

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique

Université Mouloud MAMMERI de TIZI-OUZOU
Faculté du Génie de la construction
Département de Génie Civil
Laboratoire LAMOMS

MEMOIRE DE MAGISTER

EN GENIE CIVIL
Option : Modélisation et Calcul Non Linéaire

Présenté par :

Mademoiselle **KAOUANE Taoues**

THEME

**Modélisation du comportement en cisaillement jusqu'à rupture
des sections de poutres en béton armé et précontraint**

Devant le jury d'examen suivant :

Mr BOUAFIA Youcef	Professeur UMMTO	Président
Mr KACHI Mohand Said	Maitre de conférences A UMMTO	Rapporteur
Mr AIT TAHAR Kamel	Professeur UMMTO	Examineur
Mr DRIZI Said	Maitre de conférences A UMMTO	Examineur

Soutenu le 14/ 11/2011

DEDICACES

Je tiens à dédier ce travail à :

- *La mémoire de mon père que Dieu l'accueil en son vaste paradis.*
- *Ma très chère mère*
- *Mes chers (es) frères et sœurs qui n'ont jamais cessés de me donner du soutien.*
- *Mes beaux frères et mes belles sœurs.*
- *Mes nièces et mes neveux.*
- *Tous mes amis(es)*
- *Tous mes collègues du service technique de l'APC de Timizart.*

REMERCIEMENTS

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements à monsieur KACHI Mohand Said, Maitre assistant (A) et chargé de cours au département de Génie-Civil à l'Université de TIZI-OUZOU , de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir bien voulu diriger et assurer la supervision de ce mémoire. Ses conseils pertinents , son suivi et son intérêt constant ,m'ont soutenus au long de mon travail.

Je témoigne toute ma profonde reconnaissance et ma sympathie à monsieur Y.BOUAFIA, Docteur de l'Ecole de Paris et professeur au département de Génie- Civil d'avoir mis à ma disposition tous les moyens pédagogiques nécessaires pour réaliser ce travail.

J'exprime ma reconnaissance et sympathie à madame SEMAHI Rebiha , Maitre assistante au département de Genie-Civil de TIZI-OUZOU pour son aide et ses encouragements.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du corps enseignant qui a contribué à ma formation.

Je remercie les membres de jury qui ont bien voulu juger ce travail et d'y apporter leurs remarques constructives.

Que tous ceux qui ont contribué aussi bien de près que de loin à ma formation trouvent ma profonde reconnaissance.

Enfin, je rends hommage à toute ma famille et amis pour le soutien qu'ils m'ont donné durant toutes ces années d'étude.

RESUME

Plusieurs études expérimentales et théoriques ont été effectuées de part le monde sur le comportement des éléments en béton armé ou précontraint en cisaillement. Ainsi plusieurs études ont été orientées vers la construction d'un modèle général de comportement du béton armé en cisaillement. Il a été remarqué que l'angle d'inclinaison des directions principales des contraintes et des déformations n'est en fait qu'une condition par mise des conditions d'équilibre.

Il s'agit alors de construire un modèle théorique pour l'analyse du comportement en cisaillement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et /ou précontraint soumises à l'effet combiné d'un moment fléchissant, d'un effort normal, et d'un effort tranchant. Pour une section de poutre donnée, elle est définie par une succession de couche de béton et d'éléments longitudinaux d'acier. Chaque couche est définie par sa hauteur h_i , sa largeur b_i , et sa position par rapport à une extrémité de la section YGi. Chaque élément longitudinal d'acier est également défini par sa section transversale, le seuil de plasticité, la déformation initiale de précontrainte, et sa position par rapport à une extrémité de la section. Le modèle devra permettre alors l'analyse des poutres avec des formes de section et des détails de ferrailage variables. Chaque couche de béton et chaque élément longitudinal d'acier est alors analysé séparément mais la condition d'équilibre de la section est satisfaite globalement. Enfin le modèle est développé pour le cas de sollicitations planes $\sigma_z = 0$, on peut alors étudier des section soumises à une flexion composée avec un effort tranchant.

Mots clés :

Moment, effort normal, effort tranchant, comportement bidimensionnel, béton armé, béton précontraint, rigidité de cisaillement.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
 CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	
I.1. Comportement en cisaillement des éléments	3
I.2 Essais de l'université de TORONTO	4
I.2.1. Méthodes de calcul.....	17
I.2.1.1. Etude d'un élément isolé.....	17
I.2.1.1.1 Hypothèses fondamentales de la méthode.....	17
I.2.1.1.2. Hypothèses de calcul.....	18
I.2.1.1.3 Base du model.....	18
I.2.1.1.4 Equations d'équilibre.....	18
I.2.1.1.5 Equations de compatibilité.....	20
I.2.1.1.6. Comportement des matériaux.....	21
I.2.1.1.6.1 Comportement du béton en compression.....	21
I.2.1.1.6.2. Comportement du béton en traction.....	23
I.2.1.1.6.3. Comportement de l'acier.....	24
I.2.2. Modeles de calcul	24
I.2.2.1. Modèle de Vecchio et Collins.....	24
I.2.2.1.1 Élément sous effort tranchant et contraintes normales constantes.....	24
I.2.2.1.2. Élément sous effort tranchant constant et contraintes normales Variables.....	28
I.2.2.1.3 Méthode générale de résolution pour un élément isolé	32
I.2.2.2 Modèle de Stanciuliscu.....	37
I.2.2.3 Modele de KACHI.....	44
I.3.Conclusion.....	45
 CHAPITRE II : CALCUL DE LA RIGIDITE A L'EFFORT TRANCHANT D'UNE SECTION DE POUTRE ARME	
II.1. Introduction.....	47
II.2. Etude de l'équilibre d'une poutre en élasticité non linéaire.....	47
II.3. Exposé général de la modélisation.....	49
II.3.1. Domaine d'application.....	49
II.3.2. Discrétisation de la poutre.....	49
II.3.3. Principes de la modélisation et équations générales	49

II.3.3.1. Milieux continus équivalents.....	49
II.3.3.1. 1. En déformations.....	49
II.3.3.1. 2. En contraintes.....	50
II.3.3.2.Compatibilité partielle des déformations du béton avec les déformations moyennes	51
II.3.3.3. Equations d'équilibre	51
II.3.3.3. 1. Equilibre local des couches.....	51
II.3.3.3. 2. Equilibre global des sections.....	51
II.4. Lois de comportement des matériaux.....	52
II.4.1. Comportement du béton en compression dans la direction D_2	52
II.4.2. Comportement du béton en traction dans la direction D_1	53
II.4.3. Comportement de l'acier.....	53
II.4.3.1 Comportement des aciers passifs.....	53
II.4.3.2 Comportement des aciers actifs.....	55
II.5. Calculs spécifiques relatifs à l'effort tranchant.....	56
II.5.1. Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$	56
II.5.2. Calcul de la distorsion moyenne	57
II.6. Résolution du problème.....	58
II.6.1. Transformation des équations générales.....	58
II.6.2. Algorithme et organigramme de calcul	58
CHAPITRE III : ÉTUDE D'UNE SECTION DROITE	
III.1.Introduction	61
III.2. Calcul des sollicitations internes.....	63
III.3 .Déformation de la section à l'équilibre.....	68
III.4. Méthode itérative de résolution et critères de convergence.....	69
III.5. Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section.....	70
III.6 Organisation Générale de la recherche de l'équilibre d'une section	71
III.6.1 Algorithme de calcul	72
III.6.2 Organigramme général de calcul	76
CHAPITRE IV : VALIDATION DU MODELE DE CALCUL	
IV.1 Introduction.....	79
IV.2. Essais de l'Université de Toronto –Comportement de section.....	79
Chapitre V : CONCLUSION GENERALE.....	90
BIBLIOGRAPHIE.....	91

LISTE DES FIGURES

Chapitre I :

Figure 1.1 : Dispositif formant une clé d'effort tranchant

Figure 1.2: Disposition des clés autour de l'élément

Figure 1.3: Cercle de Mohr des déformations

Figure 1.4 : Cercle de Mohr des contraintes pour le voile PV1

Figure 1.5 : Comportement de l'élément PV12

Figure 1.6 : Comportement des voiles PV5, PV13, PV18, et PV20

Figure 1.7 : Caractéristiques géométriques des poutres et disposition du chargement

Figure 1.8 : Section transversale et disposition des armatures passives

Figure 1.9 : Disposition des armatures passives et actives pour l'ensemble des poutres.

Figure 1.10 : Mode rupture des poutres à l'appui ouest

Figure 1.11 : Direction des contraintes principales pour les poutres

Figure 1.12 : Caractéristiques des éléments du portique et détails de ferrailage.

Figure 1.13 : Schéma de chargement du portique.

Figure 1.14 : Comportement de la structure.

Figure 1.15 : Evolution de la distorsion au niveau des éléments du portique en fonction du chargement.

Figure 1.16 : Elément fissuré en béton armé.

Figure 1.17 Contraintes moyennes dans le béton.

Figure 1.18 : Cercle de Mohr pour les contraintes moyennes

Figure 1.19 : Cercle de Mohr pour les déformations moyennes.

Figure 1.20 : Comportement du béton en compression.

Figure 1.21 : Comportement du béton en traction.

Figure 1.22 : Elément en béton armé soumis à un cisaillement et à des contraintes normales constantes.

Figure 1.23. Modèle simple du treillis.

Figure 1.24. Comportement local du béton armé dans le sens y, dans l'âme.

Chapitre II :

Figure 2.1. Section de poutre discrétisée en couches.

Figure 2.2. Comportement du béton en traction.

Figure 2.3 : Comportement des aciers naturels.

Figure 2.4: Comportement des aciers écrouis.

Figure 2.5: Comportement des aciers actifs

Figure 2.6. Forces agissant sur une couche de béton entre deux sections.

Chapitre III

Figure 3.1 : Description d'une section typique d'une poutre en béton armé et précontraint.

Chapitre IV

Figure 4.1 Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA3.

Figure 4.2. Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA4.

Figure 4.3 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre Sk1.

Figure 4.4 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre Sk2.

Figure 4.5 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre Sk3.

Figure 4.6: Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre Sk4.

Figure 4.7: Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP0.

Figure 4.8 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP1.

Figure 4.9 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP2.

Figure 4.10 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP3.

Figure 4.11 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SM1.

Figure 4.12 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SF1.

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre IV

Tableau 4.1. Propriétés des différentes poutres (Vecchio et Collins 1982 et 1988).

Tableau 4.2. Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de l'effort tranchant.

Tableau 4.3 . Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de l'effort tranchant.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le problème de cisaillement dans les constructions en béton armé et précontraint est depuis longtemps l'objet d'études expérimentales et théoriques dans plusieurs laboratoires et centres de recherches dans le monde.

La plupart des sections en béton armé, béton précontraint sont calculées suivant le formalisme linéaire de la théorie de l'élasticité établie au 19^{eme} siècle .Or de nombreux essais effectués sur ces sections et les matériaux constitutifs laissent penser qu'il n'est pas possible d'obtenir, par le calcul linéaire, une représentation exacte de la déformabilité des sections.

Actuellement, de nombreux modèles numériques permettent de caractériser le comportement en cisaillement d'une section de poutre en béton armé ou béton précontraint.

L'objet de notre travail est l'élaboration d'une méthode de calcul basée sur l'élasticité non linéaire, permettant la modélisation jusqu'à rupture des sections de poutres en béton armé soumises à l'effort tranchant en tenant en compte des lois de comportement non linéaire des matériaux.

Sur la base de cette étude, un programme informatique est élaboré suivant les normes FORTAN 90, puis confronté à des résultats expérimentaux obtenus sur des essais sur des sections soumises à l'effort tranchant.

Cette étude est structurée comme suit :

Le chapitre I est consacré à l'étude bibliographique.

Le chapitre II est consacré au calcul de la rigidité à l'effort tranchant d'une poutre armée en présentant l'ensemble des paramètres liés à l'effort tranchant, l'inclinaison des bielles de béton et la distorsion.

Dans le chapitre III on s'intéresse à l'étude d'une section d'un élément de poutre en Béton armé et/ou précontraint. En présentant la méthode de calcul concernant l'étude de l'équilibre d'une section sous forme d'un algorithme et organigramme général de calcul. Ce programme permet la modélisation numérique du comportement non linéaire, jusqu' à rupture des sections de poutre en béton arme, soumises a la flexion composée et à l'effort tranchant.

Le chapitre IV est consacré à la validation du programme élaboré. Plusieurs exemples d'application sont traités. Des comparaisons avec les résultats expérimentaux sont effectuées.

Dans le chapitre V on tire les conclusions générales, obtenues à l'issue de cette étude.

Chapitre I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Comportement en cisaillement des éléments

Afin d'estimer au mieux le comportement en cisaillement des structures en béton armé et /ou précontraint, plusieurs études expérimentales et théoriques ont été menées de par le monde.

En effet, le béton armé peut être considéré comme un assemblage d'éléments simples acier et béton. La connaissance du comportement des ces éléments permet de prédire le comportement global des structures.

Pour un élément soumis au cisaillement pur, le comportement avant fissuration peut être décrit par la méthode usuelle considérant que les bielles de béton comprimées sont inclinées de 45° par rapport à la direction des armatures. L'étude de FALKNER [4] a permis de constater que cette inclinaison est variable. Mais il n'a pu apporter une solution au problème vu sa complexité. Kupfer dans [4] quant à lui a adopté la méthode énergétique. Il a admis que le comportement du béton et de l'acier est élastique linéaire. La méthode consiste alors à minimiser l'énergie de déformation du système. L'angle d'inclinaison des contraintes de compression dans le béton est ainsi déterminé ; néanmoins, ce modèle basé sur les lois de comportement des matériaux simplifiées ne peut traiter le problème à la rupture.

Plusieurs études ont été également menées pour déterminer les conditions de fissuration du béton en appliquant la théorie de la plasticité pour étudier le comportement en cisaillement du béton armé. Cette approche admet que la fissuration d'un panneau peut survenir dans l'un des trois cas suivants : plastification des armatures transversales et longitudinales, plastification des armatures transversales ou des armatures longitudinales et fissuration du béton avant plastification des armatures dans les deux sens.

Ce modèle a été utilisé principalement pour l'estimation de la charge de rupture. Mais il ne peut pas prédire la réponse charge-déformation du panneau avant la rupture [30].

Nous présenterons dans ce chapitre les études expérimentales menées essentiellement sur des structures en béton armé et précontraint à l'Université de TORONTO par différents auteurs.

I.2 Essais de l'université de TORONTO

Cette étude a été menée avec pour objectif de déterminer le comportement des éléments voile en béton armé soumis à différents systèmes de chargement : Cisaillement pur, cisaillement-flexion, cisaillement compression. Il s'agit d'une étude expérimentale sur des éléments voile de 890mm x 890 mm et de 70 mm d'épaisseur, armés de deux lits d'armature dans les deux sens. Les armatures sont placées parallèlement au côté de l'élément dans les deux sens. Des clés d'effort tranchant ont été prévues et ancrées dans le béton des éléments voiles sur tout le périmètre du voile. La figure (1.1) montre la disposition d'une clé d'effort tranchant.

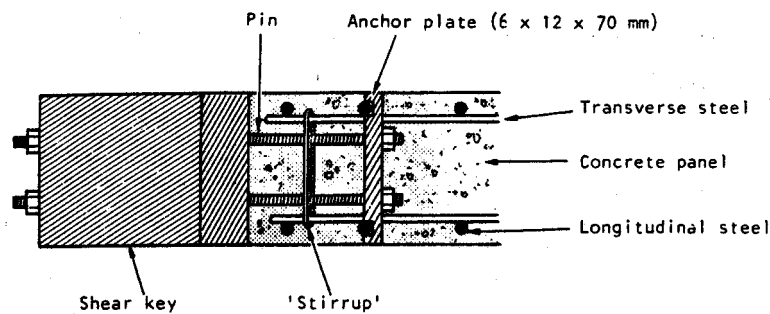


Figure 1.1 : Dispositif formant une clé d'effort tranchant.

L'élément voile est alors chargé par le biais de forces appliquées sur les clés de cisaillement, le long de son périmètre. La figure (1.2) montre la disposition des clés autour de l'élément voile.

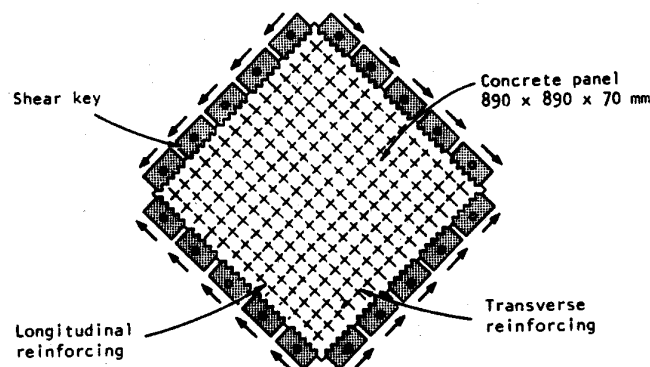


Figure 1.2 : Disposition des clés autour de l'élément.

Trente éléments en béton armé sont alors testés. La majorité des éléments ont été testés au cisaillement pur, d'autres en cisaillement-traction. En plus des conditions de chargement, cette étude a pris en compte la variation du pourcentage des armatures transversales, celle des armatures longitudinales ainsi que la variation des caractéristiques mécaniques du béton [30]

Les résultats expérimentaux obtenus ont permis l'analyse du comportement des éléments en cisaillement : la figure (1.3) montre la construction du cercle de Mohr des déformations à chaque stade de chargement.

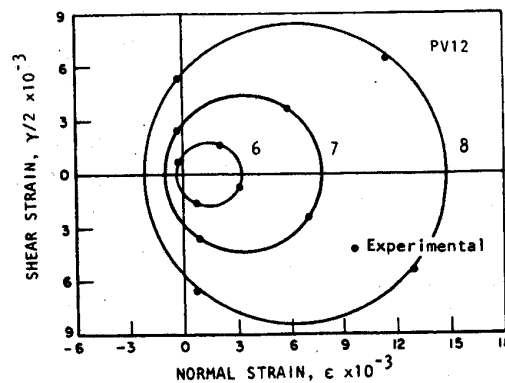


Figure 1.3 : Cercle de Mohr des déformations.

Les déformations dans les directions longitudinale et transversale et dans les deux directions diagonales ont été mesurées au moyen de jauges collées à la surface du béton. La géométrie du cercle de Mohr ainsi construit permet de déterminer :

- la déformation principale de compression,
- la déformation principale de traction,
- la distorsion dans le plan XY,
- la distorsion maximale,
- l'angle d'inclinaison des déformations principales de compression.

Les contraintes dans l'acier sont déterminées à partir des déformations longitudinale et transversale. En l'additionnant à la contrainte externe appliquée à l'élément, la contrainte moyenne longitudinale et transversale dans le béton est alors calculée [30]. La figure (1.4) montre le cercle de Mohr des contraintes construit pour l'élément voile pv1.

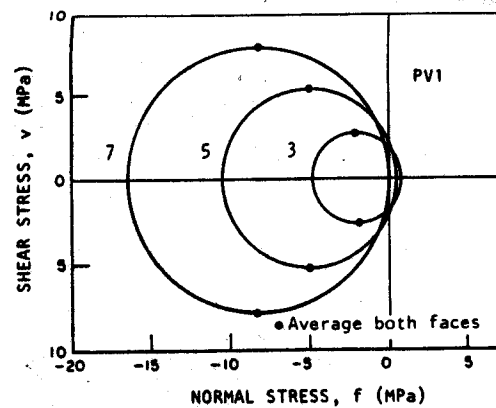


Figure 1.4 : Cercle de Mohr des contraintes pour le voile PV1.

La figure (1.5) montre le comportement en cisaillement jusqu'à rupture de l'élément PV12 [30].

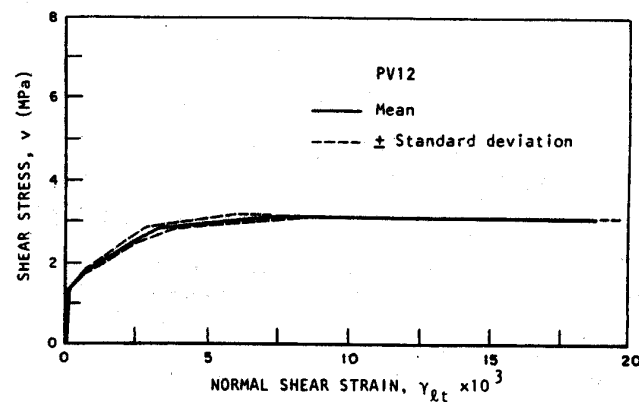


Figure 1.5 : Comportement de l'élément PV12.

Le comportement est linéaire jusqu'à la fissuration du béton. Au-delà, la rigidité de cisaillement de l'élément diminue. Ce qui conduit à une augmentation significative de la distorsion, et ce jusqu'à plastification des armatures. Au-delà, la distorsion augmente rapidement jusqu'à rupture totale de l'élément.

La figure (1.6) montre le comportement global des éléments PV5 , PV13 , PV18, PV20, appartenant à différents groupes.

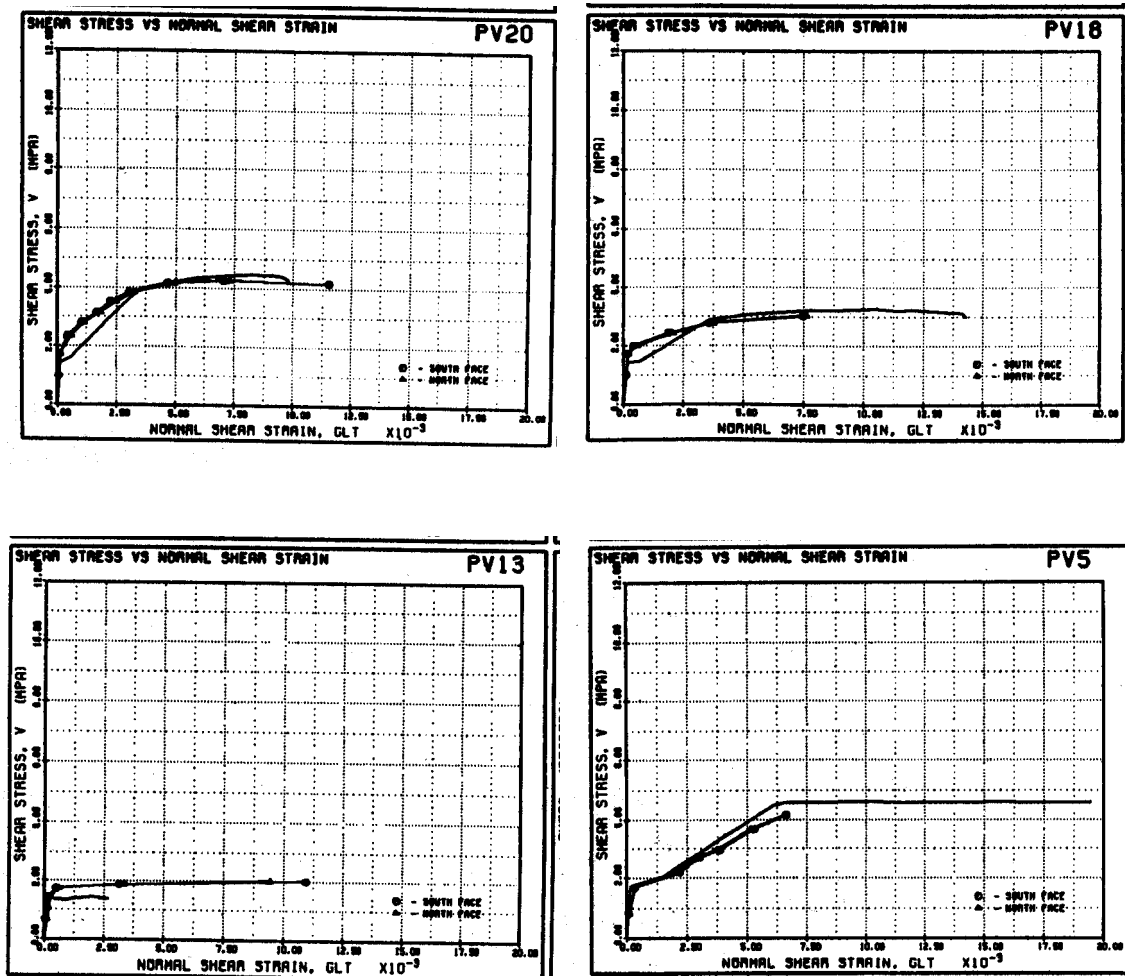


Figure 1.6 : Comportement des voiles PV5, PV13, PV18, et PV20.

Les observations sur le voile PV12 sont confirmées pour les voiles PV5, PV13, PV18 et PV20.

T GREGOR et MP COLINS ont également mené une étude expérimentale sur des éléments en béton précontraint [7] Il s'agit d'une étude sur 6 poutres précontraintes de section transversale en T, constituées d'une travée de 7.5 m et d'un port a faux de 2.5 m simplement appuyées. Les caractéristiques géométriques des poutres et la disposition du chargement sont montrées à la figure (1.7).

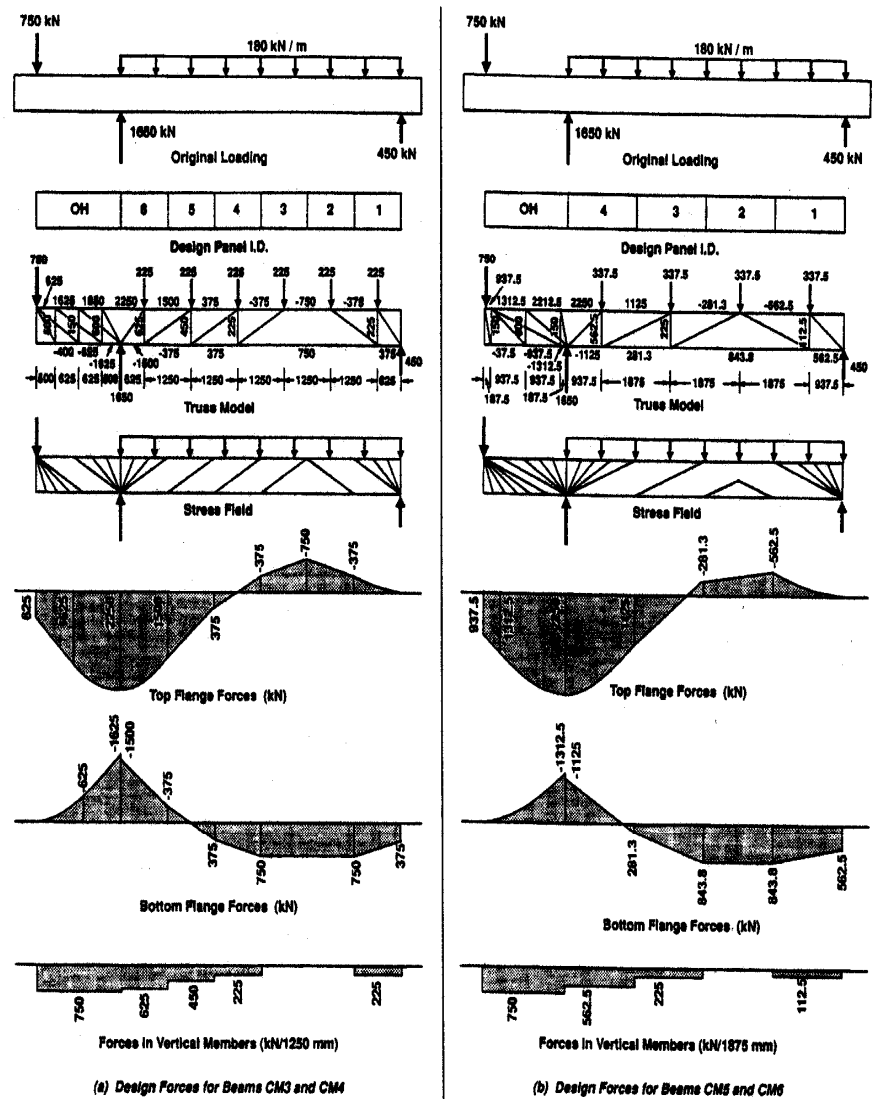


Figure 1.7 : Caractéristiques géométriques des poutres et disposition du chargement.

La disposition des armatures, passives et actives, ainsi que la section transversale des poutres sont montrées aux figures (1.8) et (1.9).

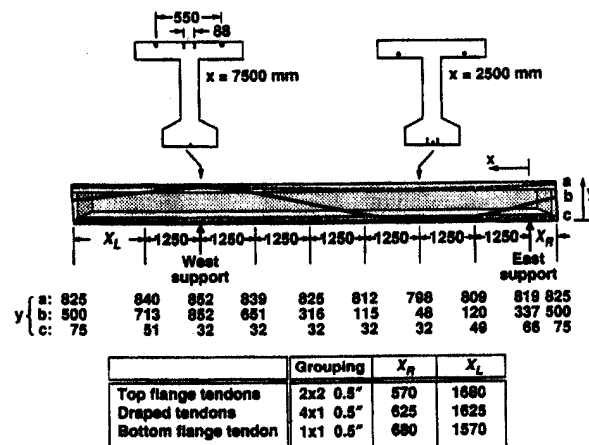


Fig. 6—Tendon profiles

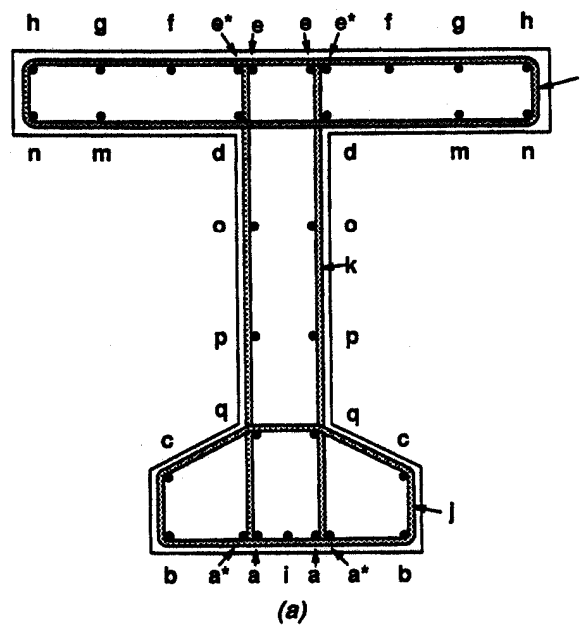


Figure 1.8 : Section transversale et disposition des armatures passives.

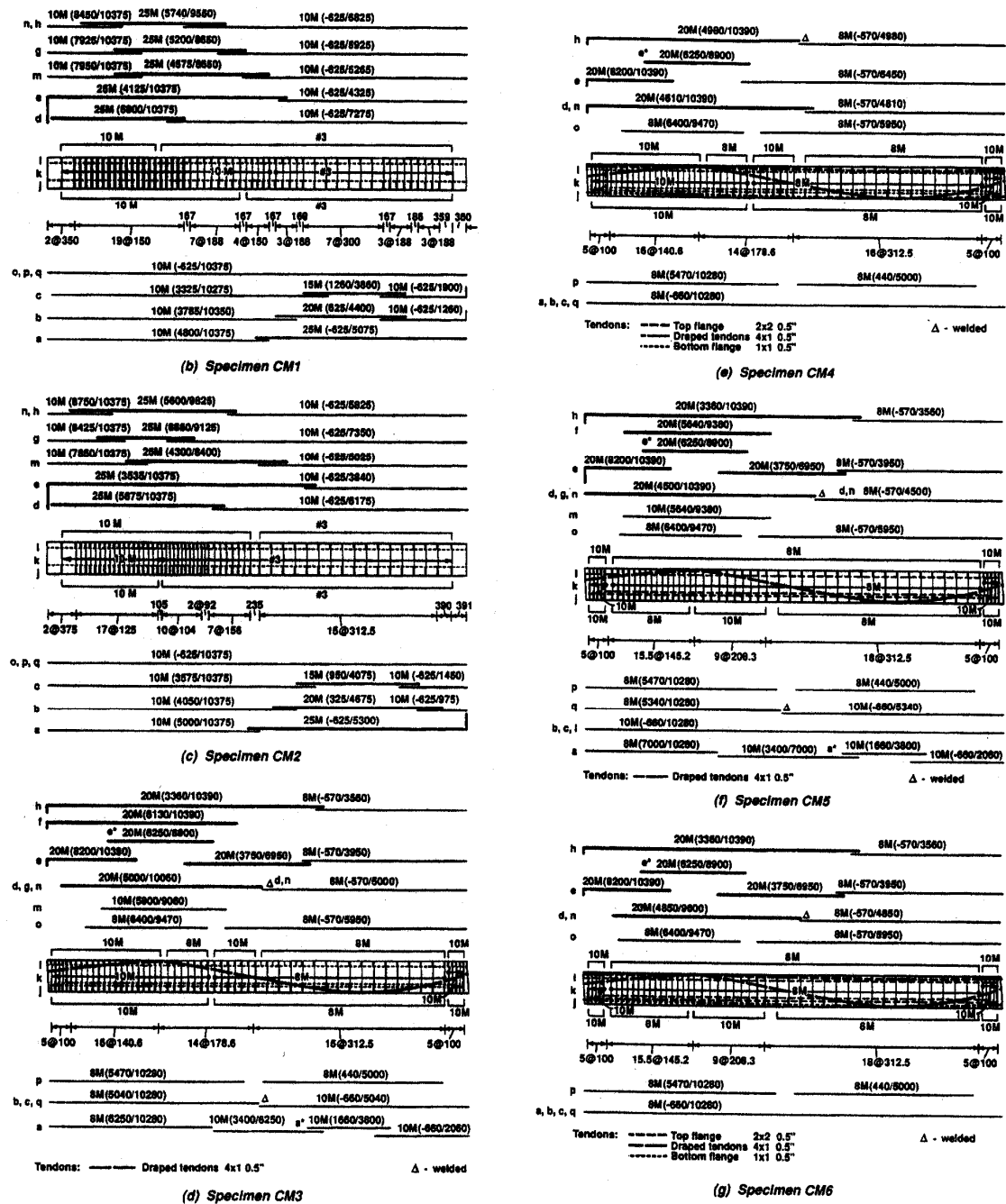


Figure 1.9 : Disposition des armatures passives et actives pour l'ensemble des poutres.

Le point d'application de la charge concentrée est constant pour toutes les poutres. La procédure de chargement appliquée est tel que pour les poutres CM1 à CM6, les charges P et Q sont augmentées simultanément en gardant la proportion ($Q/P = 1.8$) constante durant tous les stades de chargement.

Les auteurs ont observé [7] que la poutre CM1 est rompue en flexion au voisinage de l'appui continu, la poutre CM2 est quant à elle rompue en cisaillement en travée au voisinage de l'appui ouest. La figure (1.10) montre le mode de rupture des poutres CM 3, 4, 5 et 6. Les poutres CM3 et CM4 sont rompues en flexion, au droit du moment de flexion négatif maximum, par contre, les poutres CM5 et CM6 sont rompues en cisaillement en porte-à-faux.

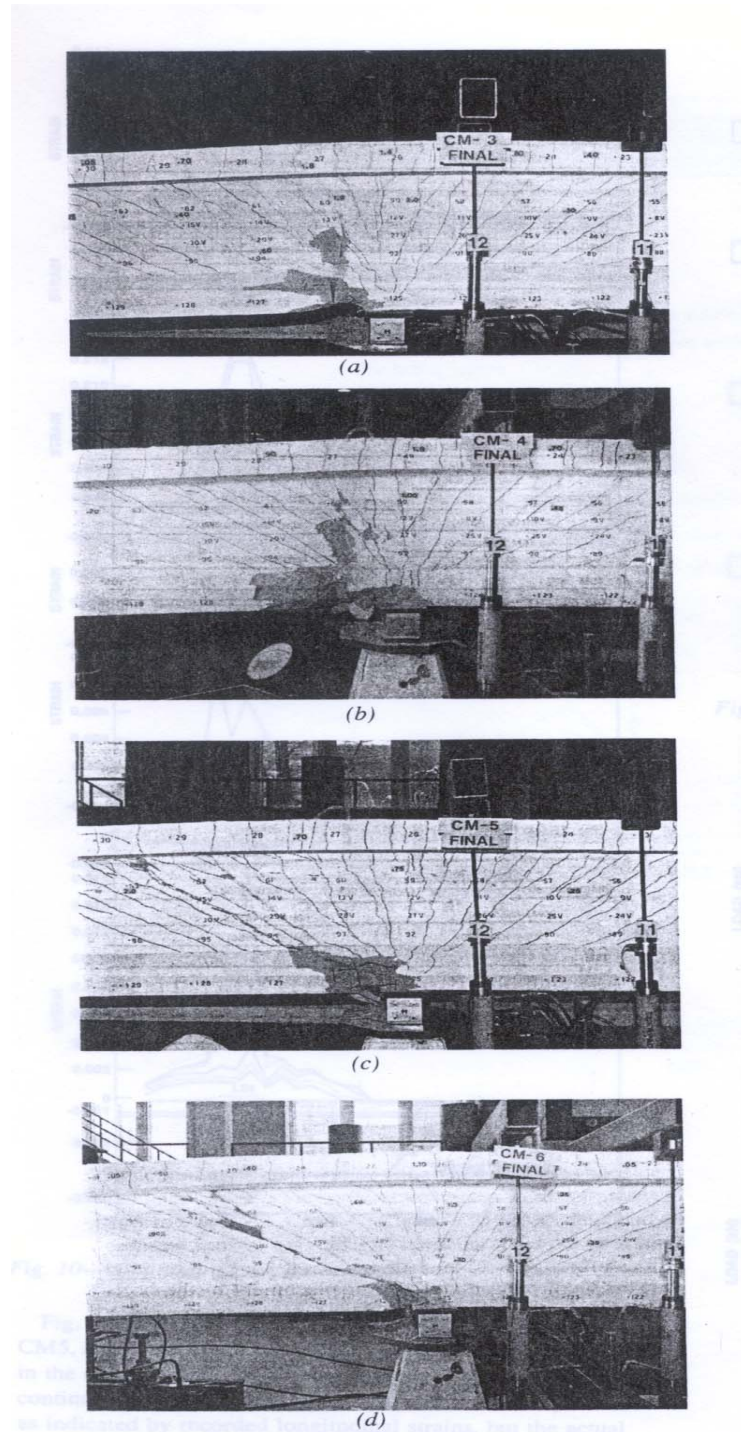


Figure 1.10 : Mode rupture des poutres à l'appui ouest.

L'ensemble des poutres a présenté un comportement ductile. La flèche en porte à faux a atteint les 50 mm avant rupture. L'inclinaison des déformations principales est montrée à la figure (1.11).

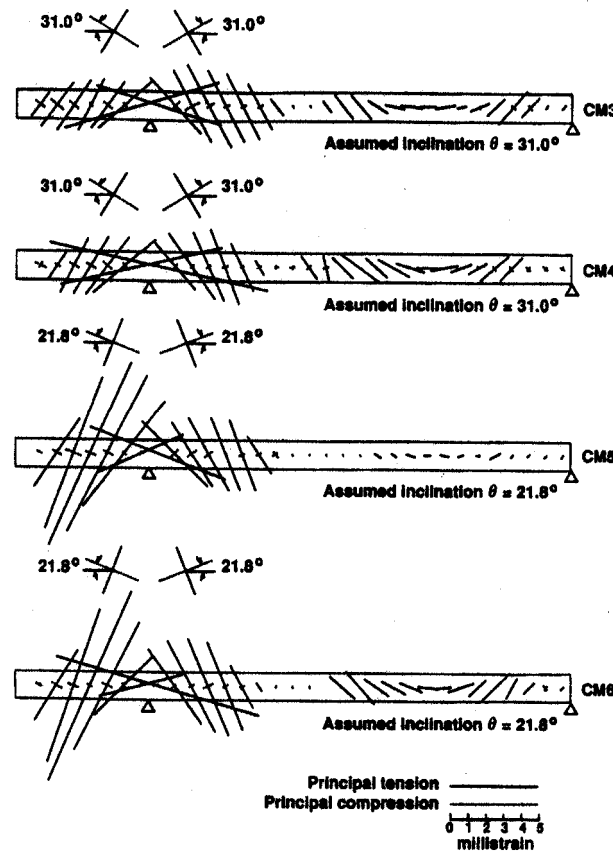


Figure 1.11 : Direction des contraintes principales pour les poutres.

On y remarque bien que cette inclinaison est plus petite que 45° .

Le moment de flexion ultime observé est de 93, 95 et 59 % du moment donné par le code ACI, par contre l'effort tranchant observé est de l'ordre de 149, 156 et 166% de l'effort tranchant donné par le code ACI [7]. Ce qui montre bien qu'il existe une interaction entre la capacité portante en flexion et celle en cisaillement des poutres.

Une étude expérimentale a été également réalisée sur un portique [7]. Il s'agit d'un portique constitué de poutres et poteaux. Les dimensions des éléments constituant le portique ainsi que les détails du renforcement sont montrés à la figure (1.12).

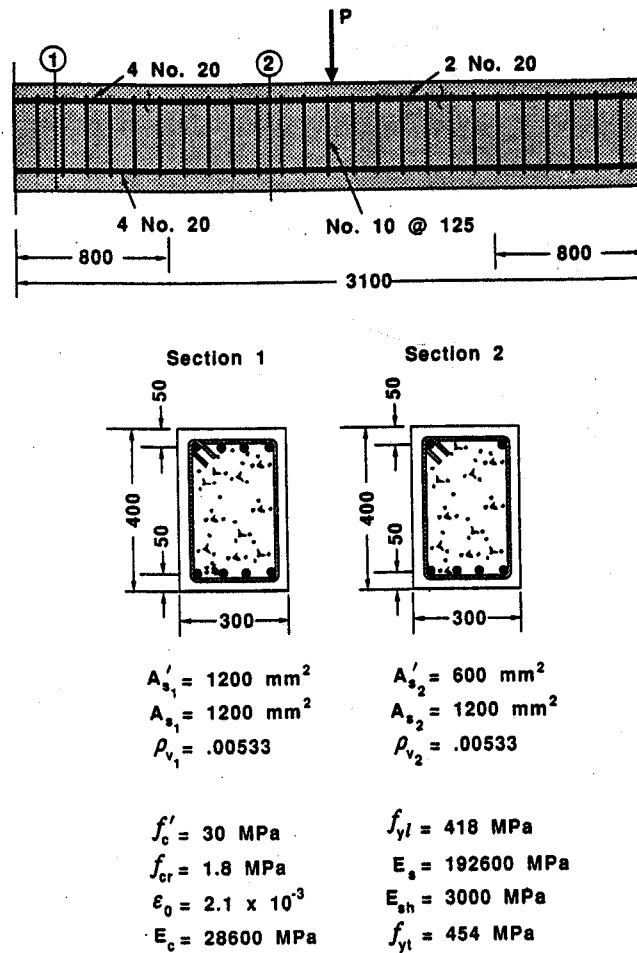


Figure 1.12 : Caractéristiques des éléments du portique et détails de ferrailage.

Le béton présente une résistance de 30 MPa, l'armature n°20 présente une limite élastique de 418 MPa et une contrainte à la rupture de 596 MPa, son module élastique est de 1920 MPa. L'armature N°10 utilisée comme renforcement transversal présente une limite élastique de 454 MPa et une contrainte à la rupture de 640 MPa [7].

La procédure de chargement du portique est constituée par une force verticale constante de 780 kN appliquée sur les poteaux à leur tête, conjuguée à un effort latéral appliqué au niveau de la poutre supérieure et incrémenté jusqu'à 1000kN. Le schéma de chargement est montré à la figure (1.13).

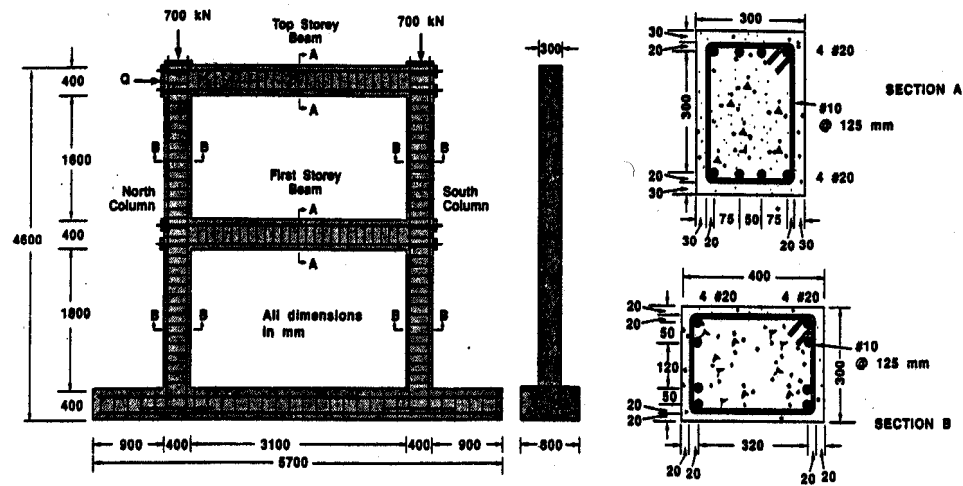


Figure 1.13 : Schéma de chargement du portique.

Les auteurs se sont principalement intéressés à l'influence des déformations d'effort tranchant sur le comportement du portique.

La figure (1.14) montre la réponse de la structure. La figure (1.15) montre l'évolution de la déformation de cisaillement dans les éléments de la structure en fonction du chargement.

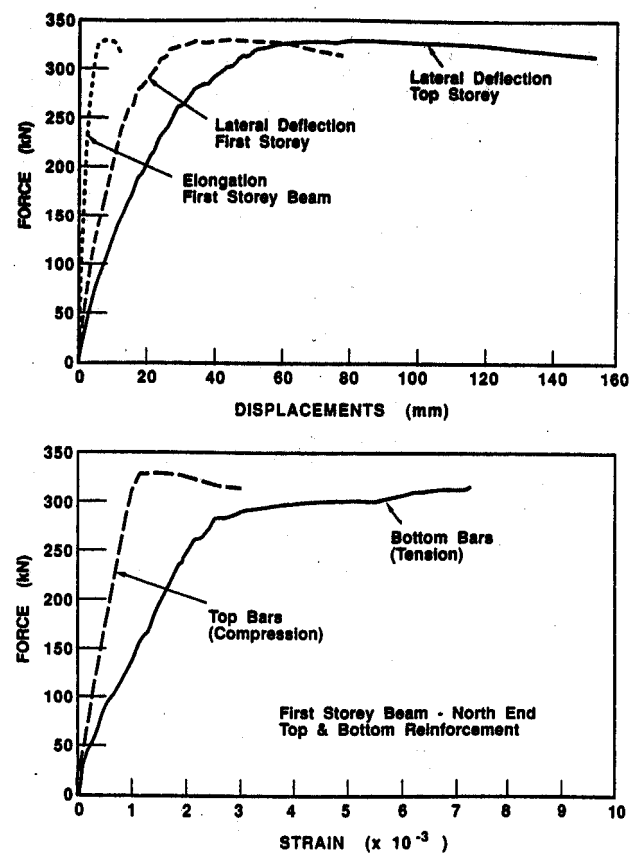


Figure 1.14 : Comportement de la structure.

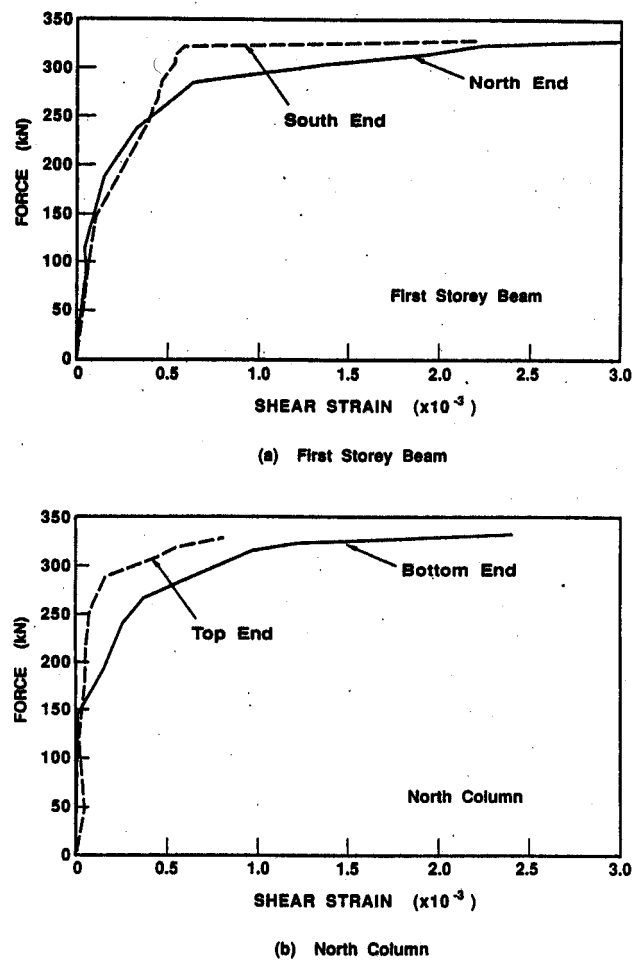


Figure 1.15 : Evolution de la distorsion au niveau des éléments du portique en fonction du chargement.

La distorsion observée dans les éléments de la structure présente une magnitude importante, particulièrement à l'approche de la charge maximale.

A partir de la déformation de cisaillement mesurée, la contribution de la déformation de cisaillement au déplacement latéral du portique a été estimée. La flèche de l'effort tranchant le long de la colonne a été estimée à 6mm, soit 10% de la flèche totale mesurée[7]. Les auteurs ont conclu que les déformations de cisaillement dans la poutre et la détérioration de la rigidité de flexion due au cisaillement dans chaque élément réduit également la rigidité totale de la structure.

I.2.1 Méthodes de calcul

Plusieurs études théoriques, sur des éléments en béton armé et précontraint, ont porté sur le comportement des poutres vis à vis des sollicitations tangentes [1] [2] [3] [4][9] [10] [11] [16] [17] [18] [29] [20] [23] [25] [26] [27] [28] [29] [30] [31] [32] [33]. Concernant l'application au cas des poutres on peut noter que l'ensemble des méthodes développées consiste en des approches simplifiées, considérant une répartition uniforme de l'acier dans les deux directions.

Nous présenterons alors, dans une première partie, les développements théorique pour un élément isolé de surface ds , supposé représentatif en moyenne pour toute la section de calcul, il s'agit d'un élément de béton fissuré en béton armé sollicité par des efforts extérieurs totaux connus N_x N_y et V figure (1.16).

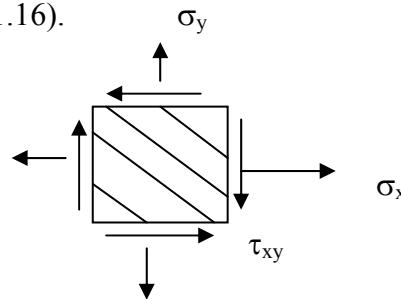


Figure 1.16 : Élément fissuré en béton armé.

Dans la deuxième partie nous présenterons le modèle développé pour le cas des poutres en béton armé et /ou précontraint.

I.2.1.1 Etude d'un élément isolé

I.2.1.1.1 Hypothèses fondamentales de la méthode

- Le domaine de calcul est l'élasticité non linéaire ; à chaque état de déformation correspond un seul état de contrainte, l'historique de la sollicitation n'est pas considéré.
- On considère une taille d'élément suffisamment grande par rapport à l'espacement des fissures. Les contraintes et les déformations pourront être analysées par leurs valeurs moyennes. Il s'agit alors d'un milieu continu équivalent pour lequel on écrit l'ensemble des équations, ce qui permet l'utilisation du cercle de Mohr.
- L'étude prend en considération un élément en béton armé et /ou précontraint d'épaisseur constante, sollicité par des efforts de membranes. Les axes

longitudinaux et transversaux sont choisis de façon à ce qu'ils correspondent aux directions des armatures.

I.2.1.1.2 Hypothèses de calcul

- On considère que l'adhérence entre l'acier intérieur et le béton est parfaite.
- Les armatures sont uniformément réparties sur la longueur de l'élément dans chaque direction.
- Il y a coïncidence des directions principales des contraintes et des déformations dans le béton.

Convention de signe : les contraintes et les déformations de traction seront considérées comme positives et celles de compression comme négatives.

I.2.1.1.3 Bases du modèle

L'étude d'un élément fissuré sollicité à l'effort tranchant consiste à analyser séparément le béton et l'acier. Conformément à la deuxième hypothèse, toutes les équations seront exprimées en contraintes et déformations moyennes. Les équations disponibles sont les équations d'équilibre, les équations de compatibilité et les lois de comportement des matériaux.

I.2.1.1.4 Equations d'équilibre

Les efforts totaux qui sollicitent l'élément sont équilibrés par le béton et l'acier. On considère que les armatures résistent uniquement aux efforts axiaux. Soit alors un élément de volume figure (1.17). L'état de contrainte dans l'acier et le béton est montré à la figure (1.18).

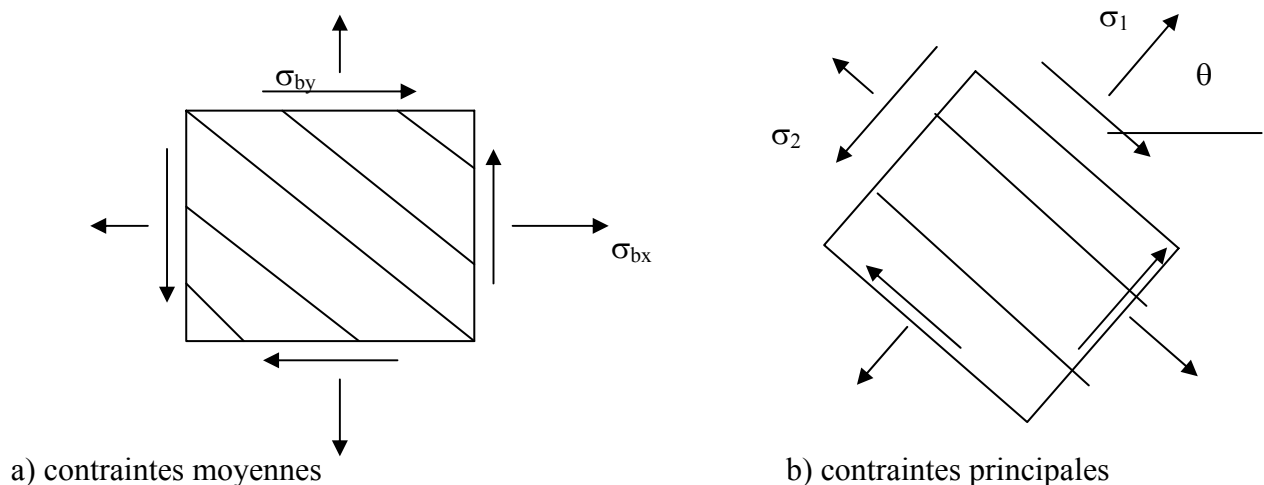


Figure (1.17) Contraintes moyennes dans le béton.

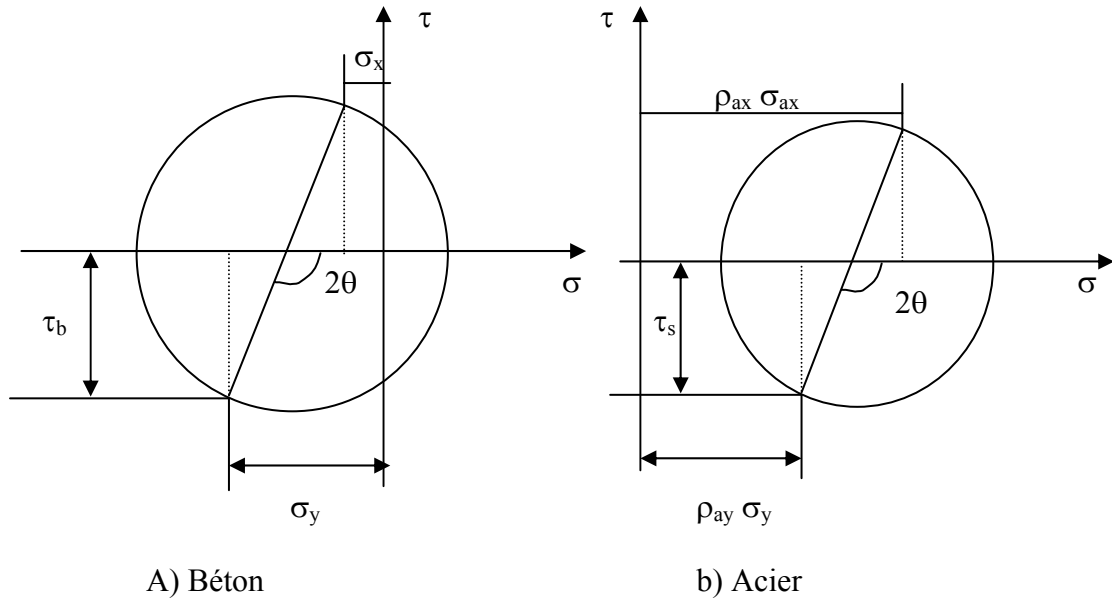


Figure (1.18) : Cercle de Mohr pour les contraintes moyennes.

L'armature étant considérée comme résistante uniquement à l'effort axial, on a :

$$N_x = N_{bx} + N_{ax} = \int_A \sigma_{bx} dA + \int_A \sigma_{ax} dA$$

Si on néglige la réduction de la section de béton à cause de la présence des armatures $A = A_b$ on obtient :

$$\sigma_x = \sigma_{bx} + \rho_{ax} \sigma_{ax}$$

où $\rho_{ax} = A_{ax} / A_{bx}$ = pourcentage d'acier disposé selon la direction Ox.

De manière analogue on obtient :

$$\sigma_y = \sigma_{by} + \rho_{ay} \sigma_{ay} \quad (A)$$

On a aussi :

$$\tau_{bx} = \tau_{by} = \tau_{bxy}$$

$$\tau_{ax} = \tau_{ay} = 0$$

Alors, les conditions de sollicitation dans le béton sont définies si τ_{bxy} , σ_{by} et σ_{bx} sont connues. Si on écrit les contraintes dans le béton dans le repère XOY en fonction des contraintes principales σ_1 et σ_2 en utilisant la géométrie du cercle de Mohr pour les

contraintes et en tenant compte de l'hypothèse sur la direction principale des contraintes et déformations, on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_{bX} &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ \sigma_{bY} &= \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta \\ \tau_{bxy} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \theta \sin \theta\end{aligned}\quad (B)$$

En utilisant les relations A et B on obtient :

$$\sigma_X = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta + \rho_{aX} \sigma_{aX} \quad (1.1)$$

$$\sigma_Y = \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_1 \sin^2 \theta + \rho_{aY} \sigma_{aY} \quad (1.2)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \theta \sin \theta \quad (1.3)$$

I.2.1.1.5 Equations de compatibilité

L'hypothèse d'adhérence parfaite entre le béton et l'acier conduit à :

$$\varepsilon_{ax} = \varepsilon_{bx} = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{ay} = \varepsilon_{by} = \varepsilon_y$$

Si l'on connaît les déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} on peut en déduire les déformations dans n'importe quelle direction en utilisant la géométrie du cercle de Mohr pour les déformations (figure (1.19)).

L'expression des déformations principales en fonction des déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} est déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les déformations :

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \operatorname{tg}(\theta)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2}$$

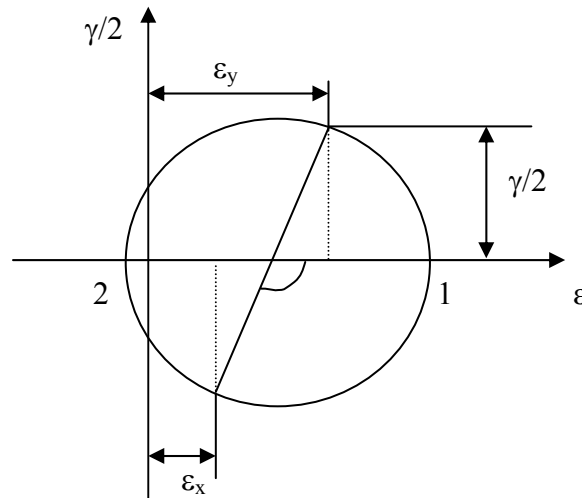


Figure (1.19) : Cercle de Mohr pour les déformations moyennes.

où $\varepsilon_{1,2}$ = les déformations principales en traction (respectivement en compression)

Si on exprime les déformations dans le repère XOY en fonction des déformations principales, on a :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_1 \sin^2 \theta \quad (1.5)$$

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos \theta \sin \theta \quad (1.6)$$

I.2.1.1.6. Comportement des matériaux

I.2.1.1.6.1 Comportement du béton en compression

La relation contrainte-déformation du béton non confiné qu'on obtient sur un cylindre standard peut être décrite par la loi de SARGIN (figure (1.20)).

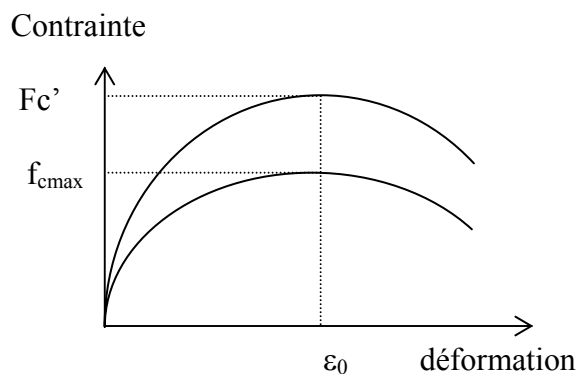


Figure 1.20 : Comportement du béton en compression.

La contrainte est alors liée à la déformation par la relation :

$$\sigma = f_c' \frac{k_b \bar{\varepsilon} - (k_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} - k_b \bar{\varepsilon}^2} \quad (1.7)$$

où $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}$

Le paramètre K_b ajuste la branche ascendante de la loi et est donné par:

$$k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_0}{f_{cj}}$$

. f_{cj} : résistance à la compression du béton à l'âge j ,

. ε_0 : déformation de pic correspondant à f_{cj} ,

. E_{b0} : module élastique du béton à l'origine.

Le paramètre K'_b permet d'ajuster la forme de la branche décroissante de la courbe. Pour un béton normal, on prend généralement $k'_b = k_b - 1$

En modifiant cette loi de comportement par l'introduction d'un coefficient de réduction, on peut formuler la loi de comportement biaxiale contrainte-déformation pour une bielle de béton comprimée. La contrainte maximale de compression d'une bielle de béton est alors reliée à celle obtenue sur un cylindre standard par la relation proposée par Vecchio et Collins [31] :

$$\frac{f_{c2}}{f_c'} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \varepsilon_1 / \varepsilon_0} \quad (1.8)$$

La contrainte principale de compression du béton est alors reliée à la déformation principale de compression par la relation :

$$\sigma = f_{c2} \frac{k_b \bar{\varepsilon} - (k_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} - k_b \bar{\varepsilon}^2} \quad (1.9)$$

I.2.1.1.6.2. Comportement du béton en traction

La relation entre la contrainte moyenne principale de traction et la déformation moyenne principale de traction est linéaire avant la fissuration du béton. Au-delà, la contrainte principale de traction diminue avec l'augmentation de la déformation moyenne de traction (figure 1.21).

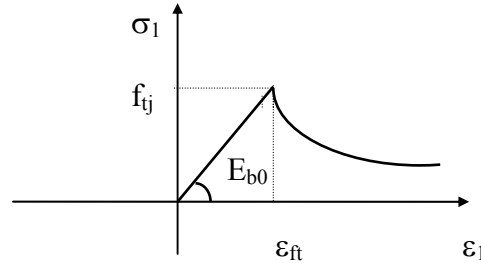


Figure 1.21 : Comportement du béton en traction.

Avant la fissuration du béton :

$$\sigma_1 = E_{bo} \cdot \varepsilon_1 \quad \text{si } |\varepsilon_1| < \varepsilon_{ft}$$

Après fissuration, la contrainte diminue. Pour décrire cette branche descendante, nous avons adopté la relation proposée par BELARBI et HSU [1] reliant la contrainte à la déformation dans le béton entre deux fissures.

$$\sigma_1 = - f_{ft} (\varepsilon_{ft} / \varepsilon_1)^{0.4} \quad (1.10)$$

f_{tj} : résistance du béton à la traction,

ε_{ft} : déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ε_{rt} : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

E_{bo} : module d'élasticité longitudinal du béton.

B FOURÉ [5] a montré que la contribution du béton tendu entre deux fissures successives ne s'annule pas à la plastification des armatures, hypothèse longtemps admise dans les calculs de structure. Par conséquent, la relation (1.10) couvre l'ensemble du champ des déformations de la section jusqu'à rupture totale des armatures.

I.2.1.1.6.3. Comportement de l'acier

Le comportement de l'acier passif et actif est caractérisé par les lois de comportement décrites au chapitre 2

Le système d'équations ainsi formé est un système de dix équations à dix inconnues qui n'est pas linéaire. La méthode de résolution choisie est alors une méthode itérative.

I.2.2. Modeles de calcul :

Plusieurs modèles de calcul ont été proposés pour le calcul des éléments en béton armé. Nous pouvons citer Vecchio et Collins [30], DRIZI [3], HSU [27] et STANCIULISCU [25]. Nous nous limiterons dans cette étude à la présentation du modèle de Vecchio et Collins ainsi qu'à celui de Stanciuliscu.

I.2.2.1. Modèle de Vecchio et Collins

Ce modèle a pour objectif de déterminer une relation $\tau_{xy} = f(\gamma_{xy})$ pour un élément en béton armé. Les auteurs ont d'abord étudié un élément isolé sous deux systèmes de sollicitation simples, effort tranchant variable et effort normal constant, et effort normal variable et effort tranchant constant. Ensuite, ils ont proposé un modèle général de résolution pour un élément isolé.

I.2.2.1.1 Élément sous effort tranchant et contraintes normales constantes

Il s'agit d'un élément en béton armé soumis à des contraintes normales constantes et au cisaillement. La figure (1.22) montre les conditions générales de chargement dans ce cas.

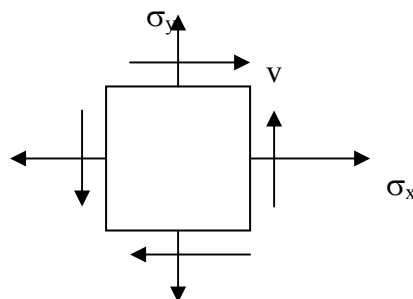


Figure (1.22) Élément en béton armé soumis à un cisaillement et à des contraintes normales constantes.

L'organisation de la méthode est présentée sous la forme d'un algorithme à 11 étapes de calcul. Il s'agit d'une méthode de résolution itérative où l'itération est faite sur trois

variables (la déformation principale de compression, le contrainte longitudinale et l'angle d'inclinaison de la direction principale de compression). Les différentes étapes de calcul sont données par :

Première étape : donner les valeurs des contraintes normales appliquées a l'élément σ_x et σ_y .

Deuxième étape : calculer les déformations initiales dans les deux directions par les relations suivantes :

$$\varepsilon_{x0} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sigma_x}{\rho_{sx} E_s} & \text{pour } \sigma_x > 0 \\ -\varepsilon_0 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\sigma_x}{f_c \left(1 + \frac{E_s \rho_{sx}}{E_c} \right)}} \right) & \text{pour } \sigma_x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\varepsilon_{y0} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sigma_y}{\rho_{sy} E_s} & \text{pour } \sigma_y > 0 \\ -\varepsilon_0 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\sigma_y}{f_c \left(1 + \frac{E_s \rho_{sy}}{E_c} \right)}} \right) & \text{pour } \sigma_y < 0 \end{array} \right\}$$

Troisième étape : choisir une valeur de départ pour la déformation principale de compression ε_2 telle que :

$$\varepsilon_{20} \leq \varepsilon_2 \leq 2 \varepsilon_0 \quad \text{avec } \varepsilon_{20} = \max (-\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, 0)$$

Quatrième étape : estimer la valeur de la déformation longitudinale.

Cinquième étape : estimer la valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression.

Sixième étape : calculer l'état de déformation dans l'élément à partir de la géométrie du cercle de Mohr des déformations :

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \operatorname{tg} \theta$$

$$\varepsilon_y = \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{tg} (\theta) - \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2$$

Septième étape : déterminer l'état de contrainte dans le ferrailage et le béton :

- Contrainte dans le ferrailage longitudinal :

$$\sigma_{sx} = E_s \varepsilon_x$$

- Contrainte dans le ferrailage transversal :

$$\sigma_{sy} = E_s \varepsilon_y$$

- Contrainte dans le béton dans la direction x :

$$\sigma_{bx} = \sigma_x - \rho_{sx} \sigma_{sx}$$

- Contrainte dans le béton dans la direction y :

$$\sigma_{by} = \sigma_y - \rho_{sy} \sigma_{sy}$$

- Déterminer les contraintes principales de compression et de traction dans le béton avec les lois de comportement,
- Dédire la contrainte dans le béton dans la direction x du cercle de Mohr pour les contraintes:

$$\sigma'_{bx} = \sigma'_1 + \sigma'_2 - \sigma_{by}$$

- Dédire l'angle entre la direction principale de traction et la direction x du cercle de Mohr pour les déformations:

$$\theta = \text{tg}^{-1} \sqrt{\frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{\sigma'_1 - \sigma'_2}}$$

Huitième étape : vérifier la condition de compatibilité

$$\theta = \theta'$$

- si oui, passer à l'étape 9
- si non, revenir à l'étape 5 et prendre une autre valeur de θ .

Neuvième étape : vérifier la condition d'équilibre avec la contrainte dans la direction x :

$$\sigma'_x = \sigma_x$$

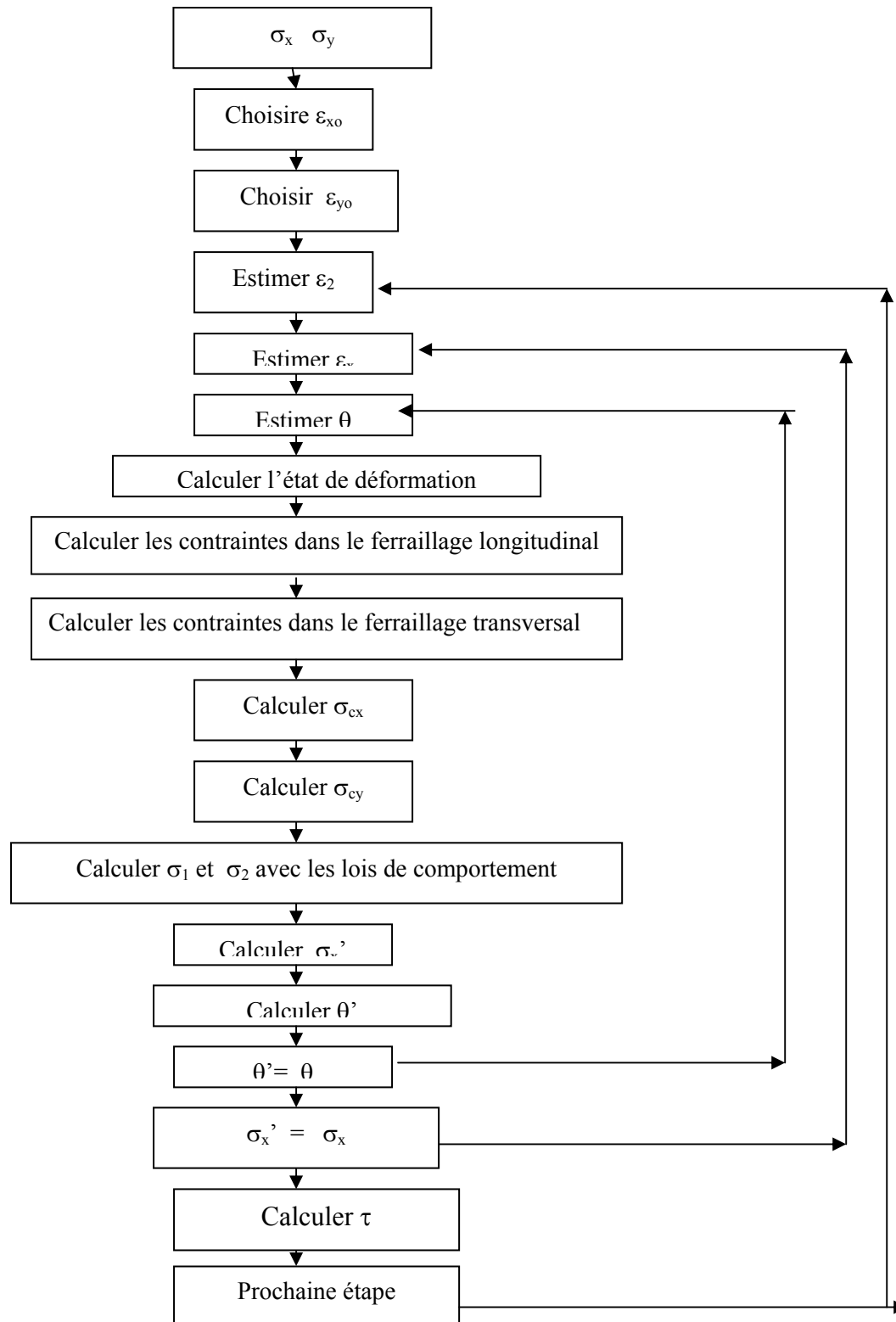
- si oui, passer à l'étape 10
- si non, revenir à la quatrième étape et prendre une nouvelle valeur de ε_x .

Dixième étape : calculer la contrainte tangentielle déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes :

$$\tau = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2} \sin 2\theta$$

Onzième étape : répéter pour une nouvelle valeur de la déformation principale de compression ε_2 .

L'organigramme obtenu à partir de l'organisation des étapes de cette méthode est :



I.2.2.1.2 Élément sous effort tranchant constant et contraintes normales variables

Il s'agit d'un élément en béton armé soumis à des contraintes normales variables et à un effort tranchant constant.

Dans ce cas de charge, les auteurs ont défini une condition d'équilibre basée sur la proportion entre les contraintes normales et la contrainte tangentielle. Les variables d'itération retenues dans ce cas sont la déformation principale de compression ε_2 , la déformation dans la direction x et l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de traction par rapport à la direction x . L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

Première étape : calculer les paramètres définissant la proportion des contraintes normale par rapport aux contraintes tangentielles :

$$K_x = \frac{\sigma_x}{\tau} \quad \text{et} \quad K_y = \frac{\sigma_y}{\tau}$$

Deuxième étape : choisir une valeur de départ pour la déformation principale de compression ε_2 telle que :

$$0 \leq \varepsilon_2 \leq 2 \varepsilon_0$$

Troisième étape : estimer la valeur de la déformation longitudinale.

Quatrième étape : estimer la valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression.

Cinquième étape : calculer l'état de déformation dans l'élément à partir de la géométrie du cercle de Mohr des déformations :

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \operatorname{tg} \theta$$

$$\varepsilon_y = \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{tg}(\theta) - \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2$$

Sixième étape : déterminer l'état de contrainte dans le ferrailage et le béton :

- Contrainte dans le ferrailage longitudinal :

$$\sigma_{sx} = E_s \varepsilon_x$$

- Contrainte dans le ferrailage transversal:

$$\sigma_{sy} = E_s \varepsilon_y$$

- Contrainte dans le béton dans la direction x :

$$\sigma_{bx} = \sigma_2 \sin^2\theta - \sigma_1 \cos^2\theta$$

- Contrainte dans le béton dans la direction y :

$$\sigma_{by} = \sigma_2 \cos^2\theta - \sigma_1 \sin^2\theta$$

- Calculer les contraintes principales de compression et de traction dans le béton dans les lois de comportement

- Contrainte dans le béton dans la direction x :

$$\sigma_{bx} = \sigma_2 \sin^2\theta - \sigma_1 \cos^2\theta$$

- Contrainte dans le béton dans la direction y :

$$\sigma_{by} = \sigma_2 \cos^2\theta - \sigma_1 \sin^2\theta$$

- Contrainte tangentielle déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes :

$$\tau = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin 2\theta$$

- Contrainte extérieure dans le béton dans la direction x :

$$\sigma'_x = \sigma_{bx} + \rho_{sx} \sigma_{sx}$$

- Contrainte extérieure dans le béton dans la direction y :

$$\sigma'_y = \sigma_{by} + \rho_{sy} \sigma_{sy}$$

- Calculer les nouvelles valeurs des paramètres k_x et k_y :

$$K'_x = \frac{\sigma'_x}{\tau} \quad \text{et} \quad K'_y = \frac{\sigma'_y}{\tau}$$

Septième étape : vérifier la condition de compatibilité

$$K'_x K_y = K'_y K_x$$

- si oui, passer à l'étape 8
- si non, revenir à l'étape 4 et prendre une autre valeur de θ .

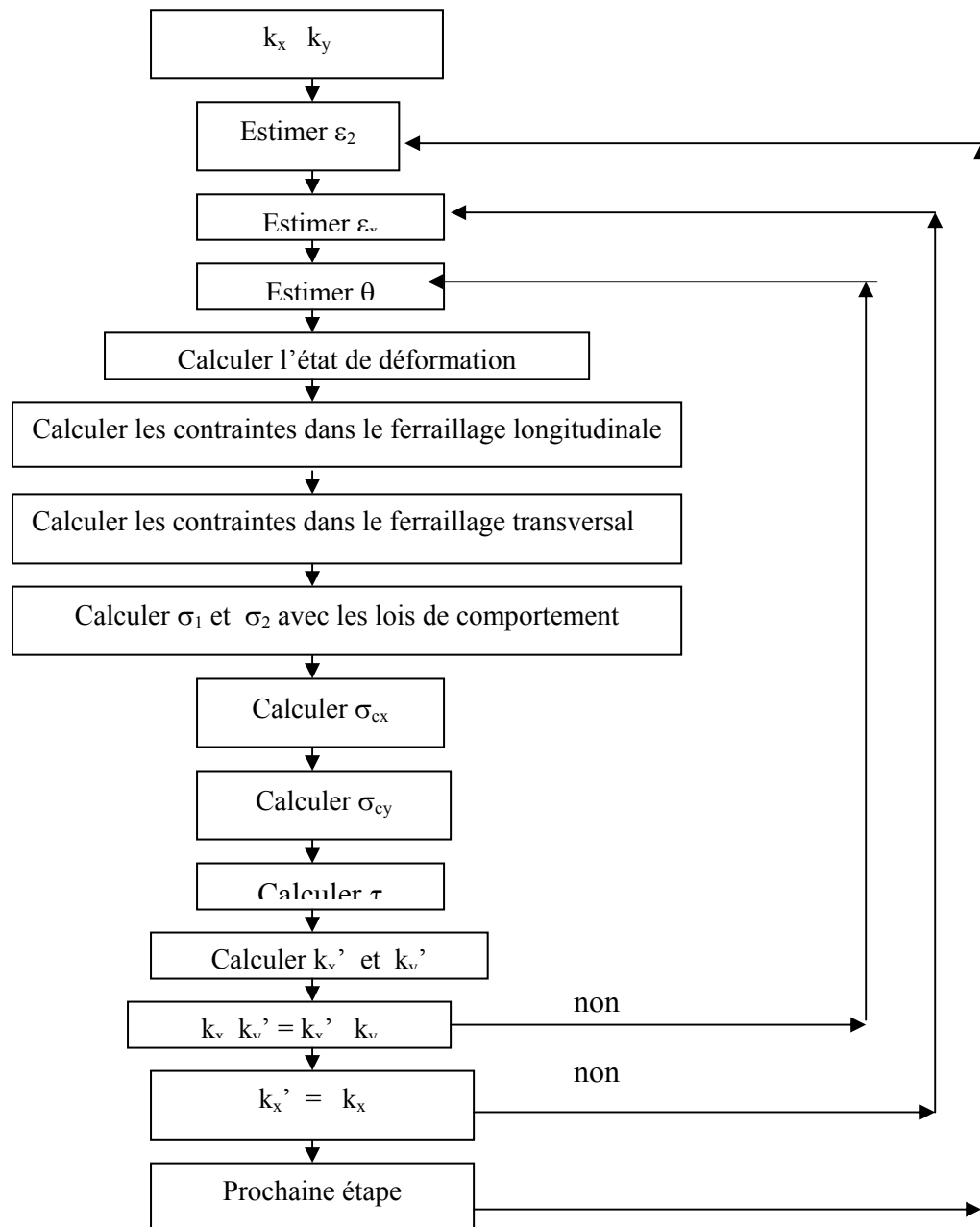
Huitième étape : Vérifier la condition d'équilibre :

$$K'_x = K_x$$

- . si oui, passer à l'étape 9
- si non, revenir à la troisième étape et prendre une nouvelle valeur de ε_x .

Neuvième étape : répéter le calcul pour une nouvelle valeur de la déformation principale de compression ε_2 .

L'organigramme obtenu à partir de l'organisation des étapes de calcul de cette méthode est :



II.2.2.1.3 Méthode générale de résolution pour un élément isolé

Dans le cadre de cette méthode, les auteurs ont choisi de tenir compte des contraintes locales de compression et des contraintes de cisaillement au niveau des fissures. Des relations et des inconnues supplémentaires ont été alors introduites à côté du système d'équations fondamental de la méthode. Le système d'équation ainsi obtenu est non linéaire. La méthode de résolution choisie est une méthode itérative avec des itérations sur la déformation principale de traction ε_1 , l'angle d'inclinaison de la direction principale de traction θ et la contrainte dans l'acier transversal σ_{sy} . De plus un choix de la distance entre les fissures dans les directions x et y a été introduit. L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

Première étape : donner les valeurs de la distance entre les fissures dans les deux directions S_{mx} et S_{my} .

Deuxième étape : choisir une valeur de départ pour la déformation principale de compression ε_1 .

Troisième étape : estimer la valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression.

Quatrième étape : calculer w (fissure moyenne) :

$$w = \varepsilon_1 s_0 \quad \text{avec} \quad s_0 = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{S_{mx}} + \frac{\cos\theta}{S_{my}}}$$

Cinquième étape : estimer la contrainte moyenne dans la plus faible armature (d'habitude σ_{sy}).

Sixième étape : calculer la contrainte moyenne de traction dans le béton avec la loi de comportement.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_c \varepsilon_1 && \text{pour } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_f \\ \sigma_1 &= \frac{f_t}{1 + \sqrt{200 \varepsilon_1}} && \text{pour } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_f \end{aligned}$$

La valeur de σ_1 obtenue doit respecter la condition suivante :

$$\sigma_1 \leq \tau_{cimax} (0.18 + 0.3k^2) \operatorname{tg}\theta$$

où

$$k = 1.64 - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \geq 0$$

et

$$\tau_{cimax} = \frac{\sqrt{-f_c}}{0.31 + 24 \frac{W}{a + 16}}$$

Septième étape : calculer la contrainte tangentielle dans le béton à partir de la géométrie du cercle de Mohr des contraintes :

- la contrainte dans le béton dans la direction y est donnée par :

$$\sigma_{by} = \sigma_y - \rho_{sy} \sigma_{sy}$$

- la contrainte tangentielle dans le béton est alors donnée par:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_{by}}{\tan \theta}$$

Huitième étape : calculer la contrainte principale de compression déduite du cercle de Mohr:

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \tau_{xy} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right)$$

Neuvième étape : calculer la contrainte principale maximale du béton par :

$$\sigma_{2max} = \frac{f_c}{0.8 - 0.34 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} \leq f_c$$

Dixième étape : vérifier la condition d'écrasement du béton des bielles comprimées :

$$\sigma_2 \leq \sigma_{2max}$$

- si oui, passer à l'étape 11
- si non, revenir à la deuxième ou troisième étape et prendre une valeur de ϵ_1 plus petite ou bien une autre valeur de θ ($\theta \approx 45^\circ$).

Neuvième étape : vérifier la condition d'équilibre avec la contrainte principale de compression :

$$\sigma'_2 = \sigma_2$$

- si oui, passer à l'étape 10
- si non, revenir à la quatrième étape et prendre une nouvelle valeur de ϵ_x .

Onzième étape : Calculer la déformation principale de compression ϵ_2 :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2\max}^2}} \right)$$

Douzième étape : calculer la déformation dans la direction y :

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}$$

Treizième étape : calculer la contrainte dans l'armature transversale :

$$\overline{\sigma}_{sy} = E_s \varepsilon_y$$

Quatorzième étape : vérifier la condition d'équilibre par la contrainte dans l'armature transversale :

$$\overline{\sigma}_{sy} = \sigma_{sy}$$

- si oui, passer à la quinzième étape
- si non, revenir à la cinquième étape prendre une autre valeur de σ_{sy} .

Quinzième étape : calculer la déformation dans la direction x par la géométrie du cercle de Mohr des déformations :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_y$$

Seizième étape : calculer la contrainte σ_{sx} dans l'acier longitudinal avec la loi de comportement de l'acier.

Dix-septième étape : calculer la contrainte, dans le béton, dans la direction x :

$$\sigma_{cx} = \sigma_1 - \frac{\tau_{xy}}{\operatorname{tg} \theta}$$

Dix-huitième étape : calculer la contrainte totale dans la direction x :

$$\overline{\sigma}_x = \sigma_{cx} + \rho_{sx} \sigma_{sx}$$

Dix-neuvième étape : vérifier la condition d'équilibre en contrainte dans la direction x :

$$\overline{\sigma}_x = \sigma_x$$

- si oui, passer à l'étape suivante

- si non, revenir à la troisième étape et prendre une autre valeur de θ (l'augmentation de θ conduit à l'augmentation de σ_x).

Vingtième étape : calculer les contraintes normale σ_{ci} et tangentielle τ_{ci} au niveau de la fissure :

$$\Delta\sigma_{ci} = \sigma_{ci} - \rho_{sx} (f_{ey} - f_{ex})$$

si $\Delta\sigma_{ci} \leq 0$ on prend $\tau_{ci} = 0$ et $\sigma_{ci} = 0$ et on passe à l'étape suivante.

si non

$$C = \Delta\sigma_{ci} \operatorname{tg}\theta - 0.18\tau_{ci\max}$$

si $C \leq 0$ on prend $\sigma_{ci} = 0$ et $\tau_{ci} = \Delta\sigma_{ci} \operatorname{tg}\theta$

si non, on prend :

$$A = \frac{0.82}{\tau_{ci\max}} \quad \text{et} \quad B = \operatorname{tg}\theta - 1.64$$

$$\sigma_{ci} = \frac{(-B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{2A}$$

$$\tau_{ci} = (\sigma_{ci} + \Delta\sigma_{ci}) \operatorname{tg}\theta$$

Vingt et unième étape : calculer les contraintes dans l'acier au niveau de la fissure σ_{syf} et σ_{sxf} :

$$\sigma_{syf} = \sigma_{sy} + (\sigma_1 + \sigma_{ci} - \frac{\tau_{ci}}{\operatorname{tg}\theta}) \rho_{sy}$$

$$\sigma_{sxf} = \sigma_{sx} + (\sigma_1 + \sigma_{ci} - \tau_{ci} \operatorname{tg}\theta) \rho_{sx}$$

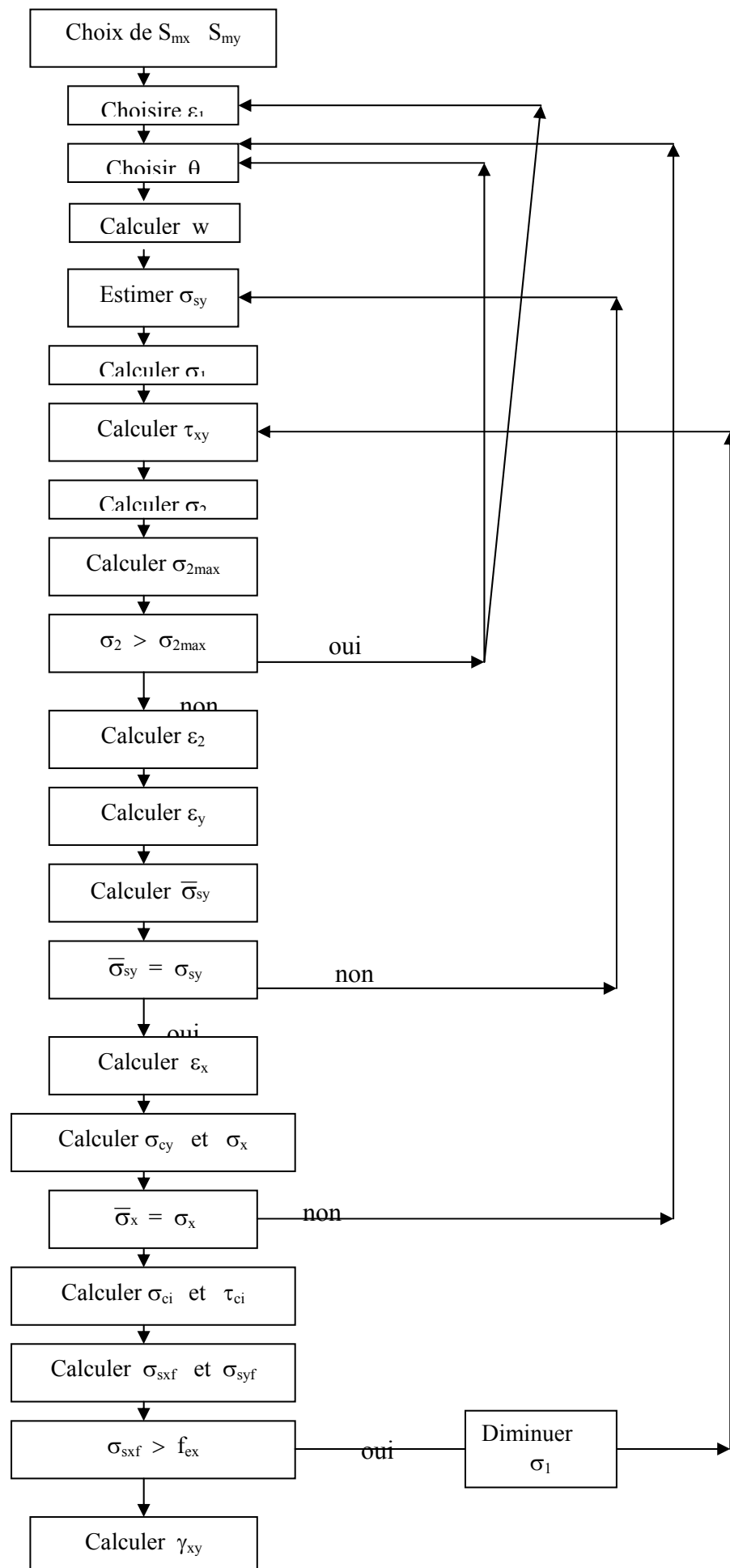
Vingt deuxième étape : vérifier si le ferrailage peut transmettre les efforts au niveau de la fissure. Si $\sigma_{sxf} > f_{ex}$, revenir à la septième étape et prendre une valeur plus petite de la contrainte principale de traction.

Vingt troisième étape : calculer la déformation de cisaillement déduite de la géométrie du cercle de Mohr des déformations:

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{tg}\theta$$

Organigramme de la méthode

L'organigramme de la méthode générale obtenue à partir de l'organisation proposée par les auteurs est :



La méthode de résolution générale proposée par Vecchio et Collins ne peut pas être programmée dans cette forme. Il est aisé de constater qu'il y a des problèmes concernant les inconnues choisies comme variable d'itération. Le premier problème est la vérification qui intervient au niveau de σ_2 pour laquelle les auteurs proposent deux possibilités de correction sur deux variables d'itération (ε_1 et θ). Même si on élimine ce problème en faisant un choix, il demeure que cette vérification du niveau de sollicitation doit intervenir à la fin du processus. Elle est imposée à ce niveau du calcul par les auteurs parce qu'elle doit être satisfaite à l'étape suivante pour pouvoir continuer le calcul. Le deuxième problème consiste dans le croisement des boucles d'itération, ce qui peut conduire à des problèmes de convergence insoupçonnés. Enfin le dernier problème est la correction qui doit intervenir à la dernière étape sur σ_1 . En effet, avec la correction faite directement sur σ_1 , on peut déterminer l'état de contrainte mais pas l'état de déformation. Les fonctions définissant les lois de comportement des matériaux ne sont pas des bijections. Il est alors judicieux d'effectuer les itérations sur les valeurs des déformations.

I.2.2.2. Modèle de Stanciuliscu

Stanciuliscu a développé une méthode de calcul des poutres basée sur la MCFT. Dans ce modèle, la section transversale de la poutre est modélisée comme une succession de couches de béton et d'éléments d'acier. Chaque couche ou élément d'acier longitudinal est analysé séparément mais les conditions d'équilibre sont satisfaites globalement en utilisant les équations de compatibilité, les équations d'équilibre et les lois de comportement des matériaux, dans l'hypothèse de la planéité des sections et de l'uniformité des contraintes normales sur chaque couche. Enfin, ce modèle a été développé dans le cas d'une flexion composée avec effort tranchant.

La distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur de la section est déterminée dans chaque section en étudiant une section voisine distante de $h/6$ de la section de calcul, et soumise à des efforts déterminés à partir de ceux appliqués à la section de calcul.

La méthode de résolution est une méthode itérative, l'itération est effectuée sur la déformation longitudinale ε_x , la déformation principale de compression ε_2 et l'angle d'inclinaison de la direction principale de traction par rapport à l'axe longitudinal x . L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

Première étape : déterminer les efforts appliqués à la section voisine en fonction de ceux appliqués à la section de calcul :

Soit N , M et V respectivement l'effort normal, le moment fléchissant et l'effort tranchant au niveau de la section de calcul. Les efforts qui s'en déduisent dans la section voisine distante de s sont donnés par :

$$N_v = N$$

$$M_v = M - s V$$

$$V_v = V$$

Deuxième étape : choisir une distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur de la section telle que:

$$\sum_1^m \tau_i b_i h_i = V$$

où b_i est la largeur de la couche d'ordre i , h_i sa hauteur et τ_i la contrainte tangentielle au niveau de cette couche.

Troisième étape : estimer la distribution de la déformation longitudinale ε_x à partir des déformations sur la fibre le plus comprimée ε_b et sur la fibre la plus tendue ε_t .

- au centre de gravité de chaque couche de béton cette déformation est donnée par :

$$\varepsilon_{xi} = \varepsilon_t + (\varepsilon_b - \varepsilon_t) \frac{y_{gi}}{h}$$

- au niveau du centre de gravité de chaque élément d'acier longitudinale, elle vaut :

$$\varepsilon_{xj} = \varepsilon_t + (\varepsilon_b - \varepsilon_t) \frac{y_{sj}}{h}$$

Quatrième étape : calculer les contraintes dans le ferrailage longitudinal :

$$\sigma_{sxj} = \varepsilon_{sxj} E_s$$

$$|\sigma_{sxj}| \leq f_{ex}$$

Cinquième étape : choisir une valeur pour la déformation principale de compression ε_2 tel que :

$$0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$$

Sixième étape : choisir une valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression et l'axe longitudinal.

Septième étape : déterminer toutes les valeurs caractéristiques de la déformation à partir de la géométrie du cercle de Mohr des déformations.

$$\gamma_{xy} = 2 (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \operatorname{tg} \theta$$

$$\varepsilon_y = \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{tg}(\theta) - \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + 2 \varepsilon_2$$

Huitième étape : déterminer l'état de contraintes résultant dans le béton

- la contrainte dans l'acier transversal est donnée par :

$$\sigma_{ay} = E_a \varepsilon_y$$

$$|\sigma_{ay}| \leq f_{ey}$$

- la contrainte transversale dans le béton vaut alors :

$$\sigma_{by} = \rho_{ay} \sigma_{ay}$$

- déterminer les contraintes principales de traction et de compression dans le béton avec les lois de comportement.

- calculer la nouvelle contrainte normale dans le béton suivant l'axe x

$$\sigma_{by}' = \sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_{by}$$

Neuvième étape : calculer la nouvelle valeur de l'angle θ déduite de la géométrie du cercle de Mohr pour les contraintes

$$\theta' = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_{by}'}{\sigma_2 - \sigma_{bx}'} \right)^{1/2}$$

Dixième étape : calculer la valeur de la contrainte principale de compression en fonction de τ

$$\sigma_2' = \sigma_{by} - \tau_{xy} \operatorname{tg}(\theta)$$

Onzième étape : vérifier la compatibilité

$$\theta = \theta'$$

- si non ; revenir à la sixième étape prendre une autre valeur de l'angle θ
- si oui ; passer à la douzième étape

Douzième étape : vérifier l'équilibre

$$\sigma_2' = \sigma_2$$

- si non, revenir à la cinquième étape et prendre une autre valeur de la déformation principale de compression.
- si oui, passer à la treizième étape.

Treizième étape : vérifier l'équilibre de l'effort normal de la section globalement

$$N_{int} = N_{ext}$$

$$M_{int} = M_{ext}$$

- si non, revenir à la deuxième étape prendre une autre distribution de ε_x
- si oui, passer à la Quatorzième étape

Quinzième étape : répéter l'ensemble des étapes pour la section voisine

Seizième étape : calculer la nouvelle distribution des contraintes tangentielles qui vérifient l'équilibre de chaque couche de béton :

$$\tau_i = \frac{F_i + F_{i+1}}{2 s b}$$

où les efforts F_i et F_{i+1} sont les efforts sur les faces inférieure et supérieure de la couche d'ordre i . Ils sont déterminés en écrivant l'équilibre de la couche entre les deux sections.

Dix-septième étape : vérifier si cette distribution correspond à celle présumée au début du calcul :

$$\tau_i' = \tau_i$$

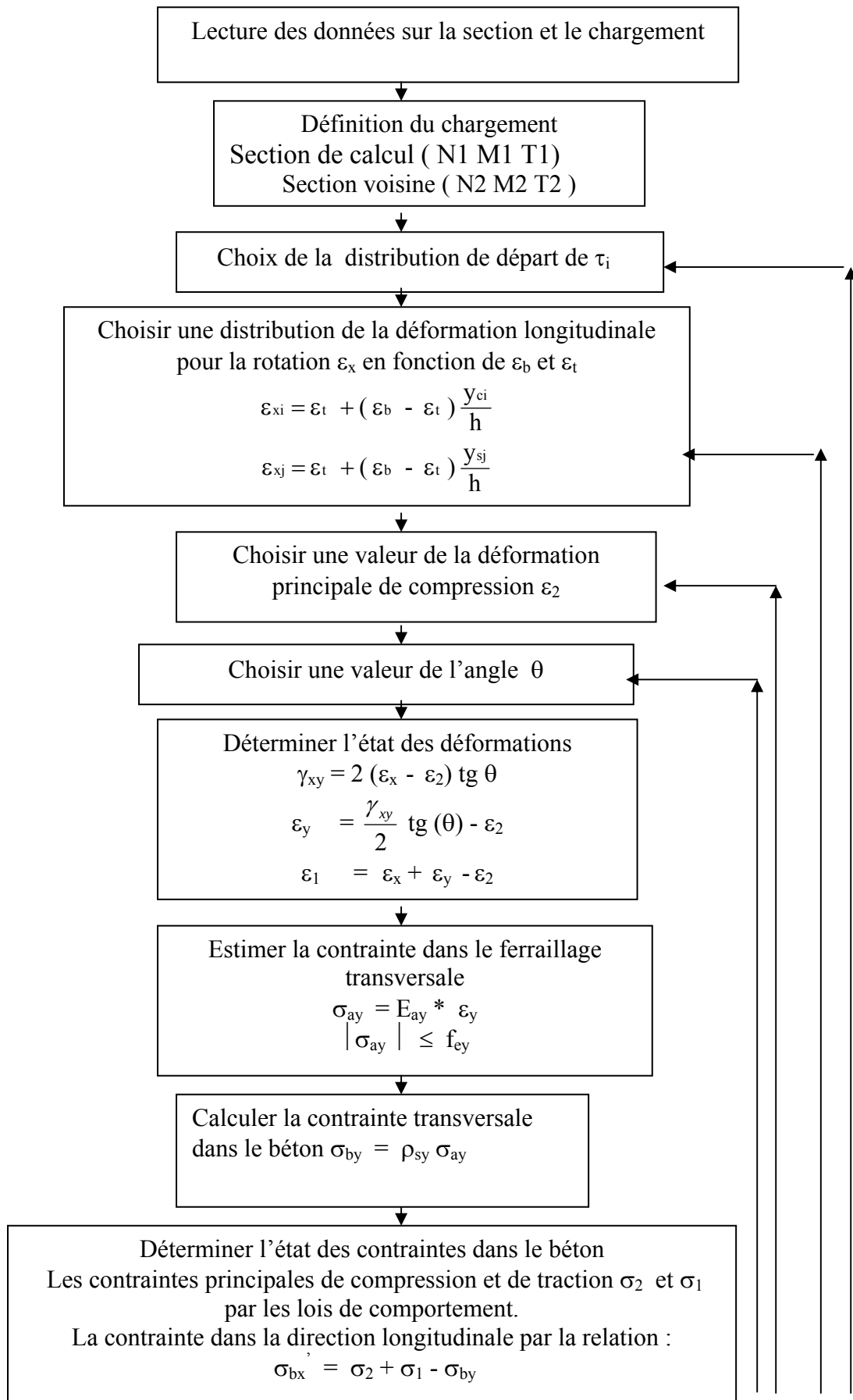
- si oui, passer à l'étape suivante
- si non, revenir à la deuxième étape considérer la nouvelle distribution de τ

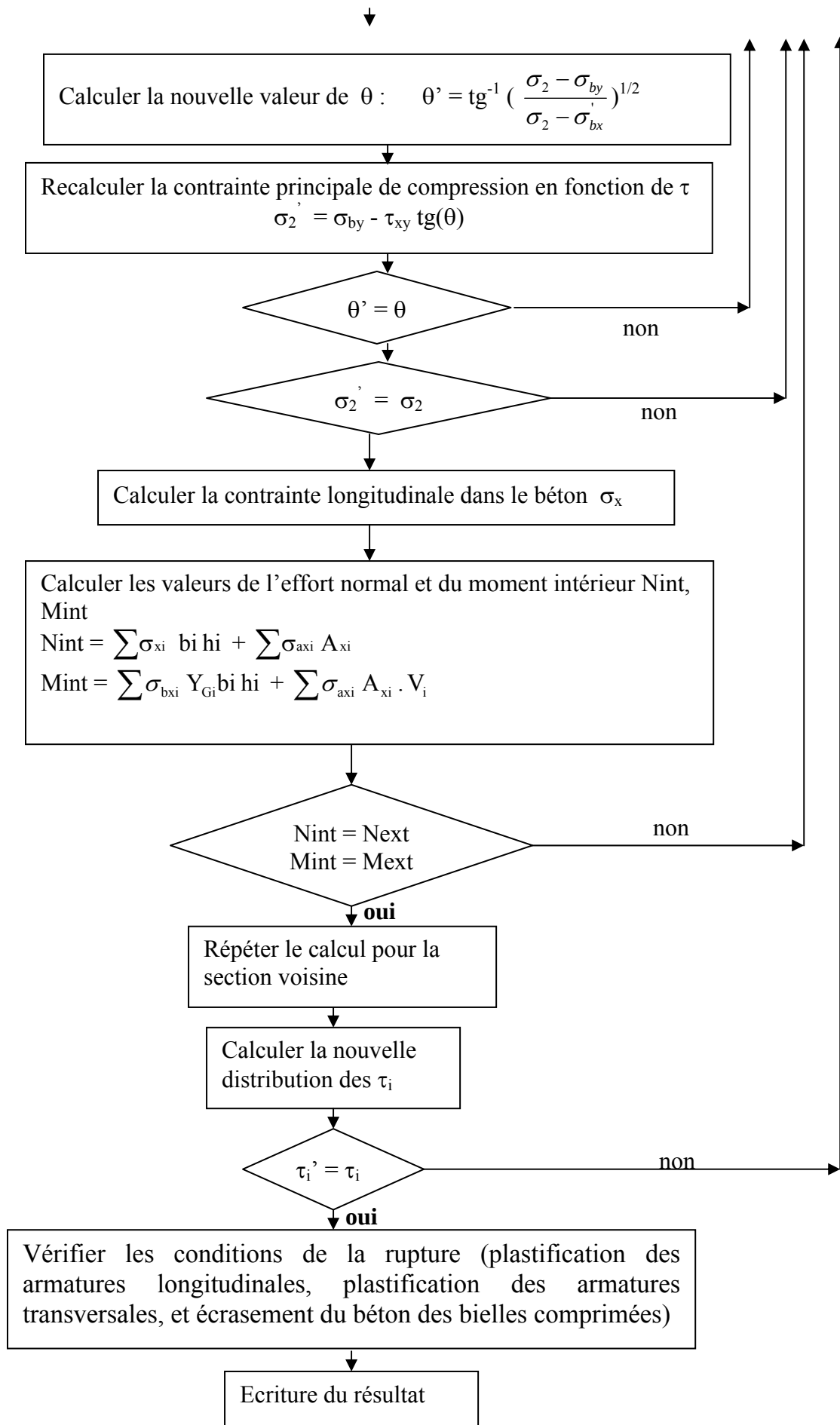
Dix-huitième étape : vérifier les conditions à la rupture

Dix-neuvième étape : écrire le résultat

Organigramme de la méthode

L'organigramme de la méthode construit à partir des étapes proposées par l'auteur est :





Bien que les problèmes de croisement des boucles ainsi que celui de la vérification du niveau de sollicitation observés dans la méthode générale de Vecchio et Collins soient levés, cette méthode reste à améliorer. En effet, il est aisé de constater qu'elle n'est pas adaptée aux calculs classiques de structure basés sur la matrice de rigidité d'une section droite.

L'existence simultanée d'un effort normal et d'un moment fléchissant introduit une variable supplémentaire dans la définition de la distribution des déformations longitudinales, qui est la position de l'axe neutre (qui varie en fonction de l'évolution du chargement). D'autre part, dans le cas général d'une section en béton précontraint, le tracé des câbles de précontrainte est généralement incliné, ce qui induit une réduction d'effort tranchant dû à cette inclinaison. La valeur de cette réduction n'est connue qu'à l'étape de vérification de l'équilibre de la section sous les sollicitations normales (N et M). Cette réduction induit une variation de l'effort tranchant effectif repris par la section de béton et par les armatures passives, en fonction de laquelle la nouvelle distribution des contraintes tangentielles devrait être calculée, qui n'est pas prise en compte dans la définition des efforts appliqués à la section voisine. De plus, son introduction à ce niveau de calcul peut conduire le calcul à une oscillation entre deux valeurs de la distribution des contraintes tangentielles.

La contrainte dans le sens transversal calculée dans cette méthode ne vérifie pas la condition d'équilibre des contraintes : en effet, la contrainte totale appliquée à la section dans le sens transversal est, selon la théorie des poutres, nulle. L'équilibre des contraintes dans ce sens peut s'écrire :

$$\sigma_y = \sigma_{by} + \rho_y \sigma_{ay} = 0$$

Or la formulation de la contrainte dans le béton à la huitième étape ne conduit pas à la satisfaction de cette condition d'équilibre.

La matrice de rigidité de la section droite ne peut être estimée dans ces conditions, en l'absence de relations explicites en déformation entre les sollicitations normales et l'effort tranchant.

L'analyse du comportement d'une structure suppose le calcul d'un nombre élevé de sections droites. Dans ce cas, l'analyse complète de la section voisine rend la durée de calcul trop longue.

Enfin, faire une hypothèse sur la distribution des contraintes tangentielles, afin de faire une bonne estimation de la distribution de celles-ci, permettra d'adapter cette méthode aux calculs classiques de structure, et ainsi son intégration dans un processus de calcul qui appelle le résultat de l'équilibre de la section sous les sollicitations normales en prenant en compte

d'éventuelles réductions de l'effort tranchant dues à l'existence d'armatures inclinées dans le calcul de la distribution des contraintes tangentielles d'une part. D'autre part, il permettra également de limiter une trop longue durée de calcul en éliminant du calcul l'analyse complète de la section voisine. Enfin, il permettra de définir aisément les termes de la matrice de rigidité d'une section droite dans le cas de l'existence simultanée de M , N et V .

2.2.3 Modèle de Kachi [11]

Dans son étude Kachi [11] a montré que la contrainte dans le béton dans la direction transversale est une contrainte de compression. Dans le calcul classique du béton armé à l'effort tranchant, le modèle du treillis constitué des bielles inclinées de l'angle θ et des armatures transversales (figure 1.23) soumis à l'effort de glissement longitudinal par unité de longueur $G = V / z$, permet le calcul des efforts de traction dans les armatures transversales :

$$F_{at} = G \operatorname{tg} \theta$$

(armatures «droites» de direction y) et de compression dans les bielles de béton :

$$F_{bc} = G / \cos \theta$$

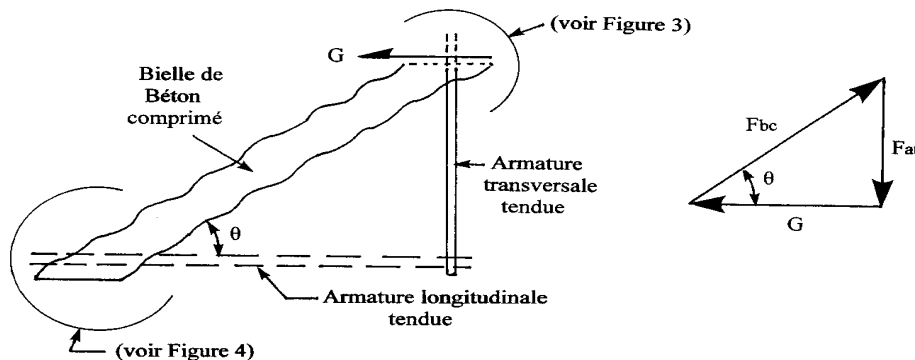


Figure 1.23. *Modèle simple du treillis.*

Plus finement (figure 1.24), la traction dans l'armature varie entre le maximum F_{at} au niveau des fissures et F'_{at} à mi-distance des fissures. La bielle de béton est soumise à la compression F_{bc} parallèle aux fissures et à une traction F_{bt} dans la direction y de l'armature due à l'adhérence acier/béton (donc proportionnelle à $F_{at} - F'_{at}$) qui est nulle au niveau des fissures et maximale à mi-distance des fissures. On peut estimer grosso modo les valeurs absolues moyennes de ces efforts à :

$$\begin{aligned} F_{at,moy} &= (F_{at} + F'_{at}) / 2 \\ F_{bt,moy} &= (F_{at} - F'_{at}) / 2 \end{aligned}$$

La résultante dans la direction y est nulle, aussi bien dans le treillis classique qu'en valeurs moyennes :

$$\begin{aligned} F_{at} - F_{bc} \sin \theta &= 0 \\ F_{at,moy} - (F_{bc} \sin \theta - F_{bt,moy}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ceci correspond à l'hypothèse des poutres : la contrainte transversale σ_y est nulle (du moins dans les sections qui respectent le principe de Saint-Venant ; il serait possible de tenir compte de σ_y non nulle dans certaines sections).

L'allongement moyen de l'armature sera lié à l'effort $F_{at,moy}$. L'effort local dans le béton est une compression : $F_{bc} \sin \theta - F_{bt,moy}$. La modélisation doit tenir compte de ce paradoxe apparent d'une contrainte de compression du béton dans la direction où la contrainte des armatures est une traction, donc la déformation moyenne un allongement. On ne peut pas relier la contrainte de compression σ_{by} du béton à la déformation moyenne ε_y . En fait, celle-ci comprend deux termes :

$$\varepsilon_y = \varepsilon'_{by} + w_y / s_y$$

Le premier est la déformation propre du béton entre les fissures (un raccourcissement d'après ce qui précède). Le second est un allongement dû aux fissures d'ouverture w_y et d'espacement s_y dans la direction y ; ce terme est prépondérant.

La transposition de la condition d'équilibre (1.8) en contraintes compte tenu des conventions de signe (traction positive) et des aires respectives d'acier et de béton donne :

$$\sigma_{by} = - \rho_y \sigma_{ay} \quad (1.9)$$

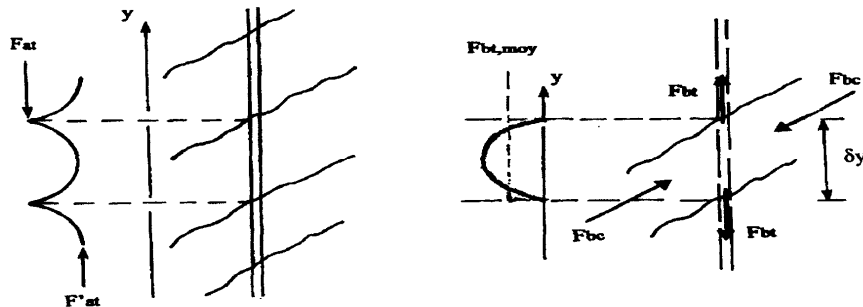


Figure 1.24. Comportement local du béton armé dans le sens y , dans l'âme.

I.3 Conclusion

L'ensemble de ces méthodes nous donne une idée claire sur la résolution du problème. En effet, la difficulté observée, dans un premier temps, sur la nature de la contrainte dans le béton dans le sens transversal a été levée par Kachi [11]. La résolution du système d'équations régissant un élément en béton armé reste compliquée, elle fait appel à des méthodes itératives lourdes. L'objet de ce travail est de réaliser un logiciel de calcul en fortran 90 à partir des travaux effectués par Kachi et col [11], [12], [13], [14] [15], capable de résoudre ce système d'équation, de simuler ainsi l'évolution de la distorsion des sections de poutre en fonction de celle de l'effort tranchant.

Néanmoins, l'ensemble des méthodes, calculent la contrainte σ_2 avec les relations du cercle de Mohr.

Or dans le cas de fissuration par flexion, le treillis équivalent se trouve coupé au niveau de la bielle de béton, il n'y a plus de continuité du béton. Ce point nécessite une résolution particulière.

Chapitre II

CALCUL DE LA RIGIDITE A L'EFFORT TRANCHANT D'UNE SECTION DE POUTRE ARME

CALCUL DE LA RIGIDITE A L'EFFORT TRANCHANT D'UNE SECTION DE POUTRE ARME

II.1. Introduction

La modélisation du comportement en flexion jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint est un problème bien connu. La présente étude s'inscrivant dans la suite des recherches menées au CEBTP, on ne citera à ce sujet que Grelat [8] et Nait-Rabah [21].

Dans ces études, les déformations non linéaires dues à l'effort tranchant étaient négligées. La prévision de la résistance à l'effort tranchant pouvait être faite par des formules simples, indépendamment du comportement en flexion composée. Même si cette résistance est assurée, l'existence de fissures de cisaillement peut créer un terme de déplacement dû à l'effort tranchant qui n'est pas négligeable vis-à-vis de celui dû à la flexion. L'objectif de l'étude est donc la prévision correcte des déformations dues à l'effort tranchant, ce qui est important pour certaines applications : redistributions des efforts dans les poutres hyperstatiques fortement sollicitées à l'effort tranchant, réponse sismique des structures à murs peu élancés ...

On présente donc ici un modèle théorique permettant d'analyser le comportement jusqu'à rupture des sections de poutre en béton armé et précontraint, soumises à l'effet combiné d'une flexion plane et d'un effort tranchant en élasticité non linéaire. Il permet l'estimation de la rigidité de cisaillement des poutres avec des formes de section et des détails de ferrailage variés.

II.2. Etude de l'équilibre d'une poutre en élasticité non linéaire

En élasticité non linéaire, l'étude de l'équilibre d'une poutre en béton armé et précontraint passe par la résolution d'un système d'équations de la forme :

$$[\Delta P] = [K] \cdot [\Delta U]$$

où $[\Delta P]$ est le vecteur représentant l'accroissement du chargement appliqué à la poutre, $[\Delta U]$ est le vecteur représentant l'accroissement des déplacements des nœuds de la poutre et $[K]$ représente la matrice de rigidité globale de la poutre, qui est construite à partir des matrices de rigidité des sections $[K_s]$.

En élasticité linéaire (module de Young E), l'expression de cette matrice est :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} E.A & 0 & 0 \\ 0 & E.I & 0 \\ 0 & 0 & G.A_1 \end{bmatrix}$$

dans laquelle interviennent l'aire A et l'inertie de flexion I de la section, le module transversal $G = E / 2(1+\nu)$ et l'aire réduite A_1 pour l'effort tranchant. En élasticité non linéaire, pour une poutre en béton armé, l'expression qui sera utilisée est :

$$[Ks] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta N}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta N}{\Delta \delta w} & 0 \\ \frac{\Delta M}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta M}{\Delta \delta w} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{\text{moy}}} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où ΔN est l'accroissement de l'effort normal de la section, ΔM est l'accroissement du moment fléchissant de la section, $\Delta \delta u$ est l'accroissement de la déformation au niveau centre de gravité de la section et $\Delta \delta w$ est l'accroissement de la rotation différentielle (courbure) de la section .

Ces déformations répondent à l'hypothèse de planéité des sections (Navier-Bernoulli) ; la déformation longitudinale ε_x est une fonction linéaire de l'abscisse transversale y :

$$\varepsilon_x (y) = \delta u + \delta w \cdot y \quad (2.2)$$

ΔV est l'accroissement de l'effort tranchant de la section et $\Delta \gamma_{\text{moy}}$ est l'accroissement de la distorsion **moyenne** de la section.

Dans beaucoup de logiciels de calcul non linéaire du comportement des poutres en béton armé, le terme dû à l'effort tranchant est soit totalement ignoré - Grelat [8] - soit pris égal à la valeur $G.A_1$ de l'élasticité linéaire - Nait-Rabah [21]. Dans cette étude, on évalue la rigidité à l'effort tranchant de chaque section :

$$\overline{GA_1} = \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{\text{moy}}} \quad (2.3)$$

à chaque étape de calcul, sans faire intervenir explicitement un module transversal G .

L'algorithme développé simule le comportement en cisaillement jusqu'à rupture d'une section de poutre en élasticité non linéaire. La rigidité de cisaillement globale de la poutre est obtenue alors à partir de celles des sections par un processus d'intégration numérique. Il permet ainsi d'évaluer la rigidité à l'effort tranchant de la poutre à chaque étape du chargement et les flèches correspondantes.

L'expression adoptée ci-dessus pour $[Ks]$ est déjà une simplification. En effet, les termes de couplage entre ΔN et $\Delta \delta w$, et entre ΔM et $\Delta \delta u$, sont incontournables dans l'analyse de flexion composée, mais on a supposé que les termes de couplage entre ΔN et $\Delta \gamma_{\text{moy}}$ (ou ΔV et $\Delta \delta u$), et entre ΔM et $\Delta \gamma_{\text{moy}}$ (ou ΔV et $\Delta \delta w$), étaient négligeables. Le couplage entre les déformations dues à V et celles dues à (N, M) évoqué dans l'introduction va se trouver dans la dépendance de $\Delta \gamma_{\text{moy}}$ avec les contraintes et déformations dues à N et M .

Pour les poutres en béton précontraint, la matrice $[Ks]$ est complétée par des termes dus à l'effet de la précontrainte, dans l'équilibre de flexion composée et dans l'équilibre d'une partie de l'effort tranchant par la composante transversale de l'effort des câbles inclinés – Nait-Rabah [21] .

II.3. Exposé général de la modélisation

II.3.1. Domaine d'application

L'étude porte sur des poutres assez élancées, soumises à une flexion plane avec effort tranchant. La section transversale est supposée constante par tronçons le long de la poutre. Elle présente une symétrie par rapport à l'axe y , ce qui permet sa décomposition en une succession de couches selon y . Le principe de Saint Venant est supposé applicable en toute section, la contrainte agissant dans le sens transversal y est alors nulle. L'hypothèse de Navier est appliquée aussi en toute section ; on ne peut donc pas traiter des poutres courtes.

Les poutres sont suffisamment armées pour être loin de la fragilité, donc présenter des fissures bien réparties.

II.3.2. Discrétisation de la section de poutre

La section est discrétisée en une succession de couches de béton et d'éléments longitudinaux d'acier (figure 2.1). Les armatures transversales droites sont supposées constantes sur toute la hauteur de la section et réparties sur toute la longueur du tronçon ; leur aire est exprimée alors en pourcentage de l'aire du béton. Chaque couche de béton et chaque élément longitudinal d'acier est analysé séparément mais la condition d'équilibre de la section est satisfaite globalement.

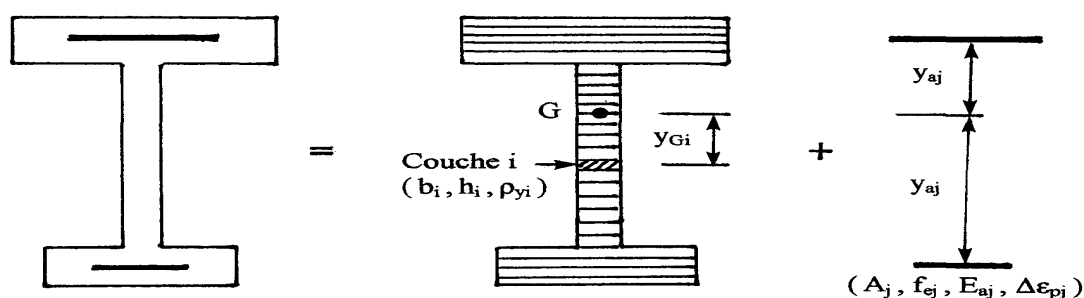


Figure 2.1. Section de poutre discrétisée en couches.

Les couches de béton sont caractérisées par : leur hauteur h_i , leur largeur b_i , leurs pourcentages de ferrailage longitudinal ρ_{xi} et transversal ρ_{yi} , et la position de leur centre de gravité par rapport à un axe de référence y_{Gi} . Les armatures longitudinales sont définies par : leur section transversale A_j , la déformation initiale de précontrainte $\Delta\epsilon_{pj}$, le seuil de plasticité f_e et leur position par rapport à un axe de référence y_{aj} . Les lois de comportement de l'acier et du béton sont des caractéristiques communes à toute la section.

II.3.3. Principes de la modélisation et équations générales

II.3.3.1. Milieux continus équivalents

II.3.3.1. 1. En déformations

Seules les armatures sont réellement continues. On fait l'hypothèse que les déformations moyennes du milieu continu équivalent à l'association du béton fissuré et des armatures sont

gouvernées par celles des armatures ε_{ax} et ε_{ay} . Les relations générales entre les déformations moyennes sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_2 \cos^2 \theta \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \quad (2.5)$$

$$\gamma = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta \quad (2.6)$$

La direction principale D_1 correspond à la plus grande déformation principale (valeur positive = allongement), la direction D_2 à la plus petite. L'angle de D_2 avec l'axe longitudinal x est :

$$\theta = (\vec{GD}_2, \vec{Gx})$$

La direction D_2 est aussi celle des fissures, du moins au début de la fissuration. Lorsque les sollicitations croissent, cette direction peut dévier de celle des fissures initiales, ce qui est physiquement admissible en raison des contraintes de cisaillement transmises par engrenement des lèvres des fissures. Ceci correspond aussi au concept des bielles d'inclinaison variable de l'Eurocode 2 (1992), § 4.3.2.4.4 Effort tranchant – Méthode des bielles d'inclinaison variable.

Dans les directions particulières x et y , on a :

$$\varepsilon_{ax} = \varepsilon_x \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{ay} = \varepsilon_y \quad (2.8)$$

Reliée aux déformations du béton tendu et fissuré, la déformation moyenne correspond à la somme de deux termes : la déformation moyenne propre du béton ε'_b , liée à sa contrainte moyenne σ_b , et l'effet réparti des fissures d'ouverture w espacées de s :

$$\varepsilon_b = \varepsilon'_b + \frac{w}{s}$$

Mais on n'explicite ni la déformation propre ε'_b , ni w et s .

La distorsion moyenne γ qui intervient en [2.6] résulte aussi de la distorsion propre du béton et de l'effet des fissures, mais on n'explicite pas les deux termes.

II.3.3.1. 2. En contraintes

Le béton doit équilibrer seul les contraintes de cisaillement τ parallèles à x et y (on néglige les contraintes qui seraient équilibrées par l'« effet de goujon » des armatures). On fait l'hypothèse d'un milieu continu équivalent pour le béton seul. Les relations générales entre les contraintes du béton sont donc :

$$\sigma_{bx} = \sigma_{b1} \sin^2 \theta_b + \sigma_{b2} \cos^2 \theta_b \quad (2.9)$$

$$\sigma_{by} = \sigma_{b1} \cos^2 \theta_b + \sigma_{b2} \sin^2 \theta_b \quad (2.10)$$

$$\tau_b = \tau = (\sigma_{b1} - \sigma_{b2}) \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (2.11)$$

On fait de plus l'hypothèse de la coïncidence des directions principales des contraintes du béton avec les directions principales des déformations moyennes :

$$\theta_b = \theta \quad (2.12)$$

II.3.3.2. Compatibilité partielle des déformations du béton avec les déformations moyennes

On fait l'hypothèse que les déformations du béton dans les directions principales ε_{b1} et ε_{b2} , qui sont liées aux contraintes principales σ_{b1} et σ_{b2} , sont égales aux déformations moyennes principales :

$$\varepsilon_{b1} = \varepsilon_1 \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{b2} = \varepsilon_2 \quad (2.14)$$

Dans la direction D_1 , qui est grosso modo perpendiculaire aux fissures, devraient intervenir les deux termes de déformation propre du béton et d'ouverture des fissures. On contourne la difficulté en faisant intervenir une loi de comportement conventionnelle qui relie la contrainte de traction σ_{b1} à la déformation ε_1 moyenne (voir § II.4.2).

Dans la direction D_2 qui est grosso modo celle des bielles comprimées parallèles aux fissures, on a effectivement continuité du béton.

II.3.3.3. Equations d'équilibre

II.3.3.3. 1. Equilibre local des couches

Dans les directions x et y , les contraintes σ_x et σ_y résultent de la somme des termes dus aux armatures et au béton, compte tenu des aires respectives :

$$\sigma_x = \rho_x \sigma_{ax} + \sigma_{bx} \quad (2.15)$$

$$\sigma_y = \rho_y \sigma_{ay} + \sigma_{by} = 0 \quad (1.12)$$

II.3.3.3. 2. Equilibre global des sections

L'équilibre doit être assuré entre les sollicitations extérieures N , M , V et les résultantes des contraintes internes N_{int} , M_{int} , V_{int} . Pour la flexion composée, on fait la somme des contributions des contraintes longitudinales dans les armatures et dans le béton (ce qui est la traduction de l'équation [2.15]) :

$$N_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} \quad (2.16)$$

$$M_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} y_{ai} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} y_i \quad (2.17)$$

Pour l'effort tranchant, seules les contraintes de cisaillement dans le béton interviennent :

$$V_{int} = \sum_i b_i h_i \tau_{bi} \quad (2.18)$$

II.4. Lois de comportement des matériaux

II.4.1. Comportement du béton en compression dans la direction D_2

La contrainte principale σ_{b2} est une fonction des deux déformations principales ε_1 et ε_2 :

$$\sigma_{b2} = E_{b2}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2 \quad (2.19)$$

On se base sur la relation contrainte-déformation uniaxiale de Sargin proposée à l'annexe 1 des Règles BPEL (1999), qui fait intervenir la résistance f_c et le raccourcissement correspondant ε_{b0} . On la transforme pour traduire le comportement du béton des bielles comprimées selon D_2 et tendu dans la direction D_1 . La résistance est modifiée selon la relation proposée par Vecchio et Collins (1986) en fonction de la déformation ε_1 mais en bornant le rapport f_{c2}/f_c :

$$\frac{f_{c2}}{f_c} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \varepsilon_1 / \varepsilon_{b0}} \quad \text{avec} \quad 0.7 \leq \frac{f_{c2}}{f_c} \leq 1$$

Pour les faibles valeurs de l'allongement ε_1 on doit retrouver la loi de comportement uniaxiale de compression simple, donc $f_{c2} = f_c$. On fait l'hypothèse que la déformation correspondant à f_{c2} reste égale à ε_{b0} . La loi de comportement est alors :

$$\bar{\sigma} = \frac{k_b \bar{\varepsilon} - (k_b - 1) \bar{\varepsilon}^{-2}}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} - k_b \bar{\varepsilon}^{-2}} \quad (2.19\text{bis})$$

avec : $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{b0}}$ et $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{b2}}{f_{c2}}$; k_b et k'_b selon règles BPEL 1999

Une étude paramétrique sur l'influence de ε_{b0} sur le comportement en cisaillement des sections de poutre est également envisagée. En effet, nous pouvons être amenés à penser que de la même façon que la résistance à la compression est réduite dans le sens des bielles comprimées la déformation au pic des contraintes l'est aussi en écrivant :

$$\frac{\varepsilon_{b02}}{\varepsilon_{b0}} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \varepsilon_1 / \varepsilon_{b0}}$$

Un calcul de sections de poutre est alors effectué en utilisant les deux valeurs de la déformation des contraintes ε_{b0} et ε_{b02} . Il permet d'apprécier l'influence de ce paramètre sur le comportement global de la section.

II.4.2. Comportement du béton en traction dans la direction D_1

La loi contrainte-déformation du béton en traction est linéaire avant la fissuration du béton. Au-delà, la contrainte de traction diminue avec l'augmentation de la déformation moyenne de traction laquelle inclut l'effet de l'ouverture des fissures (figure 2.2).

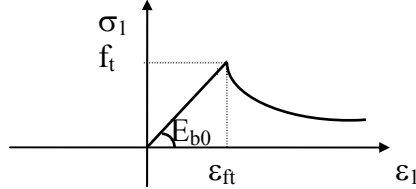


Figure 2.2. Comportement du béton en traction.

Avant fissuration du béton :

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon_{ft} \quad \sigma_1 = E_{bo} \cdot \varepsilon_1 \quad (2.20)$$

Pour décrire la branche décroissante, après fissuration, qui traduit l'influence du béton tendu entre les fissures sur la déformation moyenne, on adopte la relation proposée par Belarbi et Hsu (1994) :

$$\sigma_1 = f_t \left(\frac{\varepsilon_{ft}}{\varepsilon_1} \right)^{0,4} \quad (2.21)$$

où $\varepsilon_{ft} = \frac{f_t}{E_{bo}}$

f_t est la résistance du béton à la traction et ε_{ft} est la déformation de fissuration du béton .

Contrairement à une idée assez répandue (Grelat [8], par exemple) la contribution de l'adhérence, donc du béton tendu entre les fissures, ne s'annule jamais totalement (Fouré, 2003) . Par conséquent, cette loi [2.21] couvre l'ensemble du champ des déformations jusqu'à la rupture des armatures. Elle s'applique aussi dans le cas particulier du comportement uniaxial vis-à-vis des contraintes longitudinales, en remplaçant σ_{b1} par σ_{bx} et ε_1 par ε_x .

II.4.3. Comportement de l'acier

Les comportements des aciers passifs et de précontrainte sont caractérisés par les types de relations admises par les règles BPEL 1999 :

II.4.3.1 Comportement des aciers passifs

On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

A) Aciers naturels: Ils sont caractérisés par une loi élastoplastique parfaite (figure 2.3)

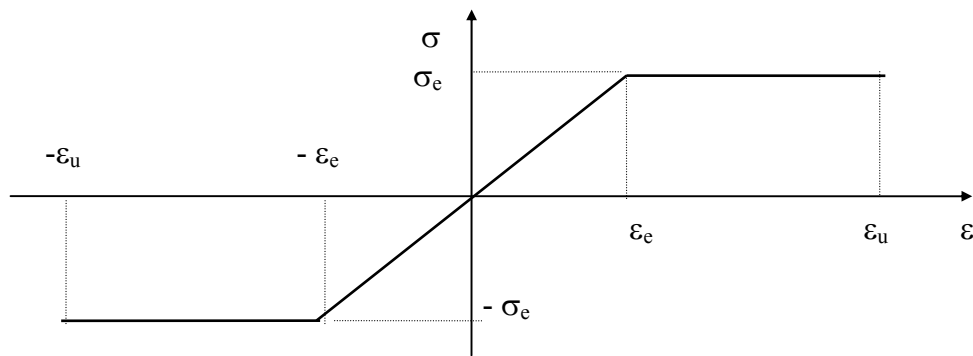


Figure 2.3 : Comportement des aciers naturels.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E_a \varepsilon && \text{pour } \varepsilon \leq \varepsilon_e \\
 \sigma &= \sigma_e && \text{pour } \varepsilon_e < \varepsilon < \varepsilon_u \\
 \sigma &= 0 && \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_u
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Du côté de la traction les relations se déduisent par symétrie.

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL à 10 ‰

E_a : Module longitudinal de l'acier,

ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,

σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,

ε_u : Déformation ultime de l'acier.

b) Aciers écrouis

On adopte la loi préconisée par les règles BAEL 83 qui supposent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70 % de la limite élastique (σ_e). Au-delà, une courbe $\varepsilon = f(\sigma)$ du cinquième degré (figure 2.4).

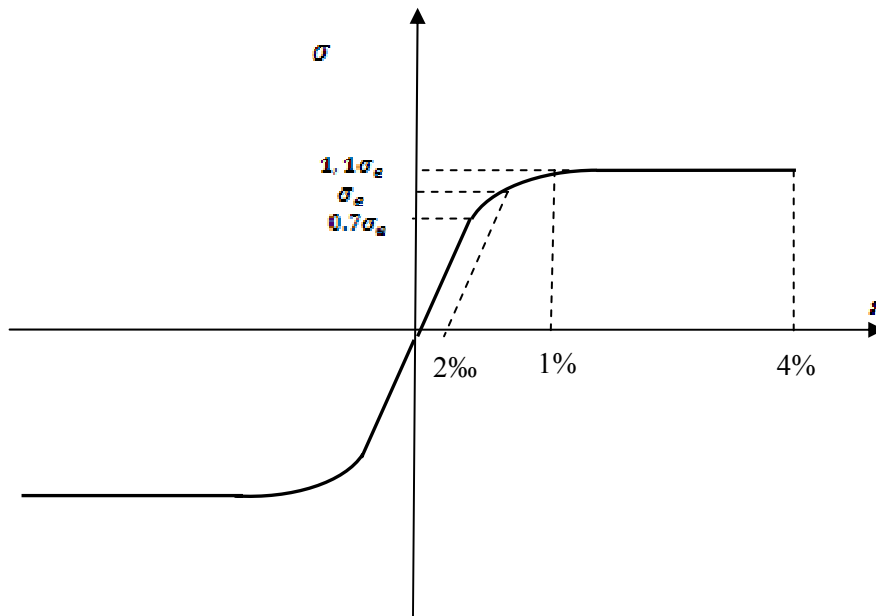


Figure 2.4: Comportement des aciers écrouis.

Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E_s \cdot \varepsilon && \text{pour } \sigma < 0.7 \sigma_e \\
 \varepsilon &= \frac{\sigma}{E_s} + 0.823 \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 0.7 \right)^5 && \text{pour } 0.7 \sigma_e < \sigma < 1.1 \sigma_e \\
 \sigma &= 1.1 \sigma_e && \text{pour } 1 \% < \varepsilon < \varepsilon_u
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

(avec les relations qui se déduisent en traction par symétrie).

II.4 .3.2 Comportement des aciers actifs

Le comportement des aciers de précontrainte est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le règlement BPEL 83 (figure 2.5).

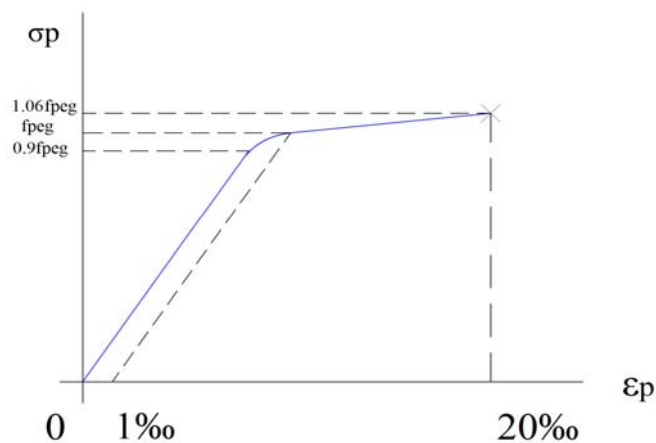


figure 2.5 Comportement des aciers actifs

Le comportement des aciers de précontrainte est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le règlement BPEL 83 (figure 2.5).

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E_a \varepsilon_p && \text{pour } 0 < \sigma < 0.9\sigma_e \\
 \varepsilon_p &= \frac{\sigma_p}{E_a} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_e} - 0.9 \right)^5 && \text{pour } 0.9\sigma_e < \sigma_p < 1.06\sigma_e \\
 \varepsilon_p &= 1.06 \sigma_e && \text{pour } \varepsilon > 2 \%
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

(avec les relations qui se déduisent par symétrie du côté de la traction).

II.5. Calculs spécifiques relatifs à l'effort tranchant

II.5.1. Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$

Pour calculer la distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur d'une section, on associe à chaque section de calcul une section voisine distante de d . Les contraintes tangentielles sont alors déduites de l'équilibre des couches comprises entre la section de calcul sous l'état de sollicitation (N , M , V) et la section voisine soumise aux efforts (N_1 , M_1 , V_1) tels que :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N \\
 M_1 &= M - V \cdot d \\
 V_1 &= V
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

La distance entre les deux sections est généralement prise égale à $h/6$ (où h est la hauteur totale de la poutre) (Vecchio et Collins [31]). Une étude paramétrique permet de constater que la différence entre la valeur de l'effort tranchant extérieur et la résultante des $\tau(y)$ calculée avec cette distance reste inférieure à 1 %, ce qui est négligeable.

Les deux sections sont analysées de façon à satisfaire chacune aux deux équations d'équilibre. En appliquant la méthode classique de la RDM, on étudie l'équilibre de l'ensemble des forces agissant sur une couche d'ordre k présentée à la figure 2.6 :

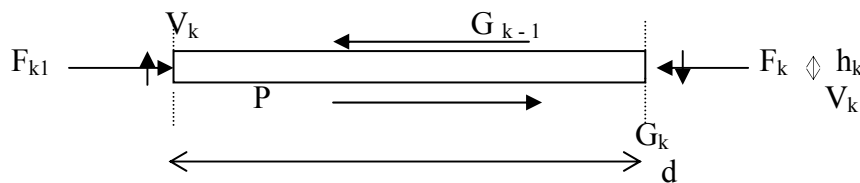


Figure 2.6. Forces agissant sur une couche de béton entre deux sections.

où F_k et F_{k1} désignent les efforts normaux agissant sur la couche k dans les deux sections, G_{k-1} et G_k sont les efforts de glissement résultants sur les faces inférieure et supérieure de la couche k et V_k est la part de l'effort tranchant équilibrée par la couche k .

Ces efforts F_k sont déterminés à partir des contraintes normales longitudinales moyennes dans le béton et dans les armatures longitudinales s'il en existe dans la couche. Dans une couche quelconque i , on a :

$$F_i = \sigma_{bxi} b_i h_i + \sigma_{axi} A_{axi}$$

Les efforts horizontaux agissant sur les faces supérieure et inférieure de la couche de béton d'ordre k sont alors calculés comme suit :

$$G_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (F_{i1} - F_i)$$

$$G_k = G_{k-1} + F_{k1} - F_k$$

L'équilibre du tronçon permet de calculer la valeur de V_k , en écrivant que le moment des forces est nul au point P :

$$V_k = \frac{(G_{k-1} + G_k) h_k}{d}$$

La valeur moyenne de la contrainte tangentielle de la couche k est alors donnée par :

$$\tau_k = \frac{V_k}{b_k h_k} = \frac{(G_{k-1} + G_k)}{2 d b_k} \quad (2.26)$$

II.5.2. Calcul de la distorsion moyenne

La distorsion varie d'une couche de béton à une autre. On définit une distorsion moyenne de la section notée γ_{moy} . Son calcul est effectué en remarquant, d'après le théorème des travaux virtuels, que l'accroissement ΔW_e du travail de l'effort tranchant extérieur est égal à l'accroissement ΔW_i du travail des contraintes tangentielles τ_i . Ces derniers peuvent s'écrire :

$$\Delta W_e = \Delta V \cdot \Delta \gamma_{moy}$$

$$\Delta W_i = b_i \cdot h_i \cdot \Delta \tau_i \cdot \Delta \gamma_i$$

On doit avoir, m étant le nombre des couches de béton :

$$\Delta W_e = \sum_{i=1}^m \Delta W_i$$

$$D'où : \Delta \gamma_{moy} = \frac{\sum_{i=1}^m \Delta \tau_i b_i h_i \Delta \gamma_i}{\Delta V} \quad (2.27)$$

II.6. Résolution du problème

II.6.1. Transformation des équations générales

Pour la résolution du problème on explicite certaines grandeurs à partir des équations générales précédentes. On tire de [2.4] :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x}{\sin^2 \theta} - \frac{\varepsilon_2}{\operatorname{tg}^2 \theta} \quad (2.28)$$

On réécrit aussi les équations [2.9], [2.10] et [2.11] entre les contraintes du béton sous la forme suivante (en tenant compte de [2.12]):

$$\sigma_{bx} = \sigma_{b2} + \sigma_{b1} - \sigma_{by} \quad (2.29)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sigma_{b2} - \sigma_{bx}}{\sigma_{b2} - \sigma_{by}} \right)^{1/2} \quad (2.30)$$

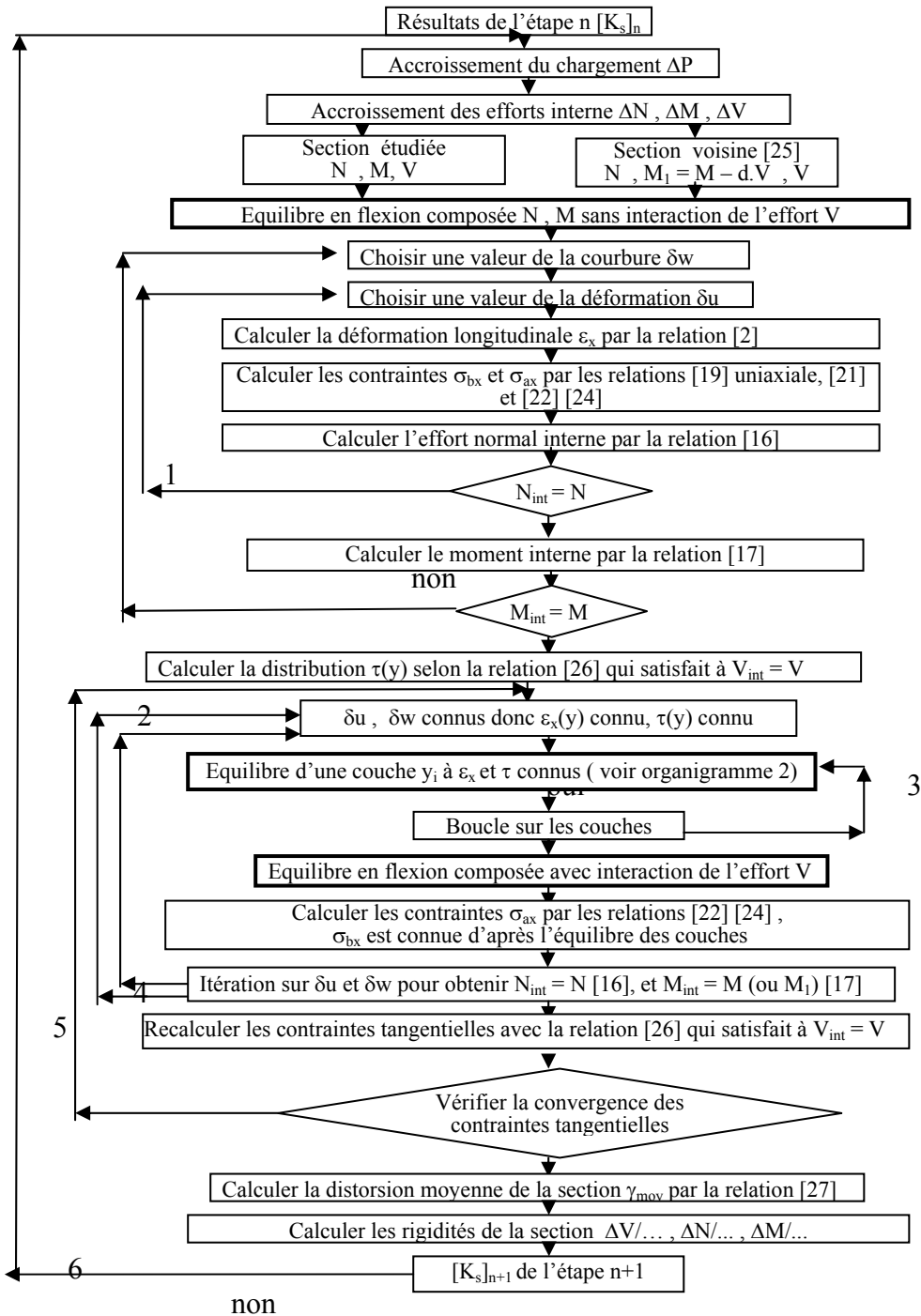
$$\sigma_{b2} = \sigma_{by} - \frac{\tau}{\operatorname{tg} \theta} \quad (2.31)$$

II.6.2. Algorithme et organigramme de calcul

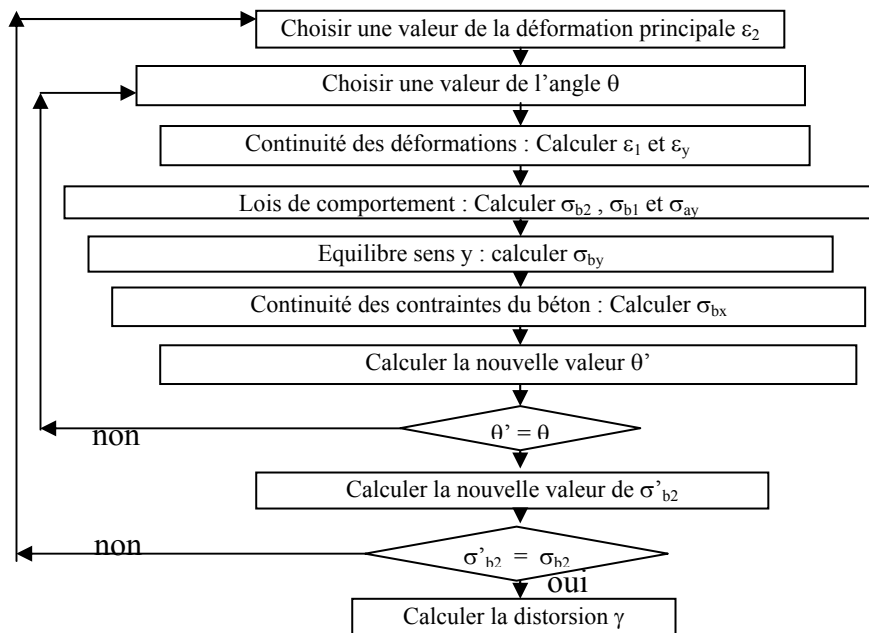
L'étude de l'équilibre d'une couche de béton armé où ε_x et τ sont connus fait appel à un système de 10 équations [2.3] [2.5] [2.6] [2.19] [2.20 ou 2.21] [2.23] [2.28] [2.29] [2.30] [2.31] à 10 inconnues : ε_y , ε_1 , ε_2 , γ , θ , σ_{ay} , σ_{bx} , σ_{by} , σ_{b1} , σ_{b2} . Pour le résoudre, on fait appel à une méthode itérative. Pour une distribution donnée des déformations longitudinales, on suppose connue la déformation principale ε_2 et on cherche la valeur de l'angle θ qui permet de satisfaire les conditions de compatibilité et d'équilibre de la couche.

Les contraintes tangentielles $\tau(y)$ sont calculées par l'équilibre de deux sections voisines (équation [2.26]). La déformation longitudinale ε_x est tirée de Navier [2.2], dans laquelle δu et δw résultent de l'équilibre global en flexion composée sous N , M selon [2.16] et [2.17], **avec** un couplage à l'effort tranchant V . Enfin, la distorsion moyenne de la section est calculée par [2.27]. La première approximation de la distribution des $\tau(y)$ est obtenue à partir de l'équilibre des deux sections voisines en flexion composée **sans** interaction de l'effort tranchant. Après le calcul de l'équilibre des couches, on corrige cette distribution par itérations, le paramètre de contrôle étant la valeur maximale de τ .

La résolution complète au niveau d'une section est décrite par les deux organigrammes ci-joints : 1. l'organigramme général et 2. le détail de l'étude d'une couche.

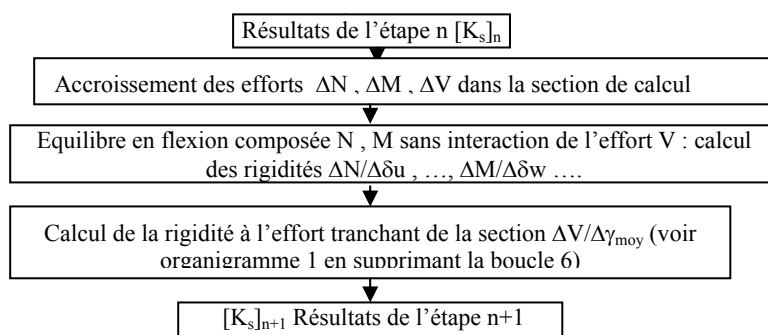


Organigramme 1. Organigramme général de l'étude d'une section.



Organigramme 2. *Equilibre d'une couche à ε_x et τ connus.*

Dans son état actuel, le logiciel n'utilise pas les principes de calcul précédents dans toute leur généralité. Il n'effectue pas la vérification de convergence des contraintes tangentielles, c'est-à-dire qu'il n'effectue pas de correction des $\tau(y)$ calculés initialement. L'équilibre de flexion composée est calculé par la méthode classique des sections planes en sollicitations uniaxiales, c'est-à-dire la première partie de l'organigramme 1. Le couplage entre les contraintes normales σ_x et les cisaillements τ n'intervient donc que dans le calcul de l'équilibre des couches, donc dans γ_{moy} (organigramme 3).



Organigramme 3. *Organigramme de la méthode simplifiée de calcul d'une section.*

Chapitre III

ETUDE D'UNE SECTION DROITE

ÉTUDE D'UNE SECTION DROITE

III.1.Introduction :

Nous nous intéressons à l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en béton armé et/ou précontraint. La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non linéaire.

En admettant que les sections restent planes après déformation, que les aciers passifs et les câbles de précontrainte intérieurs après mise en tension, sont parfaitement solidaires au béton, que les aciers passifs et actifs ne reprennent que les efforts axiaux.

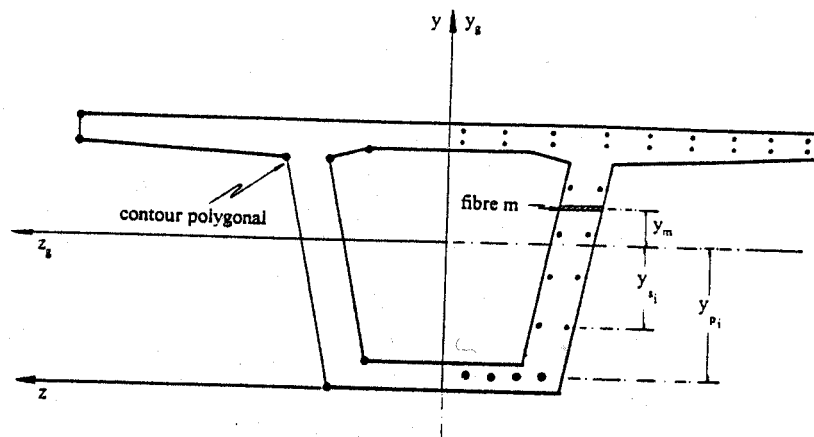


Figure 3.1 : Description d'une section typique d'une poutre en béton armé et précontraint.

L'effet de la précontrainte est introduit en tenant compte du phasage éventuel sur la mise en tension des câbles. A la mise en tension, l'action de la précontrainte, sur la section, est un effort de compression, égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble, au point où il traverse la section.

Les câbles de précontrainte deviennent des éléments résistants, immédiatement après leur mise en tension, et possédant une pré-déformation par rapport à la section.

Dans le cadre de cette étude, l'analyse non-linéaire concerne aussi bien les sollicitations normales dues à un effort normal N et à un moment de flexion M , agissant dans le plan zy . Que la sollicitation tangente, dans le béton, due à l'effort tranchant T dans le plan zy . On admet que la distorsion due à l'effet de T influe peu sur les déformations normales de la section.

Compte tenu de l'hypothèse des sections planes et de l'adhérence parfaite entre les matériaux constituant la section et en négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations normale de la section, la déformation longitudinale ε comptée positivement dans le sens des raccourcissements en un point courant de la section est donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon_g + y_m \cdot \phi_z \quad (3.1)$$

Où :

ε_g est l'allongement unitaire au centre de gravité de la section, on désigne par ϕ_z la rotation unitaire de flexion autour de l'axe Gy et y_m l'ordonnée du centre de gravité de la fibre d'ordre m.

La déformation tangente notée, γ_y , désigne la déformation de cisaillement de la section dans le plan xy.

Les déformations normales (ε_g, ϕ_z) peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\vec{\delta}_n$, défini par

$$\vec{\delta}_n = (\varepsilon_g, \phi_z)^T \quad (3.2)$$

De plus, la déformation tangente peut s'écrire sous forme :

$$\vec{\delta}_t = \gamma_y \quad (3.3)$$

Nous notons $\vec{\delta}_n$ le vecteur contenant l'accroissement de déformation de la section droite sous sollicitations normales et $\vec{\delta}_t$ la déformation de la section droite sous sollicitations tangentes.

$$\Delta \vec{\delta}_n = (\Delta \varepsilon_g, \Delta \phi_z)^T \quad (3.4)$$

$$\Delta \vec{\delta}_t = \Delta \gamma_y \quad (3.5)$$

A une déformation $\vec{\delta}_n$ et $\vec{\delta}_t$ de la section droite correspond, dans une armature adhérente et inclinée à la section, une déformation ε_{si} , défini par NAIT RABAH [21]. Dans

l'hypothèse des armatures passives et actives qui ne reprennent que les efforts axiaux son expression est :

$$\varepsilon_{si} = \cos^2 \alpha_i \{1, y_{si}\} \bar{\delta}_n \quad (3.6)$$

où α est l'angle que fait la ligne moyenne du câble avec l'axe Gx normal à la section droite.

Dans le cas d'une armature active, la mise en tension produit sur chaque section de l'élément un effort de compression opposé à l'effort de traction du câble, appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble au point de passage de celui-ci dans la section. La relation (3.15) doit être corrigée pour tenir compte de la pré-déformation ε_p^* du câble par rapport à la section droite, dont le calcul est développé en annexe N°1. La déformation ε_p^* dans le câble correspond à l'état de la décompression du béton. Elle exprime la différence entre la déformation du câble et celle de la section, dans la direction du câble, au moment de la mise en tension. La déformation dans l'armature de précontrainte d'ordre i et également définie par NAITRABAH [21] elle s'écrit dans les hypothèses admises dans cette étude sous forme :

$$\varepsilon_{pi} = \cos^2 \alpha_i \{1, y_{pi}\} \bar{\delta}_n + \varepsilon_{pi}^* \quad (3.7)$$

III.2. Calcul des sollicitations internes :

Les sollicitations normales à la section droite dues aux matériaux constituant la section, peuvent s'écrire sous la forme d'un vecteur $\bar{F}_n$, définit dans le repère principal Gzy, lié à la section droite par :

$$\bar{F}_n = \begin{Bmatrix} N_m \\ M_m \end{Bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} 1 \\ y \end{Bmatrix} \sigma_m dydz \quad (3.8)$$

où :

σ_m est la contrainte normale en un point courant de la section transversale A de l'élément.

La section droite est composée généralement de béton et des armatures passives et actives. On peut écrire comme suit l'équation (3.9) en tenant compte de la contribution de chaque matériau constituant la section:

$$\bar{F}_n = \bar{F}_{nb} + \bar{F}_{ns} + \bar{F}_{np} \quad (3.9)$$

où $\vec{F}_{nb}$ représente la contribution du béton. Ce vecteur est donné par :

$$\vec{F}_{nb} = \iint_A \left\{ \frac{1}{y_m} \right\} \sigma_m dy dz \quad (3.10)$$

La contribution des armature passives, considérée comme concentrée dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur $\vec{F}_{ns}$ défini par :

$$\vec{F}_{ns} = \sum_{i=1}^{nsi} \left\{ \frac{1}{y_{si}} \right\} \sigma_{si} A_{si} \quad (3.11)$$

où σ_{si} est la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature passive d'ordre i , A_{si} la section droite de l'armature et n_{si} le nombre d'armatures passives traversant la section droite.

La contribution des armature actives, considérées comme concentrées dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur $\vec{F}_{np}$ défini par :

$$\vec{F}_{np} = \sum_{i=1}^{npi} \left\{ \frac{1}{y_{pi}} \right\} \sigma_{pi} A_{pi} \cos \alpha_i \quad (3.12)$$

où σ_{pi} étant la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature active d'ordre i , A_{pi} la section droite de l'armature, α_i l'angle que fait la ligne moyenne du câble d'ordre i avec l'axe x et n_{pi} le nombre d'armatures actives traversant la section droite.

La variation des déformations normales notée, $\Delta \vec{\delta}_n$ de la section droite, produit une variation de sollicitations normales dans les matériaux de la section.

La variation des sollicitations normales $\Delta \vec{F}_{nb}$ dans le béton est donnée par :

$$\Delta \vec{F}_{nb} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} 1 & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dy dz \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

où E_m désigne le Module élastique longitudinal en un point courant de la section du béton. Il relie l'accroissement de la contrainte normale $\Delta \sigma_m$ à l'accroissement de déformation longitudinale $\Delta \varepsilon_m$ correspondant au point courant.

$$\Delta \sigma_m = E_m \Delta \varepsilon_m \quad (3.14)$$

La section A étant définie comme une succession de couches, les intégrales sur la section sont effectuées dans chaque couche en utilisant la formule de SIMPSON.

La variation de la sollicitation tangente due au béton est calculée en fonction des déformations correspondantes en supposant que le comportement est élastique non linéaire. Elles peuvent s'écrire sous forme :

$$\Delta T_{ym} = [K_{2b}] \Delta \gamma \quad (3.15)$$

où :

$\{\delta_t\}$ est la déformation de la section sous sollicitations tangentés

$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$ est la rigidité de la section à l'effort tranchant dans le plan xz.

où le terme $\frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$ constitue le module corde de cisaillement de la section. La méthode de calcul proposée pour le calcul de ce terme est exposée au chapitre 3.

En tenant compte des relations (3.18) et (3.20), nous pouvons écrire sous forme matricielle la relation liant les accroissements de déformations dans une section droite, et les accroissements de sollicitations internes développés dans le béton :

$$\Delta \vec{F}_b = \begin{Bmatrix} \Delta \vec{F}_{nb} \\ \Delta T_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1b} & 0 \\ 0^T & K_{2b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

avec
$$K_{1b} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} 1 & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dydz$$

$$0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$$

La variation des déformations normales $\{\Delta \delta_n\}$ de la section droite produit une variation des sollicitations normales $\{\Delta F_{ns}\}$ dans les armatures passives donnée par :

$$\Delta F_{ns} = \sum_1^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \phi_z \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

où E_{si} est le module élastique au niveau de l'armature passive d'ordre i . Il relie l'accroissement des contraintes à l'accroissement des déformations longitudinales correspondante au niveau du centre de gravité de l'armature.

$$\Delta\sigma_{si} = E_{si} \Delta\epsilon_{si} \quad (3.18)$$

En négligeant la sollicitation tangente due aux armatures passives, la relation liant les accroissements des déformations aux accroissements des sollicitations internes développées dans les armatures passives s'écrit :

$$\Delta\vec{F}_s = \begin{Bmatrix} \Delta F_{ns} \\ \Delta T_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1s} & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\delta_n \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

où $[K_{1s}]$ est la matrice symétrique (2x2) définie par :

$$K_{1s} = \sum_1^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix}$$

La variation des sollicitations normales à la section droite dues aux armatures de précontrainte adhérentes inclinées et supposées concentrées en leur centre de gravité, elle peut s'écrire sous la forme d'un vecteur ΔF_{np} , en négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations longitudinales au niveau de l'armature de précontrainte, comme suit :

$$\Delta\vec{F}_{np} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \cos \alpha_i \begin{bmatrix} 1 & y_{pi} \\ y_{pi} & y_{pi}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_g \\ \Delta\phi_z \end{Bmatrix}$$

équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta\vec{F}_{np} = K_{1p} \Delta\vec{\delta}_n \quad (3.20)$$

avec

$$K_{1p} = \sum_1^{ns} E_{pi} A_{pi} \begin{bmatrix} 1 & y_{pi} \\ y_{pi} & y_{pi}^2 \end{bmatrix} \cos \alpha_i$$

La variation des sollicitations tangentes dans l'armature de précontrainte d'ordre i est donnée par :

$$\Delta \vec{F}_{np} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i \begin{Bmatrix} 1 & y_{pi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta \vec{F}_{tp} = K_{12p} \Delta \vec{\delta}_n \quad (3.22)$$

avec

$$K_{2p} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \sin \alpha_i \cos \alpha_i^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{pi} \end{Bmatrix}$$

E_{pi} : Module élastique longitudinal de l'armature de précontrainte d'ordre i. Il relie l'accroissement de contrainte $\Delta \sigma_{pi}$ à l'accroissement de déformation $\Delta \varepsilon_{pi}$ au niveau de l'armature d'ordre i :

$$\Delta \sigma_{pi} = E_{pi} \Delta \varepsilon_{pi}$$

La relation matricielle liant les accroissements de déformations de la section aux accroissements de sollicitations internes développées dans les armatures de précontrainte s'écrit:

$$\Delta F_p = \begin{Bmatrix} \Delta F_{np} \\ \Delta F_{tp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1p} & 0 \\ K_{2p}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \vec{\delta}_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

avec $0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

III .3 .Déformation de la section à l'équilibre

La section droite est supposée soumise :

- d'une part aux accroissements d'efforts sollicitant dus aux forces extérieures.

$$\Delta \vec{F}_s = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_z \\ \Delta T_y \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

- d'autre part à l'action de la précontrainte, lors de la mise en tension des câbles :

$$\vec{P}_s = - \sum_1^{np2} \sigma_{0i} A_{pi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_i \\ y_{pi} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

où : σ_{0i} est la contrainte initiale dans le câble d'ordre i après pertes instantanées, $np2$ le nombre de câbles de précontraintes traversant la section concernés par la mise en tension

L'équilibre de la section droite se traduit par l'égalité des accroissements d'efforts sollicitants et les accroissements d'efforts internes.

$$\Delta \vec{F}_s + \Delta \vec{P}_s = \Delta \vec{F}_b + \Delta \vec{F}_a + \Delta \vec{F}_p \quad (3.26)$$

Le vecteur $\Delta \vec{P}_s$ contenant l'action de la précontrainte à la mise en tension des câbles est non nul. Ces composantes sont définies par la relation (3.17). Après la mise en tension des câbles intérieurs ce vecteur devient nul et ne participe à l'équilibre de la section que si de nouveaux câbles sont mis en tension à une étape de calcul quelconque. Dans le cas où l'en tient compte des effets différés, le vecteur $\Delta \vec{P}_s$ est non nul. Ces composantes sont alors fonction des contraintes et du temps.

La condition d'équilibre de la section, tenant compte des relations (3.22), (3.24) et (3.26), peut être exprimée par la relation :

$$\Delta \vec{F}_s + \Delta \vec{P}_s = [K_s] \Delta \vec{\delta} \quad (3.27)$$

$[K_s]$: Représente la matrice de rigidité de la section, donnée par :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} K_{1b} + K_{1s} + K_{1p} & \mathbf{0} \\ K_{2p}^T & K_{2b} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\Delta \vec{\delta} = \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma_y \end{Bmatrix}$$

Pour un accroissement donné d'efforts sollicitant, la résolution en déformation d'équations (3.29) est itérative. La solution peut s'exprimer par :

$$\Delta \vec{\delta} = [K_s]^{-1} \{ \Delta F_s + \Delta P_s \} \quad (3.29)$$

où $[K_s]^{-1}$ représente la matrice de souplesse de la section.

III .4. Méthode itérative de résolution et critères de convergence

En élasticité non-lineaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée. Cependant il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer les déformations produites par des efforts donnés. On est donc contraint à utiliser une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

Considérons un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieures, qui peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\vec{F}_s$, définit par :

$$\vec{F}_s = (N, M_z, T_y)^T \quad (3.30)$$

On note par $\vec{\delta}_s$, le vecteur de déformation de la section correspondant. IL est donnée par :

$$\vec{\delta}_s = (\varepsilon_g, \phi, \gamma)^T \quad (3.31)$$

Pour une variation des sollicitations extérieures $\Delta \vec{F}_s$, et sous l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles, l'accroissement de déformation $\Delta \vec{\delta}_s$ de la

section est recherché, en utilisant la méthode des substitutions successives utilisant les matrices cordes.

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions, $\Delta\vec{\delta}_0, \Delta\vec{\delta}_1, \dots, \Delta\vec{\delta}_i$ $\Delta\vec{\delta}_i$ étant calculé à partir de $\Delta\vec{\delta}_{i-1}$, en résolvant le système linéaire :

$$\Delta\vec{F}_s + \Delta\vec{P}_s = [\mathbf{K}_s]_{i-1} \Delta\vec{\delta}_i \quad (3.32)$$

où $[\mathbf{K}_s]_{i-1}$ est la matrice de rigidité de la section, à l'itération (i-1)

En partant de la solution initiale nulle, le schéma de résolution s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\delta}_0 &= \vec{0} \\ \Delta\vec{\delta}_i &= [\mathbf{K}_s]_{i-1}^{-1} \{ \Delta\vec{F}_s + \Delta\vec{P}_s \} \end{aligned} \quad (3.33)$$

De façon générale l'équilibre d'une section est défini par deux conditions :

- La limitation de la variation des déformations entre deux itérations successives à une tolérance fixée a priori. Cette variation est déterminée avec la norme euclidienne des déformations :

$$\eta = \left[\frac{\langle \Delta\vec{\delta}_i - \Delta\vec{\delta}_{i-1} \rangle \cdot (\{\Delta\vec{\delta}\}_i - \{\Delta\vec{\delta}\}_{i-1})}{\langle \vec{\delta}_s + \Delta\vec{\delta} \rangle \cdot (\{\vec{\delta}_s\} + \{\Delta\vec{\delta}\}_i)} \right]^{1/2} < Tu \quad (3.34)$$

où $\{\vec{\delta}_s\}$ est la déformation à l'étape équilibrée précédente.

Généralement une dizaine d'itérations suffisent pour assurer la convergence.

III.5. Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section :

Nous définissons ici l'organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale lors d'un accroissement de sollicitations extérieures $\Delta\vec{F}_s$ et de l'action due à la précontrainte $\vec{P}_s$ à la mise en tension des câbles.

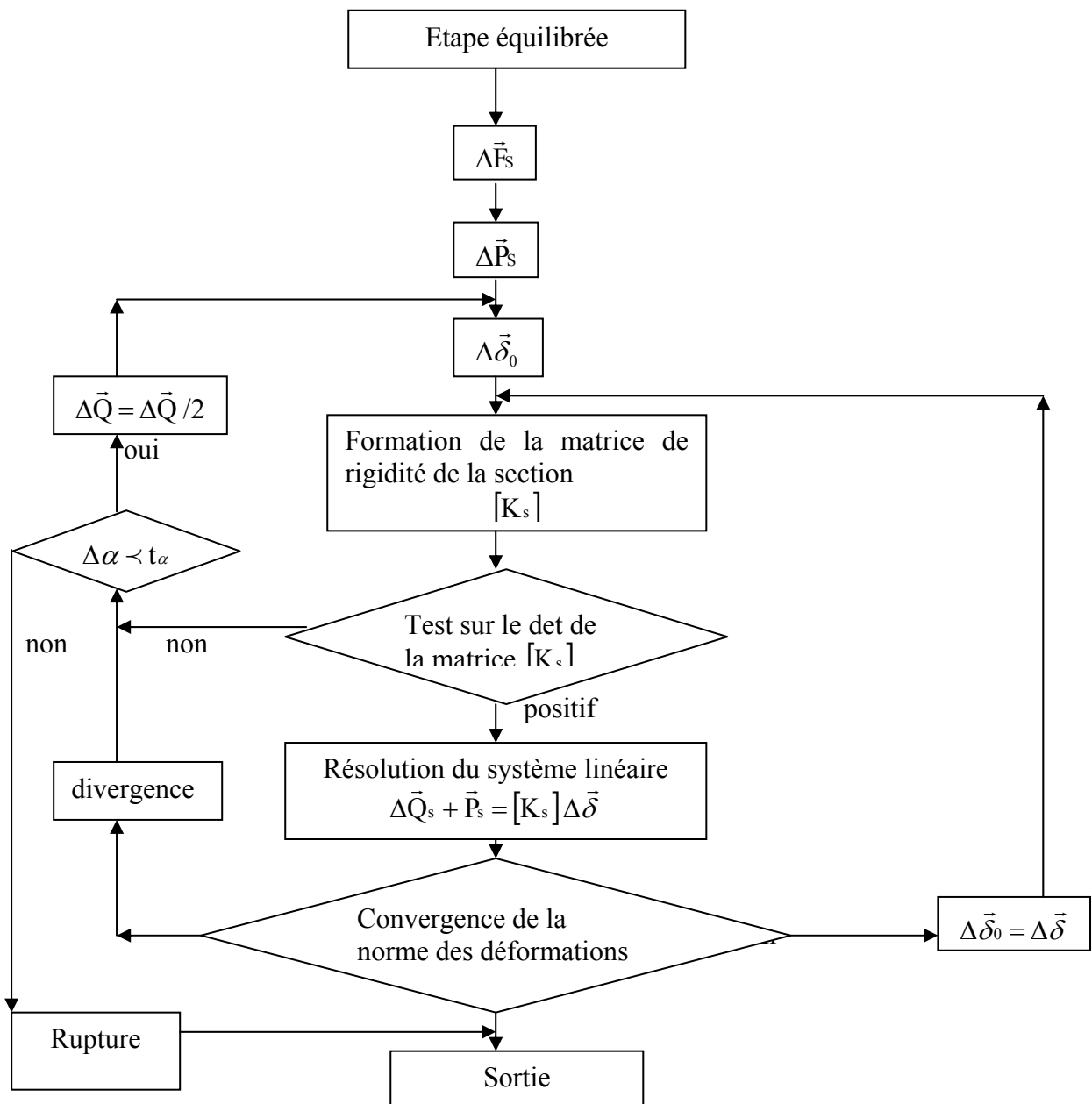


Figure 3.1 Organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section.

III.6 Organisation Générale de la recherche de l'équilibre d'une section :

La méthode de calcul qu'on présente ici est un modèle théorique permettant d'analyser le comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint, soumises à l'effet combiné d'une flexion plane et d'un effort tranchant en élasticité non linéaire. Il permet l'estimation de la rigidité de cisaillement des poutres avec des formes de section et des détails de ferrailage variés.

III.6.1 Algorithme de calcul

L'étude de l'équilibre d'une couche de béton armé où ε_x et τ sont connus fait appel à un système de 10 équations à 10 inconnues : ε_y , ε_1 , ε_2 , γ , θ , σ_{ay} , σ_{bx} , σ_{by} , σ_{b1} , σ_{b2} . Pour le résoudre, on fait appel à une méthode itérative. Pour une distribution donnée des déformations longitudinales, on suppose connue la déformation principale ε_2 et on cherche la valeur de l'angle θ qui permet de satisfaire les conditions de compatibilité et d'équilibre de la couche.

Les contraintes tangentielles $\tau(y)$ sont calculées par l'équilibre de deux sections voisines. La déformation longitudinale ε_x est tirée de Navier, dans laquelle δu et δw résultent de l'équilibre global en flexion composée sous N , M selon, **avec** un couplage à l'effort tranchant V . Enfin, la distorsion moyenne de la section est calculée à partir des efforts dans les couches successives.

L'algorithme de la méthode est organisé comme suit :

Première étape : choisir un accroissement d'effort appliqué à la section

Deuxième étape : choisir des valeurs de la courbure δw et de la déformation δu au niveau du CDG de la section.

Troisième étape : calculer la déformation longitudinale $\varepsilon_x(y) = \delta u + \delta w \cdot y$ conformément à l'hypothèse de planéité des sections (NAVIER-BERNOUILLI).

Quatrième étape : calculer les contraintes du béton et de l'acier (σ_{ax} et σ_{bx} selon les lois de Comportement des matériaux

$$\sigma_{b2} = E_{b2} (\varepsilon_2, \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2$$

$$\sigma_{ax} = E_a (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_{px} = E_{ap} (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$$

Cinquième étape : Calculer les efforts internes N_{int} et M_{int} de la section.

$$N_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi}$$

$$M_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} y_{ai} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} y_i$$

Sixième étape : Vérifier l'équilibre des efforts (N,M) de la section :

$$N_{int} = N$$

$$M_{int} = M$$

-Si non, revenir à la deuxième étape et choisir d'autre valeurs de δu et δw .

-Si oui, passer à la septième étape.

Septième étape : Calculer la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$ qui vérifient l'équilibre de chaque couche de béton :

$$\tau_k = \frac{V_k}{b_k h_k} = \frac{(G_{k-1} + G_k)}{2 d b_k}$$

G_K et G_{K-1} sont les efforts de glissement résultants sur les faces inférieure et supérieure de la couche K.

V_k est la part de l'effort tranchant équilibré par la couche k.

Huitième étape : vérifier l'équilibre de la section à $\varepsilon(X)$ et $\tau(y)$ connus.

Neuvième étape : choisir une valeur de la déformation principale ε_2 et une valeur de l'angle d'inclinaison θ de la direction principale de compression et l'axe longitudinal.

Dixième étape : déterminer les valeurs des déformations à partir du principe du milieu continue en déformations :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x}{\sin^2 \theta} - \frac{\varepsilon_2}{\tan^2 \theta} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta$$

Onzième étape : Déterminer les contraintes principales de compression et de traction dans le béton avec les lois de comportement des matériaux :

$$\text{Si } |\varepsilon_x| \leq |\varepsilon_{ft}| \qquad \sigma_{b2} = E_{b2}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2$$

$$\begin{aligned} \text{Si } |\varepsilon_x| > |\varepsilon_{ft}| \\ \sigma_{b2} &= 0 \\ \sigma_1 &= E_{bo} \cdot \varepsilon_1 \end{aligned}$$

-La contrainte dans l'acier transversal est donnée par: $\sigma_{ay} = E_{at}(\varepsilon_y) \cdot \varepsilon_y$

- La contrainte transversal dans le béton est: $\sigma_{by} = -\rho_y \sigma_{ay}$ (l'équilibre dans le sens y).

Douzième étape : calculer la nouvelle valeur de l'angle θ déduite de la géométrie du cercle de MOHR pour les contraintes :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_{b2} - \sigma_{bx}}{\sigma_{b2} - \sigma_{by}} \right)^{1/2}$$

Treizième étape : calculer la nouvelle valeur de la contrainte principale de compression en fonction de τ :

$$\sigma_{b2} = \sigma_{by} - \frac{\tau}{\tan \theta}$$

Quatorzième étape : vérifier la compatibilité :

$$\theta' = \theta$$

$$\sigma'_{b2} = \sigma_{b2}$$

-Si Non revenir à la neuvième étape et prendre une autre valeur de θ et ε_2

-Si oui, passer à la quinzième étape.

Quinzième étape : calculer la distorsion $\gamma = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta$

Seizième étape: Répéter l'ensemble des étapes pour l'ensemble des couches.

Dix-septième étape : chercher l'équilibre en flexion composée avec interaction de l'effort V

$$\text{Calculer les contraintes : } \sigma_{ax} = E_a (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$$

$$\sigma_{px} = E_{ap} (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$$

σ_{bx} est connue d'après l'équilibre des couches.

Dix-huitième étape : vérifier l'équilibre des couches :

$$N_{int} = N$$

$$M_{int} = M$$

-Si non revenir à la huitième étape et donner d'autres valeurs de δu et δw .

-Si oui, passer à la dix-neuvième étape

Dix-neuvième étape : calculer le terme de la rigidité à l'effort tranchant

$$GA = \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{moy}}$$

Vingtième étape : choisir une valeur initiale nulle des déformations $\Delta \vec{\delta}_0 = 0$

Vingt-unième étape : faire un teste sur la déformation des armatures.

-si non (il ya rupture des armatures), on divise l'accroissement d'effort choisis sur deux

- si oui, on passe à la 22eme étape.

Vingt-deuxième étape : calculer la matrice de rigidité de la section :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} K_{1b} + K_{1s} + K_{1p} & 0 \\ K_{2p}^T & K_{2b} \end{bmatrix}$$

Vingt-troisième étape : faire un teste sur le déterminant de la matrice $[K_s]$.

- Si non, on divise l'incrément d'effort sur deux
- Si oui on passe à la 24eme étape

Vingt-quatrième étape : calcul de l'accroissement des déformations :

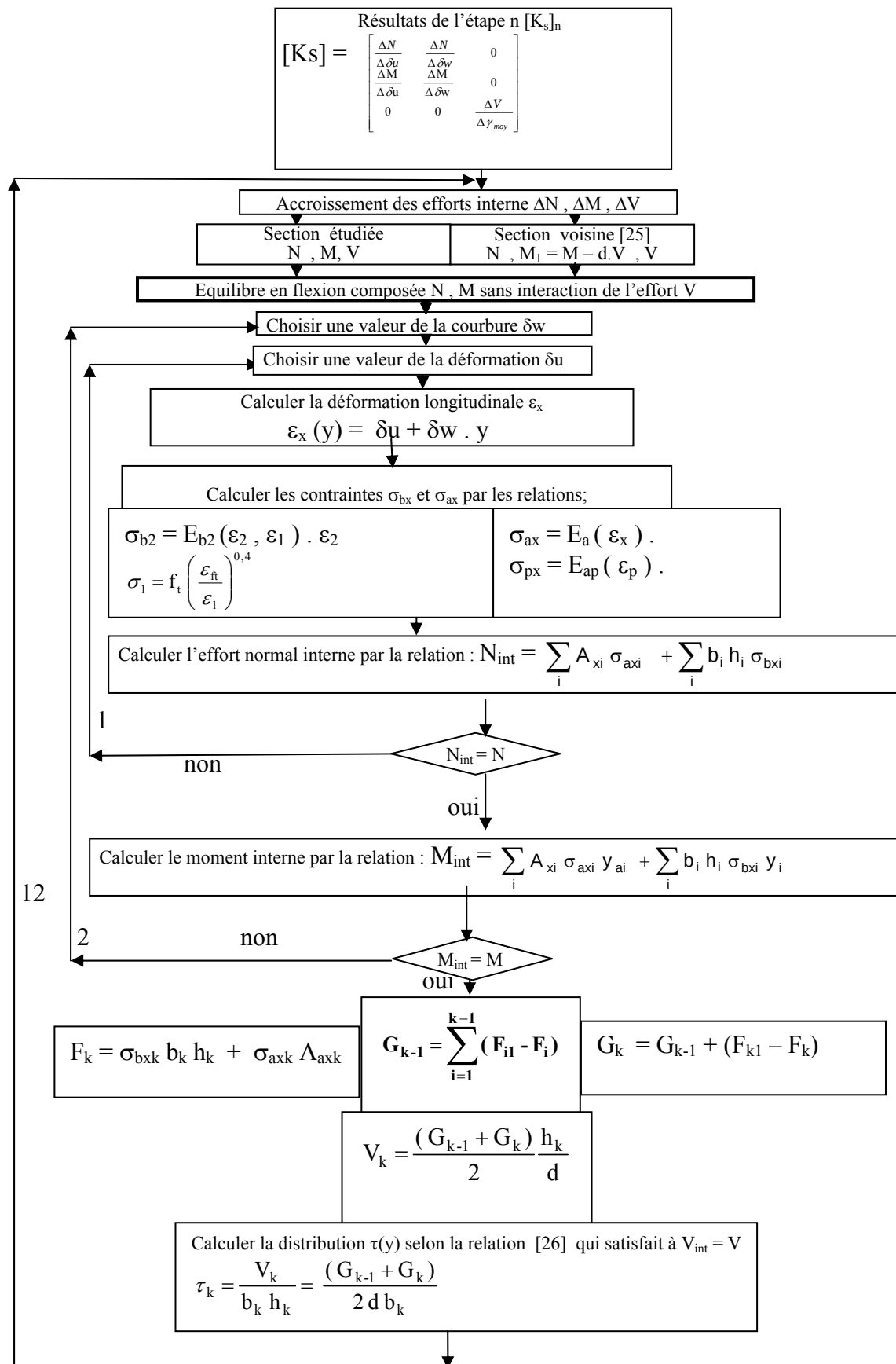
$$\Delta \vec{\delta}_i = [K_s]_{i-1}^{-1} \{ \Delta \vec{F}_s + \Delta \vec{P}_s \}$$

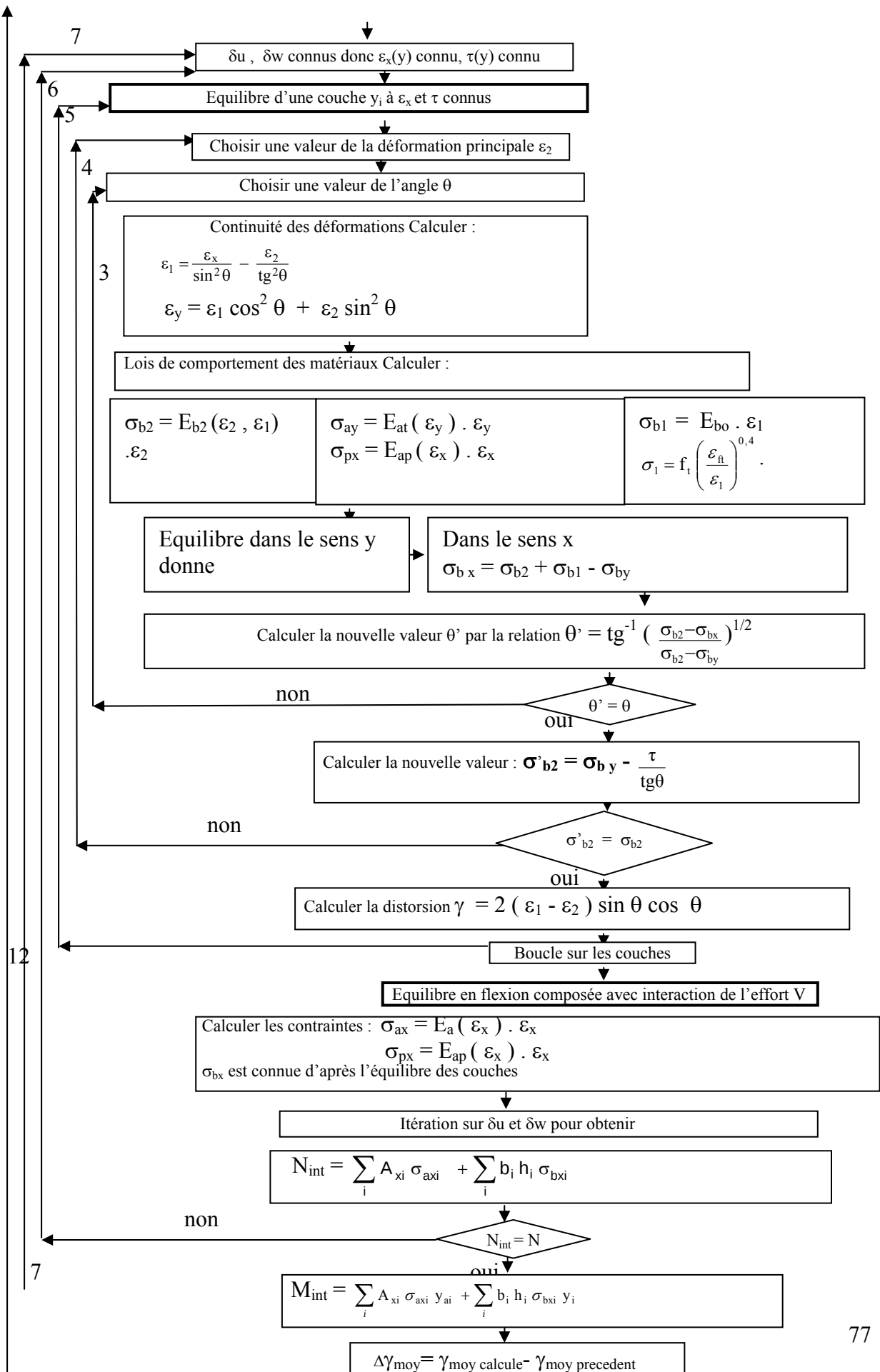
Vingt-cinquième étape : vérifier la convergence de la norme des déformations $\eta < Tu$

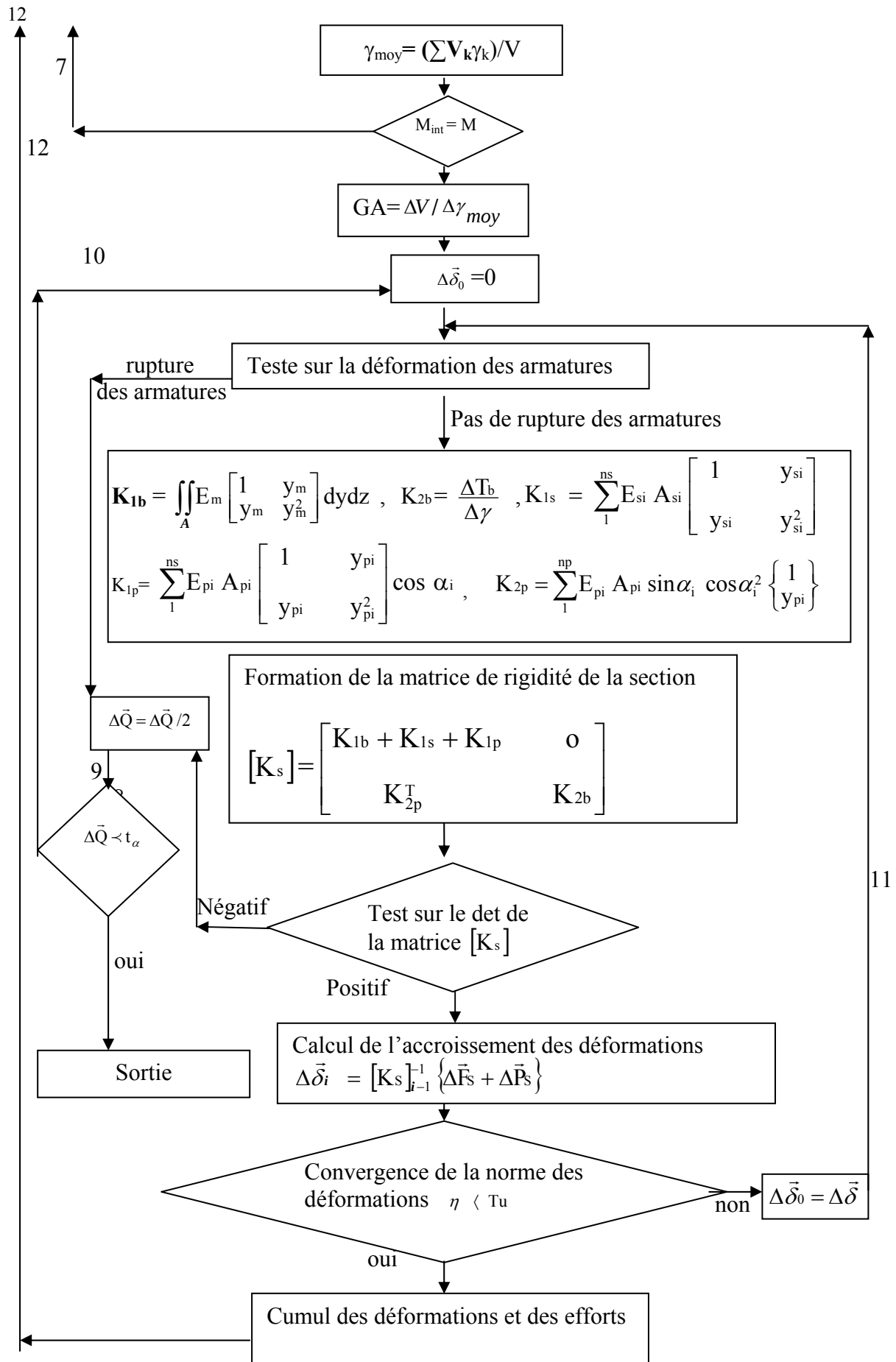
- si non revenir à la vingtième étape et donner une autre valeur des déformations $\Delta \vec{\delta}_0$
- si oui, passer à la vingt-sixième étape

Vingt-sixième étape : cumuler les déformations et les efforts.

III.6.2 Organigramme général de calcul







Organigramme 3.2. *Organigramme général de l'étude d'une section.*

Chapitre IV

VALIDATION DU MODEL DE CALCUL

VALIDATION DU MODELE DE CALCUL

IV.1 Introduction :

Afin de valider le modèle proposé dans le cadre de cette étude qui est basée sur le modèle de Vecchio et Collin, on a effectué le calcul de plusieurs poutres en béton armé et précontraint qui ont fait l'objet d'essais.

IV.2. Essais de l'Université de Toronto –Comportement de section

Le modèle a été utilisé pour simuler le comportement de plusieurs sections de poutre testées par différents chercheurs à l'Université de Toronto (Vecchio Collins, [30]). Les poutres ont une section transversale rectangulaire pleine ou creuse. Elles sont en béton armé ou précontraint. La précontrainte est soit adhérente soit non adhérente (dans ce dernier cas, elle est équivalente à une force axiale extérieure). Pour le calcul, les armatures passives sont concentrées en deux lits inférieur et supérieur ; il n'y a pas d'armatures longitudinales réparties. Différents modes de chargement ont été appliqués ; cependant, dans tous les cas, le moment fléchissant est nul dans la zone de poutre où se produit la rupture par effort tranchant et où on a mesuré la distorsion. Les caractéristiques géométriques et les propriétés des différents matériaux sont données au tableau 1.

Repère de la poutre	Dimensions		Béton		Armatures transversales			Armatures longitudinales		Armatures de précontrainte		
	EXT mm	INT mm	f_c MPa	ε_{b0} 10^{-3}	Barre ϕ (mm)	s_t mm	f_e Mpa	Nb.x ϕ (mm)	f_e Mpa	A_p mm ²	f_{pe} Mpa	$\Delta\varepsilon_p$ 10^{-3}
SA3	305x610	152x406	40.0	2.8	9.5	72	373	12 x 29 4 x 22	345 462	—	—	—
SA4	305x610	152x406	40.0	2.8	9.5	72	373	12 x 29 4 x 22	345 462	—	—	—
SK1	305x610	-	26.9	2.25	9.5	100	400	8 x 25	442	1540	1450	4.8 2
SK2	305x610	121x381	26.9	2.25	9.5	100	400	8 x 25	442	1540	1450	4.8 2
SK3	305x610	-	28.2	2.2	9.5	100	400	8 x 25	442	—	—	—
SK4	305x610	121x381	28.2	2.2	9.5	100	400	16 x 25	442	—	—	—
SP0	305x610	152x406	25.0	2.3	9.5	150	373	16 x 25	421	—	—	—
SP1	305x610	152x406	33.5	2.3	9.5	150	373	12 x 22	421	510	1450	4.2 1
SP2	305x610	152x406	32.0	2.0	9.5	150	373	12 x 22	421	1010	1450	4.1 1
SP3	305x610	152x406	32.2	2.0	9.5	150	373	12 x 22	421	1520	1450	4.2 6
SM1	305x610	152x406	29.0	2.4	9.5	175	424	12 x 22	452	—	—	—
CF1	305x610	152x406	38.6	3.0	9.5	150	367	6 x 9.5	367	930	1450	5.1 7

Tableau 1. Propriétés des différentes poutres (Vecchio et Collins 1982 et 1988).

Les résultats obtenus sont présentés à la figure 1 sous forme de courbes comparatives avec les résultats expérimentaux d'une part, et les résultats obtenus par le calcul en considérant ε_{b0} inchangé dans la direction des bielles comprimées. Il faut bien noter qu'il s'agit de la relation effort tranchant V – distorsion γ_{moy} d'une zone de poutre soumise au cisaillement (éventuellement combiné à un effort normal) sans gradient de déformations longitudinales.

$V(\text{kN})$

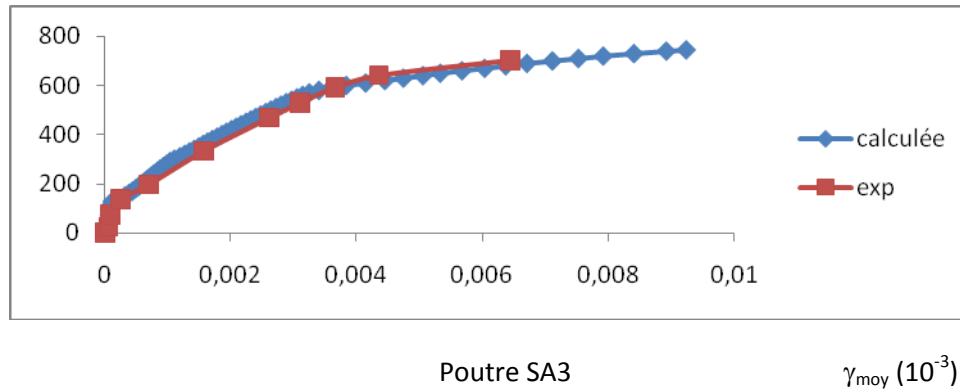


Figure 4.1 Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA3.

$V(\text{kN})$

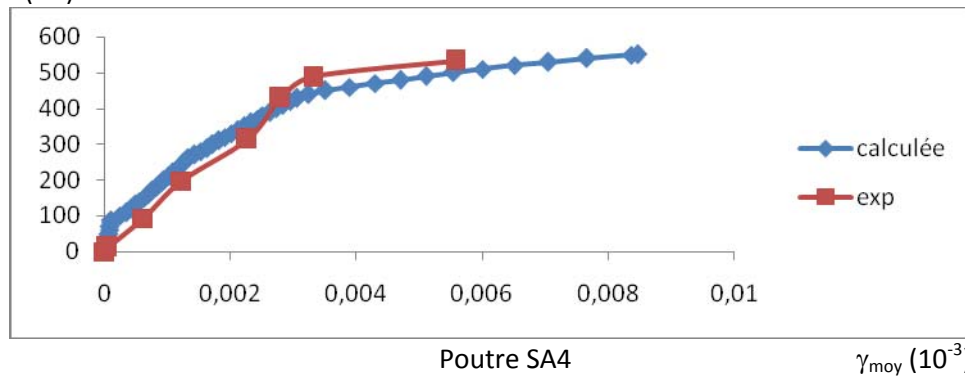


Figure 4.2. Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SA4.

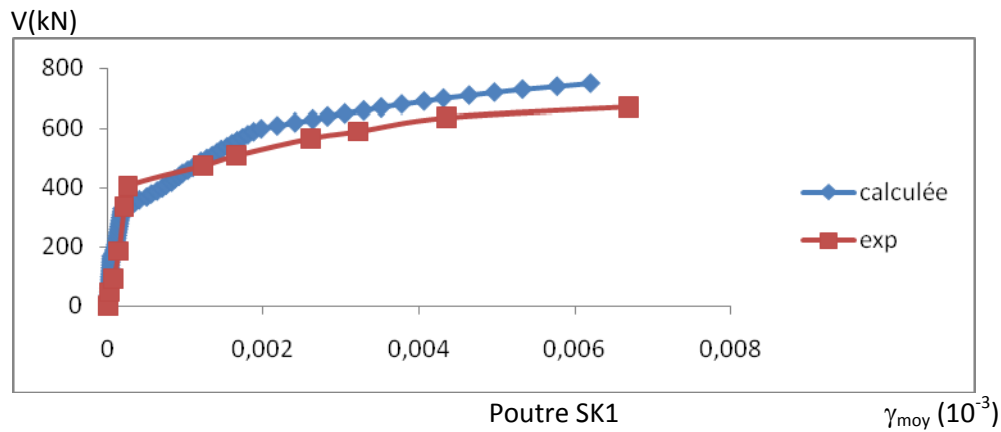


Figure 4.3 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre Sk1.

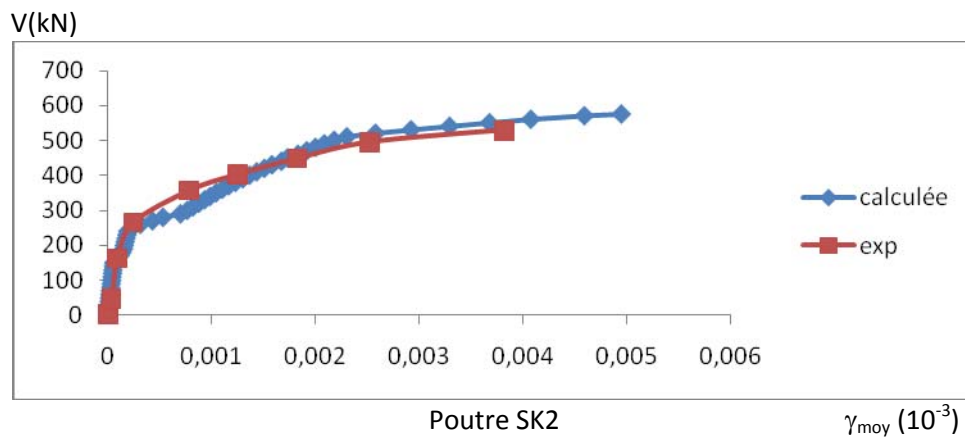


Figure 4.4 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre Sk2.

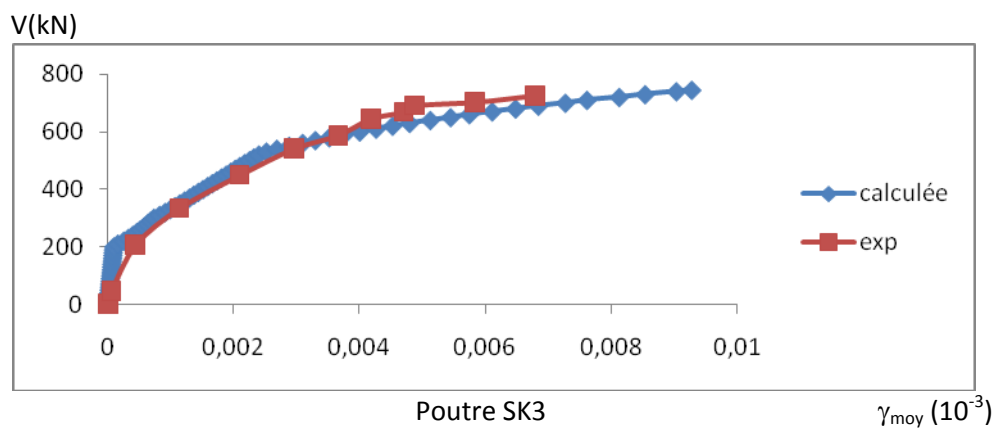


Figure 4.5 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre Sk3.

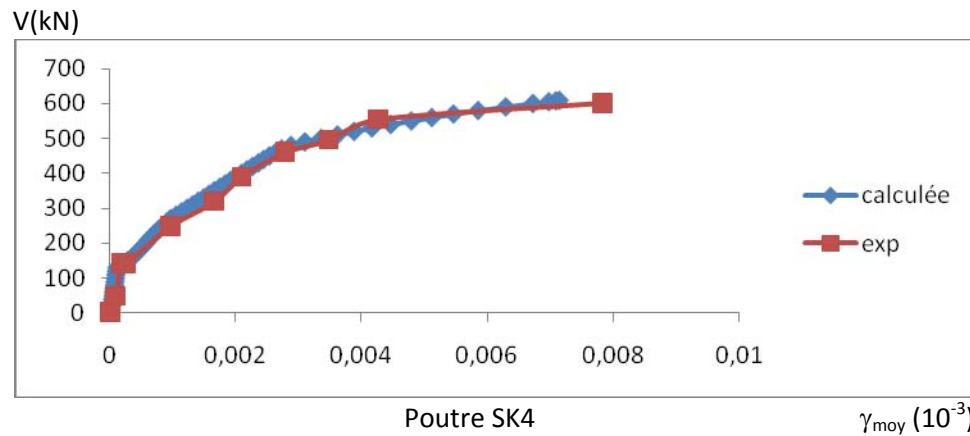


Figure 4.6: Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre Sk4.

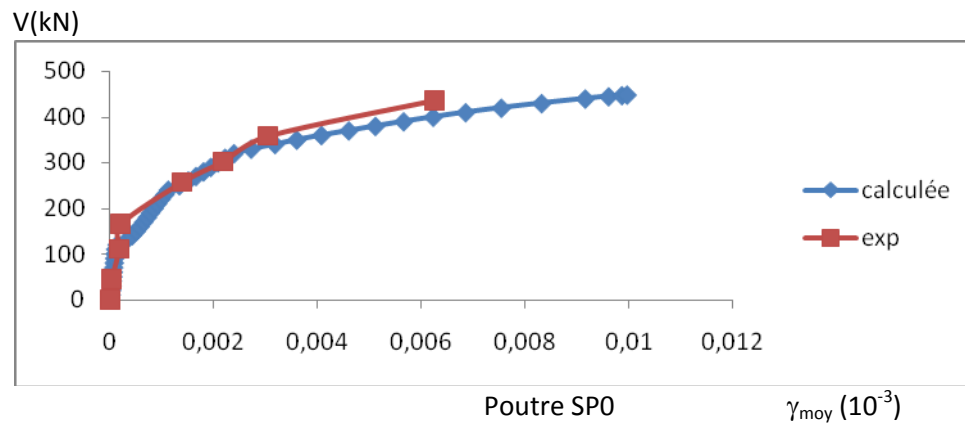


Figure 4.7: Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP0.

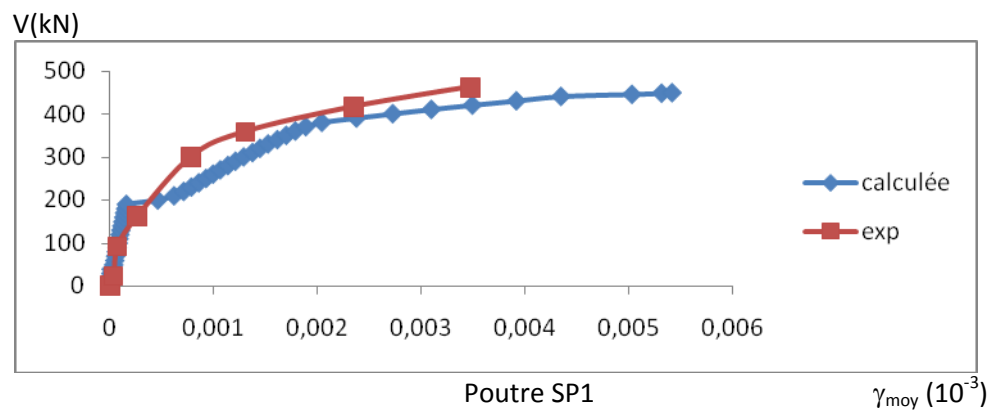


Figure 4.8 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP1.

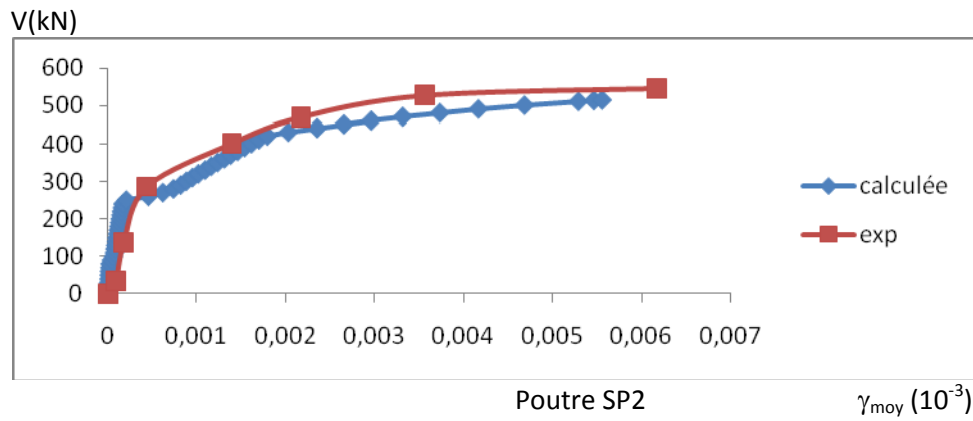


Figure 4.9 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP2.

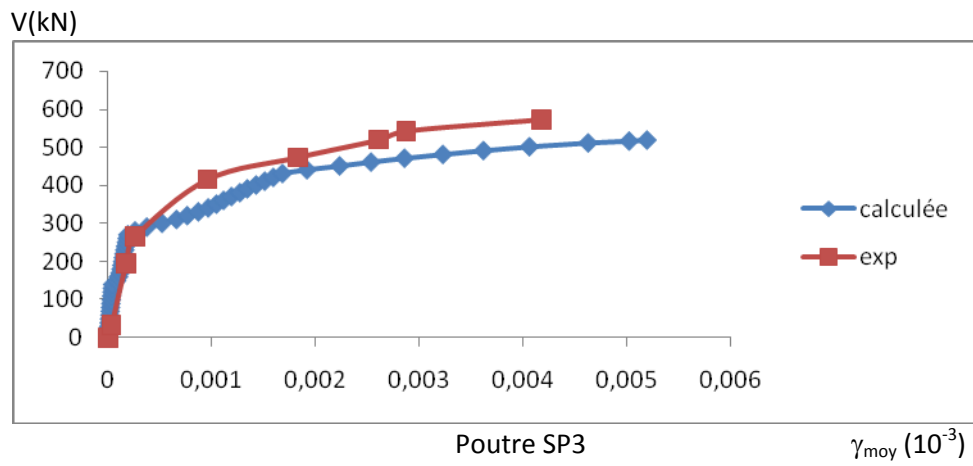


Figure 4.10 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SP3.

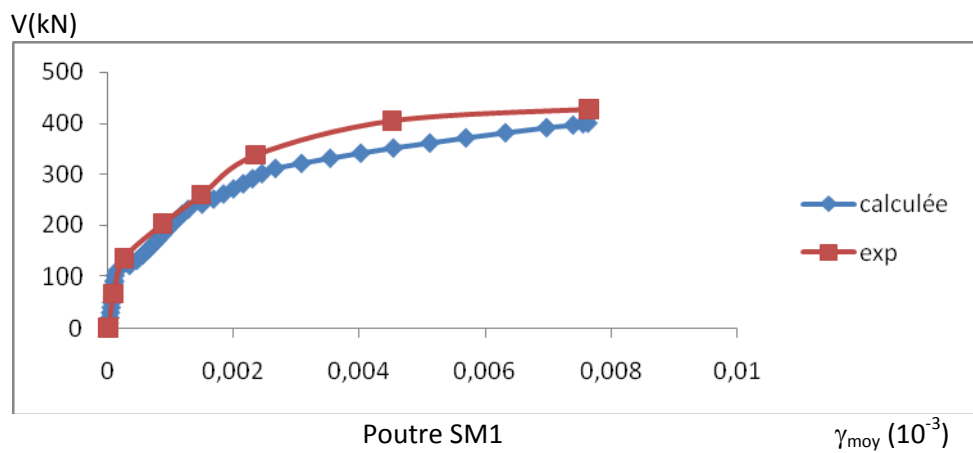


Figure 4.11 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SM1.

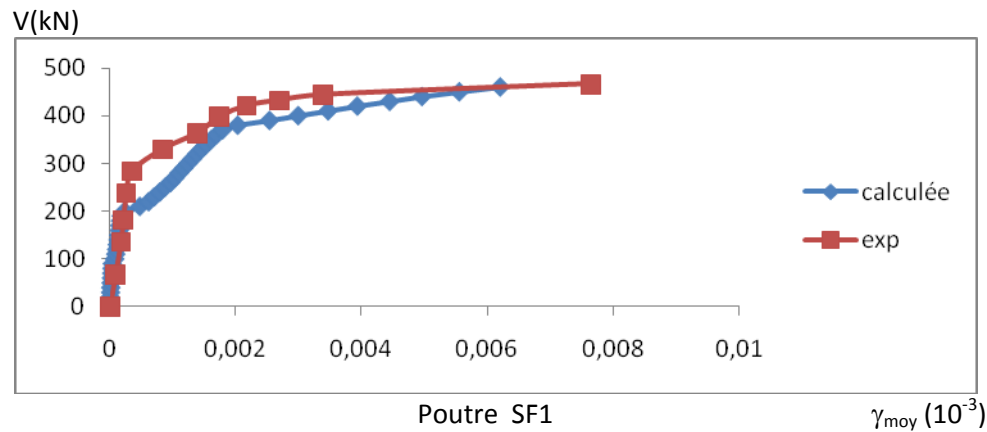


Figure 4.12 : Evolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant pour la poutre SF1.

Le tableau 2, compare les valeurs ultimes de l'effort tranchant calculées par le présent modèle à celles relevées expérimentalement.

Valeur ultime de l'effort tranchant V_u kN							
Poutre	Expérimentale	calculée	Exp/Cal	Poutre	Expérimentale	calculée	Exp/Cal
SA3	716	745	0.961	SP0	436	448.75	0.972
SA4	534	551.25	0.969	SP1	463	448.75	1.032
SK1	672	750	0.896	SP2	547	513.75	1.065
SK2	530	575	0.922	SP3	574	517.5	1.109
SK3	725	745	0.973	SM1	427	398.75	1.071
SK4	601	608.75	0.987	CF1	467	460	1.015
Moyenne							0.998

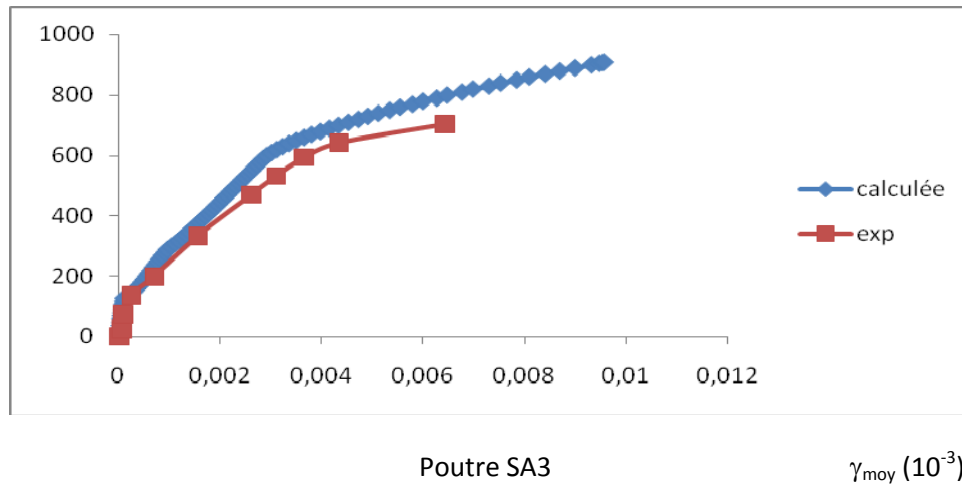
Tableau 2 . Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de l'effort tranchant.

On peut noter que les résultats du calcul comparés aux résultats expérimentaux montrent que le modèle approche bien le comportement réel de l'ensemble des poutres étudiées, aussi bien avant qu'après la fissuration du béton. L'erreur commise sur les valeurs ultimes de la charge varie entre 0 et 11 %. Le calcul prévoit assez correctement l'évolution de γ_{moy} avec V , donc la rigidité à l'effort tranchant. On ne dispose pas de résultats de mesures autres que γ_{moy} pour analyser la cause des écarts observés dans certains cas entre le calcul et l'essai.

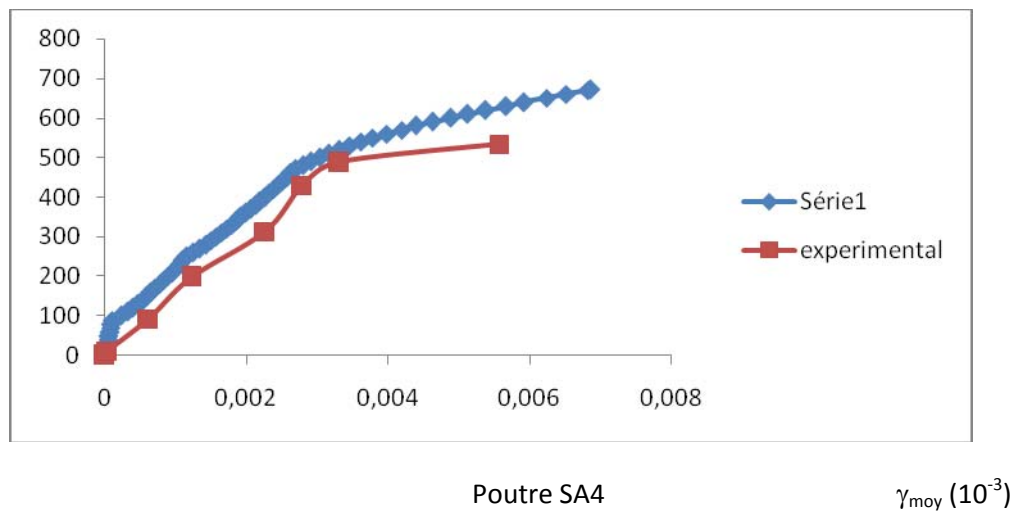
Les valeurs maximales de la distorsion γ présentées à les figures 4.1 à 4.11 sont très supérieures à celles de l'élasticité linéaire $\gamma = \tau / G_{b0} \approx 0,4 \tau / E_{b0}$. Elles correspondraient à un module G apparent largement inférieure à G_{b0} . En supposant le béton comprimé à $\varepsilon_{b0} \approx 2.10^{-3}$, le module sécant correspondant est $E_{bu} = f_c / \varepsilon_{b0}$; en admettant un coefficient de Poisson $\nu_u \approx 2 \nu_0$, l'ordre de grandeur du module transversal du béton est $G_{bu} = E_{bu} / 2(1+\nu_u) \approx G_{b0} / 2,5$. Ceci démontre l'influence prépondérante des fissures dans l'affaiblissement de la rigidité d'effort tranchant.

Les mêmes poutres sont calculées en considérant que la déformation correspondant au pic des contraintes de compression du béton subit la même diminution que la contrainte elle-même dans la direction des bielles comprimées. Les résultats obtenus comparés à ceux expérimentaux sont donnés sous la forme de l'évolution de la distorsion en fonction de l'effort tranchant aux figures ci-dessous.

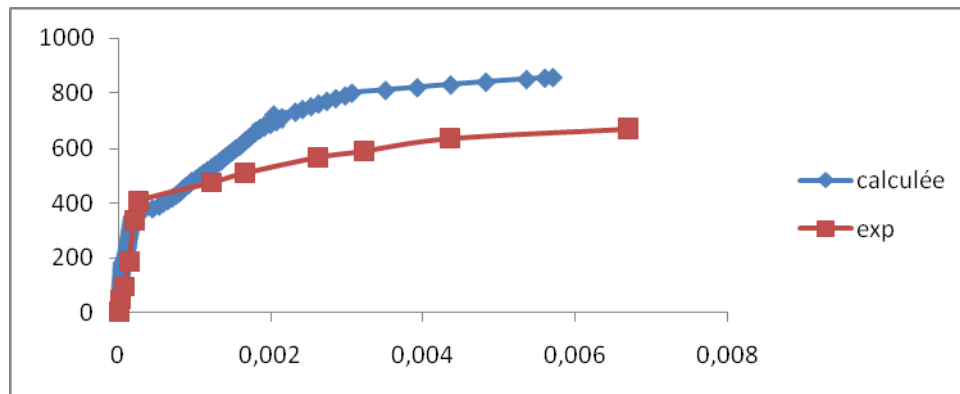
V(kN)



V(kN)



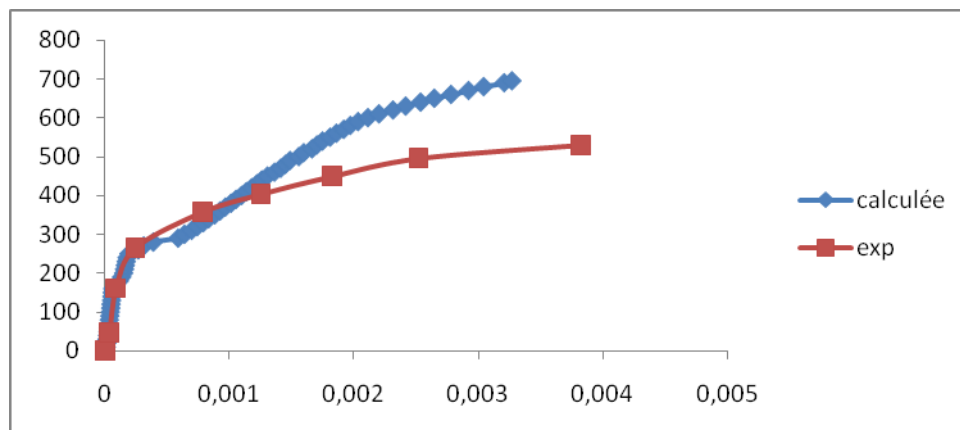
V(kN)



Poutre SK1

 $\gamma_{moy} (10^{-3})$

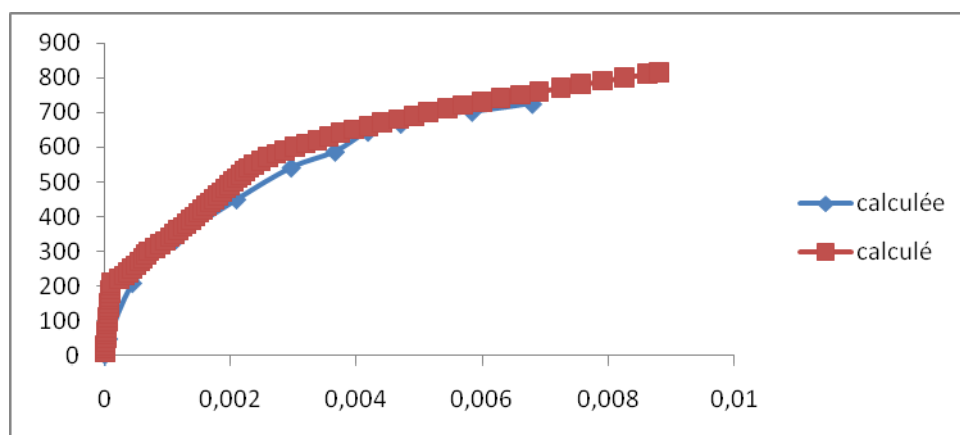
V(kN)



Poutre SK2

 $\gamma_{moy} (10^{-3})$

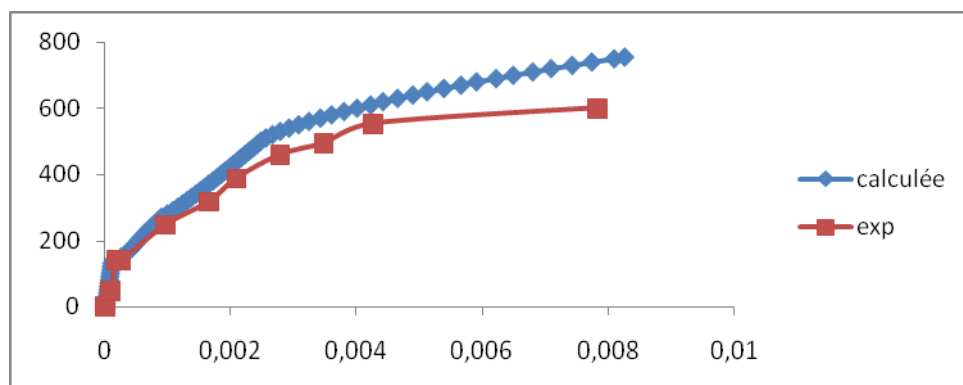
V(kN)



Poutre SK3

 $\gamma_{moy} (10^{-3})$

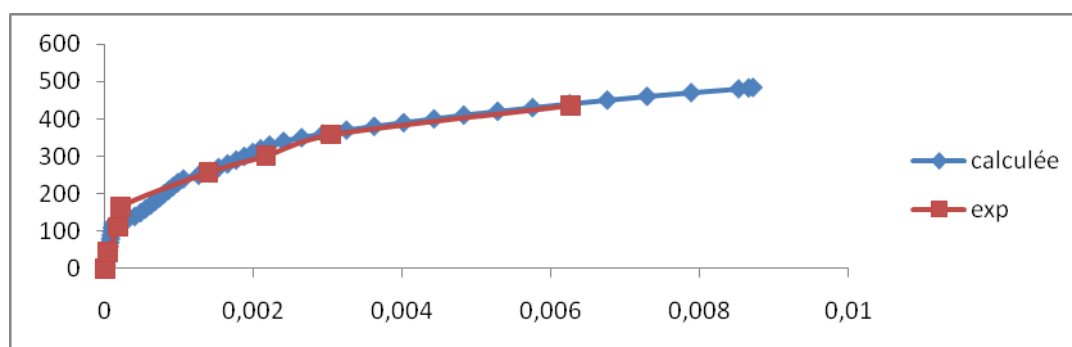
V(kN)



Poutre SK4

 $\gamma_{\text{moy}} (10^{-3})$

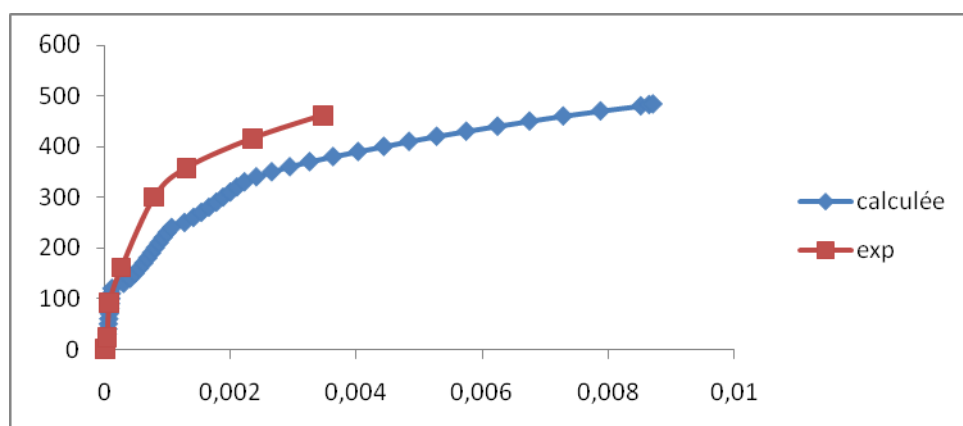
V(kN)



Poutre SP0

 $\gamma_{\text{moy}} (10^{-3})$

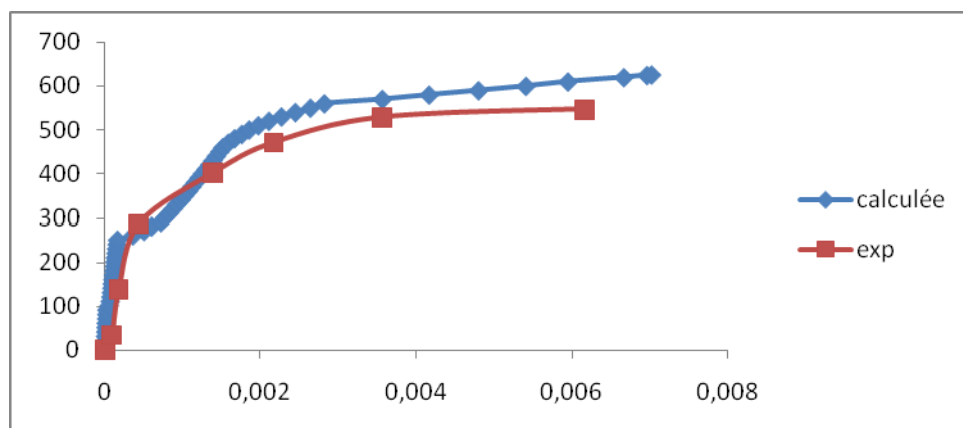
V(kN)



Poutre SP1

 $\gamma_{\text{moy}} (10^{-3})$

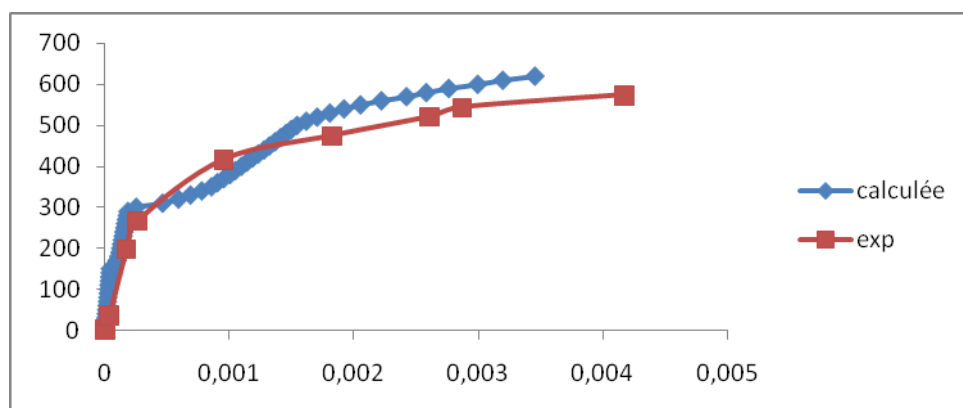
V(kN)



Poutre SP2

 $\gamma_{moy} (10^{-3})$

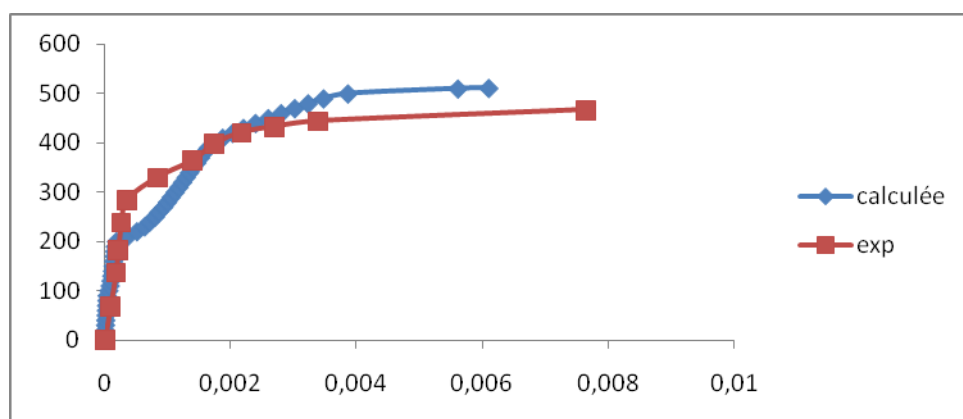
V(kN)



Poutre SP3

 $\gamma_{moy} (10^{-3})$

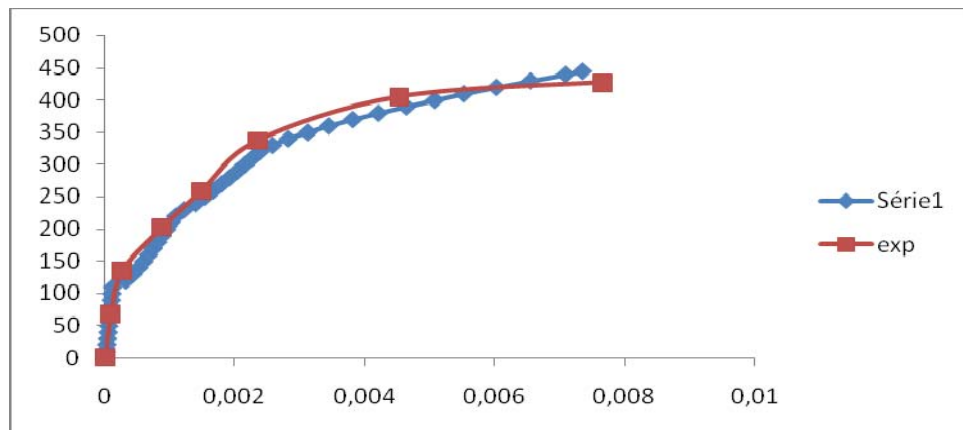
V(kN)



Poutre SF1

 $\gamma_{moy} (10^{-3})$

V(kN)



Poutre SM1

 $\gamma_{\text{moy}} (10^{-3})$

Figure 4.13. Comparaison des résultats du calcul aux résultats expérimentaux et à ceux obtenus par le modèle de Vecchio et Collins.

Le tableau 3, compare les valeurs ultimes de l'effort tranchant calculées par le présent modèle à celles relevées expérimentalement.

	Valeur ultime de l'effort tranchant V_u kN						
Poutre	Expérimentale	calculée	Exp/Cal	Poutre	Expérimentale	calculée	Exp/Cal
SA3	716	910	0.787	SP0	436	483.75	0.901
SA4	534	671.25	0.796	SP1	463	483.75	0.957
SK1	672	857.5	0.784	SP2	547	626.25	0.873
SK2	530	695	0.763	SP3	574	620	0.926
SK3	725	815	0.890	SM1	427	445	0.960
SK4	601	755	0.796	CF1	467	511.25	0.913
Moyenne							0.862

Tableau 3 . Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de l'effort tranchant.

On peut noter que les résultats du calcul comparés aux résultats précédents montre bien que dans la première phase du comportement avant fissuration du béton, donc pour les premiers pas du chargement, la valeur de ε_{b0} ne présente pas d'influence notable sur le calcul. Par contre, Après la fissuration du béton, donc pour de forte contraintes de compression des bielles, la diminution de la valeur de ε_{b0} de la même façon que celle de la contrainte maximale rigidifie considérablement la section vis-à-vis de l'effort tranchant même si elle permet d'aller vers des distorsions maximales plus grandes d'une part. d'autre part, elle surestime la capacité portante des section d'environ 20% dans le cas des sections précontraintes donc soumise a de forte compressions

Chapitre V

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le modèle analytique présenté est basé sur l'analyse multicouche des sections et sur une procédure de résolution itérative pour chaque couche, dans un état de déformation longitudinale et de contrainte de cisaillement donné. L'équilibre global des sections est analysé dans l'hypothèse de la planéité des déformations longitudinales mais avec, en principe, une interdépendance des contraintes normales longitudinales et des contraintes tangentielles. Le modèle utilise des lois de comportement qui traduisent l'affaiblissement du béton des bielles comprimées dû à la traction des armatures transversales et la diminution de l'allongement moyen des armatures due à la contribution du béton tendu entre les fissures. Il introduit un terme diagonal de rigidité non linéaire à l'effort tranchant dans la matrice de rigidité des sections, afin de prédire le comportement charge – distorsion jusqu'à rupture en flexion composée avec effort tranchant, pour des poutres présentant des sections de forme complexe et des détails de ferrailage variables.

L'allure des courbes de comportement effort tranchant - distorsion moyenne calculées pour un ensemble de poutres testées à l'Université de Toronto montre que le modèle estime correctement la rigidité au cisaillement.

La valeur de déformation correspondant au pic des contraintes de compression des bielles de béton comprimées semble avoir une influence non négligeable sur la rigidité de cisaillement des sections de poutres en béton armé ou précontraint, particulièrement quand elles sont soumises à de fortes compressions. La valeur de cette déformation donnée par le comportement uni axial du béton semble être la mieux indiquée pour décrire correctement le comportement en cisaillement des sections en béton armé et précontraint.

La section réduite proposée par certains règlements pour le calcul du terme de rigidité de cisaillement des sections fissurées ne peut estimer la chute de cette rigidité après fissuration du béton. En effet, les résultats obtenus montrent qu'il y a une forte chute de rigidité de la section après la fissuration du béton, mais encore, après la plastification des armatures on observe un terme de la rigidité de cisaillement plutôt proche de 0 que du terme initial.

Enfin, le logiciel ainsi mis en œuvre peut être aisément introduit dans un logiciel de calcul global de structures à barres en béton armé ou précontraint comme un module de calcul du terme de rigidité de cisaillement des sections.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BELARBIE A; THOMAS T.C.HSU; Constitutive law of softened concrete in biaxial tension-compression. ACI Structural Journal September-October 1995
- [2] DI PRISCO M; GOMBROVA G; Comprehensive model for study of shear in thinwebbed RC and PC beams. Journal of structural engineering. December 1995.
- [3] DRIZI S; Contribution à l'étude du comportement des voiles porteurs en béton vis-à-vis des sollicitations sismiques. Thèse de doctorat, Paris VI Avril 1993.
- [4] FALKNER H ; TEUTSCH M ; HUANG Z Prestressed segmental box girders with unbounded tendons under combined torsion bending and shear. Workshop Behavior of external prestressing in structures. Saint Remy-les-Chevreuse, juin 1993.
- [5] FOURE B; béton à haute résistance. Rapport interne OG, C.E.B.T.P; Novembre 1985
- [6] GARCIA-VARGAS JA ; La précontrainte extérieure appliquée à des poutres hyperstatiques, thèse de doctorat, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris 1994.
- [7] GREGOR T ; COLLINS M.P ; Test of large partially prestressed concrete girders. ACI structural journal January-February 1995.
- [8] GRELAT A; Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé Thèse de doctorat Ingénieur-Université Paris VI-1978.
- [9] HEGER F J ; MCGRATH T.J ; Shear strength of pipe box section and other one-way flexural members. ACI Journal November-December 1982.
- [10] HUANG J; EIBL J; Design of segmental bridges under combined bending, shear and torsion fe-study. Workshop Behavior of external prestressing in structures. Saint Remy-Les-Chevreuse, juin 1993.
- [11] . Kachi M S ; Muller P, Bouafia Y, FOURE B. L'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres armées. Revue européenne de génie civil N° 10/10 Décembre 2006.
- [12] Kachi M S, Bouafia Y, Muller P, Fouré B. Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint en élasticité non linéaire. Colloque international Caractérisation et Modélisation des matériaux et structures « CMMS08 » Tizi Ouzou – Algérie. Le 16, 17 et 18 Nov 2008.
- [13] Kachi MS, Bouafia y , Muller P., . Modélisation du comportement jusqu'à rupture en cisaillement d'une section de poutre en béton armé et précontraint. Conférence Internationale : Maîtrise et Management des Risques Industriels (M2RI'08) Oujda 24-25 avril 2008
- [14] Kachi M S., Bouafia Y., Muller P: Modelization of Prestressed or Reinforced Concrete beams until fracture in Non Linear Elasticity . 12th International Conference on Fracture (ICF12). Ottawa, Canada, July 12-17, 2009.
- [15] Bouafia Y., Kachi M S., Muller P: Modelling of Externally Prestressed Beams Until Fracture on Non Linear Elasticity. International Conference on Structural analysis of Advanced Materials. (ICSAAM-2009) Ecole Nationale D'Ingénieurs de Tarbes, France September 7-10, 2009
- [16] KEUN HYEOK YANG; HEON-SOO CHUNG; EUN-TAIK LEE; HEE-SHANG EUN; shear characteristics of high-strength concrete deep beams without shear reinforcement Engineering Structures. 25.(2003). PP1343-1352.
- [17] KISHI N; MIKAMI H; MATSUOKA K.G; ANDO T; Impact behavior of shear-failure-type RC beams without shear rebar. International Journal of impact Engineering. 27 (2002). PP955-968.

- [18] MACLEOD LA;HOUMSI A; Shear strength of haunched beams without shear reinforcement ACI structural journal January-February 1994.
- [19] MANSOUR M.Y; DICLELI M; LEE J.Y ; ZHANG J ; Predicting the shear strength of reinforced concrete beams using artificial neural networks. Engineering Structures. 26 . (2004).PP 781-799.
- [20] MAU S.T; THOMAS T.C.HSU;Shear design and analysis of low-rise structural walls.ACI Structural Journal March-April 1986.
- [21] NAIT- RABAH O;Simulation numerique du comportement des ossatures spaciales These de doctorat ECP-1990.
- [22] RAMIREZ G ;MACGREGOR R ; KREGER M.E ;ROBBERTS-WOLLMANN R ;BREEN J ;Shear strength of segmental structures. Workshop Behavior of external prestressing in structures. Saint Remy=les-Cheuvreuse,juin 1993.
- [23] SALANDRA M.A;SHUAIB H.A; Shear capacity of reinforced lightweight high strength concrete beams.ACI structural Journal November-December 1989.
- [24] SARGIN M; Stress-Strain Relationship for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections.PHD Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, Mars 1968, 334p.
- [25] STANCIULESCU-PANEA I; Modélisation de l'influence de l'effort tranchant dans le comportement non linéaire des poutres en béton arme, mémoire de DEA de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Juillet 1996.
- [26] STROBAND J ;Shear capacity of high strength concrete beams with shear reinforcement. Progress in concrete research vol num 5 1997.
- [27] THOMAS T.C.HSU; softened truss model theory for shear and torsion.Rechearch rapport UHCE-86-9 University of Houston August 1986.
- [28] THOMAS T.C.HSU;Non-linear analysis of concrete membranes elements.ACI Structural Journal September-October 1991.
- [29] THOMAS T.C.HSU;MO Y.L; Softening concrete in low-rise shear walls.ACI Structural Journal November-December 1985.
- [30] VECCHIO F.J;COLLINS MP;The response of reinforced concrete to in-plane shesr and normal stresses, University of Toronto, Department of Civil Engineering, Publication No.82-03,March 1982.
- [31] VECCHIO F.J;COLLINS MP; The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear.ACI Structural Journal March-April 1986.
- [32] VECCHIO F.J;COLLINS MP;Compression response of cracked reinforced concrete Journal of structural engineering vol 119 Num 12.1993.
- [33] VECCHIO F.J;EMARA B.M; Shear deformation in reinforced concrete frames ACI Structural Journal January-February 1992.
- [34] EUROCOD 2, ENV 1992-1-1,NF P 18 711, Calcul des structures en beton, Partie 1-1:Règles générales et règles pour les bâtiments, Décembre 1992.
- [35] REGLES BPEL, Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites, DTU-Regles BPEL 91, révisées 1999.

BIBLIOGRAPHIE