République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de la **R**echerche **S**cientifique
Université **M**ouloud **M**ammeri de **T**izi-**O**uzou

FACULTE DES SCIENCES
Département de mathématiques

Mémoire de MASTER
Mathématiques appliquées à la gestion

Thème

Résolution d'un problème de découpe
Cas ELECTRO-INDUSTRIE.

Réalisé par :

Melle HAROUCHE YASMINE
Melle AGRED THINHINANE

Soutenu devant le jury composé de

M^{me}	LESLOUS	Fadhila	MAA	Présidente
M^{r}	KASDI	Kamel	MAA	Encadreur
M^{r}	GOUBI	Mouloud	MCB	Examinateur

Septembre 2021

Remerciement

En premier lieu nous tenons à remercier M. KASDI Kamel, en tant que encadreur de ce mémoire, il nous a guidés dans notre travail afin de trouver des solutions pour avancer et le remercier également pour sa disponibilité et la qualité de ses conseils pour alimenter notre réflexion.

Nous remercions vivement notre maitresse de stage pour l'accueil qui nous a été réservé tout au long de notre stage ainsi que pour sa confiance, sa disponibilité et les connaissances qu'elle a su partager avec nous.

Nos vifs remerciements s'adressent également aux membres des jurys pour avoir bien voulu examiner et juger ce modeste travail.

Qu'il nous soit enfin permis de remercier nos parents pour leur soutien constant.

Dédicaces

A mon cher père

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne pourrais jamais te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles. Tu as toujours été là pour moi pour me soutenir et m'encourager. Que tu trouves ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

A ma chère maman

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que tu as consenti pour mon instruction et mon bien être.

Je te remercie pour tout le soutien et l'amour que tu me porte, puisse dieu t'accorde santé, bonheur et longue vie.

A mes frères AMINE et RAYANE que j'aime beaucoup.

A toute ma famille et mes proches.

YASMINE

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mon très cher père, et à ma très chère mère, en témoignage de ma reconnaissance envers le soutien, les sacrifices et tous les efforts qui ont fait pour mon éducation ainsi que ma formation scolaire tant sur le plan financier, matériels que moral. Que Dieu les garde pour nous.

A mon adorable frère Idir, et mes charmantes sœurs Dyhia et Anais pour leurs affectation, compréhension et patience, à qui je souhaite une longue vie pleine de succès.

A mon très cher futur époux Meziane qui m'a tant soutenu et encourager et a toute sa famille.

A mes très chers grands parents, tous mes oncles, tantes, cousins et cousines.

A tous mes amis avec lesquels j'ai partagé des moments de joie et de bonheur inoubliables en particulier yasmine,feriel et baya .

Que toute personne m'ayant aidé de près ou de loin, trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

THINHINANE

Table des matières

INTRODUCTION

La recherche opérationnelle (RO) peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir à un résultat optimal.

Elle permet d'optimiser le fonctionnement des systèmes de production ou d'organisation ou autres, une des parties essentielles de la recherche opérationnelle est la programmation linéaire, qui est introduite par les russes Kantorovitch en (1939) et résolue par l'Américain G.B Dantzig en (1947). Elle peut être solution de nombreux problèmes entre autre celui de la découpe.

Le découpage est un procédé de fabrication de pièces qui consiste à diviser un sous-produit en plusieurs parties. Il représente une application classique de la programmation en nombres entiers (PNE). Il implique la découpe d'objets volumineux, tels que des feuilles, des rouleaux ou des planches, en objets de plus petite taille pour répondre à une demande.

L'objectif de notre travail est la modélisation et la résolution d'un problème de découpe de plaque d'acier en minimisant les chutes.

Afin de présenter notre travail nous avons structuré notre mémoire en quatre chapitres :

Après une introduction générale, le premier chapitre sera consacré à la présentation des notions fondamentales de l'optimisation combinatoire ainsi que le problème de découpe qui découle.

Dans le second chapitre, on présentera quelques généralités et définitions sur la programmation linéaire réputées en littérature et en citer les méthodes de résolution.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de l'entreprise où s'est déroulé notre stage, ELECTRO-INDUSTRIE (ENEL) AZAZGA, spécialisée dans la fabrication et commercialisation des transformateurs, groupes électrogènes et alternateurs, on exposera les problèmes rencontrés dans la pratique et la problématique.

Dans le dernier chapitre, on essayera de faire une approche mathématique afin de modéliser les problèmes posés pour trouver une solution optimale.

On terminera notre travail par une conclusion et perspective

Chapitre I

OPTIMISATION COMBINATOIRE ET PROBLEME DE DECOUPE

I.1. Optimisation combinatoire

L'optimisation combinatoire occupe une place très importante en recherche opérationnelle, en mathématiques discrètes et en informatique. Son importance se justifie d'une part par la grande difficulté des problèmes d'optimisation [1] et d'autre part par de nombreuses applications pratiques pouvant être formulées sous la forme d'un problème d'optimisation combinatoire [2].

Bien que les problèmes d'optimisation combinatoire soient souvent faciles à définir, ils sont généralement difficiles à résoudre. En effet, la plupart de ces problèmes appartiennent à la classe des problèmes NP-difficiles et ne possèdent donc pas de solution algorithmique efficace valable pour toutes les données [3].

Etant donné l'importance de ces problèmes, de nombreuses méthodes de résolution ont été développées en recherche opérationnelle (RO) et en intelligence artificielle (IA). Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories : les méthodes exactes (complètes) qui garantissent la complétude de la résolution et les méthodes approchées (incomplètes) qui perdent la complétude pour gagner en efficacité.

I.1.1. Définition

On qualifie généralement de combinatoires les problèmes dont la résolution se ramène à l'examen d'un nombre fini de combinaisons. Bien souvent cette résolution se heurte à une explosion du nombre de combinaisons à explorer.

L'optimisation combinatoire trouve des applications dans des domaines aussi variés que la gestion, l'ingénierie, la conception, la production, les télécommunications, les transports, l'énergie, les sciences sociales, l'informatique…etc.

I.1.2. Complexité théorique d'un problème

La complexité d'un problème est une estimation du nombre d'instructions à exécuter pour résoudre les instances de ce problème, cette estimation étant un ordre de grandeur par rapport à la taille de l'instance. Il s'agit là d'une estimation dans le pire des cas dans le sens où la complexité d'un problème est définie en considérant son instance la plus difficile. Les travaux théoriques dans ce domaine ont permis d'identifier différentes classes de problèmes en fonction de la complexité de leur résolution [4].

I.1.3. Problèmes de décision

Les classes de complexité ont été introduites pour les problèmes de décision, c'est-à-dire les problèmes posant une question dont la réponse est oui ou non. Pour ces problèmes, on définit notamment les deux classes P et NP :

- ✓ La classe P contient l'ensemble des problèmes polynomiaux, i.e., pouvant être résolus par un algorithme de complexité polynomiale. Cette classe caractérise l'ensemble des problèmes que l'on peut résoudre efficacement.

- ✓ La classe NP contient l'ensemble des problèmes polynomiaux non déterministes, i.e., pouvant être résolus par un algorithme de complexité polynomiale pour une machine non déterministe (que l'on peut voir comme une machine capable d'exécuter en parallèle un nombre fini d'alternatives). Cela signifie que la résolution des problèmes de NP peut nécessiter l'examen d'un grand nombre (éventuellement exponentiel) de cas, mais que l'examen de chaque cas doit pouvoir être fait en un temps polynomial.

Cependant, certains problèmes de NP apparaissent plus difficiles à résoudre dans le sens où l'on ne trouve pas d'algorithme polynomial pour les résoudre avec une machine déterministe. Les problèmes les plus difficiles de NP définissent la classe des problèmes NP-complets.

Un problème de NP est NP-complet s'il est au moins aussi difficile à résoudre que n'importe quel autre problème de NP, i.e., si n'importe quel autre problème de NP peut être transformé en ce problème par une procédure polynomiale.

Ainsi, les problèmes NP-complets sont des problèmes combinatoires dans le sens où leur résolution implique l'examen d'un nombre exponentiel de cas. La classe des problèmes NP-complets contient un très grand nombre de problèmes. Pour autant, tous les problèmes combinatoires n'appartiennent pas à cette classe. En effet, pour qu'un problème soit NP-complet, il faut qu'il soit dans la classe NP, i.e., que l'examen de chaque cas puisse être réalisé efficacement, par une procédure polynomiale. Si on enlève cette contrainte d'appartenance à la classe NP, on obtient la classe plus générale des problèmes NP-difficiles, contenant l'ensemble des problèmes qui sont au moins aussi difficiles que n'importe quel problème de

NP, sans nécessairement appartenir à NP.

I.1.4. Problèmes d'optimisation

A chaque problème d'optimisation est associé un problème de décision dont le but est de déterminer s'il existe une solution pour laquelle la fonction objectif soit supérieure (respectivement inférieure) ou égale à une valeur donnée. La complexité d'un problème d'optimisation est liée à celle du problème de décision qui lui est associé. En particulier, si le problème de décision est NP-complet, alors le problème d'optimisation est dit NP- difficile.

I.1.5. Complexité pratique d'un problème

Selon la théorie de la complexité, si un problème est NP-difficile, alors il est inutile de chercher un algorithme polynomial pour ce problème (à moins que P = NP). Toutefois, ces travaux sont basés sur une évaluation de la complexité dans le pire des cas, car la difficulté d'un problème est définie par rapport à son instance la plus difficile.

En pratique, si on sait qu'on ne pourra pas résoudre en temps polynomial toutes les instances d'un problème NP-difficile, il apparait que certaines instances sont beaucoup plus faciles que d'autres et peuvent être résolues très rapidement.

Par exemple, un problème de conception d'emploi du temps, consistant à affecter des créneaux horaires à des cours en respectant des contraintes d'exclusion exprimant par exemple le fait que certains cours ne doivent pas avoir lieu en même temps. Il s'agit là d'un problème NP-complet classique se ramenant à un problème de coloriage de graphes.

Pour autant, la résolution pratique de ce problème peut s'avérer plus ou moins difficile d'une instance à l'autre, même si l'on considère des instances de même taille, i.e., ayant toutes le même nombre de cours et de créneaux horaires. Typiquement, les instances ayant très peu de contraintes d'exclusion sont faciles à résoudre car elles admettent beaucoup de solutions ; les instances ayant beaucoup de contraintes sont aussi facilement traitables car on arrive vite à montrer qu'elles n'admettent pas de solution ; les instances intermédiaires ayant trop de contraintes pour que l'on trouve facilement une solution, mais pas assez pour que l'on montre facilement qu'elles n'ont pas de solution sont généralement beaucoup plus difficiles à résoudre.

Parmi les principaux outils de modélisation utilisés pour la résolution des problèmes d'optimisation combinatoire, il existe la théorie des graphes. En effet, la modélisation par les graphes est naturelle dans certains problèmes (plus court chemin,...).

Les problèmes d'optimisation combinatoire peuvent aussi se formuler comme des programmes linéaires en nombres entiers où les variables sont astreintes à prendre des valeurs entières.

I.2. Découpe et placement

Les problèmes de l'optimisation combinatoire font souvent appel à des méthodes d'énumération implicite, de programmation dynamique, de programmation linéaire ainsi qu'à des méthodes d'intelligence artificielle.

Les problèmes de découpe et de placement sont des problèmes combinatoires. Ils sont classés dans la catégorie des problèmes NP-Complets et admettent de nombreuses applications en industrie, en systèmes multiprogrammes et multiprocesseurs. Ces problèmes se présentent lorsqu'on se propose d'optimiser l'utilisation d'une ou de plusieurs entités disponibles en y plaçant des sous entités prédéterminées. Dans le cas où l'on dispose d'une seule entité en stock, ces problèmes sont connus sous le nom de problèmes de découpe (non) contraints (non) pondérés à deux dimensions.

Dans d'autres cas, l'utilisation de toutes les sous entités peut être indispensable. Ce sont les problèmes de Strip-Packing ou de Bin-Packing, pour lesquels l'entité disponible peut se présenter sous forme d'une bande de largeur fixée et de longueur illimitée. En revanche, si l'on possède une quantité limitée d'entités en stock et d'un ensemble de sous entités limité par une borne supérieure, alors ce problème se généralise au problème du carnet de commandes.

I.2.1. Problème de découpe

Le problème de découpe a été posé par Kantorovich en 1960 [14] afin de trouver une modélisation cohérente des problèmes reliant l'organisation et la théorie de la production. Il fut repris par Gilmore et Gomory [15] en 1961 pour la résolution du problème de découpe à une et à deux dimensions en utilisant des méthodes de la programmation linéaire (pour une résolution approchée). Les mêmes auteurs [16], [17] {1965-1966) l'ont généralisé aux problèmes de découpes à deux et à plusieurs dimensions en s'appuyant sur d'autres méthodes de résolution exactes. Ces deux auteurs ont montré l'intérêt commercial et industriel de ces méthodes. Ce problème a également été utilisé par Codd dans [18] pour l'étude des systèmes multiprogrammes et par Garey et Graham dans [19] pour les systèmes multiprocesseurs. Par la suite, une généralisation du problème a été proposée pour l'interprétation d'un ensemble de variétés de problèmes industriels (papier, verre, cuir, bois).

Dans la pratique, l'utilisateur est contraint par le type de matériel utilisé pour réaliser un plan de découpe, par conséquence, la recherche d'une solution au problème diffère selon l'outil considéré : outil guillotine, outil non guillotine ou bien outil non orthogonal.

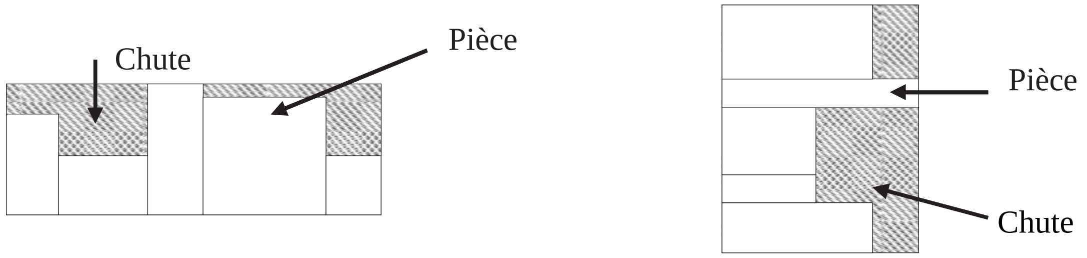
Un autre cas plus difficile se présente lorsque la surface du rectangle (ou des rectangles) est munie de certains points défectueux (surface non utilisable). Problème traité par Hahn dans [20].

Un autre problème de découpe qui semble intéressant est le problème de découpe circulaire (non) contraint. Les méthodes utilisent soit, une recherche gloutonne, soit une recherche locale, mais dans le cas circulaire plusieurs auteurs ont discuté la difficulté d'une éventuelle modélisation pour ce problème. En général, dans les problèmes de découpe, on associe à chaque sous entité un coût {ou un profit) de production. La fonction objectif peut être considérée comme étant linéaire ou non linéaire, selon les différents aspects du problème. Les principaux objectifs à optimiser sont donnés par la minimisation de la surface perdue, minimisation des entités nécessaires à la satisfaction des commandes, minimisation du coût de manipulation et de stockage ainsi que le maximum de répétitions de l'ordonnancement des commandes. La considération simultanée de ces objectifs conduit souvent à une fonction économique non linéaire.

I.2.2. Définitions

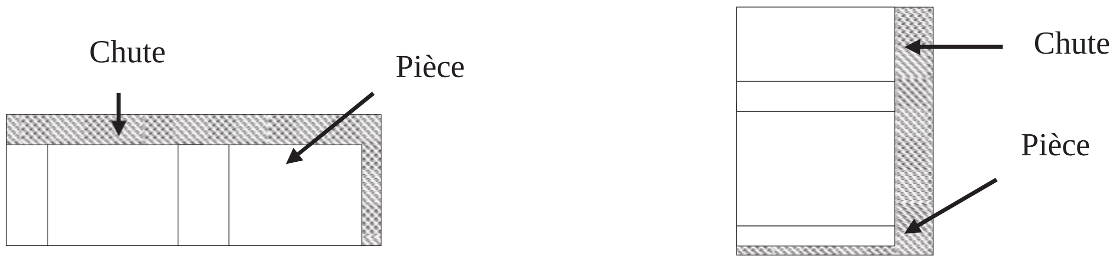
Supposons que l'on possède une plaque rectangulaire sur laquelle on veut effectuer une dissection afin de produire un ensemble de pièces appartenant à S (placement des pièces de dimensions inferieures aux dimensions de la plaque rectangulaire utilisée).

Il s'agit principalement de donner une vue générale sur les bandes et les modèles de découpes utilisés.



(a). Bande générale horizontale. (b). Bande générale verticale

Figure 1.1. Bandes générales horizontale et verticale.



(a). Bande uniforme horizontale (b). Bande uniforme verticale.

Figure 1.2. Bandes uniformes horizontale et verticale

I.2.3. Les principaux modèles de bandes

1. Une bande générale horizontale (figure 1. (a)) (resp. verticale {figure 1. (b)) est un ensemble de pièces rectangulaires accotées de telle façon qu'il existe une ligne horizontale (resp. verticale) ayant les propriétés suivantes :

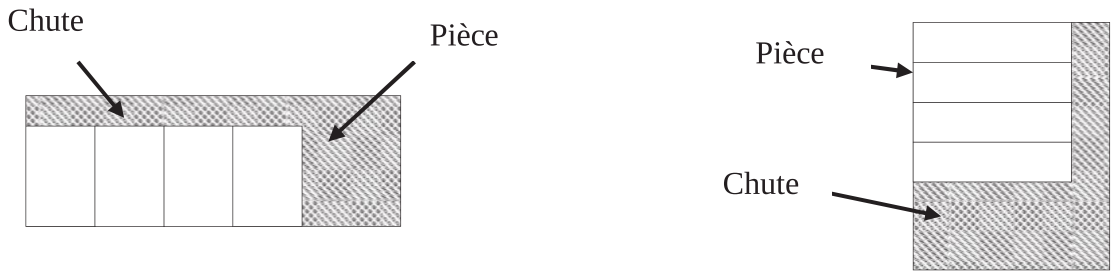
   - ✓ elle touche toutes les pièces sur leur longueur (resp. hauteur).
   - ✓ un des demi-plans défini par celle-ci contient toutes les pièces.

2. Une bande uniforme est une bande pour laquelle il existe exactement deux lignes horizontales (resp. verticales) ayant les propriétés précédentes. Dans ce cas, toutes les pièces découplées de la bande sont de même hauteur (resp. longueur) (figure 2. (a) et 2. (b)).

3. Une bande homogène horizontale (resp. verticale) est une bande uniforme ou il n'y a qu'un seul type de pièces participant (figure 3. (a) et 3. (b)).

4. Une bande optimale de longueur L et de hauteur w (resp. de hauteur w et de longueur

L est une bande générale occupant la surface maximum de la bande (L,w) (resp. (w,L)).



(a). Bande homogène horizontale. (b). Bande homogène verticale.

Figure 1.3. Bandes homogènes horizontale et verticale.

I.2.4. Les principaux modèles de découpes

1. Un modèle de découpe uniforme (ou dissection uniforme) est un modèle constitué par la combinaison de bandes uniformes verticales et horizontales (figure 4. (a)).

2. Un modèle de découpe générale (ou dissection générale) est un modèle constitué par la combinaison de bandes générales verticales et horizontales (figure 4. (b)).

3. Un modèle de découpe homogène est une dissection uniforme pour laquelle la solution est caractérisée par la répétition d'un seul type de pièces de l'ensemble S

4. (figure 4. (c)).

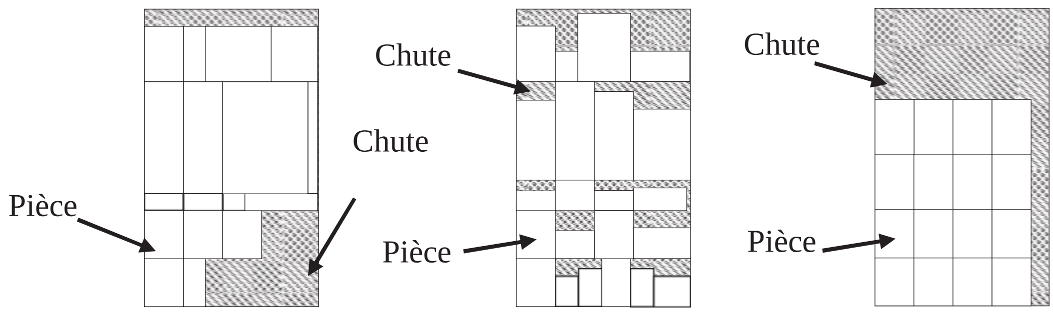


Figure 1.4. Modèle de découpe uniforme, générale et homogène

I.2.5. Les différents types de découpe

En pratique, les utilisateurs sont souvent contraints par le matériel de découpe disponible, la façon de procéder pour la réalisation d'un plan de découpe est différente. Les outils fréquemment utilisés sont :

- **La découpe du type guillotine** : qui réalise une production d'un ensemble de sous-entités dans une entité disponible. Si on suppose que l'entité est une plaque rectangulaire, alors la découpe est effectuée par la dissection en allant d'un côté à son opposé parallèlement aux deux autres (figure 5).
- **La découpe du type non-guillotine** : en général cette découpe engendre une solution meilleure que celle réalisée par les découpes du type guillotine. En effet, cette découpe consiste à utiliser le même procédé que dans la découpe guillotine et de plus, elle peut être effectuée tout en marquant des arrêts avant d'atteindre le côté opposé du (sous-) rectangle à découper (figure 5).

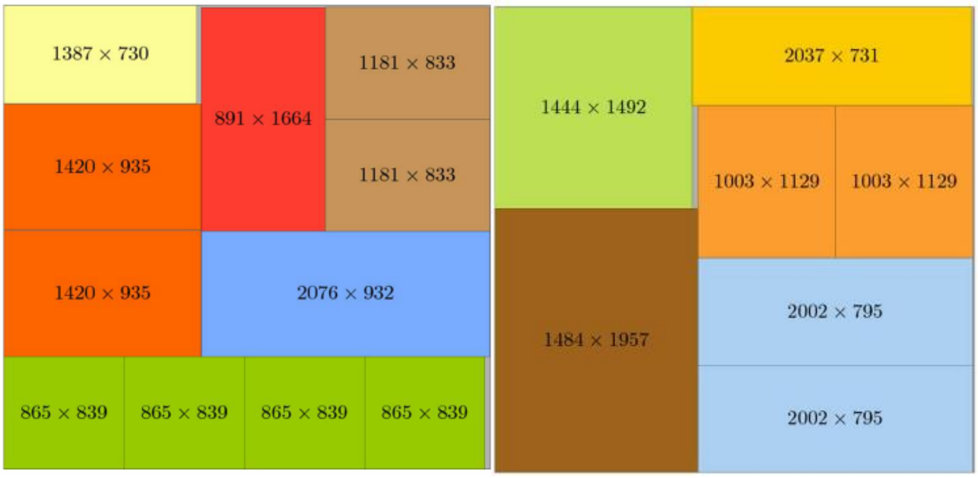
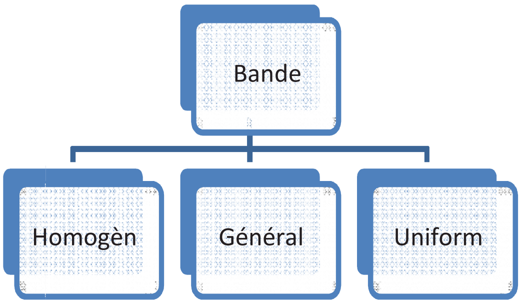


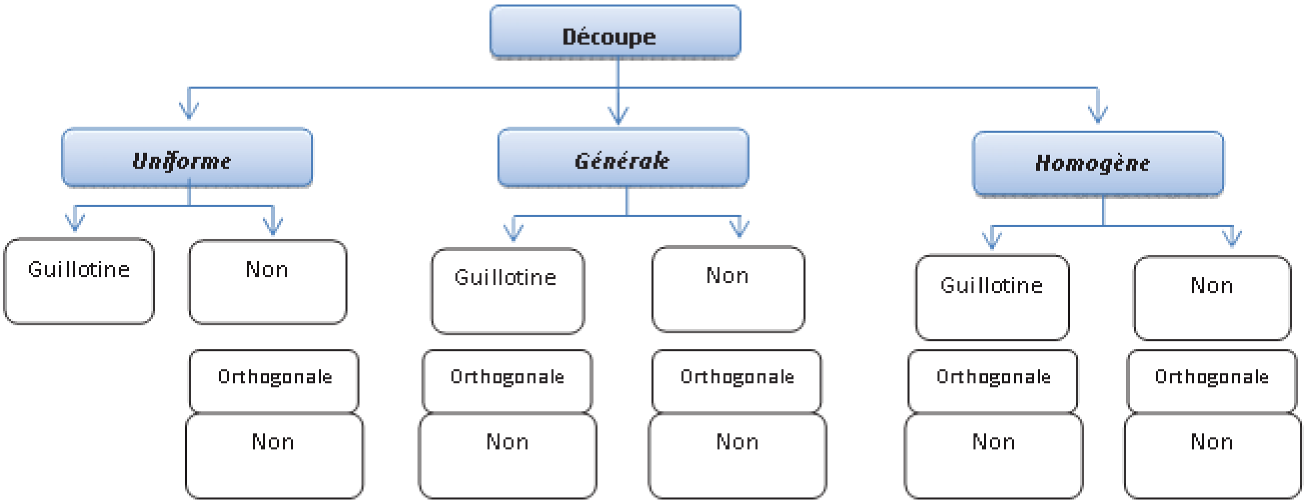
Figure 1.5. Modèles de découpe guillotine et non guillotine.

- **La découpe non-orthogonale**: cette découpe ne prend pas en considération l'orientation des pièces. Cette fois les pièces peuvent être pivotées et translatées (on effectue des rotations sur les pièces, donc elles ne sont pas fixées).

La classification des modèles de découpe et de bandes est représentée dans la figure 6.



(a). Modèles de bandes.



(b). Modèle de découpe.

Figure 1.6. Classification des modèles de découpe et de bandes.

I.2.6. Niveau de découpe guillotine

Le niveau de découpe guillotine est une constante K qui limite le nombre de changements de la découpe. On parle alors, de problème de découpe à deux niveaux si K est fixé à deux, c'est-à-dire le nombre de changements de la découpe est limité à deux.

I.2.7. Types de problèmes de découpe

Les problèmes de découpe peuvent concerner différents domaines :

a) La découpe proprement dite {cutting, trim-loss)

L'objectif est d'utiliser une quantité minimale de matière : barres surfaces (découpe de tubes, de bobines, de planches de bois, de verre, de papier...) pour réaliser un ensemble donné d'éléments. [26,…,29].

Les découpes de bobines peuvent revêtir un caractère lorsqu'elles sont découpées:

- dans toute leur longueur :

Les bobines (de papier) mères sont découpées sur toute leur longueur en bobineaux de plus petites largeurs et de même longueur. La chute de matière est la bande perdue après l'obtention des bobineaux. [27, 28, 30, 31].

- dans toute largeur :

Des rectangles sont découpés dans des rouleaux de moquettes .La largeur des rectangles est celle du rouleau .La chute est obtenue en bout de rouleau. [28, 31].

b) Le placement de tâches dans le temps

Il s'agit de générer un emploi du temps qui peut être, par exemple, l'organisation de la semaine d'un artisan. Les tâches sont de valeurs et de durées variées. [28,32].

c) L'utilisation de surfaces {pallet loading problem)

Des palettes de tailles et de géométrie variées sont à disposer sur une aire. [33] L'objectif est alors de limiter les surfaces inutilisées. Par simplification, les palettes sont généralement considérées comme rectangulaires .Dans le cas des cellules électroniques [34], il faut aussi faire intervenir le coût des liaisons entre les cellules. Ce coût augmente lorsque deux cellules qui doivent être connectées s'éloignent l'une de l'autre.

d) Le remplissage de volumes

Des articles de volumes connus sont à placer dans des boîtes identiques de volume plus important. L'objectif est de réduire l'espace non utilisé dans les boîtes. Le problème dans R^3 se réduit à un problème dans R^1 lorsque les articles et les boîtes ont des bases identiques [28].

Un problème similaire se pose lors du remplissage des fours de recuit dans la sidérurgie, où les pièces sont empilées les unes au-dessus des autres. Il faut alors minimiser l'espace perdu entre la dernière pièce et le haut du four [34].

e) La maximisation du poids transporté

Il s'agit là aussi d'un problème de remplissage limité par la charge des containers qu'il faut remplir avec des articles de poids donné. Ceci est fréquent dans les problèmes de logistique où le coût de transport d'un container est fixe comme le problème de sac à dos [28,31].

f) Le remplissage de rayons

Les bibliothèques, les grandes surfaces, les entrepôts, doivent disposer sur des étagères un nombre important de produits. Ceci doit s'effectuer sans chevauchement et avec le souci de limiter l'espace inutilisé en bout de rayon [28,31].

g) La gestion de mémoire par zones

Il faut répartir les programmes entre différentes zones de mémoire disponibles dans un ordinateur de façon à optimiser l'utilisation de la mémoire [28].

h) La gestion de l'unité centrale d'un ordinateur utilisé en temps partagé

Il s'agit de minimiser le temps total de traitement lorsqu'il faut affecter à un nombre donné de processeurs, soit une liste de tâches non-interruptibles, sans ordre entre les tâches (gestion du multitâche [34]), soit le déroulement d'un programme parallélisable {gestion de processeur [28,31].

i) Le choix des investissements (capital budgeting problem)

Le problème est de sélectionner à partir d'un ensemble de projets d'investissement possibles, un sous-ensemble qui maximise un profit ou une satisfaction (bénéfices actualisés par exemple) sous certaines limitations budgétaires, humaines, matérielles, etc. [24].

I.2.8. Applications industrielles complexes

A l'inverse des problèmes académiques classiques dont la structure est très régulière, les problèmes pratiques de découpe et de placement sont souvent soumis à de très nombreuses contraintes difficiles à modéliser et à intégrer dans des modèles génériques. Il y a un donc un écart très important entre l'état de l'art théorique et les algorithmes implémentés en pratique dans les logiciels du commerce. Lorsque l'on s'intéresse aux applications, il devient intéressant de différencier découpe et placement, qui diffèrent par le types de contraintes additionnelles rencontrées.

I.2.9. Problèmes pratiques de découpe

Dans la découpe, on s'intéresse particulièrement aux problèmes avec coupes guillotine.

[48] Ces coupes sont droites et s'appliquent d'un bord à l'autre des grands rectangles pour obtenir deux rectangles plus petits qui sont à nouveaux découpés de manière récursive.

Malgré sa structure combinatoire plus simple {un plan de découpe peut être représenté par un arbre), cette version du problème pose des difficultés plus importantes que la version non contrainte, que ce soit pour les heuristiques [49] ou les méthodes exactes.

[50] En revanche, quand on limite le nombre de coupes récursives possibles à deux ou trois niveaux (two, three-stage guillotine cutting), les modèles de programmation linéaire en nombres entiers permettent de résoudre le problème de manière très efficace [51].

Les problématiques évoluent légèrement en fonction du matériau découpé. Lorsque ce dernier est de faible coût (typiquement le papier), on cherche avant tout à minimiser les coûts de production. Ces coûts sont généralement dus à la configuration des machines lorsque l'on change de plan de découpe, ou au coût de stockage. En revanche, lorsque le matériau est coûteux (cuir, bois précieux, etc.), la priorité est donnée à la minimisation de la quantité de matière perdue, quelle que soit la difficulté de mise en œuvre du plan de production.

I.2.10. Recherches actuelles

Les problèmes mono-dimensionnels sont maintenant très bien traités dans la littérature et les algorithmes existants sont la plupart du temps suffisants pour résoudre les problèmes industriels sur des instances pratiques. En revanche, dans le champ des problèmes de placement multi-dimensionnels, les méthodes exactes peuvent échouer à résoudre des problèmes de taille moyenne (à partir de 50 articles), même sans contraintes additionnelles. Les méta-heuristiques peuvent de leur côté avoir de grandes difficultés à trouver des solutions lorsque l'instance est très contrainte. Malgré les percées récentes, le problème central de placement de rectangles dans un container unique reste difficile et mérite une attention particulière. La gestion de l'incertitude dans les problèmes de placement a été très peu étudiée depuis les premiers travaux sur le sac à dos et le bin-packing stochastiques. En particulier, les aspects dynamiques liés aux activités itératives de chargement/ déchargement (ou de stockage/picking dans les entrepôts) sont encore largement à étudier. On pense en particulier la construction de solutions robustes et à la réoptimisation en ligne.

I.2.11. Conclusion

La diversité des problèmes de découpe a été démontrée à travers une synthèse des propriétés des différents modèles et types de découpe. En effet, Dychhoff explicite la relation entre les problèmes de découpe et les problèmes de placement. Les problèmes de découpe peuvent être considérés comme étant le placement des pièces dans des objets de grande taille. De la même manière, les problèmes de placement peuvent être considérés comme étant des problèmes de découpe; ceci justifie le nom donné à ce type de problèmes, à savoir les problèmes de découpe et de placement "CP" {Cutting and Packing). En revanche, certaines contraintes liées aux applications industrielles sont exclusivement imposées dans le problème de découpe ou dans le problème de placement. A titre d'exemple la contrainte guillotine imposée par l'outil de découpe.

Ainsi, en raison de la diversité de ces problèmes et de leurs domaines d'application, de nombreuses variantes apparaissent sous différentes formes dans la littérature. Néanmoins, une analyse minutieuse de ces problèmes montre l'existence de plusieurs aspects communs. Dans ce sens, il existe plusieurs classifications des problèmes de découpe et de placement dans la littérature. Il s'ensuit que seuls les problèmes de petites tailles sont solvables par les méthodes exactes dans un temps raisonnable.

Une solution alternative permettant de résoudre les instances de grande taille consiste à utiliser les méthodes heuristiques. Celles-ci peuvent donner des solutions satisfaisantes en un temps raisonnable.

Chapitre II

Généralités sur la programmation linéaire et méthodes de résolution

II.1. généralités sur la programmation linéaire

L'importance de l'optimisation est la nécessité d'un outil simple pour modéliser des problèmes de décision dans l'entreprise, ces méthodes furent connues sous le nom de programmation linéaire, développée principalement par George B DANTZIG, mathématicien américain et créateur de la méthode du simplexe, et L.V.KANTOROVICH, On fait de cette technique un des champs de recherches les plus actifs.

Les problèmes de programmation linéaire sont généralement liés à des problèmes d'allocations des ressources limitées d'une meilleure façon, afin d'optimiser, l'objectif pour tracée par l'entreprise.

II.1.1. Définition de la programmation linéaire

Nous allons citer quelques définitions attribuées par des différents auteurs à la notion de la programmation linéaire, ensuite nous allons donner une synthèse de définition.

La définition donnée par Michel NEDZELA à la programmation linéaire est la suivante : « la programmation linéaire s'applique à la répartition des ressources limitées entre des activités en concurrence les unes avec les autres, de façon à atteindre au mieux un certain objectif». Donc, c'est une méthode de résolution du problème économique, soit dans le cadre d'une économie globale, soit dans celui d'une entreprise particulière ; où l'objectif est de sélectionner parmi les différentes actions possibles celle qui atteindra le plus probablement l'objectif visé.

Selon Gérald BAILLARGEON : « la programmation linéaire peut se définir comme un outil mathématique qui permet d'analyser divers types de situations dans lesquelles nous retrouvons une fonction linéaire d'un certain nombre de variables, appelée fonction objectif (on utilise également dans la littérature les termes fonction économique) que l'on désire optimiser, c'est-à-dire maximiser ou minimiser». Ces variables appelées variables d'activité, puis après la résolution, on les qualifie de variables de décision (dont on veut en déterminer les valeurs optimales) qui sont soumises à des contraintes imposées par des ressources limitées de la situation que l'on veut analyser ; les restrictions qui sont imposées prennent forme d'équations ou d'inéquations linéaires dans la formulation mathématique d'un modèle de programmation linéaire. Selon Jean-Philippe JAVET : « la programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts». Dans la plupart des cas, les problèmes de l'entreprise pouvant être traités par la programmation linéaire comportent un certain nombre de ressources. On peut mentionner, par exemple, la main-d'œuvre, les matières premières, les capitaux, etc. Qui sont disponibles en quantités limitées et qu'on veut les affecter d'une façon optimale entre un certain nombre de processus de fabrication.

II.1.2. Synthèse de définition de la programmation linéaire

Dans le domaine des sciences de la gestion, on pourrait dire que la programmation linéaire est un outil scientifique qui permet d'obtenir une meilleure affectation des ressources de l'entreprise (main-d'œuvre, matières premières, capitaux, espace, etc.), pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts, « l'objectif de la programmation linéaire est de minimiser (ou maximiser) une fonction objectif linéaire sous contraintes, qui sont représentées par des égalités et/ ou inégalités linéaires».

On constate dans les définitions précédentes que la programmation linéaire est la branche des mathématiques qui étudient les variables d'activités sous la forme d'un programme linéaire et la résolution de certains problèmes d'optimisation sous contraintes linéaires , elle est utilisée, en particulier, dans la production et dans la planification et l'allocation des ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés par les décideurs.

On appelle programme linéaire, le problème mathématique qui a pour objectif d'optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire de (n) variables réelles non négatives qui sont reliées par des (m) relations linéaires appelées contraintes sous d'égalités.

II.1.3. Définition d'un programme linéaire

Un programme linéaire est un modèle d'optimisation mathématique qui a pour objectif de trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines égalités et/ ou inégalités dites contraintes. En langage mathématique, on décrira le modèle de la manière suivante :

$$\text{Max ou Min(Z)} = C_1X_1 + \ +C_2X_2 + \ + \ldots + C_iX_j + \ldots + C_nX_n$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 \ + a_{12}X_2 + a_{1j}X_j + \cdots + a_{1n}X_n(\leq,=,\geq)b_1 \\ a_{21}X_1 \ + a_{22}X_2 + a_{2j}X_j + \cdots + a_{2n}X_n(\leq,=,\geq)b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}X_1 \ + a_{i2}X_2 + a_{ij}X_j + \cdots + a_{in}X_n(\leq,=,\geq)b_i \\ \ldots \\ a_{m1}X_1 \ + a_{m2}X_2 + a_{mj}X_j + \cdots + a_{mn}X_n(\leq,=,\geq)b_m \end{pmatrix}$$

$$X_1, X_2, \ldots X_j, \ldots X_n \geq 0$$

Soient :

- $[X_1,X_2,\ldots X_j,\ldots X_n]$ représentent les variables d'activités ; suivant l'hypothèse que ces variables sont positives, impliquent que $X_1,X_2,\ldots X_j,\ldots X_n \geq 0$.

- La fonction objectif a une forme linéaire en relation avec les variables de décision du type Max ou Min(Z) $=C_1X_1+ \ +C_2X_2+ \ + \ldots+ C_iX_j+ \ldots + C_nX_n$, ou les coefficients $[C_{1,} \ldots, C_2, \ldots, C_j, \ldots, C_n]$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, ou négatifs. Par exemple le coefficient (C_j) peut représenter un profit unitaire lié à la quantité de la production (X_j), ainsi, la valeur de la fonction (Z) est le profit total lié à la production $[X_1,X_2,\ldots X_j,\ldots X_n]$.

- Supposons que ces variables d'activités doivent vérifier un système d'équations linéaires défini par (m) inégalités et (n) variables ; ou les coefficients techniques sous la forme de la matrice (m×n) suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1j}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2j}, \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots a_{in} \\ \ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mj}, \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

et le vecteur colonne $[b_1,b_2, \ldots, b_i,\ldots b_m]$ qui doit avoir une valeur bien déterminée(avec certitude) et peut être positif ou nul. Le paramètre (b_i) représente la quantité des ressources disponibles dont le bien (X_j) utilise une quantité égale à $[a_{ij}X_j]$. « Les constants(à savoir, les coefficients et les côtés de droite) dans les contraintes et la fonction objectif sont appelés les paramètres du modèle »

II.1.4. Les formes d'un programme linéaire

On trouve souvent deux formes de programme linéaires. La forme canonique et la forme standard. La première représente la forme initiale, elle se caractérise par des contraintes linéaires sous forme des inéquations (≤;≥) ou d'équations (=) comportant (j) variables et (i) contraintes comme suit : Maximiser ou minimiser selon l'objectif une fonction économique (Z) : X_j variables de décision.

$$\text{Max ou Min(Z)} = C_1X_1 + \; + C_2X_2 + \; + \ldots + C_iX_j + \ldots + C_nX_n$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 \; + a_{12}X_2 + a_{1j}X_j + \cdots + a_{1n}X_n(\leq,=,\geq)b_1 \\ a_{21}X_1 \; + a_{22}X_2 + a_{2j}X_j + \cdots + a_{2n}X_n(\leq,=,\geq)b_2 \\ \cdots \\ a_{i1}X_1 \; + a_{i2}X_2 + a_{ij}X_j + \cdots + a_{in}X_n(\leq,=,\geq)b_i \\ \cdots \\ a_{m1}X_1 \; + a_{m2}X_2 + a_{mj}X_j + \cdots + a_{mn}X_n(\leq,=,\geq)b_m \end{pmatrix}$$

$$X_1, X_2, \ldots X_j, \ldots X_n \geq 0$$

Où :

X_j : Variables de décision ;

b_i : Seconds membres(les disponibilités) ;

C_j: Coefficients de la fonction objectif ;

a_{ij} : Coefficients des contraintes.

II.1.5. La forme canonique

Un programme linéaire est dit sous forme canonique si :

1. Les contraintes sont sous forme des inégalités d'infériorités et la fonction objectif est exprimée sous forme de maximisation.
2. Les contraintes sont sous forme des inégalités de supériorité et la fonction objectif est exprimée sous forme de minimisation. X_j: variables de décision.
3. Les contraintes sont sous forme des inégalités d'infériorités, des inégalités de supériorités et des égalités, et la fonction objectif est exprimée sous forme de maximisation ou de minimisation.

On peut obtenir la forme canonique pour n'importe quel programme linéaire à travers des transformations des contraintes.

II.1.6. La forme standard

Un programme linéaire est dit sous forme standard quand les inégalités représentant les contraintes sont transformées en égalités. Ceci s'effectue par l'introduction des variables d'écarts pour type de contraintes (≤;≥) et variables artificielles pour type de contraintes (=). « Un problème est sous la forme standard si seulement si les vraies contraintes sont toutes des égalités». Les vraies contraintes désignent les contraintes du programme hormis les contraintes logiques, en d'autres termes ce sont les contraintes opérationnelles.

II.1.7. Forme matricielle

On appelle forme matricielle, tout système composé de (m) équations à (n) inconnues devant être vérifiées simultanément et dont l'écriture de la forme suivante :

$$\text{Max ou Min(Z)} = C_1X_1 + \ + C_2X_2 + \ + \ldots + C_iX_j + \ldots + C_nX_n$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1j}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2j}, \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots a_{in} \\ \ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mj}, \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_i \\ \ldots \\ X_m \end{pmatrix} \leq, =, \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_i \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

II.1.8. Notions relatives à la programmation linéaire

Le traitement du sujet de la programmation linéaire, nécessite de mettre quelques notions relatives au sujet en exergue. « Les composants essentiels d'un problème d'optimisation sont un ensemble de variables de décision, une fonction objectif des variables à être agrandie ou réduite, et un ensemble de contraintes qui caractérisent les valeurs acceptables des variables ».

La fonction économique : Une fonction objectif, fonction économique ou fonction critère, elle décrit la relation linéaire représentant l'objectif de l'entreprise. Par exemple : maximisation du profit global, minimisation du cout de transport, maximation du chiffre d'affaires, minimisation des achats ... etc. « On appelle fonction objectif d'un problème d'optimisation la fonction qui doit être optimisée et le critère de choix entre les diverses solutions possibles ». La fonction objectif est une forme linéaire en fonction des variables de décision est de type :

$$\text{Max ou Min(Z)} = C_1X_1+ \ +C_2X_2+ \ + \ldots + C_iX_j+ \ldots + C_nX_n$$

C_j: C'est le coefficient de contribution de la variable (X_j) dans la fonction objectif, ce coefficient a une valeur connue avec certitude et peut prendre n'importe quelle valeur (positive ou négative). Par exemple, ce coefficient de contribution peut représenter : un profit unitaire ou un cout de transport unitaire, le prix de vente unitaire ou le prix d'achat, etc.

Cette fonction nous permet de traduire l'objectif poursuivi par l'entreprise en équation linéaire. Elle constitue des variables d'activité et des coefficients économiques. Chaque variable de décision identifiée dans le modèle, correspond à un coefficient indiquant la contribution unitaire de la variable correspondante à l'objectif.

II.1.9. Les variables d'activité [X_1,X_2,…X_j,…X_n]

Ces variables sont appelés les variables de contrôle ou variables instrumentales ou variables de commande ou plus brièvement les commandes du programme. « On représente par (X_j) les variables d'activité du programme linéaire ; les variables (X_j) ont une signification concrète (quantités produites, vendues ou transportées, durées, valeurs monétaires...etc.). Ces variables sont toujours positives ou nulles (condition de non-négativité, $X_j \geq 0$).L'agent décideur a la capacité d'interpréter ces variables et son choix final sera la valeur (X_j) qui optimise la fonction objectif.

II.1.10. Les coefficient de la fonction objectif [$C_1, \ldots , C_2, \ldots , C_j, \ldots , C_n$]

On représente par (C_j) le coefficient de la variable [X_j: X_1, X_2,…X_j,…X_n] de la fonction économique. Dans beaucoup de cas, les coefficients des variables d'activité de la fonction économique représentent les profits ou les couts associés à une unité des différentes activités. En d'autres termes, c'est la contribution unitaire de la variable correspondante à l'objectif poursuivi par l'entreprise.

II.1.11. Les contraintes d'activité $[a_{ij}\ X_j\ ] \leq = \geq [b_i\ ]$

Selon Daniel DEWOLF : « On appelle contraintes du problème toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables ». Dans la problématique de la situation, il faut être en mesure d'identifier toutes les contraintes imposées par la disponibilité des facteurs de production, elles présentent les éléments qui limitent le calcul économique de l'entreprise comme (capacité de production limitée, les ventes potentielles, main-d'œuvre, espace, budget...etc.). Dans tout problème formulé sous forme d'un programme linéaire il faut prendre en considération un vecteur des ressources disponibles bi $[b_1,b_2, ..., b_i,\dots b_n]$.

La forme générale d'une contrainte $[a_{ij}\ X_j\ ] \leq = \geq [b_i\ ]$ avec

- (i) : c'est le nombre des contraintes ;
- (a_{ij}) : c'est le coefficient technique de la variable (X_j) dans la ieme contrainte ;
- (b_i) : c'est le second membre (ressources disponibles).

II.1.12. Les coefficients techniques $[a_{ij}]$

On représente par (a_{ij}) le coefficient technique associé à la ressource (i) et l'activité numéro (j), il représente une matrice de (i) lignes et de (j) colonnes. « Les coefficients techniques (a_{ij}) représentent la quantité du facteur (i) par produit (j) ». C'est les quantités unitaires nécessaires de chaque ressource pour pouvoir conduire une des activités considérées au niveau unitaire, c'est à dire lorsque la variable de décision associée à l'activité en question est égale à un (1).

II.1.13. Les ressources disponibles $[b_i\colon b_1,b_2, ..., b_i,\dots b_m]$

On représente par (b_i) les quantités des ressources disponibles et qui limitent l'optimisation de l'objectif poursuivi par l'entreprise.

II.1.14. Variables d'écart

La méthode de résolution que nous venions d'étudier nécessite que les contraintes du modèle soient exprimées sous forme d'équation linéaire au lieu d'inéquation. On peut facilement transformer une inéquation linéaire ayant un signe ($\leq$), en une équation linéaire en additionnant une variable non négative dite variable d'écart, « la variable d'écart est la quantité qui, ajoutée aux membres de gauche d'une contrainte, permet de transformer la contrainte en égalité » . Elle représente l'écart entre la quantité disponible de la ressource (i) et la quantité effectivement utilisée par l'ensemble des (X_j). Nous ajoutons autant de variable d'écart différents quíil existe de contrainte du type (≥).

Coefficients des variables d'écart dans la fonction économique

Comme l'on peut considérer que les variables d'écart permettant de mesurer le niveau d'activité fictive alors, pour qu'elles n'influencent pas l'optimisation, on suppose nuls les bénéfices ou les couts liés à ces activités.

II.1.15. Les conditions de formulation d'un programme linéaire

La programmation linéaire comme étant un modèle admet des hypothèses (des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont:

1. Les variables de décision du problème sont positives ; on ne peut pas attribuer des valeurs négatives pour la quantité, la surface,... etc.
2. Le critère de sélection de la solution optimale est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est-à-dire que les variables ne sont pas enlevées au carré, ne servent pas d'exposant, ne sont pas multipliées entre elles.
3. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objectif (ou fonction économique).
4. Les restrictions relatives à l'activité de l'entreprise (exemple : limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.
5. Les paramètres du problème en dehors des variables de décision ont une valeur connue avec certitude.

II.1.16. Formulation d'un programme linéaire

Un modèle est un moyen pour mieux comprendre la réalité d'un phénomène quelconque. Un modèle linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées contraintes, qui sont linéaires. Et à partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée objectif. La formulation du modèle mathématique est l'étape la plus délicate de la résolution d'un problème. Elle nécessité un effort de conception qui doit aboutir à la détermination des trois éléments suivants :

- Les variables de décision pour lesquelles on doit décider du niveau à atteindre, tel que le niveau d'activité dans l'entreprise. On suppose que ces variables peuvent prendre n'importe quelle valeur positive.

- La fonction d'objectif qui décrit la relation linéaire représentant l'objectif de l'entreprise, à l'aide des variables de décision.
- Les contraintes du modèle qui décrivent les relations linéaires entre les variables de décision représentant les restrictions auxquelles est sujette l'entreprise. Donc, la formulation d'un modèle linéaire consiste à identifier les variables d'activité du problème posé, c'est-à-dire, désigner l'activité de l'entreprise par des variables $X_j[X_1,X_2,\ldots X_j,\ldots,X_n]$, ces variables appelées aussi variables de décision après la résolution du programme, lorsque la valeur des inconnus est déterminée dans le modèle. Pour pouvoir traduire l'objectif pour suivi par l'entreprise sous forme d'une fonction économique, il s'agit de calculer les coefficients économiques qui indiquent la contribution à cet objectif. Ces variables d'activités sont associés à des contraintes linéaires.

II.2. méthodes de résolutions d'un pl

La résolution des problèmes de programmation linéaire vise à déterminer l'allocation optimale et la meilleure allocation possible des ressources limitées pour atteindre certains objectifs, ces allocations doivent minimiser ou maximiser une fonction dite objectif. En économie, ces fonctions sont le profit ou le coût. Pour ce faire, on fait appel aux méthodes de résolution d'un programme linéaire on cite : la méthode graphique, et la méthode de simplexe, deux phases, grande M, et le dual.

II.2.1. Méthode graphique

La méthode graphique permet la résolution de problèmes linéaires simples de manière intuitive et visuelle. Cette méthode de résolution n'est applicable que dans le cas où il n'y a que deux variables de décision,« appelée aussi résolution géométrique, elle est possible pour un programme linéaire sous forme canonique avec (n) égale à deux ou trois variables et impossible s'il y a plus de trois (O3) variables d'activité.». Et selon George b. DANTZIG, Mukund n. THAPA : « lorsque des problèmes linéaires ont exactement deux variables soumises à des contraintes d'inégalités, il est possible de les résoudre graphiquement». Son avantage est de pouvoir comprendre ce que fait la méthode générale du simplexe, sans entrer dans la technique purement mathématique.

Les étapes du processus de la résolution la méthode des graphiques sont les suivantes :

i. Créer un système de coordonnées cartésiennes, dans lequel chaque variable de décision est représentée par un axe.
ii. Etablir une échelle de mesure pour chacun des axes appropriés à sa variable associée.
iii. Dessiner dans le système de coordonnées les contraintes du problème, y compris celles de non - négativité (qui seront les propres axes). Remarquer qu'une inéquation précise une région qui sera le demi-plan limité par la ligne droite qu'on obtient de considérer la contrainte comme égalité, alors que si une équation détermine une région c'est la ligne droite, elle-même.
iv. L'intersection de toutes les régions détermine la région ou l'espace faisable (qui est un ensemble convexe). Si cette région est non vide, passez à l'étape suivante. Sinon, il n'y a pas de point qui satisfait toutes les contraintes simultanément, de sorte que le problème ne sera pas résolu, dit infaisable.
v. Déterminer les points extrêmes ou les sommets du polygone ou polyèdre qui forme la région faisable. Ces points seront les candidats à la solution optimale.
vi. Évaluer la fonction objective à chaque sommet et celui (ou ceux) qui maximisent (ou minimisent) la valeur résultante définiront la solution optimale.

Exemple :

Trouver la solution optimale de (PL) suivant avec la méthode graphique.

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sous contraintes :

$$2x_1 + x_2 \leq 18$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 42$$

$$3x_1 + x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solution : sous contrainte :

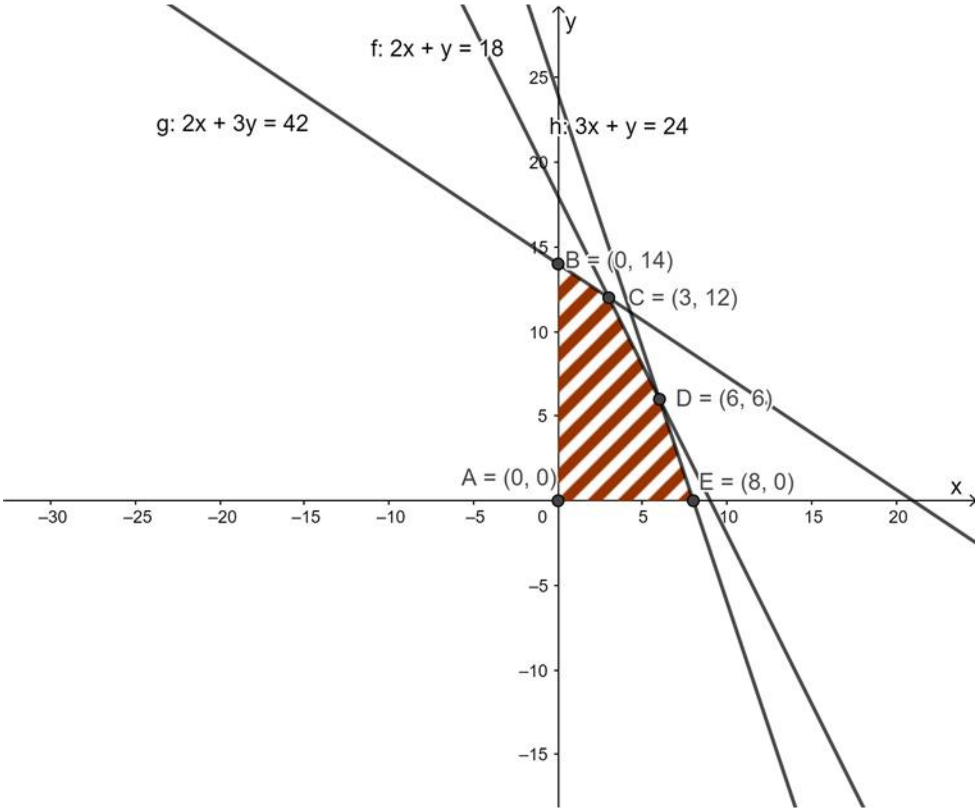
$$2x_1 + x_2 = 18$$

$$2x_1 + 3x_2 = 42$$

$$3x_1 + x_2 = 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

sommet	Coordonnées (x_1, x_2)	Valeur objectif (Z)
A	(0,0)	0
B	(0,14)	28
C	(3,12)	33
D	(6,6)	30
E	(8,0)	24



II.2.2. Méthode simplexe

Résoudre un programme linéaire consiste à déterminer les valeurs des variables non négatives (Xj) qui permettent d'optimiser la fonction économique. Il existe plusieurs méthodes de résolution, la méthode algébrique, la méthode graphique, qui porte chacune des limites. Il faut donc trouver une autre méthode : celle du simplexe, qui est la plus utilisée dans la résolution des programmes linéaires, puisqu'elle répond aux développements des techniques de résolution par ordinateur.

L'algorithme du simplexe constitue« une procédure répétitive permettant, de progresser rapidement vers la solution optimale». Elle examine comme première solution un des sommets (en général l'origine), qui constitue la solution de base de l'algorithme. Son principe consiste à «se déplacer de sommet en sommet adjacent de façon à améliorer la fonction objectif ; après un nombre fini d'itération, il arrive à un sommet à partir duquel tout déplacement vers un autre sommet n'améliore plus cette valeur, on est alors au sommet optimal, l'algorithme simplexe consiste à passer d'une solution de base à une autre jusqu'à ce qu'une solution réalisable de base optimal soit trouvée». En d'autres termes, la solution optimale est celle qui ne contient aucune variable positive dans la fonction objectif dans le tableau final de simplexe pour un problème de maximisation et aucune variable négative dans la fonction objectif dans le tableau final de simplexe pour un problème de minimisation. Pour calculer la solution optimale, la règle de sélection est appelée règle de pivotage.

Principe de l'algorithme de simplexe

La recherche systématique d'une solution optimale à l'aide de l'algorithme du simplexe peut se résumer comme suit :

1. Déterminer une première solution de base réalisable ; cette solution initiale sert de départ au cheminement vers la solution optimale (si elle existe).
2. Si la solution obtenue en (1) n'est pas optimale, déterminer une autre solution de base réalisable qui permettrait d'améliorer la fonction objectif (augmentation pour une maximisation ou diminution pour une minimisation).
3. On répète cette procédure itérative jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la fonction objectif. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire.

Exemple :

Trouver la solution optimale pour le problème suivant avec la méthode simplexe :

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2$$

Sous contrainte :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solution :

1. la forme standard :

$$Max\ Z = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

Sous contrainte

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$$

$$5x_1 + 4x_2 + x_4 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2. tableau 01 (initial)

H.Base /Base	x_1, x_2, x_3, x_4	Bi
x_3	2 3 1 0	30
x_4	5 4 0 1	60
Z	-3 -5 0 0	0

3 la variable entrante est : (x_2).
4. la variable sortante est : (x_3).
5. Elément de pivot est : (3).
6. Equation de pivot est :

$=\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{30}{3}\right]$

$=\left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\ , 0, 10\right]$

7. nouvelle élément de Z et x_4

Nouvelle (Z)=$[-3, -5, 0, 0, 0] - (-5) \times \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$

$=\left[\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 0, 50\right]$

Nouvelle (x_4)=$[5, 4, 0, 1, 60] - (-4) \times \left[\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$

$=\left[\frac{7}{3}, 0, \frac{-4}{3}, 1, 20\right]$

8. tableau 02 (final) :

H.Base/ Base	x_1,	x_2,	x_3,	x_4	Bi
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
x_4	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	20
Z	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$		50

Tous les coefficients de la fonction objectif est supérieur ou égal à 0 ($C_i \geq 0$) alors la solution optimale est : $x_1 = 0$, $x_2 = 10, Z = 50$.

On déduire que la gestion de la production a décidé de produire (10) unités du produit (x_2) et ne produire aucune du produit (x_1) pour le maximum du profit qui est égale à 50.

II.2.3. La méthode des pénalités (ou du grand M)

Cette méthode permet de tenir compte des variables artificielles. On les pénalise en leur affectant un coefficient de valeur très élevé dans la fonction économique (—M) pour un problème du maximum, (+M) pour un problème du minimum. Les pénalités ont pour objet de provoquer l'élimination des variables artificielles au fil des itérations.

Les étapes de la méthode :

1. Transformation de la forme standard à la forme canonique et ajoutée les variables (X_i) à la fonction objective.
2. La formulation de la fonction objectif (Z) avec l'utilisation des variables (X_i) et (X_j).
3. Construire un tableau qui contient la solution en fonction des coefficients
4. (T_i, X_i, X_j).
5. Trouvé la variable entrante et la variable sortante.
6. Ensuite, répéter les étapes de la méthode simplexe.
7. Finalement si tous les coefficients de fonction objectif est (Cj ≤ O) alors la solution optimal est trouver.

Exemple :

Trouver la solution optimale pour le problème suivant avec la méthode (grand M) :

$$Min\ Z = 2x_1 + x_2$$

Sous contrainte :

$$x_1 + 3x_2 \geq 30$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solution :

.la forme standard :

$$Min\ Z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

Sous contrainte :

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 30$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_4 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

On a $x_3 et\ x_4$ sont négatives ($x_3 = -30, x_4 = -40$), contradiction avec la non négative de ($x_3 et\ x_4$), alors on ajoutant des variables artificielles aux contraintes et à la fonction objectif (Z).

-On ajoute les variables artificielles comme suit :

$$Min\ Z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + MT_1 + MT_2$$

Sous contrainte :

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + T_1 = 30 \qquad \ldots (1) \ldots$$

$$4x_1 + 2x_2 - x_4 + T_2 = 40 \qquad \ldots (2) \ldots$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, T_1, T_2 \geq 0$$

Nb : M est très grand

-Formulation de la fonction objective (Z) en termes des variables (Xj et Xi) :

De (1) et (2) On trouve $(T_1)\ et\ (T_2)$ comme suit :

$$T_1 = 30 - x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$T_2 = 40 - 4x_1 - 2x_2 + x_4$$

On remplace les valeurs de $T_1 et\ T_2$ dans la fonction objective (Z), on trouve :

Z=$2x_1$+x_2+$M(30 - x_1 - 3x_{2+}x_3) + M(40 - 4x_1 - 2x_2$+$x_4)$

=$(2 - 5M)x_1$+$(1 - 5M)x_2$+$Mx_3 + 70$

=$2x_1$+x_2+$M30 - Mx_1$−$3Mx_2$+Mx_3+$M40 - 4Mx_1$−$2Mx_2$+Mx_2

=$(2 - 5M)x_1$+$(1 - 5M)x_2$+Mx_4+Mx_3+70M

70M=$Z - (2 - 5M)x_1$−$(1 - 5M)x_2$−Mx_3−Mx_4

Tableau de solution de base :

Variables de base	Variable non basic						b_i	Ration
	$\boldsymbol{x_1}$	x_2	x_3	x_4	T_1	T_2		
Z	-2+5M	-1+5M	-M	-M	0	0	70M	-
T_1	1	3	-1	0	1	0	30	10
T_2	4	2	0	-1	0	1	40	20

- La variable entrante est (X_2) (M = 100).
- La variable sortante est (T_1):
- Elément de pivot est (3).
- Équation de pivot = [$\frac{1}{3}$, 1, $\frac{-1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$,0,10].
- On trouve les Nouvelles valeurs de (Z) et (T_2) comme suit :

Nouvelle(Z) = (-2 + 5M ;-1 + 5M ;-M;-M; 0; 0) - (-1 + 5M) ×[$\frac{1}{3}$, 1, $\frac{-1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$,0,10].

$$=\left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}\ M, 0, \frac{-1}{3}+\frac{2}{3}M, -M, \frac{1}{3}-\frac{5}{3}M, 0, 10+20M\right]$$

Nouvelle (T_2)=$[4,2,0,-1,0,1,40]$ – 2 ×$\left[\frac{1}{3}, 1, \frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$

$$=\left[\frac{10}{3}, 0, \frac{2}{3}, -1, \frac{-2}{3}, 1, 20\right]$$

- On place les résultats dans le tableau suivant :

Variable de base	Variable non basic						b_i	Ration
	x_1	x_2	x_3	x_4	T_1	T_2		
Z	$\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M$	0	$\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}M$	-M	$\frac{1}{3}-\frac{5}{3}$M	0	10+20M	–
X_2	$\frac{1}{3}$	1	-$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	10	30
T_2	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	-$\frac{2}{3}$	1	20	6

-La variable entrante est (X1) et (M = 100).
-La variable sortante est (T2):
-Elément de pivot est ($\frac{10}{3}$)
-Équation de pivot :

$$=\left[\frac{\frac{10}{3}}{\frac{10}{3}}, \frac{0}{\frac{10}{3}}, \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}}, \frac{-1}{\frac{10}{3}}, \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{10}{3}}, \frac{1}{\frac{10}{3}}, \frac{20}{\frac{10}{3}}\right]$$

$$=\left[1, 0, \frac{1}{5}, \frac{-3}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, 6\right]$$

-On trouve les Nouvelles valeurs de (Z) et (X2) comme suit :

Nouvelle (Z) $=\left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M, 0, \frac{-1}{3}-\frac{2}{3}M, -M, \frac{1}{3}-\frac{5}{3}M, 0, 10+20M\right]$ - $\left[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M\right]\times$ $\left[1, 0, \frac{1}{5}, \frac{-3}{10}, \frac{-1}{5}, \frac{3}{10}, 6\right]$.

$$=\left[0, 0, 0, \frac{-1}{2}, -M, \frac{1}{2}-M, 20\right].$$

Nouvelle (X_2) $=\left[\frac{1}{3}, 1, \frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 10\right]$ - $\left[\frac{1}{3}\right]\times\left[1, 0, \frac{1}{5}, \frac{-3}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, 6\right]$

$$=\left[0, 1, \frac{-2}{3}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, 8\right].$$

-On place ces résultats dans la table suivante :

Variable de base	Variable non basic						b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	T_1	T_2	
Z	0 $\frac{1}{2}-M$	0	0	$\frac{1}{2}$	-M		20
X_2	0	1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6

Tous les coefficients de la fonction objective est supérieur ou égale à 0(Ci ≥0)
Alors la solution optimale est :

X1 = 6; X2 = 8; Z = 20.

II.2.4. Métode des deux phases

La méthode des Deux Phases est utilisée lorsque les variables artificielles apparaissent sous forme standard ou canonique du problème. La première phase vise à résoudre le problème auxiliaire Z' afin de minimiser la somme des variables artificielles et de le rendre nul (dans le but d'éviter les incohérences mathématiques). Après avoir résolu le premier problème, et tant qu'il est comme prévu le résultat, le tableau qui en résulte est réorganisé pour une utilisation dans la deuxième phase sur le problème d'origine.

Sinon, le problème n'est pas faisable, c'est-à-dire, il n'y a pas de solution et il ne faudra pas continuer avec la deuxième phase.

Phase1 :

1. Transformation de la forme canonique à la forme standard et ajouter les variable artificielles (Ti) aux contraintes.
2. La Formulation de la fonction objectif (t) avec l'utilisation de les variables artificielle (Ti) ie :r = T1 + T2 + ….Tn pour un Min.
3. Comme indiqué, dans cette première phase on résout un problème auxiliaire (la minimisation de l'addition des variables artificielles) avec une fonction d'objectif auxiliaire. Par conséquent, dans la première ligne du tableau, qui montre les coefficients des variables de la fonction objectif, tous les termes, sauf les coefficients

des variables artificielles, seront à zéro. La valeur de chacun de ces coefficients est "-1" car on minimise l'addition de ces variables (Ne pas oublier que minimiser Z 'est la même chose que maximiser (-1).Z').

- **Condition d'arrêt et passage à la phase 2:**

La condition d'arrêt est la même que dans la méthode du Simplexe. Autrement dit, lorsque dans la ligne indicatrice aucun des valeurs des coûts réduits est négatif (car, comme on a posé l'objectif est la maximisation de (-1)·Z ').

Accomplie la condition d'arrêt, il est nécessaire de déterminer s'il est possible de procéder à la deuxième phase afin d'obtenir une solution optimale du problème initial. Cela se fait en observant le résultat obtenu dans la première phase: si sa valeur est 0, cela signifie que le problème initial a une solution et il est possible de la calculer, dans le cas contraire, il indique qu'il n'est pas faisable et qu'il n'y a pas de solution.

Phase2 :

La deuxième phase de la méthode des Deux Phases est élaborée exactement comme la méthode su simplexe, sauf qu'avant de commencer les itérations il faut supprimer les colonnes correspondantes aux variables artificielles, et reconstruire le tableau d'origine.

- **Supprimer colonne de variables artificielles:**

Si nous sommes parvenus à la conclusion que le problème initial a une solution, on doit préparer notre tableau pour la deuxième phase. Cette étape est très simple, il suffit de supprimer les colonnes correspondantes aux variables artificielles.

- **Construction du tableau initiale:**

Le tableau initial, dans ce cas, reste à peu près égal au dernier tableau de la première phase. La ligne de la fonction objectif devrait être modifié seulement par celle du problème initial et recalculer la ligne Z (de la même manière que dans le premier tableau de la phase 1).

À partir de ce point, toutes les itérations, jusqu'atteindre la solution optimale du problème.

Remarques

- ✓ Il n'est pas nécessaire d'introduire des variables artificielles dans toutes les contraintes, il suffit de les introduire en nombre suffisant pour avoir une solution de base réalisable.
- ✓ S'il existe une variable artificielle en base avec une valeur nulle, la solution du problème est dégénérée.
- ✓ S'il existe une variable artificielle en base avec une valeur positive, les contraintes du problème sont contradictoires.
- ✓ Dans la méthode des deux phases, le premier tableau de la phase (2) est identique au dernier tableau de la phase (1) à l'exception de la ligne des Zj-Cj qui est modifiée par la réintroduction des Cj.

Exemple :

Trouver la solution optimale pour le problème suivant en utilisant la méthode des deux

Phases :

$$\text{Min } Z = 2X1 + X2$$

Sous contraintes :

$$X1 + 3X2 \geq 30$$

$$4X1 + 2X2 \geq 40$$

$$X1 ; X2 \geq 0$$

La première phase :

Transformation du modèle de la forme canonique à la forme standard :

$$\text{Min } Z = 2X1 + X2 - 0T1 - 0T2$$

Sous contrainte :

$$X1 + 3X2 - X3 = 30 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$4X1 + 2X2 - X4 = 40 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$X1 ; X2 ; X3 ; X4 \geq 0$$

On a X3 et X4 sont négative (X3 = -30;X4 = -40), contradiction avec la non négative de

T1 ; T2 (T1 ; T2 ≥ 0); alors on ajoutant des variables artificielles (T1; T2) aux les contraintes comme suit :

X1 + 3X2 - X3 + T1 = 30…………(1)
4X1 + 2X2 - X4 + T2 = 40……….(2)

X1;X2;X3;X4; T1; T2 ≥ 0

Formulation de la nouvelle fonction objective (t) en termes des valeurs de T1 et T2 avec la fonction (t) est égale une valeur constante de l'équation (1) et (2) on obtient :

t = T1 + T2 $\longrightarrow$ Min

T1 = 30 - X1 - 3X2 + X3

T2 = 40 - 4X1 - 2X2 + X4

On remplace les valeurs de T1 et T2 dans la fonction objective (Z) on trouve :

t = (30 - X1 - 3X2 + X3) + (40 - 4X1 - 2X2 + X4)

= 70 - 5X1 - 5X2 + X3 + X4

t + 5X1 + 5X2 - X3 - X4 = 70

Tableau 1 :

Variable de base	Variable non basic						b_i	Ration
	x_1	x_2	x_3	x_4	T_1	T_2		
t	5	5	-1	-1	0	0	70	_
T_1	1	3	0	0	1	0	30	30
T_2	4	2	0	0	0	1	40	10

La variable entrante c'est (X1), la variable sortante c'est (T2) et l'élément du pivot c'est (4).

Equation du pivot =$\left[1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 10\right]$.
Nouvelle valeur de(T1) et (t) :

Nouvelle(t) = [5, 5, 1,-1, 0, 0, 70] – 5 × $\left[1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0\right]$

=$\left[0, \frac{5}{2}, -1, \frac{1}{4}, 0, \frac{-5}{4}, 20\right]$.

Nouvelle (T_1) = $\left[0, \frac{5}{2}, -1, \frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{4}, 30\right]$

On place les résultats précédents dans le tableau (2)

Variable de base	Variable non basic						b_i	Ration
	x_1	x_2	x_3	x_4	T_1	T_2		
T	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	20	–
T_1	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	30	8
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	10	20

La variable entrante c'est (X2) , la variable sortante c'est (T1)et élément du pivot c'est ($\frac{5}{2}$).

Equation du pivot c'est : $\left[0,1,-\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{2}{5},-\frac{1}{10},8\right]$.

Nouvelle valeur de (X_1) et (t) :

Nouvelle(t) = $[0,\frac{5}{2},-1,\frac{1}{4},0,-\frac{5}{4},20]-\frac{5}{2}\times\left[0,1,-\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{2}{5},-\frac{1}{10},8\right]$

$=[0,0,0,0,-1,-1,0]$.

Nouvelle (X_1) = $\left[1,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4},0,-\frac{1}{4},10\right]-\frac{1}{2}\times\left[0,1,-\frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{2}{5},-\frac{1}{10},8\right]$

$=\left[1,0,\frac{1}{5},-\frac{3}{10},-\frac{1}{5},\frac{3}{10},6\right]$.

On place les résultats précédents dans le tableau (3)

Variable de base	Variable non basic						b_i	Ration
	x_1	x_2	x_3	x_4	T_1	T_2		
T	0	0	0	0	-1	-1	0	–
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8	–
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6	–

On a la valeur de la fonction objectif (t =0) et ($C_j \geq 0$) alors la solution du modèle existe donc on passe à la $2^{éme}$ phase .

Deuxième phase

En Utilisant la solution finale de la $4^{éme}$ étape de ^{1ére} phase aprés la suppression de (X_3) et la fonction objectif (t).

On utilise la fonction objectif (Z)

$Z = 2X_1 + X_2 - 0X_3 - X_4$

On optimise leurs valeurs pour trouver la solution optimale comme suit

Variable de base	Variable non basic				b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	
T	0	0	0	0	0
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	6

Après la suppression de (T1 et T2) et la fonction objectif (t) du tableau de la solution finale, et l'ajout de la fonction (Z), on va écrire les contraintes en fonction des résultats de la table finale.

$$X_2 - \frac{2}{5} X_3 + \frac{1}{10} X_4 = 8 \ldots\ldots..(1)$$

$$X_1 - \frac{1}{15} X_3 - \frac{3}{10} X_4 = 6 \ldots\ldots\ldots.(2)$$

De l'équation (1) et (2) ,on obtient les valeurs (X_1 , X_2) :

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= \frac{2}{5} X_3 - \frac{1}{10} X_4 + 8 \\ X_1 &= \frac{1}{15} X_3 + \frac{3}{10} X_4 + 6 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

On remplace les valeurs de (X1,X2) de la relation (3) dans la fonction objectif

(Z), on trouve :

$$Z = 2\,X_1 + X_2$$

$$= 2 \times \left[8 + \frac{2}{5}\,X_3 - \frac{1}{10}\,X_4\right] + \left[8 + \frac{2}{5}X_3 - \frac{1}{10}X_4\right]$$

$$= 12 - \frac{2}{5}\,X_3 + \frac{6}{10}\,X_4 + 8 + \frac{2}{5}X_3 - \frac{1}{10}X_4$$

$$= 20 + \frac{5}{10}X_4$$

$$Z - \frac{1}{2}X_4 = 20$$

On place le résultat final de la fonction (Z) dans le tableau de la solution optimale :

Variable de base	Variable non basic				b_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	20
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	6

Toutes les coefficients de la fonction objectif (Z) est inférieure ou égale zéros (0)

($Cj \leq 0$) alors la solution optimale est :

$X_1 = 6$, $X_2 = 8$, Z = 20 .

Chapitre III :

Présentation de l'organisme d'accueil (EI) et problématique

III.1. Présentation de l'organisme d'accueil

III.1.1. Historique d'électro-industrie

Electro-industrie est l'une des unités de production de SONELEC, qui a été l'une des plus importantes entreprises du pays. Cette entreprise, possède plusieurs unités de production réparties à travers le territoire, est créée en 1969. Celle-ci a existé jusqu'à la restructuration des secteurs industriels en plusieurs entreprises juridiquement indépendantes composées d'unités commerciales et de production en 1983.

L'ENEL est l'une de ces entreprises qui a occupé une place dans le secteur industriel. Créée en 1985 par une convention qui est signée entre SONELEC et les Allemands en l'occurrence :

- SIMENS pour les produits alternateurs, générateurs et les groupes électrogènes ;
- TRAFO-UNION pour le produit transformateur ;
- FRITZ-WERNER pour la partie engineering du projet.
- La construction et l'infrastructure sont réalisées par les entreprises algériennes telles qu'ECOTEC, COSIDER et BATIMETAL.

L'ENEL a deux secteurs de productions essentiels. Le premier est le secteur des transformateurs, qui a commencé la production à la même année de création 1985. Le deuxième est le secteur des moteurs/alternateurs qui a commencé la production en 1986. Ces produits sont fabriqués sous la licence SIEMENS jusqu'en 1992.

En 1991 une extension de ses capacités de production de transformateur de 1500 à 5000 unités/an, développement de la gamme de moteurs monophasés, développement de l'activité de groupes électrogènes, développement de moteurs destinés à la climatisation, extension verticale de la gamme de transformateurs (2000 KVA) et l'extension horizontale de la gamme du moteur en types et variantes.

L'ENEL a connu une autre restructuration en 1999. Elle a changé de statut pour devenir une entreprise autonome **Electro-Industrie.** Cette dernière est spécialisée dans la fabrication et la commercialisation des transformateurs, moteurs électriques et la commercialisation des groupes électrogènes (activité insignifiante).

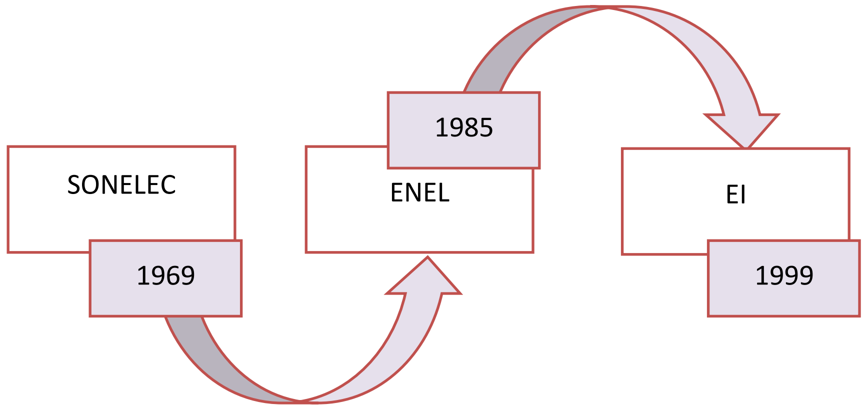


Figure 3.1. Restructuration de l'E.I.

Source : élaboré par moi-même à partir des documents interne de l'entreprise

III.1.2. Situation géographique

ELECTRO-INDUSTRIE est implantée dans une zone agricole de 39.5 hectares, située sur la route nationale n° 12, distante de 30 KM du chef-lieu de la wilaya de Tizi-Ouzou et de 08 km du chef-lieu de la daïra d'AZAZGA.

III.1.3. Le statut juridique et le capital social

Conformément à la loi de 88/01 du 13/01/1988 qui adopte plusieurs règles pour la création des EPE, Electro-Industries est une entreprise publique économique, Société Par Action (EPE-SPA) avec un capitale social de quatre milliards sept cent cinquante-trois millions de dinars (4 753 000 000 DA) détenus totalement par le Groupe ELEC EL DJAZAIR pour le compte de l'Etat. Cette entreprise a été créée dans le cadre du « projet de l'industrie-industrialisant » dont l'objectif est de réduire la dépendance extérieure.

III.1.4. Les structures organisationnelles d'Electro-Industries

Les structures organisationnelles de l'EI sont représentées par l'organigramme ci-dessous. Cet organigramme est de type fonctionnel avec domination des liens hiérarchiques verticaux.

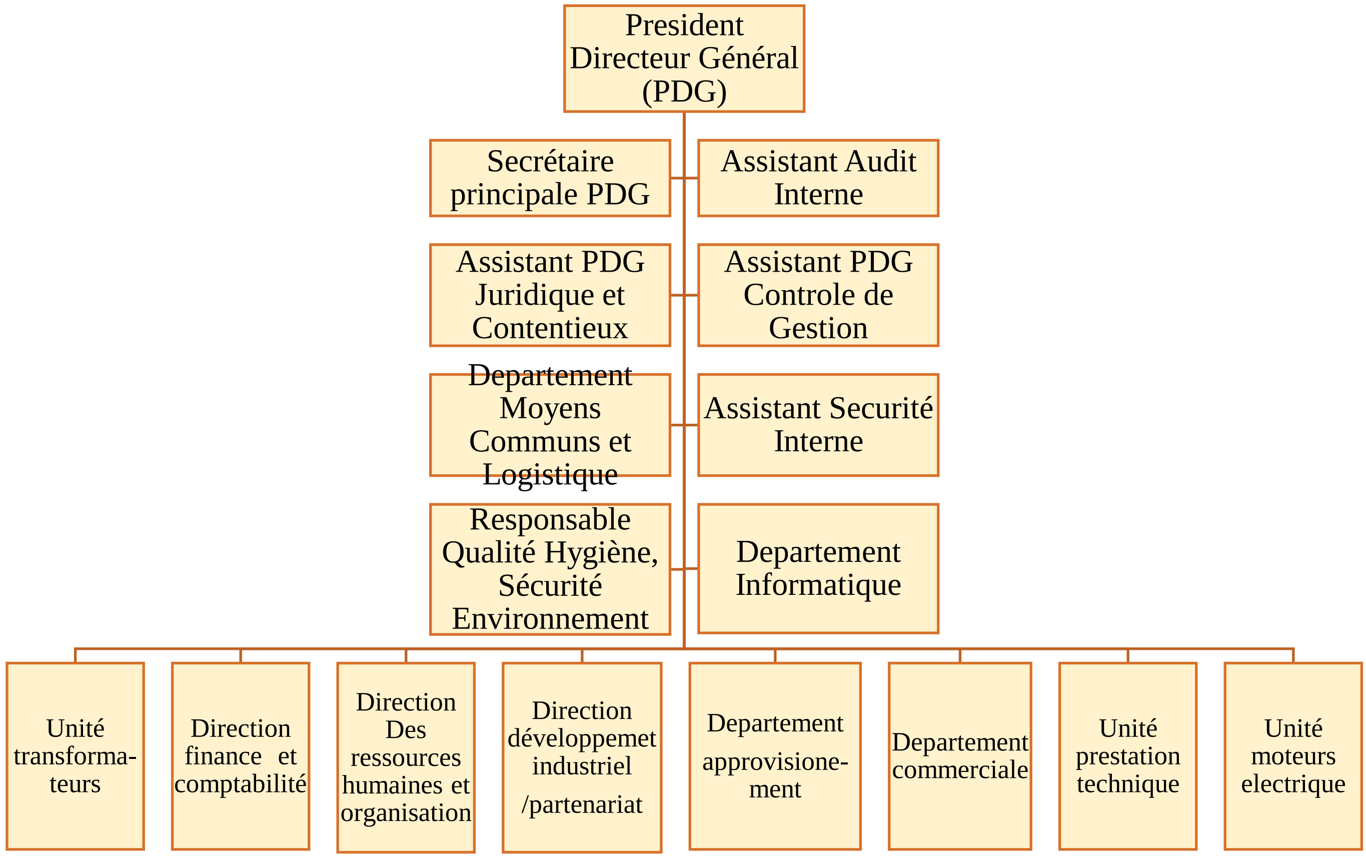


Figure 3.2. Organigramme de l'entreprise Electro-Industrie

Source : document interne de l'entreprise

III.1.5. Activités de l'entreprise

Son activité principale est :

- la production et commercialisation des transformateurs et moteurs de distribution électriques depuis

Et son activité secondaire est :

- la production et la commercialisation d'alternateurs et groupes électrogènes
- prestation technique (service après-vente)
- prestation interne à l'entreprise (au niveau des unités de production)

Electro-industries est composée de trois unités, toutes situées sur un même site :

- Unité de fabrication de transformateurs de distribution (UTR);
- Unité de fabrication de moteurs électriques, alternateurs, groupes électrogènes (UME);
- Unité de prestations techniques pour les deux unités précédentes (UPT).

III.1.6. Gamme de production

- Pour les transformateurs :

  - Puissance de 50 à 2000 KVA ;
  - Tension usuelle en moyenne tension 5,5 -10 et 30 KV;
  - Tension usuelle en basse tension 400V.

La capacité théorique de production de l'unité transformateurs est de 5 000 unités/an mais l'entreprise n'a produit que 3 455 unités en 2017, soit un taux réel de 69 %.

Le tableau suivant montre l'évolution de la production de l'unité Transformateurs pour les trois dernières années et sa comparaison à la capacité théorique.

Tableau 01 : Evolution de la production de l'unité Transformateurs pour les années 2015, 2016, 2017

U = pièces					
2015		**2016**		**2017**	
Production	Taux %	Production	Taux %	Production	Taux %
4 585	92%	3 920	78%	3 455	69%

Source : document interne de l'Electro-Industries intitulé « Présentation de l'entreprise Electro-Industries »

Nous constatons à travers ce tableau que la production des transformateurs est en baisse d'année en année. En effet en 2015 l'unité produisait presque à pleine capacité 92%, mais pour les deux années suivantes la production a baissé, soit à 78% en 2016 et à 69% en 2017 ; cela est dû à la perte du plus grand client de l'entreprise à savoir la SONELGAZ, et donc pour éviter un sur-stockage, l'entreprise a dû ralentir sa production.

• Pour les moteurs :

- Puissance des moteurs allant de 0.25 à 400 KVA;
- Puissance des alternateurs allant de 17,5 à 200KV;
- Puissance des groupes électrogènes de 100, 126, 160 et 200KVA.

La capacité théorique de production de cette unité est de 40 000 unités/an (dont 2000 pour les alternateurs), alors que la capacité réelle de production est de 11 058 unités/an pour l'année 2017, soit à peine 28 %.

Le tableau suivant montre l'évolution de la production de l'unité Moteurs électriques pour les trois dernières années et sa comparaison à la capacité théorique.

Tableau 02 : évolution de la production des moteurs, alternateurs et groupes électrogènes pour les années 2015, 2016, 2017.

2015		**2016**		**2017**	
Production	Taux %	Production	Taux %	Production	Taux %
12 966	32%	11 970	30%	11 058	28%

Source : document interne de l'Electro-Industries intitulé « Présentation de l'entreprise Electro-Industries ».

Le tableau ci-dessus montre que l'unité moteurs électriques a un faible rendement par rapport à sa capacité théorique de production car elle ne dépasse pas réellement les 32%.

Ce faible taux s'explique par le fait que l'entreprise concentre ses efforts sur l'unité transformateurs et délaisse l'unité motrice électrique.

• prestations techniques:

Cette unité était incorporée dans l'unité moteurs électriques jusqu'en 2016 ; mais depuis, elle a été séparée de cette dernière pour devenir une unité à part entière. Ses activités vont de la sous-traitance au profit des unités transformateurs et moteurs à la sous-traitance pour les clients d'EI et dans le domaine suivant[1] :

- Contrôle de la qualité des matières premières : par des analyses chimiques.
- Contrôle de la qualité de l'ensemble des produits finis : par des essais physiques.

- Maintenance de tous les équipements de production.
- Fabrication et rénovation des outils de production.
- Usinage de pièces de précision : usinage à fil, tournage, fraisage, rectification et affutage.
- Traitement thermique : trempe, revenu et cémentation.
- Métrologie : étalonnage et vérification métrologique des équipements de mesure.

Cette unité dispose d'un personnel hautement qualifié avec des savoir-faire reconnus et acquis sur plusieurs années.

III.1.7. Effectifs de l'entreprise

Electro-Industrie compte actuellement 836 travailleurs répartis en trois catégories : cadre, maîtrise, et exécution comme le montre le tableau suivant :

Tableau 03 : répartition des salariés par catégorie socioprofessionnelle en 2018

	UTR		UME		UPT		DG		Total	
	Nombre	%	Nombre	%	Nombre	%	Nombre	%	Nombre	%
Cadre	26	8.75	32	14.95	36	32.43	90	42.06	184	22.01
Maîtrise	99	33.33	88	41.12	49	44.15	46	21.49	282	33.73
Exécution	172	57.92	94	43.93	26	23.42	78	36.45	370	44.26
Total	297	100	214	100	111	100	214	100	836	100

Source : document interne à l'entreprise

A travers ce tableau nous constatons que la catégorie exécution compte le plus grand nombre de salariés soit 44.26%, suivie par les agents de maîtrise avec 33.73% et enfin les cadres qui forment 22.01% du nombre total des travailleurs.

D'un autre côté la composition par unité donne les résultats suivants :

- Unité Transformateurs 35.53 % ;
- Unité Moteurs électriques 25.6 % ;
- La direction générale avec un taux de 25.6 %,
- Unité Prestations techniques avec 13.28 %.

Ces résultats indiquent que l'unité Transformateurs a une importance stratégique au sein de l'entreprise.

Le personnel bénéficie d'une formation sur toute l'année, assurée à l'intérieur des ateliers pour les anciens ouvriers au profit des nouvelles recrues, en particulier dans la maintenance.

Selon les dires du responsable, l'entreprise assure également à son personnel la participation aux différentes formations, stages de perfectionnement à l'échelle nationale.

III.1.8. La clientèle d'Electro-Industries

Les produits d'EI sont destinés à une clientèle diversifiée comprenant les entreprises publiques économiques (EPE) 77%, dont 72% destiné à Sonelgaz et23%pour les entreprises privées, pour l'année 2015,

Et 2018 les représentent (EPE) 20% et les entreprises privées 80%, la clientèle est répartie comme suit :

- Agents agréés 75% et particuliers 5% : SARL, EURL, Groupe, commerçants.
- Entreprises publiques économiques 20% telles que : KAHRIF, POVAL.

L'essentiel des ventes est donc généré par la clientèle privée.

III.1.9. Les fournisseurs d'Electro-Industries

La majorité des fournisseurs de l'EI sont des entreprises étrangères. A cet effet les achats importés entre autres tôle magnétique, huile représentent 70%. Quant aux achats locaux, composés de fil de cuivre, vernis ne constituent que 30% des besoins d'EI, les fournisseurs de ces matières sont : SARL K-RIL, SARL ENICAB, et SARL TREFLCUIVRE.

III.1.10. Objectifs et rôles de l'EI

Comme toutes autres entreprises industrielle, la société Electro-Industrie a pour objectifs de :

- ➢ Transformer des matières premières en produits finis pour les vendre à d'autres entreprises ou directement aux consommateurs;
- ➢ Servir le marché en produisant et en distribuant des transformateurs électriques correspondant à la demande des clients ;
- ➢ Gagner de l'argent, et extraire des bénéfices;
- ➢ Produire un excédent de trésorerie, qui sera investi avec un plus grand profit dans le développement des activités;
- ➢ Atteindre un but technique : conception et réalisation des transformateurs donnants

satisfactions aux clients;

- Motivation du personnel,
- Recherche de l’efficacité.
- Développer sa part de marché.

III.2. Problématique

Notre stage s’est déroulé au sein de l’unité de production des transformateurs de distribution (UPT).

Le transformateur est un appareil électrique très simple, mais il est d’importance capital. Il permet de modifier la tension et le courant dans un circuit. Grace à lui, l’énergie électrique peut être transportée à grande distance de façon économique et distribuée dans des usines et les maisons.

III.2.1. Définition du transformateur

Le transformateur est une machine statique à induction électromagnétique qui permet de transformer un système de tensions et de courants alternatifs en un ou plusieurs systèmes de tensions et de courants de même fréquence. Cet appareil comporte deux enroulements, l’un est appelé primaire et l’autre secondaire.

- Le primaire : c’est l’enroulement qui reçoit la puissance active de la source.
- Le secondaire : c’est celui qui restitue la puissance active du primaire.

Il permet d’abaisser ou augmenter la tension du courant électrique qui traverse le réseau. Il effectue cette transformation avec un excellent rendement.

III.2.2. Principe de fonctionnement

En vertu de la loi de Faraday, lorsqu’un flux d’induction magnétique variable Φ circule dans le circuit magnétique, il induit dans l’enroulement secondaire une force électromotrice proportionnelle dans le temps aux taux de changement ($d\Phi /dt$) et au nombre de spires que comporte cet enroulement. Autrement dit le fonctionnement d’un transformateur est basé sur l’effet électromagnétique de ses enroulements. Les enroulements primaire et secondaire sont couplés magnétiquement grâce au circuit magnétique de faible réluctance. Lorsque le primaire est alimenté par une source alternative, le courant crée un flux magnétique alternatif qui circule dans le circuit magnétique et son amplitude dépend du nombre de spires du primaire et de la tension appliquée. La fermeture du secondaire sur une charge provoque la circulation du courant secondaire. Le noyau magnétique fournit un chemin de canalisation du flux magnétique tel que montré par la figure 3.3.

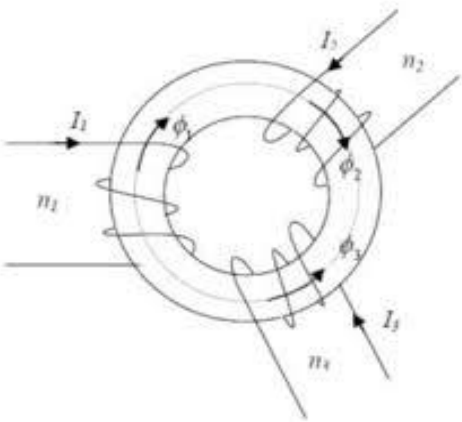
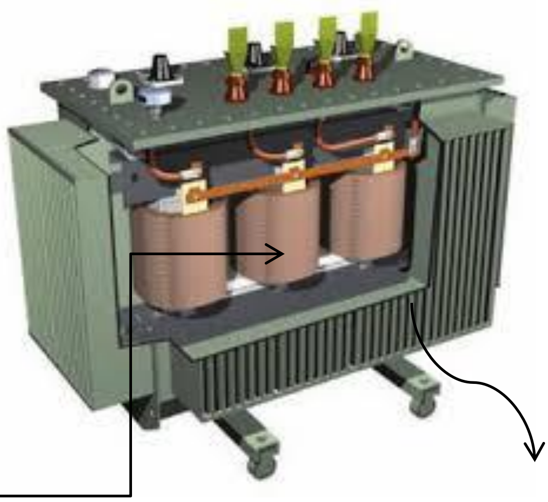


Figure 3.3. Circuit magnétique et électrique liés.

III.2.3. Constitution générale

Le transformateur est constitué de deux parties essentielles :

- La partie active : elle est destinée à assurer la conversion de l’énergie.
- La partie constitutive : elle est destinée à la protection et à la fixation de la première partie.



La partie active **La partie constructive**

Figure 3.4. Constitutions d’un transformateur triphasé.

- **La partie active**

Elle comporte le circuit magnétique et les enroulements.

a- Circuit magnétique :

Le noyau est composé d'un empilage de tôles ferromagnétiques de haute perméabilité et de cristaux orientés, isolées électriquement entre elles. Il doit être conçu de façon à réduire les pertes par courant de Foucault et par hystérésis qui se produisent lors de la variation périodique du flux magnétique. On parvient à résoudre ce problème en prenant des mesures à savoir :

- Emploi d'acier magnétiquement doux ayant une petite surface du cycle d'hystérésis et de faibles pertes par hystérésis ;
- Emploi d'aciers spéciaux présentant, grâce à des additifs, une résistivité élevée ;
- Emploi de tôles dont l'épaisseur est choisie tel que les courants de Foucault soient pratiquement sans effet.

Le noyau est destiné à canaliser le flux magnétique produit par l'enroulement primaire vers l'enroulement secondaire et sert de support aux enroulements. La variation périodique du flux magnétique provoque des pertes d'énergie par courants de Foucault et par hystérésis qui sont néfastes pour le rendement du transformateur. Le circuit magnétique comporte trois colonnes réunies par deux culasses figure 3.5.

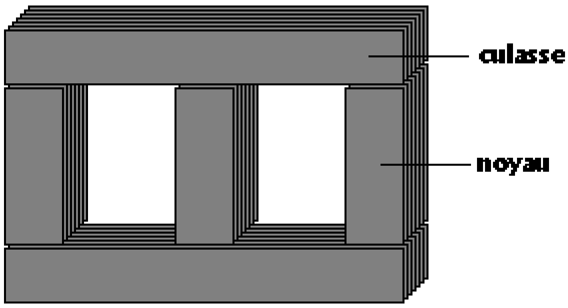


Figure 3.5. Circuit magnétique d'un transformateur triphasé.

Suivant la forme du circuit magnétique, on distingue deux dispositions principales qui sont :

- **Type cuirassé :**

Pour ce type de transformateur, le circuit magnétique entoure complètement l'enroulement des deux côtés. La cuve assure le serrage de l'ensemble et le transformateur ainsi constitué est alors assuré d'une excellente rigidité mécanique associée à une grande compacité. Les transformateurs de ce type sont utilisés principalement au sein des réseaux de transport et de répartition, où les surtensions transitoires sont fréquentes. Pour cela des écrans sont utilisés afin de réduire les contraintes liées aux champs électriques dans les bobines.

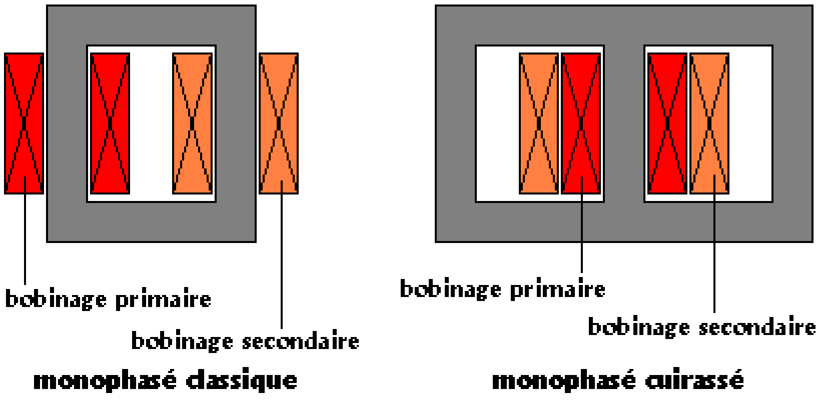


Figure 3.6. Transformateur type cuirassé.

❖ **Type à colonnes :**

Le transformateur à colonnes est constitué de deux enroulements concentriques par phase. Ces enroulements sont montés sur le noyau ferromagnétique qui se referme à ses extrémités via des culasses afin d'assurer une bonne canalisation du flux magnétique. Dans cette technologie, ce sont les enroulements qui entourent le circuit magnétique de manière à maximiser le couplage tout en minimisant le volume des conducteurs. Cette disposition plus simple que la précédente est utilisée pour le transformateur à haute tension et les grandes puissances. Les enroulements peuvent être disposés sur un circuit magnétique comportant trois colonnes, dont trois sont bobinées, les autres servent au retour des flux.

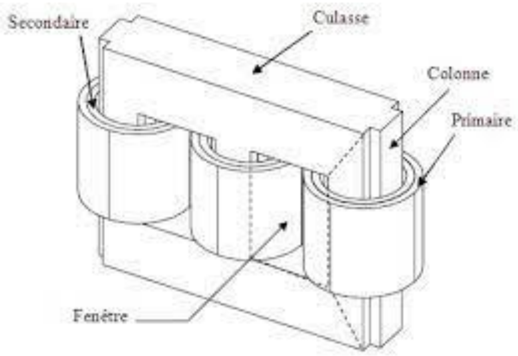


Figure 3.7. Transformateur à colonnes.

b- Le circuit électrique:

Le matériau constituant les enroulements est généralement en cuivre ou en aluminium de forme circulaire ou rectangulaire. Les enroulements sont isolés entre eux avec du vernis synthétique. Concernant l'isolation entre les colonnes du circuit magnétique, on utilise des tubes écran en presspahn ou en papier doté de bakélite.

- **L'enroulement primaire :**

Il doit avoir une section faible et un nombre de spires grand. Ceci est imposé par la tension élevée et le courant faible à laquelle il est soumis.

- **L'enroulement secondaire :**

Pour cet enroulement, la section du fil doit être importante et le nombre de spires est petit, ce qui correspond au courant fort et la tension moins élevée qui sont délivrés par cet enroulement. Pour les transformateurs de basse tension et faible puissance, les enroulements primaire et secondaire sont constitués par des bobines en fil de cuivre émaillé, chaque couche étant isolée de la suivante par du papier. Pour les appareils à haute tension et grande puissance, les bobines parfois fractionnées en galettes, sont constituées par du fil rond ou méplat isolé au carton imprégné, séparées par des isolants tels que fibre, mica,…etc.

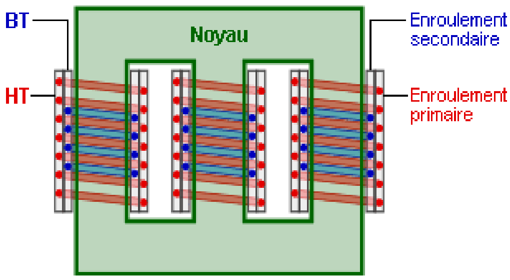


Figure 3.8. Les enroulements d'un transformateur.

On distingue trois dispositions principales des bobines sur les noyaux :

❖ **Bobinage concentrique simple :**

Le bobinage à basse tension est enroulé sur le noyau et après isolement est recouvert par le bobinage haute tension.

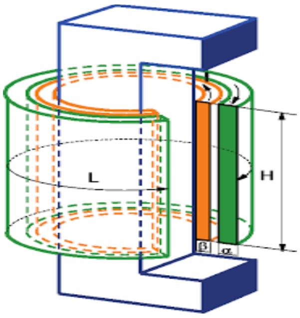


Figure 3.9. Bobinage concentrique simple

❖ **Bobinage concentrique double :**

La moitié du bobinage basse tension est enroulée sur le noyau et isolée, puis on enroule le bobinage haute tension et on isole ; enfin on termine par la deuxième moitié du bobinage basse tension. Autrement dit, le bobinage haute tension est en sandwich entre les deux moitiés basse tension.

❖ **Bobinage à galette :**

Les bobinages haute tension et basse tension sont fractionnés et constitués par des couronnes ou des galettes qui sont en filées alternativement sur les noyaux.

En distribution, les transformateurs sont à bobinage concentrique simple.

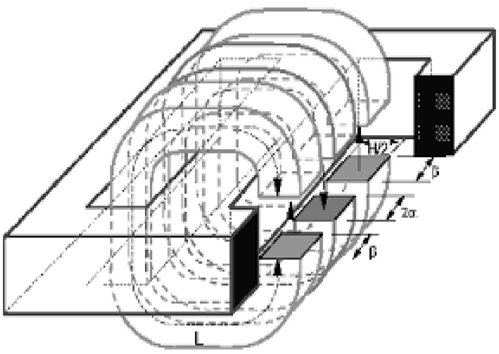


Figure 3.10. Bobinage à galette.

- **La partie constructive**

Cette partie comporte des éléments mécaniques qui servent à la protection, la fixation et le refroidissement de la partie active du transformateur. Ces éléments sont les suivants :

a- La cuve :

La cuve doit être construite selon le calcul thermique du transformateur, elle doit satisfaire aux exigences suivantes :

- Résistance mécanique et rigidité nécessaire pour toute déformation sous l'effet du poids de la partie active et l'huile qui s'exerce sur elle.
- Elle doit être réalisée avec une bonne étanchéité à l'huile et aussi présenter une grande surface d'échange de chaleur avec le milieu extérieur. Pour cela, on doit prévoir une cuve qui est faite en tôles avec ondulations qui ont une profondeur relative à la chaleur dissipée. La figure 3.11. montre la cuve d'un transformateur.

Figure 3.11. Cuve d'un transformateur.

b- Le couvercle :

C'est un élément important de la cuve il présente la partie supérieure du transformateur, sur lequel sont disposés plusieurs éléments :

- Borne HT
- Borne BT.
- Pattes de suspension.
- Trous pour l'emplacement.
- Prise de terre.
- Poches thermomètres.
- Manette de réglage de la tension et dispositifs de fixation des éclateurs.

La figure 2-10 montre le couvercle d'un gros transformateur :

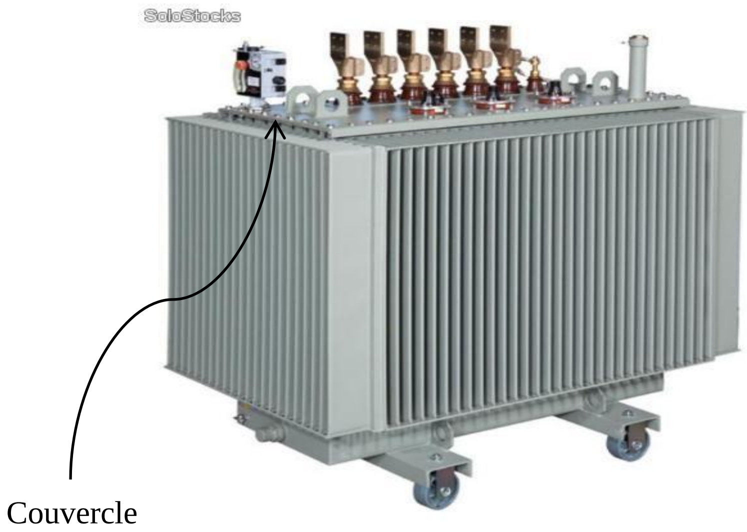


Figure 3.12. Couvercle d'un transformateur.

c- Les traversées :

Les traversées ont pour rôle d'assurer à travers le couvercle la liaison électrique entre les extrémités des enroulements d'une part, et les lignes d'arrivée d'autre part. Elles permettent d'avoir une bonne répartition du champ électrique et une fixation étanche et robuste sur le couvercle.

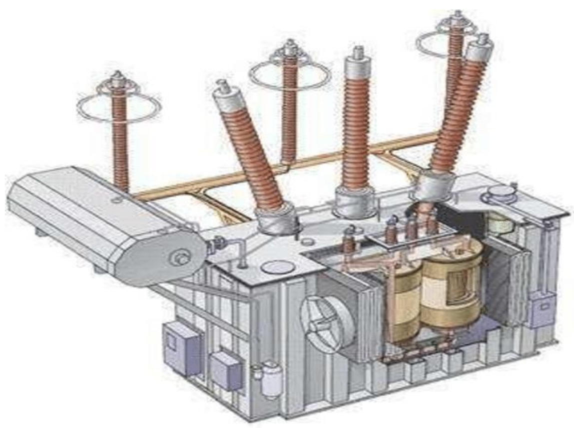


Figure 3.13. Traversées d'un transformateur triphasé.

d- Le conservateur d'huile :

Il appartient à la partie supérieure du transformateur. Il est placé sur le couvercle à l'aide des éclisses et sur sa face frontale est placé un indicateur d'huile qui est transparent. Sur l'autre face une bride, sur laquelle l'assécheur d'air est fixé, est soudée.

La figure 2-12 montre le conservateur d'huile d'un transformateur.

Figure 3.14. Conservateur d'huile d'un transformateur.

e- Le liquide diélectrique :

C'est un mélange d'hydrocarbures provenant de la distillation du pétrole brut, après extraction des produits volatiles. On obtient ainsi l'huile pour transformateurs, qui est un liquide dont l'immersion de la partie active a non seulement l'avantage d'une meilleure isolation, mais aussi celui de la facilité de refroidissement par circulation naturelle de l'huile.

III.2.4. Gamme de production

L'entreprise produit deux séries : la série 10 et la série 30, notre étude va se focaliser sur la série 30 qui est la suivante :

- 50 KVA
- 100 KVA
- 160 KVA
- 250 KVA
- 400 KVA
- 630 KVA
- 800 KVA
- 1000 KVA
- 1250 KVA
- 1600 KVA
- 2000 KVA

III.2.5. Quelques types de matières premières

- **Divers cuivre** : fil vernis, méplat de cuivre, fil bobinage, feuillard de cuivre … etc.
- **Tôle d'acier LAC :** elle est utilisée pour réaliser le couvercle du transformateur (3×1000×2000, 6×1200×1250 ….)
- **Bande d'acier LAF :** elle est utilisée pour réaliser la paroi de la cuve.
- **Divers acier plat et profilé :** elles sont utilisées pour fabriquer divers pièces intégrés et la cuve.
- **Tôle magnétique :** cette matière est destinée pour la fabrication des noyaux des transformateurs.
- **Tubes HP et tubes B :** pour fabriquer les bobines.

Nous avons fait notre étude sur le couvercle du transformateur, fabriqué à base de l'acier plat de 4 mm et de 6 mm d'épaisseur , livré sous forme de paquets de tôles avec des dimensions différentes. Les étapes de réalisation du couvercle sont données ci-après :

- Découpage de la tôle sous forme de rectangle aux dimensions voulues.
- Poinçonnage des trous nécessaires sur le couvercle tels que :
    - Trois trous pour l'emplacement des isolateurs haute tension (HT).
    - Quatre trous pour l'emplacement des traversées basse tension (BT).
    - Deux trous pour l'emplacement des poches pour thermomètres.
    - Trente-quatre trous ou plus pour la fixation du couvercle sur la cuve.
    - Deux trous pour les éclisses.
- Soudage des pièces suivantes :
    - Les deux crochets de levage.
    - Les deux cornières d'appui du couvercle.
    - Les trois brides HT pour permettre la fixation des isolateurs.
    - La prise de terre.
    - Les trois dispositifs pour permettre la fixation des éclateurs qui sont du côté haute tension.
    - Les deux dispositifs pour permettre la fixation du curseur de réglage de la tension.

- Le sablage et le dressage.
- La prescription des symboles et des chiffres sur le couvercle désignant les bornes HT (A,B ,C), BT(a,b,c) et le neutre (n) ainsi que les symboles de la prise de terre et les trois positions du commutateur de réglage.
- Le contrôle de la qualité et des dimensions.

III.2.6. Problème

Pour mieux comprendre la méthode de la découpe, on donne le problème suivant avec au préalable deux plaques à découper et on cherche le nombre maximal de couvercles à obtenir sans prendre en considération les dimensions.

Les données :

Deux plaques d’épaisseur 4 mm, dont les dimensions sont : 1000×2000 et 1250×2500

Et les couvercles obtenus sont de types suivants :

50/30 → 448×918

100/30 → 478×948

160/30 → 488×968

250/30 → 518×1098

L’entreprise souhaite minimiser les chutes en découpant ces plaques.

On se retrouve donc face à un problème de découpe, Quelles sont les dimensions adéquates à choisir afin d’obtenir une meilleure solution ? La résolution du problème est développée dans le dernier chapitre.

Chapitre IV

Approche mathématiques et résolution du problème

Rappelons que notre objectif était de maximiser le nombre de couvercles obtenus et de minimiser les chutes dégagées.

IV.1. Approche mathématiques

Avant de traiter le problème précèdent et d'autres problèmes plus complétés, on adopte la terminologie et les notations suivantes.

IV.1.1. Notations

On note

A_1 : le couvercle de dimension 448×918

A_2 : le couvercle de dimension 478×948

A_3 : le couvercle de dimension 488×968

A_4 : le couvercle de dimension 518×1098

B_1 : le couvercle de dimension 596×1206

B_2 : le couvercle de dimension 636×1356

B_3 : le couvercle de dimension 686×1426

B_4 : le couvercle de dimension 696×1466

De surfaces respectives :

SA_1=448×918= 411264 mm^2

SA_2 =478×948= 453144 mm^2

SA_3=488×968= 472384 mm^2

SA_4= 518×1098= 568764 mm^2

$SB_1 = 718776\ mm^2$

$SB_2 = 822416\ mm^2$

$SB_3 = 978236\ mm^2$

$SB_4 = 1020336\ mm^2$

Et on note

P_1 : la plaque d'épaisseur 4mm et de dimension 1000×2000
P_2 : la plaque d'épaisseur 4mm et de dimension 1250×2500
Q_1 : la plaque d'épaisseur 6mm et de dimension 1500×2000
Q_2 : la plaque d'épaisseur 6mm et de dimension 1500×3000
De surfaces respectives :

SP_1 = 2000000 mm^2

SP_2 = 3125000 mm^2

$SQ_1 = 3000000\ mm^2$

$SQ_2 = 4500000\ mm^2$

Et enfin

p_1 : *le prix de la plaque* P_1

p_2 : *le prix de la plaque* P_2

q_1 : *le prix de la plaque* Q_1

q_2 : *le prix de la plaque* Q_2

IV.1.3. Résolution

Notre démarche est de découper plaque par plaque en commençant par la plaque P_1

Soit k_1 , $k_2, \dots k_4$ les nombres de couvercles possibles correspondant respectivement $A_1, A_2, \dots A_4$

Ainsi on aura :

$$SP_1 = k_1 SA_1 + k_2 SA_2 + k_3 SA_3 + k_4 SA_4 + S_{P_1}$$

Avec S_{P_1} est la surface de la chute restante de la découpe

Il est facile de remarquer que k =$k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ est le nombre total de couvercle obtenus après la découpe.

Le modèle à optimiser est le suivant :

min S_{P_1} ce qui veut dire

min$(SP_1 - k_1SA_1 - k_2SA_2 - k_3SA_3 - k_4SA_4)$

en premier lieu, on remarque qu'on peut pas produire 4 couvercles de type A_4, car

4×568764=2275056 est supérieure strictement a 2000000. Comme le but est d'obtenir le maximum de couvercle on regarde la possibilité de produire 4 couvercles de typeA_3.

Dans ce cas on a : 4×SA_3=4×472384=1889536 $<$ 2000000 ce qui veut dire qu'on peut avoir 4 couvercles de type A_3.

Par contre la surface restante est : 2000000 - 4×472384= 110464 mm^2 ; elle est strictement inferieure à SA_1. Elle est donc la chute minimale.

En conclusion on a :

Le nombre maximal de couvercles obtenus de la plaque P_1 est 4, et ils sont tous de types A_3.

Et de la même manière on possède avec la plaque P_2. Par abus de langage on peut écrire

$$SP_2 = k_1SA_1 + k_2SA_2 + k_3SA_3 + k_4SA_4 + S_{P_2}$$

Avec S_{P_2} est la surface de la chute restante de la découpe. Ainsi on a

k =$k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ est le nombre total de couvercle obtenus après la découpe.

Le modèle à optimiser est le suivant :

min S_{P_2} ce qui veut dire

min$(SP_2 - k_1SA_1 - k_2SA_2 - k_3SA_3 - k_4SA_4)$

Le découpage permet de donner exactement 7 couvercles de type A_1 , car

7×411264=2878848 $<$ 3125000mm^2.

On remarque qu'on ne peut pas avoir 7 couvercles des autres types.

Ainsi S_{P2} =3125000-(7×411264)=246152 mm^2.

En conclusion :

Le nombre maximal de couvercles obtenus de la plaque P_2 est 7, et ils sont tous de typesA_1.

Enfin avec les deux plaques on obtient au maximum 11 couvercles dont 3 sont de types A_1 et 7 de typesA_3.

IV.2. Résolution du problème

Le problème précèdent est le plus simple à traiter car on utilise seulement deux plaques de même épaisseur et de dimensions différentes. Mais en réalité l'entreprise reçoit une commande bien précise de couvercles et donc elle doit acheter le nombre minimal de plaque pour satisfaire ses engagements. Pour mieux comprendre la situation on traite le problème modélisation suivant :

Le tableau suivant représente le programme de production mensuelle, mais il reste à déterminer le nombre minimal de plaques à utiliser.

Type	Quantité produite	Surface
50/30	10	$10 \times SA_1 = 4112640$
100/30	25	$25 \times SA_2 = 11328600$
160/30	125	$125 \times SA_3 = 59048000$
250/30	100	$100 \times SA_4 = 56876400$
400/30	60	$60 \times SB_1 = 43126560$
630/30	40	$40 \times SB_2 = 34496640$
800/30	15	$15 \times SB_3 = 14673540$
1250/30	5	$5 \times SB_4 = 5101680$

Pour l'épaisseur 4 mm :

On considère pour la plaque P_1 ; N est le nombre total de couvercles à produire , ainsi on aura :

$N \times SP_1 = 10 \times SA_1 + 25 \times SA_2 + 125 \times SA_3 + 100 \times SA_4 + CP_1$

$= 131365640 + CP_1$

Avec CP_1 la chute dérivée des plaques de type P_1

Or on a :

$131365640 = 65 \times 2 \times 10^6 + 1365640.$

Alors on a besoin de 65+1 = 66 plaques de P_1 avec une chute de 634360 mm^2.

De la même manière on aura pour la plaque P_2 :

$N \times SP_2 = 10 \times SA_1 + 25 \times SA_2 + 125 \times SA_3 + 100 \times SA_4 + CP_2$

Ainsi on a :

$131365640 = 42 \times 3125000 + 115640$

Alors on a besoin de 42+1 = 43 plaques de P_2 avec une chute de 3009360 mm^2.

Maintenant pour fixer le nombre de plaques à acheter on doit prendre en considération le paramètre « Prix ».

Si $66p_1 > 43p_2$, on opte pour 43 plaques P_2

Si $66p_1 > 43p_2$, on opte pour 66 plaques P_1

Si $66p_1 = 43p_2$, on a le choix

Revenons à l'épaisseur 6 mm :

Pour Q_1 :

$N \times SQ_1 = 60 \times SB_1 + 40 \times SB_2 + 15 \times SB_3 + 5 \times SB_4 + CQ_1$

$=97398420+ CQ_1$

Comme on sait que $SQ_1=1500 \times 2000=3000000 mm^2$

Or : $97398420=32 \times 3 \times 10^6+1398420$

Alors on a besoin de 32+1=33 plaques de Q_1 avec une chute de $1601580 mm^2$.

De la même manière pour la plaque Q_2 :

$SQ_2=1500\times3000=4500000mm^2$

$N\times SQ_2 = 60\times SB_1 + 40\times SB_2 + 15\times SB_3 + 5\times SB_4 + CQ_2$

Ainsi on a :

$97398420+CQ_2 = 21\times4500000+2898420$

On aura besoin donc de 22 plaques de Q_2 avec une chute de $1601580mm^2$.

Dans ce cas,

Si $33q_1 > 22q_2$, on opte pour 43 plaques Q_2

Si $33q_1 > 22q_2$, on opte pour 66 plaques Q_1

Si $33q_1 = 22q_2$, on a le choix

Le prix minimal de toutes les plaques à commander est solution du problème de modélisation suivant :

$$Min \begin{cases} 66p_1 + 33q_1 \\ 66p_1 + 33q_2 \\ 43p_2 + 33q_1 \\ 43p_2 + 33q_2 \end{cases} \qquad \ldots (1)$$

Qui est le cas particulier du problème suivant :

$$Min \begin{cases} a_1p_1 + b_1q_1 \\ a_2p_1 + b_2q_2 \\ a_3p_2 + b_3q_1 \\ a_4p_2 + b_4q_2 \end{cases}$$

Si maintenant le minimum est atteint pour (a_i, b_i) . Alors le nombre de plaques nécessaire est $a_i + b_i$.

Exemple

$p_1 = 3000\ DA,$

$p_2 = 5000\ DA,$

$q_1 = 7000\ DA,$

$q_2 = 9000\ DA$

Le problème (1) devient :

$$Min \begin{cases} 429000\ DA \\ 495000\ DA \\ 446000\ DA \\ 512000\ DA \end{cases} = 429000 \text{ DA}$$

Donc le nombre de plaques à commander pour satisfaire la cadence mensuelle établit dans le tableau précèdent est 66+33= 99 plaques dont 66 de type P_1 et 33 de type Q_1.

CONCLUSION

Le problème de découpe est un problème d'optimisation combinatoire avec de nombreuses applications dans divers domaines tels que l'industrie de l'acier, du vêtement et la conception des circuits intégrés...

Le domaine de découpe attire de nombreux chercheurs et praticiens. En fonction des applications, dans le domaine théorique beaucoup d’articles sont dédiés à ce domaine ou des heuristiques sont développées pour résoudre ce problème et améliorer l’obtention de solution aussi proche de l’optimal dans un temps acceptable.

L’objectif est surtout de maximiser le taux d’utilisation de la surface de travail pour moins de chutes.

Ce travail nous a permet de traiter un cas pratique, découvrant ainsi la méthodologie de résolution des problèmes dans le monde industriel, en passant par la modélisation de l’aspect pratique à la résolution mathématiques.

Vu que les problèmes abordés sont pratiquement difficile au sens de la complexité. La partie informatique reste importante pour finaliser la solution. Notre travail reste théorique, la programmation de la solution de ce problème est vivement souhaitée et pourrait faire l’objet de sujet de mémoire intéressant dans l’avenir.

bibliographie

[1] C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz, Combinatorial optimization algorithms and complexity. Prentice Hall, 1982.

[2] C. C. Ribeiro, N. Maculan {éds.), Applications of combinatorial optimization. Annals of Operations Research, 50, 1994.

[3] M. R. Garey, D. S. Johnson, Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness, W.H. Freeman and Company, New Tork, 1979.

[4] C. Papadimitriou, Computational Complexity. Addison Wesley. 1994.

[5] V. Pareto. Cours d'économie politique. Rouge, Lausanne, Suisse,1986.

[6] F. Edgeworth. Mathematical Physics. P. Keagan, Londres, Angleterre,1881.

[7] T. Collette, P. Siarry, Optimisation multiobjectif, Eyrolles, 2002.

[8] K. Deb, Multi-objective optimization using evolutionary algorithms, John Wiley, 2001.

[9] M. Ehrgott, Multicriteria optimization. In Springer, editor, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 491, 2000.

[10] M. Ehrgott, X. Gandibleux, A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization. OR Spektrum, 22, 425–460, 2000.

[11] K. Miettinen, Non linear multiobjective optimization, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[12] E. Ulungu, J. Teghem, Multi-objective combinatorial optimization : a survey. Journal of Multi- Criteria Decision Analysis, 3, 83 –104, 1994.

[13] A. Hammami, Modélisation technico-économique d'une chaîne logistique dans une entreprise réseau, PhD thesis, Université de Laval, Québec, Canada, 2003.

[14] L. V. Kantorovich, Mathematical methods of organizing and planing production. Management Sci., 6, 363 - 422, 1960.

[15] P. Gilmore, R. Gomory, A linear programming approach to the cutting stock problem. Operational Research, 9{6), 849 - 859, 1961.

[16] P. Gilmore, R. Gomory, Multistage cutting problems of two and more dimensions. Operational Research, 13, 94-119, 1965.

[17] P. Gilmore, R. Gomory, The theory and computation of knapsack functions. Operational Research, 14, 1045 -1074, 1966.

[18] C .G. Codd, Multiprogram sheduling. Comm. of the ACM, 3{6), 347-350, 1960.

[19] M. R. Garey, R.L. Graham, Bounds on multiprocessing scheduling with resource constraints. Siam, Jour. Comput., 4{2), 187-200, 1975.

[20] S.G.Hahn, On the optimal cutting of defective sheets. Operational Research, 16, 1100-1114, 1968.

[21] S. Maouche, C. K. Bounsaythip, G. Roussel, Optimisation du placement des formes irrégulières DOSSIER Techniques de l'Ingénieur : l'expertise technique et scientifique de référence s7212 , 2000.

[22] F. Clautiaux, Découpe et placement : du laboratoire aux applications industrielles. Bulletin de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, bulletin nº 30, 5-8, 2013

[23] G. Wäscher, H. Haussner, H. Schumann, An improved typology of cutting and packing problems. European Journal of Operational Research 83 {3), 1109-1130, 2007.

[25] H. Dyckhoff et U. Finke, Cutting and Packing in Production and Distribution; A Typology and Bibliography, ed. Physica-verlag, A Springer-Verlag, 1992.
[26]E. E. Bischoff, M. D. Marriott, A Comparative Evaluation of Heuristics for Container Loading , European Journal of Operational Research , 44{2), 267-276 , 1990.
[27] G. Moreau, Méthodes pour la résolution des problèmes d'optimisation de découpe, Thèse de I 'Université Claude Bernard Lyon, 1973.
[28] M. C. Costa, Problèmes de Découpes Linéaires- Formalisation et Solutions Economiques, Thèse à I 'Université Pierre et Marie CURIE, Paris 6, 1980.
[29] M. C. Costa, Une Etude Pratique de Découpes de Panneaux de Bois, Operations Research ,18{3), 211-219, 1984.
[30] C. Goulimis, Optimal Solutions for the Cutting Stock Problem, European Journal of Operational Research ,44{2), 197-208, 1990.
[31] M. C. Costa, Formalisation et Résolution des Problèmes de Découpes Linéaires, RAIRO, 16{1), 65-82, 1982.
[32] M. Babes , A. Quilliot , Une approche basée sur un concept logique et un formalisme mathématique, afin de résoudre un problème d'emploi du temps", RAIRO Automatique Productique Informatique Industrielle, 29 {1), 7-38, 1995.
[33] K. A. Dowsland, Some Experiments with simulated annealing Techniques for Packing Problems, European Journal of Operational Research, 68{4), 389-399, 1993.
[34] D. F. Kirkpatricks, V. A. Norton, Parallel Algorithm for Chip Placement by Simulated Annealing, IBM J. Res. Development, 31, 391-402, 1987.
[35] E.G. Coffman, J. Csirik, G. Galambos, S. Martello, D. Vigo, Bin Packing Approximation Algorithms : Survey and Classification. in Handbook of Combinatorial Optimization, 455-531, 2013.
[36]E.G. Coffman, K. So, M. Hofro, A.C. Tao, A stochastic model of bin-packing. Information and Control 44 {2), 105-115, 1980.
[37] J. M. Valério de Carvalho, LP models for bin packing and cutting stock problems. European Journal of Operational Research 141{2) , 253- 273, 2002.
[38]F. Clautiaux, C. Alves, J.M. Valério de Carvalho, A survey of dual-feasible functions for bin- packing problems. Annals of Operations Research , 179{1), 317-342, 2009.
[39] G. Shmonin, Parameterised Integer Programming, Integer Cones, and Related Problems. PhD. Thesis, Univ. of Paderborn, 2007.
[40] F. Clautiaux, A. Jouglet, J. El Hayek, A new lower bound for the non-oriented two-dimensional bin-packing problem. Operations Research Letters, 35{3), 365-373, 2007.
[41] A. Lodi, S. Martello, D. Vigo, Heuristic and Metaheuristic Approaches for a Class of Twodimensional Bin packing problems. INFORMS Journal on Computing 11, 345-357, 1999.
[42] A. Bortfeldt, A genetic algorithm for the twodimensional strip packing problem with rectangular pieces. European Journal of Operational Research 172{3), 814-837, 2006.
[43] F. Clautiaux, A. Jouglet, J. Carlier, A. Moukrim, A New Constraint Programming Approach for the Orthogonal Packing Problem. Computers and Operations Research, 35{3), 944-959, 2008.
[44] N. Beldiceanu, M. Carlsson, E. Poder, R. Sadek, C. Truchet. A Generic Geometrical Constraint Kernel in Space and Time for Handling Polymorphic k-Dimensional Objects, 180- 194, 2007.
[45] J. Martin, Un langage de modélisation à base de règles pour la programmation par contraintes. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2010.

[46] A. Caprara, J.C. Dìaz Dìaz, M. Dell'Amico, M. Iori, R. Rizzi, Friendly Bin Packing Instances without Integer Round-up Property. Technical report, DISMI, Università di Modena e Reggio Emilia, 2012.

[47] J. Gromicho, G. Post, J. van Wolffelaar. A Flexible Framework for Pallet and Container Loading. 9th ESICUP Meeting, La Laguna, Spain, 2012.

[48] P. T. Wang. Two algorithms for constrained two dimensional cutting stock problems. Operation Research 31, 573-586, 1983.

[49] C. L. Mumford-Valenzuela, J. Vick, P. T. Wang. Heuristics for large strip packing problems with guillotine patterns : an empirical study. in Metaheuristics, M. G. C. Resende, J. P. de Sousa, A.Viana editors, 501-522, 2004.

[50] F. Clautiaux, A. Jouglet, A. Moukrim, A new graph-theoretical model for the two-dimensional guillotine-cutting problems, 2011.

[51] F. Vanderbeck. A Nested, Decomposition Approach to a Three-Stage, Two-Dimensional Cutting-Stock Problem. Management Science 47{6) 864-879, 2001.