \otimes Y_h P) + M \otimes (\varepsilon PA_h - \varepsilon PL_h C) & -\gamma^2 (I \otimes Y_h)(I \otimes Y_h^T) + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon P Y_h^T) & * \\ M \otimes (\varepsilon PA_h - \varepsilon PL_h C) & (M \otimes \varepsilon P Y_h^T) - (M^T \otimes \varepsilon Z_h P) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon P Z_h^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (3.103)$$

Remarque 3.4

Considérons l'inégalité matricielle bilinéaire (BMI)

$$P - X^T S X < 0, S > 0. \quad (3.104)$$

La relation de Young peut être utilisée pour obtenir une LMI en X (dans le cas où la variable Y est fixe)

$$P - X^T Y - Y^T X + Y^T S^{-1} Y < 0. \quad (3.105)$$

En se basant sur la remarque précédente, l'élément (2,2) de l'inégalité (3.103) peut être majoré comme suit

$$\begin{aligned} \text{Sym}(M \otimes \varepsilon P Y_h^T) - \gamma^2 (I \otimes Y_h)(I \otimes Y_h^T) &\leq \text{Sym}(M \otimes \varepsilon P Y_h^T) - (I \otimes Y_h)(M^T \otimes \varepsilon S_h^T) - (M \otimes \varepsilon S_h)(I \otimes Y_h^T) + \\ &\gamma^{-2} (M \otimes \varepsilon S_h)(M^T \otimes \varepsilon S_h^T). \end{aligned} \quad (3.106)$$

L'inégalité (3.103) devient alors

$$\left[\begin{array}{ccc} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}}C)) + I & * & * \\ (M^T \otimes Y_{\hat{h}}P) + M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & \text{Sym}(M \otimes \varepsilon PY_{\hat{h}}^T) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}Y_{\hat{h}}^T) + \gamma^{-2}(M \otimes \varepsilon S_{\hat{h}})(M^T \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}^T) & * \\ M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & (M \otimes \varepsilon PY_{\hat{h}}^T) - (M^T \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}}P) & * \\ * & & * \\ * & & * \\ -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon PZ_{\hat{h}}^T) & & \end{array} \right] < 0. \quad (3.107)$$

L'inégalité (3.107) peut s'écrire comme suit

$$\left[\begin{array}{ccc} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}}C)) + I & * & * \\ (M^T \otimes Y_{\hat{h}}P) + M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & \text{Sym}(M \otimes \varepsilon PY_{\hat{h}}^T) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}Y_{\hat{h}}^T) & * \\ M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & (M \otimes \varepsilon PY_{\hat{h}}^T) - (M^T \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}}P) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon PZ_{\hat{h}}^T) \end{array} \right] + \gamma^{-2} \left[\begin{array}{c} 0 \\ (M \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}) \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}^T) & 0 \end{array} \right] < 0. \quad (3.108)$$

L'application du Lemme de Schur à l'inégalité (3.108) donne

$$\left[\begin{array}{ccc} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}}C)) + I & * & * & 0 \\ (M^T \otimes Y_{\hat{h}}P) + M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & \text{Sym}(M \otimes \varepsilon PY_{\hat{h}}^T) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}Y_{\hat{h}}^T) & * & * \\ M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & (M \otimes \varepsilon PY_{\hat{h}}^T) - (M^T \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}}P) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon PZ_{\hat{h}}^T) & 0 \\ 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}^T) & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] < 0. \quad (3.109)$$

L'inégalité (3.109) peut encore être exprimée comme suit

$$\left[\begin{array}{ccc} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}}C)) + I & * & * & 0 \\ M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}Y_{\hat{h}}^T) & * & * \\ M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & -(M^T \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}}P) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon PZ_{\hat{h}}^T) & 0 \\ 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}^T) & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] + \Omega < 0, \quad (3.110)$$

où la matrice Ω est donnée par

$$\Omega = \text{Sym} \left\{ \left[\begin{array}{c} M \otimes P \\ M \otimes \varepsilon P \\ M \otimes \varepsilon P \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & I \otimes Y_{\hat{h}}^T & 0 & 0 \end{array} \right] \right\}. \quad (3.111)$$

L'inégalité de Young permet d'écrire

$$\Omega \leq \begin{bmatrix} M \otimes P \\ M \otimes \varepsilon P \\ M \otimes \varepsilon P \\ 0 \end{bmatrix} G^{-1} \begin{bmatrix} M^T \otimes P & M^T \otimes \varepsilon P & M^T \otimes \varepsilon P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \otimes Y_h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 0 & I \otimes Y_h^T & 0 & 0 \end{bmatrix} G > 0. \quad (3.112)$$

Le complément de Schur est encore une fois appliqué à l'inégalité (3.110) avec la matrice Ω majorée par (3.112)

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h - PL_h C)) + I & * & * & 0 & * & 0 \\ M \otimes (\varepsilon PA_h - \varepsilon PL_h C) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_h Y_h^T) & * & * & * & * \\ M \otimes (\varepsilon PA_h - \varepsilon PL_h C) & -(M^T \otimes \varepsilon Z_h P) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon P Z_h^T) & 0 & * & 0 \\ 0 & (M^T \otimes S_h^T) & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ (M^T \otimes P) & (M^T \otimes \varepsilon P) & (M^T \otimes \varepsilon P) & 0 & -G & 0 \\ 0 & I \otimes Y_h^T & 0 & 0 & 0 & -G^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.113)$$

Finalement, la condition suffisante (3.85) est obtenue en utilisant les changements de variables $X_i = PL_i$, $V_i = PZ_i^T$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$. ■

3.3.2.2. Approche par pseudo-incertitudes constantes

Dans le cadre de cette approche, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par

$$\dot{e} = (A_h - L_h C)e + \Delta A_{hh} x + \Delta B_{hh} u. \quad (3.114)$$

Théorème 3.5 [Ouhib et Kara, 2023]

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.114) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t) = [x^T(t) u^T(t)]^T$ vers $e(t)$ est borné s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$, une matrice symétrique définie positive P , des matrices X_j, Y_j, V_j, W_j et un scalaire positif $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$

$$\min_{P, X_j, Y_j, V_j, W_j} \bar{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_j - X_j C)) + I & * & * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ M \otimes (\varepsilon PA_j - \varepsilon X_j C) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_j W_j^T) & 0 & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ M \otimes (\varepsilon PA_j - \varepsilon X_j C) & 0 & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon R_j Y_j^T) & * & 0 & * & * & * & 0 & * \\ M \otimes (\varepsilon PA_j - \varepsilon X_j C) & -(M^T \otimes \varepsilon V_j^T) & -(M^T \otimes \varepsilon V_j^T) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon V_j) & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_j^T) & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M^T \otimes \varepsilon R_j^T) & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes \Delta A_{ij}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A_{ij}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A_{ij}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A_{ij}^T P & 0 & 0 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes \Delta B_{ij}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B_{ij}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B_{ij}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B_{ij}^T P & 0 & 0 & 0 & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & I \otimes W_j^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \otimes Y_j^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_2^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.115)$$

où $G_1 > 0, G_2 > 0$.

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$L_j = P^{-1}X_j. \quad (3.116)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (3.117)$$

Preuve. Comme pour le Théorème 3.4, à partir de l'expression de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état, nous pouvons écrire

$$(M \otimes I)(I \otimes \dot{e}) = (M \otimes (A_{\tilde{h}} - L_{\tilde{h}}C))(I \otimes e) + (M \otimes \Delta A_{\tilde{h}\tilde{h}})(I \otimes x) + (M \otimes \Delta B_{\tilde{h}\tilde{h}})(I \otimes u). \quad (3.118)$$

Par conséquent, la contrainte suivante est obtenue

$$\begin{bmatrix} M \otimes (A_{\tilde{h}} - L_{\tilde{h}}C) & (M \otimes \Delta A_{\tilde{h}\tilde{h}}) & (M \otimes \Delta B_{\tilde{h}\tilde{h}}) & -(M \otimes I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I \otimes e) \\ (I \otimes x) \\ (I \otimes u) \\ (I \otimes \dot{e}) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.119)$$

Le système (3.114) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert $\omega(t) = [x^T(t) \ u^T(t)]^T$ vers $e(t)$ est borné si

$$\begin{aligned} & (I \otimes e^T)(L \otimes P)(I \otimes e) + (I \otimes e^T)(M \otimes P)(I \otimes \dot{e}) + (I \otimes \dot{e}^T)(M^T \otimes P)(I \otimes e) + (I \otimes e^T)(I \otimes e) \\ & - \gamma^2(I \otimes x^T)(I \otimes x) - \gamma^2(I \otimes u^T)(I \otimes u) < 0. \end{aligned} \quad (3.120)$$

L'inégalité (3.120) exprimée sous forme matricielle

$$X^T \begin{bmatrix} L \otimes P + I & 0 & 0 & M \otimes P \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ M^T \otimes P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X < 0, \quad (3.121)$$

où $X^T = [(I \otimes e^T) \ (I \otimes x^T) \ (I \otimes u^T) \ (I \otimes \dot{e}^T)]$.

La combinaison de l'inégalité (3.121) et de la contrainte (3.119) par le lemme de Finsler conduit à l'expression suivante

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + I & 0 & 0 & M \otimes P \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ M^T \otimes P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \otimes (A_{\tilde{h}} - L_{\tilde{h}}C) & (M \otimes \Delta A_{\tilde{h}\tilde{h}}) & (M \otimes \Delta B_{\tilde{h}\tilde{h}}) & -(M \otimes I) \end{bmatrix} + (*) < 0. \quad (3.122)$$

En choisissant $U_1 = (I \otimes P)$, $U_2 = (I \otimes \varepsilon W_{\tilde{h}}^{-1}P)$, $U_3 = (I \otimes \varepsilon Y_{\tilde{h}}^{-1}P)$ et $U_4 = (I \otimes \varepsilon Z_{\tilde{h}}^{-1}P)$ et en appliquant la propriété de congruence avec la matrice $\text{diag}[I, (I \otimes W_{\tilde{h}}^T), (I \otimes Y_{\tilde{h}}^T), (I \otimes Z_{\tilde{h}}^T)]$, on aboutit à l'inégalité suivante

$$\begin{bmatrix}
 L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}}C)) + I & * & * \\
 (M^T \otimes W_{\hat{h}} \Delta A_{\hat{h}\hat{h}}^T P) + M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & -\gamma^2(I \otimes W_{\hat{h}})(I \otimes W_{\hat{h}}^T) + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon P \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} W_{\hat{h}}^T) & * \\
 (M^T \otimes Y_{\hat{h}} \Delta B_{\hat{h}\hat{h}}^T P) + M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & (M \otimes \varepsilon P \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} W_{\hat{h}}^T) + (M^T \otimes \varepsilon Y_{\hat{h}} \Delta B_{\hat{h}\hat{h}}^T P) & -\gamma^2(I \otimes Y_{\hat{h}})(I \otimes Y_{\hat{h}}^T) + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon P \Delta B_{\hat{h}\hat{h}} Y_{\hat{h}}^T) \\
 M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & (M \otimes \varepsilon P \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} W_{\hat{h}}^T) - (M^T \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}} P) & (M \otimes \varepsilon P \Delta B_{\hat{h}\hat{h}} Y_{\hat{h}}^T) - (M^T \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}} P) \\
 * & & \\
 * & & \\
 * & & \\
 -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon P Z_{\hat{h}}^T) & &
 \end{bmatrix} < 0. \tag{3.123}$$

Les éléments diagonaux (2,2) et (2,3) sont majorés comme

$$\text{Sym}(M \otimes \varepsilon P \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} W_{\hat{h}}^T) - \gamma^2(I \otimes W_{\hat{h}})(I \otimes W_{\hat{h}}^T) \leq \text{Sym}(M \otimes \varepsilon P \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} W_{\hat{h}}^T) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_{\hat{h}} W_{\hat{h}}^T) + \gamma^{-2}(M \otimes \varepsilon S_{\hat{h}})(M^T \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}^T), \tag{3.124}$$

$$\text{Sym}(M \otimes \varepsilon P \Delta B_{\hat{h}\hat{h}} Y_{\hat{h}}^T) - \gamma^2(I \otimes Y_{\hat{h}})(I \otimes Y_{\hat{h}}^T) \leq \text{Sym}(M \otimes \varepsilon P \Delta B_{\hat{h}\hat{h}} Y_{\hat{h}}^T) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon R_{\hat{h}} Y_{\hat{h}}^T) + \gamma^{-2}(M \otimes \varepsilon R_{\hat{h}})(M^T \otimes \varepsilon R_{\hat{h}}^T). \tag{3.125}$$

En prenant en compte (3.124) et (3.125) dans l'inégalité (3.122), en appliquant le complément de Schur et en isolant les termes incertains, on obtient

$$\begin{bmatrix}
 L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}}C)) + I & * & * & * & 0 & 0 \\
 M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_{\hat{h}} W_{\hat{h}}^T) & 0 & * & * & 0 \\
 M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & 0 & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon R_{\hat{h}} Y_{\hat{h}}^T) & * & 0 & * \\
 M \otimes (\varepsilon PA_{\hat{h}} - \varepsilon PL_{\hat{h}}C) & -(M^T \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}} P) & -(M^T \otimes \varepsilon Z_{\hat{h}} P) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon P Z_{\hat{h}}^T) & 0 & 0 \\
 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_{\hat{h}}^T) & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\
 0 & 0 & (M^T \otimes \varepsilon R_{\hat{h}}^T) & 0 & 0 & -\gamma^2 I
 \end{bmatrix} + \Omega < 0, \tag{3.126}$$

La matrice Ω est donnée par

$$\Omega = \text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} M \otimes P \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta A_{\hat{h}\hat{h}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \otimes W_{\hat{h}}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M \otimes P \Delta B_{\hat{h}\hat{h}} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta B_{\hat{h}\hat{h}} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta B_{\hat{h}\hat{h}} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta B_{\hat{h}\hat{h}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \otimes Y_{\hat{h}}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \tag{3.127}$$

Grâce à la relation de Young, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \Omega \leq & \begin{bmatrix} M \otimes P \Delta A_{hh} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta A_{hh} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta A_{hh} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta A_{hh} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G_1^{-1} \begin{bmatrix} M^T \otimes \Delta A_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A_{hh}^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \otimes W_h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G_1 \begin{bmatrix} 0 & I \otimes W_h^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 + & \begin{bmatrix} M \otimes P \Delta B_{hh} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta B_{hh} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta B_{hh} \\ M \otimes \varepsilon P \Delta B_{hh} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G_2^{-1} \begin{bmatrix} M^T \otimes \Delta B_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B_{hh}^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \otimes Y_h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \otimes Y_h^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.128}$$

L'application du lemme de Schur à l'inégalité (3.126) avec la matrice Ω majorée par (3.128) donne

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h - PL_h C)) + I & * & * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ M \otimes (\varepsilon PA_h - \varepsilon PL_h C) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_h W_h^T) & 0 & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ M \otimes (\varepsilon PA_h - \varepsilon PL_h C) & 0 & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon R_h Y_h^T) & * & 0 & * & * & * & 0 & * \\ M \otimes (\varepsilon PA_h - \varepsilon PL_h C) & -(M^T \otimes \varepsilon Z_h P) & -(M^T \otimes \varepsilon Z_h P) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon PZ_h^T) & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_h^T) & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M^T \otimes \varepsilon R_h^T) & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes \Delta A_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A_{hh}^T P & 0 & 0 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes \Delta B_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B_{hh}^T P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B_{hh}^T P & 0 & 0 & 0 & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & I \otimes W_h^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \otimes Y_h^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_2^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{3.129}$$

En utilisant les changements de variable $X_j = PL_j$, $V_j = PZ_j^T$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$, on retrouve finalement la contrainte (3.115) du Théorème 3.5. ■

3.3.2.3. Approche par pseudo-incertitudes bornées

Reconsidérons l'expression de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état dans le cas de l'approche par incertitudes bornées

$$\dot{e} = (A_h - L_h C)e + \Delta A(t)x + \Delta B(t)u. \tag{3.130}$$

Théorème 3.6. [Ouhib et Kara, 2023]

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.130) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t) = [x^T(t) u^T(t)]^T$ vers $e(t)$ est borné s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$, une matrice symétrique définie positive P , des matrices X_i , Y_i , V_i , W_i et des scalaires positifs λ_1 , λ_2 , et $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$\min_{P, X_i, Y_i, W_i, V_i} \bar{\gamma}$$

3 \mathcal{D} -observation des systèmes TS à VDNM

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc}
 L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_i C)) + I & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\
 M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_i C) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_i W_i^T) & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * \\
 M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_i C) & 0 & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon R_i Y_i^T) & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\
 M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_i C) & -(M^T \otimes \varepsilon V_i^T) & -(M^T \otimes \varepsilon V_i^T) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon V_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\
 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_i^T) & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (M^T \otimes \varepsilon R_i^T) & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_1 + \lambda_1 (I \otimes E_A^T E_A) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_2 + \lambda_2 (I \otimes E_b^T E_b) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & I \otimes W_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & I \otimes Y_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_2^{-1} & 0 & 0 \\
 M^T \otimes A^T P & M^T \otimes \varepsilon A^T P & M^T \otimes \varepsilon A^T P & M^T \otimes \varepsilon A^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 I & 0 \\
 M^T \otimes B^T P & M^T \otimes \varepsilon B^T P & M^T \otimes \varepsilon B^T P & M^T \otimes \varepsilon B^T P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 I
 \end{array} \right] < 0. \tag{3.131}$$

où $G_1 > 0$ et $G_2 > 0$.

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$L_i = P^{-1} X_i. \tag{3.132}$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \tag{3.133}$$

Preuve. La condition suffisante suivante est obtenue en adoptant les mêmes étapes que précédemment

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc}
 L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_i C)) + I & * & * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\
 M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_i C) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_i W_i^T) & 0 & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\
 M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_i C) & 0 & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon R_i Y_i^T) & * & 0 & * & * & * & 0 & * \\
 M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_i C) & -(M^T \otimes \varepsilon V_i^T) & -(M^T \otimes \varepsilon V_i^T) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon V_i) & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\
 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_i^T) & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (M^T \otimes \varepsilon R_i^T) & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes \Delta A^T(t)P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A^T(t)P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A^T(t)P & M^T \otimes \varepsilon \Delta A^T(t)P & 0 & 0 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes \Delta B^T(t)P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B^T(t)P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B^T(t)P & M^T \otimes \varepsilon \Delta B^T(t)P & 0 & 0 & 0 & -G_2 & 0 & 0 \\
 0 & I \otimes W_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_1^{-1} & 0 \\
 0 & 0 & I \otimes Y_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_2^{-1}
 \end{array} \right] < 0. \tag{3.134}$$

Comme pour le Théorème 3.3, nous isolons les termes dépendant du temps des termes constants

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc}
 L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_i C)) + I & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_i C) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_i W_i^T) & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\
 M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_i C) & 0 & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon R_i Y_i^T) & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \\
 M \otimes (\varepsilon PA_i - \varepsilon X_i C) & -(M^T \otimes \varepsilon V_i^T) & -(M^T \otimes \varepsilon V_i^T) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon V_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & (M^T \otimes \varepsilon S_i^T) & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (M^T \otimes \varepsilon R_i^T) & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_2 & 0 & 0 \\
 0 & I \otimes W_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_1^{-1} & 0 \\
 0 & 0 & I \otimes Y_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_2^{-1}
 \end{array} \right] + \Gamma(t) < 0. \tag{3.135}$$

où

$$\Gamma(t) = \text{Sym} \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} M \otimes PA \\ M \otimes \varepsilon PA \\ M \otimes \varepsilon PA \\ M \otimes \varepsilon PA \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \otimes \Sigma_A(t) E_A & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \\ \left[\begin{array}{c} M \otimes PB \\ M \otimes \varepsilon PB \\ M \otimes \varepsilon PB \\ M \otimes \varepsilon PB \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \otimes \Sigma_B(t) E_B & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\}. \quad (3.136)$$

L'application de la relation de Young à la matrice $\Gamma(t)$ et le complément de Schur à l'inégalité (3.135) permet d'aboutir à la condition (3.131). ■

Remarque 3.5

Les contraintes de \mathcal{D} -stabilité proposées dans les Théorèmes 3.4-3.6 sont des LMIs pour S_i, R_i et ε donnés. Par conséquent, ces derniers sont fixés et ne sont pas considérés comme des variables de décision.

Exemple 3.2 : Application des Théorèmes 3.4-3.6 à un exemple académique

Les Théorèmes (3.4-3.6) développés ci-dessus sont appliqués au système (3.82) de l'exemple 3.1.

Test du Théorème 3.4

L'application du Théorème 3.4 permet d'aboutir aux solutions suivantes

$$P = \begin{bmatrix} 36.0672 & 47.4355 & 73.6321 \\ 47.4355 & 191.9636 & 148.8065 \\ 73.6321 & 148.8065 & 174.9023 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 26.7532 & -3.4759 \\ 17.5274 & -16.1450 \\ -13.4335 & 11.6186 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 26.0364 & -0.0998 \\ 22.3130 & -14.5172 \\ -16.8609 & 10.0140 \end{bmatrix}.$$

Le taux optimal d'atténuation pour $\varepsilon = 10^{-6}$ est $\gamma_{min} = 0,0039$. Les résultats de simulation sont illustrés par les figures 3.12-3.14.

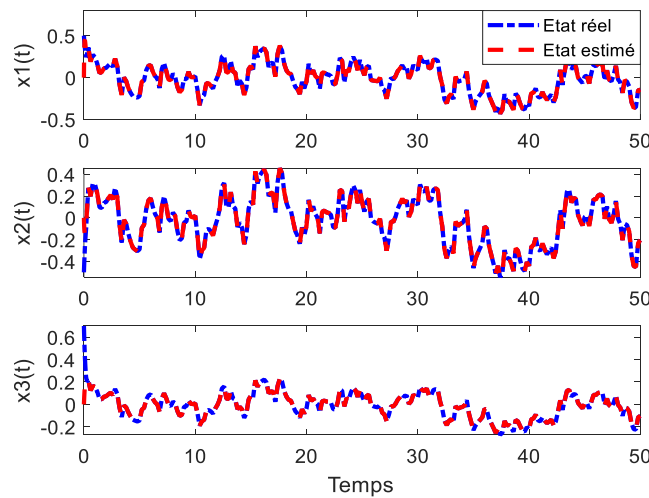


Fig.3.12. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.4).

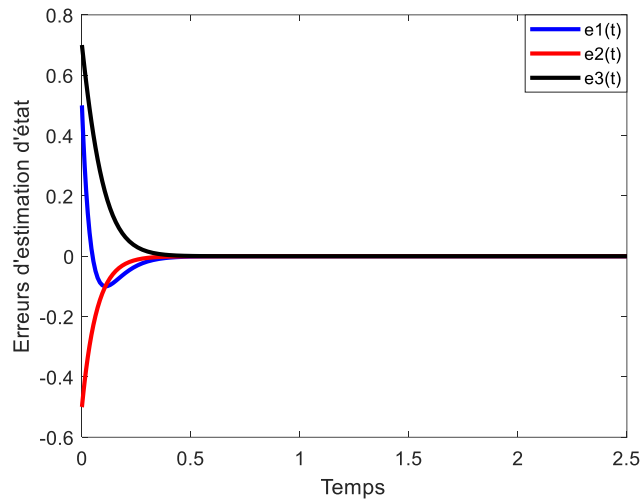


Fig.3.13. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.4).

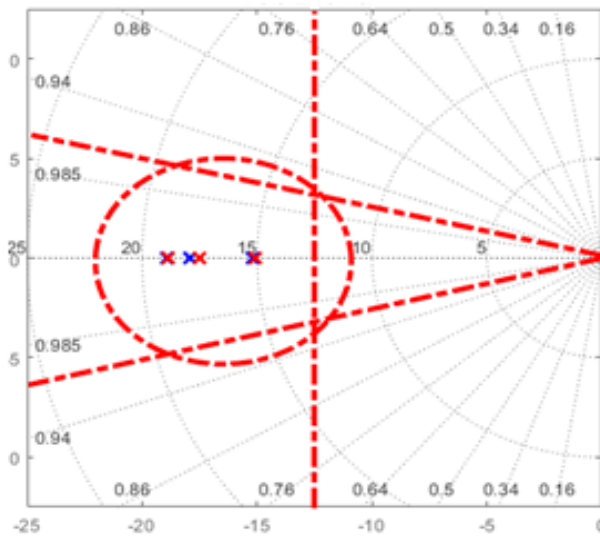


Fig.3.14. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.4).

Test du Théorème 3.5

La résolution des contraintes (3.115) donne les matrices suivantes

$$P = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.8950 & 1.1162 & 1.8165 \\ 1.1162 & 4.5930 & 3.5347 \\ 1.8165 & 3.5347 & 4.2771 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 28.1235 & -5.1462 \\ 17.8695 & -16.5575 \\ -14.2846 & 12.6605 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 24.6108 & 2.5454 \\ 21.9553 & -13.9065 \\ -15.8833 & 8.2985 \end{bmatrix}.$$

Le taux d'atténuation optimal est $\gamma_{min} = 0,0405$.

Les figures 3.15-3.17 présentent les résultats du Théorème 3.5.

Test du Théorème 3.6

Ci-après les solutions de la contrainte (3.131)

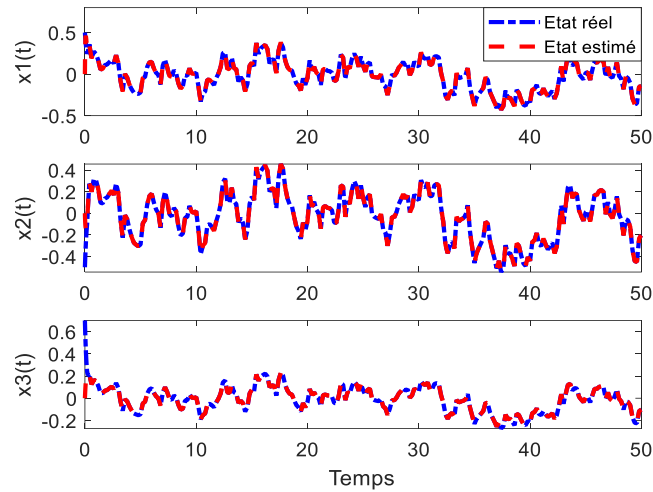


Fig.3.15. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.5)

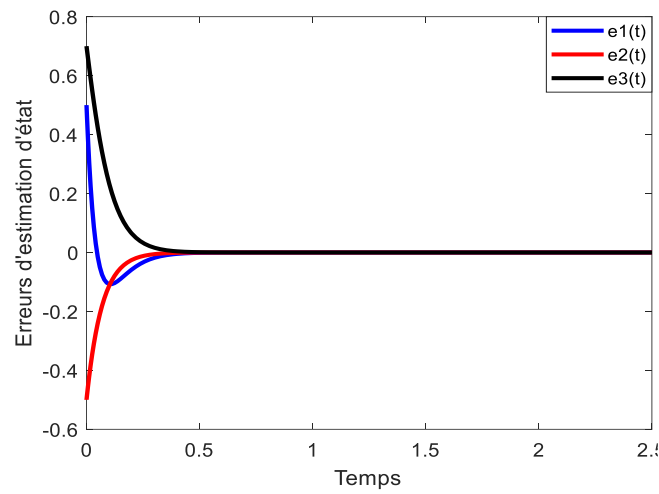


Fig.3.16. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.5).

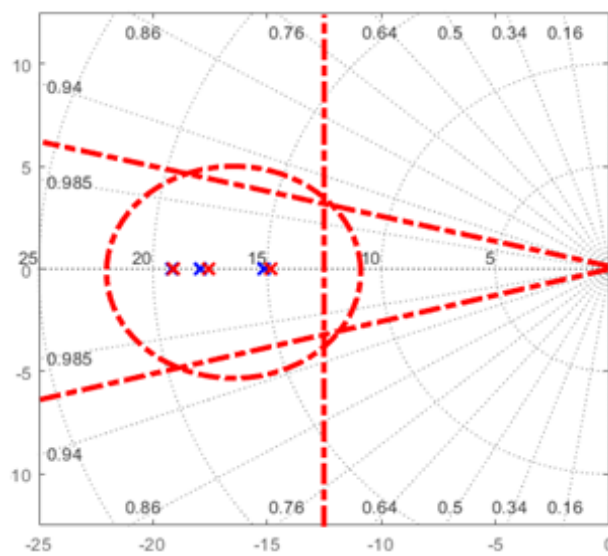


Fig.3.17. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.5).

$$P = \begin{bmatrix} 18.8462 & 28.9281 & 38.1064 \\ 28.9281 & 105.0381 & 81.3639 \\ 38.1064 & 81.3639 & 4.2771 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 28.1183 & -4.0215 \\ 17.6381 & -16.2771 \\ -14.3319 & 12.2952 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 28.7180 & -2.5613 \\ 23.4094 & -15.6166 \\ -18.9557 & 11.9846 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_{\min} = 0.0034.$$

Nous présentons les résultats de simulation du Théorème 3.6 par les figures 3.18-3.20.

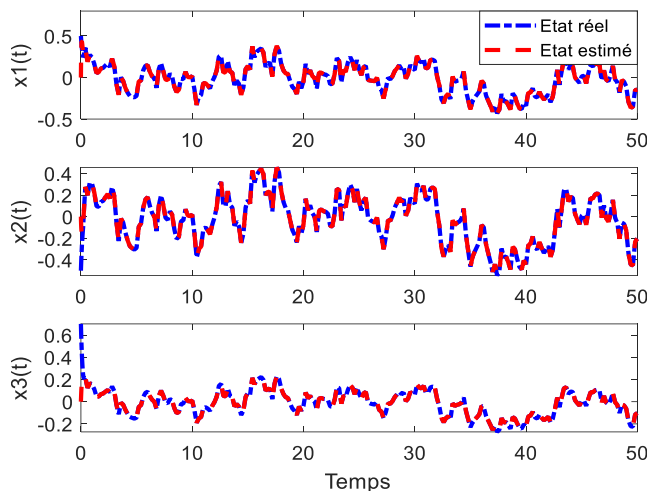


Fig.3.18. Etats réels et leurs estimés (Théorème 3.6).

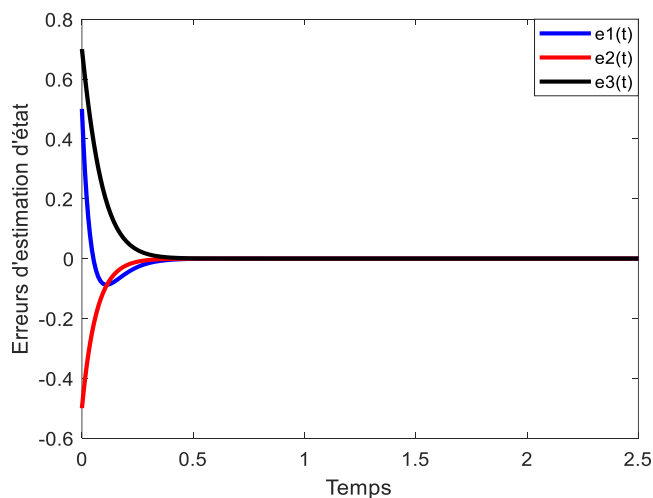


Fig.3.19. Erreurs d'estimation d'état (Théorème 3.6).

Afin d'apprécier l'amélioration apportée par le lemme de Finsler, nous comparons dans le Tableau 3.1 les taux d'atténuation optimaux des différents théorèmes développés.

| γ | | Théorème 3.1 | Théorème 3.2 | Théorème 3.3 |
|----------------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| Sans Lemme de Finsler | | 4,2702 | 11,9581 | 44,1722 |
| | | Théorème 3.4 | Théorème 3.5 | Théorème 3.6 |
| En utilisant le Lemme de Finsler | $\varepsilon=10^{-6}$ | 0,0039 | 0,0405 | 0,0034 |
| | $\varepsilon=10^{-7}$ | 0,0015 | 0,0027 | 0,0016 |
| | $\varepsilon=10^{-8}$ | $4,884 \cdot 10^{-4}$ | $7,8833 \cdot 10^{-4}$ | $3,2015 \cdot 10^{-4}$ |

Tableau 3.1. Comparaison des taux d'atténuation des Théorèmes 3.1-3.6.

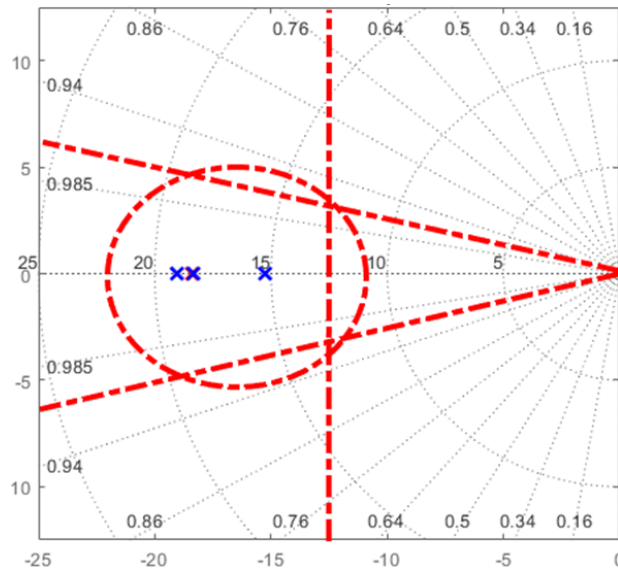


Fig.3.20. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC (Théorème 3.6).

Il est clair que les théorèmes basés sur le lemme de Finsler présentent de meilleurs résultats. L'introduction de variables supplémentaires permet d'améliorer la robustesse de l'observateur vis-à-vis des variables de décision non mesurables en diminuant le taux d'atténuation γ .

Comparaison avec le Théorème 4 de [Ichalal et al., 2008]

L'estimation d'état \mathcal{D} -stable selon le Théorème 3.4 est comparée à celle fournie par l'observateur développé dans [Ichalal et al., 2008] (voir Tableau 3.2). Deux paramètres sont considérés, la racine de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Square Error) et le taux d'atténuation optimal γ .

| RMSE | Théorème 3.4 | Théorème 4 [Ichalal et al., 2008] |
|-----------------------------|--------------|--------------------------------------|
| $x_1(t)$ | 0,1159 | 0,1304 |
| $x_2(t)$ | 0,1346 | 0,1467 |
| $x_3(t)$ | 0,1993 | 0,2453 |
| Taux d'atténuation γ | 0,0028 | 0,6776 |

Tableau 3.2. Comparaison des performances entre le Théorème 3.4 et le Théorème 4 dans [Ichalal et al., 2008].

Notons que dans [Ichalal et al., 2008], le placement des valeurs propres est atteint en ajoutant deux LMIs à la condition de stabilité asymptotique. De plus, les contraintes imposées sont valables uniquement pour une région LMI spécifique.

Exemple 3.3 : Application du Théorème 3.4 à un système biologique décrivant l'interaction tumeur-système immunitaire

➤ *Le modèle non linéaire de Kirschner-Panetta [Kirschner et Panetta,1998]*

Malgré le progrès technologique et les innombrables avancées dans le domaine de la recherche, le cancer demeure un problème majeur de santé publique. Il est à l'origine d'un

décès sur sept dans le monde. Une tumeur se forme lorsque les cellules échappent aux systèmes de régulation naturels et se mettent à proliférer d'une manière anormale et incontrôlée. Un grand nombre de phénomènes régissent la croissance tumorale et ses différentes interactions avec le système immunitaire. La modélisation mathématique peut s'avérer utile pour l'étude et la compréhension de ces phénomènes.

La modélisation mathématique de la croissance tumorale n'est pas nouvelle. Elle a été largement traitée dans de nombreux articles [Bellomo et al., 2008], [Altrock et al., 2015]. Dans plusieurs travaux théoriques, des modèles mathématiques ont été utilisés dans l'optimisation de l'administration des traitements impliquant par exemple le contrôle optimal [Ledzewicz et al., 2008] et la commande prédictive [Chareyron et Alamir, 2009].

Le modèle de Kirschner et Panetta (K-P) décrit la dynamique des interactions entre les cellules cancéreuses, les cellules immunitaires et la concentration d'interleukine 2 (principale cytokine responsable de l'activation, de la croissance et de la différenciation des lymphocytes). Le modèle introduit également des afflux externes d'interleukine 2 et d'Immunothérapie Adoptive Cellulaire pour stimuler le système immunitaire. Ce modèle fortement non linéaire est capable d'expliquer à la fois les oscillations à court terme de la taille de la tumeur ainsi que la rechute tumorale à long terme.

Le modèle K-P fait intervenir trois variables (ou trois espèces)

- $E(t)$: Les cellules immunitaire activées (ou cellules effectrices) telles que les lymphocytes T cytotoxiques, macrophages et les lymphocytes NK (Natural Killer),
- $T(t)$: Les cellules cancéreuses,
- $I_L(t)$: La concentration de l'IL-2,

, il est donné par le système d'EDO suivant

$$\dot{E} = cT - \mu_2 E + \frac{p_1 E I_L}{g_1 + I_L} + s_1, \quad (3.137)$$

$$\dot{T} = r_2(1 - bT)T - \frac{aET}{g_2 + T}, \quad (3.138)$$

$$\dot{I}_L = \frac{p_2 ET}{g_3 + T} - \mu_3 I_L + s_2, \quad (3.139)$$

Avec les conditions initiales suivantes $E(0) = E_0, T(0) = T_0, I_L(0) = I_{L0}$. Les descriptions des termes du modèle (3.137-3.139) sont résumées dans le Tableau 3.3. Les valeurs des paramètres constants du modèle K-P sont résumées dans le Tableau 3.4. Leur unité est en $jour^{-1}$ sauf pour g_1, g_2, g_3 et b .

➤ *Obtention du modèle TS*

D'abord, on écrit le modèle (3.137)-(3.139) sous forme quasi-LPV

| Terme | Description |
|-------------------------------|---|
| cT | Terme de recrutement dû à la présence directe de la tumeur où c est l'antigénicité de la tumeur |
| $-\mu_2 E$ | Perte des cellules effectrices avec un taux μ_2 |
| $\frac{p_1 E I_L}{g_1 + I_L}$ | Terme de prolifération par lequel les cellules effectrices sont stimulées par l'IL-2 |
| s_1 | Terme de traitement qui représente une source extérieure de cellules effectrices telles que les cellules TIL (Tumor Infiltrating Lymphocyte) et LAK (Lymphocyte Activated killer) |
| $r_2(T)T$ | Terme de croissance (qui peut être gompertzien, logistique ou linéaire). Dans l'article original, le terme de croissance choisi est logistique et est donné par : $r_2(T) = r_2(1 - bT)$; r_2 étant le taux de croissance de la tumeur et $1/b$ la capacité de charge des cellules tumorales |
| $-\frac{aET}{g_2 + T}$ | Perte des cellules cancéreuses due à l'effet des cellules effectrices immunitaires qui est modélisé par une fonction de Michaelis-Menten indiquant une réponse limitée du système immunitaire à la tumeur ; a taux de perte |
| $\frac{p_2 ET}{g_3 + T}$ | Terme de prolifération des cellules effectrices stimulées par les cellules cancéreuses modélisé par une fonction de Michaelis-Menten (production limitée de l'IL-2) ; |
| $-\mu_3 I_L$ | Terme de dégradation de l'IL-2 ; μ_3 taux de dégradation |
| s_2 | Terme de traitement représentant un apport externe de l'IL-2 |

Tableau 3.3. Description des termes constituant le modèle de Kirschner-Panetta.

| | | | | |
|-------------------|----------------------|--------------|---------------------|--------------------|
| Eq.(3.137) | $0 \leq c \leq 0.05$ | $\mu_2=0,03$ | $p_1=0,1245$ | $g_1=2 \cdot 10^7$ |
| Eq.(3.138) | $g_2=1 \cdot 10^5$ | $r_2=0,18$ | $b=1 \cdot 10^{-9}$ | $a=1$ |
| Eq.(3.139) | $\mu_3=10$ | $p_2=5$ | $g_3=1 \cdot 10^3$ | |

Tableau 3.4. Valeurs des paramètres du modèle de K-P.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{E} \\ \dot{T} \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_2 & c & \frac{p_1 E}{g_1 + I_L} \\ -\frac{aT}{g_2 + T} & -r_2(bT - 1) & 0 \\ \frac{p_2 T}{g_3 + T} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ T \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = A(x)x + Bu. \quad (3.140)$$

L'ensemble des variables de prémisses $V_z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ est :

$$z_1 = \frac{E}{g_1 + I_L}, z_2 = \frac{T}{g_2 + T}, z_3 = bT - 1, z_4 = \frac{T}{g_3 + T}. \quad (3.141)$$

Ensuite, nous appliquons la Transformation Polytopique Convexe à chaque variable de prémisses z_j pour $E \in [100, 10^9], T \in [100, 10^9], I_L \in [100, 10^9]$. En utilisant le Lemme 2.1 (Chapitre 2), chaque variable de prémisses est exprimée comme suit

$$\begin{cases} z_1 = F_{1,1}(z_1)z_{1,1} + F_{1,2}(z_1)z_{1,2}, \\ z_2 = F_{2,1}(z_2)z_{2,1} + F_{2,2}(z_2)z_{2,2}, \\ z_3 = F_{3,1}(z_3)z_{3,1} + F_{3,2}(z_3)z_{3,2}, \\ z_4 = F_{4,1}(z_4)z_{4,1} + F_{4,2}(z_4)z_{4,2}. \end{cases} \quad (3.142)$$

$$\text{où } F_{j,1} = \frac{z_j - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}}, F_{j,2} = \frac{z_{j,1} - z_j}{z_{j,1} - z_{j,2}} = 1 - F_{j,1}(z_j), z_{j,1} = \max(z_j), z_{j,2} = \min(z_j).$$

La matrice $A(x)$ est alors évaluée aux sommets des polytopes. La Transformation Polytopique Convexe est appliquée aux variables de prémisses z_1 et z_2 :

$$A = \begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_1 \\ -a z_2 & -r_2 z_3 & 0 \\ p_2 z_4 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix} = F_{1,1} \begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -a z_2 & -r_2 z_3 & 0 \\ p_2 z_4 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix} + F_{1,2} \begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -a z_2 & -r_2 z_3 & 0 \\ p_2 z_4 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}, \quad (3.143)$$

$$A = F_{1,1} F_{2,1} \begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -a z_{2,1} & -r_2 z_3 & 0 \\ p_2 z_4 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix} + F_{1,1} F_{2,2} \begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -a z_{2,2} & -r_2 z_3 & 0 \\ p_2 z_4 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix} + F_{1,2} F_{2,1} \begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -a z_{2,1} & -r_2 z_3 & 0 \\ p_2 z_4 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix} + F_{1,2} F_{2,2} \begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -a z_{2,2} & -r_2 z_3 & 0 \\ p_2 z_4 & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}. \quad (3.144)$$

De la même manière, la Transformation Polytopique Convexe est considérée pour les variables de prémisses z_3 et z_4 . Finalement, la matrice $A(x)$ s'écrit comme suit

$$A(x) = \sum_{i=1}^{16} h_i(x) A_i. \quad (3.145)$$

Les matrices A_i et les fonctions d'activation $h_i(x)$ sont données dans le Tableau C.1 de l'annexe C.

Le modèle TS obtenu est (la matrice B étant la même pour tous les sous-modèles)

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{16} h_i(x) (A_i x + B u). \quad (3.146)$$

➤ *Dynamique du système en l'absence de traitement*

L'antigénicité c joue un rôle prépondérant dans la dynamique du système ; sa valeur varie selon le patient et selon le type de cancer. Les grandes valeurs de c représentent des cellules tumorales avec un antigène bien reconnu tandis que les petites valeurs représentent celles avec un antigène faible. On distingue trois dynamiques selon la valeur de c :

- **Cas 1 (Fig.3.21): Antigénicité très faible ($0 < c < c_0 = 8,57 \cdot 10^{-5}$)**

Le système immunitaire n'est pas capable d'éliminer la tumeur dont la masse est importante (les cellules tumorales présentent un antigène faible).

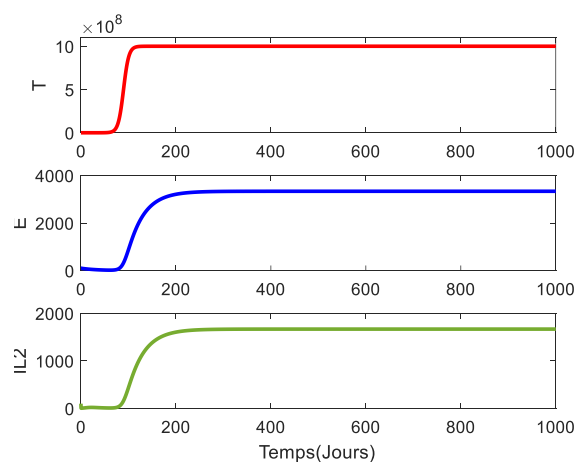


Fig.3.21. Populations de cellules (cancéreuses et effectrices) et cytokine IL-2 pour $c = 10^{-7}$.

• **Cas 2 (Fig.3.22): Antigénicité faible ($c_0 < c < c_1 = 0,032$)**

Il y a présence de cycles limites stables impliquant que la tumeur et le système immunitaire subissent des oscillations (Rémission-Récidive). Les cellules immunitaires et tumorales entrent en compétition dans ce qu'on appelle une interaction prédateur-proie où les cellules immunitaires jouent le rôle de prédateur et les cellules tumorales celui de proie. Cette compétition donne lieu dans certains cas à un cycle croissance-réduction des populations cellulaires.

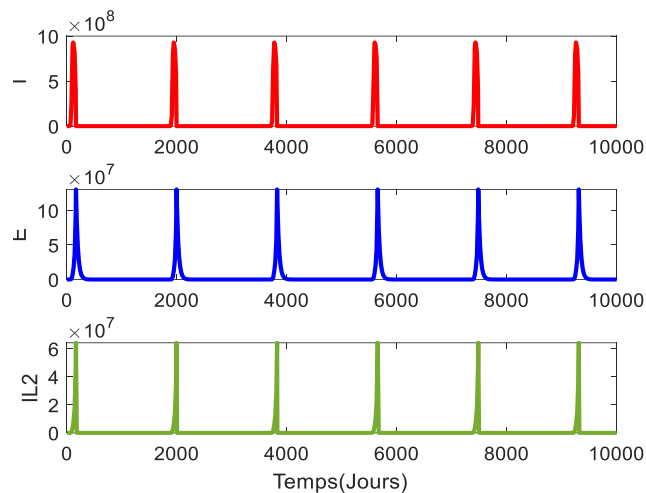


Fig.3.22. Populations de cellules (cancéreuses et effectrices) et cytokine IL-2 pour $c=6.10^{-4}$.

• **Cas 3 (Fig.3.23): Antigénicité modérée à grande ($c > 0,032$)**

Il existe un cycle limite de faible amplitude et de courte période. Le système immunitaire est capable de réduire les cellules tumorales à un stade de dormance. Pour les grandes valeurs de c , le système immunitaire éradique complètement la tumeur (les cellules tumorales présentent un antigène bien reconnu).

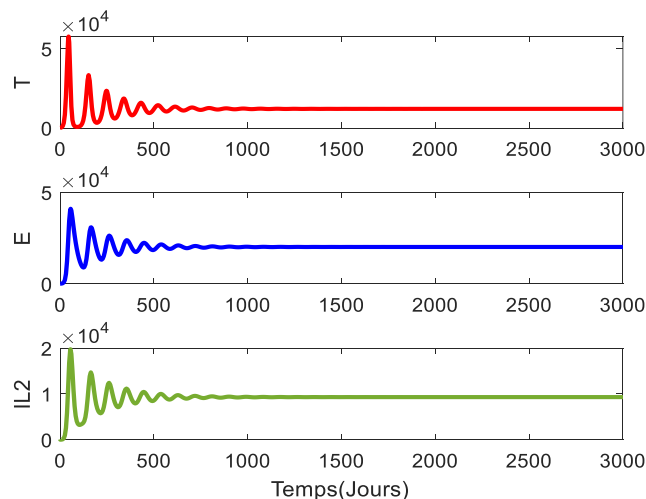


Fig.3.23. Populations de cellules (cancéreuses et effectrices) et cytokine IL-2 pour $c=0,05$.

➤ *Application du Théorème 3.4 pour l'observation des cellules tumorales et de la cytokine IL-2*

Le Théorème 3.4 est appliqué au système K-P pour estimer le nombre des cellules tumorales et la concentration d'interleukine IL2 en utilisant la mesure des cellules effectrices E en cas d'absence de traitement (la matrice d'observation est $C = [1 \ 0 \ 0]$). Les conditions initiales sont :

- Pour le système : $x(0) = [100 \ 100 \ 100]^T$,
- Pour l'observateur : $\hat{x}(0) = [33 \ 25 \ 50]^T$.

Les résultats de simulation pour une région LMI définie par $\alpha=0, \beta=7, q=10, s=5$ et $\theta=\pi/2.17$ sont illustrés par les Figures 3.24-3.26.

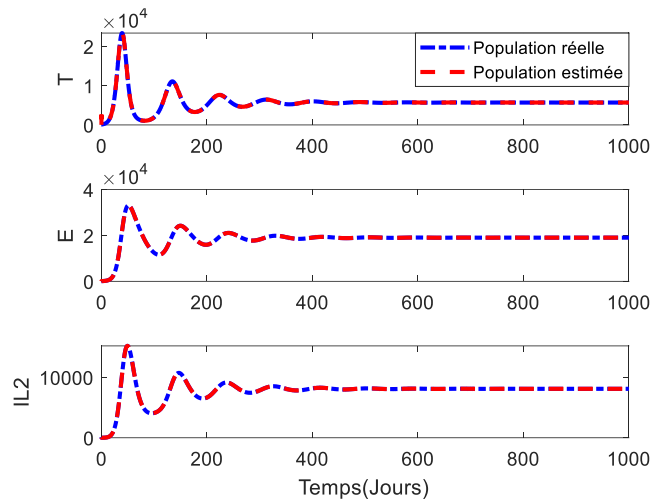


Fig.3.24. Populations de cellules (cancéreuses et effectrices) et cytokine IL-2 réelles et leurs estimées pour $c=0,1$.

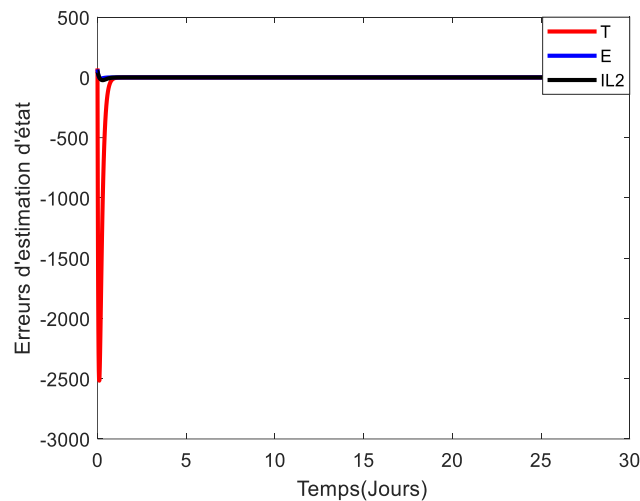


Fig.3.25. Erreurs d'estimation d'état pour $c=0,1$.

➤ *Etude de conservatisme*

Les domaines de faisabilité des Théorèmes 3.1 et 3.4 sont comparés dans la Figure 3.27 et ce pour différentes valeurs de l'antigénicité c et du taux de perte tumorale a . Nous pouvons constater que, pour cet exemple, le Théorème 3.4 est nettement moins conservatif.

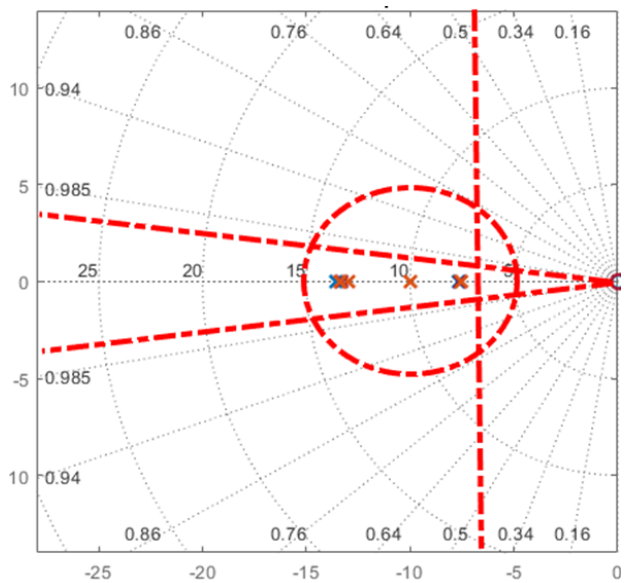


Fig.3.26. Distribution des valeurs propres des matrices A_i-L_iC pour $c=0,1$.

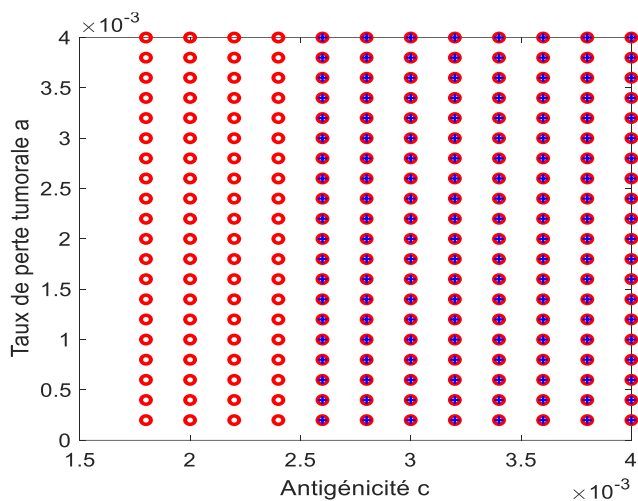


Fig.3.27. Domaines de faisabilité du Théorème 3.4 ('o' en rouge) et Théorème 3.1 ('+' en bleu).

3.3.3. Observateur Proportionnel lipschitzien à retour de sortie multiple

L'approche rapportée dans cette section repose principalement sur des hypothèses de lipschitz. Elle s'inspire des résultats développés dans [Ouhib, 2020] et [Ichalal, 2009]. L'idée de base est d'utiliser un retour de sortie dans les variables de prémisses de l'observateur afin d'obtenir des conditions de synthèse plus relaxées en éliminant l'influence des constantes de lipschitz.

Soit un système non linéaire décrit par un modèle TS dont la distribution de l'état $x(t)$ des fonctions d'activation s'écrit à travers une matrice connue H

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(Hx(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{3.147}$$

On pose $z(t)=Hx(t)$, le système (3.147) devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (3.148)$$

L'observateur proportionnel proposé est donné par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \dot{\hat{z}}(t) = H\hat{x}(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \quad (3.149)$$

L'observateur (3.149) présente deux retours de sorties, le premier dans la dynamique de l'état estimé $\hat{x}(t)$ et le deuxième dans la variable de prémisse $h_i(\hat{z}(t))$. Ce dernier sera utilisé pour éliminer l'effet des constantes de lipschitz sur les conditions de synthèse.

Le système (3.148) peut s'exprimer comme

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r [h_i(\hat{z}(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) + A_i \delta_i(t)x(t) + B_i \delta_i(t)u(t)], \quad (3.150)$$

où $\delta_i(t) = h_i(z(t)) - h_i(\hat{z}(t))$.

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'écrit alors

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r [h_i(\hat{z}(t))((A_i - L_i C)e(t)) + A_i \delta_i(t)x(t) + B_i \delta_i(t)u(t)] \quad (3.151)$$

Hypothèse 3.4

Les fonctions d'activation $h_i(z(t))$ sont lipschitziennes

$$|h_i(z(t)) - h_i(\hat{z}(t))| \leq n_i |z(t) - \hat{z}(t)|, \quad (3.152)$$

$$|h_i(z(t))z(t) - h_i(\hat{z}(t))\hat{z}(t)| \leq m_i |z(t) - \hat{z}(t)|, \quad (3.153)$$

où n_i et m_i , scalaires positifs, sont les constantes de lipschitz.

Hypothèse 3.5

La norme \mathcal{L}_2 de l'entrée $u(t)$ est bornée

$$\|u(t)\|_2 < \rho, \rho > 0. \quad (3.154)$$

Hypothèse 3.6

Le système (3.147) est stable

$$\|x(t)\|_2 < \sigma, \sigma > 0. \quad (3.155)$$

Si les hypothèses 3.4-3.6 sont satisfaites alors les gains L_i et K de l'observateur (3.149) sont déterminés par les Théorèmes 3.7 ou 3.8 selon une condition de rang.

- **Cas 1**: $\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ H \end{pmatrix} = \text{rang}(C)$

Théorème 3.7

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.151) est \mathcal{D} -stable s'il existe deux matrices symétriques définies positives Q et R , des matrices X_i et des scalaires positifs α_i et β_i tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (QA_i - X_i C)) < -R, \quad (3.156)$$

$$\begin{bmatrix} -R & * & * \\ M^T \otimes A_i^T Q & -\alpha_i I & 0 \\ M^T \otimes B_i^T Q & 0 & -\beta_i I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.157)$$

Les matrices de l'observateur sont données par

$$L_i = Q^{-1} X_i, \quad (3.158)$$

$$K = HC^-. \quad (3.159)$$

On note $C^- = C^T (CC^T)^{-1}$ la pseudo-inverse à droite de la matrice C .

Preuve. On considère la FLQ $V(e) = e^T Q e$, $Q = Q^T > 0$. En remplaçant l'expression (3.151) dans la dérivée temporelle de $V(e)$, on obtient

$$\dot{V}(e) = \sum_{i=1}^r \left[h_i(\hat{z}) \left(e^T (\text{Sym}(QA_i - QL_i C)) e \right) + \text{Sym} \left(e^T QA_i \delta_i(t) x + e^T QB_i \delta_i(t) u \right) \right] \quad (3.160)$$

Le système (3.151) est \mathcal{D} -stable si

$$L \otimes V(e) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(e) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(e) < 0. \quad (3.161)$$

Soit

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \left[h_i(\hat{z}) \left\{ (I \otimes e^T) (L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (QA_i - QL_i C))) (I \otimes e) \right\} + \text{Sym} \left((I \otimes e^T) (M \otimes QA_i \delta_i(t)) (I \otimes x) \right) + \right. \\ & \left. \text{Sym} \left((I \otimes e^T) (M \otimes QB_i \delta_i(t)) (I \otimes u) \right) \right] < 0. \end{aligned} \quad (3.162)$$

En se basant sur l'inégalité de Young (Lemme 3.2), on peut écrire

$$\begin{aligned} & \text{Sym} \left((I \otimes e^T) (M \otimes QA_i \delta_i(t)) (I \otimes x) \right) \leq \alpha_i (I \otimes e^T) (M \otimes QA_i) (M^T \otimes A_i^T Q) (I \otimes e) + \\ & \alpha_i^{-1} (I \otimes x^T) (I \otimes \delta_i^T(t)) (I \otimes \delta_i(t)) (I \otimes x), \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} & \text{Sym} \left((I \otimes e^T) (M \otimes QB_i \delta_i(t)) (I \otimes u) \right) \leq \beta_i (I \otimes e^T) (M \otimes QB_i) (M^T \otimes B_i^T Q) (I \otimes e) + \\ & \beta_i^{-1} (I \otimes u^T) (I \otimes \delta_i^T(t)) (I \otimes \delta_i(t)) (I \otimes u). \end{aligned} \quad (3.164)$$

Compte tenu de (3.163)-(3.164), on a

$$\sum_{i=1}^r [h_i(\hat{z}) \left\{ (I \otimes e^T)(L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (QA_i - QL_i C)))(I \otimes e) \right\} + \left\{ (I \otimes e^T)(\alpha_i^{-1}(M \otimes QA_i)(M^T \otimes A_i^T Q) + \beta_i^{-1}(M \otimes QB_i)(M^T \otimes B_i^T Q))(I \otimes e) \right\} + \alpha_i(I \otimes x^T)(I \otimes \delta_i^T(t))(I \otimes \delta_i(t))(I \otimes x) + \beta_i(I \otimes u^T)(I \otimes \delta_i^T(t))(I \otimes \delta_i(t))(I \otimes u) \right] < 0. \quad (3.165)$$

En utilisant les hypothèses 3.4-3.6, on a

$$\alpha_i(I \otimes x^T)(I \otimes \delta_i^T(t))(I \otimes \delta_i(t))(I \otimes x) \leq (I \otimes e^T)(I \otimes n_i^2 \alpha_i \sigma^2 (H - KC)^T (H - KC))(I \otimes e), \quad (3.166)$$

$$\beta_i(I \otimes u^T)(I \otimes \delta_i^T(t))(I \otimes \delta_i(t))(I \otimes u) \leq (I \otimes e^T)(I \otimes n_i^2 \beta_i \rho^2 (H - KC)^T (H - KC))(I \otimes e). \quad (3.167)$$

En prenant en considération les inégalités précédentes, l'expression (3.165) devient

$$\sum_{i=1}^r [h_i(\hat{z}) \left\{ (I \otimes e^T)(L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (QA_i - QL_i C)))(I \otimes e) \right\} + \left\{ (I \otimes e^T)(\alpha_i^{-1}(M \otimes QA_i)(M^T \otimes A_i^T Q) + \beta_i^{-1}(M \otimes QB_i)(M^T \otimes B_i^T Q) + (I \otimes n_i^2 (\alpha_i \sigma^2 + \beta_i \rho^2) (H - KC)^T (H - KC)))(I \otimes e) \right\} < 0. \quad (3.168)$$

La négativité de l'inégalité (3.168) est garantie si les conditions suivantes sont satisfaites

$$L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (QA_i - QL_i C)) < -R, \quad (3.169)$$

$$-R + \alpha_i^{-1}(M \otimes QA_i)(M^T \otimes A_i^T Q) + \beta_i^{-1}(M \otimes QB_i)(M^T \otimes B_i^T Q) + (I \otimes n_i^2 (\alpha_i \sigma^2 + \beta_i \rho^2) (H - KC)^T (H - KC)) < 0. \quad (3.170)$$

L'influence des constantes de Lipschitz n_i et des bornes ρ et σ peut être totalement éliminée en calculant le gain K comme suit

$$H - KC = 0, \quad (3.171)$$

L'équation (3.171) peut être résolue si la condition de rang suivante est satisfaite

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ H \end{pmatrix} = \text{rang}(C) \quad (3.172)$$

On a alors

$$K = HC^{-1}. \quad (3.173)$$

La condition (3.170) s'écrit alors comme suit

$$-R + \alpha_i^{-1}(M \otimes QA_i)(M^T \otimes A_i^T Q) + \beta_i^{-1}(M \otimes QB_i)(M^T \otimes B_i^T Q) < 0. \quad (3.174)$$

En appliquant le complément de Schur à l'inégalité (3.174) et en considérant le changement de variable $X_i = QL_i$ dans (3.169), on aboutit aux contraintes (3.156) et (3.157) du Théorème 3.7. ■

- **Cas 2 :** $\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ H \end{pmatrix} \neq \text{rang}(C)$

Théorème 3.8

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.151) est \mathcal{D} -stable s'il existe deux matrices symétriques définies positives Q et R , des matrices X_i , S et un scalaire positif λ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (QA_i - X_i C)) < -R, \quad (3.175)$$

$$\begin{bmatrix} -R & * & * & * \\ M^T \otimes A_i^T Q & -\lambda I & 0 & 0 \\ M^T \otimes B_i^T Q & 0 & -\lambda I & 0 \\ I \otimes (\lambda H - SC) & 0 & 0 & \frac{-\lambda I}{n_i^2(\sigma^2 + \rho^2)} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.176)$$

Les matrices de l'observateur sont données par

$$L_i = Q^{-1} X_i. \quad (3.177)$$

Preuve. On considère le changement de variable suivant

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = \lambda. \quad (3.178)$$

Les inégalités (3.166) et (3.167) s'expriment alors comme

$$\frac{\lambda^2}{\lambda} (I \otimes x^T) (I \otimes \delta_i^T(t)) (I \otimes \delta_i(t)) (I \otimes x) \leq n_i^2 \sigma^2 \lambda^{-1} (I \otimes e^T) (I \otimes (\lambda H - \lambda KC))^T (\lambda H - \lambda KC) (I \otimes e), \quad (3.179)$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda} (I \otimes u^T) (I \otimes \delta_i^T(t)) (I \otimes \delta_i(t)) (I \otimes u) \leq n_i^2 \rho^2 \lambda^{-1} (I \otimes e^T) (I \otimes (\lambda H - \lambda KC))^T (\lambda H - \lambda KC) (I \otimes e). \quad (3.180)$$

Par conséquent, le système (3.151) est \mathcal{D} -stable si

$$L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (QA_i - QL_i C)) < -R, \quad (3.181)$$

$$-R + \lambda^{-1} (M \otimes QA_i) (M^T \otimes A_i^T Q) + \lambda^{-1} (M \otimes QB_i) (M^T \otimes B_i^T Q) + \lambda^{-1} n_i^2 (\sigma^2 + \rho^2) (I \otimes (\lambda H - \lambda KC))^T (\lambda H - \lambda KC) < 0. \quad (3.182)$$

En appliquant les changements de variable $X_i = QL_i$ et $S = \lambda K$ et le complément de Schur à l'inégalité précédente, on aboutit aux contraintes (3.175) et (3.176) du Théorème 3.8. ■

Détermination de la borne σ par l'approche \mathcal{L}_2

A partir des hypothèses 3.5 et 3.6, on a

$$\frac{\|x(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \leq \frac{\sigma}{\rho} = \gamma. \quad (3.183)$$

Le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $u(t)$ vers $x(t)$ est borné par γ s'il existe une fonction de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0, \quad (3.184)$$

telle que

$$\dot{V}(x) + x^T x - \gamma^2 u^T u < 0. \quad (3.185)$$

En utilisant (3.147), on aboutit à la condition suivante

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}(PA_i) + I & * \\ B_i^T P & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.186)$$

avec $\bar{\gamma} = \gamma^2$. On en déduit alors la valeur de σ

$$\sigma = \rho\gamma. \quad (3.187)$$

Exemple 3.4: Application de l'observateur lipschitzien à un système chaotique

On considère un système non linéaire chaotique décrit par un modèle TS à deux modèles locaux dont les matrices et les fonctions d'activation sont

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -30 \\ 0 & 30 & -8/3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 30 \\ 0 & -30 & -8/3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h_1(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1(t)}{30} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Hx(t)}{30} \right), h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)), H = [1 \ 0 \ 0].$$

Les plans de phase de la Figure 3.28 montrent le caractère chaotique du système.

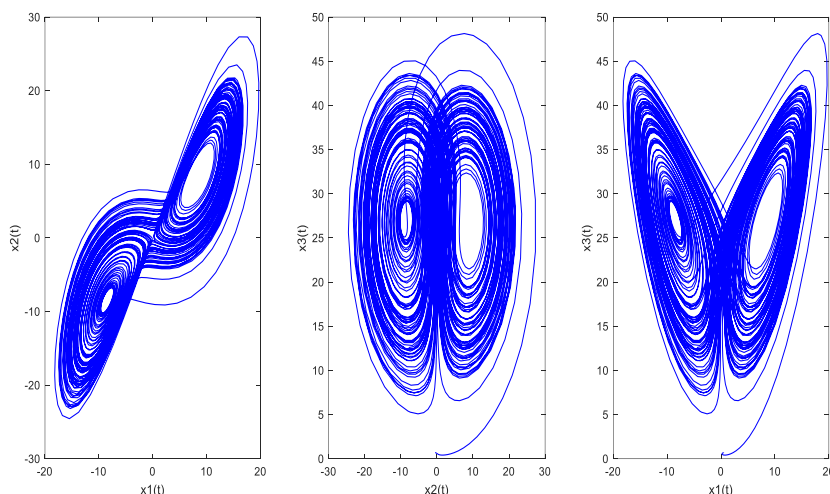


Fig.3.28. Plans de phase.

La condition $\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ H \end{pmatrix} = \text{rang}(C) = 2$ étant satisfaite, on applique le Théorème 3.7 au système considéré pour une région LMI définie par $\beta=5, \alpha=0, \theta=\pi/2, 7, s=q=15$. Les solutions numériques obtenues sont

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0480 & -0.0068 & 0.0145 \\ -0.0068 & 0.0110 & 0.0044 \\ 0.0145 & 0.0044 & 0.0115 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 4.9841 & 20.0267 \\ -4.3370 & 97.0160 \\ 25.3118 & -9.5662 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 5.2148 & 20.0530 \\ 25.6873 & -11.5669 \\ -6.5898 & -57.0503 \end{bmatrix}, K = [0 \ 1].$$

L'estimation d'état \mathcal{D} -stable par l'observateur (3.149) et la migration des valeurs propres des matrices $A_i - L_i C$ sont illustrées par les Figures 3.29-3.31.

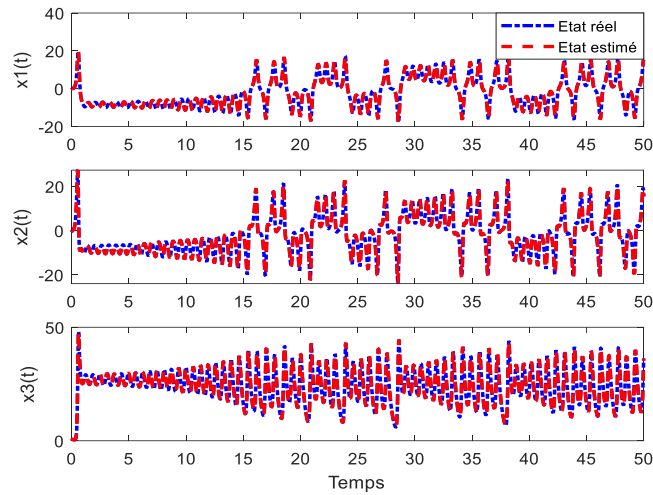


Fig.3.29. Evolution des états du système et de leurs estimées.

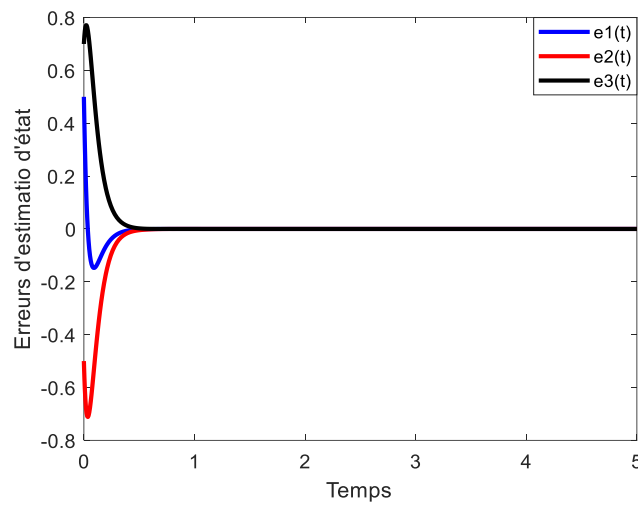


Fig.3.30. Erreurs d'estimation d'état.

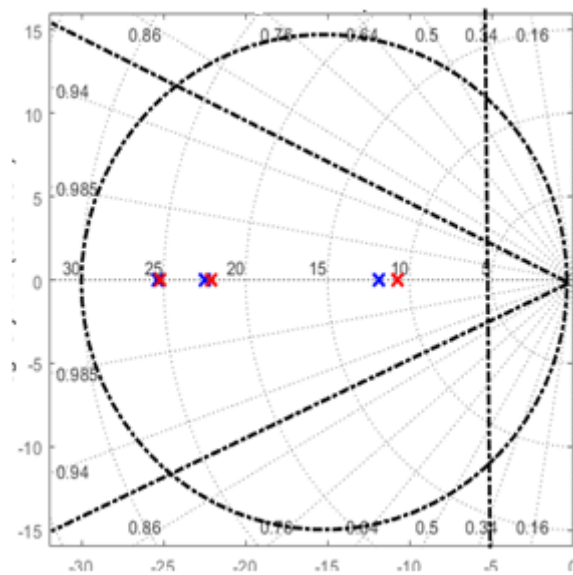


Fig.3.31. Migration des valeurs propres des matrices locales $A_i - L_i C$.

Pour conclure cette section, on peut dire que le conservatisme lié aux constantes de lipschitz et aux bornes de l'état et de l'entrée a été outrepassé en utilisant un retour de sortie

supplémentaire dans les variables de prémisses de l'observateur. Cependant, l'obtention d'un modèle TS selon la méthode des secteurs non linéaires ne permet pas toujours d'avoir des variables de prémisses distribuées selon une matrice H , ce qui constitue une limitation à l'approche proposée.

3.4. Estimation d'état et des entrées inconnues

3.4.1. Observateurs PI et PMI \mathcal{L}_2 basés sur le lemme de Finsler

Les systèmes physiques sont souvent soumis à deux types d'entrées ; les entrées connues qui représentent les commandes du système et les entrées inconnues qui peuvent être des perturbations, des défauts, des erreurs de modélisation ou des bruits de mesure. Ne pas prendre en considération ces entrées inconnues dans le problème de synthèse d'observateurs peut mener à une estimation dégradée des états du système.

Un observateur à entrées inconnues ou Unknown Input Observer (UIO) en anglais est un observateur capable de fournir une estimation des états du système en présence d'entrées inconnues.

On distingue deux types d'observateurs à entrées inconnues ; les observateurs basés sur le découplage parfait entre l'erreur d'estimation d'état et les entrées inconnues et les observateurs permettant l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues tout en cherchant à minimiser l'effet de ces dernières sur l'erreur d'estimation d'état.

La première catégorie d'observateurs permet de rendre l'erreur d'estimation d'état insensible aux entrées inconnues en imposant certaines contraintes structurelles [Darouch et al., 1994], [Gaddouna et al., 1994]. Dans cette catégorie, l'estimation directe des entrées inconnues n'est pas considérée. Cependant, les états estimés par l'observateur peuvent servir à l'estimation des entrées inconnues. Une telle estimation nécessite l'utilisation des dérivées temporelles des signaux de sorties qui sont souvent entachées de bruits de mesure ce qui rend l'estimation quelque peu délicate [Hou et Patton, 1998]. Ce type d'observateur a été étendu aux systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles dans [Chadli, 2010], [Yeh et al., 2015], [Vu et al., 2018].

La seconde catégorie d'observateurs permet d'estimer simultanément l'état du système et les entrées inconnues en utilisant une ou plusieurs actions intégrales. Ces observateurs permettent également de minimiser l'effet des entrées inconnues sur l'erreur d'estimation d'état [Ichalal et al., 2009], [Fuqiang You et al., 2020].

L'observateur Proportionnel Intégral (PI) appartient à la deuxième catégorie d'observateurs à entrées inconnues (voir Figure 3.32). Il fournit généralement une estimation acceptable des entrées inconnues même en présence de bruits de mesure. Son gain intégral permet de réduire le conservatisme des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état mais l'hypothèse des entrées inconnues constantes réduit la classe de signaux estimés. Néanmoins, les signaux à dynamique lente peuvent être estimés en augmentant le gain de l'observateur.

L'observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI) constitue une généralisation de l'observateur PI, plusieurs actions intégrales sont mises en œuvre pour estimer les entrées inconnues. Il repose sur l'estimation simultanée des q premières dérivées de l'entrée inconnue.

Dans ce qui suit, nous allons généraliser les résultats obtenus dans la section 3.3.2.1 à la synthèse d'observateurs PI et PMI.

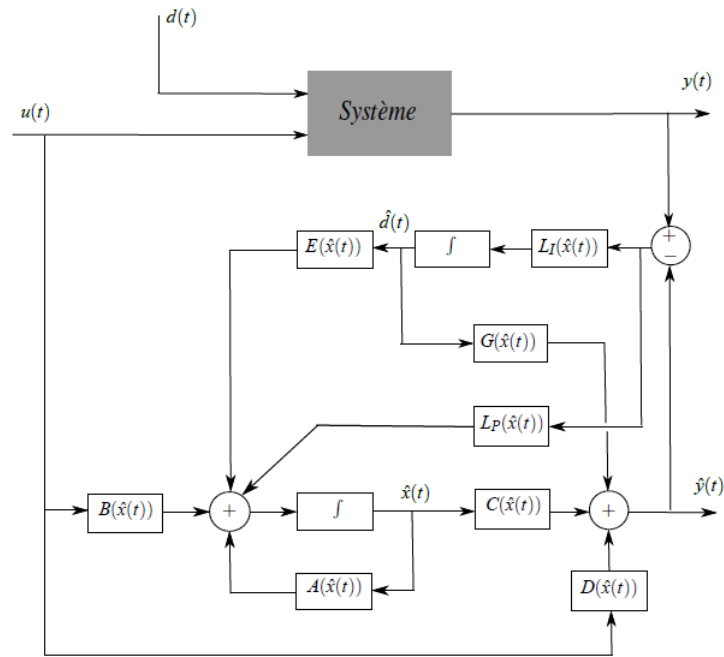


Fig.3.32. Structure d'un observateur Proportionnel-Intégral (PI) [Nagy-Kiss, 2010]

3.4.1.1. Synthèse d'un observateur Proportionnel Intégral (PI)

Nous considérons la classe de systèmes non linéaires décrits par une structure de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables soumis à des entrées inconnues

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)), \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t). \end{cases} \quad (3.188)$$

$d(t) \in \mathbb{R}^d$ représente le vecteur des entrées inconnues. E_i et G sont les matrices de répartition des entrées inconnues (de dimensions appropriées).

Le système (3.188) vérifie les hypothèses 3.2 et 3.3.

Hypothèse 3.7

L'entrée inconnue $d(t)$ est supposée constante i.e :

$$\dot{d}(t) = 0. \quad (3.189)$$

En pratique, on peut s'affranchir de cette hypothèse en augmentant les gains de l'observateur. Cela peut cependant provoquer une certaine sensibilité aux bruits de mesure.

Afin d'estimer conjointement le vecteur d'état et celui des entrées inconnues, l'observateur Proportionnel Intégral suivant est considéré

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{d}(t) + L_{P_i} (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) (L_{I_i} (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + G\hat{d}(t). \end{cases} \quad (3.190)$$

où L_{Pi} et L_{Ii} sont respectivement les gains proportionnels et intégraux de l'observateur PI.

Le système TS (3.188) à VDNM est exprimé sous la forme pseudo-perturbée suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x})(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t) + \omega(t)), \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t), \end{cases} \quad (3.191)$$

où

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^r (h_i(x) - h_i(\hat{x}))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)). \quad (3.192)$$

En se basant sur l'hypothèse 3.7, le système (3.191) peut s'écrire sous la forme augmentée

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \tilde{A}_{\hat{h}} x_a(t) + \tilde{B}_{\hat{h}} u(t) + \tilde{W} \omega(t), \\ y(t) = \tilde{C} x_a(t), \end{cases} \quad (3.193)$$

où

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \tilde{A}_{\hat{h}} = \begin{bmatrix} A_{\hat{h}} & E_{\hat{h}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_{\hat{h}} = \begin{bmatrix} B_{\hat{h}} \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{W} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [C \quad G] \quad (3.194)$$

L'observateur (3.190) est également mis sous forme augmentée

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \tilde{A}_{\hat{h}} \hat{x}_a(t) + \tilde{B}_{\hat{h}} u(t) + \tilde{L}_{\hat{h}} (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = \tilde{C} \hat{x}_a(t), \end{cases} \quad (3.195)$$

avec

$$\tilde{L}_{\hat{h}} = \begin{bmatrix} L_{P\hat{h}} \\ L_{I\hat{h}} \end{bmatrix}. \quad (3.196)$$

La dynamique d'erreur d'estimation d'état est

$$\dot{e}_a(t) = (\tilde{A}_{\hat{h}} - \tilde{L}_{\hat{h}} \tilde{C}) e_a(t) + \tilde{W} \omega(t). \quad (3.197)$$

Théorème 3.9

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.197) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$, une matrice symétrique définie positive P , des matrices X_i, Y_i, V_i et un scalaire $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$\min_{P, X_i, Y_i, V_i} \bar{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P\tilde{A}_i - X_i \tilde{C})) + I & * & * & * & 0 & 0 \\ M \otimes (\varepsilon P \tilde{A}_i - \varepsilon X_i \tilde{C}) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_i Y_i^T) & * & * & * & * \\ M \otimes (\varepsilon P \tilde{A}_i - \varepsilon X_i \tilde{C}) & -(M^T \otimes \varepsilon V_i^T) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon V_i) & * & 0 & 0 \\ M^T \otimes \tilde{W}^T P & M^T \otimes \varepsilon \tilde{W}^T P & M^T \otimes \varepsilon \tilde{W}^T P & -F & 0 & 0 \\ 0 & I \otimes Y_i^T & 0 & 0 & -F^{-1} & 0 \\ 0 & M^T \otimes \varepsilon S_i^T & 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.198)$$

où $F > 0$.

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$\tilde{L}_i = P^{-1} X_i. \quad (3.199)$$

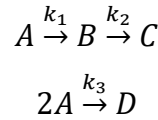
Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (3.200)$$

Preuve. La preuve du Théorème 3.9 est similaire à celle du Théorème 3.4. ■

Exemple 3.5 : Application de l'observateur PI à un réacteur à cuve agitée en continu (Continuous Stirred Tank Reactor)

Soit un réacteur isotherme à cuve agitée en continu siège de réactions en série et parallèle (réaction de type Van Der Vusse) :



Le modèle mathématique de ce réacteur est décrit par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{C}_A = \frac{F}{V}(C_{Af} - C_A) - k_1 C_A - k_3 C_A^2, \\ \dot{C}_B = -\frac{F}{V} C_B + k_1 C_A - k_2 C_B, \end{cases} \quad (3.201)$$

Le volume du réacteur V est supposé constant et le flux d'alimentation contient uniquement le composé A . k_1 , k_2 et k_3 sont les taux de réactions constants. C_{Af} est la concentration à l'entrée du réacteur du produit A qui est transformé en produit B . C_A représente la concentration en mol/l du composé A . L'entrée du système est la vitesse de dilution F/V et la sortie est la concentration du produit C_B . Les valeurs numériques des paramètres du système sont :

$$k_1 = 5/6 \text{ min}^{-1}; k_2 = 5/3 \text{ min}^{-1}; k_3 = 1/6 \text{ min}^{-1}; C_{Af} = 10 \text{ mol/l}; V = 1l.$$

Les équations relatives à C_c et C_D ont été négligées parce qu'elles sont indépendantes des concentrations C_A et C_B .

La méthode des secteurs non linéaires permet d'aboutir au modèle TS à quatre modèles locaux

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^4 h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (3.202)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} -1,4317 & 0 \\ 0,8333 & -1,6667 \end{bmatrix}, A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} -0,8361 & 0 \\ 0,8333 & -1,6667 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 6,41 \\ -1,25 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 6,41 \\ -0,0097 \end{bmatrix}, \\ B_3 &= \begin{bmatrix} 9,9835 \\ -1,25 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 9,9835 \\ -0,0097 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]. \end{aligned}$$

Les fonctions d'activation $h_i(x(t))$ sont définies par :

$$\begin{cases} h_1(x) = F_{1,1}(z_1)F_{2,1}(z_2) = \frac{C_A(t) - 0.0165}{3.5735} \cdot \frac{C_B(t) - 0.0097}{1.2403}, \\ h_2(x) = F_{1,1}(z_1)F_{2,2}(z_2) = \frac{C_A(t) - 0.0165}{3.5735} \cdot \frac{1.25 - C_B(t)}{1.2403}, \\ h_3(x) = F_{1,2}(z_1)F_{2,1}(z_2) = \frac{3.59 - C_A(t)}{3.5735} \cdot \frac{C_B(t) - 0.0097}{1.2403}, \\ h_4(x) = F_{1,2}(z_1)F_{2,2}(z_2) = \frac{3.59 - C_A(t)}{3.5735} \cdot \frac{1.25 - C_B(t)}{1.2403}. \end{cases}$$

Le réacteur est soumis à une entrée inconnue $d(t)$ avec $E_1 = E_2 = [1 \ 1]^T$ et $G=0$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.203)$$

L'entrée du système, la vitesse de dilution est représentée par la figure 3.33.

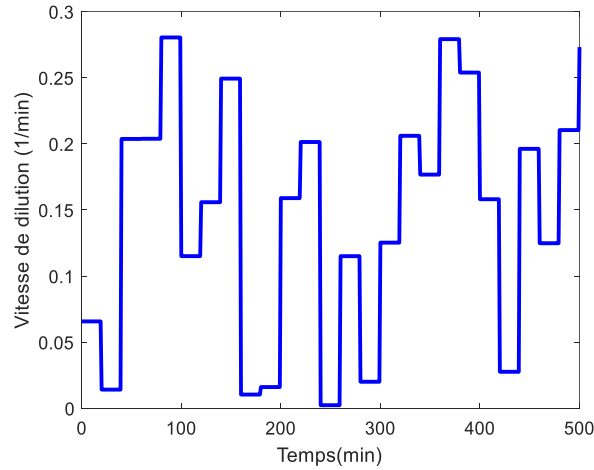


Fig.3.33. Entrée : Vitesse de dilution.

L'application des contraintes (3.198) au système (3.203) pour $\varepsilon=10^{-6}$ et pour une région LMI définie par les paramètres $\beta=1,7$, $\alpha=0$, $\theta=3\pi/11$, $s=q=11,5$ permet d'aboutir aux résultats numériques suivants

$$P = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1.3693 & -2.1672 & 0.4291 \\ -2.1672 & 5.7265 & -1.1671 \\ 0.4291 & -1.1671 & 0.2990 \end{bmatrix}, L_{P_1} = \begin{bmatrix} 8.6989 \\ 12.5150 \end{bmatrix}, L_{I_1} = 33.6711, L_{P_2} = \begin{bmatrix} 8.7069 \\ 12.5293 \end{bmatrix}, \\ L_{I_2} = 33.7128, L_{P_3} = \begin{bmatrix} 8.0706 \\ 11.8372 \end{bmatrix}, L_{I_3} = 32.0599, L_{P_4} = \begin{bmatrix} 8.0708 \\ 11.8383 \end{bmatrix}, L_{I_4} = 32.0627, \gamma = 0.0044.$$

L'estimation de la concentration du composé A et celle de l'entrée inconnue $d(t)$ sont illustrées par les Figures 3.34-3.35.

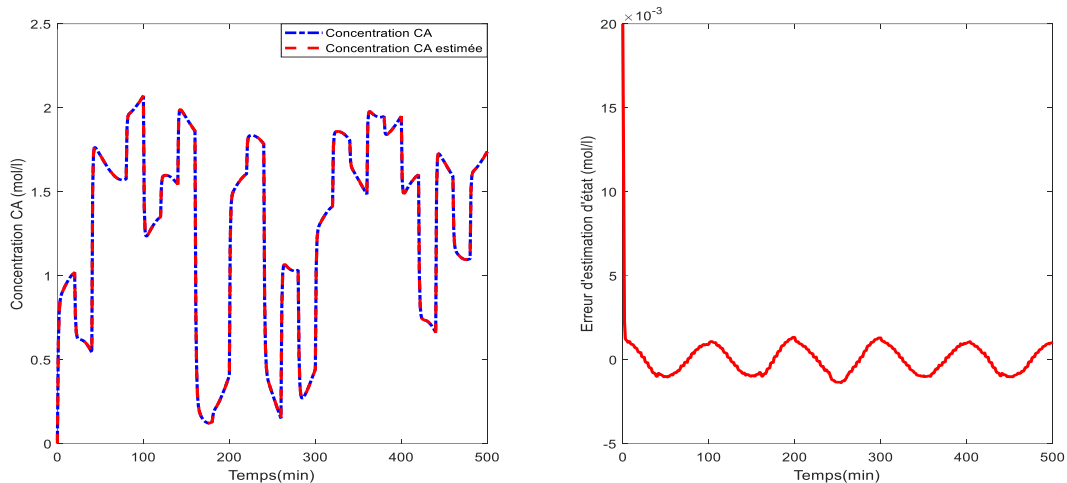


Fig.3.34. Estimation de la concentration C_A par l'observateur PI.

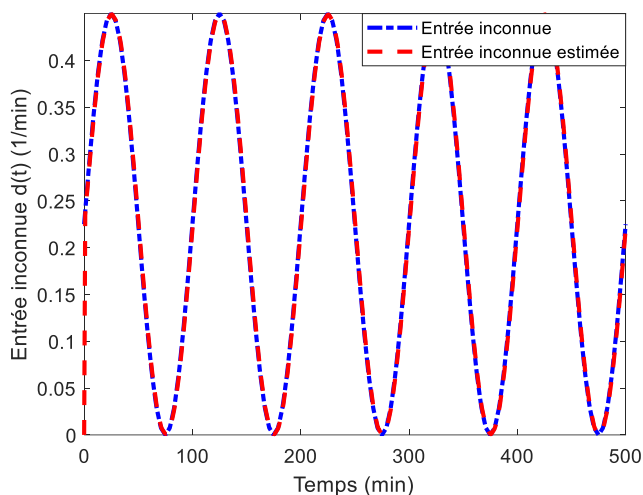


Fig.3.35. Estimation de l'entrée inconnue par l'observateur PI.

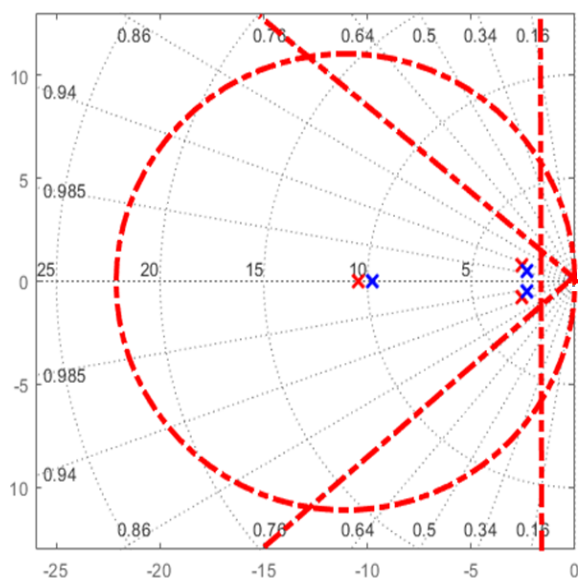


Fig.3.36. Distribution des valeurs propres des matrices $(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i \tilde{C})$ (observateur PI).

L'observateur PI fournit une estimation satisfaisante de l'état et de l'entrée inconnue même si l'hypothèse 3.7 n'est pas vérifiée. Les valeurs propres des matrices $(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i \tilde{C})$ sont contenues dans la région LMI prescrite (voir Figure 3.36).

Dans la prochaine section, nous proposons la synthèse d'un observateur PMI selon la même approche. Cet observateur fournit généralement une estimation plus performante que l'observateur PI grâce à un nombre supplémentaire d'actions intégrales.

3.4.1.2. Synthèse d'un observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI)

L'observateur PMI permet d'élargir la classe de signaux estimés en relaxant l'hypothèse 3.7 selon laquelle les entrées inconnues sont constantes.

Hypothèse 3.8

On suppose que la $q^{\text{ème}}$ dérivée de l'entrée inconnue est nulle :

$$d^{(q)}(t) = 0. \quad (3.204)$$

Pour une entrée inconnue en rampe $d(t)=a.t$, il est nécessaire d'avoir $q=2$ pour satisfaire l'hypothèse 3.8. Un autre exemple peut être donné d'une entrée inconnue de la forme $d(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$. Dans ce cas, l'hypothèse 3.10 est satisfaite pour $q=3$.

On définit alors les dérivées successives de l'entrée inconnue $d(t)$; $d^{(1)}(t), d^{(2)}(t), \dots, d^{(q-1)}(t)$ de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{d}(t) \\ \dot{d}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{d}_{q-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ \vdots \\ d_q(t) \end{bmatrix}. \quad (3.205)$$

Le système (3.188) peut s'exprimer sous la forme augmentée

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \bar{A}_h x_a(t) + \bar{B}_h u(t) + \bar{W} \omega(t), \\ y(t) = \bar{C} x_a(t), \end{cases} \quad (3.206)$$

où

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \\ d_1(t) \\ \vdots \\ d_{q-1}(t) \end{bmatrix}, \bar{A}_h = \begin{bmatrix} A_h & E_h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_h = \begin{bmatrix} B_h \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{W} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.207)$$

$$\bar{C} = [C \quad G \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \quad (3.208)$$

L'observateur PMI de degré q permettant l'estimation de l'état et de l'entrée inconnue $d(t)$ vérifiant l'hypothèse 3.8 est donné par la structure suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{d}(t) + L_{Pi} (y(t) - \hat{y}(t)) \right), \\ \dot{\hat{d}}_j(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) \left(\hat{d}_{j+1}(t) + L_{Ii}^j (y(t) - \hat{y}(t)) \right), \quad j = 1, \dots, q-1, \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) \left(\hat{d}_1(t) + L_{Ii} (y(t) - \hat{y}(t)) \right), \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + G \hat{d}(t). \end{cases} \quad (3.209)$$

On peut constater que l'estimation de l'entrée inconnue $d(t)$ passe par l'estimation de ses $q-1$ premières dérivées en utilisant $q-1$ actions intégrales d'où l'appellation de « Multi-Intégral » (voir Figure 3.37).

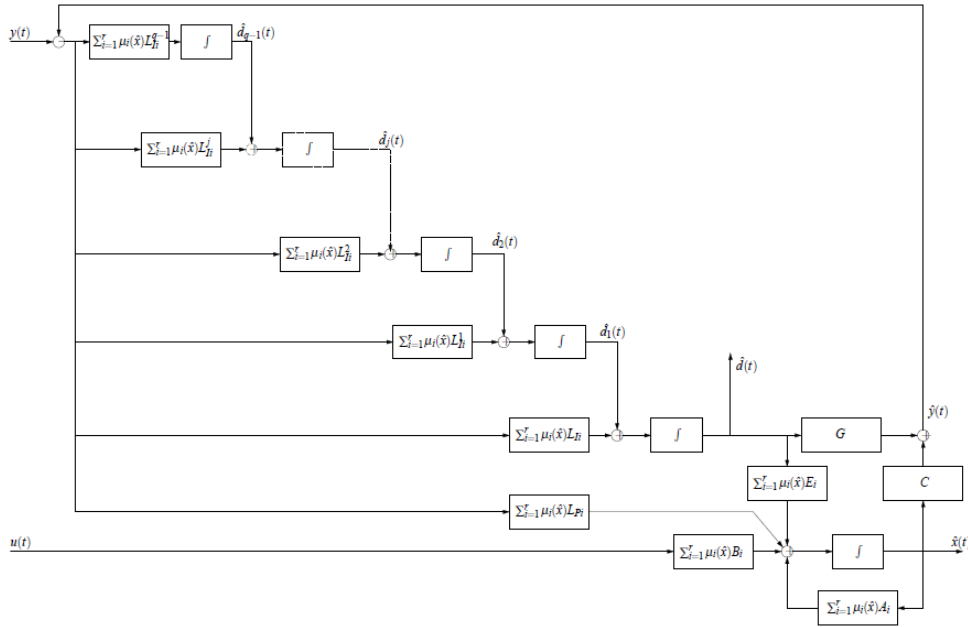


Fig.3.37. Structure d'un observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI) [Ichalal, 2009].

L'observateur PMI (3.209) s'écrit sous forme augmentée comme suit

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \bar{A}_h \hat{x}_a(t) + \bar{B}_h u(t) + \bar{L}_h (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = \bar{C} \hat{x}_a(t), \end{cases} \quad (3.210)$$

avec

$$\bar{L}_h = \begin{bmatrix} L_{Pi}^T & L_{Ii}^T & L_{Ii}^{1T} & \dots & L_{Ii}^{q-1T} \end{bmatrix}^T. \quad (3.211)$$

Comme précédemment, il est aisé de déterminer la dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$\dot{e}_a(t) = (\bar{A}_h - \bar{L}_h \bar{C}) e_a(t) + \bar{W} \omega(t). \quad (3.212)$$

Théorème 3.10

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.212) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné s'il existe un scalaire $\varepsilon > 0$, une matrice symétrique définie positive P , des matrices X_i, Y_i, V_i et un scalaire $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$\min_{P, X_i, Y_i, V_i} \bar{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P\bar{A}_i - X_i\bar{C})) + I & * & * & * & 0 & 0 \\ M \otimes (\varepsilon P\bar{A}_i - \varepsilon X_i\bar{C}) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon S_i Y_i^T) & * & * & * & * \\ M \otimes (\varepsilon P\bar{A}_i - \varepsilon X_i\bar{C}) & -(M^T \otimes \varepsilon V_i^T) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon V_i) & * & 0 & 0 \\ M^T \otimes \bar{W}^T P & M^T \otimes \varepsilon \bar{W}^T P & M^T \otimes \varepsilon \bar{W}^T P & -F & 0 & 0 \\ 0 & I \otimes Y_i^T & 0 & 0 & -F^{-1} & 0 \\ 0 & M^T \otimes \varepsilon S_i^T & 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.213)$$

où $F > 0$.

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$\bar{L}_i = P^{-1} X_i. \quad (3.214)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (3.215)$$

Preuve. La démonstration du Théorème 3.10 est identique à celle du Théorème 3.4. ■

Exemple 3.6 : Application de l'observateur PMI à un réacteur à cuve agitée en continu

Dans cette partie, nous appliquons l'observateur PMI présenté ci-dessus au système (3.203). Les matrices de gains proportionnels et intégraux de l'observateur pour $\varepsilon=10^{-7}$ sont

$$L_{P_1} = L_{P_2} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.0514 \\ 0.0322 \end{bmatrix}, L_{I_1} = L_{I_2} = 0.3939 \cdot 10^3, L_{I_1}^1 = L_{I_2}^1 = 2.1835 \cdot 10^3, L_{I_1}^2 = L_{I_2}^2 = 5.0592 \cdot 10^3,$$

$$L_{I_1}^3 = L_{I_2}^3 = 5.0307 \cdot 10^3, L_{P_3} = L_{P_4} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0.0547 \\ 0.0323 \end{bmatrix}, L_{I_3} = L_{I_4} = 0.3968 \cdot 10^3, L_{I_3}^1 = L_{I_4}^1 = 2.2240 \cdot 10^3,$$

$$L_{I_3}^2 = L_{I_4}^2 = 5.1788 \cdot 10^3, L_{I_3}^3 = L_{I_4}^3 = 5.1631 \cdot 10^3, \gamma = 0.0521.$$

Les résultats de l'estimation d'état et de l'entrée inconnue du CSTR sont présentés par les Figures 3.38-3.40.

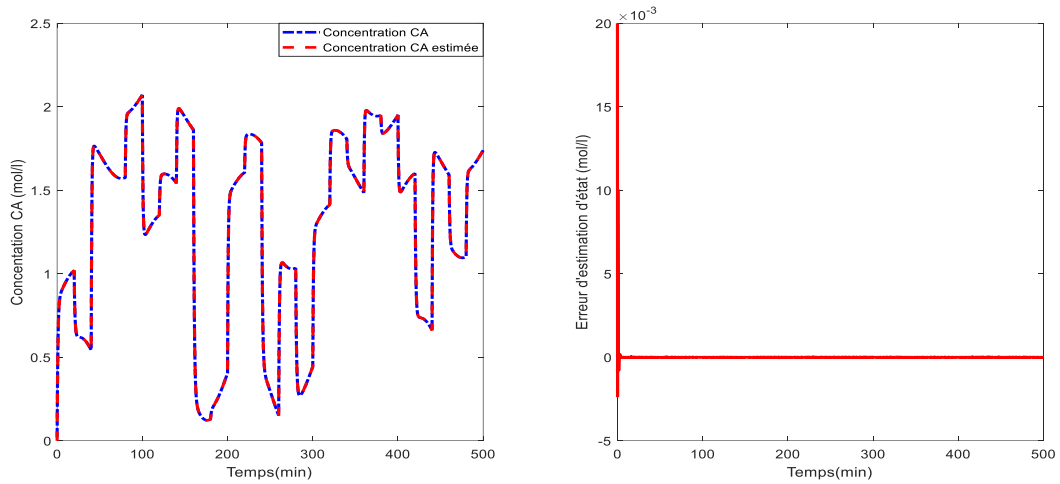


Fig.3.38. Estimation de la concentration C_A par l'observateur PMI.

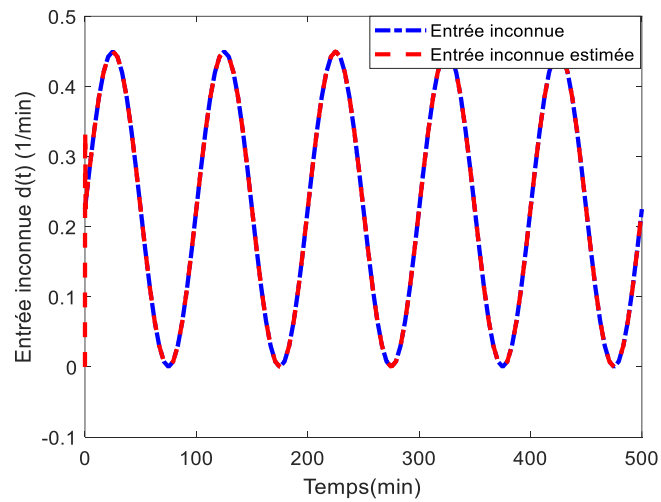


Fig.3.39. Estimation de l'entrée inconnue par l'observateur PMI.

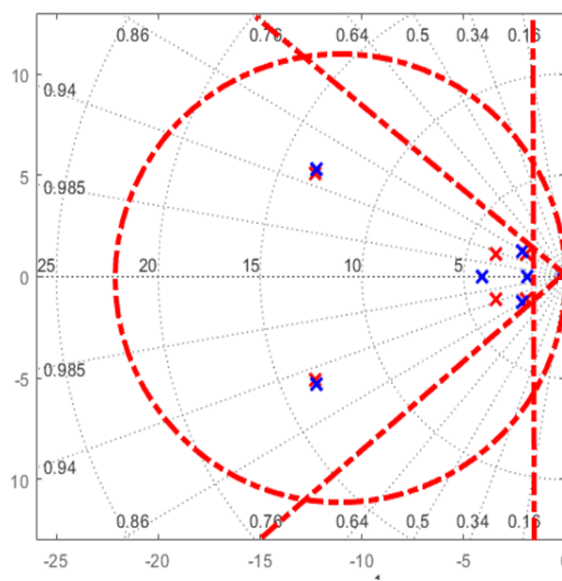


Fig.3.40. Distribution des valeurs propres des matrices $(\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C})$ (observateur PMI).

On constate que l'observateur PMI synthétisé permet d'obtenir des estimations de l'état et de l'entrée inconnue très satisfaisantes du fait de la présence d'un nombre suffisant d'actions intégrales. De plus, les valeurs propres des matrices $\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}$ « migrent » vers la région LMI imposée.

Les matrices $\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}$ étant constituées des éléments des matrices A_i et de ceux des matrices E_i , il peut s'avérer parfois difficile d'imposer une dynamique trop rapide aux observateurs locaux. Le choix des paramètres de la région LMI est alors déterminé par la satisfaction d'un compromis entre rapidité et faisabilité du problème d'optimisation.

3.4.2. Observateur \mathcal{L}_2 d'état et des défauts actionneurs

Qu'est-ce qu'un défaut ?

Un défaut est défini comme étant une déviation non permise d'une caractéristique du système de sa valeur nominale. On distingue trois types de défauts selon leur localisation : les défauts actionneurs, les défauts capteurs et les défauts système (voir Figure 3.41).

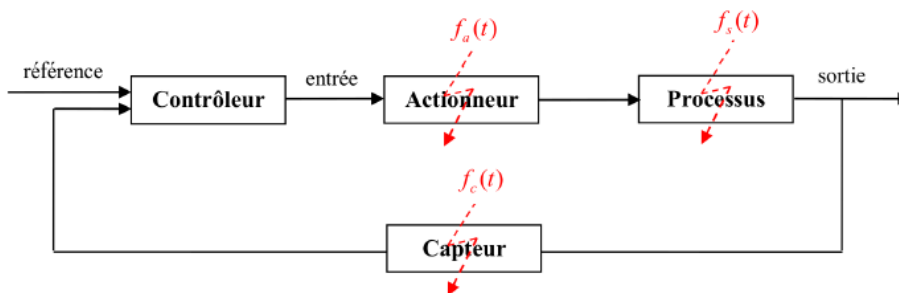


Fig.3.41. Classification des défauts selon leur localisation.

Défauts actionneurs

Les défauts actionneurs agissent sur la partie opérative en détériorant le signal du système. Ils peuvent causer une perte totale (défaillance) ou partielle d'un actionneur agissant sur le système.

Les défauts actionneurs les plus fréquents sont (voir Figure 3.42) : l'oscillation, le blocage, la saturation et la perte d'efficacité.

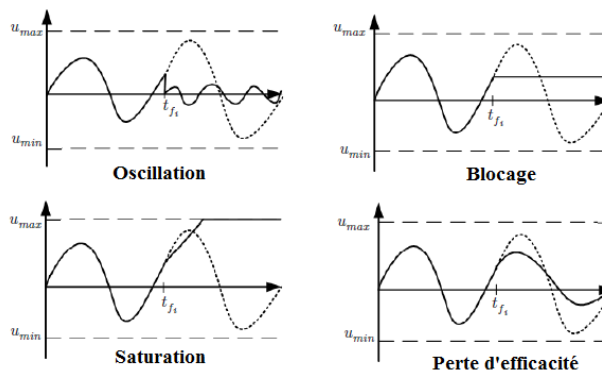


Fig.3.42. Défauts actionneurs les plus répandus [Ducard, 2009]. Les lignes pointillées sont les valeurs désirées de l'actionneur. Les lignes en trait plein représentent les valeurs actuelles.

Défauts capteurs

Un défaut capteur est une mauvaise image de la grandeur à mesurer. Les défauts capteurs les plus rencontrés sont : le biais, la dérive, la perte d'efficacité, le blocage, le défaut de calibrage (Figure 3.43).

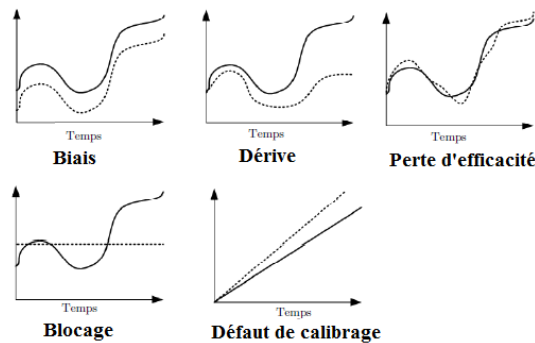


Fig.3.43. Défauts capteurs les plus répandus. Les lignes pointillées désignent les valeurs mesurées par le capteur. Les lignes en trait plein représentent les valeurs réelles.

Défauts système

Ce type de défaut provient du système lui-même. Il peut résulter de la casse ou de l'altération d'un composant du système réduisant les capacités de ce dernier à effectuer la tâche requise. Les défauts qui n'appartiennent pas aux défauts actionneurs ou capteurs sont souvent classés arbitrairement dans cette catégorie.

Les défauts peuvent aussi être classés selon leur caractéristique temporelle comme suit (voir Figure 3.44) :

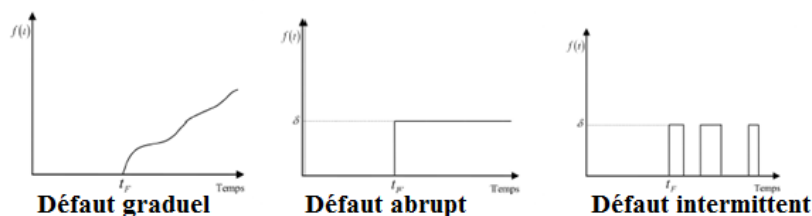


Fig.3.44. Evolutions temporelles des différents types de défauts.

Défauts graduels

Ils représentent des changements paramétriques lents qui résultent souvent d'un encrassement, d'une dérive ou de l'usure d'une pièce. Du fait de leurs caractéristiques lentes, ils sont difficiles à détecter. Une représentation mathématique de ce type de défaut est donnée par l'équation suivante

$$f(t-t_f) = \begin{cases} \delta(1 - e^{-\alpha(t-t_f)}) & t \geq t_f, \\ 0 & t < t_f. \end{cases} \quad (3.216)$$

Défauts abrupts

Ils se produisent instantanément souvent à la suite d'un dommage matériel. Ils peuvent s'avérer très sévères, car ils affectent les performances et/ou la stabilité du système. L'évolution d'un défaut abrupt peut être exprimée par

$$f(t-t_f) = \begin{cases} \delta & t \geq t_f, \\ 0 & t < t_f. \end{cases} \quad (3.217)$$

Défauts intermittents

Ces défauts apparaissent et disparaissent à plusieurs reprises. Ils sont souvent causés par un faux contact ou un câblage partiellement endommagé.

Les défauts sont aussi classés selon leur modélisation mathématique en défauts additifs et défauts multiplicatifs (Figure 3.45).

Défauts additifs

Ce sont des défauts qui se superposent au signal de commande ou de mesure. Les défauts actionneurs ou capteurs sont souvent modélisés par des défauts additifs.

Défauts multiplicatifs

Les défauts qui affectent le procédé d'une façon dépendante des entrées connues sont considérés comme des défauts multiplicatifs. Les défauts système (ou composant) sont modélisés par des défauts multiplicatifs.

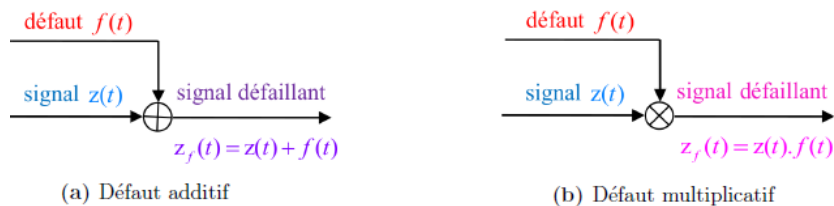


Fig.3.45. Défauts additif et multiplicatif.

Les principales méthodes de diagnostic des défauts

Le diagnostic des défauts peut être défini comme « l'établissement d'une corrélation entre des caractéristiques ou symptômes et des situations types » [Benchimol et al., 1986]. Il s'articule généralement autour de trois activités :

- *la détection* : qui a pour but de signaler la présence d'un défaut,
- *la localisation* : qui permet de cerner les éléments défectueux du système en remontant à l'origine du défaut,
- *l'identification* : permet de déterminer l'instant d'apparition du défaut, sa durée et son amplitude.

Les techniques de diagnostic reposent sur la notion de redondance qui est la possibilité de connaître la valeur d'une variable de différentes manières. Nous pouvons distinguer deux types de redondances :

- **Redondance matérielle** : Afin de s'assurer de la validité d'une mesure. La redondance matérielle consiste à mesurer la même grandeur physique avec différents capteurs. Les valeurs obtenues sont ensuite comparées deux à deux. La différence entre deux mesures, supérieures à un certain seuil est révélatrice de défauts. Cette approche a pour avantage

d'être fiable. Par contre, elle peut s'avérer coûteuse et poser des problèmes d'encombrement et de surcharge matériels.

- **Redondance analytique** : Elle est basée sur l'exploitation de relations analytiques liant différentes grandeurs mesurées du système. Ces relations de redondance analytiques peuvent être issues de l'expression mathématique de lois physiques ou déduites d'une analyse statistique des mesures. Cette approche permet de limiter le nombre de capteurs nécessaires à la surveillance et permet d'appréhender des défauts affectant aussi bien la chaîne d'instrumentation que le système commandé ou ses organes de commande parce qu'elle permet d'intégrer plus d'informations que la redondance matérielle.

On peut généralement distinguer deux grandes familles de méthodes de diagnostic (Tableau 3.5) :

- **Méthodes à base de modèle** : Ces méthodes nécessitent souvent une connaissance approfondie du système physique incluant des relations causales entre les différents éléments,
- **Méthodes sans modèle** : Ces méthodes ne nécessitent pas une connaissance accrue du système physique mais une connaissance glanée à partir d'expérience passées (on parlera aussi de connaissance superficielle).

| Méthodes de diagnostic | | | |
|--|---|--|---|
| A base de modèle | | Sans modèle | |
| Modèles qualitatifs | Modèles quantitatifs | Méthodes qualitatives | Méthodes quantitatives |
| <ul style="list-style-type: none"> ■ Graphes d'influence [Blanke et al., 2006], [Travé-Massuyès et al., 1997], ■ Réseaux de Petri [Lefebvre et Delherm, 2007], [Seatzu et al., 2013], ■ Logique floue [Mendonça et al., 2009], [Palade et Bocaniala, 2006]. | <ul style="list-style-type: none"> ■ Espace de parité [Patton et Chen, 1991], [Hwang et al., 2014], [Cui et Sun, 2019], ■ Observateurs [Patton et Chen, 1997], [Zhang et al., 2016], [Zhonghai et al., 2018], ■ Estimation paramétrique [Jiang et al., 2007], [Cimpoesu et al., 2013]. | <ul style="list-style-type: none"> ■ Systèmes experts [Venkatasubramanian et al., 2003], [Angeli, 2008], ■ AMDE/AMDEC [Zwingelstein, 1995], [Villemeur, 1988]. | <ul style="list-style-type: none"> ■ Analyse en composantes principales [Pessel et al., 2007], [Tharrault et al., 2008], ■ Reconnaissance de formes [Dubuisson, 1990], [Rauber et al., 2010], ■ Réseaux de neurones [Korbicz et al., 2004], [Koppen-Seliger et Frank, 1996], ■ Analyse qualitative de la tendance [Zhou et Ye, 2017], |

Tableau 3.5. Classification des méthodes de diagnostic.

Dans ce qui suit, nous proposons d'étendre les résultats obtenus dans [Zhang et al., 2008] à l'estimation des défauts actionneurs des systèmes non linéaires décrits par des modèles TS à VDNM sous contrainte de \mathcal{D} -stabilité.

Soit le système non linéaire décrit par le modèle TS suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i f_a(t)), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (3.218)$$

$f_a(t) \in \mathbb{R}^q$ représente le vecteur des défauts actionneur.

Le système (3.218) vérifie les hypothèses 3.2 et 3.3.

Hypothèse 3.9

Le défaut $f_a(t)$ est borné en norme:

$$\|f_a(t)\|_2 < \sigma, \sigma > 0. \quad (3.219)$$

Le système (3.218) peut être réécrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i f_a(t) + \omega(t)), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (3.220)$$

avec $\omega(t) = \sum_{i=1}^r (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))) (A_i x(t) + B_i u(t) + E_i f_a(t))$.

Hypothèse 3.10

$$\text{rang}(CE_i) = q. \quad (3.221)$$

L'observateur permettant l'estimation conjointe du vecteur d'état et des défauts actionneurs est donné par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{f}_a(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \dot{\hat{f}}_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{x}) \Gamma K_i ((\dot{y}(t) - \dot{\hat{y}}(t)) + \lambda (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \quad (3.222)$$

$\Gamma \in \mathbb{R}_S^{q \times q}$ est le taux d'apprentissage, λ est un scalaire positif.

Soit les erreurs d'estimation d'état et de défaut

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (3.223)$$

$$e_{f_a}(t) = f_a(t) - \hat{f}_a(t). \quad (3.224)$$

Les dynamiques de l'erreur d'estimation d'état et d'estimation du défaut sont données par

$$\dot{e}_x(t) = (A_{\hat{h}} - L_{\hat{h}} C) e_x(t) + E_{\hat{h}} e_{f_a}(t) + \omega(t), \quad (3.225)$$

$$\dot{e}_{f_a}(t) = \dot{f}_a(t) + (\Gamma K_{\hat{h}} C L_{\hat{h}} C - \Gamma K_{\hat{h}} C A_{\hat{h}} - \lambda \Gamma K_{\hat{h}} C) e_x(t) - \Gamma K_{\hat{h}} C E_{\hat{h}} e_{f_a}(t) - \Gamma K_{\hat{h}} C \omega(t). \quad (3.226)$$

Définissons le système augmenté suivant

$$\dot{e}_a(t) = \tilde{A}_{\hat{h}} e_a(t) + \tilde{W}_{\hat{h}} \tilde{\omega}(t), \quad (3.227)$$

où

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_{f_a}(t) \end{bmatrix}, \tilde{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \dot{f}_a(t) \end{bmatrix}, \tilde{A}_{\hat{h}} = \begin{bmatrix} A_{\hat{h}} - L_{\hat{h}} C & E_{\hat{h}} \\ \Gamma K_{\hat{h}} C L_{\hat{h}} C - \Gamma K_{\hat{h}} C A_{\hat{h}} - \lambda \Gamma K_{\hat{h}} C & -\Gamma K_{\hat{h}} C E_{\hat{h}} \end{bmatrix}, \tilde{W}_{\hat{h}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Gamma K_{\hat{h}} C & I \end{bmatrix}.$$

Les conditions de \mathcal{D} -stabilité du système (3.227) sont énoncées par les Théorèmes 3.11 ou 3.12.

- **Cas 1 :** $K_i C = E_i^T P$

Théorème 3.11

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.227) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\tilde{\omega}(t)$ vers $e_a(t)$ est borné s'il existe deux matrices symétriques définies positives P et S , des matrices X_i, K_i et un scalaire positif $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$\min_{P, S, X_i} \bar{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_i C)) + I & * & * & 0 \\ M \otimes \left(\frac{1}{\lambda} E_i^T X_i C - \frac{1}{\lambda} E_i^T PA_i\right) & L \otimes \frac{1}{\lambda} S - \text{Sym}\left(M \otimes \frac{1}{\lambda} E_i^T PE_i\right) + I & * & * \\ M^T \otimes P & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} PE_i & -\bar{\gamma} I & 0 \\ 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} S & 0 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.228)$$

$$K_i C = E_i^T P. \quad (3.229)$$

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$L_i = P^{-1} X_i. \quad (3.230)$$

$$\Gamma = S^{-1}. \quad (3.231)$$

Preuve. Afin de démontrer la \mathcal{D} -stabilité du système (3.227), on considère la FLQ candidate suivante

$$V(e_x, e_{f_a}) = e_x^T P e_x + \frac{1}{\lambda} e_{f_a}^T \Gamma^{-1} e_{f_a}, \quad P = P^T > 0, \quad \Gamma = \Gamma^T. \quad (3.232)$$

Sa dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \text{Sym}(e_x^T (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}} C) e_x + e_x^T PE_{\hat{h}} e_{f_a} + e_x^T P \omega + \frac{1}{\lambda} e_{f_a}^T (K_{\hat{h}} CL_{\hat{h}} C - K_{\hat{h}} CA_{\hat{h}} - \lambda K_{\hat{h}} C) e_x - \frac{1}{\lambda} e_{f_a}^T K_{\hat{h}} CE_{\hat{h}} e_{f_a} \\ & - \frac{1}{\lambda} e_{f_a}^T K_{\hat{h}} C \omega). \end{aligned} \quad (3.233)$$

Le système (3.227) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\tilde{\omega}(t)$ vers $e_a(t)$ est borné si la condition suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} L \otimes V(e_a) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V} + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V} + (I \otimes e_x^T)(I \otimes e_x) + (I \otimes e_{f_a}^T)(I \otimes e_{f_a}) - \gamma^2 (I \otimes \omega^T)(I \otimes \omega) \\ - \gamma^2 (I \otimes \dot{f}_a^T)(I \otimes \dot{f}_a) < 0. \end{aligned} \quad (3.234)$$

En utilisant la propriété (3.18) du produit de Kronecker, l'inégalité (3.234) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$X^T \begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}}C)) + I & * & * & 0 \\ M \otimes \left(\frac{1}{\lambda}(K_{\hat{h}}CL_{\hat{h}}C - K_{\hat{h}}CA_{\hat{h}}) - K_{\hat{h}}C + E_{\hat{h}}^T P\right) & L \otimes \frac{1}{\lambda}\Gamma^{-1} - \text{Sym}\left(M \otimes \frac{1}{\lambda}K_{\hat{h}}CE_{\hat{h}}\right) + I & 0 & * \\ M^T \otimes P & M^T \otimes \frac{1}{\lambda}C^T K_{\hat{h}}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda}\Gamma^{-1} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} X < 0, \quad (3.235)$$

avec $X^T = \left[(I \otimes e_x^T) \quad (I \otimes e_{f_a}^T) \quad (I \otimes \omega^T) \quad (I \otimes f_a^T) \right]$.

La négativité de l'inégalité (3.235) est garantie si

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}}C)) + I & * & * & 0 \\ M \otimes \left(\frac{1}{\lambda}(K_{\hat{h}}CL_{\hat{h}}C - K_{\hat{h}}CA_{\hat{h}}) - K_{\hat{h}}C + E_{\hat{h}}^T P\right) & L \otimes \frac{1}{\lambda}\Gamma^{-1} - \text{Sym}\left(M \otimes \frac{1}{\lambda}K_{\hat{h}}CE_{\hat{h}}\right) + I & 0 & * \\ M^T \otimes P & M^T \otimes \frac{1}{\lambda}C^T K_{\hat{h}}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda}\Gamma^{-1} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.236)$$

En prenant en compte la contrainte égalité suivante

$$K_{\hat{h}}C = E_{\hat{h}}^T P, \quad (3.237)$$

l'inégalité (3.236) devient

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_{\hat{h}} - PL_{\hat{h}}C)) + I & * & * & 0 \\ M \otimes \left(\frac{1}{\lambda}(E_{\hat{h}}^T PL_{\hat{h}}C - E_{\hat{h}}^T PA_{\hat{h}})\right) & L \otimes \frac{1}{\lambda}\Gamma^{-1} - \text{Sym}\left(M \otimes \frac{1}{\lambda}E_{\hat{h}}^T PE_{\hat{h}}\right) + I & 0 & * \\ M^T \otimes P & M^T \otimes \frac{1}{\lambda}PE_{\hat{h}} & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda}\Gamma^{-1} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.238)$$

La condition suffisante (3.228) est alors obtenue en considérant les changements de variables $X_i = PL_i$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$. ■

Remarque 3.5

La contrainte égalité (3.237) peut être remplacée par le problème d'optimisation [Corless et Tu, 1998]

min η

$$\begin{bmatrix} \eta I & E_i^T P - K_i C \\ * & \eta I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.239)$$

- **Cas 2 :** $K_i C \neq E_i^T P$

Théorème 3.12

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Le système (3.227) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\tilde{w}(t)$ vers $e_a(t)$ est borné s'il existe deux matrices symétriques définies positives P et S , des matrices X_i, K_i et deux scalaires positifs $\bar{\gamma}$ et μ tels que les conditions suivantes sont vérifiées $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

$$\min_{P, S, X_i} \bar{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_i - X_i C)) + I & * & * & 0 & 0 & * & 0 \\ M \otimes (E_i^T P - K_i C - \frac{1}{\lambda} K_i C A_i) & L \otimes \frac{1}{\lambda} S - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_i C E_i) + I & * & * & * & 0 & 0 \\ M^T \otimes P & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} C^T K_i^T & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} S & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} C^T K_i^T & 0 & 0 & -G^{-1} & 0 & 0 \\ M \otimes X_i C & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu(I \otimes P) & \mu I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & -G \end{bmatrix} < 0, \quad (3.240)$$

où $G > 0$.

Les gains de l'observateur sont déterminés par

$$L_i = P^{-1} X_i, \quad (3.241)$$

$$\Gamma = S^{-1}. \quad (3.242)$$

Preuve. On réécrit d'abord l'inégalité (3.236) comme suit

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h - PL_h C)) + I & * & * & 0 \\ M \otimes (E_h^T P - K_h C - \frac{1}{\lambda} K_h C A_h) & L \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C E_h) + I & 0 & * \\ M^T \otimes P & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} C^T K_h^T & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{Sym} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Omega} \begin{bmatrix} M \otimes L_h C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0. \quad (3.243)$$

L'application de la relation de Young à la matrice Ω permet d'écrire

$$\Omega \leq \begin{bmatrix} 0 \\ I \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 0 & I \otimes \frac{1}{\lambda} C^T K_h^T & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^T \otimes C^T L_h^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G^{-1} \begin{bmatrix} M \otimes L_h C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G > 0. \quad (3.244)$$

Le complément de Schur est ensuite considéré

$$\begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h - PL_h C)) + I & * & * & 0 & 0 & * \\ M \otimes (E_h^T P - K_h C - \frac{1}{\lambda} K_h C A_h) & L \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C E_h) + I & * & * & * & 0 \\ M^T \otimes P & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} C^T K_h^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} C^T K_h^T & 0 & 0 & -G^{-1} & 0 \\ \hline M \otimes L_h C & 0 & 0 & 0 & 0 & -G \end{bmatrix} < 0. \quad (3.245)$$

L'inégalité (3.245) est divisée comme indiqué ci-dessus

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.246)$$

Soit la matrice W

$$W = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \otimes P \end{bmatrix}. \quad (3.247)$$

La propriété de congruence (Lemme 3.4) permet d'écrire ce qui suit

$$\begin{cases} W^T N W < 0, \\ \begin{bmatrix} N_{11} & * \\ (I \otimes P) N_{12}^T & (I \otimes P) N_{22} (I \otimes P) \end{bmatrix} < 0. \end{cases} \quad (3.248)$$

L'inégalité (3.248) implique que $N_{22} < 0$, on peut alors écrire

$$\left((I \otimes P) + \mu N_{22}^{-1} \right)^T N_{22} \left((I \otimes P) + \mu N_{22}^{-1} \right) < 0 \Leftrightarrow (I \otimes P) N_{22} (I \otimes P) < -2\mu (I \otimes P) - \mu^2 N_{22}^{-1}. \quad (3.249)$$

En substituant (3.249) dans (3.248) et en appliquant le complément de Schur, on obtient

$$\begin{bmatrix} N_{11} & * & 0 \\ (I \otimes P) N_{12}^T & -2\mu (I \otimes P) & \mu I \\ 0 & \mu I & N_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.250)$$

En remplaçant N_{11}, N_{12} et N_{22} par leurs expressions et en considérant les changements de variable $X_i = PL_i$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$, on aboutit à la contrainte (3.240) du Théorème 3.12. ■

Exemple 3.7: Application de l'observateur de défaut à un exemple académique

Soit le système décrit par le multi-modèle TS suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=1}^2 h_i(x) (A_i x + B_i (u + f_a)), \\ y = Cx. \end{cases} \quad (3.251)$$

Les matrices et les fonctions d'activation du système sont

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0.7 \\ 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0.6 \\ 3 & 3 \\ 2 & 0.1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_1(x) = \frac{1 - \tanh(x_1)}{2}, h_2(x) = 1 - h_1(x) = \frac{1 + \tanh(x_1)}{2}$$

Le Théorème 3.11 aboutissant à un problème d'optimisation infaisable pour une région LMI définie par $\beta=3, \alpha=0, \theta=3\pi/11, s=q=11$, nous appliquons le Théorème 3.12 au système. Les solutions correspondantes sont (pour $\lambda=10, \mu=10$):

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.8190 & 6.0586 \\ 7.2708 & -7.8852 \\ 0.0960 & 2.0544 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.4778 & 4.6451 \\ 6.4827 & -5.1585 \\ -0.2988 & 3.4536 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0.0060 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0165 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} -0.5293 & 2.1384 \\ 3.0351 & -4.0669 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.6510 & 2.4631 \\ 2.5618 & -4.2753 \end{bmatrix}, \gamma = 6.9547.$$

Les résultats de simulation sont illustrés par les Figures 3.46-3.49.

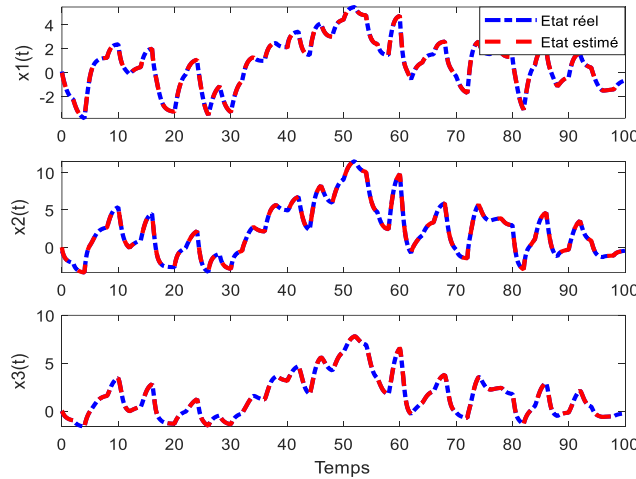


Fig.3.46. Evolution des états du système et de leurs estimés.

L'observateur proposé offre une estimation satisfaisante des états et des défauts actionneurs. Comme le montrent les Figures 3.48-3.49 et le Tableau 3.6, les valeurs propres des matrices \tilde{A}_i et $A_i - L_i C$ restent à l'intérieur de la région LMI imposée.

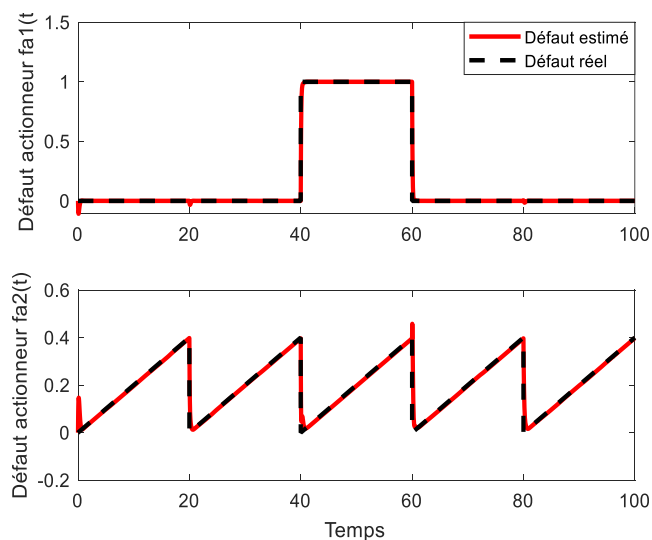


Fig.3.47. Défauts actionneur et leurs estimés.

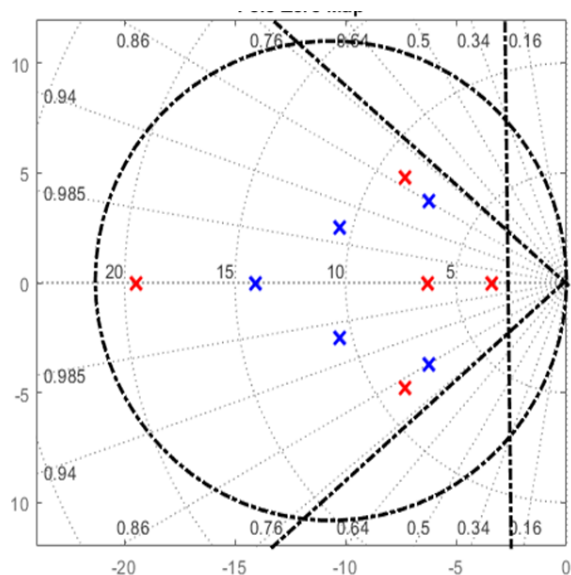


Fig.3.48. Distribution des valeurs propres des matrices locales \tilde{A}_i .

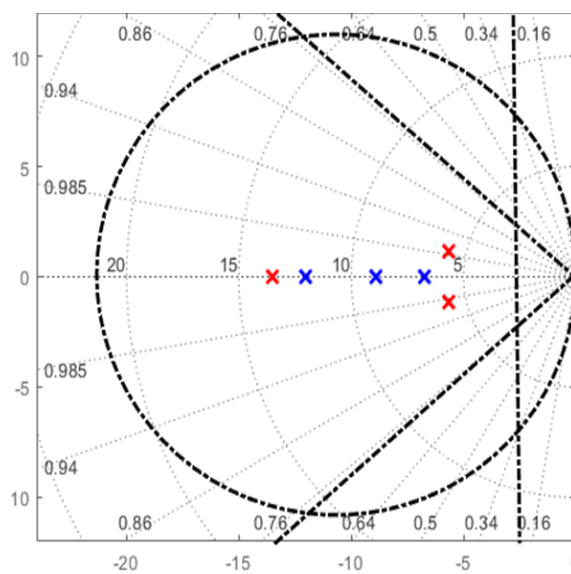


Fig.3.49. Distribution des valeurs propres des matrices locales $A_i - L_i C$.

| $\text{eig}(\tilde{A}_1)$ | $\text{eig}(\tilde{A}_2)$ | $\text{eig}(A_1 - L_1 C)$ | $\text{eig}(A_2 - L_2 C)$ |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $-6.2467 + 3.7229i$ | $-19.5020 + 0.0000i$ | -6.7251 | $-13.4932 + 0.0000i$ |
| $-6.2467 + 3.7229i$ | $-7.3252 + 4.8099i$ | -12.0189 | $-5.6336 + 1.1508i$ |
| $-14.0896 + 0.0000i$ | $-7.3252 + 4.8099i$ | -8.9169 | $-5.6336 + 1.1508i$ |
| $-10.2375 - 2.4919i$ | $-3.3704 + 0.0000i$ | | |
| $-10.2375 - 2.4919i$ | $-6.2671 + 0.0000i$ | | |

Tableau 3.6. Valeurs propres de \tilde{A}_i et $(A_i - L_i C)$.

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la \mathcal{D} -observation des systèmes non linéaires décrits par des modèles de Takagi –Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables.

Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à la synthèse de multi-observateurs proportionnels de Type Luenberger basés sur la \mathcal{D} -stabilité et l'analyse de gain \mathcal{L}_2 . La \mathcal{D} -stabilité permet d'assigner les valeurs propres des matrices liées à la dynamique de l'erreur d'estimation d'état dans une région LMI prédéfinie \mathcal{D} et la technique \mathcal{L}_2 permet de minimiser l'influence des variables de décision non mesurables. Le lemme de Finsler a ensuite été mis à profit pour réduire le conservatisme des conditions de synthèse en introduisant des variables supplémentaires au problème d'optimisation. Dans un second temps, nous avons proposé la synthèse d'un observateur proportionnel lipschitzien possédant un retour de sortie dans ses fonctions d'activation permettant d'aboutir à des conditions de \mathcal{D} -stabilité moins contraignantes.

Les résultats obtenus pour la synthèse de multi-observateurs proportionnels ont été généralisés aux observateurs PI et PMI permettant d'estimer simultanément l'état et les entrées inconnues. En dernier lieu, un observateur permettant d'estimer les états et les défauts actionneur a été présenté. Les différents résultats de simulation présentés tout au long de ce chapitre, ont montré l'efficacité des approches proposées.

Bibliographie

- [Altrock et al., 2015] P. M. Altrock, L. L. Liu, F. Michor, (2015). The mathematics of cancer: integrating quantitative models, *Nature Reviews Cancer* 15 (12) (2015) 730–745.
- [Angeli, 2008] Angeli, C.: Online expert systems for fault diagnosis in technical processes. *Expert Syst.* 25(2), 115–132 (2008)
- [Asemani et Majd, 2013] M. H. Asemani and V. J. Majd, “A robust H_∞ observer-based controller design for uncertain T-S fuzzy systems with unknown premise variables via LMI” *Fuzzy Sets Syst*, vol.212, no.1, pp.21-40, 2013.
- [Bellomo et al., 2008] N. Bellomo, N. K. Li, P. K. Maini, (2008). On the foundations of cancer modeling: Selected topics, speculations, and perspectives, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 18 (04) (2008) 593–646.
- [Benchimol et al., 1986] Benchimol G, Levine P., Pomerol J.C., « Systèmes experts dans l'entreprise », Hermès éditions, 1986.
- [Blanke et al., 2006] Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer, 2006.
- [Boyd et al., 1994] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishman, (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.

- [Chadli, 2010] M. Chadli, “An LMI approach to design observer for unknown inputs Takagi-Sugeno fuzzy models,” *Asian Journal of Control*, vol. 12, no. 4, pp. 524–530, 2010.
- [Chareyron et Alamir, 2009] S. Chareyron and M. Alamir, (2009). Mixed immunotherapy and chemotherapy of tumors: Feedback design and model updating schemes. *Journal of Theoretical Biology*, 45:444{454, 2009.
- [Cherrier et al., 2007] Cherrier, E., Ragot, J., Boutayeb, M. , Aziz-Alaoui, M. “Observer based exponential synchronization of chaotic multiple models”. In *European Control Conference, ECC’07, Kos, Greece, 2007*.
- [Chilali et Gahinet, 1996] Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367.
- [Chilali et al., 1999] Chilali, M., Gahinet, P., Apkarian, P., (1999). Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Trans. Automat. Control* 44 (12), 2257–2270.
- [Cimpoesu et al., 2013] E.M. Cimpoesu, B.D. Ciubotaru, D. Stefanoiu, Fault detection and diagnosis using parameter estimation with recursive least squares, *Energy Build.* 62 (2013) 133–138
- [Corless et Tu, 1998] M. Corless and J. Tu, “State and input estimation for a class of uncertain systems,” *Automatica*, vol. 34, no.6, pp. 757-764, June 1998.
- [Cui et Sun, 2019] Cui, S. & Sun, L. (2019). Sensor fault detection and isolation of electromechanical actuator based on structural residual parity space. *The Proceedings of the 2018 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology (APISAT 2018)*, pp. 2574-2585.
- [Darouch et al., 1994] Darouach, M., Zasadzinski, M., et Xu, S. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3) :606–609.
- [Dubuisson, 1990] B. Dubuisson. *Diagnostic et Reconnaissance des Formes*. Hermès, 1990.
- [Ducard, 2009] Ducard, G. J. J. *Fault-tolerant Zight control and guidance systems: practical methods for small unmanned aerial*. Advances in Industrial Control. Springer, 2009.
- [Fuqiang You et al., 2020] Fuqiang You; Chao Wang; Shiya Cheng; Xinyan Zhang. Robust fault estimation based on Proportional Integral observer for Takagi-Sugeno fuzzy systems with actuator and sensor faults. 2020 Chinese Control And Decision Conference (CCDC), 22-24 Aug. 2020
- [Gaddouna et al., 1994] Gaddouna, B., Maquin, D., et Ragot, J. (1994). Fault detection observers for systems with unknown inputs. In *2th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, Espoo, Finland.
- [Graham,1981] A. Graham, (1981). *Kronecker Product and Matrix Calculus with Applications*. Chichester, U.K.: Ellis Horwood.
- [Hou et Patton, 1998] Hou, M. et Patton, R. J. (1998). Input observability and input reconstruction. *Automatica*,34(6) :789–794.
- [Hwang et al., 2014] Hwang, Woohyun and Huh, Kunsoo. “Fault Detection and Estimation for Electromechanical Brake Systems Using Parity Space Approach”. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 137.1 (2014)
- [Ichalal et al., 2008] Dalil Ichalal, Benoît Marx, José Ragot, Didier Maquin. Design of observers for Takagi-Sugeno systems with immeasurable premise variables : an L2 approach. 17th IFAC World Congress, Jul 2008, Seoul, Corée du Sud.
- [Ichalal et al., 2009] Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2009b). Simultaneous state and unknown inputs estimation with PI and PMI observers for Takagi-Sugeno model with unmeasurable premise variables. In *Mediterranean Conference on Control and Automation*, Thessalonique, Grèce.
- [Ichalal et al., 2011] D. Ichalal, B. Marx, D. Maquin, and J. Ragot. (2011). On observer design for nonlinear Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables. In *International Symposium on Advanced Control of Industrial Processes, ADCONIP 2011*, Hangzhou, P.R. China.

- [Ichalal, 2009] Estimation et diagnostic des systèmes non linéaires décrits par des modèles de Takagi-Sugeno. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009.
- [Jaadari et al., 2012] Jaadari, A., Guerra, T.-M., Sala, A., Bernal, M., Guelton, K., 2012. New controllers and new designs for continuous-time Takagi-Sugeno models. In: IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Brisbane, Australia, pp.1–7.
- [Jiang et al., 2007] T. Jiang, K. Khorasani and S. Tafazoli, "Parameter Estimation-Based Fault Detection, Isolation and Recovery for Nonlinear Satellite Models," in *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 16, no. 4, pp. 799-808, July 2008, doi: 10.1109/TCST.2007.906317.
- [Johansson and Nunes,1998] K. H. Johansson and J. L. R. Nunes. A Multivariable Laboratory Process with an Adjustable Zero. In *Proc.American Control Conf.*, pages 2045–2049, Philadelphia,PA, 1998.
- [Kirschner et Panetta,1998] Kirschner, D., Panetta, J.C., (1998). Modeling immunotherapy of the tumor-immune interaction. *J. Math. Biol.* 37 (3), 235–252.
- [Koppen-Seliger et Frank, 1996] Koppen-Seliger, B. and Frank, P. M., Neural network in model-based fault Diagnosis, 13th IFAC World Congress, pp. 67-72, San Francisco, California, USA, 1996.
- [Korbicz et al., 2004] J. Korbicz, J.M. Koscielny, Z. Kowalczyk, and W. Cholewa. Fault Diagnosis, Models, Artificial Intelligence, Applications. Springer, 2004.
- [Lancaster et Farahat, 1972] P. Lancaster, H. K. Farahat, (1972). Norms on direct sums and tensor products, *Mathematics of Computation* 26 (118) (1972) 401–414.
- [Ledzewicz et al., 2008] U. Ledzewicz, H. Schattler, and A. d'Onofrio, (2008).Optimal control for combination therapy in cancer. In 47th IEEE Conference on Decision and Control.
- [Lefebvre et Delherm, 2007] D. Lefebvre and C. Delherm, "Diagnosis of DES With Petri Net Models," in *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 4, no. 1, pp. 114-118, Jan. 2007, doi: 10.1109/TASE.2006.872122.
- [Liu et al., 2018] Shaokun Liu, Xiaojian Li, Heng Wang and Jingjing Yan. Adaptive fault estimation for T-S fuzzy systems with unmeasurable premise variables. *Advances in Difference Equations* (2018) 2018:105
- [Mendonça et al., 2009] L. F. Mendonça, J. M. Sousa, and J. M. Sa da Costa, "An ' architecture for fault detection and isolation based on fuzzy methods," *Expert Systems with Applications*, no. 2, pp. 1092–1104, 2009.
- [Moodi et Farrokhi, 2014] H. Moodi and M. Farrokhi, (2014). On observer-based controller design for Sugeno systems with unmeasurable premise variables. *ISA Transactions*, vol. 53, no. 2, p. 305–316.
- [Nagy-Kiss, 2010] A.M. Nagy-Kiss. Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2010.
- [Ouhib et Kara, 2023] Ouhib, L. et Kara, R. "Proportional Observer design based on \mathcal{D} -stability and Finsler's Lemma for Takagi-Sugeno systems", *Fuzzy Sets and Systems*, Volume 452, 10 Janvier 2023, Pages 61-90.
- [Ouhib, 2020] Ouhib, L. State and unknown inputs estimation for Takagi-Sugeno systems with immeasurable premise variables: Proportional Multiple Integral observer design. *Mathematics and Computers in Simulation (MATCOM)*.Volume 167, January 2020, Pages 372-380.
- [Palade et Bocaniala, 2006] Palade, V.; Bocaniala, C.D. Computational Intelligence in Fault Diagnosis; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2006.
- [Patton et Chen, 1991] Patton, R.J. and Chen, J., A review of parity space approaches to fault diagnosis. In Proceedings of the 1st IFAC/IMACS Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS 1991), Baden-Baden, Germany, 1991.
- [Patton et Chen, 1997] Patton R.J., Chen J., "Observer-based Fault Detection and Isolation: Robustness and Applications", *Control Engineering Practice*, 5(5): 671-682, 1997.

- [Pessel et al., 2007] Pessel, N., Balmat, J.F., Lafont, F., Bannal, J. An Improved Fault Detection for the Diagnosis, in *Proceeding of the 9th WSEAS International Conference on Automatic Control, Modeling & Simulation*. Turkey. pages: 27-29, 2007.
- [Rauber et al., 2010] T. W. Rauber, E. M. do Nascimento, E. D. Wandekokem, and F. M. Varejao, ~ Pattern Recognition based Fault Diagnosis in Industrial Processes: Review and Application, adam herout ed. INTECH Open Access Publisher, 2010.
- [Seatzu et al., 2013] Seatzu, C., Silva, M., & Schuppen, J. (Eds.) (2013). Control of discrete-event systems. Automata and Petri net perspectives. Lecture notes in control and information sciences (Vol. 433). London: Springer.
- [Takagi & Sugeno, 1985] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1) :116–132.
- [Tharrault et al., 2008] Y. Tharrault, G. Mourot, J. Ragot, and D. Maquin. Fault detection and isolation with robust principal component analysis. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 18(4) :429 – 442, 2008.
- [Travé-Massuyès et al., 1997] Travé-Massuyès, L., Dague, P., Guérrin, F. Le raisonnement qualitatif pour les sciences de l'ingénieur. Hermès, 1997.
- [Tseng et al., 2001] Tseng, C., Chen, B., and Uang, H. J., Fuzzy tracking Control Design for nonlinear Dynamic systems via T-S fuzzy model. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, vol. 9 no 3, pp. 381-392, 2001.
- [Venkatasubramanian et al., 2003] Venkatasubramanian V, Rengaswamy R, Kavuri S. A review of process fault detection and diagnosis: Part II: Qualitative models and search strategies. *Computers & Chemical Engineering* 2003; 27: 313–26.
- [Villemeur , 1988] Villemeur A., Sureté de fonctionnement des systèmes industriels. Fiabilité Facteurs humains Informatisation. Eyrolles, 1988
- [Vu et al., 2018] Vu, V.P., Wang, W.J., Zurada, J.M., et al.: ‘Unknown input method based observer synthesis for a discrete time uncertain T–S fuzzy systems’, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 2018, 26, (2), pp. 761–770
- [Vu et Do, 2019] V.-P. Vu, and T.-D. Do, (2019). Fault/state estimation observer synthesis for uncertain T-S fuzzy systems. *IEEE Access*, vol. 7, pp. 358–369.
- [Xie et De Souza, 1992] Xie, L., De Souza, C.E., (1992). Robust H-infinity control for linear systems with norm bounded time-varying uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Control* (ISSN: 0018-9286)37 (8), 1188–1191.
- [Yeh et al., 2015] Yeh, S.J., Chang, W., Wang, W.J.: ‘Unknown input based observer synthesis for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy systems’, *IET Control Theory Appl.*, 2015, 9, (5), pp. 729–735
- [Yoneyama, 2009] Yoneyama, J. “H ∞ filtering for fuzzy systems with immeasurable premise variables: an uncertain system approach”. *Fuzzy Set and Systems*, 160 (12):1738-1748, 2009.
- [Zhang et al., 2008] Zhang, K., Jiang, B., & Cocquempot, V. (2008). Adaptive observer-based fast fault estimation. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 6(3), 320–326.
- [Zhang et al., 2016] Zhang, Jian., Akshya Kumar Swain, and Sing Kiong Nguang. Robust Observer-Based Fault Diagnosis for Nonlinear Systems Using MATLAB®. 1st ed. 2016.
- [Zhonghai et al., 2018] Zhonghai, M., Shaoping, W., Jian, S., Tongyang, L. & Xingjian, W. (2018). Fault diagnosis of an intelligent hydraulic pump based on a nonlinear unknown input observer. *Chinese Journal of Aeronautics*, 31(2), pp. 385-394.
- [Zhou et Ye, 2017] Zhou, B. & Ye, H. (2017). A New Qualitative Trend Analysis Algorithm Based on Global Polynomial Fit. *AIChE Journal*, 63(8), pp. 3374-3383.

[Zwingelstein, 1995] Zwingelstein, G. (1995). *Diagnostic des défaillances : Théorie et pratique pour les systèmes industriels*, Edition HERMES.

4

\mathcal{D} -Observation des systèmes de Takagi-Sugeno interconnectés à Variables de Décision Non Mesurables

Sommaire

| | |
|--|------------|
| 4.1. Introduction | 110 |
| 4.2. Position du problème | 111 |
| 4.3. Estimation d'état | 112 |
| 4.3.1. \mathcal{D} -stabilité | 113 |
| 4.3.2. Relaxation de la \mathcal{D} -stabilité par le lemme de Finsler | 120 |
| 4.4. Estimation d'état et des paramètres variant dans le temps | 130 |
| 4.4.1. Cas d'un système linéaire..... | 130 |
| 4.4.2. Extension aux systèmes TS interconnectés à VDNM | 133 |
| 4.5. Conclusion | 140 |
| Bibliographie | 140 |

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux systèmes non linéaires décrits par des modèles TS Interconnectés où il s'agit de décomposer le système non linéaire étudié en plusieurs multi-modèles TS interconnectés entre eux. Cette structure peut être particulièrement intéressante pour décrire le comportement non linéaire de systèmes dynamiques complexes caractérisés par un grand nombre de variables. De plus, la décomposition du système en plusieurs modèles TS d'ordres plus réduits permet dans certains cas de relaxer les conditions de stabilité du contrôleur ou de l'observateur synthétisé.

Ces dernières années, l'augmentation continue de la complexité et de la dimension des processus a conduit à de nouveaux challenges dans le domaine de l'automatique moderne. Les réseaux d'alimentation électrique, les processus manufacturiers, les réseaux de communication, les systèmes de transport logistiques sont autant d'exemples de systèmes à grande échelle ou systèmes interconnectés. Ces derniers ont suscité un intérêt de plus en plus grandissant dans la communauté scientifique [Guo et al., 2000], [Bakule, 2008].

Récemment, la représentation de Takagi-Sugeno a été étendue aux systèmes non linéaires interconnectés [Latrach et al., 2013], [Magdi, 2016]. En plus de résoudre les problèmes liés aux non linéarités et à la grande dimensionnalité, cette technique permet de réduire les effets des contraintes structurelles et des interconnexions.

Plusieurs travaux traitant de la stabilité et la stabilisation des systèmes TS interconnectés ont été menés. Citons à titre d'exemple, la commande parallèle distribuée via une fonction de Lyapunov quadratique dans [Benzaouia et al., 2016] et des fonctions de Lyapunov non quadratiques dans [Benzaouia et al., 2019] et [Tiko et al., 2021], la commande par retour de sortie statique dans [Jabri et al., 2020], la commande H_∞ basée sur un observateur dans [Latrach et al., 2016].

A notre connaissance, peu de travaux ont été consacré à la synthèse d'observateurs pour les systèmes TS Interconnectés à VDNM. Dans [Arioui et al., 2019], les auteurs ont abordé l'estimation d'état de systèmes non linéaires représentés par deux multi-modèles TS interconnectés à variables de décision mesurables. Les auteurs de [Vu et Wang, 2018] ont proposé la synthèse d'un observateur robuste à entrées inconnues pour les systèmes TS interconnectés incertains. L'estimation des dynamiques longitudinale et latérale d'un véhicule à deux roues a été réalisée à l'aide de deux observateurs TS interconnectés dans [Fouka et al., 2019].

Dans ce chapitre, nous traitons de la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles TS interconnectés à variables de décision non mesurables sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité.

Dans la section 4.2, les principales problématiques abordées dans ce chapitre sont exposées.

Nous examinons l'estimation d'état des systèmes TS interconnectés dans la section 4.3. Les résultats relatifs à l'observation \mathcal{D} -stable des systèmes TS obtenus dans le chapitre 3 sont généralisés aux systèmes TS interconnectés.

Dans la section 4.4, nous abordons l'estimation d'état et des paramètres variant dans le temps. Des conditions de synthèse génériques de \mathcal{D} -stabilité des erreurs d'estimation d'état et d'estimation des paramètres variant dans le temps sont proposées.

4.2. Position du problème

Partie I : Estimation d'état des systèmes interconnectés de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables

On considère la classe de systèmes non linéaires décrits par n multi-modèles TS interconnectés à VDNM (pour $i=1, \dots, n$)

$$TS_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j_i=1}^{r_i} h_{j_i}^i(x_i(t))(A_{j_i}^i x_i(t) + B_{j_i}^i u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n D_{j_i}^k x_k(t)), \\ y_i(t) = C_i x_i(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ et $y_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-système. $A_{j_i}^i, B_{j_i}^i, D_{j_i}^k, C_i$ sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Les matrices $D_{j_i}^k$ dénotent les interactions d'état entre le $i^{\text{ème}}$ et le $k^{\text{ème}}$ sous-systèmes avec $k=1, \dots, n$ et $k \neq i$. r_i est le nombre de modèles locaux du sous-système TS_i . $h_{j_i}^i(x_i(t))$ sont les fonctions d'activation du $i^{\text{ème}}$ sous-système TS dépendant de l'état $x_i(t)$ et vérifiant les propriétés de convexité suivantes

$$\begin{cases} \sum_{j_i=1}^{r_i} h_{j_i}^i(x_i(t)) = 1, \forall j_i \in \{1, \dots, r_i\}, \\ 0 \leq h_{j_i}^i(x_i(t)) \leq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Notre intérêt porte d'abord sur la synthèse de n multi-observateurs de type Luenberger interconnectés MO_i donnés par

$$MO_i : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = \sum_{j=1}^{\bar{n}} h_{j_i}^i(\hat{x}_i(t))(A_{j_i}^i \hat{x}_i(t) + B_{j_i}^i u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n D_{j_i}^k \hat{x}_k(t) + L_{j_i}^i (y_i(t) - \hat{y}_i(t))), \\ \hat{y}_i(t) = C_i \hat{x}_i(t), \end{cases} \quad (4.3)$$

où $\hat{x}_i(t)$ et $\hat{y}_i(t)$ sont respectivement le vecteur d'état et de sortie du $i^{\text{ème}}$ multi-observateur. Les objectifs de synthèse des multi-observateurs MO_i peuvent être résumés par les points suivants

- (i) Placement des valeurs propres des matrices $A_{j_i}^i - L_{j_i}^i C_i$ dans une région LMI prédéfinie,
- (ii) Minimisation de l'effet des variables de décision non mesurables et celui des termes d'interaction $e_k(t)$ sur les erreurs d'estimation d'état $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$.
- (iii) Relaxation des contraintes de \mathcal{D} -stabilité via le lemme de Finsler.

Des conditions génériques de synthèse répondant aux exigences rapportées ci-dessus sont proposées.

Partie II : Estimation d'état et des paramètres variant dans le temps des systèmes interconnectés de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'estimation conjointe des états et des paramètres variant dans le temps où nous proposons d'étendre l'observateur proposé dans [Bezzaoucha 2013] aux systèmes TS interconnectés décrits par

$$TS_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{\bar{n}} h_{j_i}^i(x_i(t))(A_{j_i}^i(\theta_i(t))x_i(t) + B_{j_i}^i(\theta_i(t))u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n D_{j_i}^k(\theta_i(t))x_k(t)), \\ y_i(t) = C_i x_i(t), \end{cases} \quad (4.4)$$

où $\theta_i(t) = [\theta_{1,i}(t) \ \cdots \ \theta_{m_i,i}(t)]^T$ est le vecteur des paramètres inconnus et variant dans le temps.

L'idée principale de l'approche proposée est d'exprimer les paramètres variant dans le temps sous forme polytopique convexe en utilisant la transformation par secteurs non linéaires. Cette représentation des paramètres est ensuite intégrée dans l'expression du système et celle de l'observateur.

4.3. Estimation d'état

Dans cette section, nous proposons de synthétiser un ensemble n de multi-observateurs donnés par (4.3) pour des systèmes non linéaires décrits par les multi-modèles TS interconnectés (4.1).

Hypothèse 4.1

Les sous-systèmes TS_i sont stables : Les matrices $A_{j_i}^i$ sont hurwitz.

Hypothèse 4.2

Les entrées $u_i(t)$ sont bornées.

Afin d'obtenir des fonctions d'activations communes entre les sous-systèmes TS_i et les multi-observateurs MO_i , on réécrit le système (4.1) comme suit

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = \sum_{j_i=1}^{r_i} h_{j_i}^i(\hat{x}_i(t)) (A_{j_i}^i x_i(t) + B_{j_i}^i u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n D_{j_i}^k x_k(t) + \omega_i(t)), \quad (4.5)$$

avec

$$\omega_i(t) = \sum_{j_i=1}^{r_i} \left(h_{j_i}^i(x_i(t)) - h_{j_i}^i(\hat{x}_i(t)) \right) \left(A_{j_i}^i x_i(t) + B_{j_i}^i u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n D_{j_i}^k x_k(t) \right). \quad (4.6)$$

Par conséquent, la dynamique de la $i^{\text{ème}}$ erreur d'estimation d'état est donnée par

$$\dot{e}_i(t) = (A_{h_i}^i - L_{h_i}^i C_i) e_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n D_{h_i}^k e_k(t) + \omega_i(t), \quad (4.7)$$

ou encore

$$\dot{e}_i(t) = (A_{h_i}^i - L_{h_i}^i C_i) e_i(t) + \begin{bmatrix} D_{h_i}^1 & \cdots & D_{h_i}^k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \vdots \\ e_k(t) \\ \omega_i(t) \end{bmatrix}, k \neq i. \quad (4.8)$$

Afin de simplifier l'analyse de stabilité, le vecteur $\tilde{\omega}_i(t) = [e_1^T(t) \ \dots \ e_k^T(t) \ \omega_i^T(t)]^T$ sera considéré comme une perturbation par rapport à l'erreur d'estimation $e_i(t)$.

Objectifs de synthèse. Les objectifs de synthèse sont présentés par les exigences suivantes :

- 1) **\mathcal{D} -stabilité** : Pour $i=1, \dots, n$, les matrices de gains L_{j_i} sont calculées de sorte que
 - Les dynamique des erreurs d'estimation d'état (4.8) soient \mathcal{D} -stables lorsque $\tilde{\omega}_i(t) \equiv 0$;
 - Chaque transfert de la perturbation $\tilde{\omega}_i(t)$ vers l'erreur d'estimation d'état $e_i(t)$ est minimisé (Les erreurs d'estimation $e_i(t)$ sont robustes vis-à-vis des variables de prémisses non mesurables et des termes d'interaction $e_k(t)$).
- 2) De plus, les contraintes de \mathcal{D} -stabilité sont relaxées en utilisant le lemme de Finsler.

4.3.1. \mathcal{D} -stabilité

Les conditions qui permettent d'assigner les valeurs propres des matrices $(A_{j_i}^i - L_{j_i}^i C_i)$ dans une région LMI prédéfinie et de minimiser le niveau d'atténuation entre la pseudo-perturbation $\tilde{\omega}_i(t)$ et l'erreur d'estimation d'état $e_i(t)$ sont énoncées par le Théorème 4.1.

Théorème 4.1

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Pour $i=1, \dots, n$, les systèmes interconnectés (4.8) sont \mathcal{D} -stables et les gains \mathcal{L}_2 du transfert de $\tilde{\omega}_i(t)$ vers $e_i(t)$ sont bornés s'il existe des matrices définies positives P_i et des matrices $X_{j_i}^i$ et des scalaires positifs $\bar{\gamma}_i$ tels que les contraintes suivantes sont satisfaites $\forall k \in \{1, \dots, n\} / k \neq i$

$$\min_{P_i, X_{j_i}^i} \bar{\gamma}_i$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{j_i}^i - X_{j_i}^i C_i)) + I & M \otimes P_i D_{j_i}^1 & \cdots & M \otimes P_i D_{j_i}^k & M \otimes P_i & \\ * & -\bar{\gamma}_i I & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ * & 0 & \cdots & -\bar{\gamma}_i I & 0 & \\ * & 0 & \cdots & 0 & -\bar{\gamma}_i I & \end{array} \right] < 0. \quad (4.9)$$

Les matrices de gains des multi-observateurs sont

$$L_{j_i}^i = P_i^{-1} X_{j_i}^i. \quad (4.10)$$

Les taux d'atténuation sont donnés par

$$\gamma_i = \sqrt{\bar{\gamma}_i}. \quad (4.11)$$

Preuve. Considérons la fonction de Lyapunov quadratique

$$V(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^n V_i(e_i) = \sum_{i=1}^n e_i^T P_i e_i, \quad P_i = P_i^T > 0. \quad (4.12)$$

Sa dérivée par rapport au temps est

$$\dot{V}(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^n \dot{V}_i(e_i) = \sum_{i=1}^n \text{Sym}(e_i^T P_i \dot{e}_i) = \sum_{i=1}^n \text{Sym} \left(e_i^T (P_i A_{\hat{h}_i} - P_i L_{\hat{h}_i} C_i) e_i + e_i^T \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n P_i D_{\hat{h}_i}^k e_k + e_i^T P_i \omega_i \right). \quad (4.13)$$

Les dynamiques des erreurs d'estimation d'état (4.8) sont \mathcal{D} -stables (lorsque $\tilde{\omega}_i \equiv 0$) et les gains \mathcal{L}_2 du transfert de $\tilde{\omega}_i(t)$ vers $e_i(t)$ sont bornés si

$$\sum_{i=1}^n (L \otimes V_i + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}_i + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}_i + (I \otimes e_i^T)(I \otimes e_i) - \gamma_i^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (I \otimes e_k^T)(I \otimes e_k) - \gamma_i^2 (I \otimes \omega_i^T)(I \otimes \omega_i)) < 0, \quad (4.14)$$

En remplaçant V_i et \dot{V}_i par leurs expressions dans l'inégalité (4.14) et en considérant la propriété du produit de Kronecker (3.18)

$$\sum_{i=1}^n ((I \otimes e_i^T)(L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{\hat{h}_i} - P_i L_{\hat{h}_i} C_i)) + I)(I \otimes e_i) + \text{Sym}((I \otimes e_i^T)(M \otimes \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n P_i D_{\hat{h}_i}^k))(I \otimes e_k^T)) + \text{Sym}((I \otimes e_i^T)(M \otimes P_i)(I \otimes \omega_i)) - \gamma_i^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (I \otimes e_k^T)(I \otimes e_k) - \gamma_i^2 (I \otimes \omega_i^T)(I \otimes \omega_i)) < 0. \quad (4.15)$$

Dans sa forme matricielle, l'inégalité (4.15) devient

$$\sum_{i=1}^n \left\{ Y^T \left[\begin{array}{cccccc} L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{\hat{h}_i} - P_i L_{\hat{h}_i} C_i)) + I & M \otimes P_i D_{\hat{h}_i}^1 & \cdots & M \otimes P_i D_{\hat{h}_i}^k & M \otimes P_i & \\ * & -\gamma_i^2 I & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ * & 0 & \cdots & -\gamma_i^2 I & 0 & \\ * & 0 & \cdots & 0 & -\gamma_i^2 I & \end{array} \right] Y \right\} < 0, k \neq i, \quad (4.16)$$

avec $Y^T = [I \otimes e_i^T \quad I \otimes e_1^T \quad \dots \quad I \otimes e_k^T \quad I \otimes \omega_i^T]$

L'inégalité (4.16) est satisfaite si

$$\forall i = 1, \dots, n: \begin{bmatrix} L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{h_i} - P_i L_{h_i} C_i)) + I & M \otimes P_i D_{h_i}^1 & \dots & M \otimes P_i D_{h_i}^k & M \otimes P_i \\ * & -\gamma_i^2 I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & \dots & -\gamma_i^2 I & 0 \\ * & 0 & \dots & 0 & -\gamma_i^2 I \end{bmatrix} < 0, k \neq i. \tag{4.17}$$

La condition suffisante (4.9) est obtenue en prenant en compte les changements de variables $X_{j_i}^i = P_i L_{j_i}^i$ et $\bar{\gamma}_i = \gamma_i^2$. ■

Exemple 4.1 : Application du Théorème 4.1 à un système de pile à combustible à membrane échangeuse de protons (Proton Exchange Membrane Fuel Cell)

Les piles à combustible à membrane échangeuse de protons sont des dispositifs de conversion d'énergie propre assez prometteurs en raison de leurs léger poids, leur démarrage rapide, leur faible température de fonctionnement et leurs caractéristiques non polluantes [Karami et al., 2014], [Singh et al., 2017], [Cordiner et al., 2017]. Les PEMFC sont largement utilisées comme sources d'alimentation dans de nombreuses applications allant des transports aux portables [Daud et al., 2017].

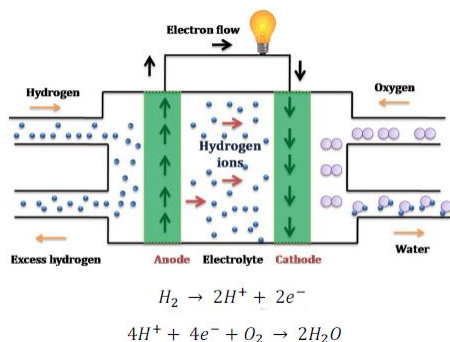


Fig.4.1. Principe de fonctionnement d'une PEMFC.

Dans une PEMFC, l'hydrogène (H₂) et l'oxygène (O₂) sont utilisés pour produire de l'électricité, de l'eau et de la chaleur. L'hydrogène entre par l'anode. La couche de catalyseur sépare les molécules d'hydrogène en protons (H⁺) et en électrons (e⁻). Cette réaction libère de la chaleur. L'électrolyte à membrane polymère permet le transfert des protons vers la cathode et aux électrons de circuler à travers un circuit de charge externe. En même temps, l'oxygène entre par la cathode et se combine avec les électrons et protons pour former de l'eau (H₂O).

Une cellule de base d'une pile à combustible est composée d'un empilement de deux électrodes poreuses séparées par un électrolyte solide. De chaque côté de l'électrode, se trouve deux couches de diffusion et deux plaques bipolaires.

Un système PEMFC complet comprend en général quatre sous-systèmes auxiliaires [Pukrushpan et al., 2004], à savoir :

- (i) un système d'alimentation en hydrogène, (ii) un système d'alimentation en air, (iii) un système de refroidissement et (iv) un système d'humidification.

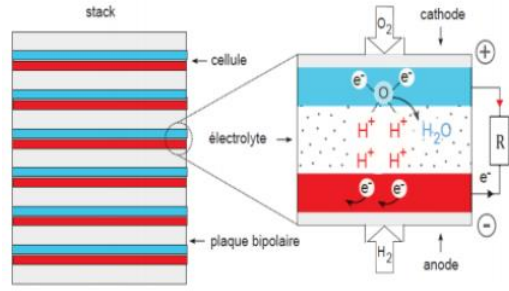


Fig.4.2. Eléments d'une PEMFC.

Avant d'entrer dans la cathode, l'air généré par un compresseur est refroidi et humidifié. L'hydrogène stocké dans le réservoir haute-pression est transmis à l'anode après humidification. Enfin, le courant est produit par des réactions électrochimiques entre l'hydrogène et l'oxygène (voir Figure 4.3).

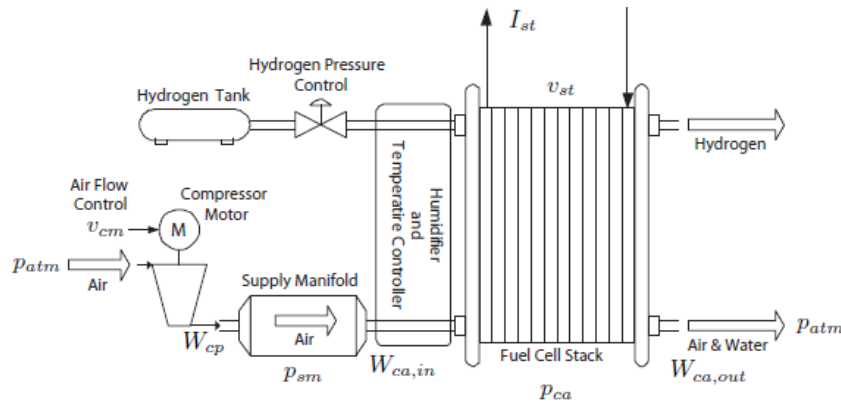


Fig.4.3. Un système de pile à combustible et ses auxiliaires [Suh,2006].

- **Le modèle non linéaire**

Le modèle non linéaire à quatre états considéré est basé sur les travaux de [Suh, 2006]. La pression de l'hydrogène, la température et l'humidité du stack sont supposées être contrôlées correctement. Les dynamiques du refroidisseur et de l'humidificateur sont négligées. Le modèle se concentre principalement sur les variables liées au sous-système d'alimentation en air et à la dynamique de pression cathodique.

$$\dot{p}_{ca}(t) = (c_1 + c_8)(p_{sm}(t) - p_{ca}(t)) + \frac{c_3 \alpha(p_{ca})}{c_4 p_{ca}(t) + (c_5 - c_4) p_{N_2}(t) + (c_6 - c_2 c_4)} (c_2 - p_{ca}(t)) - c_7 I_{st}(t), \quad (4.18)$$

$$\dot{p}_{N_2}(t) = c_8 (p_{sm}(t) - p_{ca}(t)) - \frac{c_3 \alpha(p_{ca})}{c_4 p_{ca}(t) + (c_5 - c_4) p_{N_2}(t) + (c_6 - c_2 c_4)} p_{N_2}(t), \quad (4.19)$$

$$\dot{\omega}_{cp}(t) = -c_9 \omega_{cp}(t) - \frac{c_{10}}{\omega_{cp}(t)} \left(\left(\frac{p_{sm}(t)}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right) W_{cp}(\omega_{cp}, p_{sm}) + c_{13} v_{cm}(t), \quad (4.20)$$

$$\dot{p}_{sm}(t) = c_{14} \left(1 + c_{15} \left(\left(\frac{p_{sm}(t)}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right) \right) (W_{cp}(\omega_{cp}, p_{sm}) - c_{16} (p_{sm}(t) - p_{ca}(t))), \quad (4.21)$$

avec

$$\alpha(p_{ca}) = \begin{cases} c_{17} p_{ca}(t) \left(\frac{c_{11}}{p_{ca}(t)} \right)^{c_{18}} \sqrt{1 - \left(\frac{c_{11}}{p_{ca}(t)} \right)^{c_{12}}}, & \text{si } \frac{c_{11}}{p_{ca}(t)} > c_{19}, \\ c_{20} p_{ca}(t), & \text{si } \frac{c_{11}}{p_{ca}(t)} \leq c_{19}, \end{cases} \quad (4.22)$$

où $p_{ca}(t)$ est la pression de la cathode, $p_{N_2}(t)$ est la pression partielle de l'azote, $\omega_{cp}(t)$ est la vitesse angulaire du groupe moto-compresseur et $p_{sm}(t)$ est la pression dans les tuyaux d'alimentation d'air.

Les entrées sont la tension du moteur du compresseur $v_{cm}(t)$ et le courant de la pile $I_{st}(t)$.

Les sorties mesurables du système sont : la pression de la cathode $y_1(t) := p_{ca}$ et la pression dans les tuyaux d'alimentation d'air $y_2(t) := p_{sm}$.

Le débit d'air du compresseur $W_{cp}(t)$ a été approché dans [Gruber et al., 2008] par l'expression

$$W_{cp}(t) = \frac{W_{cp}^{\max} \omega_{cp}(t)}{\omega_{cp}^{\max}} (1 - e^{-\lambda(t)}), \quad (4.23)$$

avec

$$\lambda(t) = \frac{-r \left(s + \frac{\omega_{cp}^2(t)}{q} - p_{sm}(t) \right)}{s + \frac{\omega_{cp}^2(t)}{q} - p_{sm}^{\min}(t)},$$

où $r = 15$, $q = 462,25 \text{ rad}^2 / (s^2 Pa)$, $\omega_{cp}^{\max} = 11500 \text{ rad} / s$, $p_{sm}^{\min} = 50000 \text{ Pa}$, $s = 100000 \text{ Pa}$,

$$W_{cp}^{\max} = 0,0975 \text{ kg} / s.$$

Les constantes c_i , $i \in \{1, \dots, 20\}$ et les paramètres du système à PEMFC sont définis respectivement dans les Tableaux D.1 et D.2 de l'annexe D.

- **Les modèles TS interconnectés**

Le modèle non linéaire décrit plus haut est divisé en deux dynamiques

$$S_1 : \begin{cases} \dot{p}_{ca}(t) = (c_1 + c_8)(p_{sm}(t) - p_{ca}(t)) + \frac{c_3 \alpha(p_{ca})}{c_4 p_{ca}(t) + (c_5 - c_4) p_{N_2}(t) + (c_6 - c_2 c_4)} (c_2 - p_{ca}(t)) - c_7 I_{st}(t), \\ \dot{p}_{N_2}(t) = c_8 (p_{sm}(t) - p_{ca}(t)) - \frac{c_3 \alpha(p_{ca})}{c_4 p_{ca}(t) + (c_5 - c_4) p_{N_2}(t) + (c_6 - c_2 c_4)} p_{N_2}(t), \\ y_1(t) = p_{ca}(t), \end{cases} \quad (4.24)$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{\omega}_{cp}(t) = -c_9 \omega_{cp}(t) - \frac{c_{10}}{\omega_{cp}(t)} \left(\left(\frac{p_{sm}(t)}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right) W_{cp}(\omega_{cp}, p_{sm}) + c_{13} v_{cm}(t), \\ \dot{p}_{sm}(t) = c_{14} \left(1 + c_{15} \left(\left(\frac{p_{sm}(t)}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right) \right) \left(W_{cp}(\omega_{cp}, p_{sm}) - c_{16} (-p_{ca}(t) + p_{sm}(t)) \right), \\ y_2(t) = p_{sm}(t). \end{cases} \quad (4.25)$$

Les sous-systèmes (4.24) et (4.25) sont exprimés sous forme quasi-LPV

$$S_1 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{p}_{ca}(t) \\ \dot{p}_{N_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 - c_8 - z_1(p_{ca}, p_{N_2}) & c_2 z_1(p_{ca}, p_{N_2}) z_2(p_{N_2}) \\ -c_8 & -z_1(p_{ca}, p_{N_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ca}(t) \\ p_{N_2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_1 + c_8 \\ 0 & c_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{cp}(t) \\ p_{sm}(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -c_7 \\ 0 \end{bmatrix} I_{sr}(t), \\ y_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ca}(t) \\ p_{N_2}(t) \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (4.26)$$

$$S_2 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{cp}(t) \\ \dot{p}_{sm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_9 - c_{10} z_3(p_{sm}) z_4(\omega_{cp}, p_{sm}) z_5(\omega_{cp}) & 0 \\ c_{14} (1 + c_{15} z_3(p_{sm})) z_4(\omega_{cp}, p_{sm}) & -c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_3(p_{sm})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{cp}(t) \\ p_{sm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{13} \\ 0 \end{bmatrix} v_{cm}(t) \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_3(p_{sm})) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ca}(t) \\ p_{N_2}(t) \end{bmatrix}, \\ y_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{cp}(t) \\ p_{sm}(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (4.27)$$

Les variables de prémisses utilisées dans la représentation TS de chaque sous-système sont

$$z_1(p_{ca}, p_{N_2}) = \frac{c_3 \alpha(p_{ca})}{c_4 p_{ca}(t) + (c_5 - c_4) p_{N_2}(t) + (c_6 - c_2 c_4)}, \quad z_2(p_{N_2}) = \frac{1}{p_{N_2}(t)}, \quad z_3(p_{sm}) = \left(\frac{p_{sm}(t)}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1, \\ z_4(\omega_{cp}, p_{sm}) = \frac{W_{cp}^{\max}}{\omega_{cp}^{\max}} (1 - e^{-\lambda(t)}), \quad z_5(\omega_{cp}) = \frac{1}{\omega_{cp}(t)}.$$

Le système à PEMFC peut donc être décrit par les deux modèles TS interconnectés suivants

$$TS_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sum_{j_1=1}^4 h_{j_1}^1(x_1) (A_{j_1}^1 x_1(t) + B_{j_1}^1 I_{sr}(t) + D_{j_1}^2 x_2(t)), \\ y_1(t) = C_1 x_1(t), \end{cases} \quad (4.28)$$

$$TS_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \sum_{j_2=1}^8 h_{j_2}^2(x_2) (A_{j_2}^2 x_2(t) + B_{j_2}^2 v_{cm}(t) + D_{j_2}^1 x_1(t)), \\ y_2(t) = C_2 x_2(t). \end{cases} \quad (4.29)$$

Les matrices $A_{j_i}^i, D_{j_i}^k, B_{j_i}^i$ et les fonctions d'activation $h_{j_i}^i$ des sous-systèmes TS_1 et TS_2 sont résumées dans les Tableaux D.3 et D.4 de l'annexe D.

• Synthèse d'observateurs

Le Théorème 4.1 est appliqué aux modèles TS interconnectés (4.28)-(4.29) via les contraintes LMI (4.9) pour une région LMI définie par les paramètres $\beta=3.5$, $\alpha=0$, $\theta=\pi/2.25$, $s=20$ et $q=21$. Les résultats de simulation sont représentés par les Figures 4.4-4.8. Les taux d'atténuation optimaux obtenus sont $\gamma_1=232,1674$ et $\gamma_2=5,0028$.

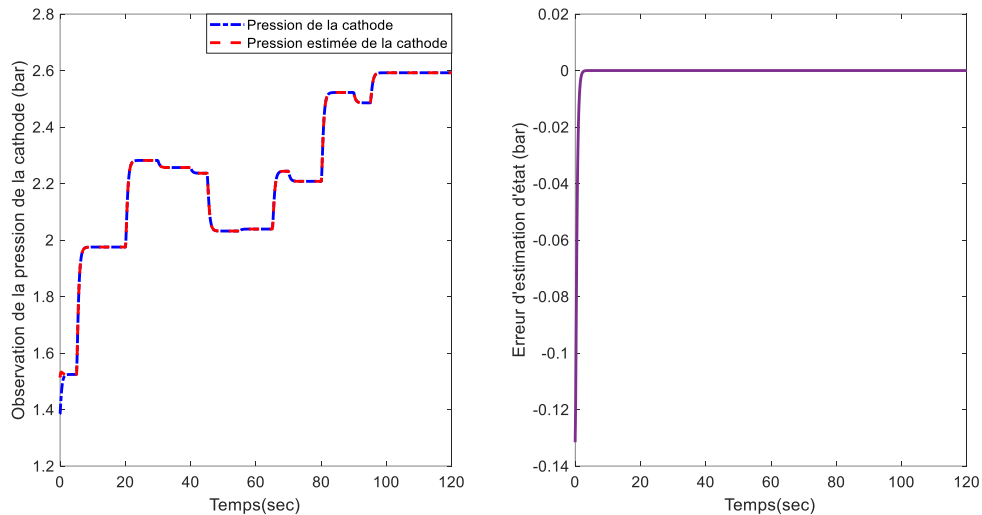


Fig.4.4. Estimation de la pression de la cathode (Théorème 4.1).

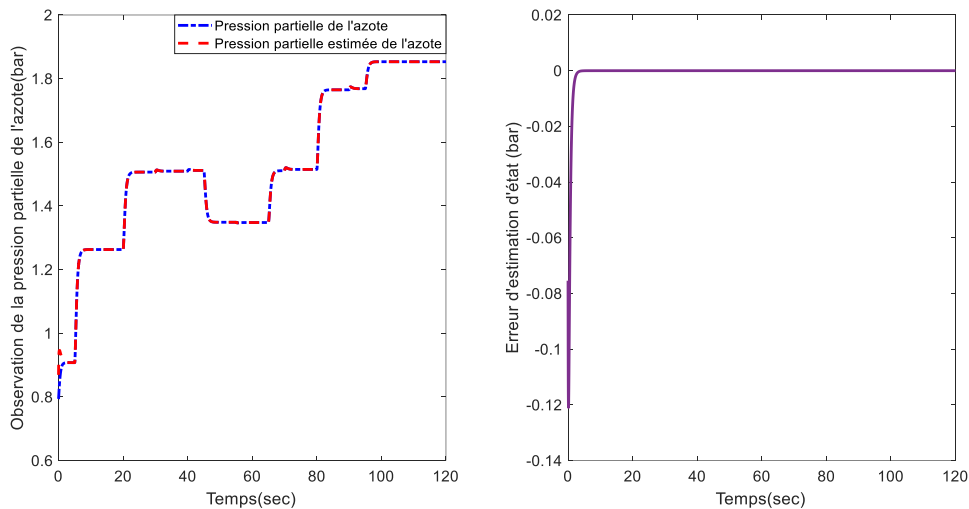


Fig.4.5. Estimation de la pression partielle de l'azote (Théorème 4.1).

Les résultats de simulation montrent une bonne estimation des états du système à PEMFC, les erreurs d'estimation d'état tendent vers zéro et les valeurs propres des matrices locales $(A_{j_i}^i - L_{j_i}^i C_i)$ sont contenues dans la région LMI imposée. Néanmoins, les valeurs des taux d'atténuation γ_i sont quelque peu élevées.

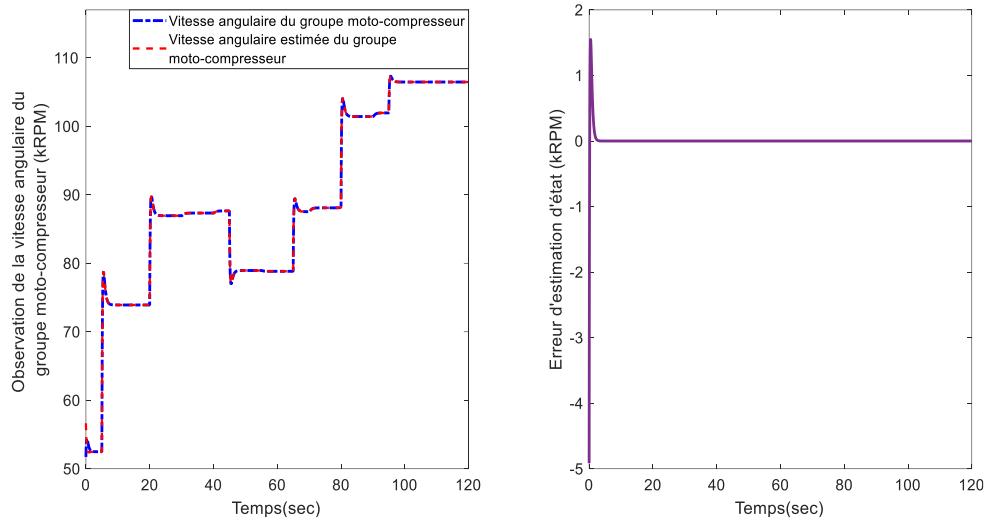


Fig.4.6. Estimation de la vitesse angulaire du groupe moto-compresseur (Théorème 4.1)

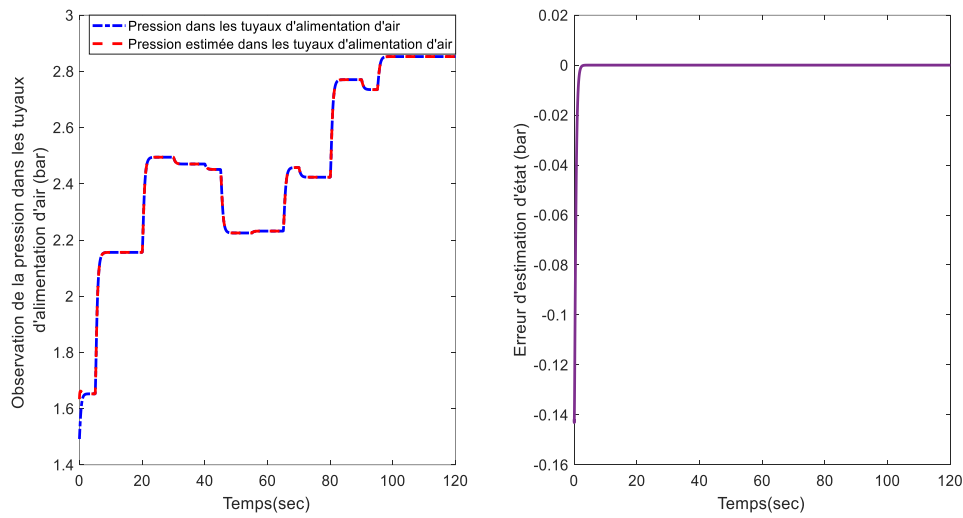


Fig.4.7. Estimation de la pression dans les tuyaux d'alimentation d'air (Théorème 4.1)

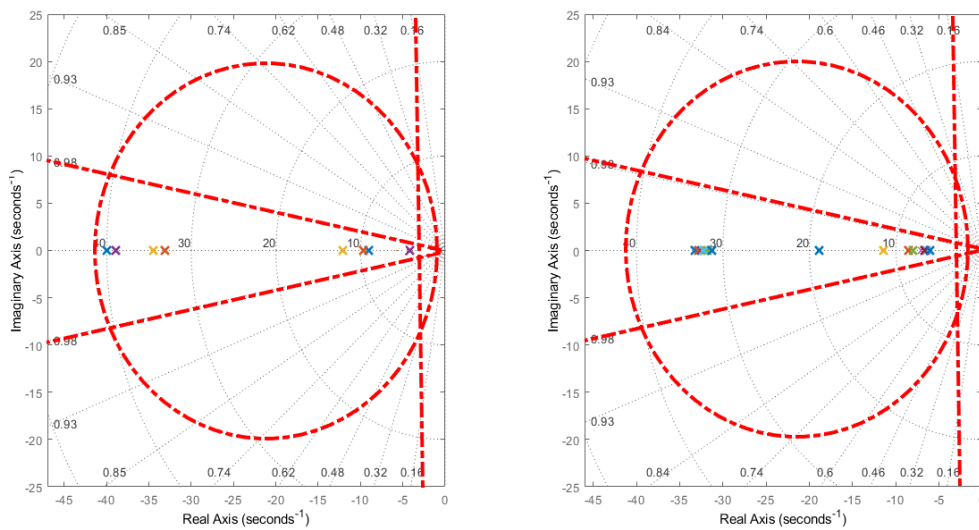


Fig.4.8. Distribution des valeurs propres des matrices $(A_{j_i}^i - L_{j_i}^i C_i)$ (Théorème 4.1).

4.3.2. Relaxation de la \mathcal{D} -stabilité par le lemme de Finsler

4 \mathcal{D} -observation des systèmes TS interconnectés à VDNM

Dans cette section, nous étendons l'utilisation du lemme de Finsler pour la réduction du conservatisme des conditions de \mathcal{D} -stabilité aux systèmes TS interconnectés.

Théorème 4.2

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Pour $i=1, \dots, n$, les systèmes interconnectés (4.8) sont \mathcal{D} -stables et les gains \mathcal{L}_2 du transfert de $\tilde{\omega}_i(t)$ vers $e_i(t)$ sont bornés si $\exists \varepsilon_i > 0$, des matrices définies positives P_i , des matrices $X_{j_i}^i, Z_{j_i}^i, V_{j_i}^1, \dots, V_{j_i}^k, W_{j_i}^i$ et des scalaires positifs $\bar{\gamma}_i$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites $\forall k \in \{1, \dots, n\} / k \neq i$

$$\begin{aligned}
 & \min_{P_i, X_{j_i}^i, Z_{j_i}^i, V_{j_i}^1, \dots, V_{j_i}^k, W_{j_i}^i} \bar{\gamma}_i \\
 & \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
 L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{j_i}^i - X_{j_i}^i C_i)) + I & * & \dots & * & * & * & 0 & \dots & 0 & 0 & * \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{j_i}^i - \varepsilon_i X_{j_i}^i C_i) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{j_i}^1 R_{j_i}^{1T}) & \dots & * & * & * & * & \dots & 0 & 0 & * \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{j_i}^i - \varepsilon_i X_{j_i}^i C_i) & 0 & \dots & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{j_i}^k R_{j_i}^{kT}) & * & * & 0 & \dots & * & 0 & * \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{j_i}^i - \varepsilon_i X_{j_i}^i C_i) & 0 & \dots & 0 & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i W_{j_i}^i S_{j_i}^{iT}) & * & 0 & \dots & 0 & * & * \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{j_i}^i - \varepsilon_i X_{j_i}^i C_i) & -(M^T \otimes \varepsilon_i Z_{j_i}^{iT}) & \dots & -(M^T \otimes \varepsilon_i Z_{j_i}^{iT}) & -(M^T \otimes \varepsilon_i Z_{j_i}^{iT}) & -(M^T \otimes \varepsilon_i Z_{j_i}^{iT}) & 0 & \dots & 0 & 0 & * \\
 0 & -(M^T \otimes \varepsilon_i R_{j_i}^{iT}) & \dots & 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma}_i I & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & -(M^T \otimes \varepsilon_i R_{j_i}^{iT}) & 0 & 0 & 0 & \dots & -\bar{\gamma}_i I & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{\gamma}_i I & 0 \\
 M^T \otimes D_{j_i}^{iT} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{iT} P_i & \dots & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{iT} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{iT} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{iT} P_i & 0 & \dots & 0 & 0 & -\Gamma_1^i \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 M^T \otimes D_{j_i}^{iT} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{iT} P_i & \dots & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{iT} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{iT} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{iT} P_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes P_i & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & \dots & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & I \otimes V_{j_i}^{iT} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & I \otimes V_{j_i}^{iT} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & I \otimes W_{j_i}^{iT} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 \\
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 \dots & * & * & * & \dots & * \\
 \dots & * & * & * & \dots & * \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \dots & * & * & * & \dots & * \\
 \dots & * & * & * & \dots & * \\
 \dots & * & * & * & \dots & * \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \dots & -\Gamma_k^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & 0 & -\Lambda_i & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & 0 & 0 & -(\Gamma_i^i)^{-1} & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -(\Gamma_k^i)^{-1} \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -(\Lambda_i)^{-1}
 \end{array} \right] < 0, k \neq i. \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

où

$$\Gamma_k^i > 0 \text{ et } \Lambda_i > 0.$$

Les matrices de gains des multi-observateurs sont définies par

$$L_{j_i}^i = P_i^{-1} X_{j_i}^i. \tag{4.31}$$

Les taux d'atténuation sont

$$\gamma_i = \sqrt{\bar{\gamma}_i}. \quad (4.32)$$

Preuve. Afin de prouver le Théorème 4.2, nous utilisons la même condition de \mathcal{D} -stabilité que précédemment

$$\sum_{i=1}^n (L \otimes V_i + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}_i + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}_i + (I \otimes e_i^T)(I \otimes e_i) - \gamma_i^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (I \otimes e_k^T)(I \otimes e_k) - \gamma_i^2 (I \otimes \omega_i^T)(I \otimes \omega_i)) < 0. \quad (4.33)$$

On remplace V_i et \dot{V}_i par leurs expressions respectives $e_i^T P^i e_i$ et $He(e_i^T P^i \dot{e}_i)$ dans l'inégalité précédente et on utilise la propriété (3.18) du produit de Kronecker

$$\sum_{i=1}^n ((I \otimes e_i^T)(L \otimes P_i + I)(I \otimes e_i) + Sym((I \otimes e_i^T)(M \otimes P_i)(I \otimes \dot{e}_i)) - \gamma_i^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (I \otimes e_k^T)(I \otimes e_k) - \gamma_i^2 (I \otimes \omega_i^T)(I \otimes \omega_i)) < 0. \quad (4.34)$$

L'inégalité (4.34) sous forme matricielle donne

$$\sum_{i=1}^n \left\{ Z^T \begin{bmatrix} L \otimes P_i + I & 0 & \cdots & 0 & 0 & M \otimes P_i \\ 0 & -\gamma_i^2 I & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma_i^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\gamma_i^2 I & 0 \\ M^T \otimes P_i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Z \right\} < 0, k \neq i, \quad (4.35)$$

$$\text{où } Z^T = \begin{bmatrix} I \otimes e_i^T & I \otimes e_1^T & \cdots & I \otimes e_k^T & I \otimes \omega_i^T & I \otimes \dot{e}_i^T \end{bmatrix}$$

L'inégalité (4.35) est satisfaite si

$$\forall i = 1, \dots, n: Z^T \begin{bmatrix} L \otimes P_i + I & 0 & \cdots & 0 & 0 & M \otimes P_i \\ 0 & -\gamma_i^2 I & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma_i^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\gamma_i^2 I & 0 \\ M \otimes P_i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Z < 0, k \neq i. \quad (4.36)$$

D'un autre côté, à partir de l'expression (4.8), on peut écrire

$$\forall i = 1, \dots, n: M \otimes \dot{e}_i = (M \otimes (A_{\hat{h}_i} - L_{\hat{h}_i} C_i) e_i) + (M \otimes \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n D_{\hat{h}_i}^k e_k) + (M \otimes \omega_i). \quad (4.37)$$

En utilisant la propriété (3.18) du produit de Kronecker, on a

$$\forall i = 1, \dots, n: (M \otimes I)(I \otimes \dot{e}_i) = M \otimes (A_{\hat{h}_i} - L_{\hat{h}_i} C_i)(I \otimes e_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (M \otimes D_{\hat{h}_i}^k)(I \otimes e_k) + (M \otimes I)(I \otimes \omega_i). \quad (4.38)$$

L'expression précédente peut s'écrire sous forme matricielle comme

$$\forall i = 1, \dots, n: \begin{bmatrix} M \otimes (A_{\hat{h}_i} - L_{\hat{h}_i} C_i) & M \otimes D_{\hat{h}_i}^1 & \dots & M \otimes D_{\hat{h}_i}^k & (M \otimes I) & -(M \otimes I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I \otimes e_i) \\ (I \otimes e_1) \\ \vdots \\ (I \otimes e_k) \\ (I \otimes \omega_i) \\ (I \otimes \dot{e}_i) \end{bmatrix} = 0, k \neq i. \quad (4.39)$$

En utilisant le lemme de Finsler, l'inégalité (4.36) sous la contrainte (4.39) permet d'écrire ce qui suit

$$\forall i = 1, \dots, n: \begin{bmatrix} L \otimes P_i + I & 0 & \dots & 0 & 0 & M \otimes P_i \\ 0 & -\gamma_i^2 I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\gamma_i^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\gamma_i^2 I & 0 \\ M^T \otimes P_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^i \\ U_{2,1}^i \\ \vdots \\ U_{2,k}^i \\ U_3^i \\ U_4^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \otimes (A_{\hat{h}_i} - L_{\hat{h}_i} C_i) & M \otimes D_{\hat{h}_i}^1 & \dots & M \otimes D_{\hat{h}_i}^k & (M \otimes I) & -(M \otimes I) \end{bmatrix} + (*) < 0, k \neq i. \quad (4.40)$$

On choisit : $U_1^i = (I \otimes P_i)$, $U_{2,k}^i = (I \otimes \varepsilon_i (V_{\hat{h}_i}^k)^{-1} P_i)$, $U_3^i = (I \otimes \varepsilon_i (W_{\hat{h}_i})^{-1} P_i)$, $U_4^i = (I \otimes \varepsilon_i (Y_{\hat{h}_i})^{-1} P_i)$ avec $\varepsilon_i > 0$, l'inégalité (4.40) devient alors

$$\forall i = 1, \dots, n: \begin{bmatrix} L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{\hat{h}_i} - P_i L_{\hat{h}_i} C_i)) + I & * & \dots \\ M \otimes (\varepsilon_i (V_{\hat{h}_i}^1)^{-1} P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i (V_{\hat{h}_i}^1)^{-1} P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes D_{\hat{h}_i}^{1T} P_i) & -\gamma_i^2 I + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i (V_{\hat{h}_i}^1)^{-1} P_i D_{\hat{h}_i}^1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M \otimes (\varepsilon_i (V_{\hat{h}_i}^k)^{-1} P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i (V_{\hat{h}_i}^k)^{-1} P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i (V_{\hat{h}_i}^k)^{-1} P_i D_{\hat{h}_i}^k) + (M^T \otimes \varepsilon_i D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i (V_{\hat{h}_i}^k)^{-T}) & \dots \\ M \otimes (\varepsilon_i (W_{\hat{h}_i})^{-1} P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i (W_{\hat{h}_i})^{-1} P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes P_i) & (M \otimes \varepsilon_i (W_{\hat{h}_i})^{-1} P_i D_{\hat{h}_i}^1) + (M^T \otimes \varepsilon_i P_i (V_{\hat{h}_i}^1)^{-T}) & \dots \\ M \otimes (\varepsilon_i (Y_{\hat{h}_i})^{-1} P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i (Y_{\hat{h}_i})^{-1} P_i L_{\hat{h}_i} C_i) & (M \otimes \varepsilon_i (Y_{\hat{h}_i})^{-1} P_i D_{\hat{h}_i}^1) - (M^T \otimes \varepsilon_i P_i (V_{\hat{h}_i}^1)^{-T}) & \dots \\ * & * & * \\ * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\gamma_i^2 I + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i (V_{\hat{h}_i}^k)^{-1} P_i D_{\hat{h}_i}^k) & * & * \\ (M \otimes \varepsilon_i (W_{\hat{h}_i})^{-1} P_i D_{\hat{h}_i}^k) + (M^T \otimes \varepsilon_i P_i (V_{\hat{h}_i}^k)^{-T}) & -\gamma_i^2 I + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i (W_{\hat{h}_i})^{-1} P_i) & * \\ (M \otimes \varepsilon_i (Y_{\hat{h}_i})^{-1} P_i D_{\hat{h}_i}^k) - (M^T \otimes \varepsilon_i P_i (V_{\hat{h}_i}^k)^{-T}) & (M \otimes \varepsilon_i (Y_{\hat{h}_i})^{-1} P_i) - (M^T \otimes \varepsilon_i P_i (W_{\hat{h}_i})^{-T}) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i (Y_{\hat{h}_i})^{-1} P_i) \end{bmatrix} < 0, k \neq i. \quad (4.41)$$

L'application de la propriété de congruence avec la matrice

$$N_i = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I \otimes V_{\hat{h}_i}^{1T} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \otimes V_{\hat{h}_i}^{kT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \otimes W_{\hat{h}_i}^T & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I \otimes Y_{\hat{h}_i}^T \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

permet d'aboutir à l'inégalité suivante

$$\forall i=1, \dots, n: \left[\begin{array}{ccc}
 L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{\hat{h}_i} - P_i L_{\hat{h}_i} C_i)) + I & * & \dots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes V_{\hat{h}_i}^1 D_{\hat{h}_i}^{1T} P_i) & -\gamma_i^2 (I \otimes V_{\hat{h}_i}^1)(I \otimes V_{\hat{h}_i}^{1T}) + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes V_{\hat{h}_i}^k D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) + (M^T \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^k D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i) & \dots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes W_{\hat{h}_i} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) + (M^T \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} P_i) & \dots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) - (M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & \dots \\
 * & * & * \\
 * & * & * \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 -\gamma_i^2 (I \otimes V_{\hat{h}_i}^k)(I \otimes V_{\hat{h}_i}^{kT}) + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) & * & * \\
 (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) + (M^T \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} P_i) & -\gamma_i^2 (I \otimes W_{\hat{h}_i})(I \otimes W_{\hat{h}_i}^T) + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i W_{\hat{h}_i}^T) & * \\
 (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) - (M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i W_{\hat{h}_i}^T) - (M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i Y_{\hat{h}_i}^T)
 \end{array} \right] < 0, k \neq i. \quad (4.43)$$

En se basant sur la remarque 3.2, les éléments (2,2), (4,4) et (5,5) de l'inégalité (4.43) peuvent être majorés comme suit

$$\begin{aligned}
 & -\gamma_i^2 (I \otimes V_{\hat{h}_i}^k)(I \otimes V_{\hat{h}_i}^{kT}) + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) \leq \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^k R_{\hat{h}_i}^{kT}) + \\
 & \gamma_i^{-2} (M \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^k)(M^T \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^{kT}), \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma_i^2 (I \otimes V_{\hat{h}_i}^k)(I \otimes V_{\hat{h}_i}^{kT}) + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) \leq \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^k R_{\hat{h}_i}^{kT}) \\
 & + \gamma_i^{-2} (M \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^k)(M^T \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^{kT}), \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma_i^2 (I \otimes W_{\hat{h}_i})(I \otimes W_{\hat{h}_i}^T) + \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i W_{\hat{h}_i}^T) \leq \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i W_{\hat{h}_i}^T) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} S_{\hat{h}_i}^T) \\
 & + \gamma_i^{-2} (M \otimes \varepsilon_i S_{\hat{h}_i})(M^T \otimes \varepsilon_i S_{\hat{h}_i}^T). \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité (4.43) devient

$$\forall i=1, \dots, n: \left[\begin{array}{ccc}
 L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{\hat{h}_i} - P_i L_{\hat{h}_i} C_i)) + I & * & \dots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes V_{\hat{h}_i}^1 D_{\hat{h}_i}^{1T} P_i) & \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^1 R_{\hat{h}_i}^{1T}) & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes V_{\hat{h}_i}^k D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) + (M^T \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^k D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i) & \dots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes W_{\hat{h}_i} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) + (M^T \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} P_i) & \dots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) - (M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & \dots \\
 * & * & * \\
 * & * & * \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^k R_{\hat{h}_i}^{kT}) & * & * \\
 (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) + (M^T \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} P_i) & \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i W_{\hat{h}_i}^T) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} S_{\hat{h}_i}^T) & * \\
 (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) - (M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i W_{\hat{h}_i}^T) - (M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i Y_{\hat{h}_i}^T)
 \end{array} \right] + \Omega_i^k < 0, k \neq i. \quad (4.47)$$

La matrice Ω_I^i est donnée par

$$\Omega_1^i = \gamma_i^{-2} \begin{bmatrix} 0 \\ M \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M^T \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^{1T} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + \gamma_i^{-2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ M \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & M^T \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^{kT} & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\gamma_i^{-2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ M \otimes \varepsilon_i S_{\hat{h}_i} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & M^T \otimes \varepsilon_i S_{\hat{h}_i}^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

L'application du complément de Schur à l'inégalité (4.47) permet d'écrire

$$\forall i=1, \dots, n: \begin{bmatrix} L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{\hat{h}_i} - P_i L_{\hat{h}_i} C_i)) + I & * & \cdots \\ M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes V_{\hat{h}_i}^1 D_{\hat{h}_i}^{1T} P_i) & \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^1 R_{\hat{h}_i}^{1T}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes V_{\hat{h}_i}^k D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) + (M^T \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^k D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i) & \cdots \\ M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) + (M^T \otimes W_{\hat{h}_i} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) + (M^T \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} P_i) & \cdots \\ M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 V_{\hat{h}_i}^{1T}) - (M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & \cdots \\ 0 & M^T \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^{1T} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ * & * & * \\ * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^k R_{\hat{h}_i}^{kT}) & * & * \\ (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) + (M^T \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} P_i) & \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i W_{\hat{h}_i}^T) - \text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} S_{\hat{h}_i}^T) & * \\ (M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k V_{\hat{h}_i}^{kT}) - (M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & (M \otimes \varepsilon_i P_i W_{\hat{h}_i}^T) - (M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i Y_{\hat{h}_i}^T) \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M^T \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^{kT} & 0 & 0 \\ 0 & M^T \otimes \varepsilon_i S_{\hat{h}_i}^T & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma_i^2 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\gamma_i^2 I \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} < 0, k \neq i. \quad (4.49)$$

L'inégalité (4.49) peut aussi s'exprimer comme suit

4 D-observation des systèmes TS interconnectés à VDNM

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc}
 L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{\hat{h}_i} - P_i L_{\hat{h}_i} C^i)) + I & * & \dots & * & * \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C^i) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^1 R_{\hat{h}_i}^{1T}) & \dots & * & * \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C^i) & 0 & \dots & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{\hat{h}_i}^k R_{\hat{h}_i}^{kT}) & * \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C^i) & 0 & \dots & 0 & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i W_{\hat{h}_i} S_{\hat{h}_i}^T) \\
 M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{\hat{h}_i} - \varepsilon_i P_i L_{\hat{h}_i} C^i) & -(M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & \dots & -(M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) & -(M^T \otimes \varepsilon_i Y_{\hat{h}_i} P_i) \\
 0 & M^T \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^{1T} & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & M^T \otimes \varepsilon_i R_{\hat{h}_i}^{kT} & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & M^T \otimes \varepsilon_i S_{\hat{h}_i}^T
 \end{array} \right] \\
 & \left. \begin{array}{c} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \\ -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i P_i Y_{\hat{h}_i}^T) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 0 \dots 0 \ 0 \\ * \dots 0 \ 0 \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ 0 \dots * \ 0 \\ 0 \dots 0 \ * \\ 0 \dots 0 \ 0 \\ -\gamma_i^2 I \ \dots \ 0 \ 0 \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \ \vdots \\ 0 \ \dots \ -\gamma_i^2 I \ 0 \\ 0 \ \dots \ 0 \ -\gamma_i^2 I \end{array} + \Omega_2^i < 0, k \neq i,
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Omega_2^i = \text{Sym} & \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} M \otimes P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ \vdots \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & I \otimes V_{\hat{h}_i}^{1T} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] + \dots + \\
 & \left[\begin{array}{c} M \otimes P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ \vdots \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \dots & I \otimes V_{\hat{h}_i}^{kT} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & + \left[\begin{array}{c} M \otimes P_i \\ M \otimes \varepsilon_i P_i \\ \vdots \\ M \otimes \varepsilon_i P_i \\ M \otimes \varepsilon_i P_i \\ M \otimes \varepsilon_i P_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & I \otimes W_{\hat{h}_i}^T & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \Big\}.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Selon l'inégalité de Young, l'expression précédente peut être bornée comme

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M \otimes P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ \vdots \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma_1^{-1} \begin{bmatrix} M^T \otimes D_{\hat{h}_i}^{1T} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{\hat{h}_i}^{1T} P_i & \cdots & M^T \otimes \varepsilon_i D_{\hat{h}_i}^{1T} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{\hat{h}_i}^{1T} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{\hat{h}_i}^{1T} P_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \cdots + \begin{bmatrix} M \otimes P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ \vdots \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ M \otimes \varepsilon_i P_i D_{\hat{h}_i}^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma_k^{-1} \begin{bmatrix} M^T \otimes D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i & \cdots & M^T \otimes \varepsilon_i D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{\hat{h}_i}^{kT} P_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 \\ I \otimes V_{\hat{h}_i}^1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma_1^i \begin{bmatrix} 0 & I \otimes V_{\hat{h}_i}^{1T} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \otimes V_{\hat{h}_i}^k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma_k^i \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & I \otimes V_{\hat{h}_i}^{kT} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M \otimes P_i \\ M \otimes \varepsilon_i P_i \\ \vdots \\ M \otimes \varepsilon_i P_i \\ M \otimes \varepsilon_i P_i \\ M \otimes \varepsilon_i P_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda_i^{-1} \begin{bmatrix} M^T \otimes P_i & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & \cdots & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \otimes W_{\hat{h}_i} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I \otimes W_{\hat{h}_i}^T & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(4.52)

L'application du complément de Schur à l'inégalité (4.50) et les changements de variables $X_{j_i}^i = P_i L_{j_i}^i$, $Z_{j_i}^i = P_i Z_{j_i}^{i T}$ et $\bar{\gamma}_i = \gamma_i^2$ aboutit à la contrainte (4.30) du Théorème 4.2. ■

Remarque 4.1

Les contraintes de \mathcal{D} -stabilité basées sur le lemme de Finsler sont des LMIs pour $R_{j_i}^k, S_{j_i}^i$ et ε_i donnés. Par conséquent, les matrices $R_{j_i}^k, S_{j_i}^i$ et le scalaire ε_i sont fixés et ne sont pas des variables de décision.

Remarque 4.2

Pour un système composé de deux modèles TS interconnectés, les contraintes de \mathcal{D} -stabilité basées sur le lemme de Finsler sont données par

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_{j_i}^i - X_{j_i}^i C_i)) + I & * & * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{j_i}^i - \varepsilon_i X_{j_i}^i C_i) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i V_{j_i}^k R_{j_i}^{i T}) & 0 & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{j_i}^i - \varepsilon_i X_{j_i}^i C_i) & 0 & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i W_{j_i}^i S_{j_i}^{i T}) & * & 0 & * & * & * & 0 & * \\ M \otimes (\varepsilon_i P_i A_{j_i}^i - \varepsilon_i X_{j_i}^i C_i) & -(M^T \otimes \varepsilon_i Z_{j_i}^{i T}) & -(M^T \otimes \varepsilon_i Z_{j_i}^{i T}) & -\text{Sym}(M \otimes \varepsilon_i Z_{j_i}^{i T}) & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & (M^T \otimes \varepsilon_i R_{j_i}^{i T}) & 0 & 0 & -\bar{\gamma}_i I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M^T \otimes \varepsilon_i S_{j_i}^{i T}) & 0 & 0 & -\bar{\gamma}_i I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes D_{j_i}^{k T} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{k T} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{k T} P_i & M^T \otimes \varepsilon_i D_{j_i}^{k T} P_i & 0 & 0 & -\Gamma_k^i & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes P_i & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & M^T \otimes \varepsilon_i P_i & 0 & 0 & 0 & -\Lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & I \otimes V_{j_i}^{k T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma_k^{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \otimes W_{j_i}^{i T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Lambda_i^{-1} \end{array} \right] < 0. \tag{4.53}$$

Exemple 4.2 : Application du Théorème 4.2 à un système de pile à combustible à membrane échangeuse de protons (Proton Exchange Membrane Fuel Cell)

Les contraintes (4.30) du Théorème 4.2 sont appliquées au système à PEMFC de l'exemple 4.1. Les Figures (4.9)-(4.13) présentent les états estimés, les erreurs d'estimation d'état et la distribution des valeurs propres des matrices $(A_{j_i}^i - L_{j_i}^i C_i)$. Le lemme de Finsler permet de diminuer significativement les taux d'atténuation pour $\varepsilon_i=10^{-6}$ i.e. $\gamma_1=\gamma_2=0,0040$.

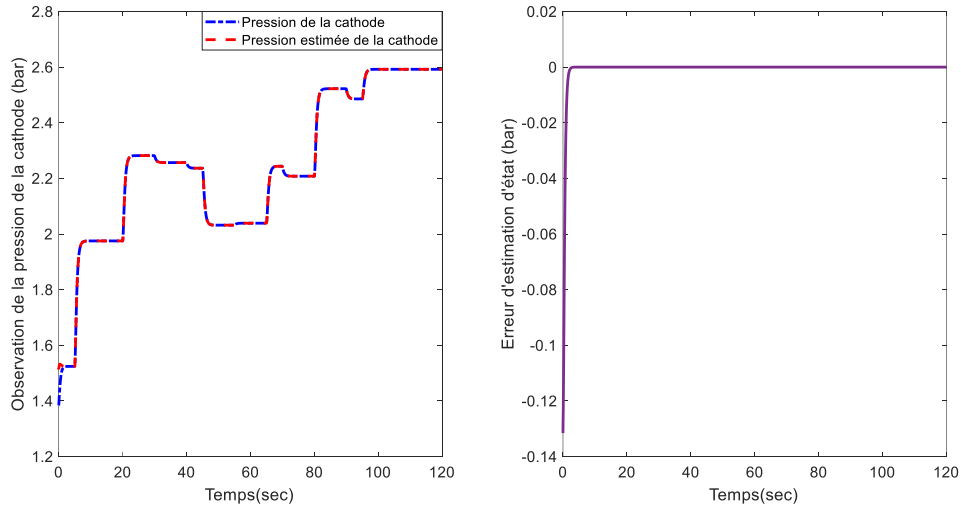


Fig.4.9. Estimation de la pression de la cathode (Théorème 4.2).

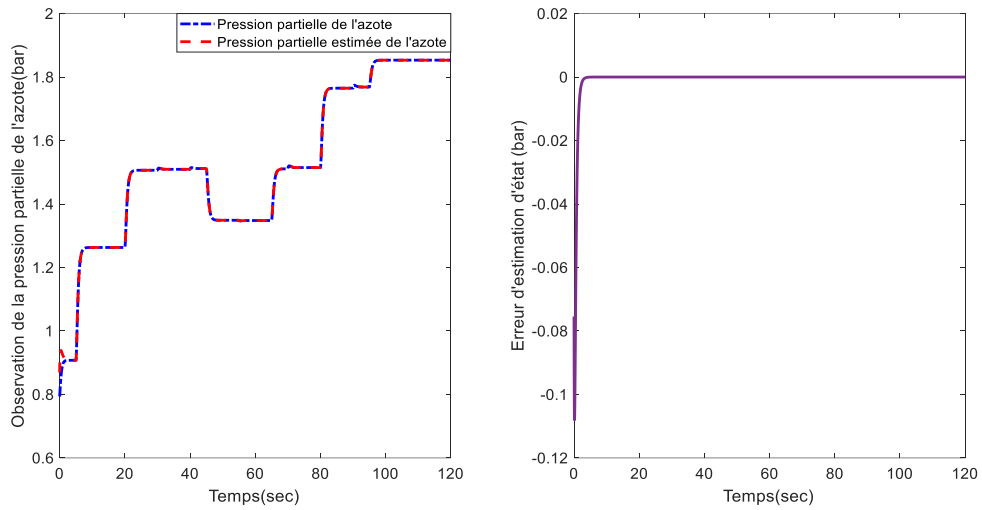


Fig.4.10. Estimation de la pression partielle de l'azote (Théorème 4.2).

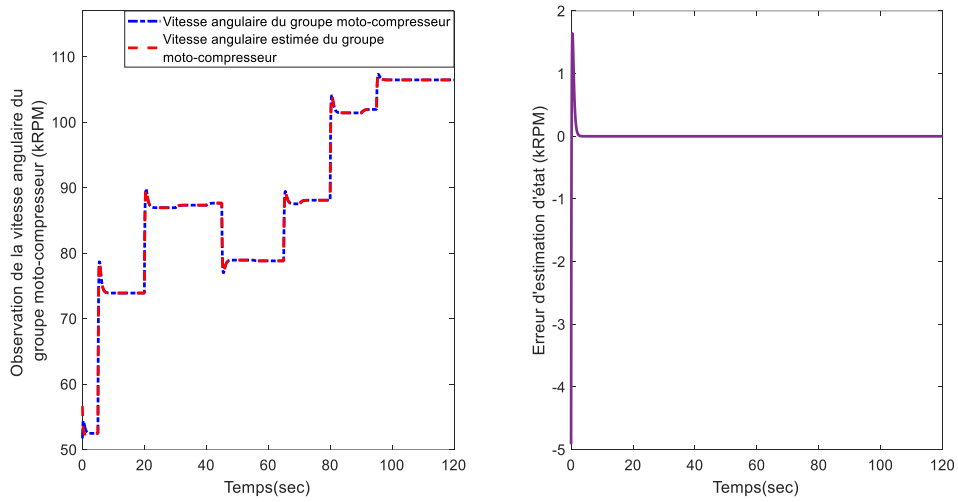


Fig.4.11. Estimation de la vitesse angulaire du groupe moto-compresseur (Théorème 4.2).

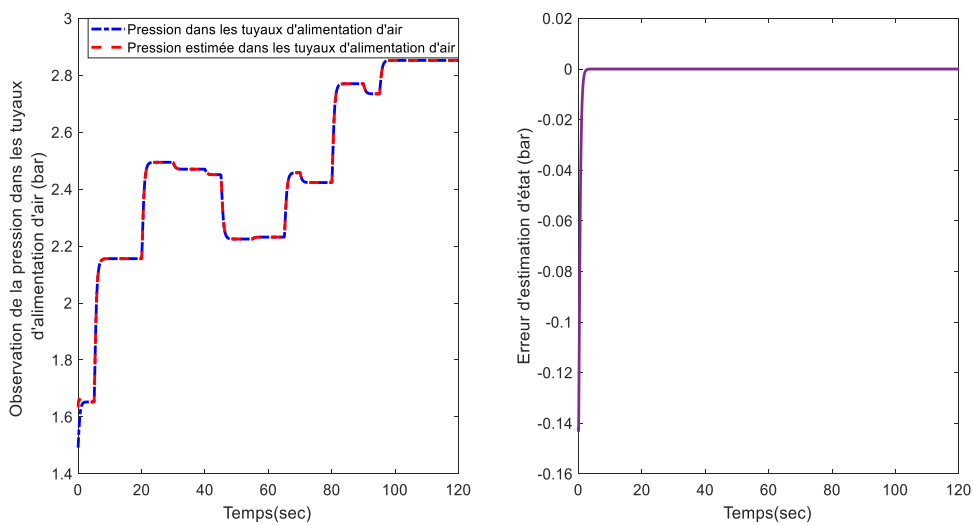


Fig.4.12. Estimation de la pression dans les tuyaux d'alimentation d'air (Théorème 4.2).

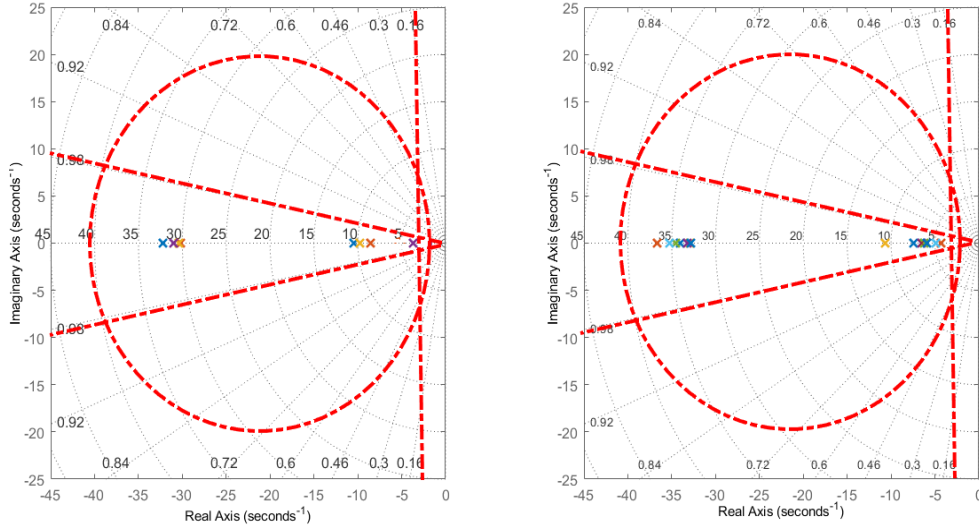


Fig.4.13. Distribution des valeurs propres des matrices $(A_{j_i}^i - L_{j_i}^i C_i)$ (Théorème 4.2).

4.4. Estimation d'état et des paramètres variant dans le temps

Dans cette section, nous étendons la synthèse d'observateurs estimant l'état et les paramètres variant dans le temps proposés dans [Bezzaoucha et al., 2013 a], [Bezzaoucha et al., 2013 b] et [Bezzaoucha et al., 2013 c] aux systèmes TS interconnectés à VDNM. L'idée fondamentale développée dans [Bezzaoucha et al., 2013 a] est de réécrire les paramètres variant dans le temps sous forme polytopique convexe en utilisant la transformation par secteurs non linéaires en supposant les valeurs minimale et maximale de ces paramètres connus.

Dans [Delmotte et al., 2013], les auteurs ont suivi la même approche afin de détecter l'encrassement des échangeurs de chaleur qui est principalement lié à l'estimation de deux paramètres inconnus et variant dans le temps.

4.4.1. Cas d'un système linéaire

Considérons un système linéaire dont le paramètre $\theta(t)$ est variant dans le temps, non mesurable mais borné

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad \theta(t) \in [\theta^1, \theta^2] \quad (4.54)$$

On suppose que les matrices A et B sont affines en $\theta(t)$

$$\begin{cases} A(\theta(t)) = \check{A} + \theta(t)\bar{A}, \\ B(\theta(t)) = \check{B} + \theta(t)\bar{B}. \end{cases} \quad (4.55)$$

La transformation par secteurs non linéaires permet d'exprimer le paramètre $\theta(t)$ sous la forme suivante

$$\theta(t) = \mu_1(\theta(t))\theta^1 + \mu_2(\theta(t))\theta^2, \quad (4.56)$$

avec

$$\mu_1(\theta(t)) = \frac{\theta^2 - \theta(t)}{\theta^2 - \theta^1}, \quad \mu_2(\theta(t)) = \frac{\theta(t) - \theta^1}{\theta^2 - \theta^1}. \quad (4.57)$$

Les fonctions $\mu_1(\theta(t))$ et $\mu_2(\theta(t))$ vérifient la propriété de somme convexe

$$\sum_{i=1}^2 \mu_i(\theta(t)) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(\theta(t)) \leq 1. \quad (4.58)$$

En remplaçant (4.55) et (4.56) dans (4.54), le système variant dans le temps s'exprime sous la forme TS suivante

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \quad (4.59)$$

où

$$\begin{cases} A_1 = \check{A} + \theta^1 \bar{A}, \\ A_2 = \check{A} + \theta^2 \bar{A}, \\ B_1 = \check{B} + \theta^1 \bar{B}, \\ B_2 = \check{B} + \theta^2 \bar{B}. \end{cases} \quad (4.60)$$

En se basant sur le système TS (4.59), un observateur estimant conjointement le vecteur d'état et le paramètre $\theta(t)$ est proposé [Bezzaoucha, 2013]

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t))(K_i (y(t) - \hat{y}(t)) - \alpha_i \hat{\theta}(t)), \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t). \end{cases} \quad (4.61)$$

Les matrices L_i , K_i et α_i sont déterminées de sorte que l'erreur d'estimation d'état et celle du paramètre $\theta(t)$ convergent asymptotiquement vers zéro tout en garantissant une atténuation \mathcal{L}_2 de l'effet des variables de prémisses non mesurables et celui du paramètre $\theta(t)$.

Le système (4.59) est écrit sous la forme d'un système TS incertain dont les variables de prémisses dépendent du paramètre estimé $\hat{\theta}(t)$.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t))((A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u(t)). \quad (4.62)$$

Les pseudo-incertitudes $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$ sont définies comme suit

$$\begin{cases} \Delta A(t) = \sum_{i=1}^2 (\mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\hat{\theta}(t))) A_i = \sum_{i=1}^2 \delta_i(t) A_i = A \Sigma_A(t) E_A, \\ \Delta B(t) = \sum_{i=1}^2 (\mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\hat{\theta}(t))) B_i = \sum_{i=1}^2 \delta_i(t) B_i = B \Sigma_B(t) E_B, \end{cases} \quad (4.63)$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= [A_1 \quad A_2], \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t)I_{n_x} & 0 \\ 0 & \delta_2(t)I_{n_x} \end{bmatrix}, E_A = \begin{bmatrix} I_{n_x} & I_{n_x} \end{bmatrix}^T, \\
 B &= [B_1 \quad B_2], \Sigma_B(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t)I_{n_u} & 0 \\ 0 & \delta_2(t)I_{n_u} \end{bmatrix}, E_B = \begin{bmatrix} I_{n_u} & I_{n_u} \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Grâce à la propriété (4.58), on a

$$-1 \leq \delta_i(t) \leq 1. \tag{4.65}$$

Ce qui implique

$$\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I, \quad \Sigma_B^T(t)\Sigma_B(t) \leq I. \tag{4.66}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état peut être déduite de (4.61) et (4.62)

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t))((A_i - L_i C)e_x(t) + \Delta A(t)x(t) + \Delta B(t)u(t)). \tag{4.67}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation du paramètre s'explique

$$\dot{e}_\theta(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t))(\dot{\theta}(t) - K_i C e_x(t) + \alpha_i \theta(t) - \alpha_i e_\theta(t)). \tag{4.68}$$

Les vecteurs augmentés suivants sont ensuite considérés

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \theta(t) & \dot{\theta}(t) & u^T(t) \end{bmatrix}^T. \tag{4.69}$$

La dynamique du vecteur augmenté $e_a(t)$ s'exprime alors comme

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t))(\Phi_i e_a(t) + \Psi_i \omega(t)), \tag{4.70}$$

avec

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} A_i - L_i C & 0 \\ -K_i C & -\alpha_i \end{bmatrix}, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} \Delta A(t) & 0 & 0 & \Delta B(t) \\ 0 & \alpha_i & I & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.71}$$

La détermination des matrices de l'observateur (4.61) se base sur le lemme suivant

Lemme 4.1 [Bezzaoucha, 2013]

L'observateur (4.61) pour le système linéaire variant dans le temps (4.54) garantit que le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par β , s'il existe des matrices $P_0 = P_0^T > 0, \Gamma_2^0 = (\Gamma_2^0)^T, \Gamma_2^3 = (\Gamma_2^3)^T > 0, F_i, R_i$, des scalaires positifs $P_i, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \Gamma_2^1, \Gamma_2^2$ et $\bar{\alpha}_i$ solution du problème d'optimisation (4.72) sous les contraintes LMIs (4.73) et (4.74) (pour $i=1,2$)

$$\min_{P_0, P_i, R_i, F_i, \bar{\alpha}_i, \lambda_1, \lambda_2, \Gamma_2^0, \Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \Gamma_2^3} \beta \tag{4.72}$$

$$\Gamma_2^k < \beta I, \text{ pour } k = 0,1,2,3 \quad (4.73)$$

$$\begin{bmatrix} C_i^1 & -C^T F_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 A & P_0 B \\ * & -2\bar{\alpha}_i + 1 & 0 & \bar{\alpha}_i & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0 + \lambda_1 E_A^T E_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3 + \lambda_2 E_B^T E_B & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\lambda_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.74)$$

$$\text{avec } C_i^1 = P_0 A_i + A_i^T P_0 - R_i C - C^T R_i^T + I$$

Les gains de l'observateur sont donnés par

$$\begin{cases} L_i = P_0^{-1} R_i, \\ K_i = P_1^{-1} F_i, \\ \alpha_i = P_1^{-1} \bar{\alpha}_i. \end{cases} \quad (4.75)$$

4.4.2. Extension aux systèmes TS interconnectés à VDNM

Considérons un ensemble de n sous-systèmes de Takagi-Sugeno à paramètres variant dans le temps $\theta_i(t)$ et à variable de décision non mesurables ($i=1, \dots, n$)

$$TS_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j_i=1}^{r_i} h_{j_i}^i(x_i(t)) (A_{j_i}^i(\theta_i(t)) x_i(t) + B_{j_i}^i(\theta_i(t)) u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n D_{j_i}^k(\theta_i(t)) x_k(t)), \\ y_i(t) = C_i x_i(t), \end{cases} \quad (4.76)$$

$$\text{avec } \theta_i(t) = [\theta_{1,i}(t) \ \dots \ \theta_{m_i,i}(t)]^T.$$

Le système (4.76) vérifie les hypothèses 4.1 et 4.2.

Les matrices $A_{j_i}^i(\theta_i(t))$, $B_{j_i}^i(\theta_i(t))$ et $D_{j_i}^k(\theta_i(t))$ sont supposées être affines en $\theta_i(t)$

$$\begin{cases} A_{j_i}^i(\theta_i(t)) = \bar{A}_{j_i}^i + \sum_{l_i=1}^{m_i} \theta_{l_i,i}(t) \bar{A}_{j_i l_i}^i, \\ B_{j_i}^i(\theta_i(t)) = \bar{B}_{j_i}^i + \sum_{l_i=1}^{m_i} \theta_{l_i,i}(t) \bar{B}_{j_i l_i}^i, \\ D_{j_i}^k(\theta_i(t)) = \bar{D}_{j_i}^k + \sum_{l_i=1}^{m_i} \theta_{l_i,i}(t) \bar{D}_{j_i l_i}^k. \end{cases} \quad (4.77)$$

Chaque paramètre $\theta_{l_i,i}(t)$ est exprimé en fonction de ses valeurs minimale et maximale notées respectivement $\theta_{l_i,i}^1$ et $\theta_{l_i,i}^2$

$$\theta_{l_i,i}(t) = \mu_{l_i,i}^1(\theta_{l_i,i}(t)) \theta_{l_i,i}^1 + \mu_{l_i,i}^2(\theta_{l_i,i}(t)) \theta_{l_i,i}^2. \quad (4.78)$$

Les fonctions $\mu_{l_i,i}^1(\theta_{l_i,i}(t))$ et $\mu_{l_i,i}^2(\theta_{l_i,i}(t))$ sont définies par

$$\mu_{l_i,i}^1(\theta_{l_i,i}(t)) = \frac{\theta_{l_i,i}^2 - \theta_{l_i,i}(t)}{\theta_{l_i,i}^2 - \theta_{l_i,i}^1}, \mu_{l_i,i}^2(\theta_{l_i,i}(t)) = \frac{\theta_{l_i,i}(t) - \theta_{l_i,i}^1}{\theta_{l_i,i}^2 - \theta_{l_i,i}^1}. \quad (4.79)$$

On remplace (4.78) dans (4.77)

$$\begin{cases} A_{j_i}^i(\theta_i(t)) = \bar{A}_{j_i}^i + \sum_{l_i=1}^{m_i} \sum_{q=1}^2 \mu_{l_i,i}^q(\theta_{l_i,i}(t)) \theta_{l_i,i}^q \bar{A}_{j_i l_i}^i, \\ B_{j_i}^i(\theta_i(t)) = \bar{B}_{j_i}^i + \sum_{l_i=1}^{m_i} \sum_{q=1}^2 \mu_{l_i,i}^q(\theta_{l_i,i}(t)) \theta_{l_i,i}^q \bar{B}_{j_i l_i}^i, \\ D_{j_i}^k(\theta_i(t)) = \bar{D}_{j_i}^k + \sum_{l_i=1}^{m_i} \sum_{q=1}^2 \mu_{l_i,i}^q(\theta_{l_i,i}(t)) \theta_{l_i,i}^q \bar{D}_{j_i l_i}^k. \end{cases} \quad (4.80)$$

Les matrices définies en (4.80) peuvent être exprimées sous forme polytopique comme suit

$$\begin{cases} A_{j_i}^i(\theta_i(t)) = \sum_{l_i=1}^{2^{m_i}} \tilde{\mu}_{l_i}^i(\theta_i(t)) \tilde{A}_{j_i l_i}^i, \\ B_{j_i}^i(\theta_i(t)) = \sum_{l_i=1}^{2^{m_i}} \tilde{\mu}_{l_i}^i(\theta_i(t)) \tilde{B}_{j_i l_i}^i, \\ D_{j_i}^k(\theta_i(t)) = \sum_{l_i=1}^{2^{m_i}} \tilde{\mu}_{l_i}^i(\theta_i(t)) \tilde{D}_{j_i l_i}^k, \end{cases} \quad (4.81)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_{l_i}^i(\theta_i(t)) = \prod_{q=1}^{m_i} \mu_{q,i}^{\sigma_{l_i}^q}, \\ \tilde{A}_{j_i l_i}^i = \bar{A}_{j_i}^i + \sum_{q=1}^{m_i} \theta_{q,i}^{\sigma_{l_i}^q} \bar{A}_{j_i q}^i, \\ \tilde{B}_{j_i l_i}^i = \bar{B}_{j_i}^i + \sum_{q=1}^{m_i} \theta_{q,i}^{\sigma_{l_i}^q} \bar{B}_{j_i q}^i, \\ \tilde{D}_{j_i l_i}^k = \bar{D}_{j_i}^k + \sum_{q=1}^{m_i} \theta_{q,i}^{\sigma_{l_i}^q} \bar{D}_{j_i q}^k. \end{cases} \quad (4.82)$$

Les indices $\sigma_{l_i}^q (l_i = 1, \dots, 2^{m_i}, q = 1, \dots, m_i)$ sont égaux soit à 1 soit à 2.

Finalement, l'ensemble des n sous-systèmes TS (4.76) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j_i=1}^{r_i} \sum_{l_i=1}^{2^{m_i}} h_{j_i}^i(x_i(t)) \tilde{\mu}_{l_i}^i(\theta_i(t)) \left(\tilde{A}_{j_i l_i}^i x_i(t) + \tilde{B}_{j_i l_i}^i u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \tilde{D}_{j_i l_i}^k x_k(t) \right), \\ y_i(t) = C_i x_i(t). \end{cases} \quad (4.83)$$

Nous proposons alors n multi-observateurs interconnectés MO_i permettant une estimation simultanée des états et des paramètres variant dans le temps

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{l_i=1}^{2^{m_i}} h_{j_i}^i(\hat{x}_i(t)) \tilde{\mu}_{l_i}^i(\hat{\theta}_i(t)) \left(\tilde{A}_{j_i l_i}^i \hat{x}_i(t) + \tilde{B}_{j_i l_i}^i u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \tilde{D}_{j_i l_i}^k \hat{x}_k(t) + \tilde{L}_{j_i l_i}^i (y_i(t) - \hat{y}_i(t)) \right), \\ \dot{\hat{\theta}}_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{l_i=1}^{2^{m_i}} h_{j_i}^i(\hat{x}_i(t)) \tilde{\mu}_{l_i}^i(\hat{\theta}_i(t)) \left(-\tilde{\alpha}_{j_i l_i}^i \hat{\theta}_i(t) + \tilde{K}_{j_i l_i}^i (y_i(t) - \hat{y}_i(t)) \right), \\ \hat{y}_i(t) = C_i \hat{x}_i(t). \end{array} \right. \quad (4.84)$$

On exprime le système (4.83) sous la forme d'un système perturbé dont les variables de décision sont connues

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{l_i=1}^{2^{m_i}} h_{j_i}^i(x_i(t)) \tilde{\mu}_{l_i}^i(\hat{\theta}_i(t)) \left(\tilde{A}_{j_i l_i}^i x_i(t) + \tilde{B}_{j_i l_i}^i u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \tilde{D}_{j_i l_i}^k x_k(t) + \omega_i(t) \right), \quad (4.85)$$

où

$$\omega_i(t) = \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{l_i=1}^{2^{m_i}} (h_{j_i}^i(x_i(t)) \tilde{\mu}_{l_i}^i(\theta_i(t)) - h_{j_i}^i(\hat{x}_i(t)) \tilde{\mu}_{l_i}^i(\hat{\theta}_i(t))) \left(\tilde{A}_{j_i l_i}^i x_i(t) + \tilde{B}_{j_i l_i}^i u_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \tilde{D}_{j_i l_i}^k x_k(t) \right) \quad (4.86)$$

A partir de (4.85) et (4.84), on calcule la dynamique de l'erreur d'estimation d'état $e_{x_i}(t)$

$$\dot{e}_{x_i}(t) = (\tilde{A}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i - \tilde{L}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i C_i) e_{x_i}(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \tilde{D}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^k e_{x_k}(t) + \omega_i(t). \quad (4.87)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation des paramètres $e_{\theta_i}(t)$ est

$$\dot{e}_{\theta_i}(t) = -\tilde{\alpha}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i e_{\theta_i}(t) - \tilde{K}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i C_i e_{x_i}(t) + \tilde{\alpha}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i \theta_i(t) + \dot{\theta}_i(t). \quad (4.88)$$

Considérons maintenant les vecteurs augmentés suivants

$$e_{a_i}(t) = \begin{bmatrix} e_{x_i}(t) \\ e_{\theta_i}(t) \end{bmatrix}, \quad v_i(t) = \begin{bmatrix} e_{x_1}^T(t) & \cdots & e_{x_k}^T(t) & \omega_i(t) & \theta_i(t) & \dot{\theta}_i(t) \end{bmatrix}^T. \quad (4.89)$$

La dynamique du vecteur augmenté $e_{a_i}(t)$ s'explique comme

$$\dot{e}_{a_i}(t) = \tilde{\Phi}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i e_{a_i}(t) + \tilde{\Psi}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i v_i(t), \quad (4.90)$$

où

$$\tilde{\Phi}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i - \tilde{L}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i C_i & 0 \\ -\tilde{K}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i C_i & -\tilde{\alpha}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^1 & \cdots & \tilde{D}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^k & I & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_{\hat{h}_{\hat{\mu}}}^i & I \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

Théorème 4.3

4 D-observation des systèmes TS interconnectés à VDNM

Soient deux matrices L et M définissant une région LMI. Pour $i=1, \dots, n$, les systèmes interconnectés (4.90) sont \mathcal{D} -stables et les gains \mathcal{L}_2 du transfert de $v_i(t)$ vers $e_{a_i}(t)$ sont bornés s'il existe des matrices symétriques définies positives Q_1^i et Q_2^i , des matrices $\tilde{X}_{j_i l_i}^i$, $\tilde{Y}_{j_i l_i}^i$ et $\tilde{Z}_{j_i l_i}^i$ et des scalaires positifs $\bar{\gamma}_i$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites pour $j_i = 1, \dots, r_i$ et $l_i = 1, \dots, 2^{m_i}$

$$\min_{Q_1^i, Q_2^i, \tilde{X}_{j_i l_i}^i, \tilde{Y}_{j_i l_i}^i, \tilde{Z}_{j_i l_i}^i, \bar{\gamma}_i} \bar{\gamma}_i$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes Q_1^i + \text{He}(M \otimes (Q_1^i \tilde{A}_{j_i l_i}^i - \tilde{X}_{j_i l_i}^i C_i)) + I & * & M \otimes Q_1^i \tilde{D}_{j_i l_i}^1 & \dots & M \otimes Q_1^i \tilde{D}_{j_i l_i}^k & M \otimes Q_1^i & 0 & 0 \\ -M \otimes \tilde{Y}_{j_i l_i}^i C_i & L \otimes Q_2^i - \text{He}(M \otimes \tilde{Z}_{j_i l_i}^i) + I & 0 & \dots & 0 & 0 & M \otimes \tilde{Z}_{j_i l_i}^i & M \otimes Q_2^i \\ * & 0 & -\bar{\gamma}_i I & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & 0 & \dots & -\bar{\gamma}_i I & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{\gamma}_i I & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 & 0 & -\bar{\gamma}_i I & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma}_i I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.92)$$

Les matrices des multi-observateurs sont données par

$$\tilde{L}_{j_i l_i}^i = (Q_1^i)^{-1} \tilde{X}_{j_i l_i}^i, \quad (4.93)$$

$$\tilde{K}_{j_i l_i}^i = (Q_2^i)^{-1} \tilde{Y}_{j_i l_i}^i, \quad (4.94)$$

$$\tilde{\alpha}_{j_i l_i}^i = (Q_2^i)^{-1} \tilde{Z}_{j_i l_i}^i. \quad (4.95)$$

Les taux d'atténuation sont

$$\gamma_i = \sqrt{\bar{\gamma}_i}. \quad (4.96)$$

Preuve. Le Théorème 4.3 est démontré en utilisant la fonction de Lyapunov suivante

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \left(e_{x_i}^T(t) Q_1^i e_{x_i}(t) + e_{\theta_i}^T(t) Q_2^i e_{\theta_i}(t) \right), \quad (4.97)$$

et la condition de synthèse permettant aux systèmes (4.91) d'être \mathcal{D} -stables et aux gains \mathcal{L}_2 des transferts de $v_i(t)$ vers $e_{a_i}(t)$ d'être bornés

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(L \otimes V_i + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}_i + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}_i + (I \otimes e_{x_i}^T)(I \otimes e_{x_i}) + (I \otimes e_{\theta_i}^T)(I \otimes e_{\theta_i}) - \gamma_i^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (I \otimes e_{x_k}^T)(I \otimes e_{x_k}) \right) \\ & - \gamma_i^2 (I \otimes \omega_i^T)(I \otimes \omega_i) - \gamma_i^2 (I \otimes \theta_i^T)(I \otimes \theta_i) - \gamma_i^2 (I \otimes \hat{\theta}_i^T)(I \otimes \hat{\theta}_i) < 0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

■

Remarque 4.3

Il a été observé en simulation que les gains $\tilde{K}_{j_i l_i}^i$ ont une tendance à s'annuler sous l'effet de $\tilde{\alpha}_{j_i l_i}^i$ [Srinivasarengan, 2018], des contraintes supplémentaires sont alors ajoutées au problème d'optimisation

$$\tilde{Y}_{j_i^h}^i > \rho \tilde{Z}_{j_i^h}^i. \quad (4.99)$$

Exemple 4.3: Application du Théorème 4.3 à un exemple académique

Considérons le système non linéaire à paramètres variant dans le temps suivant

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -n_1^3 + 2n_2 + n_4 + u_1, \\ \dot{n}_2 = \theta_1(t)n_1 - 3n_2 + n_3, \\ \dot{n}_3 = n_2 - n_3\sqrt{n_2} + n_4 + u_2, \\ \dot{n}_4 = -n_3n_4 + \theta_2(t)n_2 + n_3, \\ y_1 = n_1, \\ y_2 = n_3. \end{cases} \quad (4.100)$$

$$\theta_1(t), \theta_2(t) \in [0 \ 1].$$

On subdivise le système (4.100) en deux dynamiques

$$SNL_1 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{n}_1 \\ \dot{n}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_1^2 & 2 \\ \theta_1(t) & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1, \\ y_1 = n_1, \end{cases} \quad (4.101)$$

$$SNL_2 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{n}_3 \\ \dot{n}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{n_2} & 1 \\ 1 & -n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \theta_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2, \\ y_2 = n_3. \end{cases} \quad (4.102)$$

Trois variables de prémisses sont choisies : $z_1(n_1) = n_1^2$, $z_2(n_2) = \sqrt{n_2}$, $z_3(n_3) = n_3$.

Les sous-systèmes (4.101) et (4.102) peuvent être décrits par les modèles TS interconnectés suivants

$$TS_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = \sum_{j_1=1}^2 h_{j_1}^1(n_1)(A_{j_1}^1 x_1 + B_{j_1}^1 u_1 + D_{j_1}^2 x_2), \\ y_1 = C_1 x_1, \end{cases} \quad (4.103)$$

$$TS_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = \sum_{j_2=1}^4 h_{j_2}^2(n_2, n_3)(A_{j_2}^2 x_2 + B_{j_2}^2 u_2 + D_{j_2}^1 x_1), \\ y_2 = C_2 x_2, \end{cases} \quad (4.104)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \begin{bmatrix} -z_{1,1} & 2 \\ \theta_1(t) & -3 \end{bmatrix}, A_2^1 = \begin{bmatrix} -z_{1,2} & 2 \\ \theta_1(t) & -3 \end{bmatrix}, B_{j_1}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{j_1}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, h_1^1(z_1) = \frac{z_1(t) - z_{1,2}}{z_{1,1} - z_{1,2}}, \\ A_1^2 &= \begin{bmatrix} -z_{2,1} & 1 \\ 1 & -z_{3,1} \end{bmatrix}, A_2^2 = \begin{bmatrix} -z_{2,1} & 1 \\ 1 & -z_{3,1} \end{bmatrix}, A_3^2 = \begin{bmatrix} -z_{2,2} & 1 \\ 1 & -z_{3,1} \end{bmatrix}, A_4^2 = \begin{bmatrix} -z_{2,2} & 1 \\ 1 & -z_{3,2} \end{bmatrix}, B_{j_2}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ D_{j_2}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \theta_2(t) \end{bmatrix}, h_1^2(z_2, z_3) = \frac{z_2(t) - z_{2,2}}{z_{2,1} - z_{2,2}} \frac{z_3(t) - z_{3,2}}{z_{3,1} - z_{3,2}}, h_2^2(z_2, z_3) = \frac{z_2(t) - z_{2,2}}{z_{2,1} - z_{2,2}} \frac{z_{3,1} - z_3(t)}{z_{3,1} - z_{3,2}}, \\ h_3^2(z_2, z_3) &= \frac{z_{2,1} - z_2(t)}{z_{2,1} - z_{2,2}} \frac{z_3(t) - z_{3,2}}{z_{3,1} - z_{3,2}}, h_4^2(z_2, z_3) = \frac{z_{2,1} - z_2(t)}{z_{2,1} - z_{2,2}} \frac{z_{3,1} - z_3(t)}{z_{3,1} - z_{3,2}}. \end{aligned}$$

Les paramètres $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ varient dans l'intervalle $[0,1]$. Afin d'illustrer l'influence de ces paramètres sur le système, on compare dans la Figure 4.14, l'évolution du système nominal (sans variations paramétriques) et celle du système variant dans le temps.

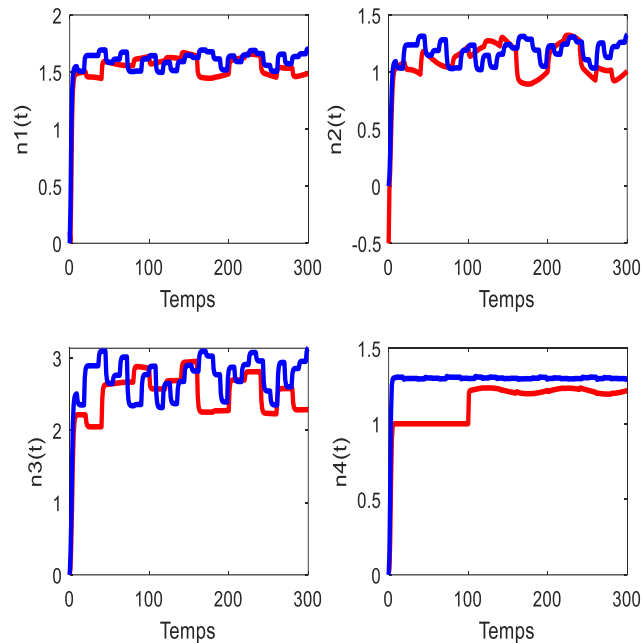


Fig.4.14. Système nominal (bleu) et système avec variations paramétriques (rouge).

Il est évident, que la variation des paramètres $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ entraîne une déviation conséquente des états du système d'où la nécessité de prendre en considération les paramètres variant dans le temps dans la synthèse de l'observateur.

Dans cet exemple, nous considérons la région LMI représentée par le demi-plan gauche avec un taux de décroissance β et le cercle défini par son centre $(-q,0)$ et son rayon s .

Les estimations des états et des paramètres $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ pour $\beta=0,1$ et $q=s=18$ sont représentées par les Figures 4.15 et 4.16. La figure 4.17 illustre les erreurs d'estimation d'état.

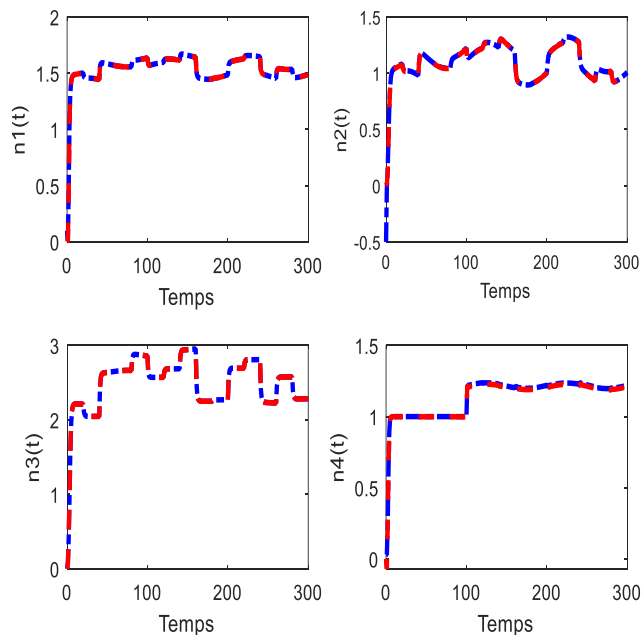


Fig.4.15. Etats (en bleu) et leurs estimées (en rouge).

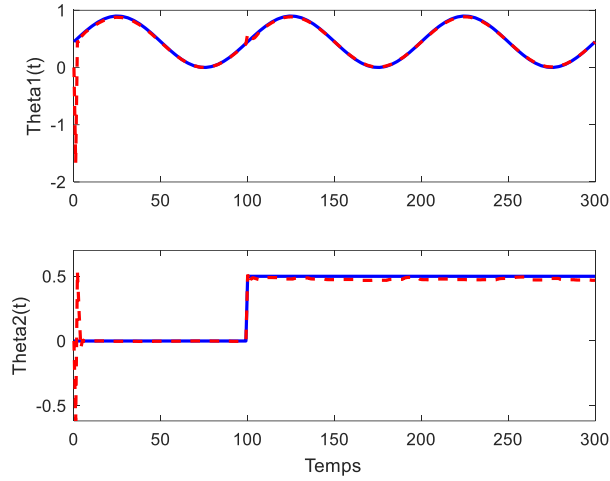
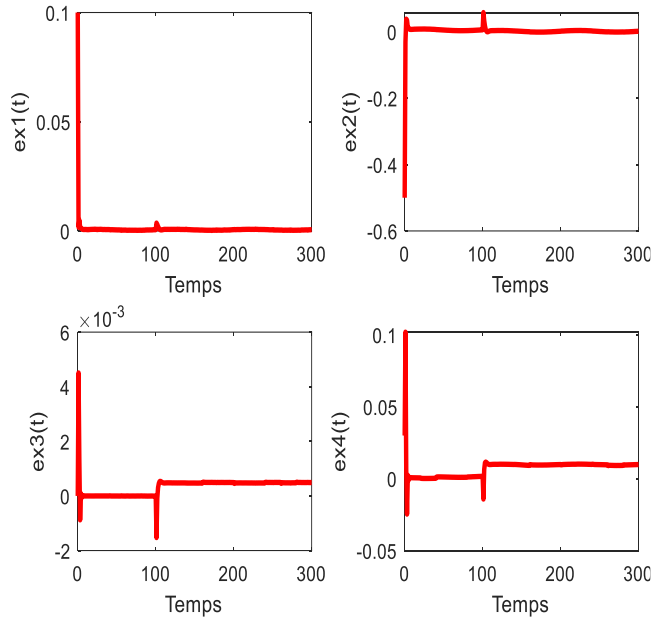

 Fig.4.16. Estimation des paramètres $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ (estimées en 'rouge').


Fig.4.17. Erreurs d'estimation d'état.

Les valeurs propres des matrices $\tilde{A}_{j_l i}^i - \tilde{L}_{j_l i}^i C_i$ sont

$$\begin{aligned} \text{eig}(\tilde{A}_{j_l i}^1 - \tilde{L}_{j_l i}^1 C_1) &= \begin{bmatrix} -18 \\ -3.5401 \end{bmatrix}, \text{eig}(\tilde{A}_{11}^2 - \tilde{L}_{11}^2 C_2) = \text{eig}(\tilde{A}_{12}^2 - \tilde{L}_{12}^2 C_2) = \text{eig}(\tilde{A}_{31}^2 - \tilde{L}_{31}^2 C_2) = \\ \text{eig}(\tilde{A}_{32}^2 - \tilde{L}_{32}^2 C_2) &= \begin{bmatrix} -18 \\ -4.6951 \end{bmatrix}, \text{eig}(\tilde{A}_{21}^2 - \tilde{L}_{21}^2 C_2) = \text{eig}(\tilde{A}_{22}^2 - \tilde{L}_{22}^2 C_2) = \text{eig}(\tilde{A}_{41}^2 - \tilde{L}_{41}^2 C_2) = \\ \text{eig}(\tilde{A}_{42}^2 - \tilde{L}_{42}^2 C_2) &= \begin{bmatrix} -18 \\ -1.5279 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D'après les résultats de simulation présentés ci-dessus, les observateurs interconnectés synthétisés MO_i fournissent une estimation acceptable des états du système et des paramètres $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$. De plus, les valeurs propres des matrices $\tilde{A}_{j_l i}^i - \tilde{L}_{j_l i}^i C_i$ sont contenues dans la région LMI imposée, les contraintes de \mathcal{D} -stabilité sont donc satisfaites.

4.5. Conclusion

Dans ce quatrième chapitre, nous nous sommes intéressés à la synthèse sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité d'observateurs pour les systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles TS interconnectés à VDNM.

Nous avons dans un premier temps, généralisé les résultats obtenus dans les sections 3.3.1 et 3.3.2 du chapitre 3 à la synthèse de multi-observateurs proportionnels pour les systèmes TS interconnectés. Des conditions LMIs de \mathcal{D} -stabilité de multi-observateurs interconnectés ont été proposées. La relaxation de ces conditions via le lemme de Finsler a aussi été examinée. Les approches présentées ont été appliquées en simulation à un système de PEMFC.

Ensuite, des multi-observateurs interconnectés permettant l'estimation conjointe des états et des paramètres variant dans le temps ont été développés. L'idée principale de l'approche proposée est d'exprimer les différents paramètres variant dans le temps sous forme polytopique convexe à l'aide de la méthode des secteurs non linéaires. La représentation obtenue est ensuite intégrée aux expressions du système et de l'observateur.

Bibliographie

[Arioui et al., 2019] Hichem Arioui, Dalil Ichalal, Lamri Nehaoua, Saïd Mammar. Conservatism reduction for Nonlinear Takagi-Sugeno Observer : Interconnected System Approach. 58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2019), Dec 2019, Nice, France.

[Bakule, 2008] L. Bakule, Decentralized control: an overview. *Ann. Rev. Control* 32, 87–98 (2008)

[Benzaouia et al., 2019] Abdellah Benzaouia, Laila El Younsi, Ahmed El Hajjaji, Stability and Stabilization Analysis for T–S Interconnected Fuzzy Systems Using LMIs. *Circuits, Systems & Signal Processing*. Oct2019, Vol. 38 Issue 10, p4504-4525. 22p.

[Benzaouia et al., 2016] Benzaouia, A., El Younsi, L. and El Hajjaji, A. (2016). Stabilization of interconnected TS fuzzy systems using LMIS, *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, Vancouver, Canada, pp. 1154–1158.

[Bezzaoucha et al., 2013 a] Souad Bezzaoucha, Benoît Marx, Didier Maquin, and José Ragot. State and parameter estimation for time-varying systems: a Takagi-Sugeno approach. In *5th Symposium on System Structure and Control (SSSC)*, 2013.

[Bezzaoucha et al., 2013 b] Souad Bezzaoucha, Benoît Marx, Didier Maquin, and José Ragot. State and parameter estimation for nonlinear systems: a Takagi-Sugeno approach. In *American Control Conference (ACC)*, 2013.

[Bezzaoucha et al., 2013 c] Souad Bezzaoucha, Benoît Marx, Didier Maquin, and José Ragot. Nonlinear joint state and parameter estimation: Application to a wastewater treatment plant. *Control Engineering Practice*, 21(10):1377–1385, 2013.

[Bezzaoucha, 2013] S. Bezzaoucha. Commande tolérante aux défauts de systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2013.

[Cordiner et al., 2017] Cordiner S, Mulone V, Giordani A, Savino M, Tomarchio G, Malkow T, et al. Fuel cell based hybrid renewable energy systems for off-grid telecom stations: data analysis from on field demonstration tests. *Appl Energy* 2017;192:508–18.

[Daud et al., 2017] Daud W, Rosli R, Majlan E, Hamid S, Mohamed R, Husaini T. Pem fuel cell system control: a review. *Renew Energy* 2017;113:620e38.

[Delmotte et al., 2013] François Delmotte, Michel Dambrine, Sabrina Delrot, and Sylvain Lalot. Fouling detection in a heat exchanger: A polynomial fuzzy observer approach. *Control Engineering Practice*, 21(10):1386–1395, 2013.

- [Fouka et al., 2019] M. Fouka; L. Nehaoua; H. Arioui; S. Mammar. Interconnected Observers for a Powered Two-Wheeled Vehicles: Both Lateral and Longitudinal Dynamics Estimation. 2019 IEEE 16th International Conference on Networking, Sensing and Control (ICNSC), Canada, 2019.
- [Gruber et al., 2008] Gruber J., Bordons C., Dorado F.: 'Nonlinear control of the air feed of a fuel cell'. Proc. American Control Conf., Seattle, Washington, US, June 2008, pp. 1–6
- [Guo et al., 2000] G. Guo, Y. Wang, D. Hill, Nonlinear decentralized control of large scale power systems. *Automatica* 36, 1275–1289 (2000)
- [Jabri et al., 2020] Jabri D., Guelton K., Belkhiat D., Manamanni N., Decentralized static output tracing control of interconnected and disturbed Takagi-Sugeno systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2020, Vol. 30, No. 2, 225–238
- [Karami et al., 2014] Karami N, Moubayed N, Outbib R. Energy management for a PEMFC–PV hybrid system. *Energy Convers Manage* 2014;82:154–68.
- [Latrach et al., 2013] C. Latrach, M. Kchaou, A. Rabhi, A. El Hajjaji, Decentralized static output feedback fuzzy control design for nonlinear interconnected networked control systems. 14th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic control computer engineering—STA'2013, Sousse, Tunisia, December 20–22 (2013)
- [Latrach et al., 2016] Chedia Latrach, Mourad Kchaou & Hervé Guéguen (2016): H_∞ observer-based decentralised fuzzy control design for nonlinear interconnected systems: an application to vehicle dynamics, *International Journal of Systems Science*, DOI: 10.1080/00207721.2016.1266527
- [Magdi, 2016] S.M. Magdi, A generalized approach to stabilization of interconnected fuzzy systems. *Int. J. Fuzzy Syst.* 18(5), 773–783 (2016)
- [Pukrushpan et al., 2004] J. T. Pukrushpan, H. Peng, and A. G. Stefanopoulou, “Control-oriented modeling and analysis for automotive fuel cell systems,” *Trans. ASME J. Dynam. Syst. Meas. Contr.*, vol. 126, no. 1, pp. 14-25, 2004.
- [Singh et al., 2017] Singh A, Baredar P, Gupta B. Techno-economic feasibility analysis of hydrogen fuel cell and solar photovoltaic hybrid renewable energy system for academic research building. *Energy Convers Manage* 2017;145:398–414.
- [Srinivasarengan, 2018] Krishnan Srinivasarengan. State and parameter estimation, and identifiability of quasi-LPV models. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2018.
- [Suh, 2006] K .W. Suh, “Modeling, analysis and control of fuel cell hybrid power systems,” Ph.D. dissertation, Dept. Mech. Eng., Univ. Michigan, Ann Arbor, 2006.
- [Tiko et al., 2021] Tiko, S., Mesquine, F. & El Hajjaji, A. Relaxed Stabilization Conditions for Interconnected Nonlinear Systems. *Circuits Syst Signal Process* 40, 2808–2823 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00034-020-01609-1>
- [Vu et Wang, 2018] Vu, V.P., Wang, W.J.: Robust observer synthesis for the uncertain large-scale TS fuzzy system. *IET Control Theory Appl.* 13(1), 134–145 (2018)

5

Commandes \mathcal{D} -stables des systèmes de Takagi-Sugeno à Variables de Décision Mesurables

Sommaire

| | |
|--|-----|
| 5.1. Introduction | 142 |
| 5.2. Position du problème | 143 |
| 5.3. Etat de l'art sur la \mathcal{D}-stabilisation des systèmes de Takagi-Sugeno | 145 |
| 5.4. \mathcal{D}-stabilisation des systèmes de Takagi-Sugeno en présence de saturation d'actionneurs | 153 |
| 5.4.1. Commande PDC contrainte des systèmes TS | 155 |
| 5.4.2. Commande PDC saturante des systèmes TS | 159 |
| 5.4.3. Commande PDC saturante des systèmes TS incertains..... | 162 |
| 5.5. Poursuite \mathcal{D}-stable de trajectoire générée par un modèle de référence | 168 |
| 5.5.1. Aperçu sur la poursuite de trajectoire des systèmes linéaires..... | 169 |
| 5.5.2. Poursuite \mathcal{D} -stable sans observateur | 172 |
| 5.5.3. Poursuite \mathcal{D} -stable avec observateur : Synthèse non quadratique locale..... | 184 |
| 5.6. Commande \mathcal{D}-stable tolérantes aux défauts actionneurs | 192 |
| 5.7. Conclusion | 205 |
| Bibliographie | 206 |

5.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons la synthèse, sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité, de lois de commandes pour les systèmes dynamiques non linéaires décrits par des modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision mesurables.

D'abord, nous présentons quelques résultats récents sur la \mathcal{D} -stabilisation par commandes PDC et non-PDC de ces systèmes. Ensuite, la synthèse \mathcal{D} -stable de commandes stabilisantes en présence de saturations d'actionneurs est examinée. Deux types de commandes sont considérés ; la commande contrainte qui est conçue de sorte que l'état du système ne quitte jamais le domaine de linéarité et la commande saturante où seul le modèle non linéaire est valide.

Par la suite, la problématique de poursuite de consigne générée par un modèle de référence est considérée. Des conditions LMIs suffisantes de \mathcal{D} -stabilité basées sur des fonctions de Lyapunov poly-quadratiques sont proposées. Dans ce contexte, la synthèse non quadratique dépendant des dérivées temporelles des fonctions d'activations est envisagée donnant lieu à des conditions locales de \mathcal{D} -stabilité. D'un autre côté, des conditions globales de synthèse sont obtenues en considérant des fonctions de Lyapunov basées sur les moyennes des fonctions d'activation sur un intervalle de temps donné.

Enfin, nous proposons une loi de commande active tolérante aux défauts actionneurs satisfaisant des contraintes de \mathcal{D} -stabilité permettant d'imposer une certaine dynamique au contrôleur et à l'observateur utilisé pour l'estimation des états et des défauts.

L'efficacité des différentes approches de synthèse \mathcal{D} -stable proposées est illustrée par plusieurs exemples de simulation.

5.2. Position du problème

Partie I : \mathcal{D} -Stabilisation en présence de saturation d'actionneur

Soit un système non linéaire décrit par un multi-modèle TS soumis à une saturation d'actionneur

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i \text{sat}(u(t))) = A_h x(t) + B_h \text{sat}(u(t)), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (5.1)$$

$\text{sat}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ représente la fonction standard de saturation (symétrique) définie par

$$\text{sat}(u(t)) = [\text{sat}(u_1(t)), \text{sat}(u_2(t)), \dots, \text{sat}(u_m(t))]^T, \quad (5.2)$$

avec

$$\text{sat}(u_k(t)) = \begin{cases} -\bar{u}_k & \text{si } u_k(t) < -\bar{u}_k, \\ \bar{u}_k & \text{si } u_k(t) > \bar{u}_k, \\ u_k(t) & \text{si } -\bar{u}_k \leq u_k(t) \leq \bar{u}_k. \end{cases} \quad (5.3)$$

\bar{u}_k est la borne connue de la commande saturée (voir Figure 5.1).

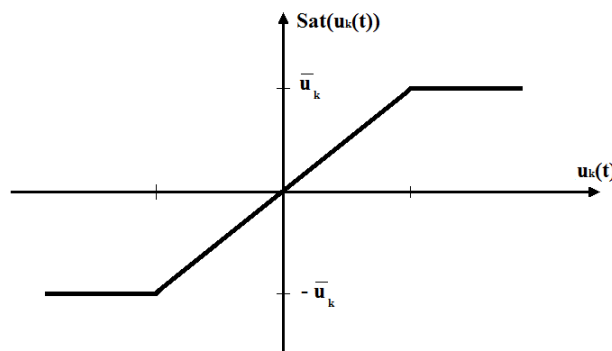


Fig.5.1. Fonction de saturation symétrique.

L'objectif de contrôle est d'assurer la \mathcal{D} -stabilité du système (5.1) en boucle fermée en présence de la saturation d'actionneur (5.2) via des lois de commande PDC.

Pour atteindre cet objectif, deux cas de figures sont considérés [Henrion, 1999] :

- la loi de commande est synthétisée de sorte que l'état du système ne quitte jamais la zone de linéarité. Par conséquent, la commande ne sature jamais. On parle alors de *commande contrainte*.
- la loi de commande n'est pas synthétisée de sorte que l'état du système reste dans la région de linéarité donc la commande peut saturer et seul le modèle non linéaire est valide. On parle alors de *commande saturante*.

Dans les deux cas, l'objectif de synthèse est de déterminer les matrices de gain du contrôleur pour que le système soit localement \mathcal{D} -stable en boucle fermée avec une estimation maximale du domaine d'attraction.

Partie II : Poursuite \mathcal{D} -stable de trajectoire générée par un modèle de référence

Dans cette deuxième partie, notre intérêt porte sur une classe de systèmes non linéaires représentés par le modèle TS incertain et perturbé suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + d(t)), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (5.4)$$

Les incertitudes $\Delta A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\Delta B_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont définies par [Zhou et Khargonekar, 1988]

$$\Delta A_i(t) = M_i^a \Sigma_a(t) N_i^a, \quad (5.5)$$

et

$$\Delta B_i(t) = M_i^b \Sigma_b(t) N_i^b. \quad (5.6)$$

M_i^a, M_i^b, N_i^a et N_i^b sont des matrices réelles constantes de dimensions appropriées. $\Sigma_a(t)$ et $\Sigma_b(t)$ sont des matrices inconnues Lebesgue mesurables vérifiant les propriétés suivantes

$$(\Sigma_a(t))^T \Sigma_a(t) \leq I, \quad (5.7)$$

$$(\Sigma_b(t))^T \Sigma_b(t) \leq I. \quad (5.8)$$

$d(t)$ est un vecteur de perturbations extérieures supposées bornées.

La synthèse de commandes PDC et non PDC est étudiée afin que l'état et la sortie du système (5.4) suivent la trajectoire d'un modèle de référence linéaire en dépit de la présence d'incertitudes et de perturbations.

Globalement, les matrices de gains des lois de commande proposées sont déterminées pour que la dynamique de l'écart de suivi soit \mathcal{D} -stable (ou pour que cet écart converge vers zéro avec une dynamique prédéfinie).

L'établissement des conditions de \mathcal{D} -stabilité est basé sur des fonctions de Lyapunov floues poly-quadratiques qui dépendent ou pas des dérivées temporelles des fonctions d'activation.

Partie III : Synthèse \mathcal{D} -stable de commande tolérante aux défauts

La commande active tolérante aux défauts actionneurs est considérée pour les systèmes TS incertains et défaillants donnés par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + B_i(u(t) + f_a(t))), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (5.9)$$

où l'incertitude $\Delta A_i(t)$ est définie en (5.5) et $f_a(t)$ est le vecteur de défauts additifs agissant sur les actionneurs du système.

Les défauts actionneurs sont estimés par le biais de l'observateur présenté dans la section 3.3.5 du chapitre 3.

La commande tolérante aux défauts utilisée est constituée d'une loi de commande PDC et d'un terme additif permettant de compenser l'effet des défauts :

$$u(t) = u_{PDC}(t) + u_c(t) = u_{PDC}(t) - \hat{f}_a(t), \quad (5.10)$$

où $\hat{f}_a(t)$ représente l'estimation du défaut fournie par l'observateur. La commande PDC en question peut être fonction de l'état estimé ou de l'écart entre l'état estimé et l'état d'un modèle de référence.

Les matrices de gains de l'observateur et de la commande PDC sont synthétisées en une seule étape pour que le système en boucle fermée et les dynamiques des erreurs d'estimation des états et des défauts soient \mathcal{D} -stables.

5.3. Etat de l'art sur la \mathcal{D} -stabilisation des systèmes de Takagi-Sugeno

Dans cette section, nous présentons un bref état de l'art sur les principaux résultats concernant la stabilisation des systèmes de Takagi-Sugeno sous contrainte de \mathcal{D} -stabilité dans le contexte de synthèse quadratique et non quadratique.

Les premières conditions de \mathcal{D} -stabilité relatives aux systèmes décrits par un modèle d'état linéaire ont été formulées dans [Chilali et Gahinet, 1996]. Les auteurs ont proposé des contraintes LMIs pour la synthèse H_∞ de retour d'état et de retour de sortie dynamique permettant aux pôles du système en boucle fermée d'être contenus dans une région prédéterminée du plan complexe. Dans [Chilali et al., 1999], un placement robuste de pôles des systèmes linéaires présentant des incertitudes statiques a été considéré. Une condition de synthèse générique de \mathcal{D} -stabilité (voir définition 2.2) a aussi été proposée. Cependant, les conditions obtenues sont quelque peu conservatives selon les auteurs. Dans [Peaucelle et al., 2000], le concept de \mathcal{D} -stabilité robuste ou \mathcal{D}_R -stabilité a été étendu aux systèmes linéaires sujets à des incertitudes polytopiques convexes.

Compte tenu de l'intérêt grandissant suscité par les systèmes TS flous, plusieurs travaux de recherche portant sur leur \mathcal{D} -stabilisation ont été menés. Citons à titre d'exemple, [Toulotte et al., 2008], [Assawinchaichote, 2014], [Cherifi et al., 2015], [Cherifi, 2017], [Cherifi et al., 2019].

5.3.1. Synthèse quadratique

Soit le système non linéaire décrit par le multi-modèle TS suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)). \end{cases} \quad (5.11)$$

Rappelons que les fonctions d'activation $h_i(z(t))$ vérifient la propriété de somme convexe et dépendent des variables de prémisses (ou de décisions) $z(t)$ supposées être mesurables (entrées/sorties du système).

Nous considérons la loi de commande PDC donnée par

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) F_j x(t), \quad (5.12)$$

où $F_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont les matrices du contrôleur à synthétiser.

La dynamique du système en boucle fermée est obtenue en substituant la loi de commande (5.12) dans l'équation du système (5.11)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + B_i F_j) x(t) = (A_h + B_h F_h) x(t). \quad (5.13)$$

La \mathcal{D} -stabilisation du système (5.13) quelque soit la région LMI considérée est énoncée par le Lemme 5.1.

Lemme 5.1 [Assawinchaichote, 2014]

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.11) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande PDC (5.12) s'il existe des matrices $P=P^T>0$ et Y_j telles que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (5.14)$$

$$\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \quad (5.15)$$

avec

$$\Gamma_{ij} = L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (A_i P + B_i Y_j)). \quad (5.16)$$

Les matrices de gains du contrôleur sont données par

$$F_j = Y_j P^{-1}. \quad (5.17)$$

La condition présentée par le lemme précédent est conservative du fait de l'utilisation d'une matrice commune P dans le problème d'optimisation. De plus, elle ne tient pas compte des techniques de relaxation récentes mentionnées dans le chapitre 2 (Lemme de Tuan, lemme de Finsler ou synthèse non quadratique). Ainsi, des conditions plus relaxées ont été proposées dans [Cherifi et al., 2015], elles sont basées sur la loi de commande non-PDC suivante

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) F_j \left(\sum_{k=1}^r h_k(z(t)) H_k \right)^{-1} x(t), \quad (5.18)$$

$F_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ représentent les matrices du contrôleur à déterminer.

La dynamique du système en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left(A_i + B_i F_j \left(\sum_{k=1}^r h_k(z(t)) H_k \right)^{-1} \right) x(t) = (A_h + B_h F_h H_h^{-1}) x(t). \quad (5.19)$$

Les conditions \mathcal{D} -stabilité du système en boucle fermée (5.19) sont résumées dans le lemme suivant.

Lemme 5.2 [Cherifi et al., 2015]

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système TS (5.11) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande non-PDC (5.18) (avec $H_j=P$), s'il existe des matrices $P=P^T>0$ et F_j telles que les conditions suivantes sont satisfaites

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (5.20)$$

$$\frac{2}{r-1} \Gamma_{ii} + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \quad (5.21)$$

avec

$$\Gamma_{ij} = L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (A_i P + B_i F_j)). \quad (5.22)$$

Les contraintes de \mathcal{D} -stabilisation (5.20-5.21) sont obtenues en considérant une Fonction de Lyapunov Quadratique $V(x(t)) = x(t)^T P^{-1} x(t)$ et en tirant profit des propriétés du produit de Kronecker.

Les conditions du Lemme 5.2 sont légèrement différentes de celles du Lemme 5.1 du fait de l'utilisation du Lemme 2.4 (Relaxation de Tuan) ce qui permet d'aboutir à des contraintes moins conservatives.

Le choix $H_j=P$ réduit les degrés de liberté de ce problème d'optimisation et conduit le plus souvent à des conditions quelque peu conservatives. Dans le même article, les auteurs ont proposé des contraintes plus relâchées en introduisant des variables de décision supplémentaires. Ces conditions sont données par le Lemme 5.3.

Lemme 5.3 [Cherifi et al., 2015]

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le modèle TS (5.11) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande non-PDC (5.18) (où $H_j \neq P$ et H_j n'est pas nécessairement symétrique), s'il existe des matrices $P=P^T>0$, H_j et F_j et un scalaire positif ε tels que les conditions (5.20) et (5.21) sont vérifiées avec

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (A_i H_j + B_i F_j)) & * \\ M \otimes P - M \otimes H_j + \varepsilon I \otimes (H_j^T A_i^T + F_j^T B_i^T) & -\varepsilon I \otimes \text{Sym}(H_j) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Les contraintes exprimées dans le Lemme 5.3 ont une forme similaire aux résultats de stabilisation (sans contraintes de \mathcal{D} -stabilité) basés sur le lemme de Finsler proposés dans [Jaadari et al., 2012] et [Guelton et al., 2014].

Remarque 5.1

L'implantation du contrôleur non-PDC (5.18) exige une inversion en temps réel de la matrice H_h^{-1} ce qui peut constituer un obstacle lors de sa mise en œuvre dans certaines applications embarquées ayant une puissance de calcul limitée.

Exemple 5.1 : Application de la \mathcal{D} -stabilisation quadratique à un réacteur à cuve agitée en continu à trois états

On considère le réacteur à cuve agitée en continu décrit dans [Ghaffari et al., 2013] et [Ebrahimi et al., 2018] siège de la réaction chimique $A \rightleftharpoons B \rightarrow C$ (voir Figure 5.2).

C_A , C_B et C_C sont les concentrations des espèces A , B et C respectivement. C_{AF} représente la concentration du flux d'alimentation. N_{BF} , le débit molaire de l'espèce B , représente la grandeur réglante. F est le débit volumique. Le modèle mathématique non linéaire à trois états décrivant le comportement du réacteur est donné par

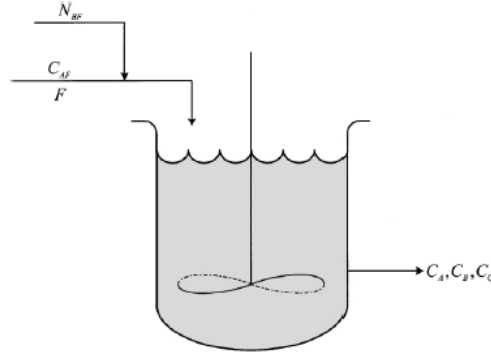


Fig.5.2. Réacteur à cuve agitée en continu (CSTR) [Chen et Dai, 2001].

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + 0,5x_2^2 + 0,8796x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 1,5x_2^2 - 0,3688x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = x_2^2 + 1,7592x_2 - x_3. \end{cases} \quad (5.24)$$

x_i sont les concentrations adimensionnelles définies par $x_1 = \frac{C_A}{C_{AF}}$, $x_2 = \frac{C_B}{C_{AF}}$ et $x_3 = \frac{C_C}{C_{AF}}$,

l'entrée adimensionnelle $u(t)$ est donnée par $u = \frac{N_{BF}}{FC_{AF}}$.

L'approche par secteurs non linéaires permet d'obtenir le modèle TS suivant

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_2(t))(A_i x(t) + Bu(t)), \quad (5.25)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0,3796 & 0 \\ 3 & -2,1388 & 0 \\ 0 & 0,7592 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1,3796 & 0 \\ 3 & -5,1388 & 0 \\ 0 & 2,7592 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$h_1(x_2(t)) = 0,5 - 0,5x_2(t), h_2(x_2(t)) = 1 - h_1(x_2(t)) = 0,5 + 0,5x_2(t).$$

Afin d'illustrer la flexibilité et l'intérêt du concept de \mathcal{D} -stabilité, nous avons réalisé la simulation de la commande PDC (Lemme 5.2) du réacteur pour deux régions LMIs distinctes :

- **Région 1** : le demi-plan gauche avec un taux de décroissance $\beta=6,5$ (stabilité exponentielle),
- **Région 2** : la région LMI représentée par la Figure 3.1 avec $\beta=3$, $\alpha=0$, $\theta=\pi/2,34$, $s=q=15$.

Les résultats numériques du Lemme 5.2 correspondant à la région 2 sont :

$$F_1 = [-3.0088 \quad -27.5024 \quad -73.6984], F_2 = [-3.4562 \quad -29.2970 \quad -79.6150].$$

5 Commandes \mathcal{D} -stables des systèmes TS à VDM

Les Figures 5.3-5.5 représentent respectivement les états du système en boucle fermée, la commande appliquée et la migration des valeurs propres des matrices locales $A_i+B_iF_j$ pour les deux régions LMI ci-dessus.

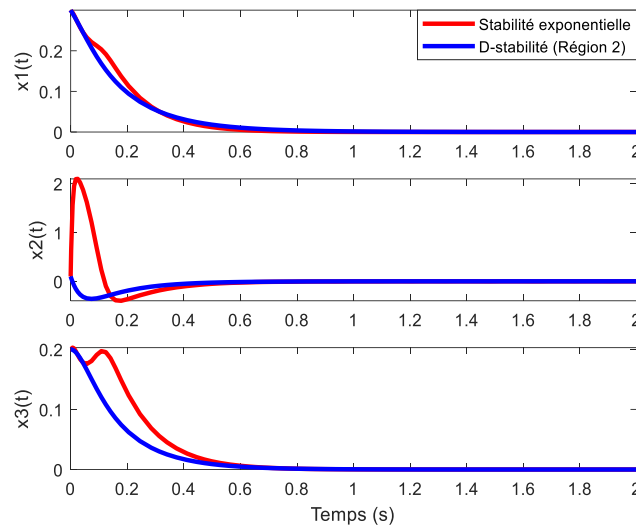


Fig.5.3. Comparaison des états du système en boucle fermée (stabilité exponentielle et \mathcal{D} -stabilité).

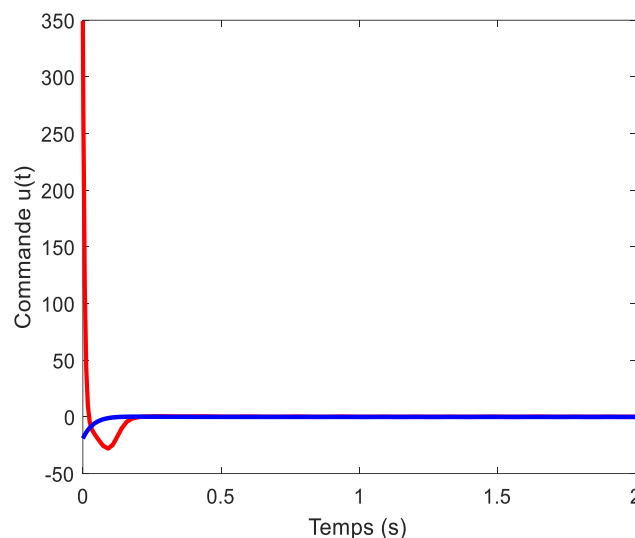


Fig.5.4. Commande appliquée au système (stabilité exponentielle en trait rouge et \mathcal{D} -stabilité en trait bleu).

Dans la Figure 5.4, la commande PDC correspondant à la stabilité exponentielle présente une valeur initiale importante (de l'ordre de 350). Ceci est dû à l'éloignement des valeurs propres du système en boucle fermée de l'axe imaginaire du plan complexe mais aussi à des parties imaginaires élevées (voir Figure 5.5). Un tel inconvénient conduit principalement à des dépassements importants et à l'apparition d'oscillations dans le régime transitoire de la réponse du système en boucle fermée. On peut le constater à travers l'état $x_2(t)$ de la Figure 5.3 dont le dépassement n'est pas négligeable.

Le confinement des valeurs propres des matrices $A_i+B_iF_j$ dans la région 2 permet d'aboutir à de meilleures performances de contrôle. La commande obtenue est nettement moins agressive et les réponses du système en boucle fermée sont bien plus amorties.

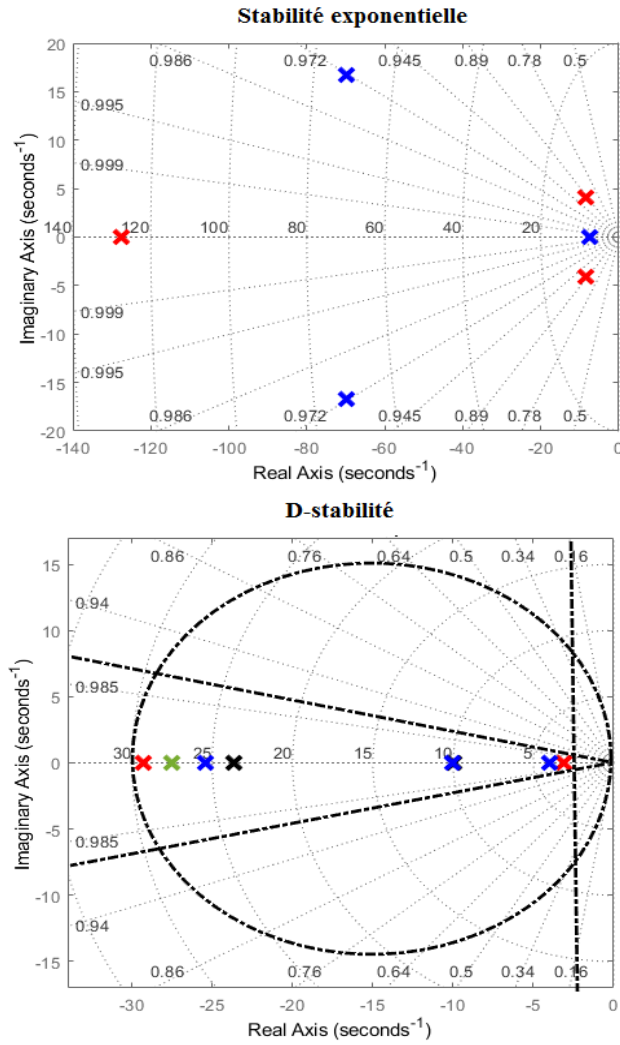


Fig.5.5. Migration des valeurs propres des matrices locales $A_i+B_iF_j$ (stabilité exponentielle et \mathcal{D} -stabilité).

5.3.2. Synthèse non quadratique

5.3.2.1. Synthèse dépendant des dérivées temporelles des fonctions d'activation (\mathcal{D} -stabilisation non quadratique locale)

Nous avons constaté lors de nos recherches que peu de travaux ont été consacrés à la \mathcal{D} -stabilisation non quadratique des systèmes de Takagi-Sugeno. Dans [Cherifi, 2017], l'auteur a proposé comme premier résultat le lemme suivant

Lemme 5.4 [Cherifi, 2017]

Le système TS (5.11) est supposé lisse et $\forall k \in \{1, \dots, r\}, \exists \varphi_k = \inf_{x \in \Omega} (\dot{h}_k(t)) \leq 0, \varphi_k \neq -\infty$. Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. En considérant que les φ_k sont connus, le modèle TS (5.11) est \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande non-PDC (5.18) avec $H_j=P_j$. S'il existe des matrices $P_j=P_j^T>0, F_j, D_{ij}$ et R_{ij} telles que les conditions (5.26) et (5.27) sont vérifiées

$$Y_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \tag{5.26}$$

$$\frac{2}{r-1} Y_{ii} + Y_{ij} + Y_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \tag{5.27}$$

$$P_k + R_{ij} \geq 0, \quad (5.28)$$

où

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} L \otimes P_j + \text{Sym}(M \otimes (A_i P_j + B_i F_j)) & * \\ M^T \otimes D_{ij} - I \otimes \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \varphi_k (P_k + R_{ij}) \right) & -I \otimes \text{Sym}(D_{ij}) \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Les conditions proposées dans le Lemme 5.4 ne permettent pas une \mathcal{D} -stabilisation globale du système TS considéré puisque elles dépendent des bornes φ_k des dérivées temporelles des fonctions d'activation. Les paramètres φ_k doivent être connus a priori et doivent être choisis les plus grands possible afin d'assurer une \mathcal{D} -stabilisation locale avec le plus grand domaine d'attraction [Cherifi, 2017].

5.3.2.2. Synthèse indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'activation (\mathcal{D} -stabilisation non quadratique globale)

Dans le cadre de la stabilisation non quadratique des systèmes TS, les auteurs de [Márquez et al.,2016] ont proposé une nouvelle fonction de Lyapunov basée sur les valeurs moyennes des fonctions d'activation sur un intervalle de temps $[t-\gamma, t]$ où $\gamma > 0$. Cette fonction ne dépend pas des bornes des dérivées temporelles des fonctions d'activation. Elle permet donc une stabilisation globale du système considéré.

La \mathcal{D} -stabilisation des systèmes TS faisant appel à cette fonction de Lyapunov particulière et à la commande non-PDC γ -retardée a été étudiée dans [Cherifi et al.,2019]. Nous en présentons le principal résultat dans ce qui suit.

Afin de stabiliser le système (5.11), les auteurs de [Cherifi et al.,2019] ont considéré la commande non-PDC suivante

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t-\gamma)) v_k(z(t)) F_{ijk} \left(\sum_{l=1}^r v_l(z(t)) P_l \right)^{-1} x(t) = F_{hh^{-v}} P_v^{-1} x(t). \quad (5.30)$$

Les fonctions d'activation $h_i(z(t))$ sont supposées intégrables sur les intervalles $[t-\gamma, t]$. Les fonctions $v_i(z(t))$ sont définies comme suit

$$v_i(z(t)) = \frac{1}{\gamma} \int_{t-\gamma}^t h_i(z(\tau)) d\tau, \quad \gamma > 0. \quad (5.31)$$

Les fonctions $v_i(z(t))$ vérifient la propriété de somme convexe

$$\sum_{i=1}^r v_i(z(t)) = \frac{1}{\gamma} \int_{t-\gamma}^t \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(\tau)) \right) d\tau = 1. \quad (5.32)$$

On peut remarquer que la dérivée temporelle de $v_i(z(t))$ est

$$\dot{v}_i(z(t)) = \frac{1}{\gamma} (h_i(z(t)) - h_i(z(t-\gamma))). \quad (5.33)$$

On constate que si $\gamma \rightarrow 0$, alors $\dot{v}_i(z(t)) \rightarrow \dot{h}_i(z(t))$. Par conséquent, pour une petite valeur de γ , $v_i(z(t))$ est continue et constitue une approximation lisse de $h_i(z(t))$.

La dynamique du système en boucle fermée est

$$\dot{x}(t) = (A_h + B_h F_{hh^{-v}} P_v^{-1}) x(t). \quad (5.34)$$

Les conditions permettant la \mathcal{D} -stabilisation globale du système (5.11) par la commande non-PDC (5.30) sont résumées par le lemme suivant.

Lemme 5.5 [Cherifi et al.,2019]

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.11) est globalement et non quadratiquement \mathcal{D} -stabilisé par la commande non-PDC (5.30) s'il existe un scalaire $\gamma > 0$ et, pour tous $(i, j, k, l) \in \{1, \dots, r\}^4$, les matrices $P_k = P_k^T > 0$, F_{jkl} tels que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\Gamma_{ii}^{kl} < 0, \quad \forall (i, j, k, l) \in \{1, \dots, r\}^4 \quad (5.35)$$

$$\frac{2}{r-1} \Gamma_{ii}^{kl} + \Gamma_{ij}^{kl} + \Gamma_{ji}^{kl} < 0, \quad \forall (i, j, k, l) \in \{1, \dots, r\}^4 / i \neq j \quad (5.36)$$

où

$$\Gamma_{ij}^{kl} = L \otimes P_l + \text{Sym}(M \otimes (A_i P_l + B_i F_{jkl} - \frac{1}{2\gamma} (P_j - P_k))) \quad (5.37)$$

En prenant $P_j = P$ et $F_{jkl} = F_j$, les conditions de \mathcal{D} -stabilisation quadratique proposées par le Lemme 5.2 peuvent être retrouvées. Les conditions non quadratiques du Lemme 5.5 sont donc moins conservatives que celle du Lemme 5.2.

Exemple 5.2 : Application de la \mathcal{D} -stabilisation non quadratique globale à un réacteur à cuve agitée en continu à trois états

Nous avons appliqué la contrainte $\Gamma_{ij}^{kl} < 0$ (avec Γ_{ij}^{kl} définie par (5.37)) au système décrit par le modèle TS (5.25) avec $\gamma = 0,03$. Les paramètres considérés de la région LMI sont : $\beta = 2,4$; $\alpha = 0$; $\theta = \pi/2,34$; $s = q = 20$. Les matrices de gains correspondantes sont données par

$$F_{111} = F_{221} = [-0.2447 \quad -0.8789 \quad 0.0410], F_{112} = F_{222} = [-0.2403 \quad -0.7371 \quad 0.0366]$$

$$F_{121} = [-0.2471 \quad -0.7861 \quad 0.0406], F_{122} = [-0.2426 \quad -0.6447 \quad 0.0361]$$

$$F_{211} = [-0.2426 \quad -0.9729 \quad 0.0411], F_{212} = [-0.2384 \quad -0.8302 \quad 0.0368]$$

Les états du système en boucle fermée et la commande $u(t)$ sont représentés par les figures 5.6-5.7

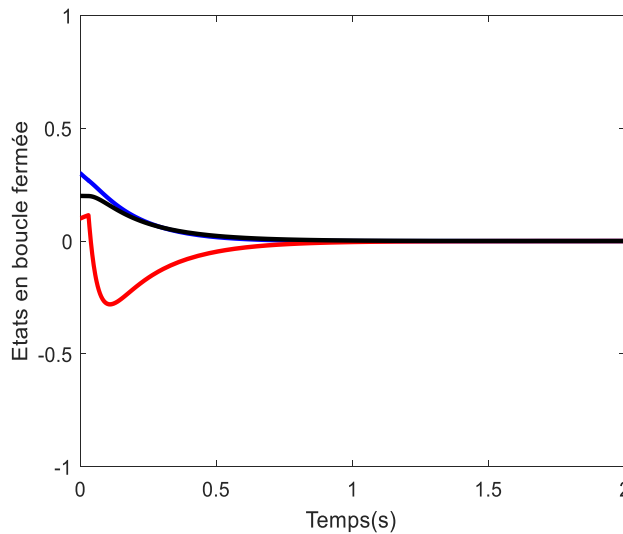


Fig.5.6. Etats du système en boucle fermée.

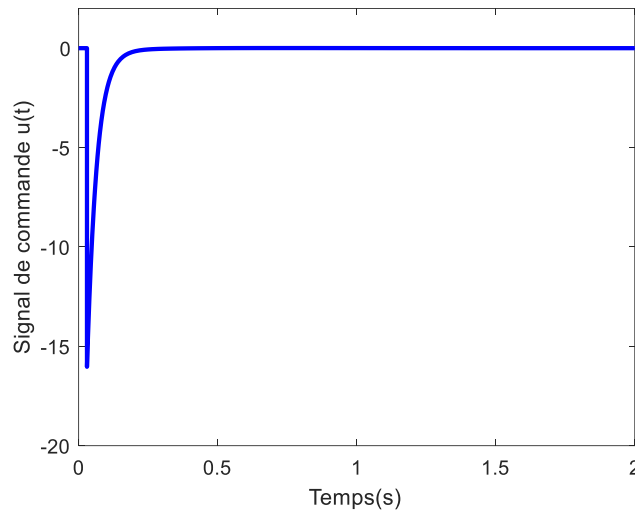


Fig.5.7. Signal de commande.

La migration des valeurs propres des matrices $\left(A_i + B_i F_{jkl} \left(\sum_{l=1}^2 v_l(z(t)) P_l \right)^{-1} \right)$ est représentée par la figure 5.8.

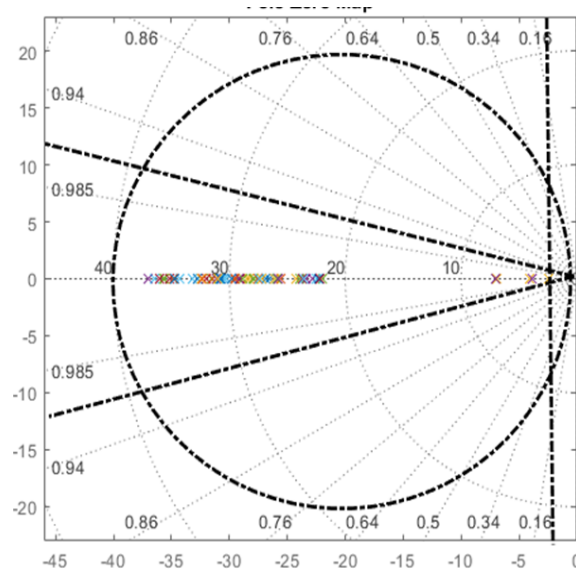


Fig.5.8. Migration des valeurs propres des matrices $\left(A_i + B_i F_{jkl} \left(\sum_{l=1}^2 v_l(z(t)) P_l \right)^{-1} \right)$.

5.4. \mathcal{D} -stabilisation des systèmes de Takagi-Sugeno en présence de saturation d'actionneurs

Pour des raisons physiques, technologiques ou de sécurité, les systèmes dynamiques sont le plus souvent soumis à des limitations de fonctionnement modélisées par des contraintes d'amplitude sur les actionneurs et les capteurs. La synthèse de commande sans tenir compte de ces contraintes peut conduire à des dégradations non souhaitables des performances de contrôle, à des cycles limites et mêmes à l'instabilité [Henrion, 1999].

La modélisation du phénomène de saturation qui est par essence non linéaire peut se faire de plusieurs manières différentes, à savoir : par modèle polytopique [Henrion, 1999], [Jungers et Castelan, 2011], [Nasri et al., 2019b], par non linéarité de secteur [Da Silva Jr et Tarbouriech,

2006], par division de l'état par région de saturation [Da Silva et al., 1997] ou bien par représentation multi-modèle [Bezzaoucha, 2013].

La conception de lois de commande pour les systèmes non linéaires modélisés par des multi-modèles de Takagi-Sugeno en présence de saturations d'actionneur a fait l'objet d'une attention particulière ces vingt dernières années [Cao et Lin, 2003], [Benzaouia, 2012], [Dang et al., 2017], [Saifia et al., 2020]. Deux approches permettent d'appréhender la présence de saturation dans la synthèse de commande :

La commande anti-windup

Le principe de la commande anti-windup est d'utiliser un compensateur additionnel (statique ou dynamique) afin de contrer l'effet de la saturation d'actionneur (voir figure 5.9) [Kiener et al., 2014], [Liu et Yang, 2017], [Tarbouriech et Queinnec, 2020].

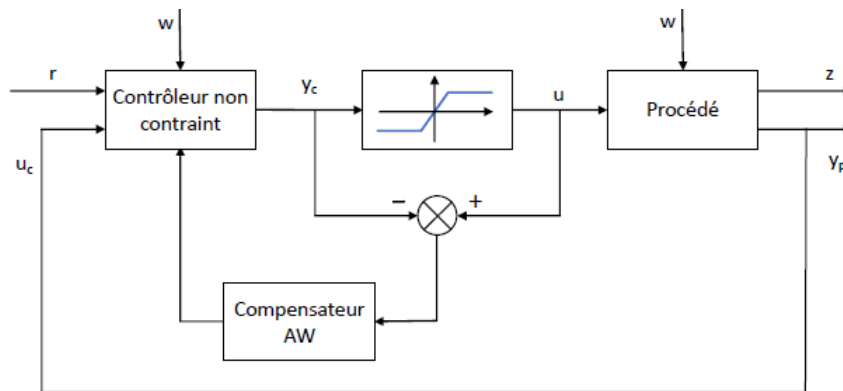


Fig.5.9. Schéma de principe de l'architecture anti-windup [Tarbouriech et Queinnec, 2020].

La différence entre le signal de sortie du contrôleur ($y_c(t)$) et le signal appliqué au système à commander ($Sat(y_c(t))$) est réintroduite dans le contrôleur via une boucle statique (un simple gain) ou une boucle dynamique (un compensateur dynamique). Dans cette architecture, le compensateur anti-windup n'est pas activé lorsqu'il n'y a pas de saturation, ce qui garantit que, dans la zone linéaire, le contrôleur nominal n'est pas modifié.

L'objectif de synthèse d'une stratégie anti-windup est de garantir un certain degré de performance en présence de saturation (en diminuant la dégradation des performances obtenues sans saturation) mais aussi de permettre d'agrandir la région d'attraction de l'origine (ou du moins son estimée) du système en boucle fermée [Tarbouriech et al., 2011], [Zaccarian and Teel, 2011].

Commande contrainte et commande saturante

Les commandes contrainte et saturante permettent de prendre en considération la saturation lors de la synthèse du contrôleur. Afin d'expliquer la différence entre ces deux commandes, nous considérons le cas simple d'un système linéaire continu [Henrion, 1999]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{5.38}$$

commandé par un retour d'état

$$u(t) = Kx(t). \tag{5.39}$$

Si aucune contrainte d'amplitude n'affecte l'état et/ou la commande, le système en boucle fermée est

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \tag{5.40}$$

On suppose maintenant que chaque composante $u_i(t)$ de la commande $u(t)$ est soumise à une contrainte d'amplitude comme suit

$$-\underline{u}_i \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i, \quad (5.41)$$

où $\underline{u}_i, \bar{u}_i$ sont des scalaires positifs donnés. Dans ce cas, le système en boucle fermée devient

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BSat(Kx(t)). \quad (5.42)$$

Le caractère non linéaire de la saturation fait que le système (5.42) est non linéaire.

La zone de linéarité du système (5.42) peut être définie comme l'ensemble des états pour lesquels les commandes ne sont pas saturées

$$\{x: -\underline{u}_i \leq K_i x \leq \bar{u}_i, i = 1, \dots, m\}. \quad (5.43)$$

Nous pouvons dire que le modèle non linéaire (5.42) admet localement le modèle linéaire (5.40). Comme nous le verrons plus tard, la notion de modèle local est fortement liée à celle de stabilité locale et de domaine d'attraction.

Nous distinguons alors deux cas de figure :

- La *commande contrainte* qui est conçue de sorte que l'état du système reste à l'intérieur de la zone de linéarité. La commande ne sature jamais et le modèle linéaire (5.40) est valide localement pour le système non linéaire (5.42) [Henrion, 1999], [Saifia et al., 2012a].
- La *commande saturante* qui comme son nom l'indique peut saturer et seul le modèle non linéaire (5.42) est valide [Cao et Lin, 2003], [Nasri et al., 2019a].

Dans les sections suivantes, nous proposons de généraliser les résultats obtenus dans [Hu et al., 2002] et [Cao et Lin, 2003] à la synthèse \mathcal{D} -stable de commandes contraintes et saturantes des systèmes TS. Nous présentons des conditions LMIs permettant au système en boucle fermée d'être localement \mathcal{D} -stable tout en maximisant l'estimation du domaine d'attraction.

5.4.1. Commande PDC contrainte des systèmes TS

On considère le système non linéaire représenté par le modèle TS (5.1) en présence de saturation d'actionneur définie par (5.2) et (5.3).

On s'intéresse alors à la commande PDC suivante

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) F_j x(t) = F_h x(t). \quad (5.44)$$

Le système (5.1) étant soumis à la saturation (5.2), la stabilité globale du système en boucle fermée ne peut être assurée. L'objectif de contrôle est donc de synthétiser r retours d'état locaux $F_j x(t)$ pour que le système en boucle fermée soit localement \mathcal{D} -stable dans une région aussi large que possible.

5.4.1.1. Quelques notions préliminaires

Pour $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, on note la trajectoire du système (5.1) comme $\phi(t, x_0)$. L'ensemble défini par

$$\Omega = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0) = 0\}, \quad (5.45)$$

est appelé domaine ou bassin d'attraction de l'origine qui est défini comme étant le plus grand domaine dans l'espace d'état dans lequel toutes les trajectoires qui y commencent convergent vers l'origine. La détermination analytique de ce domaine s'avère difficile, on se contente généralement d'une approximation de ce dernier.

Soit $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice définie positive et la fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$. Pour un scalaire positif ρ , on définit l'ellipsoïde

$$\varepsilon(P, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq \rho\}. \quad (5.46)$$

Si $\varepsilon(P, \rho)$ est contractif alors il se trouve forcément à l'intérieur du domaine d'attraction Ω .

Soit F une matrice de dimension $m \times n$, f_k est la $k^{\text{ème}}$ ligne F , on définit le polyèdre suivant

$$S(F) = \{x(t) / |f_k x| \leq \bar{u}_k, k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (5.47)$$

Si F est une matrice de retour d'état, $S(F)$ est la région où la commande est linéaire en $x(t)$ i.e $u(t) = Fx(t)$.

Proposition 5.1[Hu et al., 2004]

Un ellipsoïde $\varepsilon(P, \rho)$ est à l'intérieur de $S(F)$ si et seulement si

$$f_k \left(\frac{P}{\rho} \right)^{-1} f_k^T \leq \bar{u}_k^2. \quad (5.48)$$

Pour la commande PDC (5.44), on définit l'ensemble suivant

$$\mathcal{L}(x) = S(F_1) \cap S(F_2) \cap \dots \cap S(F_r). \quad (5.49)$$

5.4.1.2. Synthèse de la loi de commande contrainte

Dans le Théorème suivant, nous énonçons les conditions pour lesquelles le système (5.1) est localement \mathcal{D} -stabilisé par la commande PDC (5.44).

Théorème 5.1

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.1) sous la contrainte (5.2) est localement quadratiquement \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande (5.44) dans l'ellipsoïde $\varepsilon(P, \rho) \subset \mathcal{L}(x)$ s'il existe une matrice symétrique définie positive Q , des matrices G_{ij}, R_{ij} et Y_j telles que les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\begin{bmatrix} L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (A_i G_{ij} + B_i Y_j)) & * \\ I \otimes (Q - G_{ij}^T) + (M^T \otimes R_{ij}^T A_i) & -\text{Sym}(I \otimes R_{ij}) \end{bmatrix} < 0, \quad (5.50)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_k^2 & * \\ (y_j^k)^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.51)$$

$i, j = 1, \dots, r ; k = 1, \dots, m$. y_j^k est le $k^{\text{ème}}$ élément de Y_j .

Les matrices de gains du contrôleur PDC sont

$$F_j = Y_j Q^{-1}. \quad (5.52)$$

Preuve. Pour un ellipsoïde donné $\varepsilon(P, \rho)$, si $x \in \varepsilon(P, \rho)$ et $\varepsilon(P, \rho) \subset \mathcal{L}(x)$, alors $sat(F_j x) = F_j x$ pour $j = 1, 2, \dots, r$, i.e.,

$$\text{sat}(u)=u, \quad (5.53)$$

t.q.

$$f_j^k \left(\frac{P}{\rho} \right)^{-1} (f_j^k)^T \leq \bar{u}_k^2, \quad (5.54)$$

où $F_j = [f_j^1, f_j^2, \dots, f_j^m]^T$.

L'application du complément de Schur à l'inégalité (5.54) donne

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_k^2 & * \\ \left(\frac{P}{\rho} \right)^{-1} (f_j^k)^T & \left(\frac{P}{\rho} \right)^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.55)$$

Le système en boucle fermée composé du système TS (5.1) et de la commande PDC (5.44) s'écrit

$$\dot{x}(t) = A_h x(t) + B_h \text{sat}(F_h x(t)). \quad (5.56)$$

L'inégalité (5.55) assure que $\text{sat}(F_h x(t)) = F_h x(t)$, le système en boucle fermée devient

$$\dot{x}(t) = (A_h + B_h F_h) x(t). \quad (5.57)$$

En considérant la fonction de Lyapunov $V = x^T P x$, le système (5.57) est \mathcal{D} -stable si

$$(I \otimes x^T)(L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h + PB_h F_h)))(I \otimes x) < 0. \quad (5.58)$$

L'inégalité (5.58) est vérifiée si

$$L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h + PB_h F_h)) < 0. \quad (5.59)$$

En multipliant à gauche et à droite par $(I \otimes P^{-1})$, on obtient

$$L \otimes P^{-1} + \text{Sym}(M \otimes (A_h P^{-1} + B_h F_h P^{-1})) < 0. \quad (5.60)$$

Sachant que $\rho > 0$, on multiplie l'inégalité précédente par $1/\rho^{-1}$

$$L \otimes \left(\frac{P}{\rho} \right)^{-1} + \text{Sym} \left(M \otimes \left(A_h \left(\frac{P}{\rho} \right)^{-1} + B_h F_h \left(\frac{P}{\rho} \right)^{-1} \right) \right) < 0. \quad (5.61)$$

Propriété 5.1 [Márquez et al., 2016]

Soient A, R, S, P et H des matrices de dimensions appropriées. Les inégalités suivantes sont équivalentes

$$1. A^T P + PA + S < 0, \quad (5.62)$$

$$2. \exists R, H : \begin{bmatrix} A^T H^T + HA + S & * \\ P - H^T + R^T A & -R - R^T \end{bmatrix} < 0. \quad (5.63)$$

En considérant les changements de variables $Q = \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1}$ et $Y_j = F_j Q$ et en appliquant la propriété 5.1 avec :

$A = (M^T \otimes A_h^T), P = (I \otimes Q), H = (I \otimes G_{hh}^T), R = (I \otimes R_{hh})$ et $S = L \otimes Q + He(M \otimes B_h Y_h)$, on aboutit aux contraintes (5.50) et (5.51) du Théorème 5.1. ■

5.4.1.3. Relaxation

La relaxation des conditions du théorème précédent consiste à trouver une matrice de Lyapunov Q telle que le système (5.1) soit \mathcal{D} -stabilisé par la commande (5.44) dans un ellipsoïde $\varepsilon(P, \rho) \subset \mathcal{L}(x)$ de taille aussi grande que possible.

Théorème 5.2

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.1) sous la contrainte (5.2) est localement quadratiquement \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande (5.44) dans l'ellipsoïde $\varepsilon(P, \rho) \subset \mathcal{L}(x)$ de taille maximale s'il existe une matrice symétrique définie positive Q , des matrices G_{ij}, R_{ij} et Y_j et un scalaire positif γ tels que les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\min_{Q, H_{ij}, R_{ij}, Y_j} \gamma \quad (5.64)$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (A_i G_{ij} + B_i Y_j)) & * \\ I \otimes (Q - G_{ij}^T) + (M^T \otimes R_{ij}^T A_i) & -\text{Sym}(I \otimes R_{ij}) \end{bmatrix} < 0, \quad (5.65)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_k^2 & * \\ (y_j^k)^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.66)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma R & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \gamma & (x_0^i)^T \\ x_0^i & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.67)$$

Preuve. Parmi les ellipsoïdes satisfaisant les conditions du Théorème 5.1, il serait préférable de choisir le plus large afin d'obtenir une estimation moins conservatrice du domaine d'attraction. Comme dans [Hu et al., 2002], [Cao et Lin, 2003] et [Han et Morioka, 2007], on mesure la « taille » des ellipsoïdes par rapport à un ensemble de référence. Soit $X_R \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe contenant l'origine. Pour un ensemble $W \subset \mathbb{R}^n$, on définit la taille de W par rapport à X_R comme [Hu et Lin, 2001]

$$\mu_R(W) := \sup\{\mu > 0 : \mu X_R \subset W\}. \quad (5.68)$$

X_R peut être un ellipsoïde

$$X_R = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; x^T R x \leq 1\}, \quad (5.69)$$

ou un polyèdre

$$X_R = \text{Co} \{x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^l\}. \quad (5.70)$$

Co représente une enveloppe convexe et $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^l$ sont des points donnés dans \mathbb{R}^n .

On choisit donc $\varepsilon(P, \rho)$ tel que la quantité $\mu_R(\varepsilon(P, \rho))$ soit maximisée afin d'obtenir le plus large domaine d'attraction. Ce problème peut être formulé comme suit

$$\max \mu \quad (5.71)$$

t.q.

$$\mu X_R \subset \varepsilon(P, \rho). \quad (5.72)$$

La contrainte (5.68) doit être transformée en LMI [Han et Morioka, 2007]. Si l'ensemble de référence est un ellipsoïde alors la contrainte (5.72) est équivalente à

$$\frac{R}{\mu^2} \geq \frac{P}{\rho}, \quad (5.73)$$

qui peut être exprimée en LMI comme suit

$$R^{-1} \leq \gamma Q \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \gamma R & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.74)$$

où $\gamma = \frac{1}{\mu^2}$. Si l'ensemble de référence est un polyèdre, la contrainte (5.68) est équivalente à

$$\mu^2 (x_0^i)^T P (x_0^i) \leq \rho \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \gamma & (x_0^i)^T \\ x_0^i & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.75)$$

L'obtention d'une surface de Lyapunov aussi large possible revient donc à minimiser γ en ajoutant les contraintes précédentes aux conditions du Théorème 5.1. ■

5.4.2. Commande PDC saturante des systèmes TS

5.4.2.1. Représentation polytopique de la saturation

Soit ν un ensemble de matrices de dimension $m \times m$ dont les éléments diagonaux sont soit 1 soit 0. Par exemple, pour $m=2$

$$\nu = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (5.76)$$

Chaque élément de ν est noté E_i , pour $i=1, 2, \dots, 2^m$. On note aussi $E_i^- = I - E_i$.

Lemme 5.6 [Hu et Lin, 2001]

Soit deux matrices données F et $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, si $x \in S(H)$ alors

$$\text{sat}(Fx) \in \text{Co} \left\{ E_s F x + E_s^- H x : s \in [1, 2^m] \right\}. \quad (5.77)$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\text{sat}(Fx) = \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s (E_s F + E_s^- H) x = (E_\eta F + E_\eta^- H) x, \quad (5.78)$$

où $0 \leq \eta_s \leq 1, \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s = 1$.

5.4.2.2. Synthèse de la loi de commande saturante

Les conditions de synthèse de la loi de commande PDC saturante sont énoncées par le Théorème suivant.

Théorème 5.3

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.1) sous la contrainte (5.2) est localement quadratiquement \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande (5.44) dans l'ellipsoïde $\varepsilon(P, \rho)$ de taille maximale s'il existe une matrice symétrique définie positive Q , des matrices G_{ij}, R_{ij}, Y_j et Z_j et un scalaire positif γ tels que les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\min_{Q, H_{ij}, R_{ij}, Y_j, Z_j} \gamma \quad (5.79)$$

$$\left[\begin{array}{cc} L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes (A_i G_{ij} + B_i (E_s Y_j + E_s^- Z_j))) & * \\ I \otimes (Q - G_{ij}^T) + (M^T \otimes R_{ij}^T A_i) & -\text{Sym}(I \otimes R_{ij}) \end{array} \right] < 0, i, j = 1, \dots, r, s = 1, \dots, 2^m \quad (5.80)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \bar{u}_k^2 & * \\ (z_j^k)^T & Q \end{array} \right] \geq 0, \quad (5.81)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \gamma R & I \\ I & Q \end{array} \right] \geq 0 \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{cc} \gamma & (x_0^i)^T \\ x_0^i & Q \end{array} \right] \geq 0. \quad (5.82)$$

Preuve. La démonstration des contraintes (5.80-5.82) est la même que celles des contraintes (5.65-5.67) du Théorème 5.2. L'inégalité (5.80) est obtenue en remplaçant $\text{sat}(u(t))$ par le modèle polytopique (5.78) et en suivant les mêmes étapes (5.58-5.63). ■

Exemple 5.3: Application des commandes PDC contrainte et saturante à un exemple académique

On considère un système TS composé de deux modèles locaux dont les matrices et les fonctions d'activation sont données par

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2,9 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.83)$$

$$h_1(x_1(t)) = \frac{1 - \sin(x_1(t))}{0,5}, h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)). \quad (5.84)$$

Les résultats numériques de l'application des commande contrainte et saturante pour une région LMI définie par $\beta=1, \alpha=0, \theta=3\pi/11, s=10$ et $q=10$ sont résumés dans le Tableau 5.1.

5 Commandes \mathcal{D} -stables des systèmes TS à VDM

| Commande pour $\bar{u}_k = 0.38$ | Commande PDC contrainte | Commande PDC saturante | Commande PDC classique |
|----------------------------------|---------------------------------------|---|--|
| Matrices de gain F_i | $F_1 = F_2 = [-1.8412 \quad -6.6208]$ | $F_1 = [-5.0189 \quad -14.7221]$ $F_2 = [-6.2819 \quad -17.4097]$ $H_1 = H_2 = [-1.8412 \quad -6.6207]$ | $F_1 = [-6.4096 \quad -14.5090]$ $F_2 = [-8.6495 \quad -17.6695]$ |

Tableau 5.1. Résultats numériques des Théorèmes 5.2 et 5.3.

Dans la Figure 5.10, nous avons représenté les surfaces de Lyapunov $\varepsilon(P, 1)$ des théorèmes développés plus haut. On voit bien que les Théorèmes 5.2 et 5.3 présentent des ellipsoïdes plus larges que celui du Théorème 5.1. Les contraintes des Théorèmes 5.2 et 5.3 sont donc moins conservatives.

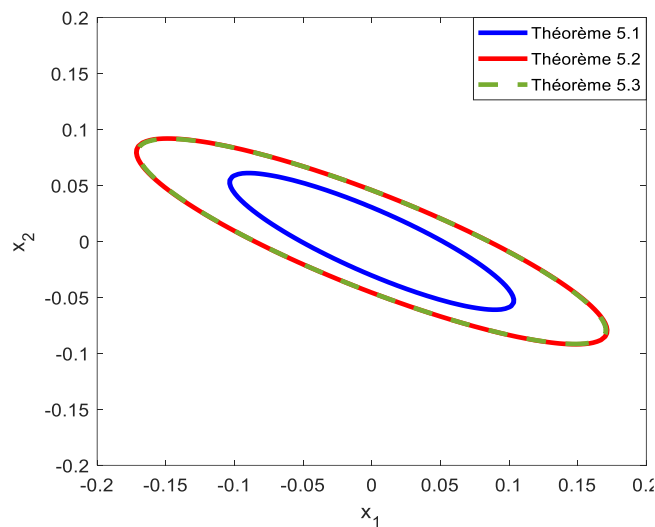


Fig.5.10. Comparaison des surfaces de Lyapunov des Théorèmes 5.1-5.3.

Les Figures 5.11-5.13 représentent respectivement les états du système en boucle fermée, le signal de commande saturé et les valeurs propres du système en boucle fermée pour les différentes commandes (contrainte, saturante et classique).

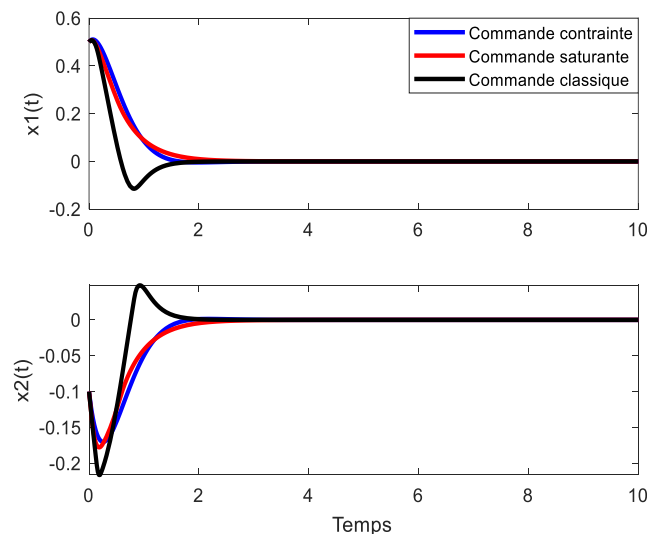


Fig.5.11. États du système en boucle fermée pour les commandes PDC contrainte, saturante et classique.

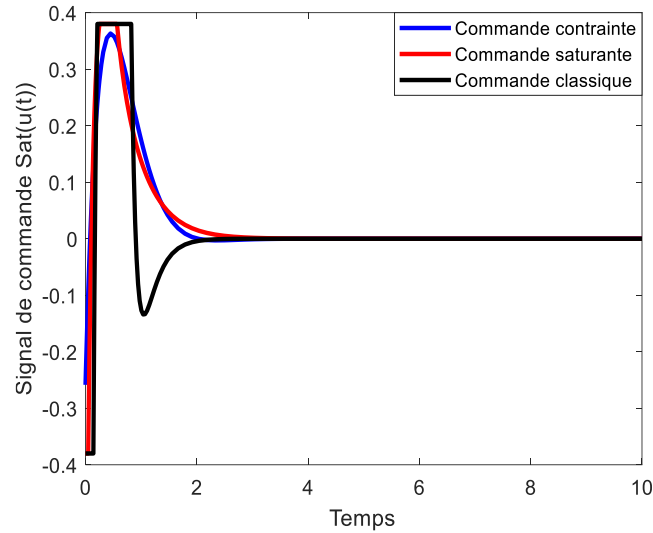


Fig.5.12. Signal de commande $\text{sat}(u(t))$ pour les commandes PDC contrainte, saturante et classique.

Nous remarquons que les commandes PDC contrainte et saturante permettent d’avoir des réponses plus amorties que la commande PDC classique. La réponse correspondante à cette dernière présente un dépassement non négligeable. On peut noter aussi que la commande saturante sature moins longtemps que la commande classique ce qui permet d’éviter l’apparition du dépassement.

La Figure 5.13 montre la satisfaction des contraintes de \mathcal{D} -stabilité ; les valeurs propres du système en boucle fermée sont contenues dans la région LMI prescrite pour les deux commandes.

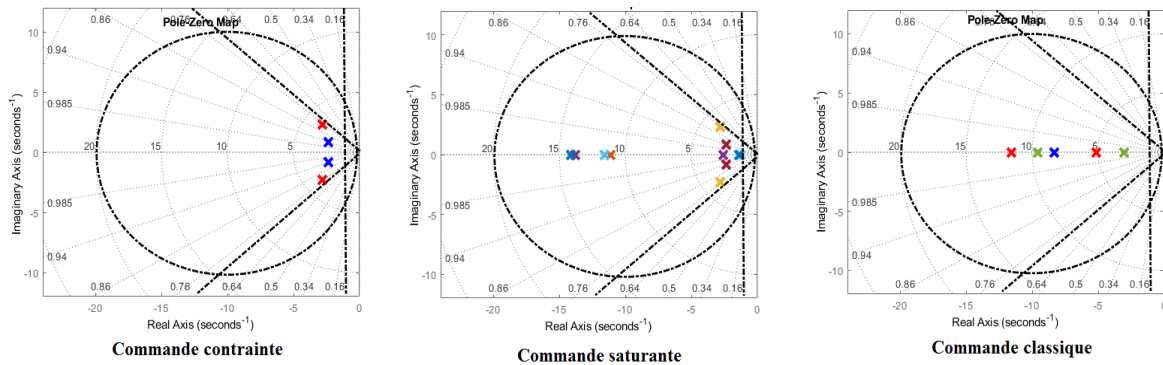


Fig.5.13. Migration des valeurs propres du système en boucle fermée pour les commandes PDC contrainte, saturante et classique.

5.4.3. Commande PDC saturante des systèmes TS incertains

Dans cette section, on s’intéresse à la synthèse d’une commande saturante pour les systèmes TS incertains en présence de saturation d’actionneur décrits par

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))\text{sat}(u(t)) \right). \quad (5.85)$$

Les incertitudes $\Delta A_i(t)$ et $\Delta B_i(t)$ sont définies par les équations (5.5) et (5.6).

La dynamique du système en boucle fermée est obtenue en substituant

$$\text{sat}(F_j x) = \sum_{s=1}^{2^m} \eta_s (E_s F_j + E_s^- H_j) x \text{ dans l'équation (5.85)}$$

$$\dot{x}(t) = \left((A_h + \Delta A_h(t)) + (B_h + \Delta B_h(t)) (E_\eta F_h + E_\eta^- H_h) \right) x(t). \quad (5.86)$$

Théorème 5.4

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.85) sous la contrainte (5.2) est localement quadratiquement \mathcal{D} -stabilisé par la loi de commande (5.44) dans l'ellipsoïde $\varepsilon(P, \rho)$ de taille maximale s'il existe une matrice symétrique définie positive Q , des matrices G_{ij}, R_{ij}, Y_j et Z_j et des scalaires positifs γ, τ_{ij}^a et τ_{ij}^b tels que les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\min_{Q, H_{ij}, R_{ij}, Y_j, Z_j, \tau_{ij}^a, \tau_{ij}^b} \gamma \quad (5.87)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{ijs} & * & * & * \\ I \otimes (Q - G_{ij}^T) + (M^T \otimes R_{ij}^T A_i^T) & -\text{Sym}(I \otimes R_{ij}) & 0 & 0 \\ M \otimes N_i^a Q & 0 & -I \otimes \tau_{ij}^a & 0 \\ M \otimes N_i^b (E_s Y_j + E_s^- Z_j) & 0 & 0 & -I \otimes \tau_{ij}^b \end{bmatrix} < 0, \quad (5.88)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_k^2 & * \\ (z_j^k)^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.89)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma R & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \text{ ou } \begin{bmatrix} \gamma & (x_0^i)^T \\ x_0^i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.90)$$

avec

$$\Gamma_{ijs} = L \otimes Q + \text{Sym} \left(M \otimes (A_i G_{ij} + B_i (E_s Y_j + E_s^- Z_j)) \right) + I \otimes (\tau_{ij}^a M_i^a (M_i^a)^T + \tau_{ij}^b M_i^b (M_i^b)^T). \quad (5.91)$$

Les matrices de gains de la loi de commande

$$F_j = Y_j Q^{-1}, \quad (5.92)$$

$$H_j = Z_j Q^{-1}. \quad (5.93)$$

Preuve. Sur la base d'une fonction de Lyapunov quadratique $V = x^T P x$, le système (5.86) est \mathcal{D} -stable si

$$(I \otimes x^T) \left(L \otimes P + \text{Sym} \left(M \otimes \left((P A_h + P \Delta A_h) + (P B_h + P \Delta B_h) (E_\eta F_h + E_\eta^- H_h) \right) \right) \right) (I \otimes x) < 0. \quad (5.94)$$

L'inégalité (5.94) est satisfaite si

$$L \otimes P + \text{Sym} \left(M \otimes \left((P A_h + P \Delta A_h) + (P B_h + P \Delta B_h) (E_\eta F_h + E_\eta^- H_h) \right) \right) < 0. \quad (5.95)$$

On multiplie l'inégalité précédente à gauche et à droite par $(I \otimes P^{-1})$

$$L \otimes P^{-1} + \text{Sym} \left(M \otimes \left((A_h P^{-1} + \Delta A_h P^{-1}) + (B_h + \Delta B_h) (E_\eta F_h P^{-1} + E_\eta^- H_h P^{-1}) \right) \right) < 0. \quad (5.96)$$

5 Commandes \mathcal{D} -stables des systèmes TS à VDM

En isolant les termes incertains des autres termes, en multipliant l'inégalité précédente par $1/\rho^{-1}$ et en considérant le changement de variable $Q = \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1}$, on obtient

$$\underbrace{L \otimes Q + \text{Sym}\left(M \otimes \left(A_h Q + B_h (E_\eta F_h Q + E_\eta^- H_h Q)\right)\right)}_{\Omega_{hh\eta}} + \underbrace{\text{Sym}\left(M \otimes \left(\Delta A_h Q + \Delta B_h (E_\eta F_h Q + E_\eta^- H_h Q)\right)\right)}_{\Delta\Omega_{hh\eta}} < 0. \quad (5.97)$$

On s'intéresse d'abord à la partie incertaine $\Delta\Omega_{hh\eta}$, qui selon (5.5) et (5.6) peut être réécrite comme

$$\Delta\Omega_{hh\eta} = \text{Sym}\left(\left(I \otimes M_h^a\right)\left(I \otimes \Sigma_a(t)\right)\left(M \otimes N_h^a Q\right)\right) + \text{Sym}\left(\left(I \otimes M_h^b\right)\left(I \otimes \Sigma_b(t)\right)\left(M \otimes N_h^b (E_\eta F_h Q + E_\eta^- H_h Q)\right)\right), \quad (5.98)$$

ou de manière équivalente

$$\Delta\Omega_{hh\eta} = \text{Sym}\left(X_h^T \tilde{\Sigma}(t) W_h\right), \quad (5.99)$$

$$\text{avec } X_h^T = \begin{bmatrix} I \otimes M_h^a & I \otimes M_h^b \end{bmatrix}, \tilde{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} I \otimes \Sigma_a(t) & 0 \\ 0 & I \otimes \Sigma_b(t) \end{bmatrix}, W_h = \begin{bmatrix} M \otimes N_h^a Q \\ M \otimes N_h^b (E_\eta F_h Q + E_\eta^- H_h Q) \end{bmatrix}.$$

Lemme 5.7 [Xie et De Souza, 1992]

Pour toutes matrices X, Y et $T = T^T > 0$ de dimensions appropriées, l'inégalité suivante est toujours vraie

$$\text{Sym}\left(X^T \Delta(t) Y\right) \leq X^T T X + Y^T T^{-1} Y, \quad \forall \Delta^T(t) \Delta(t) \leq I. \quad (5.100)$$

En appliquant le Lemme 5.7 à la matrice (5.99), l'inégalité (5.97) devient

$$\Omega_{hh\eta} + X_h^T T_h X_h + W_h^T T_h^{-1} W_h < 0, \quad (5.101)$$

$$\text{où } T_h = \begin{bmatrix} I \otimes \tau_h^a & 0 \\ 0 & I \otimes \tau_h^b \end{bmatrix}.$$

L'application du complément de Schur à l'inégalité (5.101) permet d'écrire

$$\begin{bmatrix} \Omega_{hh\eta} + X_h^T T_h X_h & W_h^T \\ W_h & -T_h \end{bmatrix} < 0. \quad (5.102)$$

En remplaçant les différentes matrices par leurs expressions dans (5.102) et en appliquant la propriété 5.1, on aboutit à la contrainte (5.88).

Comme dans les sections précédentes, le problème d'optimisation permettant de maximiser le domaine d'attraction du système en boucle fermée (5.86) peut être résumé comme suit

$$\min_{Q, H_{ij}, R_{ij}, Y_j, Z_j, \tau_{ij}^a, \tau_{ij}^b} \gamma$$

t.q

a) LMI (5.74) ou (5.75),

b) contrainte (5.88),

$$c) \begin{bmatrix} \bar{u}_k^2 & * \\ (z_j^k)^T & Q \end{bmatrix} \geq 0. \blacksquare$$

Exemple 5.4 : Application de la commande saturante à un bras de robot flexible

Soit un bras de robot flexible représenté par la Figure 5.14 et décrit par le modèle non linéaire suivant [Seidi et al., 2012], [Cherifi, 2017]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{J_1}(k(x_2(t) - x_1(t)) - mgL \sin(x_1(t))), \\ \dot{x}_4(t) = \frac{1}{J_2}(u(t) - k(x_2(t) - x_1(t))). \end{cases} \quad (5.103)$$

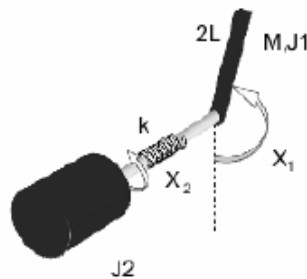


Fig.5.14. Bras de robot flexible [Seidi et al., 2012].

Les états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ représentent respectivement les positions angulaires du bras et de l’actionneur. La commande $u(t)$ est le couple appliqué par le moteur. Les différents paramètres du système sont donnés dans le Tableau 5.2.

| Symbole | Paramètre | Valeur |
|---------|------------------------------|-----------------------------|
| J_1 | Inertie de l’actionneur | 1 kg. m ² |
| J_2 | Inertie du bras | 1 kg. m ² |
| M | Masse du bras | 1 kg |
| L | Longueur du bras | 1 m |
| K | Raideur du ressort | 100 N. m. rad ⁻¹ |
| g | Accélération de la pesanteur | 9,81 m. s ⁻² |

Tableau 5.2. Paramètres du modèle non linéaire du bras flexible.

Le modèle TS obtenu après application de la méthode des secteurs non linéaires est

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t))(A_i x(t) + Bu(t)), \quad (5.104)$$

où $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$. Les matrices et les fonctions d'activation du modèle TS (5.104) sont

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k - mgL}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{-k}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k - mgL\rho}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{-k}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix}, \quad (5.105)$$

$$h_1(x_1(t)) = \frac{\sin c(x_1(t)) - \rho}{1 - \rho}, \quad h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)), \quad \rho \approx -0,2172. \quad (5.106)$$

On suppose maintenant que le système est soumis à des incertitudes et à une saturation d'actionneur dont la borne $\bar{u}(t) = 50N.m$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) \left((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B + \Delta B(t))\text{sat}(u(t)) \right), \quad (5.107)$$

avec

$$\Delta A_i(t) = M_i^a \Sigma_a(t) N_i^a, \quad \Delta B(t) = M^b \Sigma_b(t) N^b,$$

$$M_1^a = M_2^a = \begin{bmatrix} 0,05 \\ -0,2 \\ -0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}, \quad N_1^a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,1 \\ 0,05 \end{bmatrix}^T, \quad N_2^a = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,8 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}^T, \quad M^b = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad N^b = -0,03, \Sigma_a(t) = \Sigma_b(t) = 1.$$

Dans cet exemple, on considère la région LMI $S(\beta, s, \theta)$ représentée par la Figure 5.15 et qui est l'intersection :

- d'un secteur conique défini par son apex à l'origine et son angle θ par rapport à l'axe réel,
- d'un disque de rayon s centré à l'origine,
- d'un demi-plan gauche avec un taux de décroissance β .

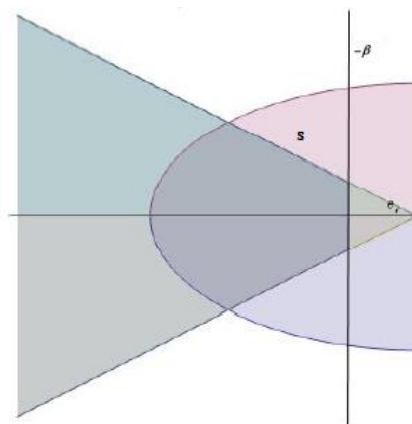


Fig.5.15. Région LMI $S(\beta, s, \theta)$ considérée dans l'exemple 5.4.

Les matrices M et L suivante définissent la région $S(\beta, s, \theta)$

$$L = \begin{bmatrix} 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (5.108)$$

Les paramètres de la région LMI sont : $\theta = \pi/4$, $\beta = 2,5$, $s = 15$.

Les matrices de gains obtenues par la solution des contraintes (5.88)-(5.90) sont

$$F_1 = [147.1278 \quad -219.2380 \quad 5.0216 \quad -31.3126], \quad F_2 = [138.0253 \quad -209.0921 \quad 5.2761 \quad -30.8793],$$

$$H_1 = [139.0829 \quad -210.1447 \quad 5.3 \quad 007 \quad -30.9477], \quad H_2 = [139.0491 \quad -210.1395 \quad 5.2896 \quad -30.9429]$$

Les Figures 5.16-5.18 illustrent la comparaison entre la stabilisation exponentielle du système (5.107) et sa \mathcal{D} -stabilisation selon la région LMI décrite ci-dessus.

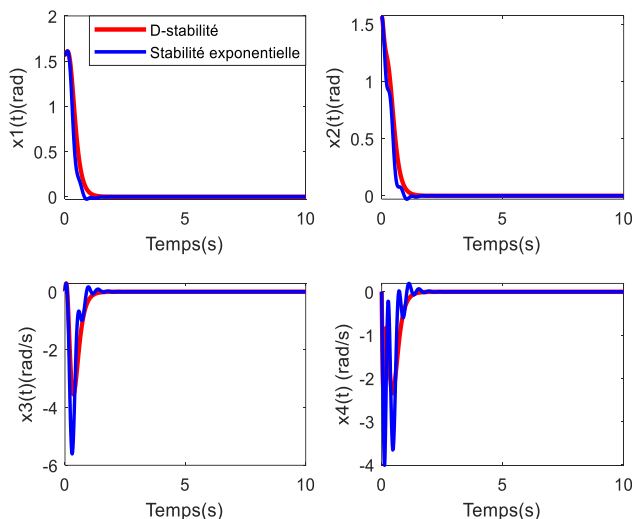


Fig.5.16. Evolution des états du système en boucle fermée (Stabilité exponentielle : trait bleu, \mathcal{D} -stabilité : trait rouge).

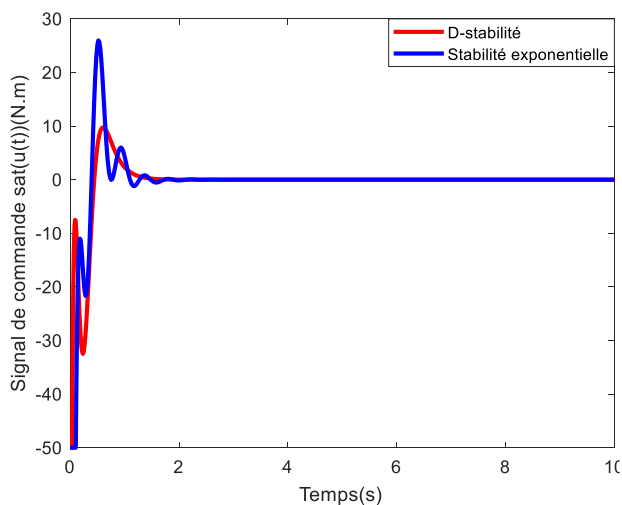


Fig.5.17. Signal de commande saturé $\text{sat}(u(t))$ (Stabilité exponentielle : trait bleu, \mathcal{D} -stabilité : trait rouge).

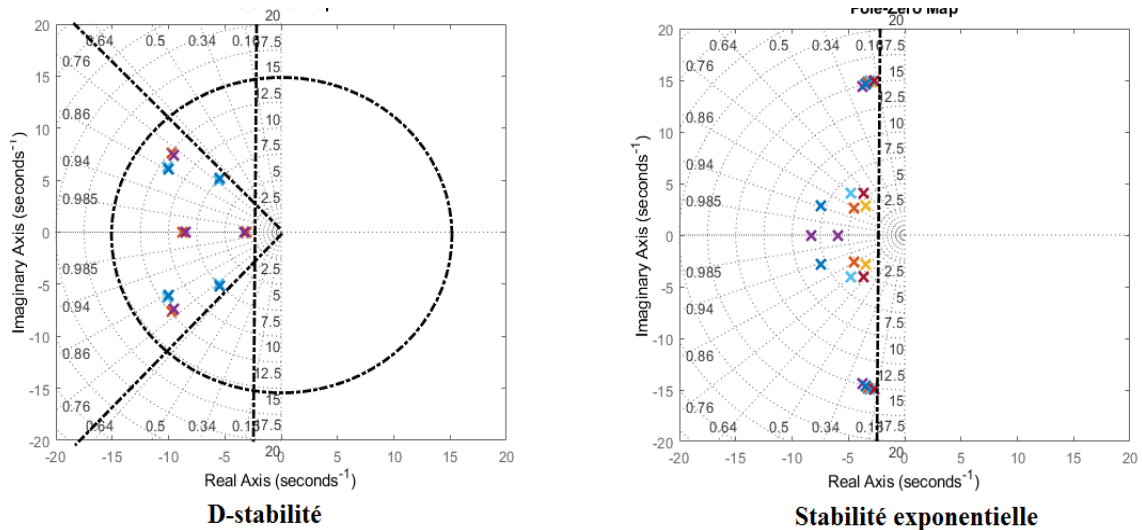


Fig.5.18. Migration des valeurs propres du système en boucle fermée.

D'après les résultats de simulation présentés plus haut, la commande saturante \mathcal{D} -stable fournit de meilleures réponses en boucle fermée (amortissement, rapidité et allure du signal de commande) puisque les valeurs propres du système bouclé prennent des valeurs raisonnables. Dans le cas de la stabilité exponentielle, les valeurs propres s'éloignent trop de l'axe réel, ce qui conduit à un régime transitoire faiblement amorti.

5.5. Poursuite \mathcal{D} -stable de trajectoire générée par un modèle de référence

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème de poursuite de consigne générée par un modèle de référence pour les systèmes TS incertains et perturbés. Nous proposons des conditions de synthèse non quadratiques locales et globales de lois de commande en poursuite sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité.

Le problème de poursuite de trajectoire a suscité depuis plusieurs décennies l'engouement de la communauté scientifique. Dans le passé, différentes approches ont été développées pour résoudre ce problème de contrôle [Chen et al., 1996], [Tseng et al., 2001], [Zheng et al., 2002], [Lin et al., 2006].

Un contrôleur flou muni d'un algorithme adaptatif est proposé dans [Chen et al., 1996] permettant d'atteindre des performances de suivi H_∞ pour une classe de systèmes non linéaires mono-variables soumis à des perturbations externes. Les auteurs de [Tseng et al., 2001] ont développé une loi de commande utilisant un observateur flou de Luenberger pour les systèmes non linéaires décrits par des modèles TS avec des perturbations externes et des bruits de mesure. Le problème de poursuite traité est principalement basé sur la minimisation d'un critère H_∞ . Toujours dans le cadre du formalisme TS, une commande à structure variable permettant un suivi de sortie pour les systèmes sujets à des perturbations (paramétriques et externes) est proposée dans [Zheng et al., 2002]. La poursuite H_∞ des systèmes TS caractérisés par un retard est abordée dans [Lin et al., 2006]. Cette dernière est basée sur un problème LMI à deux étapes. Dans [Mansouri et al., 2009], une loi de commande par retour de sortie de structure PDC basée sur un observateur proportionnel est proposée pour les système TS incertains et perturbés à VDM. Cette loi de commande permet au système de suivre un modèle de référence tout en atténuant l'effet des perturbations. L'approche est appliquée en simulation au contrôle de la position et de la vitesse angulaires d'un pendule inversé. Dans [Liu et al., 2010], une commande robuste adaptative est développée pour une classe de systèmes non linéaires multi-variables en utilisant les propriétés d'approximation des systèmes de logique floue et la technique du backstepping. Cette dernière est aussi mise à profit avec le lemme de Razumikhin pour la synthèse d'une commande en poursuite adaptative des systèmes non linéaires retardés dans [Chen et al., 2013]. La poursuite de sortie

des systèmes TS discrets de type-2 a été examinée dans [Liu et al, 2015]. Le contrôleur synthétisé garantit la stabilité asymptotique du système en boucle fermée et satisfait une fonction coût prédéfinie. Le correcteur proposé peut ne pas partager les mêmes variables de prémisses que le système, ce qui offre plus de flexibilité à la synthèse. Les auteurs de [Wu et al., 2016] ont traité le problème de poursuite de trajectoire de la dynamique longitudinale d'un véhicule hypersonique représenté par un modèle TS. L'algorithme de commande est principalement basé sur un observateur de perturbation utilisant une technique mixte H_2/H_∞ . Dans [Ghorbel et al., 2020], un contrôleur proportionnel de structure PDC est synthétisé à des fins de stabilisation et de poursuite. Il permet notamment de réduire le nombre de paramètres ajustables impliqués dans l'algorithme PDC standard.

5.5.1. Aperçu sur la poursuite de modèle de référence des systèmes linéaires [Bezzaoucha et al., 2015]

On considère un système représenté par le modèle linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t) \in \mathbb{R}_{n_x}, u(t) \in \mathbb{R}_{n_u} \\ y(t) = Cx(t), y(t) \in \mathbb{R}_{n_y} \end{cases} \quad (5.109)$$

et le modèle de référence

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u_r(t), x_r(t) \in \mathbb{R}_{n_x}, u_r(t) \in \mathbb{R}_{n_u} \\ y_r(t) = C x_r(t). \end{cases} \quad (5.110)$$

La synthèse de la loi de commande consiste à déterminer $u(t)$ permettant à l'état $x(t)$ (ou la sortie $y(t)$) du système (5.109) de suivre fidèlement l'état $x_r(t)$ (ou la sortie $y_r(t)$) du modèle de référence (5.110). Généralement, il existe trois approches de suivi de modèle de référence

- *Poursuite parfaite d'état (Perfect state tracking)*

Cette approche proposée à la base par [Erzberger, 1967] consiste à synthétiser une commande par retour d'état assurant une erreur de poursuite nulle entre le système et le modèle de référence satisfaisant un ensemble de conditions structurelles de correspondance (matching). La limite principale de cette méthode réside dans le choix de la structure du contrôleur. Sur ce point, on peut distinguer deux méthodes.

Dans la première méthode, la structure du contrôleur est fixée au préalable. Ensuite, les conditions structurelles de poursuite ainsi que les gains du contrôleur sont déduits. Par exemple dans [Khalil, 1992] et [Tao, 2003], la commande par retour d'état est donnée par

$$u(t) = Kx(t) + K_r u_r(t), K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, K_r \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u} \quad (5.111)$$

où K et K_r sont des matrices de gains constantes déterminées de sorte que l'état $x(t)$ du système (5.109) suive celui du modèle de référence $x_r(t)$.

A partir des équations (5.109) et (5.111), l'expression du système en boucle fermée est

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + BK_r u_r(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (5.112)$$

En comparant (5.112) à (5.110), on obtient la condition de correspondance en régime permanent suivante

$$(A + BK)^{-1}BK_r = A_r^{-1}B_r. \quad (5.113)$$

Une solution particulière de (5.113) est donnée dans [Cvetkovic-Ilic , 2008]

$$(K_r \quad K) = B^+PQ^+. \quad (5.114)$$

avec

$$P = AA_r^{-1}B_r, \quad Q = \begin{pmatrix} I \\ -A_r^{-1}B_r \end{pmatrix}, \quad (5.115)$$

et la condition de consistance

$$BB^+PQ^+Q = P. \quad (5.116)$$

En régime transitoire, la correspondance parfaite entre (5.112) et (5.110) est obtenue si

$$\begin{cases} A + BK = A_r, \\ BK_r = B_r. \end{cases} \quad (5.117)$$

Pour satisfaire les conditions de correspondance (5.117), les contraintes de rang suivantes doivent être remplies

$$\begin{cases} \text{rang}(B) = \text{rang}([B|A_r - A]), \\ \text{rang}(B) = \text{rang}([B|B_r]). \end{cases} \quad (5.118)$$

Les gains K et K_r sont alors donnés par

$$\begin{cases} K_r = B^+B_r, \\ K = B^+(A_r - A). \end{cases} \quad (5.119)$$

où B^+ est la pseudo-inverse de la matrice B .

Le fait de fixer la structure du contrôleur n'assure pas forcément l'existence d'une solution. En effet, ce choix a priori peut conduire au non-respect des conditions de rang.

La seconde méthode permet d'assurer une erreur de poursuite nulle sans imposer une structure pré-requise à la loi de commande. Par exemple, dans [Nie et Patton, 2011], l'approche adoptée est de déduire la structure du contrôleur à partir de l'erreur de poursuite $e(t) = x(t) - x_r(t)$ dont la dynamique peut être déterminée à partir des expressions (5.109) et (5.110) comme suit

$$\dot{e}(t) = A_r e(t) + (A - A_r)x(t) + Bu(t) - B_r u_r(t). \quad (5.120)$$

Afin de réduire l'équation (5.120) à $\dot{e}(t) = \tilde{A}e(t)$ (où \tilde{A} est une matrice stable), la loi de commande $u(t)$ est synthétisée de sorte que $(A - \tilde{A})x(t) + (\tilde{A} - A_r)x_r(t) + Bu(t) - B_r u_r(t)$ soit nul.

- *Poursuite approchée d'état (Approximate state tracking)*

Dans certaines situations, la poursuite parfaite d'état ne peut être obtenue. Le but de la poursuite approchée est de minimiser la différence entre $x(t)$ et $x_r(t)$ (ou $y(t)$ et $y_r(t)$). Si par exemple, l'expression (5.120) ne peut être réduite à $\dot{e}(t) = \tilde{A}e(t)$, il est néanmoins possible de trouver une commande $u(t)$ qui minimise $\tilde{x}(t) = (A - \tilde{A})x(t) + (\tilde{A} - A_r)x_r(t) + Bu(t) - B_r u_r(t)$ ou le transfert de $u(t)$ vers $\tilde{x}(t)$.

La poursuite approchée de modèle de référence est souvent basée sur la théorie de la commande optimale où il s'agit de minimiser un critère de performance fonction de l'erreur de poursuite entre l'état du système et celui du modèle de référence.

Le critère de poursuite peut être exprimé comme

$$\int_0^{t_f} e^T(t) Q e(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} u_r^T(t) u_r(t) dt, \quad (5.121)$$

où Q est une matrice de pondération définie positive et η le taux d'atténuation. La matrice de pondération Q peut être choisie de manière à privilégier certains états par rapport à d'autres. Il est évident que l'un des objectifs de contrôle est de minimiser le taux d'atténuation η .

Il est important de souligner que l'horizon de temps peut être infini ou fini et glissant. Dans ce dernier cas, l'objectif est de minimiser l'erreur de poursuite sur un horizon fini glissant. Cette procédure est bien connue sous le nom de commande prédictive où il est question de calculer la commande, à chaque instant k , assurant un coût minimal en terme d'erreur de poursuite et d'énergie de commande sur un horizon de taille N :

$$\Phi_k = \sum_{i=k}^{k+N-1} \left(\|x_{i+1} - x_{r,i+1}\|_Q^2 + \eta^2 \|u_i\|^2 \right). \quad (5.122)$$

La caractéristique commune à toutes les approches de commande prédictive est de résoudre, à chaque pas d'échantillonnage k , un problème de commande optimale à horizon fini où seul le premier élément de la séquence de commande calculée est appliqué au système. A l'instant suivant, l'horizon d'optimisation glisse d'un pas d'échantillonnage et un nouveau critère Φ_{k+1} est considéré.

- *Poursuite itérative d'état (Iterative state tracking)*

Appelée aussi poursuite par apprentissage itératif, cette approche est basée sur le calcul itératif de la commande et peut être résumée comme suit.

A la $k^{\text{ième}}$ itération, la commande $u_k(t)$ est appliquée au système

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u_r(t). \end{aligned} \quad (5.123)$$

A la prochaine itération, la commande est adaptée comme suit

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= u_k(t) + L \dot{e}_k(t), \\ e_k(t) &= x_r(t) - x_k(t). \end{aligned} \quad (5.124)$$

Dans cette approche, la séquence de commande précédente est exploitée pour calculer la prochaine commande afin d'améliorer progressivement les résultats de poursuite par un choix approprié du gain L [Chen et al., 2014].

Dans les prochaines sections, la synthèse de lois de commande PDC et non PDC permettant la poursuite de modèle de référence est présentée. A la différence de la majorité des résultats obtenus dans la littérature [Mansouri et al., 2009], [Ghorbel et al., 2020], on ne se contente pas de la convergence asymptotique de l'erreur de suivi mais nous essayons d'améliorer les performances de poursuite grâce au concept de \mathcal{D} -stabilité. Des conditions suffisantes de \mathcal{D} -stabilité de l'erreur de poursuite sont alors proposées. Elles se basent sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov poly-quadratiques permettant d'aboutir à des conditions moins conservatives que celles éventuellement obtenues par une synthèse quadratique.

5.5.2. Poursuite \mathcal{D} -stable sans observateur

5.5.2.1. Synthèse non quadratique locale

Reconsidérons le système non linéaire décrit par le modèle TS incertain et perturbé (5.4)

$$\dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h(t))x(t) + (B_h + \Delta B_h(t))u(t) + d(t). \quad (5.125)$$

L'objectif est que l'état $x(t)$ du système suive le plus fidèlement possible la trajectoire de référence $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$ générée par le modèle

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u_r(t). \quad (5.126)$$

L'entrée de référence $u_r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ est supposée être bornée et les matrices A_r et B_r sont choisies en fonction de la dynamique souhaitée en boucle fermée.

Afin de résoudre ce problème de commande, nous choisissons une loi de commande PDC avec un terme de commande anticipatrice (feedforward)

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) \left(K_j (x_r(t) - x(t)) + F_j u_r(t) \right) = K_h (x_r(t) - x(t)) + F_h u_r(t). \quad (5.127)$$

L'erreur de suivi est définie par

$$e_p(t) = x_r(t) - x(t). \quad (5.128)$$

La dynamique de l'erreur de poursuite s'exprime alors comme suit

$$\dot{e}_p(t) = A_r x_r(t) + B_r u_r(t) - A_h x(t) - \Delta A_h(t)x(t) - B_h u(t) - \Delta B_h(t)u(t) - d(t). \quad (5.129)$$

En ajoutant et en retranchant $A_h x_r$ de l'équation précédente, la dynamique de l'erreur de poursuite devient

$$\begin{aligned} \dot{e}_p(t) &= (A_h + \Delta A_h(t) - B_h K_h - \Delta B_h(t)K_h)e_p(t) + (A_r - A_h - \Delta A_h(t))x_r(t) + (B_r - B_h F_h - \Delta B_h(t)F_h)u_r(t) \\ &\quad - d(t). \end{aligned} \quad (5.130)$$

On considère alors le système augmenté

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \begin{bmatrix} \dot{e}_p \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_h + \Delta A_h(t) - B_h K_h - \Delta B_h(t)K_h & A_r - A_h - \Delta A_h(t) \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r - B_h F_h - \Delta B_h(t)F_h & -I \\ B_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ d \end{bmatrix} \\ &= \Phi_{hh} x_a(t) + \Psi_{hh} \omega(t). \end{aligned} \quad (5.131)$$

L'objectif de synthèse de loi de commande (5.127) est la recherche des matrices de gains K_j et F_j pour que :

- les valeurs propres des matrices Φ_{ij} soient contenues dans la région LMI imposée (ou \mathcal{D} -stabilité de Φ_{ij}),
- l'état augmenté $x_a(t)$ soit le moins sensible à $\omega(t)$ (minimisation du gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $x_a(t)$).

Théorème 5.5

Le système TS (5.125) est supposé lisse et $\forall k \in \{1, \dots, r\}, \exists \phi_k = \inf_{x \in \Omega} (\dot{h}_k(t)) \leq 0, \phi_k \neq -\infty$. Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.131) est localement non-quadratiquement \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $[u_r^T(t) \quad d^T(t)]^T$ vers $x_a(t)$ est borné s'il existe deux matrices symétriques définies positives Q_j et R_j , des matrices Y_j et F_j et des scalaires positifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\min_{P_j, R_j, Y_j, F_j, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} \bar{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{ijk} & * & * & * & * & 0 & 0 & * \\ (I \otimes Q_j) & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (I \otimes N_i^a Q_j) & 0 & -\lambda_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (I \otimes N_i^b Y_j) & 0 & 0 & -\lambda_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes (A_r^T - A_i^T) & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{ijk} & * & 0 & 0 \\ M^T \otimes (B_r^T - F_j^T B_i^T) & 0 & 0 & 0 & M^T \otimes B_r^T R_j & -\bar{\gamma} I & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \otimes N_i^b F_j & -\lambda_4 I & 0 \\ -M^T \otimes I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.132)$$

$$Q_k - Q_r \geq 0, \quad (5.133)$$

$$R_k - R_r \geq 0, \quad (5.134)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_{ijk} = & L \otimes Q_j + \text{Sym}(M \otimes (A_i Q_j - B_i Y_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (Q_k - Q_r))) + (\lambda_1 + \lambda_3)(M \otimes M_i^a)(M^T \otimes M_i^{aT}) + \\ & (\lambda_2 + \lambda_4)(M \otimes M_i^b)(M^T \otimes M_i^{bT}), \end{aligned} \quad (5.135)$$

$$\Gamma_{ijk} = L \otimes R_j + \text{Sym}(M \otimes (R_j A_r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (R_k - R_r))) + W_2 + \lambda_3^{-1} (I \otimes N_i^{aT} N_i^a). \quad (5.136)$$

Les matrices de gains du contrôleur sont

$$K_j = Y_j Q_j^{-1}. \quad (5.137)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (5.138)$$

Preuve. Soit la fonction de Lyapunov poly-quadratique suivante

$$V = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(e_p^T Q_i^{-1} e_p + x_r^T R_i x_r) = e_p^T Q_h^{-1} e_p + x_r^T R_h x_r, \quad Q_i = Q_i^T \geq 0, R_i = R_i^T \geq 0. \quad (5.139)$$

Sa dérivée par rapport au temps

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \text{Sym}(e_p^T (Q_h^{-1} A_h + Q_h^{-1} \Delta A_h(t) - Q_h^{-1} B_h K_h - Q_h^{-1} \Delta B_h(t) K_h) e_p + e_p^T (Q_h^{-1} A_r - Q_h^{-1} A_h - Q_h^{-1} \Delta A_h(t)) x_r + \\ & e_p^T (Q_h^{-1} B_r - Q_h^{-1} B_r F_h - Q_h^{-1} \Delta B_h(t) F_h) u_r - e_p^T Q_h^{-1} d + x_r^T R_h A_r x_r + x_r^T R_h B_r u_r) + e_p^T \dot{Q}_h^{-1} e_p + x_r^T \dot{R}_h x_r. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Le système (5.131) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert $u_r(t)$ vers $x_d(t)$ est borné si

$$\begin{aligned} L \otimes V + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V} + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V} + (I \otimes e_p^T) W_1 (I \otimes e_p) + (I \otimes x_r^T) W_2 (I \otimes x_r) - \gamma^2 (I \otimes u_r^T) (I \otimes u_r) \\ - \gamma^2 (I \otimes d^T) (I \otimes d) < 0. \end{aligned} \quad (5.141)$$

En remplaçant V et \dot{V} par leurs expressions respectives (5.139) et (5.140) dans l'inégalité (5.141) et en utilisant la propriété (3.18) du produit de Kronecker, on a

$$\begin{aligned} (I \otimes e_p^T) (L \otimes Q_h^{-1} + \text{Sym}(M \otimes Q_h^{-1} (A_h + \Delta A_h - B_h K_h - \Delta B_h K_h) + \frac{1}{2} \dot{Q}_h^{-1}) + W_1) (I \otimes e_p) + \\ (I \otimes x_r^T) (L \otimes R_h + \text{Sym}(M \otimes (R_h A_r + \frac{1}{2} \dot{R}_h)) + W_2) (I \otimes x_r) + \text{Sym}((I \otimes e_p^T) (M \otimes Q_h^{-1} (A_r - A_h - \Delta A_h)) (I \otimes x_r)) \\ + \text{Sym}((I \otimes e_p^T) (M \otimes Q_h^{-1} (B_r - B_h F_h - \Delta B_h F_h)) (I \otimes u_r)) - \text{Sym}((I \otimes e_p^T) (M \otimes Q_h^{-1}) (I \otimes d) + \\ \text{Sym}((I \otimes x_r^T) (M \otimes R_h B_r) (I \otimes u_r)) - \gamma^2 (I \otimes u_r^T) (I \otimes u_r) - \gamma^2 (I \otimes d^T) (I \otimes d) < 0. \end{aligned} \quad (5.142)$$

L'inégalité (5.142) s'écrit sous forme matricielle comme

$$X^T \begin{bmatrix} L \otimes Q_1 + \text{Sym}(M \otimes Q_h^{-1} (A_h + \Delta A_h - B_h K_h - \Delta B_h K_h) + \frac{1}{2} \dot{Q}_h^{-1}) + W_1 & * & * & * \\ M^T \otimes (A_r^T - A_h^T - \Delta A_h^T) Q_h^{-1} & L \otimes R_h + \text{Sym}(M \otimes (R_h A_r + \frac{1}{2} \dot{R}_h)) + W_2 & * & 0 \\ M^T \otimes (B_r^T - F_h^T B_h^T - F_h^T \Delta B_h^T) Q_h^{-1} & M^T \otimes B_r^T R_h & -\gamma^2 I & 0 \\ M^T \otimes Q_h^{-1} & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} X < 0, \quad (5.143)$$

avec $X^T = \begin{bmatrix} (I \otimes e_p^T) & (I \otimes x_r^T) & (I \otimes u_r^T) & (I \otimes d^T) \end{bmatrix}$.

L'inégalité (5.143) est satisfaite si

$$\begin{bmatrix} L \otimes Q_1 + \text{Sym}(M \otimes Q_h^{-1} (A_h + \Delta A_h - B_h K_h - \Delta B_h K_h) + \frac{1}{2} \dot{Q}_h^{-1}) + W_1 & * & * & * \\ M^T \otimes (A_r^T - A_h^T - \Delta A_h^T) Q_h^{-1} & L \otimes R_h + \text{Sym}(M \otimes (R_h A_r + \frac{1}{2} \dot{R}_h)) + W_2 & * & 0 \\ M^T \otimes (B_r^T - F_h^T B_h^T - F_h^T \Delta B_h^T) Q_h^{-1} & M^T \otimes B_r^T R_h & -\gamma^2 I & 0 \\ M^T \otimes Q_h^{-1} & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (5.144)$$

Séparons les termes incertains des autres termes

$$\left[\begin{array}{cccc} L \otimes Q_1 + \text{Sym}(M \otimes (Q_h^{-1}(A_h - B_h K_h) + \frac{1}{2} \dot{Q}_h^{-1})) + W_1 & * & * & * \\ M^T \otimes (A_r^T - A_h^T) Q_h^{-1} & L \otimes R_h + \text{Sym}(M \otimes (R_h A_r + \frac{1}{2} \dot{R}_h)) + W_2 & * & 0 \\ M^T \otimes (B_r^T - F_h^T B_h^T) Q_h^{-1} & M^T \otimes B_r^T R_h & -\gamma^2 I & 0 \\ M^T \otimes Q_h^{-1} & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] + \Lambda < 0. \quad (5.145)$$

La matrice Λ est donnée par

$$\Lambda = \text{Sym} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} M \otimes Q_h^{-1} M_h^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} I \otimes \Sigma_a(t) N_h^a & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -M \otimes Q_h^{-1} M_h^b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} I \otimes \Sigma_b(t) N_h^b K_h & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} -M \otimes Q_h^{-1} M_h^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & I \otimes \Sigma_a(t) N_h^a & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -M \otimes Q_h^{-1} M_h^b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & I \otimes \Sigma_b(t) N_h^b F_h & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\}. \quad (5.146)$$

L'application de la relation de Young à la matrice Λ permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Lambda &\leq \lambda_1 \left[\begin{array}{c} M \otimes Q_h^{-1} M_h^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} M^T \otimes M_h^{aT} Q_h^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \lambda_1^{-1} \left[\begin{array}{c} I \otimes N_h^{aT} \Sigma_a^T(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} I \otimes \Sigma_a(t) N_h^a & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \\ \lambda_2 &\left[\begin{array}{c} -M \otimes Q_h^{-1} M_h^b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} -M^T \otimes M_h^{bT} Q_h^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \lambda_2^{-1} \left[\begin{array}{c} I \otimes K_h^T N_h^{bT} \Sigma_b^T(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} I \otimes \Sigma_b(t) N_h^b K_h & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \\ \lambda_3 &\left[\begin{array}{c} -M \otimes Q_h^{-1} M_h^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} -M^T \otimes M_h^{aT} Q_h^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \lambda_3^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \otimes N_h^{aT} \Sigma_a^T(t) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & I \otimes \Sigma_a(t) N_h^a & 0 & 0 \end{array} \right] + \\ \lambda_4 &\left[\begin{array}{c} -M \otimes Q_h^{-1} M_h^b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} -M^T \otimes M_h^{bT} Q_h^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \lambda_4^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ I \otimes F_h^T N_h^{bT} \Sigma_b^T(t) \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & I \otimes \Sigma_b(t) N_h^b F_h & 0 \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (5.147)$$

En remplaçant Λ par (5.147) dans l'inégalité (5.145), on obtient

$$\left[\begin{array}{cccc} L \otimes Q_h^{-1} + \text{Sym}(M \otimes (Q_h^{-1} A_h - Q_h^{-1} B_h K_h + \frac{1}{2} \dot{Q}_h^{-1})) + W_1 + d_h^1 & * & * & * \\ M^T \otimes (A_r^T - A_h^T) Q_h^{-1} & L \otimes R_h + \text{Sym}(M \otimes (R_h A_r + \frac{1}{2} \dot{R}_h)) + W_2 + d_h^2 & * & 0 \\ M^T \otimes (B_r^T - F_h^T B_h^T) Q_h^{-1} & M^T \otimes B_r^T R_h & -\gamma^2 I + d_h^3 & 0 \\ -M^T \otimes Q_h^{-1} & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{array} \right] < 0. \quad (5.148)$$

où

$$\begin{aligned} d_h^1 &= (\lambda_1 + \lambda_3)(M \otimes Q_h^{-1} M_h^a)(M^T \otimes M_h^{aT} Q_h^{-1}) + (\lambda_2 + \lambda_4)(M \otimes Q_h^{-1} M_h^b)(M^T \otimes M_h^{bT} Q_h^{-1}) + \lambda_1^{-1}(I \otimes N_h^{aT} N_h^a) + \\ &\lambda_2^{-1}(I \otimes K_h^T N_h^{bT} N_h^b K_h), \\ d_h^2 &= \lambda_3^{-1}(I \otimes N_h^{aT} N_h^a), \\ d_h^3 &= \lambda_4^{-1}(I \otimes F_h^T N_h^{bT} N_h^b F_h). \end{aligned}$$

En multipliant l'inégalité (5.148) à gauche et à droite par $\text{diag}(I \otimes Q_h, I, I, I)$ et sachant que $Q_h \dot{Q}_h^{-1} Q_h = -\dot{Q}_h$, on a

$$\begin{bmatrix} \Omega_{hh} + (I \otimes Q_h) W_1 (I \otimes Q_h) + \lambda_1^{-1} (I \otimes Q_h N_h^{aT}) (I \otimes N_h^a Q_h) + \lambda_2^{-1} (I \otimes Q_h K_h^T N_h^{bT}) (I \otimes N_h^b K_h Q_h) & * & * & * \\ M^T \otimes (A_r^T - A_h^T) & \Gamma_{hh} & * & 0 \\ M^T \otimes (B_r^T - F_h^T B_h^T) & M^T \otimes B_r^T R_h & -\gamma^2 I + d_h^3 & 0 \\ -M^T \otimes I & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.149)$$

avec

$$\Omega_{hh} = L \otimes Q_h + \text{Sym}(M \otimes (A_h Q_h - B_h K_h^p Q_h - \frac{1}{2} \dot{Q}_h)) + (\lambda_1 + \lambda_3)(M M^T \otimes M_h^a M_h^{aT}) + (\lambda_2 + \lambda_4)(M M^T \otimes M_h^b M_h^{bT}), \quad (5.150)$$

$$\Gamma_{hh} = L \otimes R_h + \text{Sym}(M \otimes (R_h A_r + \frac{1}{2} \dot{R}_h)) + W_2 + d_h^2. \quad (5.151)$$

On considère la propriété suivante de la dérivée des fonctions d'activation

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k(z(t)) = 0. \quad (5.152)$$

A partir de (5.152), on peut écrire

$$\dot{h}_r(z(t)) = -\sum_{k=1}^{r-1} \dot{h}_k(z(t)). \quad (5.153)$$

Les matrices Ω_{hh} et Γ_{hh} s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \Omega_{hh} &= L \otimes Q_h + \text{Sym}(M \otimes (A_h Q_h - B_h K_h^p Q_h - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \dot{h}_k(z)(Q_k - Q_r))) + (\lambda_1 + \lambda_3)(M M^T \otimes M_h^a M_h^{aT}) + \\ &(\lambda_2 + \lambda_4)(M M^T \otimes M_h^b M_h^{bT}), \end{aligned} \quad (5.154)$$

$$\Gamma_{hh} = L \otimes R_h + \text{Sym}(M \otimes (R_h A_r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \dot{h}_k(z)(R_k - R_r))) + W_2 + d_h^2. \quad (5.155)$$

Sachant que $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$, en appliquant le complément de Schur à l'inégalité (5.149) et en considérant les changements de variables $K_j Q_j = Y_j$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$, on aboutit aux contraintes (5.132)-(5.134) du Théorème 5.5. ■

Remarque 5.2

Nous pouvons remarquer que la \mathcal{D} -stabilité du système en boucle fermée (5.131) requière celle des matrices $A_h + \Delta A_h(t) - B_h K_h - \Delta B_h(t) K_h$ et A_r . Par conséquent, le modèle de référence est choisi de sorte qu'il soit \mathcal{D} -stable (i.e. les valeurs propres de A_r appartiennent à la région LMI imposée).

Exemple 5.5 : Application du Théorème 5.5 à un pendule inversé

Afin d'illustrer l'approche proposée, on considère la poursuite de la position et de la vitesse angulaire d'un pendule inversé sur chariot (Figure 5.19).

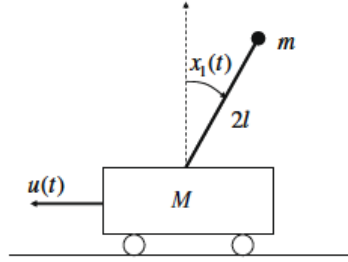


Fig.5.19. Pendule inversé sur chariot.

Le modèle TS du pendule inversé est donné par [Mansouri et al., 2009]

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) \left((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + B_i u(t) + d(t) \right), \quad (5.156)$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(M+m)g}{\frac{l}{3}(4M+m)} & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(M+m)g}{\frac{l}{3}(4M+m)} \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l}{3(4M+m)} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l}{3(4M+m)} \cos(\theta_0) \end{bmatrix},$$

$$M_1^a = \begin{bmatrix} 0 \\ -ml \\ \frac{l}{3}(4M+m) \end{bmatrix}, M_2^a = \begin{bmatrix} 0 \\ -ml \frac{\sin(\theta_0)\cos(\theta_0)}{\theta_0} \\ \frac{l}{3}(4M+m) \end{bmatrix}, N_1^a = N_2^a = [0, 0, 1], \theta_0 = \frac{22\pi}{45}$$

$$h_1(x_1) = \frac{\cos(x_1) - \cos(\theta_0)}{1 - \cos(\theta_0)}, h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1).$$

$x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont respectivement la position et la vitesse angulaire du pendule, $u(t)$ est la force appliquée au chariot, $m=0,1\text{kg}$ et $M=1\text{kg}$ sont respectivement les masses du pendule et du chariot, $2l=1\text{m}$ est la longueur du pendule et $g=9,8\text{ m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur. Le

modèle de référence choisi est : $A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Les signaux de référence $u_r(t)$ et de perturbation $d(t)$ sont représentés dans la Figure 5.20. Les conditions initiales du système sont $x(0)=[0,05\ 0]^T$.

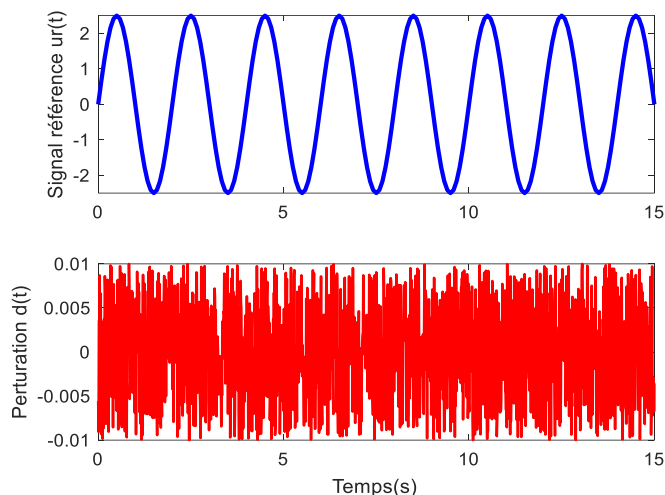


Fig.5.20. Signal de référence $u_r(t)$ et perturbation $d(t)$.

Nous considérons une région LMI parabolique (voir Figure 5.21)

$$\mathcal{D} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}: y^2 < -a^2x\}, \tag{5.157}$$

où a peut être considéré comme un paramètre d'amortissement.

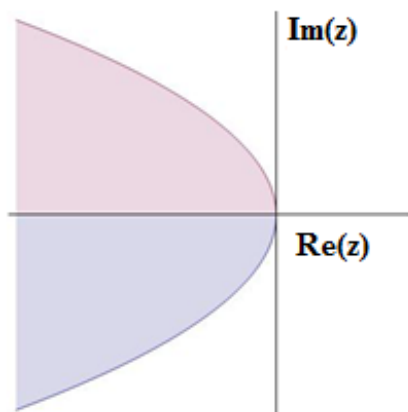


Fig.5.21. Région parabolique $y^2=-a^2x$.

Les matrices qui définissent cette région LMI sont

$$L = \begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}. \tag{5.158}$$

Influence du paramètre a

Les solutions numériques des contraintes LMI (5.132-5.134) pour $a=\{1;5;15;55\}$ et $\phi = 0,5$ sont résumées dans le tableau 5.3.

| a | 1 | 5 | 15 | 55 |
|----------|-------------------|-------------------|----------------------------|----------------------------|
| K_1 | [-325,43 -112,48] | [-479,65 -178,11] | [-883,06 -497,50] | $10^3 \cdot [-2,2 -3,16]$ |
| K_2 | [-334,66 -118,47] | [-774,11 -258,73] | $10^3 \cdot [-2,16 -0,92]$ | $10^3 \cdot [-8,76 -6,07]$ |
| F_1 | -0.65 | 0,13 | 0,28 | 0,445 |
| F_2 | -0.54 | 0,18 | 0,37 | 0,49 |
| γ | 0,044 | 0,02 | 0,0155 | 0,012 |

Tableau 5.3. Solutions du théorème 5.5 pour différentes valeurs de a .

La figure 5.22 représente les performances de poursuite de la position et de la vitesse angulaire pour $a=15$.

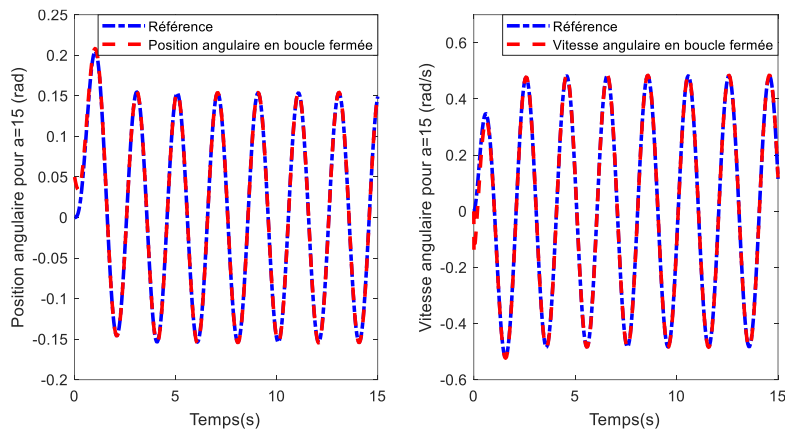


Fig.5.22. Performances de poursuite de la position et de la vitesse angulaires pour $a=15$ (Théorème 5.5).

Les erreurs de poursuite, le signal de commande et la distribution des valeurs propres des matrices $(A_i + \Delta A_i - B_i K_j)$ sont illustrés par les figures 5.23-5.25 pour différentes valeurs de a .

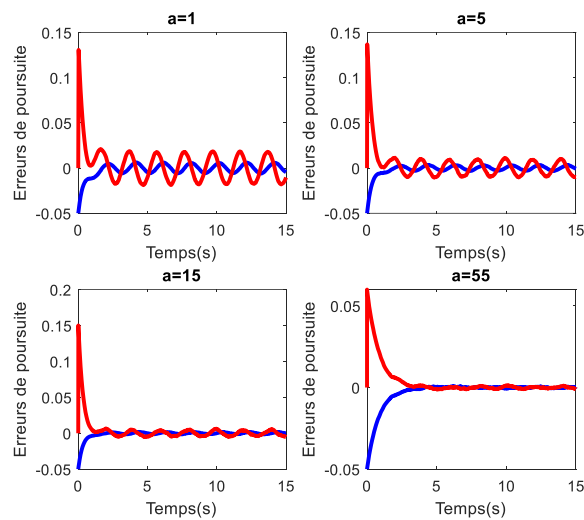


Fig.5.23. Erreurs de poursuite pour différentes valeurs de a (Théorème 5.5).

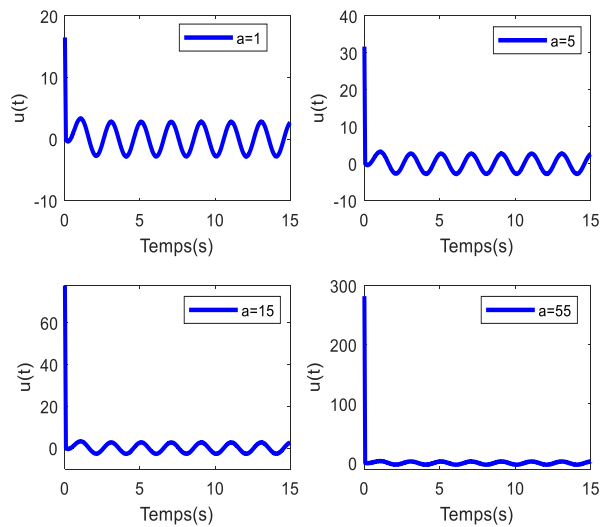


Fig.5.24. Signal de commande $u(t)$ pour différentes valeurs de a (Théorème 5.5).

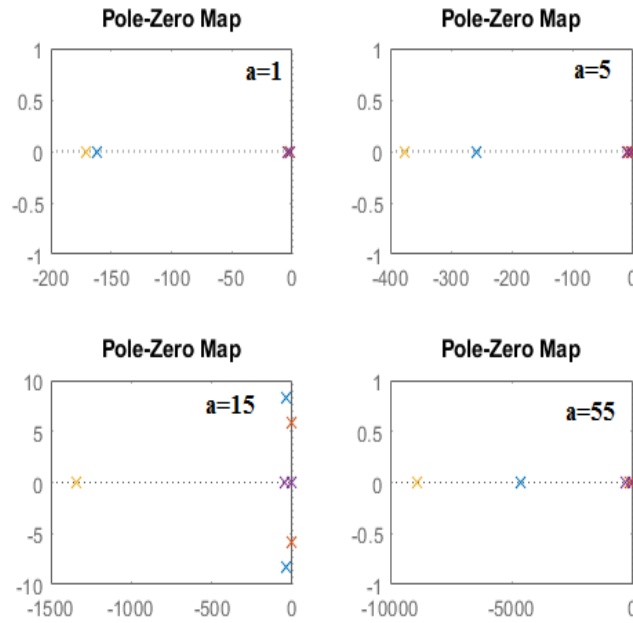


Fig.5.25. Distribution des valeurs propres des matrices $(A_i + \Delta A_i - B_i K_j)$ pour différentes valeurs de a (Théorème 5.5).

D'après les résultats de simulation, les états du système en boucle fermée suivent les signaux de référence de manière satisfaisante en dépit de la présence de la perturbation et des incertitudes. L'augmentation du paramètre a conduit à

- une diminution du taux d'atténuation,
- une diminution de l'erreur de poursuite,
- une augmentation de l'énergie de commande (la valeur initiale du signal de commande augmente),
- éloignement d'une partie des valeurs propres des matrices locales $(A_i + \Delta A_i(t) - B_i K_j - \Delta B_i(t) K_j)$ de l'axe imaginaire.

5.5.2.2. Synthèse non quadratique globale

Dans le cadre de la synthèse non quadratique globale, nous proposons la loi de commande non-PDC μ -retardée suivante

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t-\mu)) v_k(z(t)) [K_{ijk} \left(\sum_{l=1}^r v_l(z(t)) P_l \right)^{-1} (x_r(t) - x(t)) + F_{ijk} u_r(t)]. \quad (5.159)$$

Cette dernière peut aussi s'écrire comme

$$u(t) = K_{hh^-v} P_v^{-1} e_p(t) + F_{hh^-v} u_r(t). \quad (5.160)$$

Rappelons que les fonctions d'activation $v_i(z(t))$ sont données par

$$v_i(z(t)) = \frac{1}{\mu} \int_{t-\mu}^t h_i(z(\tau)) d\tau, \quad \mu > 0. \quad (5.161)$$

La dynamique de l'erreur de poursuite $e_p(t)$ s'exprime alors de la manière suivante

$$\begin{aligned} \dot{e}_p(t) = & (A_h + \Delta A_h(t) - (B_h + \Delta B_h(t))K_{hh^{-v}}P_v^{-1})e_p(t) + (A_r - A_h - \Delta A_h(t))x_r(t) + (B_r - (B_h + \Delta B_h(t))F_{hh^{-v}})u_r(t) \\ & - d(t). \end{aligned} \quad (5.162)$$

Afin d'énoncer le Théorème 5.6, nous considérons le système augmenté

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \begin{bmatrix} \dot{e}_p \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_h + \Delta A_h(t) - (B_h + \Delta B_h(t))K_{hh^{-v}}P_v^{-1} & A_r - A_h - \Delta A_h(t) \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r - (B_h + \Delta B_h(t))F_{hh^{-v}} & -I \\ B_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ d \end{bmatrix} \\ &= \Phi_{hh^{-v}}x_a(t) + \Psi_{hh^{-v}}\omega(t). \end{aligned} \quad (5.163)$$

Théorème 5.6

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.163) est globalement non-quadratiquement \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $[u_r^T(t) \ d^T(t)]^T$ vers $x_a(t)$ est borné s'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j, P_k, P_l, Q_j, Q_k, Q_l$, des matrices F_{jkl}, K_{jkl} et des scalaires positifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} & \min_{P_j, P_k, P_l, Q_j, Q_k, Q_l, K_{jkl}, F_{jkl}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \bar{\gamma}} \\ & \begin{bmatrix} \Omega'_{ijkl} & * & * & * & * & 0 & 0 & * \\ (I \otimes P_l) & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (I \otimes N_i^a P_l) & 0 & -\lambda_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (I \otimes N_i^b K_{jkl}) & 0 & 0 & -\lambda_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes (A_r^T - A_i^T) & 0 & 0 & 0 & \Gamma'_{ijkl} & * & 0 & 0 \\ M^T \otimes (B_r^T - F_{jkl}^T B_i^T) & 0 & 0 & 0 & M^T \otimes B_r^T Q_l & -\bar{\gamma} I & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \otimes N_i^b F_{jkl} & -\lambda_4 I & 0 \\ -M^T \otimes I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (5.164)$$

avec

$$\Omega'_{ijkl} = L \otimes P_l + \text{Sym}(M \otimes (A_i P_l - B_i K_{jkl} - \frac{1}{2\mu}(P_j - P_k))) + (\lambda_1 + \lambda_3)(M \otimes M_i^a)(M^T \otimes M_i^{aT}) + \quad (5.165)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)(M \otimes M_i^b)(M^T \otimes M_i^{bT}),$$

$$\Gamma'_{ijkl} = L \otimes Q_l + \text{Sym}(M \otimes (Q_l A_r + \frac{1}{2\mu}(Q_j - Q_k))) + W_2 + \lambda_3^{-1}(I \otimes N_i^{aT} N_i^a). \quad (5.166)$$

Le taux d'atténuation est

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (5.167)$$

Preuve. La démonstration du Théorème 5.6 est similaire à celle du Théorème 5.5 en considérant la fonction de Lyapunov candidate

$$V = e_p^T(t)P_v^{-1}e_p(t) + x_r^T(t)Q_v x_r(t), \quad P_i = P_i^T \geq 0, Q_i = Q_i^T \geq 0, \quad (5.168)$$

et en prenant en compte la propriété suivante de la fonction d'activation $v_i(z(t))$

$$\dot{v}_i(z(t)) = \frac{1}{\mu} (h_i(z(t)) - h_i(z(t - \mu))), \quad \mu > 0. \quad (5.169)$$

■

Exemple 5.6 : Application du Théorème 5.6 à un pendule inversé

Nous appliquons les contraintes de \mathcal{D} -stabilité du Théorème 5.6 au pendule inversé considéré dans l'exemple 5.5. Les résultats numériques correspondants pour $a=35$, $\mu=0.1$ et $\gamma=0.1$ sont

$$\begin{aligned} K_{111} &= 10^4 \cdot [-0.0759 \quad -4.2230], K_{112} = 10^4 \cdot [-0.0686 \quad -4.3338], K_{121} = 10^4 \cdot [-0.0776 \quad -3.6560], \\ K_{122} &= 10^4 \cdot [-0.0701 \quad -3.7545], K_{211} = 10^4 \cdot [-0.0741 \quad -4.9062], K_{212} = 10^4 \cdot [-0.0670 \quad -5.0360], \\ K_{221} &= 10^4 \cdot [-0.0759 \quad -4.2230], K_{222} = 10^4 \cdot [-0.0686 \quad -4.3338], F_{111} = F_{221} = 0.3045, \\ F_{112} &= F_{222} = 0.2833, F_{121} = 0.4027, F_{122} = 0.3808, F_{211} = 0.2016, F_{212} = 0.1822, \end{aligned}$$

Remarque 5.3

Nous avons constaté que la minimisation du taux d'atténuation aboutissait à des matrices de gains du contrôleur de valeurs assez élevées (de l'ordre de 10^6). Raison pour laquelle, nous avons fixé ce taux à 0.1 pour avoir des valeurs raisonnables.

Les performances de poursuite de la position et la vitesse angulaires sont représentées par les figure 5.26-5.27.

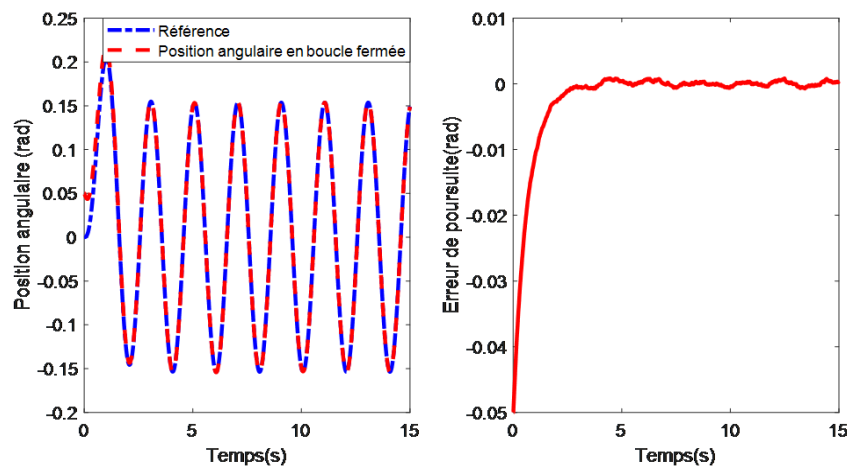


Fig.5.26. Position angulaire en boucle fermée et son erreur de poursuite (Théorème 5.6).

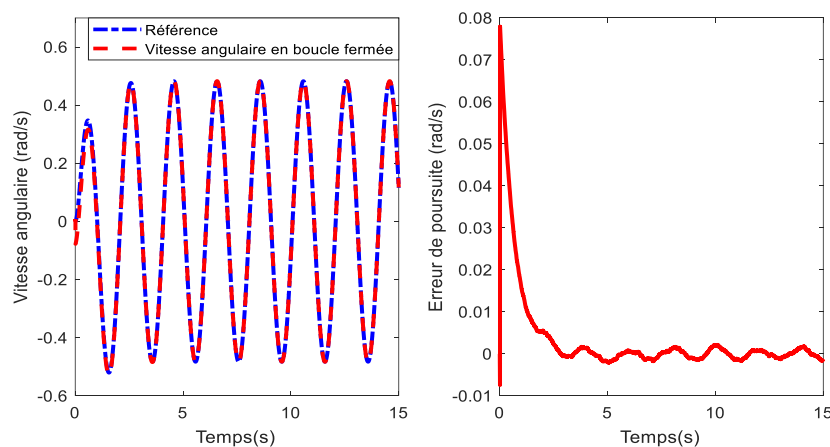


Fig.5.27. Vitesse angulaire, en boucle fermée et son erreur de poursuite (Théorème 5.6).

Le signal de commande et la distribution des valeurs propres des matrices $\left(A_i + \Delta A_i - B_i K_{jkl} \left(\sum_{l=1}^2 v_l(z(t)) P_l \right)^{-1} \right)$ sont représentés par les figures 5.28-5.29.

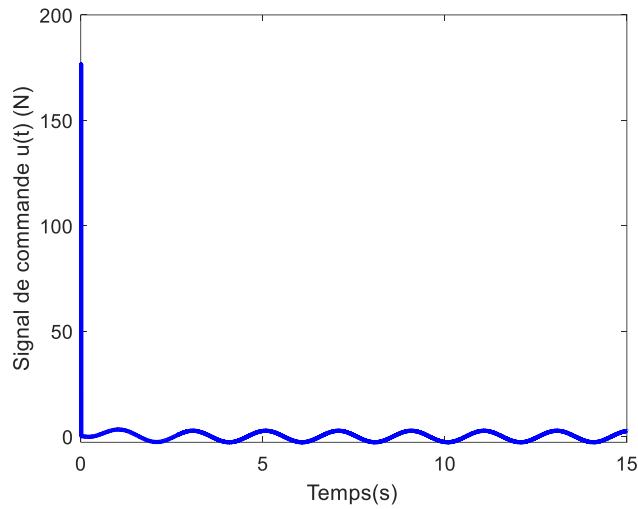


Fig.5.28. Signal de commande $u(t)$ (Théorème 5.6).

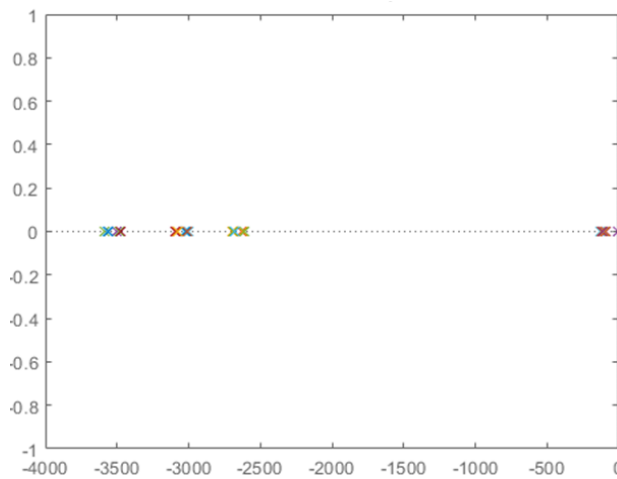


Fig.5.29. Distribution des valeurs propres des matrices $\left(A_i + \Delta A_i - B_i K_{jkl} \left(\sum_{l=1}^2 v_l(z(t)) P_l \right)^{-1} \right)$.

Les résultats de simulation obtenus montrent clairement l'efficacité de la commande basée sur les contraintes de \mathcal{D} -stabilité à assurer un bon suivi des trajectoires de référence.

5.5.3. Poursuite \mathcal{D} -stable avec observateur : Synthèse non quadratique locale

Nous supposons maintenant que certains états du système ne sont pas accessibles à la mesure, il est donc nécessaire d'utiliser un observateur afin de les estimer

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) = A_h x(t) + B_h u(t) + L_h (y(t) - \hat{y}(t)), \\ y(t) = C \hat{x}(t). \end{cases} \quad (5.170)$$

Dans ce cas, la loi de commande proposée devient

$$u(t) = K_h(x_r(t) - \hat{x}(t)) + F_h u_r(t). \quad (5.171)$$

Les dynamiques des erreurs de poursuite et d'estimation d'état sont respectivement données par

$$\begin{aligned} \dot{e}_p(t) &= (A_h - \Delta A_h(t) - (B_h + \Delta B_h(t))K_h)e_p(t) - (B_h + \Delta B_h(t))K_h e_x(t) + (A_r - A_h - \Delta A_h(t))x_r(t) \\ &\quad (B_r - (B_h + \Delta B_h(t))F_h)u_r(t) - d(t), \end{aligned} \quad (5.172)$$

$$\dot{e}_x(t) = (A_h - L_h C + \Delta B_h(t)K_h)e_x(t) + (\Delta B_h(t)K_h - \Delta A_h(t))e_p(t) + \Delta A_h(t)x_r(t) + \Delta B_h(t)F_h u_r(t) + d(t). \quad (5.173)$$

Le système augmenté suivant est alors considéré

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_p \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_h - L_h C + \Delta B_h(t)K_h & \Delta B_h(t)K_h - \Delta A_h(t) & \Delta A_h(t) \\ -(B_h + \Delta B_h(t))K_h & A_h - \Delta A_h(t) - (B_h + \Delta B_h(t))K_h & (B_h + \Delta B_h(t))K_h \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_p \\ x_r \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \Delta B_h(t)F_h & I \\ B_r - (B_h + \Delta B_h(t))F_h & -I \\ B_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ d \end{bmatrix} = \Phi_{hh} x_a(t) + \Psi_{hh} \omega(t). \end{aligned} \quad (5.174)$$

Théorème 5.7

Le système TS (5.125) est supposé lisse et $\forall k \in \{1, \dots, r\}, \exists \phi_k = \inf_{x \in \Omega} (\dot{h}_k(t)) \leq 0, \phi_k \neq -\infty$. Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.174) est localement non-quadratiquement \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $[u_r^T(t) \ d^T(t)]^T$ vers $x_a(t)$ est borné s'il existe trois matrices symétriques définies positives P_j, Q_j et R_j , des matrices X_i, Y_j et F_j et des scalaires positifs λ_1 à λ_{10} et $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\min_{P_j, Q_j, R_j, Y_j, F_j, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}} \bar{\gamma}$$

5 Commandes \mathcal{D} -stables des systèmes TS à VDM

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
 -2\alpha(I \otimes Q_j) & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes N_i^b Y_j & -(\lambda_1^{-1} + \lambda_6^{-1})^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2\alpha(I \otimes Q_j) & 0 & 0 & 0 & * \\
 \alpha I & 0 & 0 & \Omega_{ik}^1 & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & M^T \otimes M_i^{aT} P_i & -(\lambda_3 + \lambda_4)^{-1} I & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & M^T \otimes M_i^{bT} P_i & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5)^{-1} I & 0 \\
 0 & 0 & \alpha I & M^T \otimes P_i & 0 & 0 & -\bar{\gamma} I \\
 M \otimes B_i Y_j & 0 & -M \otimes Q_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \Omega_{ijk}^2 & * & * & * & * & * & 0 \\
 I \otimes Q_j & -W_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes N_i^b Y_j & 0 & -(\lambda_2^{-1} + \lambda_8^{-1})^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes N_i^a Q_j & 0 & 0 & -(\lambda_3^{-1} + \lambda_7^{-1})^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes (A_r^T - A_i^T) & 0 & 0 & 0 & \Omega_{ijk}^3 & * & 0 \\
 M^T \otimes (B_r^T - F_j^T B_i^T) & 0 & 0 & 0 & M^T \otimes B_r^T R_j & -\bar{\gamma} I & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \otimes N_i^b F_j & -(\lambda_5 + \lambda_{10})^{-1} I
 \end{array} \right] < 0, \tag{5.175}$$

$$P_k - P_r \geq 0, \tag{5.176}$$

$$Q_k - Q_r \geq 0, \tag{5.177}$$

$$R_k - R_r \geq 0, \tag{5.178}$$

avec

$$\Omega_{ik}^1 = L \otimes P_i + \text{Sym}(M \otimes (P_i A_i - X_i C + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_k - P_r))) + W_1, \tag{5.179}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{ijk}^2 = & L \otimes Q_j + \text{Sym}(M \otimes (A_i Q_j - B_i Y_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (Q_k - Q_r))) + (\lambda_7 + \lambda_9)(M \otimes M_i^a)(M^T \otimes M_i^{aT}) + \\ & (\lambda_6 + \lambda_8 + \lambda_{10})(M \otimes M_i^b)(M^T \otimes M_i^{bT}), \end{aligned} \tag{5.180}$$

$$\Omega_{ijk}^3 = L \otimes R_j + \text{Sym}(M \otimes (R_j A_r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (R_k - R_r))) + W_3 + (\lambda_4^{-1} + \lambda_9^{-1})(I \otimes N_i^{aT} N_i^a). \tag{5.181}$$

Les matrices de gains de l'observateur sont

$$L_i = P_i^{-1} X_i. \quad (5.182)$$

Les matrices de gain du contrôleur sont

$$K_j = Y_j Q_j^{-1}. \quad (5.183)$$

Le taux d'atténuation est donné par

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (5.184)$$

Preuve. La démonstration du Théorème 5.7 est basée sur la fonction de Lyapunov polyquadratique

$$V = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(e_x^T P_i e_x + e_p^T Q_i^{-1} e_p + x_r^T R_i x_r) = e_x^T P_h e_x + e_p^T Q_h^{-1} e_p + x_r^T R_h x_r \quad (5.185)$$

et la condition de synthèse

$$\begin{aligned} L \otimes V + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V} + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V} + (I \otimes e_x^T) W_1 (I \otimes e_x) + (I \otimes e_p^T) W_2 (I \otimes e_p) + (I \otimes x_r^T) W_3 (I \otimes x_r) \\ - \gamma^2 (I \otimes u_r^T) (I \otimes u_r) - \gamma^2 (I \otimes d^T) (I \otimes d) < 0 \end{aligned} \quad (5.186)$$

En suivant les mêmes étapes (5.142)-(5.148), on aboutit à l'inégalité suivante

$$\left[\begin{array}{ccc} L \otimes P_h + \text{Sym}(M \otimes (P_h A_h - P_h L_h C + \frac{1}{2} \dot{P}_h)) + W_1 + d_h^1 & * & \\ M \otimes Q_h^{-1} B_h K_h & L \otimes Q_h^{-1} + \text{Sym}(M \otimes (Q_h^{-1} A_h - Q_h^{-1} B_h K_h + \frac{1}{2} \dot{Q}_h^{-1})) + W_2 + d_h^2 & \\ 0 & M^T \otimes (A_r^T - A_h^T) Q_h^{-1} & \\ M^T \otimes P_h & - M^T \otimes Q_h^{-1} & \\ 0 & M^T \otimes (B_r^T - F_h^T B_h^T) Q_h^{-1} & \\ 0 & * & 0 \\ * & * & * \\ L \otimes R_h + \text{Sym}(M \otimes (R_h A_h + \frac{1}{2} \dot{R}_h^{-1})) + W_3 + d_h^3 & 0 & * \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ M^T \otimes B_r^T R_h & 0 & -\gamma^2 I + d_h^4 \end{array} \right] < 0 \quad (5.187)$$

avec

$$\begin{aligned} d_h^1 = (\lambda_3 + \lambda_4)(M \otimes P_h M_h^a)(M^T \otimes M_h^{aT} P_h) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5)(M \otimes P_h M_h^b)(M^T \otimes M_h^{bT} P_h) + \\ (\lambda_1^{-1} + \lambda_6^{-1})(I \otimes K_h^T N_h^{bT})(I \otimes N_h^b K_h) \end{aligned} \quad (5.188)$$

$$d_h^2 = (\lambda_7 + \lambda_9)(M \otimes Q_h^{-1} M_h^a)(M^T \otimes M_h^{aT} Q_h^{-1}) + (\lambda_6 + \lambda_8 + \lambda_{10})(M \otimes Q_h^{-1} M_h^b)(M^T \otimes M_h^{bT} Q_h^{-1}) + (\lambda_3^{-1} + \lambda_7^{-1})(I \otimes N_h^{aT} N_h^a) + (\lambda_2^{-1} + \lambda_8^{-1})(I \otimes K_h^T N_h^{bT})(I \otimes N_h^b K_h) \quad (5.189)$$

$$d_h^3 = (\lambda_4^{-1} + \lambda_9^{-1})(I \otimes N_h^{aT} N_h^a) \quad (5.190)$$

$$d_h^4 = (\lambda_5^{-1} + \lambda_{10}^{-1})(I \otimes F_h^T N_h^{bT})(I \otimes N_h^b F_h) \quad (5.191)$$

Afin de réarranger les éléments de l'inégalité (5.187), nous appliquons une transformation par

congruence avec la matrice $N = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$. Par conséquent, l'inégalité (5.187) est

équivalente à

$$\begin{bmatrix} L \otimes P_h + \text{Sym}(M \otimes (P_h A_h - P_h L_h C + \frac{1}{2} \dot{P}_h)) + W_1 + d_h^1 & * & * \\ M^T \otimes P_h & -\gamma^2 I & * \\ M \otimes Q_h^{-1} B_h K_h & -M^T \otimes Q_h^{-1} & L \otimes Q_h^{-1} + \text{Sym}(M \otimes (Q_h^{-1} A_h - Q_h^{-1} B_h K_h + \frac{1}{2} \dot{Q}_h^{-1})) + W_2 + d_h^2 \\ 0 & 0 & M^T \otimes (A_r^T - A_h^T) Q_h^{-1} \\ 0 & 0 & M^T \otimes (B_r^T - F_h^T B_h^T) Q_h^{-1} \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \\ L \otimes R_h + \text{Sym}(M \otimes (R_h A_h + \frac{1}{2} \dot{R}_h^{-1})) + W_3 + d_h^3 & * & * \\ M^T \otimes B_r^T R_h & -\gamma^2 I + d_h^4 & * \end{bmatrix} < 0 \quad (5.192)$$

On multiplie à gauche et à droite l'inégalité précédente par $\text{diag}(I \otimes Q_h, I \otimes Q_h, I \otimes Q_h, I, I)$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I \otimes Q_h & 0 \\ 0 & I \otimes Q_h \end{bmatrix} \Omega_h^1 \begin{bmatrix} I \otimes Q_h & 0 \\ 0 & I \otimes Q_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\lambda_1^{-1} + \lambda_6^{-1})(I \otimes Q_h K_h^T N_h^{bT})(I \otimes N_h^b K_h Q_h) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & * & 0 & 0 \\ & * & 0 & 0 \\ \hline M \otimes B_h K_h Q_h & -M \otimes Q_h & \Omega_{hh}^2 & * & * \\ 0 & 0 & M^T \otimes (A_r^T - A_h^T) & \Omega_{hh}^3 & * \\ 0 & 0 & M^T \otimes (B_r^T - F_h^T B_h^T) & M^T \otimes B_r^T R_h & -\gamma^2 I + d_h^4 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.193)$$

où

$$\Omega_h^1 = \begin{bmatrix} L \otimes P_h + \text{Sym}(M \otimes (P_h A_h - P_h L_h C + \frac{1}{2} \dot{P}_h)) + W_1 + (\lambda_3 + \lambda_4)(M \otimes P_h M_h^a)(M^T \otimes M_h^{aT} P_h) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5)(M \otimes P_h M_h^b)(M^T \otimes M_h^{bT} P_h) & * \\ M^T \otimes P_h & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (5.194)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{hh}^2 = & L \otimes Q_h + \text{Sym}(M \otimes (A_h Q_h - B_h K_h Q_h - \frac{1}{2} \dot{Q}_h)) + (I \otimes Q_h) W_2 (I \otimes Q_h) + (\lambda_2^{-1} + \lambda_8^{-1}) (I \otimes Q_h K_h^T N_h^{bT}) (I \otimes N_h^b K_h Q_h) + \\ & (\lambda_3^{-1} + \lambda_7^{-1}) (I \otimes Q_h N_h^{aT} N_h^a Q_h) + (\lambda_7 + \lambda_9) (M \otimes M_h^a) (M^T \otimes M_h^{aT}) + (\lambda_6 + \lambda_8 + \lambda_{10}) (M \otimes M_h^b) (M^T \otimes M_h^{bT}) \end{aligned} \quad (5.195)$$

$$\Omega_{hh}^3 = L \otimes R_h + \text{He}(M \otimes (R_h A_h + \frac{1}{2} \dot{R}_h)) + W_3 + d_h^3 \quad (5.196)$$

Lemme 5.7 [Mansouri et al., 2009]

Soit une matrice $\Gamma < 0$, une matrice X de dimension appropriée tels que $X^T \Gamma X \leq 0$, et un scalaire α , l'inégalité suivante est satisfaite

$$X^T \Gamma X \leq -\alpha \text{Sym}(X) - \alpha^2 \Gamma^{-1} \quad (5.197)$$

Nous appliquons le Lemme 5.7 à l'élément (1,1) de la matrice de l'inégalité (5.193), ce qui donne

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I \otimes Q_h & 0 \\ 0 & I \otimes Q_h \end{bmatrix} \Omega_h^1 \begin{bmatrix} I \otimes Q_h & 0 \\ 0 & I \otimes Q_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\lambda_1^{-1} + \lambda_6^{-1}) (I \otimes Q_h K_h^T N_h^{bT}) (I \otimes N_h^b K_h Q_h) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq -2\alpha \begin{bmatrix} I \otimes Q_h & 0 \\ 0 & I \otimes Q_h \end{bmatrix} - \alpha^2 (\Omega_h^1)^{-1} \\ & + \begin{bmatrix} (\lambda_1^{-1} + \lambda_6^{-1}) (I \otimes Q_h K_h^T N_h^{bT}) (I \otimes N_h^b K_h Q_h) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha (I \otimes Q_h) + (\lambda_1^{-1} + \lambda_6^{-1}) (I \otimes Q_h K_h^T N_h^{bT}) (I \otimes N_h^b K_h Q_h) & 0 \\ 0 & -2\alpha (I \otimes Q_h) \end{bmatrix} - \alpha^2 (\Omega_h^1)^{-1} \end{aligned} \quad (5.198)$$

L'application du complément de Schur à (5.198) permet d'écrire

$$\begin{bmatrix} -2\alpha (I \otimes Q_h) + (\lambda_1^{-1} + \lambda_6^{-1}) (I \otimes Q_h K_h^T N_h^{bT}) (I \otimes N_h^b K_h Q_h) & 0 & * & 0 \\ 0 & -2\alpha (I \otimes Q_h) & 0 & * \\ \alpha I & 0 & \Omega_h^1 & * \\ 0 & \alpha I & M^T \otimes P_h & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.199)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_h^1 = & L \otimes P_h + \text{Sym}(M \otimes (P_h A_h - P_h L_h C + \frac{1}{2} \dot{P}_h)) + W_1 + (\lambda_3 + \lambda_4) (M \otimes P_h M_h^a) (M^T \otimes M_h^{aT} P_h) + \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5) (M \otimes P_h M_h^b) (M^T \otimes M_h^{bT} P_h) \end{aligned} \quad (5.200)$$

La substitution de (5.199) dans (5.193) permet d'obtenir ce qui suit

$$\begin{bmatrix} -2\alpha(I \otimes Q_h) + (\lambda_1^{-1} + \lambda_6^{-1})(I \otimes Q_h K_h^T N_h^{bT})(I \otimes N_h^b K_h Q_h) & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha(I \otimes Q_h) & 0 & * & * & 0 & 0 \\ \alpha I & 0 & \Omega_h^1 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha I & M^T \otimes P_h & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ M \otimes B_h K_h Q_h & -M \otimes Q_h & 0 & 0 & \Omega_{hh}^2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^T \otimes (A_r^T - A_h^T) & \Omega_{hh}^3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^T \otimes (B_r^T - F_h^T B_h^T) & M^T \otimes B_r^T R_h & -\gamma^2 I + d_h^4 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.201)$$

Par la suite, on prend en compte l'égalité (5.153) et la propriété $|\dot{h}_k(z(t))| \leq \phi_k$ et on applique le complément de Schur à l'inégalité (5.201).

La contrainte (5.175) est enfin obtenue en considérant les changements de variables $X_i = P_i L_i, Y_j = K_j Q_j$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$. ■

Exemple 5.7 : Application du Théorème 5.7 à un pendule inversé

Dans cet exemple, on considère la région LMI de la figure 5.15. La résolution des contraintes LMI (5.175)-(5.178) pour $\theta = \pi/3, \beta = 0.5$ et $s = 5 \cdot 10^3, \alpha = 5 \cdot 10^4$ et $\varphi = 15$ mène aux résultats suivants :

$$K_1 = 10^3 \cdot [-5.6614 \quad -3.1864], K_2 = 10^3 \cdot [-0.4404 \quad -2.6113], F_1 = -0.1677, F_2 = 0.0426, L_1 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.4054 \\ 1.9612 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.3954 \\ 1.9291 \end{bmatrix}, \gamma = 1.2216.$$

Les figures 5.30-5.36 illustrent les résultats de simulation de la méthode proposée. Les conditions initiales sont $[0, 0, 5]^T$ pour le système et $[0 \ 0]^T$ pour l'observateur.

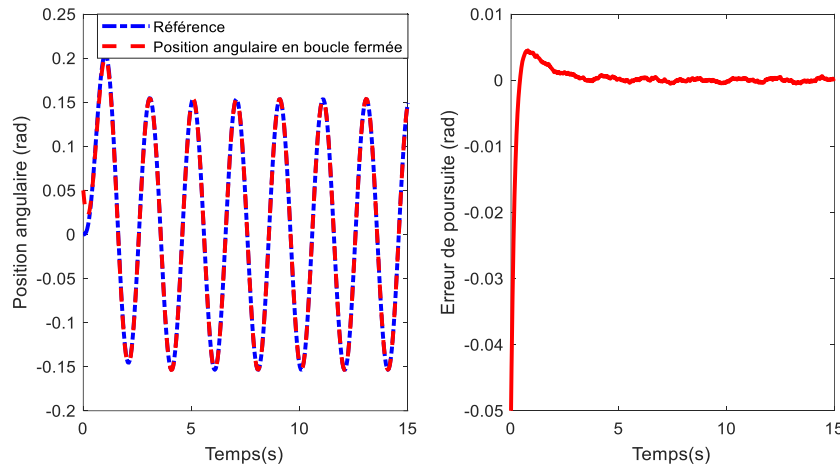


Fig.5.30. Performances de poursuite relative à la position angulaire (Théorème 5.7)

A l'examen des figures présentées plus haut, la commande synthétisée permet un suivi satisfaisant des signaux de référence, l'observateur fournit une bonne estimation des états en boucle fermée et les contraintes de \mathcal{D} -stabilité sont vérifiées.

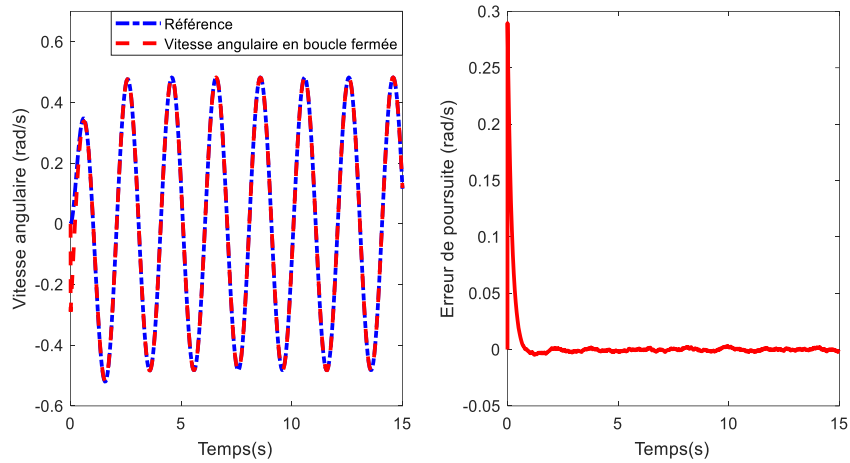


Fig.5.31. Performances de poursuite relative à la vitesse angulaire (Théorème 5.7)

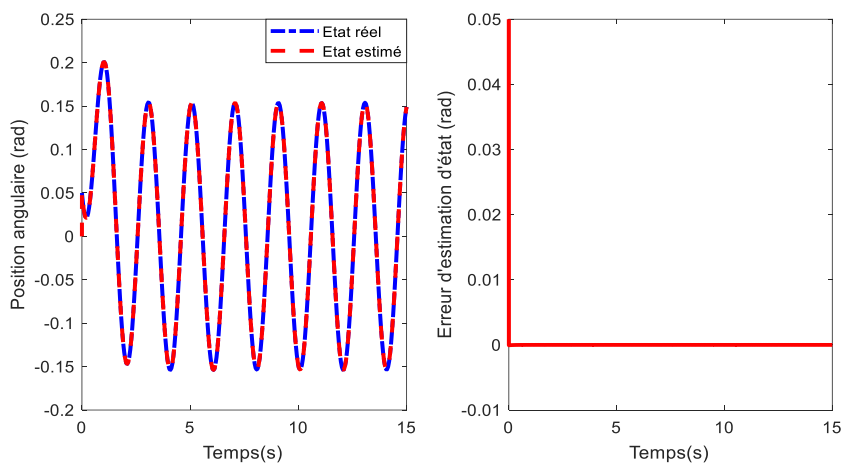


Fig.5.32. Performances d'estimation d'état relative à la position angulaire (Théorème 5.7)

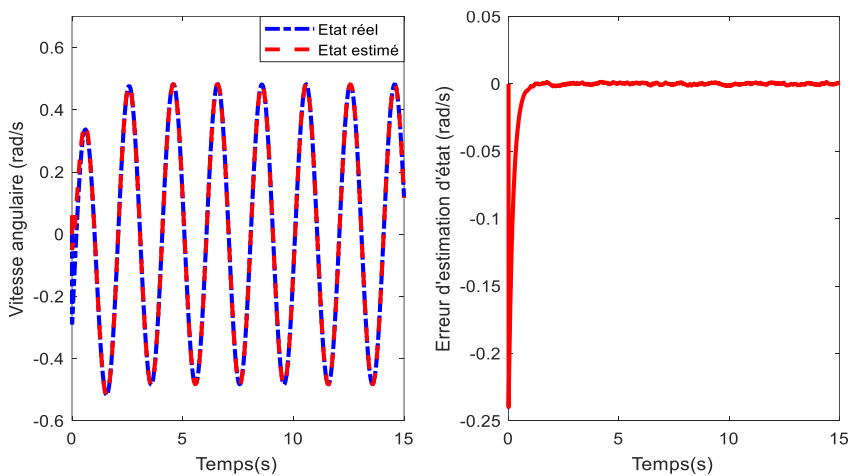


Fig.5.33. Performances d'estimation d'état relative à la vitesse angulaire (Théorème 5.7)

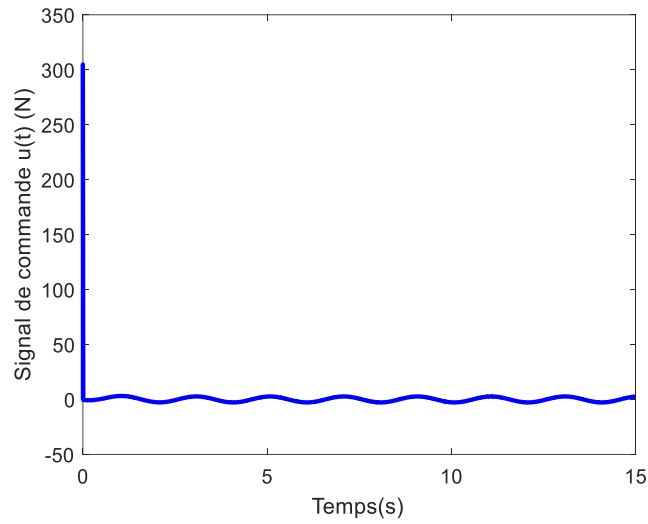


Fig.5.34. Signal de commande $u(t)$ (Théorème 5.7)

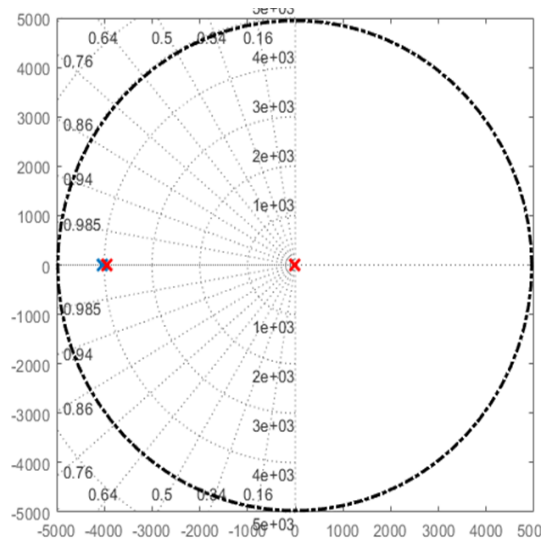


Fig.5.35. Distribution des valeurs propres des matrices $A_i - L_i C$

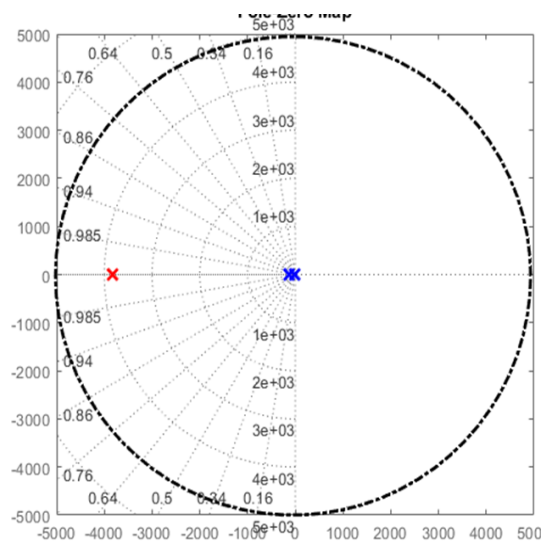


Fig.5.36. Distribution des valeurs propres des matrices $A_i - \Delta A_i - B_i K_j$

Nous avons constaté à travers les trois exemples présentés ci-dessus, qu'il est souvent nécessaire d'imposer une région LMI suffisamment large afin d'atteindre les objectifs de poursuite escomptés.

5.6. Commande \mathcal{D} -stable tolérante aux défauts actionneurs

Qu'est ce qu'un système tolérant aux défauts ?

Un système tolérant aux défauts a pour principal objectif de maintenir les performances désirées du système commandé en dépit de l'apparition de défauts. Il permet notamment de garantir la stabilité du système et des performances dégradées acceptables non seulement lorsque le système est sain mais aussi lorsque certains de ses composants sont défaillants. Un contrôleur classique peut donc s'avérer être limité et conduire à des comportements non désirés, voire à l'instabilité, en présence de défauts.

Afin d'éviter de telles catastrophes, des lois de commandes dites « tolérantes aux défauts » ont été développées dans le but de maintenir les performances du système ainsi que sa stabilité lors d'un « mauvais » fonctionnement.

Les stratégies de commandes tolérantes aux défauts sont généralement classées en deux approches différentes : l'approche passive (Passive Tolerant Control, PFTC) et l'approche active (Active Tolerant Control, AFTC) [Amin et Hasan, 2019], [Jiang et Yu, 2012].

Dans l'approche passive, la commande est synthétisée de telle sorte à être robuste à certains défauts. Elle ne nécessite aucun schéma de détection de défauts ni aucune reconfiguration de la loi de commande, ce qui rend sa capacité de tolérance restreinte à un nombre limité de défauts [Khatibi et Haeri, 2017]. Les méthodes PFTC utilisent des techniques de commandes robustes telles que la commande par modes glissants [Merheb et al., 2013], [Guezmil et al., 2019], la commande H_∞ [Yang et Lum 2003],[Niemann et Stoustrup, 2005], etc.

Contrairement à l'approche passive, la commande FTC active réagit aux différentes défaillances du système en reconfigurant les lois de commande suivant les informations fournies par un module de détection et de diagnostic (Fault Detection and Diagnosis, FDD).

La figure 5.37 présente un schéma de principe d'une loi de commande tolérante aux défauts active avec quatre éléments principaux :

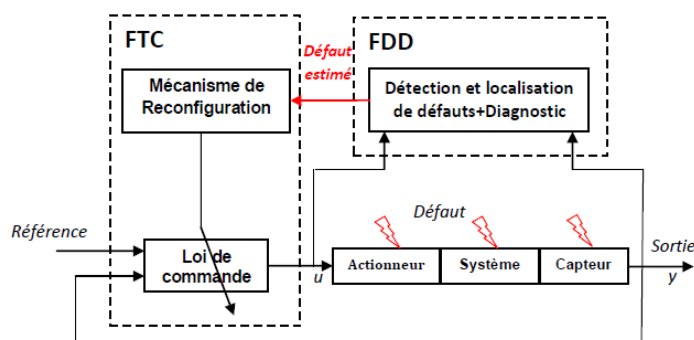


Fig.5.37. Schéma de principe d'une commande tolérante aux défauts active.

- un module FDD fournissant des informations en temps réel sur les paramètres en défaut et les variables d'état,
- un mécanisme de reconfiguration,
- un contrôleur reconfigurable et
- une référence appliquée au système.

Les stratégies actives de commande tolérante aux défauts sont généralement subdivisées en deux sous-classes, à savoir : l'accommodation de défauts et la reconfiguration du système (voir Figure 5.38).

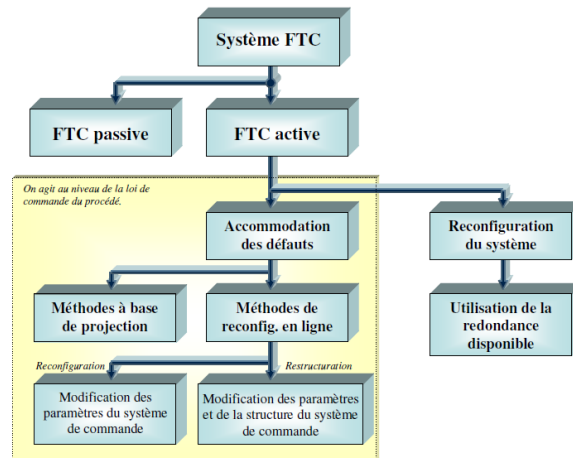


Fig.5.38. Classification des méthodes FTC.

Dans la reconfiguration du système, la structure du système à contrôler est modifiée de telle sorte à compenser l'effet du défaut. En d'autres termes, les entrées/sorties entre la loi de commande et le système sont modifiées à travers un changement des paramètres et de la structure de la loi de commande.

Lorsqu'on parle d'accommodation de défauts, les relations entrées/sorties entre la loi de commande et le système contrôler demeurent inchangées. Dans le cadre de cette approche, on distingue :

- les méthodes à base de projection : où il s'agit de sélectionner la loi de commande parmi un ensemble de correcteurs pré-calculés hors ligne,
- les méthodes de re-conception en ligne impliquant un calcul en ligne des paramètres du contrôleur (commande reconfigurable) ou une nouvelle synthèse de la loi de commande modifiant la structure et les paramètres de cette dernière (commande restructurable).

Les principales méthodologies pour la conception de stratégies d'accommodation de défauts sont :

- La méthode de la pseudo-inverse [Gao et Antsaklis 1991], [Staroswiecki , 2005], [Ciubotaru et al., 2006] : consiste à modifier le gain de commande par retour d'état de sorte que la dynamique du système défaillant soit égale à celle du système nominal en minimisant un critère donné. Cependant, elle présente l'inconvénient de ne pas garantir la stabilité du système en boucle fermée ;
- Le placement de structure propre [Konstantopoulos et Antsaklis 1996], [Wang et Lin 2000], [Zhang et Jiang, 2002] : dont l'objectif est de calculer le gain de commande de manière à faire coïncider les valeurs propres du système défaillant avec celles du système nominal en minimisant la norme \mathcal{L}_2 entre ces valeurs propres. Contrairement à la méthode de la pseudo-inverse, cette méthode garantie la stabilité du système en boucle fermée. En revanche, il est difficile d'y intégrer les incertitudes de modélisation ;
- La commande par gain séquencé (ou par séquençement de gain) [Rugh, 1992], [Badihi et al., 2014], [Kamal et al., 2014] : l'idée principale consiste à modifier les gains du contrôleur FTC en fonction de paramètres physiques variant dans le temps tels que la masse, l'altitude, etc., ou en fonction d'informations de diagnostic ;
- L'approche par modèle de référence [Staroswiecki, 2005], [Rabaoui et al., 2018] : permet de concevoir une commande telle que la dynamique du système défaillant s'approche le

plus possible de celle d'un modèle de référence en minimisant l'erreur de poursuite de trajectoire ;

- La commande prédictive à base de modèle [Maciejowski, 1997], [Bernardi et al., 2019] : sa philosophie se résume à utiliser un modèle dynamique pour prédire le comportement futur du procédé et choisir la meilleure commande au sens d'un certain coût tout en prenant en compte les contraintes. Plus exactement : un modèle discret du système permet dans un premier temps de prédire la sortie sur un horizon fini, puis, à chaque instant, en minimisant une fonction coût (critère de performance souvent quadratique), une séquence de commande est calculée dont seul le premier élément est appliquée au système ;
- On peut ajouter aussi l'approche multi-modèle [Dziekan et al., 2011], [Abdelmalek et al., 2018] et la commande adaptative [Patton et Klinkhieo, 2009], [Zhang et al., 2021].

Dans ce qui suit, nous proposons de développer une commande tolérante aux défauts actionneurs pour les systèmes TS incertains à VDM. L'estimation des défauts actionneurs s'effectue en utilisant l'observateur présenté dans la section 3.3.5 du chapitre 3.

Soit un système non linéaire décrit par un modèle TS incertain soumis à des défauts actionneurs

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + B_i(u(t) + f_a(t)) \right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.202)$$

Hypothèse 5.1

$\text{rang}(CB_i) = m$ pour $i = 1, \dots, r$.

Afin d'estimer les états et les défauts actionneurs, on considère l'observateur proposé précédemment dans le chapitre 3

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i(u(t) + \hat{f}_a(t)) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)) \right) \\ \dot{\hat{f}}_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \Gamma K_i \left((y(t) - \hat{y}(t)) + \lambda(y(t) - \hat{y}(t)) \right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.203)$$

La commande tolérante aux défauts choisie est donnée par

$$u(t) = - \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) F_j \hat{x}(t) - \hat{f}_a(t) \quad (5.204)$$

Les matrices de l'observateur L_i, K_i et Γ et celle de la loi de commande F_j sont déterminées de sorte à satisfaire les conditions de \mathcal{D} -stabilité.

Les dynamiques de l'erreur d'estimation d'état et d'estimation du vecteur de défauts sont données respectivement par

$$\dot{e}_x(t) = (A_h - L_h C)e_x(t) + B_h e_{f_a}(t) + \Delta A_h(t)x(t), \quad (5.205)$$

$$\dot{e}_{f_a}(t) = \dot{\hat{f}}_a(t) + (\Gamma K_h C L_h C - \Gamma K_h C A_h - \lambda \Gamma K_h C)e_x(t) - \Gamma K_h C B_h e_{f_a}(t) - \Gamma K_h C \Delta A_h(t)x(t). \quad (5.206)$$

L'expression de l'état du système en boucle fermée est

$$\dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h(t) - B_h F_h)x(t) + B_h F_h e_x(t) + B_h e_{f_a}(t) \quad (5.207)$$

On considère alors le système augmenté suivant

$$\dot{e}_a(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_{f_a}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_h + \Delta A_h(t) - B_h F_h & B_h F_h & B_h \\ \Delta A_h(t) & A_h - L_h C & B_h \\ -\Gamma K_h C \Delta A_h(t) & \Gamma K_h C L_h C - \Gamma K_h C A_h - \lambda \Gamma K_h C & -\Gamma K_h C B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e_x(t) \\ e_{f_a}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \dot{f}_a(t)$$

$$= \tilde{A}_{hh} e_a(t) + \tilde{W} \dot{f}_a(t)$$
(5.208)

Les conditions de \mathcal{D} -stabilité du système (5.208) sont énoncées par les Théorèmes 5.8 et 5.9 suivants.

- **Cas 1** : $K_i C = B_i^T P$

Théorème 5.8

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.208) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert $\dot{f}_a(t)$ vers $e_a(t)$ est borné s'il existe trois matrices symétriques définies positives S , P et $\bar{\Gamma}$, des matrices X_i, Y_j, K_i et un scalaire positif $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées pour

$$\min_{P, S, \bar{\Gamma}, X_i, Y_j, K_i} \bar{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{ij} & * & * & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I \otimes S & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I \otimes N_i^a S & 0 & -\sigma^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes Y_j^T B_i^T & 0 & 0 & -2\mu(I \otimes S) & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes B_i^T & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ M^T \otimes M_i^{aT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & 0 & \Phi_i & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & \Theta_i & \Psi_i & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \bar{\Gamma} & -\bar{\gamma} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & M^T \otimes M_i^{aT} P & -M^T \otimes \frac{1}{\lambda} M_i^{aT} P B_i & 0 & -\sigma I \end{bmatrix} < 0$$
(5.209)

$$K_i C = B_i^T P \quad (5.210)$$

avec

$$\Lambda_{ij} = L \otimes S + \text{Sym}(M \otimes (A_i S - B_i Y_j)) \quad (5.211)$$

$$\Phi_i = L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P A_i - X_i C)) + W_2 \quad (5.212)$$

$$\Theta_i = (M^T \otimes B_i^T P) + (M \otimes \frac{1}{\lambda} (B_i^T X_i C - B_i^T P A_i - \lambda B_i^T P)) \quad (5.213)$$

$$\Psi_i = (L \otimes \frac{1}{\lambda} \bar{\Gamma}) - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} B_i^T P B_i) + W_3 \quad (5.214)$$

$W_1 > 0, W_2 > 0, W_3 > 0, \sigma > 0, \mu > 0$.

Les gains de l'observateur sont donnés par

$$L_i = P^{-1} X_i \quad (5.215)$$

$$\Gamma = \bar{\Gamma}^{-1} \quad (5.216)$$

Les gains de la loi de commande sont

$$F_j = Y_j S^{-1} \quad (5.217)$$

Preuve. On considère la fonction de Lyapunov

$$V = x^T Q x + e_x^T P e_x + \frac{1}{\lambda} e_{f_a}^T \Gamma^{-1} e_{f_a}, Q = Q^T \geq 0, P = P^T \geq 0, \Gamma = \Gamma^T \geq 0 \quad (5.218)$$

Le système (5.208) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert $\dot{f}_a(t)$ vers $e_a(t)$ est borné si la condition suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} & L \otimes V + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V} + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V} + (I \otimes x^T) W_1 (I \otimes x) + (I \otimes e_x^T) W_2 (I \otimes e_x) + (I \otimes e_{f_a}^T) W_3 (I \otimes e_{f_a}) \\ & - \gamma^2 (I \otimes \dot{f}_a^T) (I \otimes f_a) < 0 \end{aligned} \quad (5.219)$$

En remplaçant V et \dot{V} par leurs expressions dans la condition de synthèse (5.219) et en utilisant la propriété (3.18) du produit de Kronecker, on aboutit à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} X^T \begin{bmatrix} L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes Q(A_h + \Delta A_h - B_h F_h)) + W_1 & * & * & * \\ (M^T \otimes F_h^T B_h^T Q) + (M \otimes P \Delta A_h(t)) & L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P A_h - P L_h C)) + W_2 & * & * \\ (M^T \otimes B_h^T Q) - (M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C \Delta A_h(t)) & (M^T \otimes B_h^T P) + (M \otimes \frac{1}{\lambda} (K_h C L_h C - K_h C A_h - \lambda K_h C)) & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ (L \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1}) - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C B_h) + W_3 & * & * & * \\ M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & -\gamma^2 I & * & * \end{bmatrix} X < 0 \end{aligned} \quad (5.220)$$

$$\text{où } X^T = \begin{bmatrix} (I \otimes x^T) & (I \otimes e_x^T) & (I \otimes e_{f_a}^T) & (I \otimes \dot{f}_a^T) \end{bmatrix}$$

L'inégalité (5.220) est vérifiée si

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes Q(A_h + \Delta A_h - B_h F_h)) + W_1 & * & * & * \\ (M^T \otimes F_h^T B_h^T Q) + (M \otimes P \Delta A_h(t)) & L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P A_h - P L_h C)) + W_2 & * & * \\ (M^T \otimes B_h^T Q) - (M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C \Delta A_h(t)) & (M^T \otimes B_h^T P) + (M \otimes \frac{1}{\lambda} (K_h C L_h C - K_h C A_h - \lambda K_h C)) & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ (L \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1}) - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C B_h) + W_3 & * & * & * \\ M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & -\gamma^2 I & * & * \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.221)$$

Les termes incertains sont ensuite séparés des termes constants

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc}
 L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes Q(A_h - B_h F_h)) + W_1 & * & \\
 (M^T \otimes F_h^T B_h^T Q) & L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h - PL_h C)) + W_2 & \\
 (M^T \otimes B_h^T Q) & (M^T \otimes B_h^T P) + (M \otimes \frac{1}{\lambda}(K_h CL_h C - K_h CA_h - \lambda K_h C)) & \\
 0 & 0 & \\
 * & 0 & \\
 * & 0 & \\
 (L \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1}) - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h CB_h) + W_3 & * & \\
 M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & -\gamma^2 I & \\
 \end{array} \right] + \text{Sym} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} M \otimes QM_h^a \\ M \otimes PM_h^a \\ -M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h CM_h^a \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Omega_h} \left[I \otimes \Sigma_a^T(t) N_h^a \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \right\} < 0
 \end{aligned} \tag{5.222}$$

L'application de l'inégalité de Young à la matrice incertaine Ω_h et l'utilisation du complément de Schur permettent d'écrire ce qui suit

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 L \otimes Q + \text{Sym}(M \otimes Q(A_h - B_h F_h)) + \sigma(I \otimes N_h^{aT} N_h^a) + W_1 & & & * & & \\
 (M^T \otimes F_h^T B_h^T Q) & & & L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h - PL_h C)) + W_2 & & \\
 (M^T \otimes B_h^T Q) & & & (M^T \otimes B_h^T P) + (M \otimes \frac{1}{\lambda}(K_h CL_h C - K_h CA_h - \lambda K_h C)) & & \\
 0 & & & 0 & & \\
 M^T \otimes M_h^{aT} Q & & & M^T \otimes M_h^{aT} P & & \\
 \hline
 * & 0 & * & & & \\
 * & 0 & * & & & \\
 (L \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1}) - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h CB_h) + W_3 & * & * & & & \\
 M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & -\gamma^2 I & 0 & & & \\
 -M^T \otimes \frac{1}{\lambda} M_h^{aT} C^T K_h^T & 0 & -\sigma I & & & \\
 \hline
 & & & & & < 0
 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{5.223}$$

L'inégalité (5.223) est subdivisée comme montré ci-dessus

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ * & T_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.224}$$

L'application de la transformation de congruence avec la matrice

$$X = \begin{bmatrix} I \otimes Q^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \tag{5.225}$$

où $Y = \text{diag}(I \otimes Q^{-1}, I, I, I)$.

permet d'aboutir à

$$\left[\begin{array}{cc}
 (I \otimes Q^{-1})T_{11}(I \otimes Q^{-1}) & (I \otimes Q^{-1})T_{12}Y \\
 * & Y^T T_{22} Y
 \end{array} \right] < 0 \tag{5.226}$$

L'inégalité précédente implique que $T_{22} < 0$, ce qui permet d'écrire

$$(Y + \mu T_{22}^{-1})^T T_{22} (Y + \mu T_{22}^{-1}) < 0 \Leftrightarrow Y^T T_{22} Y < -2\mu Y - \mu^2 T_{22}^{-1}, \mu > 0 \quad (5.227)$$

On remplace (5.227) dans (5.226), et on applique le complément de Schur

$$\begin{bmatrix} (I \otimes Q^{-1})T_{11}(I \otimes Q^{-1}) & (I \otimes Q^{-1})T_{12}Y & 0 \\ * & -2\mu Y & * \\ 0 & \mu I & T_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.228)$$

En substituant T_{11}, T_{12} et T_{22} par leurs expressions respectives, on obtient

$$\begin{bmatrix} L \otimes Q^{-1} + \text{Sym}(M \otimes (A_h Q^{-1} - B_h F_h Q^{-1})) & * & * & * & * & 0 \\ I \otimes Q^{-1} & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I \otimes N_h^a Q^{-1} & 0 & -\sigma^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\ M^T \otimes Q^{-1} F_h^T B_h^T & 0 & 0 & -2\mu(I \otimes Q^{-1}) & 0 & 0 \\ M^T \otimes B_h^T & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I \\ M^T \otimes M_h^{aT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & * & 0 & 0 \\ -2\mu I & 0 & & & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P A_h - P L_h C)) + W_2 & & & * & 0 & * & 0 \\ 0 & (M^T \otimes B_h^T P) + M \otimes (\frac{1}{\lambda}(K_h C L_h C - K_h C A_h - \lambda K_h C)) & (L \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1}) - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C B_h) + W_3 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & & & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ \mu I & M^T \otimes M_h^{aT} & & & -M^T \otimes \frac{1}{\lambda} M_h^{aT} C^T K_h^T & 0 & -\sigma I & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (5.229)$$

On considère ensuite la contrainte égalité suivante

$$K_i C = B_i^T P \quad (5.230)$$

L'inégalité (5.230) devient alors

$$\begin{bmatrix}
 \Lambda_{hh} & * & * & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes Q^{-1} & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes N_h^a Q^{-1} & 0 & -\sigma^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes Q^{-1} F_h^T B_h^T & 0 & 0 & -2\mu(I \otimes Q^{-1}) & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes B_h^T & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\
 M^T \otimes M_h^{aT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * \\
 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & 0 & \Phi_h & * & 0 & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & \Theta_h & \Psi_h & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & -\gamma^2 I & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & M^T \otimes M_h^{aT} & -M^T \otimes \frac{1}{\lambda} M_h^{aT} C^T K_h^T & 0 & -\sigma I
 \end{bmatrix} < 0 \tag{5.231}$$

avec

$$\Lambda_{hh} = L \otimes Q^{-1} + \text{Sym}(M \otimes (A_h Q^{-1} - B_h F_h Q^{-1}))$$

$$\Phi_h = L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (P A_h - P L_h C)) + W_2$$

$$\Theta_h = (M^T \otimes B_h^T P) + (M \otimes \frac{1}{\lambda} (B_h^T P L_h C - B_h^T P A_h - \lambda B_h^T P))$$

$$\Psi_h = (L \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1}) - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} B_h^T P B_h) + W_3$$

En prenant en compte les changements de variables $S = Q^{-1}$, $Y_j = F_j Q^{-1}$, $X_i = P_i L_i$, $\Gamma^{-1} = \bar{\Gamma}$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$, on aboutit aux conditions suffisantes (5.209) et (5.210). ■

- **Cas 2** : $K_i C \neq B_i^T P$

Théorème 5.9

Soient L et M deux matrices définissant une région LMI. Le système (5.208) est \mathcal{D} -stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert $\dot{f}_a(t)$ vers $e_a(t)$ est borné s'il existe trois matrices symétriques définies positives S , P et $\bar{\Gamma}$, des matrices X_i, Y_j, K_i et un scalaire positif $\bar{\gamma}$ tels que les conditions suivantes sont vérifiées pour

$$\min_{P, S, \bar{\Gamma}, X_i, Y_j, K_i} \bar{\gamma}$$

5 Commandes \mathcal{D} -stables des systèmes TS à VDM

$$\begin{bmatrix}
 \Lambda_{ij} & * & * & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes S & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes N_i^a S & 0 & -\sigma^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes Y_j^T B_i^T & 0 & 0 & -2\mu(I \otimes S) & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes B_i^T & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\
 M^T \otimes M_i^{aT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * \\
 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & 0 & \Phi_i & * & 0 & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & \Theta_i & \Psi_i & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \bar{\Gamma} & -\bar{\gamma}I & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & M^T \otimes M_i^{aT} P & -M^T \otimes \frac{1}{\lambda} M_i^{aT} C^T K_i^T & 0 & -\sigma I \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} C^T K_i^T & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \otimes X_i C & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 2\nu(I \otimes P) & \nu I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \nu I & -G^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} < 0$$

(5.232)

où

$$\Theta_i = (M^T \otimes B_i^T P) - (M \otimes \frac{1}{\lambda} (K_i C A_i + \lambda K_i C)) \tag{5.233}$$

$$\Psi_i = (L \otimes \frac{1}{\lambda} \bar{\Gamma}) - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_i C B_i) + W_3 \tag{5.234}$$

et $G > 0, \sigma > 0, \nu > 0$.

Preuve. On isole d'abord le terme non linéaire $K_h C L_h C$, en réécrivant l'inégalité (5.229) comme suit

5 Commandes \mathcal{D} -stables des systèmes TS à VDM

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 L \otimes Q^{-1} + \text{Sym}(M \otimes (A_h Q^{-1} - B_h F_h Q^{-1})) & * & * & * & * & 0 \\
 I \otimes Q^{-1} & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes N_h^a Q^{-1} & 0 & -\sigma^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes Q^{-1} F_h^T B_h^T & 0 & 0 & -2\mu(I \otimes Q^{-1}) & 0 & 0 \\
 M^T \otimes B_h^T & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I \\
 M^T \otimes M_h^{aT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right. \\
 * & 0 & & & 0 & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & 0 & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & 0 & & 0 & 0 \\
 0 & * & & & 0 & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & * & & 0 & 0 \\
 0 & 0 & & & 0 & & * & 0 \\
 -2\mu I & 0 & & & 0 & & 0 & * \\
 0 & L \otimes P + \text{Sym}(M \otimes (PA_h - PL_h C)) + W_2 & & & * & & 0 & * \\
 0 & (M^T \otimes B_h^T P) + M \otimes \left(\frac{1}{\lambda}(-K_h CA_h - \lambda K_h C)\right) & (L \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1}) - \text{Sym}(M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h CB_h) + W_3 & & * & & * & * \\
 0 & 0 & & & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & & -\gamma^2 I & 0 \\
 \mu I & M^T \otimes M_h^{aT} & & & -M^T \otimes \frac{1}{\lambda} M_h^{aT} C^T K_h^T & & 0 & -\sigma I
 \end{array} \right. \\
 + \text{Sym} \left\{ \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \otimes \frac{1}{\lambda} K_h C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]}_{\Omega_{hh}} \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I \otimes L_h C \ 0 \ 0 \ 0 \right] \right\} < 0.
 \end{array}$$

(5.235)

L'application de l'inégalité de Young à Ω_{hh} puis le complément de schur à (5.235) donne

5 Commandes \mathcal{D} -stables des systèmes TS à VDM

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c}
 \Lambda_{hh} & * & * & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes Q^{-1} & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 I \otimes N_i^a Q^{-1} & 0 & -\sigma^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes Q^{-1} F_h^T B_h^T & 0 & 0 & -2\mu(I \otimes Q^{-1}) & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes B_h^T & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\
 M^T \otimes M_h^{aT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\mu I & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & 0 & \Phi_h & * & 0 & * & 0 & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & \Theta_h & \Psi_h & * & * & * & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & 0 & 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} \Gamma^{-1} & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu I & M^T \otimes M_h^{aT} P & -M^T \otimes \frac{1}{\lambda} M_h^{aT} C^T K_h^T & 0 & -\sigma I & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M^T \otimes \frac{1}{\lambda} C^T K_h^T & 0 & 0 & -G & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \otimes L_h c & 0 & 0 & 0 & 0 & -G^{-1}
 \end{array} \right] < 0. \tag{5.236}$$

On subdivise l'inégalité (5.236) comme montré ci-dessus

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ * & N_{22} \end{bmatrix} \tag{5.237}$$

On applique ensuite la transformation de congruence avec la matrice

$$W = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \otimes P \end{bmatrix} \tag{5.238}$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & * \\ (I \otimes P)N_{12} & (I \otimes P)N_{22}(I \otimes P) \end{bmatrix} < 0 \tag{5.239}$$

Sachant que $N_{22} < 0$, on peut écrire ce qui suit

$$\left((I \otimes P) + \nu N_{22}^{-1} \right)^T N_{22} \left((I \otimes P) + \nu N_{22}^{-1} \right) < 0 \Leftrightarrow (I \otimes P)N_{22}(I \otimes P) < -2\nu(I \otimes P) - \nu^2 N_{22}^{-1}, \nu > 0 \tag{5.240}$$

On remplace (5.240) dans l'inégalité (5.239) puis on applique le complément de Schur

$$\begin{bmatrix} N_{11} & * & 0 \\ (I \otimes P)N_{12} & -2\nu(I \otimes P) & * \\ 0 & \nu I & N_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.241}$$

En substituant les matrices N_{11}, N_{12} et N_{22} par leurs expressions dans (5.241) et en considérant les changements de variables $S = Q^{-1}, Y_j = F_j Q^{-1}, X_i = P_i L_i, \Gamma^{-1} = \bar{\Gamma}$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$, on obtient la condition (5.232). ■

Exemple 5.8 : Application du Théorème 5.9 à un exemple académique

Soit un système non linéaire décrit par un modèle TS incertain à VDM constitué de deux modèles locaux. Les matrices et les fonctions d'activation définissant ce système sont

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0.7 \\ 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0.6 \\ 3 & 3 \\ 2 & 0.1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_1^a = M_2^a = [0.5 \quad 0.6 \quad 0.2]^T, N_1^a = N_2^a = [0.8 \quad 0.1 \quad 0.3], \Sigma_a(t) = 1, h_1(x) = \frac{1 - \tanh(y_1)}{2},$$

$$h_2(x) = 1 - h_1(x) = \frac{1 + \tanh(y_1)}{2}$$

Dans cet exemple, on considère la région LMI usuelle de la figure (3.1). L'application des contraintes (5.232) pour $\alpha=0$, $\beta=3.5$, $\theta=3\pi/11$ et $s=q=25$ donne les solutions numériques suivantes (On prend $\lambda=5$, $\mu=\nu=\sigma=1$ et on fixe la valeur du taux d'atténuation $\gamma=0.01$)

$$L_1 = \begin{bmatrix} 2.9093 & 1.9632 \\ 4.9675 & -1.8318 \\ 1.6772 & -0.2790 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.2936 & 6.2436 \\ 2.4821 & 2.9983 \\ 0.6025 & 2.2061 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0.1142 & -0.0082 \\ -0.0082 & 0.1368 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 25.8702 & -30.5511 \\ 55.6389 & -81.3320 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -48.5183 & 99.1159 \\ 34.1778 & -62.5382 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 1.3765 & 0.5371 & -0.2262 \\ -0.9352 & 0.1012 & 0.3641 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1.3760 & 0.5370 & -0.2262 \\ -0.9330 & 0.1020 & 0.3640 \end{bmatrix}.$$

Les états en boucle fermée sans et avec FTC, l'estimation des défauts actionneurs et les signaux de commande sont représentés respectivement par les figures 5.39-5.41.

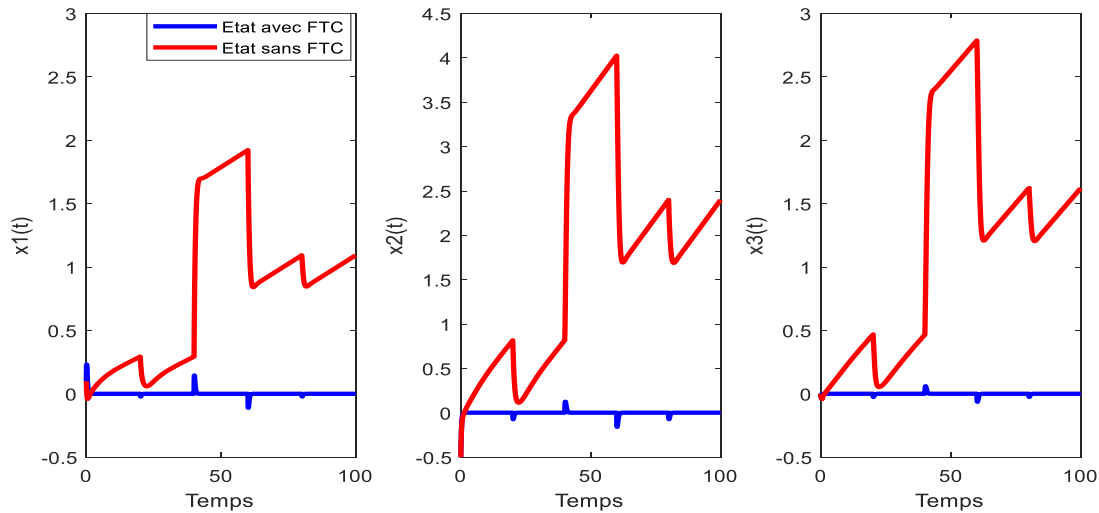


Fig.5.39. Etats du système en boucle fermée (sans et avec FTC).

La commande que nous avons proposée compense de manière efficace l'effet des défauts actionneurs. Elle permet au système en boucle fermée d'atteindre ses objectifs de contrôle même en présence de défauts et d'incertitudes grâce à une estimation très satisfaisante de ces derniers par l'observateur.

Les figures 5.42-5.43 illustrent les erreurs d'estimation d'état et des défauts.

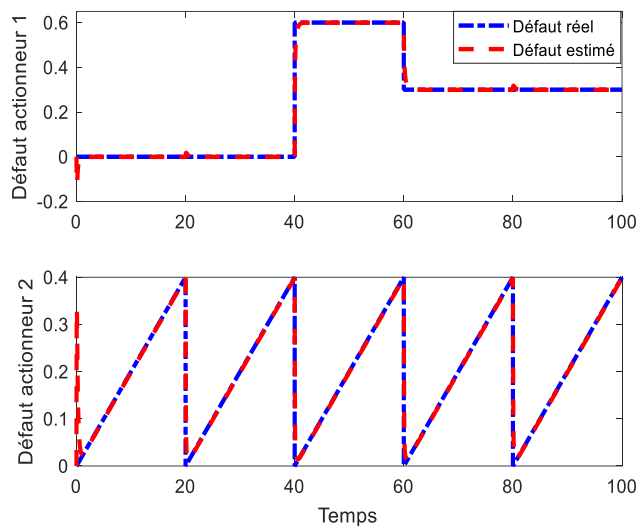


Fig.5.40. Estimation des défauts actionneurs

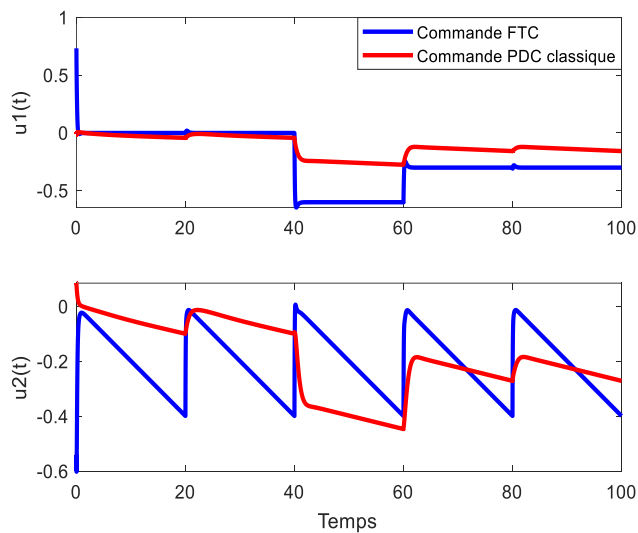


Fig.5.41. Signaux de commande

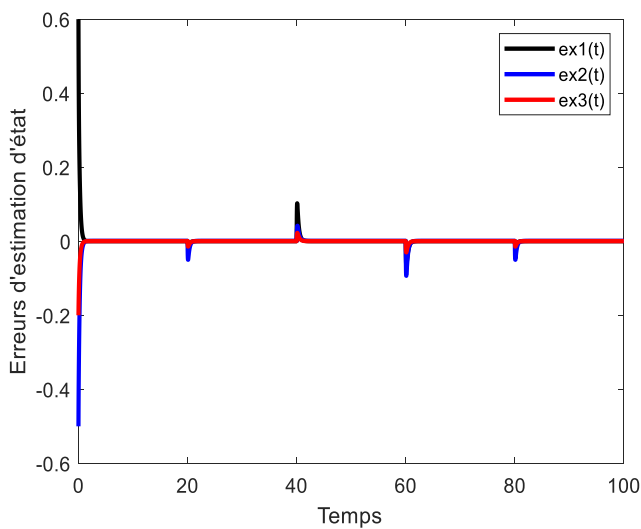


Fig.5.42. Erreurs d'estimation d'état

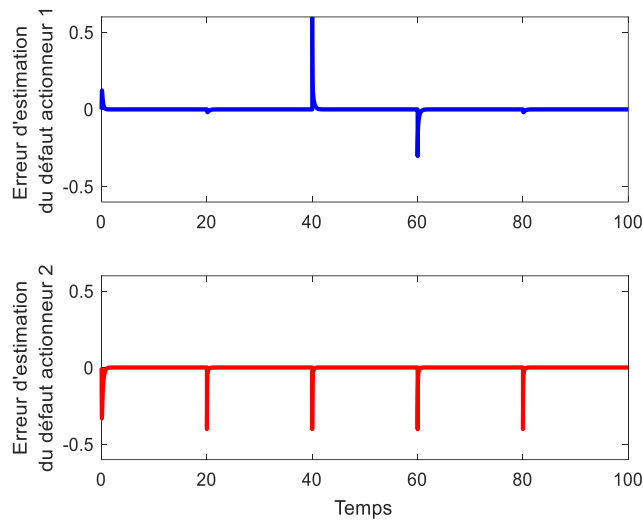


Fig.5.43. Erreurs d'estimation des défauts actionneurs

Afin de vérifier si les contraintes de \mathcal{D} -stabilité sont satisfaites, on trace, dans la figure 5.44, la distribution des valeurs propres des matrices locales A_i-L_iC et $A_i+\Delta A_i-B_iF_j$. On constate que ces dernières sont contenues dans la région LMI imposée.

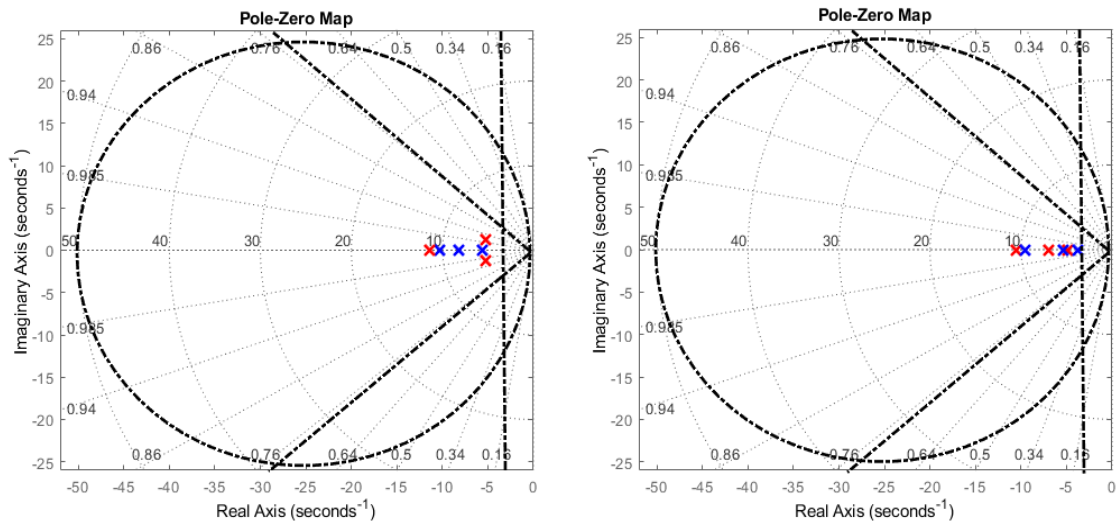


Fig.5.44. Distribution des valeurs propres des matrices (A_i-L_iC) (à gauche) et $(A_i+\Delta A_i-B_iF_j)$ (à droite)

5.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la synthèse de lois de commande \mathcal{D} -stables (ou sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité) des systèmes non linéaires représentés par des multimodèles TS à variables de décision mesurables.

En premier lieu, nous avons présenté un court état de l'art sur la \mathcal{D} -stabilisation des systèmes TS par des commandes PDC et non-PDC dans le contexte quadratique et non quadratique.

Nous avons ensuite examiné le problème de \mathcal{D} -stabilisation des systèmes TS soumis à des saturations d'actionneurs. De nouvelles conditions LMIs de synthèse de commandes contraintes et saturantes permettant de maximiser l'estimation du domaine d'attraction ont été

proposées. Les résultats de simulation ont montré l'avantage du concept de \mathcal{D} -stabilité dans l'amélioration des performances de contrôle en présence de saturation.

La poursuite de trajectoire générée par un modèle de référence a aussi été étudiée pour les systèmes TS incertains et perturbés. Dans ce cadre, des commande PDC et non PDC basées sur des fonctions de Lyapunov poly-quadratiques permettant le suivi de trajectoire et la satisfaction de contraintes de \mathcal{D} -stabilité ont été développées. Les différents exemples de simulation appliquée à un pendule inversé ont illustré l'efficacité des approches proposées.

Nous avons terminé ce chapitre par la synthèse d'une loi de commande tolérante aux défauts actionneurs sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité. La commande proposée permet une très bonne compensation des défauts actionneurs car l'observateur synthétisé fournit une estimation satisfaisante des défauts actionneurs. De plus les contraintes de \mathcal{D} -stabilité imposées sont satisfaites.

Bibliographie

- [Abdelmalek et al., 2018] Abdelmalek, S., Azar, A.T. & Dib, D. A Novel Actuator Fault-tolerant Control Strategy of DFIG-based Wind Turbines Using Takagi-Sugeno Multiple Models. *Int. J. Control Autom. Syst.* **16**, 1415–1424 (2018). <https://doi.org/10.1007/s12555-017-0320-y>
- [Amin et Hasan, 2019] Amin, A. A. and Hasan, K. M. (2019). A review of fault tolerant control systems: advancements and applications. *Measurement*, 143:58–68. 33
- [Assawinchaichote, 2014] Assawinchaichote, W. (2014). Further results on robust fuzzy dynamic systems with LMI \mathcal{D} -stability constraints. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 24(4) :785–794.
- [Badihi et al., 2014] H. Badihi, Y. Zhang, and H. Hong. Fuzzy gain-scheduled active fault-tolerant control of a wind turbine. *Journal of the Franklin Institute*, 351 :3677–3706, 2014.
- [Benzaouia, 2012] Benzaouia, A. (2012). Saturated switching systems, volume 426. Springer Science & Business Media.
- [Bernardi et al., 2019] E. Bernardi, C. A. Cappelletti, and E. J. Adam, “Fault-tolerant Model Predictive Control Strategy Applied to Industrial Processes,” in 2019 XVIII Workshop on Information Processing and Control (RPIC). Bahía Blanca, Argentina: Universidad Nacional del Sur, 9 2019, pp. 193–198
- [Bezzaoucha et al., 2015] S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin, and J. Ragot, “State constrained tracking control for nonlinear systems,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, no. 7, 2015.
- [Bezzaoucha, 2013] Bezzaoucha, S. (2013). Commande tolérante aux défauts de systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno. Thèse de doctorat, Université de Lorraine.
- [Cao et Lin, 2003] Cao, Y.-Y. and Lin, Z. (2003). Robust stability analysis and fuzzy scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(1) :57{67
- [Chen et al., 1996] B.-S. Chen, C.-H. Lee, and Y.-C. Chang, “ H_∞ tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: adaptive fuzzy approach,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 32–43, 1996.
- [Chen et al., 2013] B. Chen, X. Liu, K. Liu, and C. Lin, “Adaptive fuzzy tracking control of nonlinear MIMO systems with time-varying delays,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 217, pp. 1–21, 2013, DOI:10.1016/j.fss.2012.11.002.
- [Chen et al., 2014] F. Chen, J. Tsai, Y. Liao, S. Guo, M. Ho, F. Shaw, and L. Shieh, “An improvement on the transient response of tracking for the sampled-data system based on an improved PD-type iterative learning control,” *Journal of The Franklin Institute*, vol. 351, no. 2, pp. 1130–1150, 2014.

- [Chen et Dai, 2001] C.T. Chen, C.S. Dai, Robust controller design for a class of nonlinear uncertain chemical processes, *Journal of Process Control* 11 (2001) 469–482.
- [Cherifi et al., 2015] Cherifi, A., Guelton, K., and Arcese, L. (2015). Quadratic Design of D-Stabilizing Non-PDC Controllers for Quasi-LPV/T-S Models. In *1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems (LPVS 2015), IFAC-Papers On Line*, volume 48, pages 164–169, Grenoble.
- [Cherifi, 2017] Cherifi, A (2017). Contribution à la commande des modèles Takagi-Sugeno : approche non-quadratique et synthèse \mathcal{D} -stable. Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne-Ardenne, Mai 2017.
- [Cherifi et al., 2019] A. Cherifi, K. Guelton, L. Arcese, and V. J. S. Leite, “Global nonquadratic D-stabilization of Takagi–Sugeno systems with piecewise continuous membership functions,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 351, pp. 23–36, Jun. 2019
- [Chilali et Gahinet, 1996] Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). H_∞ design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367.
- [Chilali et al., 1999] Chilali, M., Gahinet, P., and Apkarian, P. (1999). Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12) :2257–2270.
- [Ciubotaru et al., 2006] Ciubotaru B., Staroswiecki M., Christophe C., 2006. Fault tolerant control of the Boeing 747 short-period mode using the admissible model matching technique. 6th *IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS'06)*, P.R. China, Beijing
- [Cvetkovic-Ilic , 2008] D. Cvetkovic-Ilic, “Re-nnd solutions of the matrix equation $AXB = C$,” *The Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 84, pp. 63–72, 2008.
- [Da Silva et al., 1997] Da Silva, J. G., Fischman, A., Tarbouriech, S., Dion, J., and Dugard, L. (1997). Synthesis of state feedback for linear systems subject to control saturation by an LMI based approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 30(16) :207{212.
- [Da Silva Jr et Tarbouriech, 2006] Da Silva Jr, J. G. and Tarbouriech, S. (2006). Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 55(3) :184{192.
- [Dang et al., 2017] Dang, Q. V., Vermeiren, L., Dequidt, A., and Dambrine, M. (2017). Robust stabilizing controller design for Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems under state constraints and actuator saturation. *Fuzzy Sets and Systems*, 329 :77{90.
- [Dziekan et al., 2011] Ł. Dziekan, M. Witczak, and J. Korbicz. Active fault-tolerant control design for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, 59(1):93–102, 2011
- [Ebrahimi et al., 2018] Ebrahimi Mollabashi H, Mazinan AH, Hamidi H (2018) Takagi– Sugeno fuzzy-based CNF control approach considering a class of constrained nonlinear systems. *IETE J Res (TIJR)*. <https://doi.org/10.1080/03772063.2018.1464969>
- [Erzberger , 1967] H. Erzberger, *Analysis and design of model following control systems by state space techniques*. NASA techdocs, 1967.
- [Gao et Antsaklis 1991] Gao, Z., Antsaklis P., 1991. Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control. *International Journal of Control* 53(3), 717–729.
- [Ghaffari et al., 2013] Ghaffari V, Naghavi SV, Safavi AA. Robust model predictive control of a class of uncertain nonlinear systems with application to typical CSTR problems. *Journal of Process Control*. 2013, 23, 493-9
- [Ghorbel et al., 2020] Chekib Ghorbel, Amira Tiga, Naceur Benhadj Braiek, "Proportional PDC Design-Based Robust Stabilization and Tracking Control Strategies for Uncertain and Disturbed T-S Model", *Complexity*, vol. 2020, Article ID 8910132, 9 pages, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/8910132>

- [Guelton et al., 2014] Guelton, K., Cherifi, A., and Arcese, L. (2014). Some Refinements on Stability Analysis and Stabilization of Second Order T-SModels Using Line-Integral Lyapunov Functions. In *19th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, pages 6209–6214, Cape Town, South Africa.
- [Guerra et al., 2012] Guerra, T.-M., Bernal, M., Guelton, K., and Labiod, S. (2012). Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, 201 :40–54.
- [Guerra et Vermeiren, 2004] Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form. *Automatica*, 40(5) :823–829.
- [Guezmil et al., 2019] Guezmil, A., Berriri, H., Pusca, R., Sakly, A., Romary, R., Mimouni, M.F: Experimental investigation of passive fault tolerant control for induction machine using sliding mode approach. *Asian J. Control*. 21(1), 520–532 (2019)
- [Han et Morioka, 2007] Han, H. and Morioka, Y. (2007). Fuzzy control design in consideration of input constraint and reducing LMIs conservatism. In *2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference*, pages 1{6, London, UK.
- [Henrion, 1999] Henrion, D. (1999). Stabilité des systèmes linéaires incertains à commande contrainte. Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Toulouse.
- [Hu et al., 2002] Hu, T., Lin, Z., and Chen, B. M. (2002). An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, 38(2) :351{359.
- [Hu et al., 2004] T. Hu, B. Hugang, and Z. Lin, “Absolute stability with a generalized sector condition,” *IEEE Trans. Auto. Cont.*, no.49, no.4,pp.535-548, 2004.
- [Hu et Lin, 2001] T. Hu and Z. Lin, *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Boston, MA: Birkhäuser, 2001.
- [Jaadari et al., 2012] Jaadari, A., Guerra, T.-M., Sala, A., Bernal, M., and Guelton, K. (2012). New controllers and new designs for continuous-time Takagi-Sugeno models. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1–7, Brisbane, Australia.
- [Jiang et Yu, 2012] J. Jiang, X. Yu, Fault-tolerant control systems: A comparative study between active and passive approaches, *Annu. Rev. Control* 36 (2012) 60–72, <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2012.03.005>.
- [Jungers et Castelan, 2011] Jungers, M. and Castelan, E. B. (2011). Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. *Systems & Control Letters*, 60(3) :169{173.
- [Kamal et al., 2014] E. Kamal, A. Aitouche, R. Ghorbani, and M. Bayart. Fuzzy scheduler fault-tolerant control for wind energy conversion systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(1) :119–131, January 2014.
- [Khalil, 1992] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1992.
- [Khatibi et Haeri, 2017] Mahmood Khatibi et Mohammad Haeri. A unified framework for passive-active fault tolerant control systems considering actuator saturation and L_∞ disturbances. *International Journal of Control*, pages 1{11, 2017.
- [Kiener et al., 2014] Kiener, G. A., Lehmann, D., and Johansson, K. H. (2014). Actuator saturation and anti-windup compensation in event-triggered control. *Discrete event dynamic systems*, 24(2) :173{197.
- [Konstantopoulos et Antsaklis 1996] Konstantopoulos I., Antsaklis P., 1996. An eigenstructure assignment approach to control reconfiguration. In: *Proceedings of 4th IEEE Mediterranean Symposium on Control and Automation. Greece*.
- [Lee et al., 2014] Lee, D. H., Joo, Y. H., and Tak, M. H. (2014). Local stability analysis of continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems : a fuzzy Lyapunov function approach. *Information Sciences*, 257 :163–175.

- [Lin et al., 2006] C. Lin, Q.-G. Wang, and T. H. Lee, “ H_∞ output tracking control for nonlinear systems via TS fuzzy model approach.” *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics. Part B, Cybernetics: a publication of the IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society*, vol. 36, no. 2, pp. 450–457, 2006
- [Liu et al., 2010] Y.-J. Liu, W. Wang, S.-C. Tong, and Y.-S. Liu, “Robust adaptive tracking control for nonlinear systems based on bounds of fuzzy approximation parameters,” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, vol. 40, no. 1, pp. 170–184, 2010.
- [Liu et al., 2015] D. Liu, C. Wu, Q. Zhou, and H.-K. Lam, “Fuzzy guaranteed cost output tracking control for fuzzy discrete-time systems with different premise variables,” *Complexity*, vol. 21, no. 5, 2015, DOI:10.1002/cplx.21653.
- [Liu et al., 2017] Liu, D. and Yang, G.-H. (2017). Event-triggered control for linear systems with actuator saturation and disturbances. *IET Control Theory & Applications*, 11(9) :1351{1359.
- [Maciejowski, 1997] JM Maciejowski. Modelling and predictive control : Enabling technologies for reconfiguration. In *Proceedings of IFAC Symposium on System Structure and Control*, 1997.
- [Mansouri et al., 2009] B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, A. Kruszewski, T.M. Guerra. Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T-S models. *Information Sciences*, 179 : 446-457, 2009
- [Márquez et al., 2016] Raymundo Márquez, Thierry Marie Guerra, Miguel Bernal and Alexandre Kruszewski, A Non-Quadratic Lyapunov Functional for H_∞ Control of Nonlinear Systems via Takagi-Sugeno Models, *Journal of the Franklin Institute*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2016.01.004>
- [Merheb et al., 2013] Merheb AR, Noura H, Bateman F. Passive fault tolerant control of quadrotor UAV using regular and cascaded Sliding Mode Control. 2013 Conf. Control Fault-Toler. Syst. SysTol, 2013, p. 330–335. doi:10.1109/ SysTol.2013.6693910.
- [Nasri et al., 2019a] Nasri, M., Safia, D., Chadli, M., and Labiod, S. (2019b). H_∞ static output feedback control for electrical power steering subject to actuator saturation via fuzzy lyapunov functions. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41(12) :3340{3351.
- [Nasri et al., 2019b] Nasri, M., Sai_a, D., Chadli, M., and Labiod, S. (2019c). H_∞ switching fuzzy control of solar power generation systems with asymmetric input constraint. *Asian Journal of Control*, 21(4) :1869{1880
- [Nie et al., 2011] C. Nie and R. Patton, “Fault estimation and MRC-based active FTC,” in *18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, 2011.
- [Niemann et al., 2005] H. Niemann and J. Stoustrup. Passive fault tolerant control of a double inverted pendulum-a case study. *Control Engineering Practice*, 13:1047–1059, 2005.
- [Oliveira et al., 2011] Oliveira, R. C. C. F., Oliveira, M. C. D., and Peres, P. L. D. (2011). Robust State Feedback LMI Methods for Continuous-Time Linear Systems : Discussions, Extensions and Numerical Comparisons. In *IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, pages 1038–1043, Denver, USA.
- [Patton et al., 2009] Ron J Patton and Supat Klinkhieo. An adaptive approach to active fault-tolerant control. *The Open Automation and Control Systems Journal*, 2(1), 2009.
- [Peaucelle et al., 2000] Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O., and Bernussou, J. (2000). A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1) :21–30.
- [Rabaoui et al., 2018] Rabaoui, B., Rodrigues, M., Hamdi, H., Braiek, N.B.: A model reference tracking based on an active fault tolerant control for Lpv systems. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* 32(6), 839–857 (2018). <https://doi.org/10.1002/acs.2871>
- [Rugh, 1992] W.J. Rugh. Analytical framework for gain scheduling. *IEEE Control System Magazine*, vol.11, pp. 79-84, 1992.

- [Saifia et al., 2012a] Saifia, D., Chadli, M., Labiod, S., and Guerra, T. M. (2012a). Robust H_∞ static output feedback stabilization of T-S fuzzy systems subject to actuator saturation. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 10(3) :613{622.
- [Saifia et al., 2020] Saifia, D., Chadli, M., Labiod, S., and Guerra, T. M. (2020). Robust H_∞ static output-feedback control for discrete-time fuzzy systems with actuator saturation via fuzzy Lyapunov functions. *Asian Journal of Control*, 22(2) :611{623.
- [Seidi et al., 2012] Seidi, M., Hajiaghdammar, M., and Segee, B. (2012). Fuzzy control systems : LMI-based design. In Iqbal, S., Boumella, N., and Garcia, J. F., editors, *Fuzzy Controllers-Recent Advances in Theory and Applications*, chapter 18, pages 441–464. InTech
- [Staroswiecki , 2005] M. Staroswiecki “Fault tolerant control : the pseudo-inverse method revisited”, *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, 2005.
- [Staroswiecki, 2005] M Staroswiecki. Fault tolerant control using an admissible model matching approach. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2421–2426. IEEE, 2005.
- [Tao, 2003] G. Tao, *Adaptive Control Design and Analysis*. New York, USA: John Wiley and Sons, 2003.
- [Tarbouriech et al., 2011] Tarbouriech, S., Garcia, G., da Silva Jr, J. M. G., and Queinnec, I. (2011). Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators. Springer Science & Business
- [Tarbouriech et Queinnec, 2020] Tarbouriech S et Queinnec I, Tour d’horizon sur les techniques anti-windup pour les systems saturés- Commande anti-windup, *Techniques de l’ingénieur*.
- [Toulotte et al., 2008] Toulotte, P.-F., Delprat, S., Guerra, T.-M., and Boonaert, J. (2008). Vehicle spacing control using robust fuzzy control with pole placement in LMI region. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(5) :756–768.
- [Tseng et al., 2001] C.-S. Tseng, B.-S. Chen, and H.-J. Uang, “Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via TS fuzzy model,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 3, pp. 381–392, 2001
- [Wang et Lin 2000] Wang A.P., Lin S.F., 2000. The Parametric Solutions of Eigenstructure Assignment for Controllable and Uncontrollable Singular Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 248, 549_571.
- [Wu et al., 2016] H.-N. Wu, S. Feng, Z.-Y. Liu, and L. Guo, “Disturbance observer based robust mixed H_2/H_1 fuzzy tracking control for hypersonic vehicles,” *Fuzzy Sets and Systems*, 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2016.02.002>.
- [Xie et De Souza, 1992] Xie, L. and De Souza, C. E. (1992). Robust H infinity control for linear systems with normbounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8) :1188–1191.
- [Yang et Lum 2003] Yang G.H. & Lum K.Y., “Fault tolerant flight tracking control with stuck faults”. *American Control Conference, Denver, June 4-6, 2003*.
- [Zaccarian and Teel, 2011] Zaccarian, L. and Teel, A. R. (2011). Modern anti-windup synthesis : control augmentation for actuator saturation, volume 36. Princeton University Press.
- [Zhang et al., 2021] Zhang, W., Yang, X., Xu, Z. *et al.* An Adaptive Fault-tolerant Control Method for Robot Manipulators. *Int. J. Control Autom. Syst.* **19**, 3983–3995 (2021). <https://doi.org/10.1007/s12555-020-0920-9>
- [Zhang et Jiang, 2002] YM Zhang and Jin Jiang. Active fault-tolerant control system against partial actuator failures. *IEE proceedings-Control Theory and applications*, 149(1) :95–104, 2002.
- [Zhang et Jiang, 2008] Zhang Y. & Jiang J., 2008 ‘Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems’, *Annual Reviews in Control*, 32, pp 229–252.

[Zheng et al., 2002] F. Zheng, Q.-G. Wang, and T. H. Lee, “Output tracking control of MIMO fuzzy nonlinear systems using variable structure control approach,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 10, no. 6, pp. 686–697, 2002.

[Zhou et Khargonekar, 1988] Zhou, K. and Khargonekar, P. P. (1988). Robust stabilization of linear systems with normbounded time-varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, 10(1) :17–20. Media.

6

Conclusion générale et perspectives

Les résultats présentés dans ce travail de recherche apportent une contribution aux problèmes d'observation et de commande des systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles de Takagi-Sugeno. Deux cas de figure ont été considérés : les modèles TS à variables de décision mesurables et les modèles TS à variables de décision non mesurables. De plus, les modèles TS interconnectés ont fait l'objet de quelques développements.

Nous avons proposé de nouvelles conditions de synthèse d'observateurs et de lois de commande prenant en considération des contraintes de \mathcal{D} -stabilité. Cette dernière permet de placer les valeurs propres des matrices liées à la dynamique du système dans une région LMI prédéfinie du plan complexe. Ce qui permet une certaine amélioration des performances d'estimation ou de contrôle et une meilleure maîtrise de la dynamique du système. Toutes les conditions LMIs proposées tout au long de cette thèse sont génériques c'est-à-dire applicables quelque soit la région LMI choisie.

Dans le chapitre 2, un bref état de l'art sur les modèles TS a été proposé. Ainsi, après avoir défini les modèles TS considérés et leurs méthodes d'obtention, nous avons rappelé les résultats essentiels sur l'analyse de stabilité et de stabilisation dans les contextes quadratique et non quadratique. La synthèse d'observateurs a ensuite été abordée. Dans ce cadre, nous nous sommes surtout intéressés aux modèles TS à VDNM. Enfin, nous avons terminé ce chapitre par exposer quelques schémas de relaxation permettant de réduire le conservatisme des conditions de synthèse.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté nos contributions dans le cadre de l'observation des systèmes TS à VDNM sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité. Ce chapitre est organisé en deux parties. La première partie traite de l'estimation d'état et la seconde de l'estimation conjointe de l'état et des entrées inconnues. Dans le contexte de l'estimation d'état, nous avons dans un premier temps proposé un observateur proportionnel basé sur le concept de \mathcal{D} -stabilité et sur l'approche \mathcal{L}_2 . La \mathcal{D} -stabilité permet de placer les valeurs propres des matrices liées à la dynamique de l'erreur d'estimation d'état dans une région LMI choisie et l'analyse de gain \mathcal{L}_2 minimise l'influence des variables de décision non mesurables. Dans un second temps, le lemme de Finsler a été utilisé afin de réduire le conservatisme des conditions LMIs proposées. Les différents exemples de simulation présentés ont clairement montré l'efficacité de ce lemme à relaxer les conditions de synthèse de l'observateur. Nous avons ensuite développé un observateur proportionnel lipschitzien intégrant un deuxième retour de sortie dans ses variables de prémisse. L'objectif de ce retour de sortie supplémentaire est d'éliminer l'influence des constantes de lipschitz dans les conditions de synthèse sous certaines conditions de rang. Dans le contexte de l'estimation conjointe de l'état et des entrées inconnues, nous avons d'abord généralisé les résultats obtenus pour l'observateur proportionnel à la synthèse d'observateurs PI et PMI. Nous avons pu constater à travers les résultats de simulation appliquée à un réacteur à cuve parfaitement agitée que ces observateurs fournissent des estimations satisfaisantes des états et des entrées inconnues en plus de satisfaire les contraintes de \mathcal{D} -stabilité imposées. Nous avons terminé ce chapitre, par la synthèse d'un observateur permettant l'estimation simultanée des états du système et des défauts actionneurs. Cet observateur offre une bonne estimation des défauts considérés. En outre, les conditions de synthèse proposées assurent la \mathcal{D} -stabilité des dynamiques des erreurs d'estimation d'état et d'estimation des défauts.

Le quatrième chapitre est consacré à la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires décrits par des modèles TS interconnectés. Nous avons d'abord étendu les résultats obtenus dans la première partie du chapitre 3 à ces modèles. Ensuite, la relaxation des conditions de synthèse par le lemme de Finsler a été considérée. Les approches développées ont été appliquées en simulation à un système de pile à combustible à membrane échangeuse de protons. Finalement, des observateurs interconnectés permettant l'estimation conjointe des états et des paramètres variant dans le temps ont été développés. Des conditions de synthèse assurant la \mathcal{D} -stabilité des dynamiques des erreurs d'estimation des états et d'estimation des paramètres variant dans le temps ont été proposées.

Le cinquième chapitre est dédié à la synthèse de différentes lois de commande \mathcal{D} -stables pour les systèmes TS à VDM. Nous avons tout d'abord présenté quelques résultats récents sur la \mathcal{D} -stabilisation quadratique et non quadratique de ces systèmes. Nous nous sommes ensuite intéressés à la \mathcal{D} -stabilisation en présence de saturations d'actionneurs. Nous avons proposé des conditions de synthèse de commandes contraintes et saturantes permettant au système en boucle fermée d'être \mathcal{D} -stable en maximisant l'estimation du domaine d'attraction. La poursuite de trajectoire générée par un modèle de référence a aussi été examinée. Nous avons développé des commandes PDC et non PDC basées sur des fonctions de Lyapunov poly-quadratiques dépendant ou non des bornes des dérivées des fonctions d'activation. Les approches proposées ont été appliquées en simulation au contrôle de la position et de la vitesse angulaire d'un pendule inversé. En dernier lieu, la synthèse d'une commande tolérante aux défauts actionneurs a été abordée. Des conditions permettant au système en boucle fermée et aux dynamiques des erreurs d'estimation des états et des défauts d'être \mathcal{D} -stables ont été présentées. Les résultats de simulation présentés ont illustré l'efficacité de la commande FTC proposée.

Perspectives

Les travaux proposés dans cette thèse ouvrent la voie à de nombreuses perspectives dans le contexte du formalisme de Takagi-Sugeno, nous en présentons seulement cinq :

- Utilisation d'une fonction de Lyapunov à intégrale curviligne dans la synthèse \mathcal{D} -stable d'observateurs et de lois de commande [Gonzalez et al., 2017].
- Synthèse d'une commande anti-windup permettant au système en boucle fermée d'être \mathcal{D} -stable en maximisant l'estimation du domaine d'attraction [Nguyen et al., 2016].
- Développement de commandes par mode glissant d'ordre un ou d'ordre supérieur sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité [Soltanian et al., 2022].
- Synthèse \mathcal{D} -stable de commandes avec coût garanti (Guaranteed Cost Control) [Pang et al., 2016].
- Synthèse de lois de commande basées sur une fonction de Lyapunov à commutation sous contraintes de \mathcal{D} -stabilité [Elias et al., 2021].

Bibliographie

[Gonzalez et al., 2017] T. Gonzalez, A. Sala, M. Bernal, R. Robles, A generalisation of line-integral Lyapunov function for Takagi–Sugeno systems, in: Proceedings of the 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control, Toulouse, France, 2017.

[Nguyen et al., 2016] Nguyen, A.-T., Dambrine, M., and Lauber, J. (2016). Simultaneous Design of Parallel Distributed Output Feedback and Anti-windup Compensators for Constrained Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. *Asian Journal of Control*.

[Soltanian et al., 2022] F. Soltanian, M. Shasadeghi, S. Mobayen and A. Fekih, "Adaptive Optimal Multi-Surface Back-Stepping Sliding Mode Control Design for the Takagi-Sugeno Fuzzy Model of

Uncertain Nonlinear System With External Disturbance," IEEE Access, vol. 10, no. 31, pp. 14680-14690, 2022

[Pang et al., 2016] B. Pang, X. Liu, Q. Jin and W. Zhang, Exponentially stable guaranteed cost control for continuous and discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems, Neurocomputing, 2015 (2016) 210-221.

[Elias et al., 2021] L. J. Elias, F. A. Faria, R. Araujo, and V. A. Oliveira, "Stability analysis of Takagi-Sugeno systems using a switched fuzzy Lyapunov function," Inf. Sci., vol. 543, pp. 43–57, 2021.

Annexe A : Stabilité au sens de Lyapunov

Dans cette annexe est abordée la stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes non linéaires autonomes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Définition A.1 (Point d'équilibre)

L'état x_e est dit état ou point d'équilibre pour le système (A.1), si $x(t_1)=x_e$ implique $x(t)=x_e$ pour tout $t \geq t_1$ ou tout simplement que l'état x_e vérifie $f(x_e)=0$.

Définition A.2 (Stabilité au sens de Lyapunov)

Le point d'équilibre x_e est dit stable si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, t \geq t_0. \tag{A.2}$$

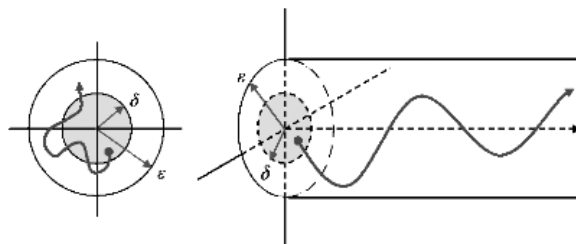


Fig.A.1. Illustration de la stabilité au sens de Lyapunov.

Cela veut dire que quelque soit une boule de rayon ε centrée sur l'équilibre, il existe une sous-boule de rayon $\delta(\varepsilon)$ telle que la trajectoire issue de n'importe quelle condition initiale dans cette sous-boule de rayon δ ne quittera jamais la boule de rayon ε .

Définition A.3 (Attractivité)

Le point d'équilibre x_e est dit attractif s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0. \tag{A.3}$$

Si l'état est initialisé dans un certain voisinage de l'état d'équilibre alors la trajectoire issue de cet état initial convergera vers l'état d'équilibre au bout d'un temps suffisant même infini.

Définition A.4 (Instabilité au sens de Lyapunov)

Un système dynamique est dit instable au sens de Lyapunov s'il n'est pas stable au sens de la définition A.2.

Définition A.5 (Stabilité asymptotique)

Le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

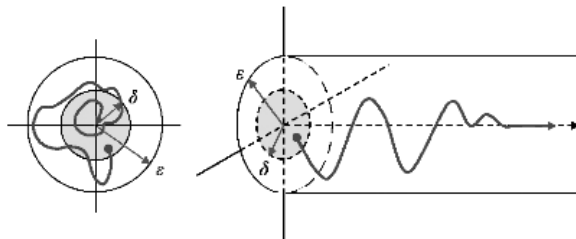


Fig.A.2. Illustration de la stabilité asymptotique.

Définition A.6 (Stabilité exponentielle)

Le point d'équilibre x_e est exponentiellement stable s'il existe $\alpha > 0$ tel que, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que

$$\forall t \geq t_0, \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \|x_0 - x_e\| \exp(-\alpha(t - t_0)). \quad (\text{A.4})$$

Définition A.7 (Stabilité globale)

Si la condition de stabilité asymptotique (resp. exponentielle) est vérifiée dans tout \mathbb{R}^n , le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (resp. exponentiellement) stable.

Définition A.8 (Candidat de Lyapunov)

Toute fonction $V(x)$ définie positive et continue est appelée candidat de Lyapunov.

Définition A.9 (Fonction de Lyapunov)

Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov de classe \mathcal{C}^1 ayant la propriété suivante

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0; \quad \dot{V}(x) = 0 \text{ si } x=0 \quad (\text{A.5})$$

On considère comme point d'équilibre l'origine 0 de l'espace d'état \mathbb{R}^n .

Lemme A.1 (Stabilité au sens de Lyapunov)

Soit $x_e=0$ un point d'équilibre du système (A.1) et $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de ce point d'équilibre. S'il existe une fonction de Lyapunov V définie sur \mathcal{V} vérifiant $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in -\{0\}$, alors le point d'équilibre x_e est stable au sens de Lyapunov.

Lemme A.2 (Stabilité asymptotique)

Soit $x_e=0$ un point d'équilibre du système (A.1) et $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de ce point d'équilibre s'il existe une fonction de Lyapunov V définie sur \mathcal{V} , vérifiant en plus $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in -\{0\}$ alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Lemme A.3 (Stabilité asymptotique globale)

Soit $x_e=0$ un point d'équilibre du système (A.1) et soit la fonction $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , telle que

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad (\text{A.6})$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty, \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n - \{0\}. \quad (\text{A.8})$$

alors x_e est globalement asymptotiquement stable.

Lemme A.4

Considérons un système linéaire défini par

$$\dot{x} = Ax, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A.9})$$

- Le point d'équilibre zéro est stable au sens de Lyapunov si et seulement si toute valeur propre de A est à partie réelle négative ou nulle et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.
- Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative alors le point d'équilibre zéro est asymptotiquement stable.
- S'il existe une valeur propre de A à partie réelle strictement positive alors le point d'équilibre zéro est instable.

Définition A.10

Lorsque toute valeur propre de A est à partie réelle strictement négative $Re(\lambda_i) < 0$, alors la matrice A est dite matrice de Hurwitz ou matrice de stabilité.

Annexe B : Eléments d'analyse et d'optimisation convexes

Dans cette annexe, nous introduisons quelques définitions et propriétés de base de l'analyse convexe et des inégalités linéaires matricielles.

Définitions de base

Définition B.1 (Ensemble convexe)

Soient x, y deux points dans \mathbb{R}^n . L'ensemble

$$[x \ y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}, \quad (B.1)$$

est appelé un segment avec les extrémités x et y .

Un sous-ensemble Ω de \mathbb{R}^n est convexe s'il contient avec une paire quelconque de ses points x, y également le segment $[x \ y]$:

$$\forall x \in \Omega, \forall y \in \Omega, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega. \quad (B.2)$$

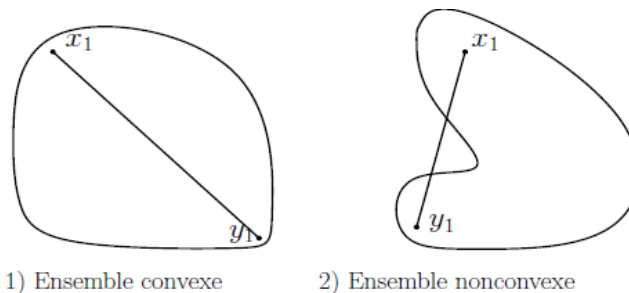


Fig.B.1. Exemples d'ensemble convexe et non convexe.

Définition B.2 (Combinaison convexe)

Soit un ensemble de vecteurs $\Omega = \{y_i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. La combinaison convexe de l'ensemble Ω est la combinaison linéaire

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i, \quad (B.3)$$

avec $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Définition B.3 (Fonctions convexes)

La fonction $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est convexe si $\text{dom}(f)$ est un ensemble convexe et pour tout $x_1, x_2 \in \text{dom}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $0 \leq \lambda \leq 1$, nous avons

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \quad (B.4)$$

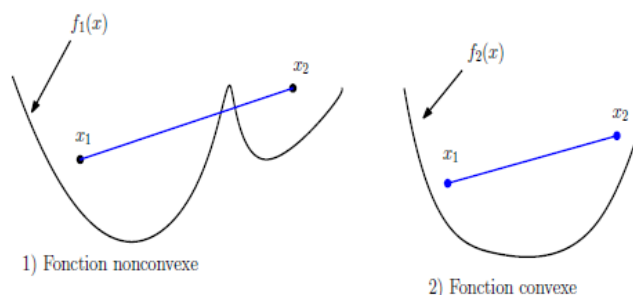


Fig.B.2. Exemples de fonction convexe et non convexe.

Ensembles convexes populaires

Définition B.4 (Polyèdre)

Un polyèdre est défini comme l'ensemble de solutions d'un nombre fini d'égalités et d'inégalités linéaires

$$\Omega(H, h, G, g) = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq h, Gx = g\}, \quad (B.5)$$

avec $H \in \mathbb{R}^{m \times n}, h \in \mathbb{R}^m, G \in \mathbb{R}^{p \times n}, g \in \mathbb{R}^p$.

Un polyèdre peut être défini par l'intersection d'un nombre fini de demi-espace. Il peut être représenté comme suit

$$\Omega(H, h) = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq h\} = \{x \in \mathbb{R}^n : H_i x \leq h_i, i = 1, \dots, m\}. \quad (B.6)$$

Définition B.5 (Polytope)

Un polytope est un polyèdre borné.

Définition B.6

Pour un ensemble de sommets, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in \mathbb{R}^n$, le polyèdre peut être défini comme suit

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m : \alpha_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1\}. \quad (B.7)$$

Définition B.7 (Ellipsoïde générique)

Un ellipsoïde est un ensemble de cette forme

$$\varepsilon(P, x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0)^T P (x - x_0) \leq \rho\}, \quad (B.8)$$

avec $P=P^T$ est une matrice symétrique définie positive, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est le centre de l'ellipsoïde et $\rho \in \mathbb{R}_+$ est un scalaire positif.

Définition B.8 (Ellipsoïde normalisé)

L'ellipsoïde normalisé est défini comme suit

$$\varepsilon(P, x_0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0)^T P (x - x_0) \leq 1\}. \quad (B.9)$$

Optimisation convexe

Définition B.9 (Problème d'optimisation convexe)

Un problème d'optimisation convexe est donné sous cette forme

$$\min_x f_0(x) \quad (B.10)$$

$$\text{soumis à } f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \quad (B.11)$$

$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p. \quad (B.12)$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'optimisation,
- $f_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction objectif ou fonction coût,
- $f_i(x) \leq 0$ sont les contraintes d'inégalités,
- $h_j(x) = 0$ sont les contraintes d'égalités.

Définition B.10 (Problème d'optimisation linéaire)

Un problème d'optimisation linéaire est donné sous cette forme

$$\min_x c^T x + d \quad (B.13)$$

$$\text{soumis à } Gx \leq h, \quad (B.14)$$

$$Ax = b. \tag{B.15}$$

avec $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $e \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Définition B.11 (Problème d'optimisation semi-définie positive)

Un problème d'optimisation semi-définie positive est donné sous la forme suivante

$$\min_x c^T x \tag{B.16}$$

$$\text{soumis à } x_1 G_1 + \dots + x_n G_n + G_0 \leq 0, \tag{B.17}$$

$$Ax = b. \tag{B.18}$$

avec G_0, G_1, \dots, G_n sont des matrices symétriques et $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Définition B.12 (Inégalité matricielle linéaire)

Une inégalité matricielle linéaire a la forme suivante

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i \leq 0, \tag{B.19}$$

avec $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ représente la variable de décision et $F_i = F_i^T$.

Problèmes classiques LMIs

Problème de faisabilité

Etant donné la LMI

$$F(x) > 0. \tag{B.20}$$

Le problème LMI associé est de trouver x tel que (B.20) est satisfaite. La résolution de ce problème consiste à chercher le vecteur x minimisant le scalaire t tel que

$$-F(x) < tI_n. \tag{B.21}$$

Si la valeur minimale de t est négative alors le problème (B.20) est dit faisable.

Problème de valeur propre

Ce problème consiste à minimiser la plus grande valeur propre de la matrice $A(x)$ sous contraintes LMIs

$$\min \lambda \tag{B.22}$$

$$\text{sous contraintes } \lambda I - A(x) > 0, \tag{B.23}$$

$$B(x) > 0. \tag{B.24}$$

où les matrices $A(x)$ et $B(x)$ sont symétriques et linéaires par rapport à x .

Problème de valeur propre généralisée

Ce problème consiste à minimiser la plus grande valeur propre d'une paire de matrices dépendant linéairement de x , sous contraintes LMIs

$$\min \lambda \tag{B.25}$$

$$\text{sous contraintes } \lambda B(x) - A(x) > 0, \tag{B.26}$$

$$B(x) > 0, \tag{B.27}$$

$$C(x) > 0. \tag{B.28}$$

Annexe C : Matrices A_i et fonctions d'activation du modèle TS (3.146)

| Modèle local | A_i | $h_i(x)$ | Modèle local | A_i | $h_i(x)$ |
|--------------|--|--------------------------------|--------------|--|--------------------------------|
| 1 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -az_{2,1} & -r_2 z_{3,1} & 0 \\ p_2 z_{4,1} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1}F_{2,1}F_{3,1}F_{4,1}$ | 9 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -az_{2,1} & -r_2 z_{3,1} & 0 \\ p_2 z_{4,1} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2}F_{2,1}F_{3,1}F_{4,1}$ |
| 2 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -az_{2,1} & -r_2 z_{3,1} & 0 \\ p_2 z_{4,2} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1}F_{2,1}F_{3,1}F_{4,2}$ | 10 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -az_{2,1} & -r_2 z_{3,1} & 0 \\ p_2 z_{4,2} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2}F_{2,1}F_{3,1}F_{4,2}$ |
| 3 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -az_{2,1} & -r_2 z_{3,2} & 0 \\ p_2 z_{4,1} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1}F_{2,1}F_{3,2}F_{4,1}$ | 11 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -az_{2,1} & -r_2 z_{3,2} & 0 \\ p_2 z_{4,1} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2}F_{2,1}F_{3,2}F_{4,1}$ |
| 4 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -az_{2,1} & -r_2 z_{3,2} & 0 \\ p_2 z_{4,2} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1}F_{2,1}F_{3,2}F_{4,2}$ | 12 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -az_{2,1} & -r_2 z_{3,2} & 0 \\ p_2 z_{4,2} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2}F_{2,1}F_{3,2}F_{4,2}$ |
| 5 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -az_{2,2} & -r_2 z_{3,1} & 0 \\ p_2 z_{4,1} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1}F_{2,2}F_{3,1}F_{4,1}$ | 13 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -az_{2,2} & -r_2 z_{3,1} & 0 \\ p_2 z_{4,1} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2}F_{2,2}F_{3,1}F_{4,1}$ |
| 6 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -az_{2,2} & -r_2 z_{3,1} & 0 \\ p_2 z_{4,2} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1}F_{2,2}F_{3,1}F_{4,2}$ | 14 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -az_{2,2} & -r_2 z_{3,1} & 0 \\ p_2 z_{4,2} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2}F_{2,2}F_{3,1}F_{4,2}$ |
| 7 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -az_{2,2} & -r_2 z_{3,2} & 0 \\ p_2 z_{4,1} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1}F_{2,2}F_{3,2}F_{4,1}$ | 15 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -az_{2,2} & -r_2 z_{3,2} & 0 \\ p_2 z_{4,1} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2}F_{2,2}F_{3,2}F_{4,1}$ |
| 8 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,1} \\ -az_{2,2} & -r_2 z_{3,2} & 0 \\ p_2 z_{4,2} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1}F_{2,2}F_{3,2}F_{4,2}$ | 16 | $\begin{bmatrix} -\mu_2 & c & p_1 z_{1,2} \\ -az_{2,2} & -r_2 z_{3,2} & 0 \\ p_2 z_{4,2} & 0 & -\mu_3 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2}F_{2,2}F_{3,2}F_{4,2}$ |

Tableau C.1. Matrices A_i et fonctions d'activation du modèle TS (3.146).

Annexe D : Paramètres de la pile à combustible à membrane échangeuse de protons (PEMFC)

Constantes du modèle non linéaire du système à PEMFC

| | | | |
|---|---|--|--|
| $c_1 = \frac{RT_{st} k_{sm,out}}{M_{O_2} V_{ca}} \left(\frac{x_{O_2,atm}}{1 + \omega_{atm}} \right)$ | $c_7 = \frac{RT_{st} n}{4FV_{ca}}$ | $c_{12} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ | $c_{17} = \frac{C_D A_T}{\sqrt{RT_{st}}} \sqrt{2\gamma}$ |
| $c_2 = p_{sat}$ | $c_8 = \frac{RT_{st} k_{sm,out}}{M_{N_2} V_{ca}} \left(\frac{1 - x_{O_2,atm}}{1 + \omega_{atm}} \right)$ | $c_{13} = \frac{\eta_{cm} k_t}{J_{cp} R_{cm}}$ | $c_{18} = \frac{1}{\gamma}$ |
| $c_3 = \frac{RT_{st}}{V_{ca}}$ | $c_9 = \frac{\eta_{cm} k_t k_v}{J_{cp} R_{cm}}$ | $c_{14} = \frac{RT_{atm}}{M_{a,atm} V_{sm}}$ | $c_{19} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$ |
| $c_4 = M_{O_2}$ | $c_{10} = \frac{C_p T_{atm}}{J_{cp} \eta_{cp}}$ | $c_{15} = \frac{1}{\eta_{cp}}$ | $c_{20} = \frac{C_D A_T}{\sqrt{RT_{st}}} \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma - 2}}$ |
| $c_5 = M_{N_2}$ | $c_{11} = p_{atm}$ | $c_{16} = k_{sm,out}$ | $\omega_{atm} = \frac{M_v}{y_{O_2,atm} M_{O_2} + (1 - y_{O_2,atm}) M_{N_2}} \cdot \frac{\varphi_{atm} p_{sat}}{p_{atm} - \varphi_{atm} p_{sat}}$ |
| $c_6 = M_v p_{sat}$ | | | $x_{O_2,atm} = \frac{y_{O_2,atm} M_{O_2}}{y_{O_2,atm} M_{O_2} + (1 - y_{O_2,atm}) M_{N_2}}$ |

Tableau D.1. Constantes du modèle (4.18-4.21).

Paramètres du modèle non linéaire du système à PEMFC

| Paramètre | Description | Valeur | Paramètre | Description | Valeur |
|---------------|--|--------------------------------------|-------------------|--|----------------------|
| η_{cp} | Rendement du compresseur | 0,8 | V_{sm} | Volume du tuyau d'alimentation | 0,02 m ³ |
| η_{cm} | Rendement du moteur du compresseur | 0,98 | T_{st} | Température du stack | 353,15 K |
| J_{cp} | Inertie du compresseur | 5.10 ⁻⁵ kg.m ² | T_{atm} | Température atmosphérique | 298,15 K |
| R_{cm} | Résistance du circuit du moteur du compresseur | 0,82 Ω | p_{atm} | Pression atmosphérique | 101325 Pa |
| k_t | Constante du couple moteur | 0,0153 N.m/A | R | Constante universelle des gaz | 8,3145 J/(mol.K) |
| k_v | Constante électrique du moteur | 0,0153 V/rad/s | C_p | Coefficient calorifique spécifique de l'air | 1004 J/(kg.K) |
| $M_{a,atm}$ | Masse molaire de l'air atmosphérique | 29.10 ⁻³ kg/mol | C_D | Coefficient de décharge de l'ouverture de sortie | 0,0124 |
| M_{O_2} | Masse molaire de l'oxygène | 32. 10 ⁻³ kg/mol | Γ | Rapport calorifique spécifique de l'air | 1,4 |
| M_{N_2} | Masse molaire de l'azote | 28. 10 ⁻³ kg/mol | A_T | Surface de sortie de la cathode | 0,002 m ³ |
| M_v | Masse molaire de la vapeur | 18. 10 ⁻³ kg/mol | φ_{atm} | Humidité relative | 0,5 |
| $y_{O_2,atm}$ | Fraction molaire de l'oxygène | 0,21 | N | Nombre de cellules | 381 |
| V_{ca} | Volume de la cathode | 0,01 m ³ | F | Constante de Faraday | 96485,3415 A.s/mol |
| $k_{sm,out}$ | Constante de l'orifice de sortie du tuyau d'alimentation | 0,3629.10 ⁻⁵ kg/(Pa.s) | $p_{sat}(T_{st})$ | Pression de saturation de la vapeur | |

Tableau D.2. Paramètres du modèle (4.18-4.21).

Matrices et fonctions d'activation du sous-modèle TS₁

| Modèle local | A_{j1}^1 | B_{j1}^1 | D_{j1}^2 | $h_{j1}^1(x_1)$ |
|--------------|---|---|--|-------------------|
| 1 | $\begin{bmatrix} -c_1 - c_8 - z_{1,1} & c_2 z_{1,1} z_{2,1} \\ -c_8 & -z_{1,1} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -c_7 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & c_1 + c_8 \\ 0 & c_8 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1} F_{2,1}$ |
| 2 | $\begin{bmatrix} -c_1 - c_8 - z_{1,1} & c_2 z_{1,1} z_{2,2} \\ -c_8 & -z_{1,1} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -c_7 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & c_1 + c_8 \\ 0 & c_8 \end{bmatrix}$ | $F_{1,1} F_{2,2}$ |
| 3 | $\begin{bmatrix} -c_1 - c_8 - z_{1,2} & c_2 z_{1,2} z_{2,1} \\ -c_8 & -z_{1,2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -c_7 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & c_1 + c_8 \\ 0 & c_8 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2} F_{2,1}$ |
| 4 | $\begin{bmatrix} -c_1 - c_8 - z_{1,2} & c_2 z_{1,2} z_{2,2} \\ -c_8 & -z_{1,2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -c_7 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & c_1 + c_8 \\ 0 & c_8 \end{bmatrix}$ | $F_{1,2} F_{2,2}$ |

Tableau D.3. Matrices et fonctions d'activation du sous-modèle (4.28).

Matrices et fonctions d'activation du sous-modèle TS₂

| Modèle local | A_{j2}^2 | B_{j2}^2 | D_{j2}^1 | $h_{j2}^2(x_2)$ |
|--------------|--|---|---|---------------------------|
| 1 | $\begin{bmatrix} -c_9 - c_{10} z_{3,1} z_{4,1} z_{5,1} & 0 \\ c_{14} (1 + c_{15} z_{3,1}) z_{4,1} & -c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,1}) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} c_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,1}) \end{bmatrix}$ | $F_{3,1} F_{4,1} F_{5,1}$ |
| 2 | $\begin{bmatrix} -c_9 - c_{10} z_{3,1} z_{4,1} z_{5,2} & 0 \\ c_{14} (1 + c_{15} z_{3,1}) z_{4,1} & -c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,1}) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} c_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,1}) \end{bmatrix}$ | $F_{3,1} F_{4,1} F_{5,2}$ |
| 3 | $\begin{bmatrix} -c_9 - c_{10} z_{3,1} z_{4,2} z_{5,1} & 0 \\ c_{14} (1 + c_{15} z_{3,1}) z_{4,2} & -c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,1}) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} c_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,1}) \end{bmatrix}$ | $F_{3,1} F_{4,2} F_{5,1}$ |
| 4 | $\begin{bmatrix} -c_9 - c_{10} z_{3,1} z_{4,2} z_{5,2} & 0 \\ c_{14} (1 + c_{15} z_{3,1}) z_{4,2} & -c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,1}) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} c_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,1}) \end{bmatrix}$ | $F_{3,1} F_{4,2} F_{5,2}$ |
| 5 | $\begin{bmatrix} -c_9 - c_{10} z_{3,2} z_{4,1} z_{5,1} & 0 \\ c_{14} (1 + c_{15} z_{3,2}) z_{4,1} & -c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,2}) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} c_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,2}) \end{bmatrix}$ | $F_{3,2} F_{4,1} F_{5,1}$ |
| 6 | $\begin{bmatrix} -c_9 - c_{10} z_{3,2} z_{4,1} z_{5,2} & 0 \\ c_{14} (1 + c_{15} z_{3,2}) z_{4,1} & -c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,2}) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} c_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,2}) \end{bmatrix}$ | $F_{3,2} F_{4,1} F_{5,2}$ |
| 7 | $\begin{bmatrix} -c_9 - c_{10} z_{3,2} z_{4,2} z_{5,1} & 0 \\ c_{14} (1 + c_{15} z_{3,2}) z_{4,2} & -c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,2}) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} c_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,2}) \end{bmatrix}$ | $F_{3,2} F_{4,2} F_{5,1}$ |
| 8 | $\begin{bmatrix} -c_9 - c_{10} z_{3,2} z_{4,2} z_{5,2} & 0 \\ c_{14} (1 + c_{15} z_{3,2}) z_{4,2} & -c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,2}) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} c_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_{14} c_{16} (1 + c_{15} z_{3,2}) \end{bmatrix}$ | $F_{3,2} F_{4,2} F_{5,2}$ |

Tableau D.4. Matrices et fonctions d'activation du sous-modèle (4.29).