

Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU



Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Civil



THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Génie Civil

Présentée par

SAAD Mohammed

Sujet

**Influence du pourcentage d'acier sur le comportement
Post - fissuration du béton armé en traction**

Devant le jury composé de :

HANNACHI	Naceur Eddine	Professeur	UMMTO	Président
BOUAFIA	Youcef	Professeur	UMMTO	Rapporteur
BALI	Abderrahim	Professeur	ENP Alger	Examineur
TAHAKOURT	Abdelkader	Professeur	UAM Béjaia	Examineur

Soutenue le 03 / 04 / 2011

A tous ceux que j'ai aimés, appréciés et respectés, qui m'ont servi de repères et qui ne sont plus de ce monde.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Modélisation expérimentale et numérique des Matériaux et Structures en génie civil (LaMoMS) de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance au Professeur Y. BOUAFIA, Directeur de ce Laboratoire, qui a bien voulu proposer et diriger ce travail et surtout, pour son aide morale et effective. Sa contribution réelle a permis de mener à terme ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement le Professeur Patrick MULLER pour son accueil et sa disponibilité tout au long des deux stages que j'ai effectués, dans le cadre de ce travail, à l'Institut Jean Le Rond d'Alembert de l'Université Pierre et Marie CURIE - PARIS VI / C.N.R.S.

J'exprime ma gratitude envers Monsieur Bernard FOURÉ qui m'a fait profiter de ses remarques pertinentes pour améliorer ce travail.

Que le Professeur N. E. HANNACHI, trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus chaleureux, pour ses encouragements périodiques afin de finaliser cette thèse.

Je témoigne ma profonde reconnaissance à Monsieur M. S. KACHI, pour sa contribution et sa disponibilité.

Que tous les collègues enseignants et « non –enseignants » qui m'ont encouragé dans cette entreprise, je cite ; messieurs A. ADJRAD , D. ATLAOUI, S. DRIZI , A. HAMZA, L. DAHMANI, Y. KHODJA et particulièrement le Professeur Amar BOUAZOUNI , trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus chaleureux.

Mes remerciements s'adressent aussi aux membres du jury de m'avoir honoré en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne saurais oublier MA FAMILLE sans la quelle rien n'aurait été possible.

Notations principales

f_{ck} : résistance caractéristique en compression du béton, mesurée sur cylindre à 28 jours

f_{ctm} : valeur moyenne de la résistance en traction directe du béton

g : glissement entre l'acier et le béton ($g = u_c - u_s$)

g_1 : valeur du glissement correspondant au pic de la loi d'adhérence acier-béton du CEB

g_2 : valeur du glissement correspondant à la fin de la plastification de l'adhérence acier-béton

g_3 : valeur du glissement correspondant au début de l'adhérence résiduelle acier-béton

g_a : glissement résiduel (en général) quand l'espacement des fissures passe de ($\lambda > 2l_t$) à ($\lambda < 2l_t$) après redistribution des efforts

g_{aij} : glissement résiduel résultant du cas où la longueur d'introduction totale passe de l_{ti} juste avant fissuration à l_{ij} juste après fissuration

g_{li} : glissement cumulé sur la longueur l_i

g_{lti} : glissement cumulé sur la longueur d'introduction totale l_{ti}

l_0 : longueur de la zone perturbée de part et d'autre d'une fissure

l_{a1} : longueur d'introduction effective à la stabilisation des fissures (ou $\lambda < 2l_t$) quand $g(l_0) < g_1$

l_{a2} : longueur d'introduction à la stabilisation des fissures (ou $\lambda < 2l_t$) quand $g_1 < g(l_0) < g_2$

l_{a3} : longueur d'introduction à la stabilisation des fissures (ou $\lambda < 2l_t$) quand $g_2 < g(l_0) < g_3$

l_1 : longueur d'introduction effective quand le glissement g à la distance l_0 reste inférieur à g_1 (avec $\lambda > 2l_t$)

l_2 : longueur d'introduction comprise entre le glissement g_1 et le glissement à la distance l_0 quand celui-ci reste inférieur à g_2 (avec $\lambda > 2l_t$)

l_3 : longueur d'introduction comprise entre le glissement g_2 et le glissement à la distance l_0 quand celui-ci reste inférieur à g_3 (avec $\lambda > 2l_t$)

l_4 : longueur d'introduction comprise entre le glissement g_3 et le glissement à la distance l_0 quand celui-ci est supérieur à g_3 (avec $\lambda > 2l_t$)

l_{g1} : longueur d'introduction effective quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est égal à g_1

l_{g2} : longueur d'introduction comprise entre le glissement g_1 et le glissement à la distance l_0 quand celui-ci est égal à g_2

l_{g3} : longueur d'introduction comprise entre le glissement g_2 et le glissement à la distance l_0 quand celui-ci est égal à g_3

l_t : longueur d'introduction totale, en général

$l_{t1} : (= l_0 + l_1)$, longueur d'introduction totale quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est compris entre 0 et g_1 (avec $\lambda > 2l_t$)

$l_{t2} : (l_0 + l_{g1} + l_2)$, longueur d'introduction totale quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est compris entre g_1 et g_2 (avec $\lambda > 2l_t$)

$l_{t3} : (l_0 + l_{g1} + l_{g2} + l_3)$, longueur d'introduction totale quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est compris entre g_2 et g_3 (avec $\lambda > 2l_t$)

$l_{t4} : (l_0 + l_{g1} + l_{g2} + l_{g3} + l_4)$, longueur d'introduction totale quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est supérieur à g_3 (avec $\lambda > 2l_t$)

l_{ta} : longueur d'introduction total à la stabilisation des fissures (ou $\lambda < 2l_t$) en général

l_{ta1} : longueur d'introduction total à la stabilisation des fissures (ou $\lambda < 2l_t$) quand $g(l_0) < g_0$

${}^i l_{tj}$: longueur l_{tj} ci-dessus ($j = 1$ à 3) correspondant à la fissure i (indice supérieur gauche)

$l_{tgi} : (= l_0 + \sum_{j=1}^{j=i} l_{gj})$, longueur d'introduction totale quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est égal à g_i

l_{ir} : longueur (notée avec un indice r) relative à l'apparition de la première fissure correspondant à la longueur l_i .

l_{tir} : longueur d'introduction totale (avec un indice r) relative à l'apparition de la première fissure correspondant à la longueur l_{ti} .

n : coefficient d'équivalence $n = E_s/E_c$

p : périmètre utile total des armatures

u_c, u_s : respectivement allongement du béton et allongement de l'acier

w : ouverture de fissure

${}^i w$: ouverture de fissure à la fissure i

A_s, B : respectivement section d'acier tendu et section du tirant

E_c, E_s : respectivement module d'élasticité du béton et module d'élasticité de l'acier

L : longueur totale du tirant considéré

L_0 : somme des longueurs (l_0) des zones perturbées du tirant

L_h : longueur ou somme des longueurs des zones homogénéisées du tirant ($\varepsilon_s(x) = \varepsilon_c(x)$)

L_t : somme des longueurs d'introduction totales (l_t) du tirant

N_t : effort de traction extérieur dont la droite d'action passe par le centre de gravité de la section de béton et d'aciers,

N_r : effort de traction extérieur à l'apparition de la première fissure

α : exposant de la loi d'adhérence- glissement proposée par le code modèle CEB 1990

γ : nombre total de fissures principales dans le tirant
 ϵ_e : allongement relatif au seuil élastique de l'acier
 ϵ_m : allongement relatif moyen du tirant (ou allongement fictif de l'armature)
 ϵ_s : allongement relatif de l'acier
 ϵ_{sd} : allongement relatif de l'acier correspondant à deux fois la contrainte normale σ_{sy}
 ϵ_{sf} : allongement relatif de l'acier au droit de la fissure
 ϵ_{sfai} : allongement relatif fictif de l'acier au droit de la fissure correspondant à la longueur d'introduction totale l_{tai} .
 ϵ_{sfi} : allongement relatif de l'acier au droit de la fissure correspondant au glissement $g(l_0)=g_i$
 $^i\epsilon_{sf}$: allongement relatif de l'acier au droit de la fissure correspondant à la fissure i
 $\epsilon_{sm\bar{\lambda}_i}$: allongement relatif moyen de l'acier à la stabilisation des fissures correspondant à l'espacement moyen des fissures $\bar{\lambda}_i$
 $\epsilon_{smi} (\epsilon_{cmi})$: allongement relatif moyen de l'acier (du béton) sur la longueur d'introduction l_i
 $\epsilon_{smai} (\epsilon_{cmai})$: allongement relatif moyen de l'acier (du béton) sur la longueur d'introduction l_{ai}
 $\epsilon_{smti} (\epsilon_{cmti})$: allongement relatif moyen de l'acier (du béton) sur la longueur d'introduction totale l_{ti}
 $\epsilon_{smtai} (\epsilon_{cmtai})$: allongement relatif moyen de l'acier (du béton) sur la longueur d'introduction totale l_{tai}
 $\epsilon_{sr} (\epsilon_{cr})$: allongement relatif de l'acier (du béton) à l'apparition de la première fissure
 $\epsilon_s (\epsilon_c)$: allongement relatif de l'acier (du béton)
 $\lambda (\lambda_i)$: espacement entre deux fissures consécutives supérieur à deux fois la longueur d'introduction totale $l_t (l_{ti})$
 $\bar{\lambda}$: (= 1,7 l_{tir}) espacement moyen, en général, entre deux fissures consécutives à la stabilisation des fissures
 $\bar{\lambda}_i$: (= 1,7 l_{tir}) espacement moyen entre deux fissures consécutives à la stabilisation des fissures correspondant à l_{tir}
 ρ : proportion d'acier dans la section de béton
 σ_c : contrainte normale dans le béton
 σ_{cr} : résistance effective à la traction du béton
 σ_{ci} : résistance à la traction du béton correspondant à la fissure i
 σ_e : contrainte normale limite d'élasticité de l'acier
 σ_s : contrainte normale dans l'acier

σ_{sy} : contrainte normale de l'acier au droit de la fissure à la dernière fissure γ

σ_{sf} : contrainte normale de l'acier au droit de la fissure

σ_{sr} : contrainte normale de l'acier à l'apparition de la première fissure

τ : contrainte tangentielle d'adhérence entre l'acier et le béton

$\tau_1 (= \tau_2)$: contrainte tangentielle maximum d'adhérence

τ_3 : contrainte tangentielle d'adhérence résiduelle

$\Delta\varepsilon_m$ (ou $\Delta\varepsilon$) : différence entre l'allongement relatif de l'acier au droit de la fissure et l'allongement moyen du tirant

SOMMAIRE

	Page
INTRODUCTION GENERALE.....	01
 CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	
I.1. Introduction	07
I.2. Comportement du béton et du béton armé en traction	08
I.2.1. Comportement local du béton en traction (béton seul)	08
I.2.2. Lois de comportement uni axiales fictives du béton tendu.....	11
I.2.3. Diagramme fictif de l'acier - synthèse de quelques lois proposées dans la littérature	20
I.2.3.1. lois avec $\Delta\varepsilon_m$ constant.....	21
I.2.3.2. Lois avec variation linéaire ou multilinéaire de $\Delta\varepsilon$	23
I.2.3.3. loi avec variation de $\Delta\varepsilon$ en raison inverse de σ_s	25
I.2.3.4. Courbe discontinue de Gilbert et Warner	27
I.2.4. Conclusions.....	28
I.3. Adhérence acier – béton	30
I.3.1. Historique, essais normalisés	30
I.3.2. Mécanisme et mesure de l'adhérence en fonction du glissement entre l'acier et le béton.....	32
I.3.3. Facteurs qui influent sur l'adhérence acier - béton	35
I.3.4. Lois expérimentales et théoriques de $\tau - g$	40
I.3.5. Conclusions.....	48
I.4. Espacement des fissures – ouverture des fissures.....	49
I.4.1. Espacement des fissures.....	49
I.4.2. Ouverture des fissures	52
I.4.3. Conclusions.....	54
I.5. Codes et règlements européens sur la fissuration.....	55
I.5.1. Règles françaises BA 1960 [RBA61].....	55
I.5.2. Règles françaises CCBA 68 [RBA68].....	58
I.5.3. Règles françaises BAEL 80 [RBA80].....	59
I.5.4. Règles françaises BAEL 83 [RBA83].....	60
I.5.5. Règles françaises BAEL 91 [RBA91].....	60

I.5.6. Règles françaises BAEL 91- modificatif de 1999 [RBA99].....	61
I.5.7. Code modèle CEB-FIP 1978 [CEB78]	62
I.5.8. Code modèle CEB-FIP 1990 [CEB93].....	66
I.5.9. Eurocode 2.....	73
I.5.9.1. Eurocode 2 provisoire - partie 1-1 : ENV 1992-1-1 [EUR92].....	73
I.5.9.2. Eurocode 2 provisoire - partie 1-2 : ENV 1992-2 [EUR99].....	74
I.5.9.3. Eurocode 2 provisoire révisé – partie 1-1 : pr EN 1992-1-1 (draft juillet 2002).....	75
I.5.9.4. Eurocode 2 provisoire révisé – partie 1-2 : prEN 1992-2 (stage 34, octobre 2003).....	76
I.5.10. Conclusions sur l'examen de codes concernant la fissuration.....	77
I.6. Conclusions.....	79

CHAPITRE II. MODELISATION ET OUVERTURES DE FISSURES

II.1. Introduction.....	81
II.2. Relation contrainte d'adhérence τ - glissement g	82
II.2.1. Synthèse des résultats expérimentaux.....	82
II.2.2. Modélisation de la relation contrainte τ - glissement g (τ - g).....	82
II.3. Diagramme fictif de l'acier pour un « tirant » avec fissuration systématique.....	84
II.3.1. Définition du diagramme fictif de l'acier.....	84
II.3.2. Comportement type du tirant en béton armé sous traction axiale.....	84
II.4. Équation différentielle gouvernant le glissement $g(x)$	86
II.5. Cas 1 : $g(l_0) < g_1$ avant et après fissuration.....	88
II.5.1. Phase IIa et $\lambda > 2 l_t$	88
II.5.1.1. Domaine $l_1 \leq x \leq l_t$	89
II.5.1.2. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	93
II.5.1.3. Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale l_t	93
II.5.2. Phase IIb et $\lambda < 2 l_t$	94
II.5.2.1. Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_{a1})$	97
II.5.2.2. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	99
II.5.2.3. Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale l_t ($= l_{ta1}$).....	100
II.6. Cas particulier de $g(l_0) = g_1$ avec $\lambda > 2 l_t$	101
II.7. Cas 2 : $g_1 < g(l_0) < g_2$ avant fissuration.....	102

II.7.1. Phase IIa et $\lambda > 2 l_{t2}$ (avec $l_t = l_{t2} = l_0 + l_2 + l_{g1}$).....	103
II.7.1.1. Domaine $(l_0 + l_2) \leq x \leq l_{t2}$	103
II.7.1.2. Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_2)$	103
II.7.1.3. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	105
II.7.1.4. Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale l_t	106
II.7.2. Phase IIb et $\lambda < 2 (l_0 + l_2 + l_{g1})$	107
II.7.2.1. Phase IIb : 1 ^{er} cas : $l_{tg1} < \bar{\lambda}_2/2$	108
II.7.2.2. Phase IIb : 2 ^{eme} cas : $l_{tg1} > \bar{\lambda}_2/2$	110
II.8. Cas particulier de $g(l_0) = g_2$ avec $\lambda > 2 l_t$	114
II.9. Cas 3 : $g_2 < g(l_0) < g_3$ avant fissuration.....	114
II.9.1. Phase IIa et $\lambda > 2 (l_0 + l_3 + l_{g2} + l_{g1})$	115
II.9.1.1. Domaine $(l_{t3} - l_{g1}) \leq x \leq l_{t3}$	115
II.9.1.2. Domaine $(l_0 + l_3) \leq x \leq (l_{t3} - l_{g1})$	115
II.9.1.3. Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_3)$	116
II.9.1.4. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	118
II.9.1.5. Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale l_t	119
II.9.2. Phase IIb et $\lambda < 2 l_{t3}$	121
II.9.2.1. Phase IIb : 1 ^{er} cas : $l_{tg1} > \bar{\lambda}_3/2$	122
II.9.2.2. Phase IIb : 2 ^{eme} cas : $l_{tg1} < \bar{\lambda}_3/2 < l_{tg2}$	123
II.9.2.3. Phase IIb : 3 ^{eme} cas : $l_{tg2} > \bar{\lambda}_3/2$	125
II.10. Cas particulier de $g(l_0) = g_3$ avant fissuration.....	130
II.11. Conclusions.....	131

CHAPITRE III. METHODES DE CALCUL

III.1. Introduction.....	133
III.2. Méthode de détermination du diagramme fictif de l'acier : $\sigma_s = f(\varepsilon_m)$	134
III.2.1. Méthode générale.....	134
III.2.2. Diagramme fictif de l'acier en phase IIa.....	135
III.2.3. Diagramme fictif de l'acier en phase IIb	135
III.2.4. Les valeurs caractéristiques (g_1 , g_2 et g_3) de la loi $\tau(g)$ sont données	136
III.2.4.1. Détermination des grandeurs ε_{sf1} , ε_{sf2} et ε_{sf3}	136
III.2.4.2. Détermination du domaine d'étude.....	137

III.2.5. Les valeurs caractéristiques (g_1 , g_2 et g_3) de la loi $\tau(g)$ ne sont pas données	138
III.2.5.1. Cas où le glissement $g(l_0)$ est tel que : $g(l_0) \leq g_1$	139
III.2.5.2. Cas où le glissement $g(l_0)$ est tel que : $g_1 < g(l_0) \leq g_2$	140
III.2.5.3. Cas où le glissement $g(l_0)$ est tel que : $g_2 < g(l_0) \leq g_3$	141
III.2.5.4. Organigramme de détermination du glissement g_1 et du domaine d'étude..	143
III.2.6. Méthode de détermination des allongements relatifs moyens.....	145
III.2.6.1. Cas où $g(l_0) < g_1$ avant fissuration (relations du §.II.5).....	145
III.2.6.2. cas où $g_1 < g(l_0) < g_2$ avant fissuration (relations du §.II.7)	146
III.2.6.3. cas où $g_2 < g(l_0) < g_1$ avant fissuration (relations du §.II.9)	148
III.2.7. Proposition d'un modèle analytique.....	151
III.2.7.1. Cas où $2\sigma_{sy} < \sigma_e$	151
III.2.7.2. Cas où $\sigma_{sy} < \sigma_e \leq 2\sigma_{sy}$	152
III.2.7.3. Cas où $\sigma_{sr} < \sigma_e \leq \sigma_{sy}$	152
III.2.7.4. Cas où $\sigma_e \leq \sigma_{sr}$	152
III.3. Méthode de détermination des ouvertures de fissures	154
III.3.1. Ouverture des fissures en phase IIa.....	154
III.3.2. Ouverture des fissures en phase IIb.....	156
III.4. Organigramme général de calcul	157
III.5. Conclusions.....	158

CHAPITRE IV. VALIDATION DES MODELES DE CALCUL

IV.1. Confrontation à des essais sur tirants.....	161
IV.1.1. Essais d'Espion	164
IV.1.2. Essais de Rostasy	165
IV.1.3. Essais de Lorrain	165
IV.2. Confrontation à des essais sur des poutres : Essais de Fouré	167
IV.2.1. Confrontation : ouverture de fissures (présente étude) - essais Fouré.....	168
IV.2.2. Prise en compte du béton tendu (présente étude)- essais Fouré.....	169
IV.3. Conclusions.....	172

CONCLUSIONS GENERALES.....	175
-----------------------------------	------------

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	181
---	------------

**ANNEXE A : ETABLISSEMENT DES EQUATIONS GOUVERNANT LE
GLISSEMENT, L'ADHERENCE ACIER – BETON ET LES
CONTRAINTES DANS UN TIRANT EN BETON ARME**

A.1. Hypothèses et équation différentielle gouvernant le glissement g	195
A.1.1. Hypothèses.....	195
A.1.2. Equation différentielle gouvernant le glissement g.....	197
A.2. Détermination des expressions des différents paramètres sur l'intervalle [0 ; l]	200
A.2.1. Détermination des différents paramètres pour $g(l_0) < g_1$	200
A.2.1.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	200
A.2.1.2. Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_1)$	201
A.2.2. Détermination des différents paramètres pour $g(l_0) = g_1$	207
A.2.2.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	207
A.2.2.2. Domaine $l_0 \leq x \leq l_{tg1}$	207
A.2.3. Détermination des différents paramètres pour $(g_1 < g(l_0) < g_2)$	208
A.2.3.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	208
A.2.3.2. Domaine $l_0 \leq x \leq l_2$	208
A.2.4. Détermination des différents paramètres pour $g(l_0) = g_2$	212
A.2.4.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	212
A.2.4.2. Domaine $l_{g1} \leq x \leq l_{tg1}$ ($0 < X < l_{g2}$).....	213
A.2.5. Détermination des différents paramètres pour $(g_2 < g(l_0) < g_3)$	214
A.2.5.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	214
A.2.5.2. Domaine $l_2 \leq x \leq l_3$	214
A.2.6. Détermination des différents paramètres pour $g(l_0) = g_3$	219
A.2.6.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	220
A.2.6.2. Domaine $l_0 \leq x \leq l_{g3}$ ($0 \leq X \leq l_{g3}$).....	220
A.2.7. Détermination des différents paramètres pour $(g(l_0) > g_3)$	221
A.2.7.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$	221
A.2.7.2. Domaine $l_0 \leq x \leq l_{g4}$ ($0 \leq X \leq l_{g4}$).....	221

**ANNEXE B : ELABORATION D'UN LOGICIEL DE CALUL EN ELASTICITE
NON LINEAIRE « CMP »- APPLICATION A UNE SECTION
DROITE**

B.1. Introduction	225
B.2. Hypothèses fondamentales.....	225

B.3. Modélisation des sections.....	226
B.4. Lois de comportement des matériaux utilisées pour le programme «cmp»	228
B.4.1. Comportement du béton en compression	228
B.4.2. Comportement des aciers naturels (passifs) dans la zone comprimée	229
B.4.3. Comportement des aciers écrouis (passifs) dans la zone comprimée	230
B.4.4. Comportement des aciers actifs (selon règlement B.P.E.L.)	230
B.4.5. Comportement des aciers laminés (ou aciers de charpente).....	231
B.4.6. Diagramme fictif de l'acier naturel en traction	231
B.4.7. Diagramme fictif de l'acier écroui et de précontrainte en traction	231
B.4.8. Béton armé de fibres d'acier	232
B.5. Lissage des courbes pour les aciers dont la section est ponctuée.....	233
B.6. Calcul des efforts internes dans les sections «pleines».....	235
B.7. Efforts internes dans les sections « ponctuées ».....	239
B.8. Applications du programme « cmp ».....	239
B.8.1. Organigrammes et type de calcul.....	239
B.8.2. Exemples pratiques.....	242
B.8.2.1. Application à la poutre OH4 en béton précontraint.....	242
B.8.2.2. Application à une section circulaire en béton de fibres (pieu BF25).....	245
B.8.2.3. Confrontation à des essais sur des poutres en béton armé: Essais Fouré[FOU85].....	247
B.9. Conclusions	249

INTRODUCTION GENERALE

1. Problématique

Dans les calculs courants du béton armé, on néglige totalement le béton en traction, ce qui est généralement suffisant pour l'étude des sections (dimensionnement du ferrailage ou vérification des contraintes). Cependant, il existe des problèmes pratiques où il faut tenir compte :

- le calcul de l'ouverture des fissures à l'état limite de service (ELS), qui fait intervenir l'espacement des fissures et l'allongement moyen de l'armature entre deux fissures ;

- le calcul de la rigidité moyenne (associé à la déformation moyenne ε_m) pour l'estimation correcte des déplacements à l'ELS ou à l'ELU (état limite ultime) qui est importante dans la redistribution des efforts dans les structures hyperstatiques, dans les effets du second ordre en stabilité de forme et dans la réponse dynamique des structures (en particulier la réponse sismique – dans ce cas, il faut obligatoirement considérer le domaine plastique de l'acier, contrairement à l'ELS).

Le problème de la contribution du béton tendu entre les fissures dans un tirant en béton armé a fait l'objet de nombreuses études depuis longtemps. Elles font appel à deux types d'approches :

- l'intégration de l'équation différentielle qui exprime les conditions d'équilibre et de compatibilité des déformations d'un tronçon de tirant compris entre deux sections voisines, en utilisant une relation connue (en principe d'origine expérimentale) entre la contrainte d'adhérence locale acier/béton et le glissement correspondant, Balazs [BAL93], Chaussin [CHA98], Giuriani [GIU82], Yang et al [YAN88a]... ;

- la solution à partir d'une hypothèse globale de distribution de l'adhérence le long du tirant (uniforme ou linéaire...), sans faire intervenir explicitement le glissement, Brice [BRI64].

On peut distinguer aussi deux types de formulations de la solution du problème :

- l'addition des contributions de l'armature et du béton, avec une loi de comportement moyenne fictive du béton tendu $\sigma_c(\varepsilon_m)$, Bélarbi et al [BEL94], Fouré [FOU03], Grelat [GRE78], Quast [QUA83], Vecchio et al [VEC86]... Pour une valeur de déformation moyenne ε_m donnée, l'effort de traction s'écrit

$$N_t = A_s E_s \varepsilon_m + A_c \sigma_c(\varepsilon_m); \quad (1)$$

- l'utilisation d'une loi de comportement moyenne fictive de l'acier, Espion et al [ESP85], Kwak et al [KWA02], Saad [SAA04], Saad et al [SAA10], Yankelevsky et al [YAN08]..., tenant compte implicitement du béton tendu, sous la forme d'un terme correctif $\Delta\varepsilon_m$ de l'acier seul (« nu ») ; à N_t , ou $\sigma_s = N_t / A_s$ donc ε_s , donnés

$$\varepsilon_m = \varepsilon_s - \Delta\varepsilon_m(N_t). \quad (2)$$

Une autre partie du problème est de passer du tirant en traction simple à la poutre en flexion simple ou composée.

Dans la présente étude, la première approche est utilisée pour établir une loi de comportement moyenne fictive de l'acier. Les lois de comportement moyennes fictives de l'acier pendant la propagation des fissures utilisées jusque là s'expriment par une courbe ($\sigma_s - \varepsilon_m$) linéaire ou concave. En réalité, celle-ci peut avoir, selon le pourcentage d'acier et les caractéristiques des matériaux (acier et béton), une allure convexe.

Les modèles de calcul des ouvertures de fissures utilisés dans les codes et règlements sont en général valables dans la phase de stabilisation des fissures. Mais en réalité, un élément de structure peut se trouver dans la phase de propagation des fissures. Ces deux phases sont étudiées en considérant une variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant.

La loi d'adhérence - glissement $\tau(g)$ adoptée par le comité européen de béton (CEB-FIP, 1988), [CEB88], est définie en estimant la valeur maximum d'adhérence τ_1 , mais en fixant une valeur très variable du glissement correspondant g_1 . Cette valeur (dont le cas où elle n'est pas connue *a priori*) qui influence l'allure de la courbe $\tau(g)$, et donc les ouvertures de fissures, est déterminée ici en considérant l'espacement moyen des fissures, le pourcentage d'acier et les caractéristiques des matériaux utilisés (béton et acier).

2. Trois raisons de contrôler la fissuration

En général les raisons de contrôler la fissuration liée au largeur des ouvertures de fissures sont de trois sortes :

- Corrosion des barres d'armature

Les règlements, de part le monde, lient l'importance de la corrosion des barres d'armature à la fixation de valeurs limites des largeurs des ouvertures de fissures selon le mode d'exposition des éléments de structure.

Des travaux sur l'influence de la largeur des ouvertures de fissures, Padilla et Robles [PAD71], Schiessl [SCH76], Beeby [BEE83], ont montré que si celle-ci ne dépasse pas 0,5 mm, alors il n'existe guère de relation entre l'importance de la corrosion et l'ouverture des fissures.

Des essais d'exposition de structures fissurées ou non, Schiessl [SCH76], réalisés durant plusieurs années, ont prouvé que la vitesse de développement de la corrosion est quasi-indépendante de la largeur des fissures, et ceci quelles que soient les conditions d'exposition.

Dans un article de synthèse sur la corrosion des barres d'armature, Beeby [BEE83], des recherches ont montré que les largeurs des fissures près des barres étaient souvent beaucoup plus faibles que celles mesurées à la surface du béton.

-Étanchéité des éléments de structure

Le problème se pose de deux manières différentes à savoir ; d'une part, l'étanchéité du béton supposé non fissuré et, d'autre part, l'étanchéité du béton fissuré. Pour ce dernier cas, la question principale est la limite des ouvertures de fissures à ne pas dépasser (selon le liquide à retenir).

Il n'existe pas, *a priori*, de méthode unanimement reconnue pour déterminer ces limites. Le problème est, en effet, complexe et dépend de plusieurs paramètres (la nature du liquide, la pression hydrostatique, l'épaisseur de l'élément, la rugosité des lèvres de la fissure...).

En effet, pour calculer le débit des fuites éventuelles à travers la fissure, il faut bien connaître la largeur moyenne de la fissure. Seules, les fissures traversantes posent problème.

Quelques valeurs limites d'ouverture des fissures ont été proposées par Lohmeyer [LOH84] en fonction du gradient de pression (rapport entre la hauteur de l'eau et l'épaisseur du mur) pour assurer l'étanchéité à l'eau.

D'autres recherches à ce sujet, Clear [CLE85], Kupfer [KUP85], et des observations in situ, pfefferkorn [PFE74], Falkner [FAL83] [FAL84], ont montré que de fines fissures traversantes ne dépassant pas 0,1 à 0,2 mm de largeur, ne nuisaient pas l'étanchéité à l'eau des structures en béton armé.

La conclusion est que mêmes si certaines fissures, de largeur très faible (0,1 à 0,2 mm), laissent passer quelques petits filets d'eau après leur apparition, celles-ci s'auto -

colmatent après quelques heures ou quelques jours en raison de l'hydratation complémentaire du ciment. Aussi, le gonflement du béton en milieu humide diminue la largeur des fissures.

-Aspect des éléments de structure

L'apparition de fissures, surtout lorsque leur largeur est très importante, dans les éléments de structure inquiète les propriétaires d'ouvrages, les usagers et le public en général. L'aspect d'un élément de structure dépend de plusieurs facteurs (surface lisse ou rugueuse, conditions d'éclairage, éloignement vis-à-vis de l'observateur, ...).

Les recherches effectuées sur le facteur de perception des défauts par un observateur, Padilla [PAD71], et les statistiques effectuées sur les réclamations des usagers dans les bâtiments, montrent que les fissures ayant une largeur ne dépassant pas 0,3 mm n'inquiètent guère. Le public devient sensible lorsque les largeurs des fissures sont supérieures à 0,5 mm.

Il paraît, Harrison [HAR81], Kupfer [KUP85], que du point de vue « aspect », les mesures doivent être effectuées selon ; un certain niveau d'exigence, la destination de l'ouvrage et l'usage de l'élément considéré. Il semblerait raisonnable de faire coïncider à une acuité visuelle normale, le niveau d'exigence le plus sévère.

Il faut toutefois ajouter, que même dans le cas de petites largeurs de fissures, l'aspect dans le temps peut être néfaste à cause des dépôts de salissures dus au léger suintement d'eau ou d'humidité.

3. Contribution de la présente étude

Au chapitre I, nous présentons quelques aspects de l'état actuel des connaissances sur le comportement en traction du matériau « béton seul » ou du matériau « béton armé » et certains résultats sur le contrôle de la fissuration des structures en béton armé pour leur aptitude au service. L'évolution, à travers le temps, des normes françaises et européennes sur la fissuration est rapportée dans ce même chapitre avec quelques commentaires et suggestions.

En tenant compte de la loi adhérence acier – béton adoptée par le comité européen du béton [CEB88], du pourcentage d'acier et des caractéristiques des matériaux, au chapitre II, on établit les relations gouvernant les différents paramètres (glissement, adhérence, allongement relatif de l'acier, allongement relatif du béton) intervenant dans un « tirant » en béton armé. Selon les caractéristiques de cette loi adhérence –glissement, tous les cas

possibles, avant et après fissuration, sont étudiés et les expressions des allongements relatifs moyens des matériaux (acier et béton) y sont présentées. Le développement détaillé de ces formules est montré en annexe A.

On présente dans le chapitre III, en utilisant les résultats théoriques établis au chapitre II, des méthodes de détermination du diagramme fictif de l'acier et l'estimation des ouvertures de fissure dans les « tirants » en béton armé. Ce modèle est établi dans le cadre de l'approche globale et en considérant les lois de comportement moyennes fictives de l'acier (en traction).

Les relations proposées dans cette présente étude ont été confrontées à des résultats obtenus sur des tirants armés avec différents pourcentages d'acier et différentes caractéristiques du mélange acier- béton (chapitre IV). Ces relations ont été introduites dans un logiciel de calcul non linéaire des sections en améliorant la modélisation. Ce logiciel, dont les grandes lignes sont expliquées en annexe B, calcule numériquement les intégrales et alors, on peut dans ce cas utiliser des lois σ - ε réelles des différents matériaux. Le comportement en flexion simple a été aussi confronté à des résultats expérimentaux. En effet, les poutres soumises à une flexion simple, ayant une partie tendue importante, sont plus sensibles à la loi adoptée pour le béton tendu, comparées à celles soumises à une flexion composée. Les différentes lois utilisées pour la simulation ainsi que les diagrammes fictifs des aciers en traction déduits du modèle de cette présente étude y sont présentés.

Enfin, une conclusion générale termine ce travail où nous présentons les différentes remarques et suggestions pour une suite future.

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques aspects de l'état actuel des connaissances sur le comportement en traction du matériau « béton seul » ou du matériau « béton armé ». Cette recherche bibliographique n'est pas exhaustive, nous avons rapporté certains essais et résultats, établis par des chercheurs, qui ont influencé notre étude.

Pour le béton tendu, les diagrammes ne sont pas les mêmes selon qu'on examine les sections en terme de déformations locales qui sont obtenues avec des essais sur des éprouvettes en traction uni axiale ou selon des déformations moyennes quand le béton est associé avec des armatures (diagramme fictif du béton).

Nous verrons les modèles pour la vérification en service des structures que sont les diagrammes fictifs de l'acier en traction. La considération de l'acier « fictif » dans la modélisation est aussi appelée « tension stiffening ».

Nous relatons des essais normalisés de la RILEM pour mesurer la transmission des efforts de la barre d'acier au béton. Certaines lois théoriques et expérimentales de cette adhérence acier – béton sont présentées.

Nous rapportons certains résultats sur le contrôle de la fissuration des structures en béton armé pour leur aptitude au service. Des relations donnant les prévisions des espacements et des ouvertures des fissures expérimentales et théoriques sont exposées. L'ouverture des fissures revêt une certaine importance vis-à-vis de la durabilité et de l'aspect des ouvrages.

A la fin de ce chapitre, nous présentons l'état de l'évolution, à travers le temps, des normes françaises et européennes sur la fissuration. Quelques commentaires de Fouré [FOU05] sont inclus, et nous ajoutons quelques remarques et suggestions.

Le travail développé au chapitre II est la contribution de ce mémoire à certaines questions soulevées ci-dessus.

I.2. Comportement du béton et du béton armé en traction

I.2.1. Comportement local du béton en traction (Béton seul)

Les essais effectués par différents chercheurs pour déterminer la résistance à la traction du béton, ont montré une certaine dispersion des résultats. Ceci est dû au comportement relatif fragile du matériau béton et aux modes d'essais.

Afin d'apprécier, lors d'un essai, le comportement d'un élément soumis à une traction directe, il est nécessaire de réaliser l'essai avec asservissement (en déformations contrôlées). Avec l'évolution de la technologie (nouvelles machines plus performantes), on ne se contente plus de mesure simple de résistance puisque ces appareils nous permettent de déterminer les courbes contrainte - déformation (σ - ϵ) dans le domaine linéaire jusqu'à atteinte du maximum et même au-delà du pic de contrainte. Ce qui permet de mettre en évidence le comportement post-pic et la ductilité relative du matériau, jusqu'à rupture totale.

L'exemple, présenté figure I.1, est le comportement type du béton en traction. Les diagrammes obtenus lors des essais, réalisés par Peterson [PET81], montrent l'existence de deux phases très distinctes :

- une branche ascendante (élastique linéaire) rectiligne jusqu'au maximum de résistance,
- au delà du pic, la courbe décroît progressivement jusqu'à s'annuler pour un déplacement nettement supérieur à celui du pic, d'où un comportement assez ductile.

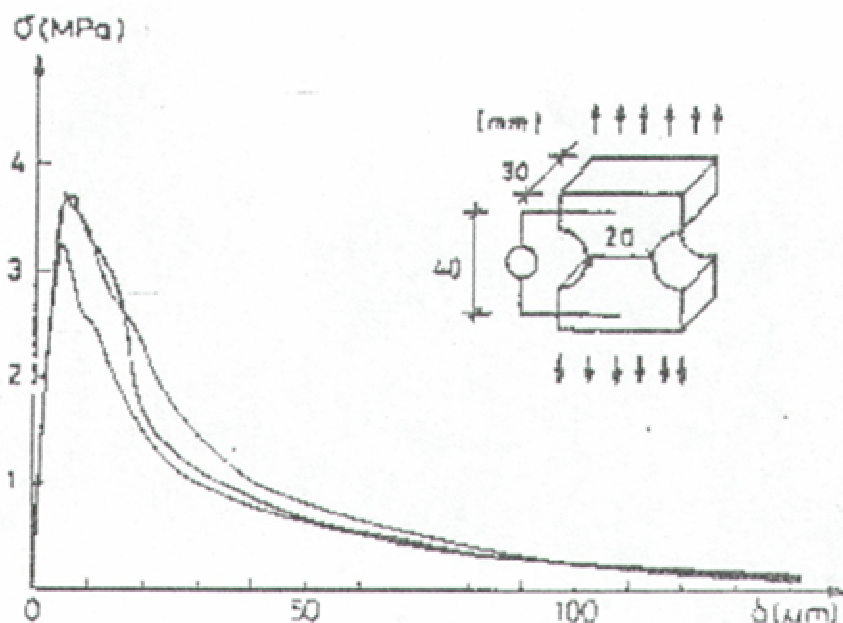


Fig. I.1. Courbes expérimentales du béton en traction selon Peterson [PET81]

D'autres essais du même type (figure I.2) ont été réalisés par Hughes et Chapman [HUG66].

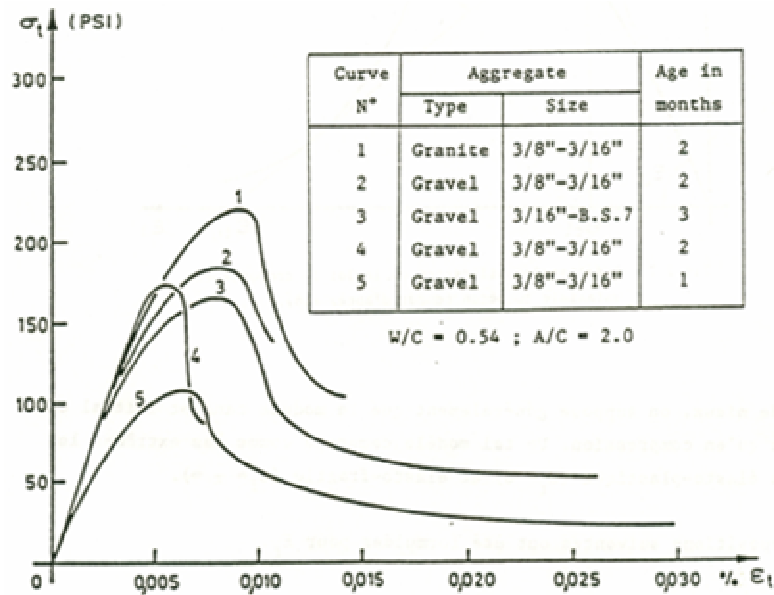


Fig. I.2. Courbes de traction d'éprouvettes en béton selon Hughes et Chapman [HUG66]

D'autres auteurs, Evans et Marathe [EVA68] et Heilmann et al [HEI69], ont réalisés des essais de ce genre mais ne couvrent pas tous les paramètres significatifs. Wastiels [WAS80] a critiqué ces travaux en s'intéressant aux critères de ruptures et aux lois de comportement du béton sous sollicitation instantanée.

La modélisation de ce genre de courbe est très complexe. Coenen [COE78] a proposé une loi bilinéaire simple figure I.3.

Ce genre de modèle peut comprendre deux cas extrêmes ; les modèles élasto - plastiques ($E_f = 0$) et les modèles élasto - fragiles ($E_f = -\infty$). Coenen propose la relation I.1a.

$$\begin{cases} \sigma_t = E_0 \varepsilon_t & \text{si } \varepsilon_t \leq \varepsilon_{ct} \\ \sigma_t = f_{ct} + E_f (\varepsilon_t - \varepsilon_{ct}) & \text{si } \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tu} \end{cases} \quad (\text{I.1a})$$

$$\text{Avec : } -0,1 E_0 \leq E_f \leq -0,3 E_0$$

Bazant et Oh [BAZ84], avec la même loi bilinéaire, définissent E_f dans la relation I.1b en fonction de E_0 et f_{ct} (avec unités en psi).

$$E_f = -\frac{70 E_0}{57 + f_{ct}}, \quad (\text{I.1b})$$

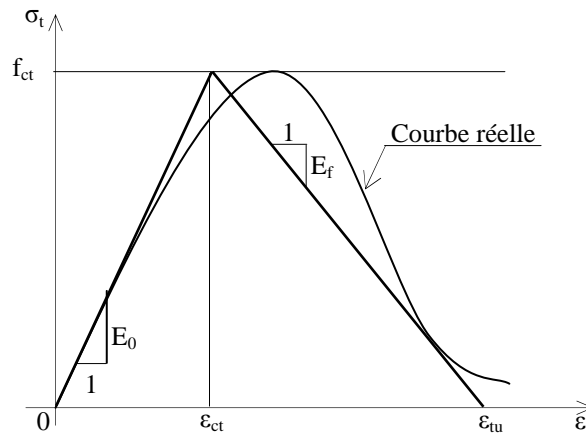


Fig. I.3. Loi bilinéaire de comportement uni axial du béton tendu ; d'après Coenen [COE78]

Une loi théorique (Relation I.2) a été développée par Mazars [MAZ84]. Elle présente l'avantage d'ajuster la courbe décroissante avec deux paramètres A_t et B_t (figure I.4).

$$\sigma_t = E_{c0} \left\{ \varepsilon_{ct} (1 - A_t) + \frac{A_t \varepsilon_m}{e^{B_t (\varepsilon_m - \varepsilon_{ct})}} \right\} \quad \text{si } \varepsilon_m \geq \varepsilon_{ct} \quad (I.2)$$

avec $0,7 < A_t < 1$, en moyenne ; $A_t = 0,8$
 $10^4 < B_t < 10^5$, en moyenne ; $B_t = 2 \cdot 10^4$

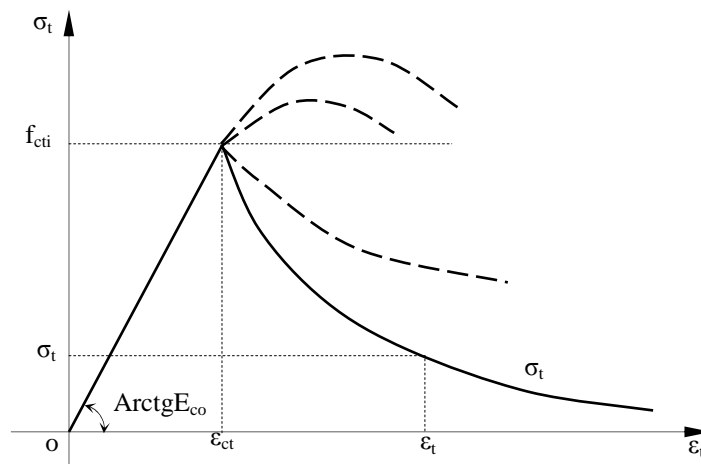


Fig. I.4. Comportement local du béton en traction selon Mazars [MAZ84]

Une autre approche est celle de Zhen-Hai et Xiu-Qin [ZHE87]. En prenant certaines précautions (la rigidité de la machine d'essai, centrage des éprouvettes), les auteurs présentent une loi théorique (relation I.3) décrivant la courbe ascendante et la courbe décroissante avec

un comportement ductile non négligeable du béton tendu (Figure I.5). Ils proposent les relations suivantes.

$$\begin{cases} y = 1,2x - 0,2x^6 & \text{si } x \leq 1, \\ y = \frac{x}{\alpha(x-1)^\beta + x} & \text{si } x \geq 1, \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

avec : $\beta = 1,7$; $y = \frac{\sigma}{f_t}$; $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}$ et $\alpha = 0,312 f_t^2$.

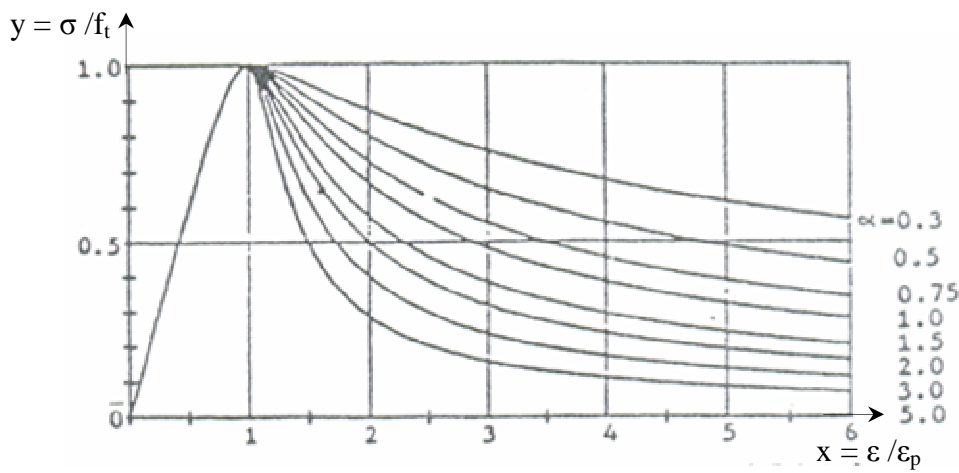


Fig. I.5. Relation $\frac{\sigma}{f_t} = f\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)$ de Zhen-Hai et Xiu-Qin [ZHE87]

I.2.2. Lois de comportement uni axiales fictives du béton tendu

Pour approcher correctement le comportement d'une structure (surtout pour les courbes charge - flèche), les lois définies au paragraphe I.2 ne sont pas adéquates.

En effet, plusieurs facteurs rentrent en jeu quand le béton est mélangé à des aciers, à savoir ;

- le diamètre des armatures et leur disposition,
- la fissuration,
- le mode de mise en charge,
- et l'interaction acier- béton, etc....

L'ensemble de ces phénomènes physiques et la manière de les modéliser afin d'exprimer la participation du béton fissuré à la rigidité de la structure est appelé «tension stiffening ».

Pour rendre compte d'une manière plus détaillée du « tension stiffening », Aldsted [ALD75] a été parmi les premiers à faire des études par éléments fini, en modélisant la contrainte d'adhérence et le glissement entre l'acier et le béton pour les introduire dans des éléments de poutres. Mang [MAN81] et Flögl [FLÖ81] ont utilisés ces notions pour les cas de structures plans ou spatiales.

Au début des années 1980, de nombreux essais dans ce domaine ont été entrepris pour approfondir les connaissances sur le béton armé du point de vue mécanique de détail, on peut citer les travaux de Walraven et Reinhardt [WAL81], Groot et Kusters [GRO81] et Rots et al [ROT85].

Le «tension stiffening» est un moyen de calcul pour prévoir et résoudre les problèmes de convergence comme il est signalé dans les travaux de Coenen [CON78] et Wastiels [WAS80].

La première loi fictive uni axiale du béton a été attribuée à Scanlon, [SCA71], [SCA72], [SCA74] avec décroissance (en dent de scie) discontinue après fissuration (Figure I.6).

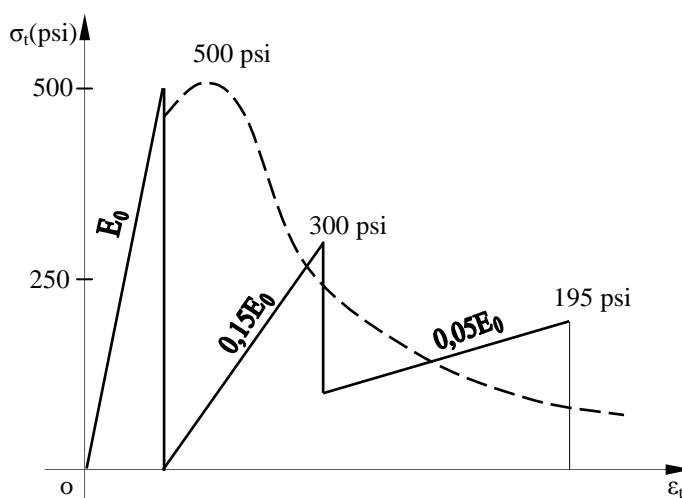


Fig. I.6. Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après Scanlon [SCA71] [SCA72] [SCA74]

Cette loi a été reprise par Gilbert et Warner [GIL77], [GIL78] avec beaucoup plus de « dents » après fissuration (Figure I.7). Il est clair que ces chutes de rigidité sont dues aux apparitions successives des fissures.

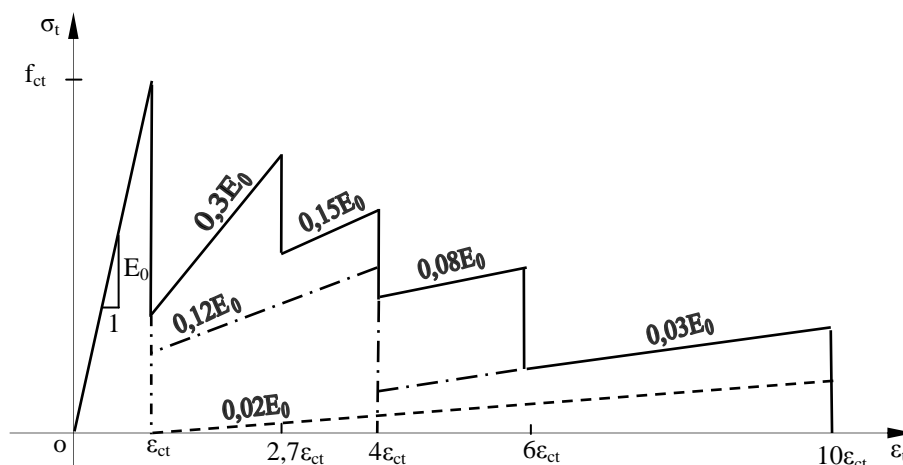


Fig. I.7. Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après Gilbert et Warner [GIL77], [GIL78]

Lin [LIN75] est l'un des premiers auteurs à proposer une réponse décroissante continue juste après l'apparition de la fissuration (Figure I.8).

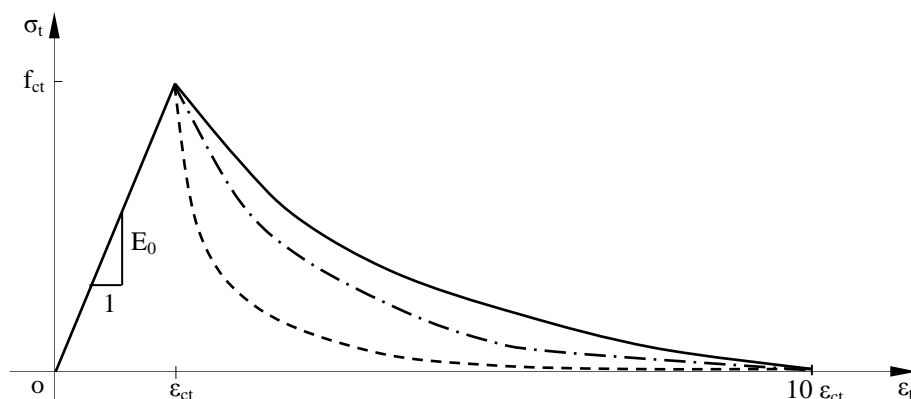


Fig. I.8. Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après Lin [LIN75]

La branche décroissante juste après fissuration proposée par Lin n'est pas très explicite. Par contre une décroissance linéaire (voir figure I.3 mais ici pour le béton fictif) a été proposée et utilisée par Van Greunen [VAN79], Van Greunen et Scordelis [VAN86], Hinton et al [HIN87] (avec $10\epsilon_{ct} \leq \epsilon_{tu} \leq 25\epsilon_{ct}$) et Razaqpur et Ghali [RAZ82] (avec $\epsilon_{tu} \geq 10\epsilon_{ct}$).

La chute instantanée de la rigidité, juste après la fissuration a été présentée par Bergan et Holland [BER79] et l'ont attribué à Kulicki et Kostem [KUL75].

Cette loi présentée à la figure I.9 avec $\epsilon'_{ct} = 0,55 \epsilon_{ct}$ et $\epsilon_{tu} = 700 \mu s$ a été aussi utilisée par Chow [CHO84-1], [CHO84-2.].

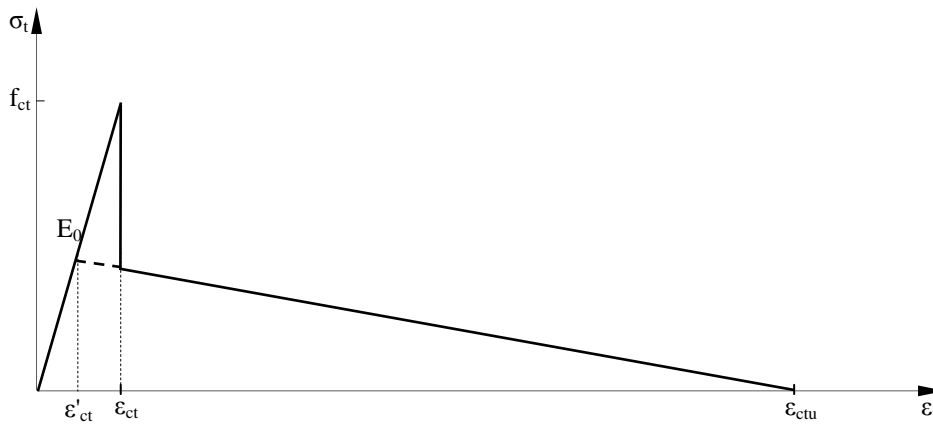


Fig. I.9. Loi de comportement fictive pour le béton tendu selon Bergan et Holland [BER79]

Gilbert et Warner [GIL77], [GIL78] ont eux aussi établi et généralisé cette proposition, avec d'autres valeurs après l'apparition des fissures (Figure I.10).

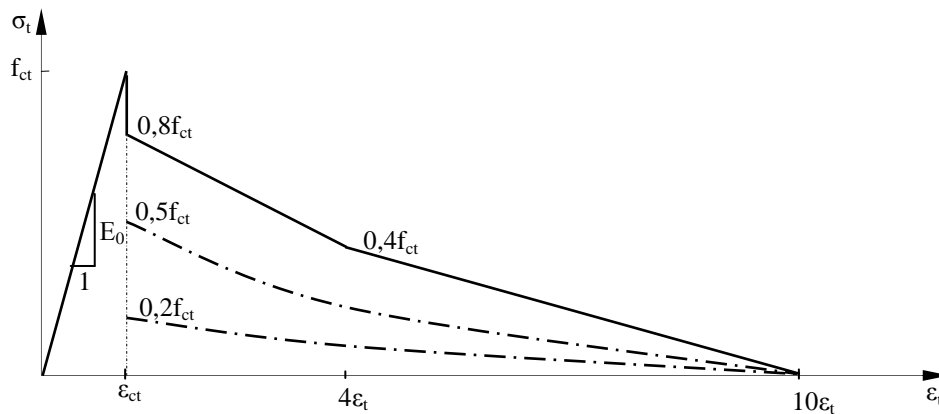


Fig. I.10. Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après Gilbert et Warner, [GIL77],[GIL78].

La formulation de Grelat [GRE78] tient compte d'une répartition linéaire des contraintes dont le diagramme est donné à la figure I.11. La contribution du béton s'annule à la plastification des aciers. Les relations sont données par (I.4).

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_t &= E_{c0} \epsilon_i && \text{si } \epsilon_i < \epsilon_{ct} \\
 \sigma_t &= f_{ctj} \frac{(\epsilon_i - \epsilon_y)^2}{(\epsilon_y - \epsilon_{ct})^2} && \text{si } \epsilon_{ct} \leq \epsilon_i \leq \epsilon_y \\
 \sigma_t &= 0 && \text{si } \epsilon_i \geq \epsilon_y
 \end{aligned} \right\} \quad (I.4)$$

E_{c0} : module d'élasticité longitudinale du béton,

f_{ctj} : résistance du béton à la traction,

ε_{ct} : déformation de traction correspondant à f_{ctj} ,

ε_y : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

ε_i : déformation de la fibre de béton la plus tendue.

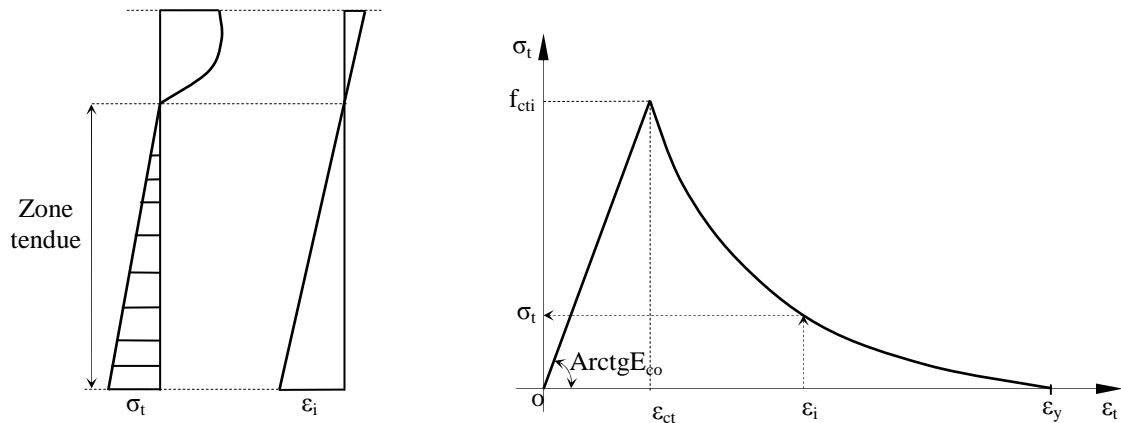


Fig. I.11. Le béton tendu selon Grelat [GRE78]

La proposition de Quast [QAU80], [QAU81] définit directement les contraintes fictives du béton (figure I.12). Il propose l'expression I.5 avec la définition de σ_t (relation I.5a).

Quast a surtout utilisé cette loi pour prédire des lois moment -courbure expérimentales [QAU80]. On remarque qu'on peut avoir une loi linéaire ($n=1$), une loi parabolique ($n=2$) et jusqu'à une loi rigide ($n=\text{infini}$).

Espion [ESP86] a repris la même relation I.5 mais en modifiant l'expression de σ_t (relation I.5b), pour tenir compte implicitement du pourcentage d'acier.

$$\frac{\sigma}{\sigma_t} = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a}\right)^n \quad (\text{I.5})$$

où

$$\text{selon Quast : } \sigma_t = f_{ctj} \left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_s}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right), \quad (\text{I.5a})$$

- ε_s : déformation de l'acier,
 ε_y : limite d'élasticité de l'acier,
 n : coefficient de forme de la courbe (pour $n=2$: diagramme parabole – rectangle),

$$\text{selon Espion } \sigma_t = f_{ctj} \left(\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_s}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right)^m \quad (\text{I.5b})$$

Avec :

$1 < m < 2$: dépend du pourcentage d'acier.

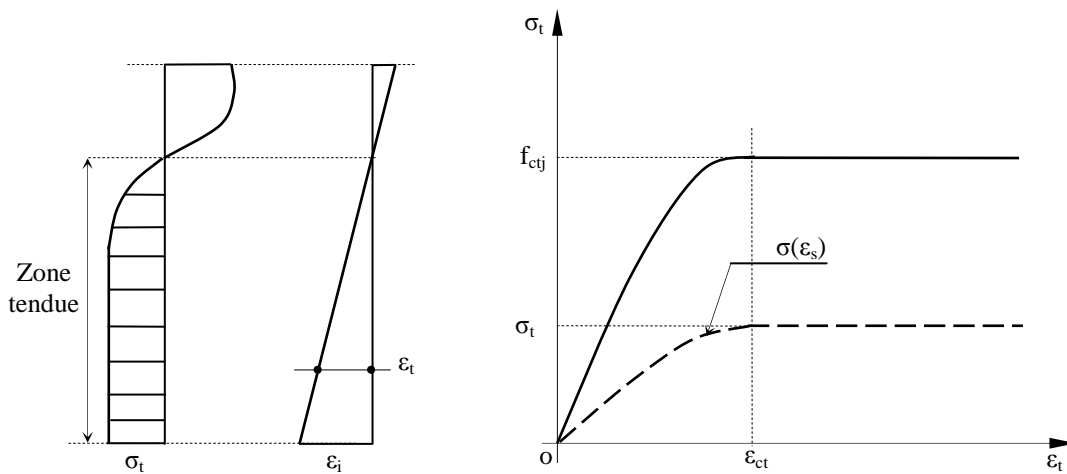


Fig. I.12. Le béton tendu selon Quast [QUA80], [QUA81] et Espion [ESP 86],

Aucune des deux propositions ne tient compte explicitement du pourcentage d'acier, de la qualité d'adhérence des armatures. Ces relations paraissent insuffisantes pour des éléments faiblement armés.

Pour le domaine plastique, ces deux lois supposent qu'il n'y a aucune contribution du béton tendu.

Des réponses décroissantes juste après le début de la fissuration, comme le modèle de Lin [LIN75], mais tenant compte de différents paramètres (diamètre de la barre, espacement des barres, pourcentage d'acier ...), sont proposées par plusieurs auteurs. Nous citons quelques références ci-dessous.

La relation I.6, proposée d'abord par Careira et Chu [CAR86] pour le béton armé en traction suite à leurs travaux sur le béton en compression [CAR85], a été reprise par Prakhya et Morley [PRA90] afin de donner des valeurs au coefficient β_t .

$$\sigma_{bt} = \frac{\beta_t \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bf}}}{\beta_t - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bf}}\right)^{\beta_t}} f_t, \quad (\text{I.6})$$

$$\text{avec : } \varepsilon_{bf} = \frac{f_t}{E_{b0}}.$$

Dans cette relation β_t peut varier entre 1 (parfaitement plastique) et l'infini (parfaitement fragile). Pour le béton armé, β_t est fonction du diamètre des barres, de leur espacement et de leur pourcentage dans ce mélange. En utilisant les résultats des essais de Williams [WIL86], ces derniers auteurs suggèrent un paramètre dépendant de la surface d'adhérence des barres par unité de volume du béton qu'on peut ramener à la section droite. Toutefois, les auteurs ne donnent pas une expression générale de β_t .

Plusieurs auteurs, juste après fissuration du béton, ont utilisé le type de relation I.7.

$$\sigma_{bt} = \frac{a f_t}{1 + \sqrt{b \varepsilon}}, \quad (\text{I.7})$$

avec a et b paramètres.

En réalisant des essais de traction sur des panneaux en béton armés de treillis soudé, Vecchio et Collins [VEC86] ont déduit une loi de comportement moyenne du béton en traction ; relation I.7a (a=1 et b=200).

$$\sigma_{bt} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{200 \varepsilon}} \quad (\text{I.7a})$$

Collins et Mitchell [COL87], suite aux essais réalisés par Kirschner et Collins [KIR86], ont établi la relation I.7b avec a = 1 et b = 500.

$$\sigma_{bt} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{500 \varepsilon}} \quad (\text{I.7b})$$

Abrishami et Mitchell [ABR96] ont repris le même type de relation I.7 avec $b=500$, mais en introduisant d'abord deux paramètres α_1 et α_2 ($a = \alpha_1\alpha_2$) dépendant successivement du type d'armature et du type de chargement. Le troisième paramètre α_3 ($a=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$) a été ensuite introduit pour tenir compte des fissures de fendage longitudinal ; relation I.7c

$$\sigma_{bt} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 f_t}{1 + \sqrt{500 \varepsilon}} \quad (\text{I.7c})$$

avec α_1 : paramètre d'adhérence ;

$\alpha_1 = 1$ pour les barres haute adhérence ;

$\alpha_1 = 0,7$ pour les barres lisses et les torons adhérents,

α_2 : paramètre de chargement ;

$\alpha_2 = 1$ pour un chargement monotone rapide ;

$\alpha_2 = 0,7$ pour un chargement soutenu ou répété,

α_3 : paramètre tenant compte des fissures de fendage longitudinal ;

lorsque l'enrobage e est insuffisant ;

$\alpha_3 = 0,8 \frac{e}{\Phi} - 1$, limité à $0 \leq \alpha_3 \leq 1$.

L'effet du « tension stiffening » est annulé pour $e \leq 1,25 \Phi$, alors que les essais de Williams [WIL86] montrent que malgré les fissures de fendage pour des enrobages de $1,5\Phi$ ou $1,2\Phi$, σ_{bt} ne s'annule pas.

Walker et al [WAL97] ont montrés, par des essais, que l'adhérence ultime est constante pour un enrobage supérieur à 3Φ (exemple pour une barre de 16mm figure I.13 où f_{bu} est l'adhérence ultime et f_{cum} représente la résistance à la compression du béton mesurée sur cube.).

Fouré [FOU02], en considérant que le risque de fendage n'existe pas pour un enrobage supérieur à 3Φ , propose la relation I.7d pour la valeur de α_3 , valable pour les barres à haute adhérence (pour tenir compte du risque de fendage de barre à barre).

$$\alpha_3 = 0,4 + 0,2 \frac{e_{\min}}{\Phi} \leq 1 \quad (\text{I.7d})$$

avec : $e_{\min} = \min \left\{ e ; \frac{d_b}{2} \right\}$ et d_b distance de barre à barre (entre nus des barres).

Proposition de Fouré [FOU02], selon relation I.7d

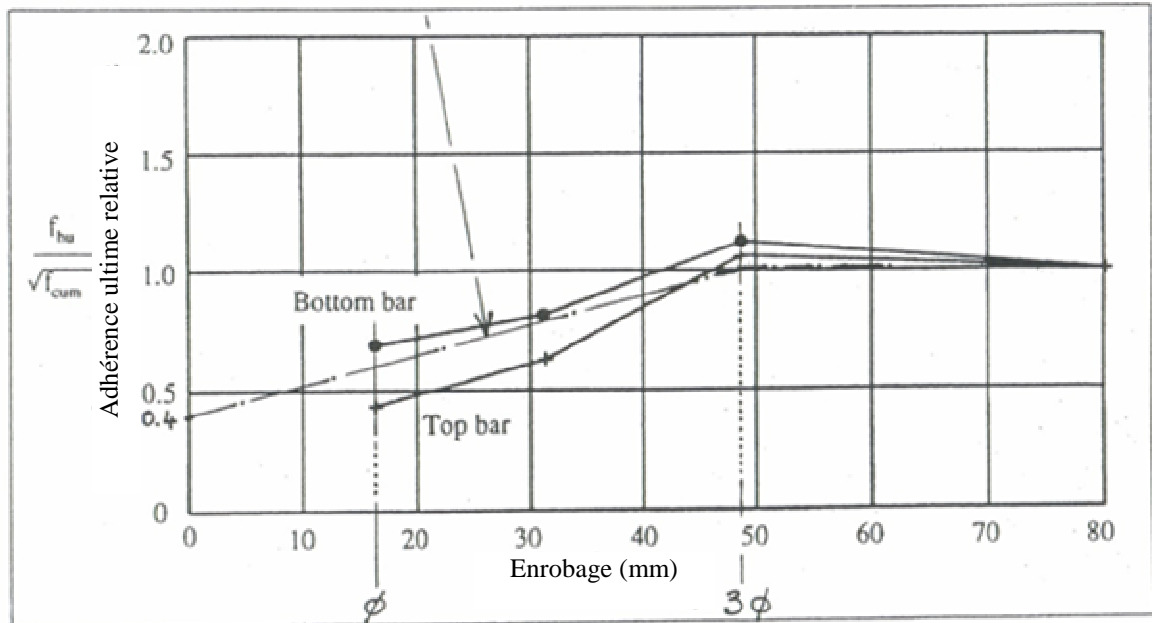


Fig. I.13. Bond stress ratio-cover for 16-mm diameter reinforcement, $f_{cu} = 25 \text{ N/mm}^2$, bond length = 15d and zero lateral pressure (d'après Walker et al [WAL97])

Bentz [BEN05] en comparant les différentes formules du type I.7 ($\sigma_{bt} = \frac{a f_t}{1 + \sqrt{b \varepsilon}}$)

des auteurs précédents selon les éléments testés a conclu, avec $a = 1$, à l'introduction d'un coefficient M ($b = 3,6 M$) dépendant de l'adhérence des barres ; relation I.7e.

$$\sigma_{bt} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{3,6 M \varepsilon}}, \quad (\text{I.7e})$$

avec $M = \frac{A_c}{\sum \pi \Phi}$ où A_c est la section du béton et $(\sum \pi \Phi)$ le périmètre des différentes barres.

Avec des essais sur des panneaux armés en deux nappes d'armatures à hautes adhérences, Belarbi et Hsu [BEL94], établissent et confirment l'expression empirique I.8 de Tamai et al [TAM87].

$$\sigma_{bt} = \left(\frac{f_t / E_{b0}}{\varepsilon} \right)^{0,4} f_t \quad (\text{I.8})$$

Fields et Bischoff [FIE04] ont réalisé des essais sur des tirants de section 250x250mm et mesuré les déformations sur une longueur de 2 m. Ce sont 7 tirants composés de 3 types de béton, de résistance à la compression de 41,2, 54,9 et 81 MPa. Quatre tirants sont armés de 4 barres de 16mm ($\rho = 1,3\%$) et trois autres tirants de 4 barres de 19,5mm ($\rho = 2\%$). La contrainte limite élastique de l'acier utilisé est de 450 MPa.

Les auteurs proposent la relation I.9a ci-dessous.

$$\sigma_{bt} = f_t \exp[-800(\varepsilon - \varepsilon_{cr})] \quad (I.9a)$$

En utilisant les résultats établis par Gupta et al [GUP90] (en cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique) et la détermination de f_{ct} donnée par le code modèle 90 [CEB93], Stramandinoli et La Rovere [STR08] proposent une expression I.9b similaire à la relation I.9a. Ils introduisent un coefficient α tenant compte du pourcentage d'acier et du rapport n des deux modules d'élasticité ; acier et béton.

$$\sigma_{bt} = f_{ct} \exp\left[-\alpha \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}}\right)\right] \quad (I.9b)$$

avec $\alpha = 0,017 + 0,225 (np) - 0,106 (np)^2 + 0,016 (np)^3$,

et $f_{ct} = 1,4 \left(\frac{f_{cc} - 8}{10}\right)^{2/3}$ en MPa.

Cette expression I.9b paraît plus réaliste car elle tient compte, en plus du pourcentage d'acier ρ , des valeurs des modules d'élasticité des deux matériaux (acier et béton). Toutefois l'allure de la courbe est imposée avec la forme exponentielle.

I.2.3. Diagramme fictif de l'acier - synthèse de quelques lois proposées dans la littérature

Le diagramme fictif de l'acier est défini comme étant la relation entre la contrainte dans l'acier (rapport entre l'effort normal appliqué et la section d'acier) et la déformation moyenne du « tirant » (acier et béton) mesurée sur une assez grande longueur (recouvrant ou non des fissures). Ce diagramme est défini par la relation (I.10).

$$\sigma_s = \frac{N_t}{A_s} = f\left(\frac{\Delta L}{L}\right) \quad (I.10)$$

où

σ_s : la contrainte dans l'acier,

N_t : effort de traction extérieur,

A_s : section d'acier tendu,

L : longueur totale du tirant,

ΔL : allongement total du tirant.

I.2.3.1. lois avec $\Delta\epsilon_m$ constant (Figure I.14a)

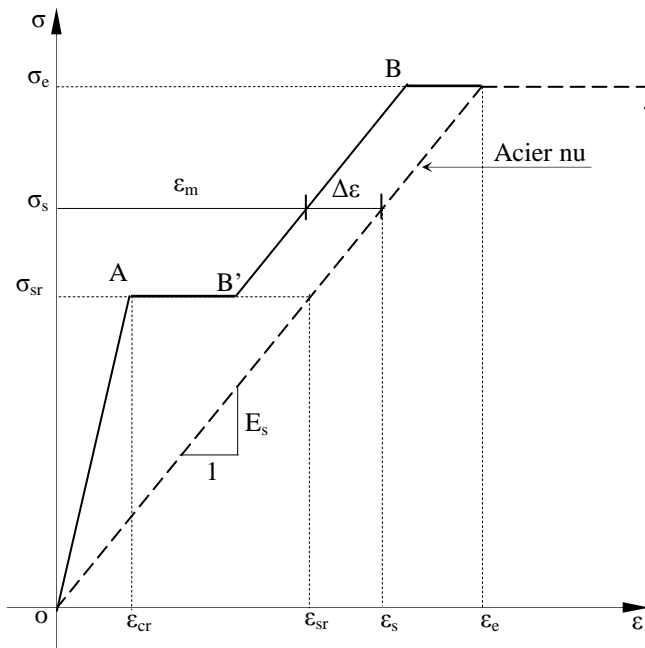


Fig. I.14a. Loi de comportement avec $\Delta\epsilon_m$ constant

Une loi avec $\Delta\epsilon$ constant, a été proposée par Johnson [JOH51],

$$\Delta\epsilon = \frac{k \sigma_{cr}}{E_s \rho}, \tag{I.11a}$$

avec $1/3 \leq k \leq 2/3$; $k=0,5$ en moyenne.

Palotas [PAL66] a proposé une autre valeur de $\Delta\epsilon$:

$$\Delta\epsilon = 0,7 \epsilon_{sr}. \tag{I.11b}$$

Le code européen du béton avait proposé en 1967 [CEB67] et 1973 [CEB73] la valeur de $\Delta\epsilon$ suivante :

$$\Delta\varepsilon = \frac{k_3}{E_s \rho} \quad (\text{I.11c})$$

avec $k_3 \approx 3 \text{ MPa}$.

Van der Veen [VAN90] et Bruggeling [BRU91], ont augmenté de 20% la contrainte à l'apparition de la première fissure. Ensuite, pour simplifier le modèle, un palier est créé à ce niveau de contrainte, puis au delà, la contribution du béton tendu est considérée constante figure I.14b. La relation I.11d exprime la valeur de $\Delta\varepsilon$ après la stabilisation des fissures.

$$\Delta\varepsilon = 0,61 (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) \quad (\text{I.11d})$$

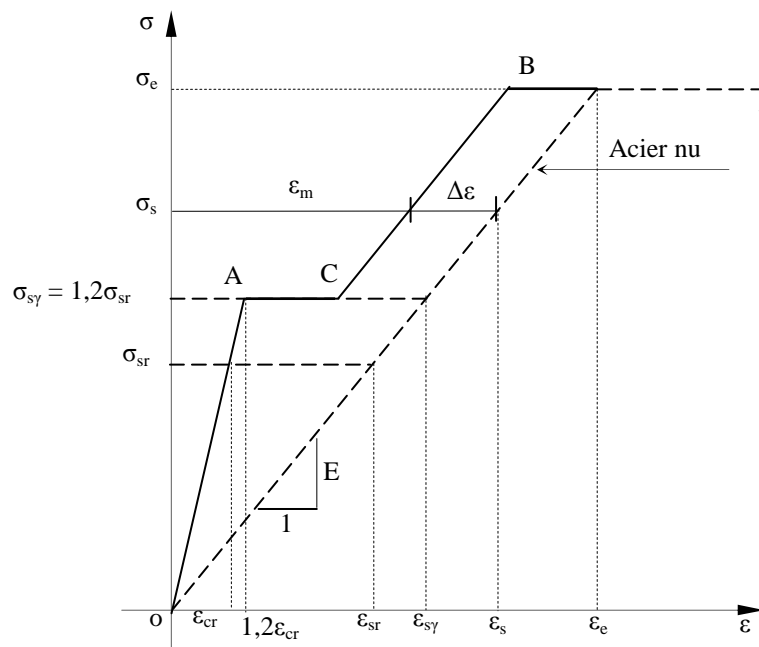


Fig. I.14b. Modèle avec $\Delta\varepsilon_m$ constant d'après Van der Veen [VAN90] et Bruggeling [BRU91]

Remarques :

Pour ces propositions de $\Delta\varepsilon$ constant juste après la valeur de σ_{sr} nous remarquons :

- *en utilisant la formule (I.11c) pour un même acier et quelle que soit la résistance effective du béton, on obtient la même allure,*
- *la relation (I.11b) ne dépend que de ε_{sr} et ne tient pas compte directement du pourcentage d'acier, ni de la résistance effective à la traction du béton et ni de la nature de l'acier,*

- la formule (I.11a) tient compte des deux paramètres manquant aux relations (I.11b), (I.11c) et (I.11d), mais $\Delta\varepsilon$ constant n'est pas toujours observé dans les résultats expérimentaux.

Van der Veen [VAN90] et Bruggeling [BRU91], ont augmenté de 20% la contrainte à l'apparition de la première fissure pour, peut être, simplifié le modèle en faisant fi de la phase de propagation des fissures.

I.2.3.2. Lois avec variation linéaire ou multilinéaire de $\Delta\varepsilon$

Rabich [RAB69] propose une variation linéaire de $\Delta\varepsilon$ représentée par la droite joignant A à B (relation I.12a). Le point B coïncide avec le point de coordonnées $(\varepsilon_e, \sigma_e)$ de l'acier (Figure I.15).

$$\Delta\varepsilon = (\varepsilon_e - \varepsilon) \frac{\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_e - \varepsilon_{cr}} \quad (\text{I.12a})$$

Cette loi de Rabich est un modèle géométrique représentant l'observation grossière des courbes expérimentales entre A et B avec diminution de $\Delta\varepsilon$ jusqu'à $\Delta\varepsilon = 0$, pour une contrainte égale à la contrainte limite des aciers.

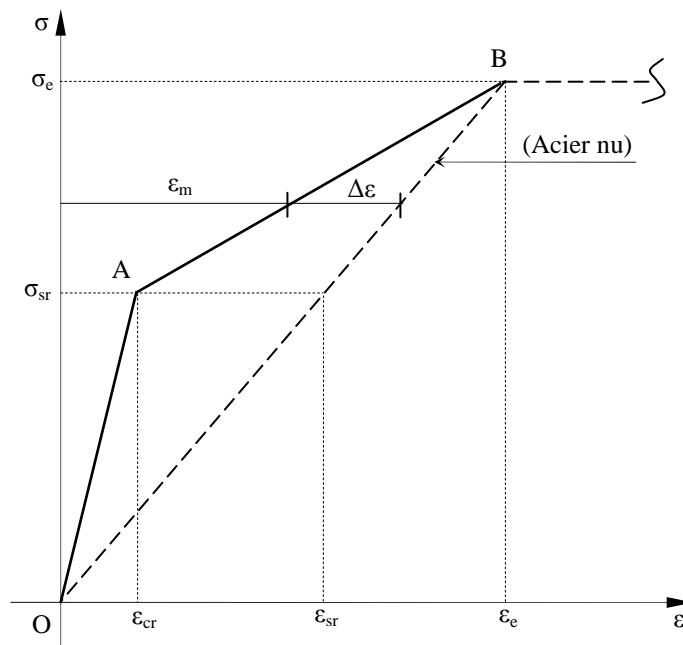


Fig. I.15. Loi de comportement fictive du tirant selon Rabich [RAB69]

La formule (I.12a), bien que représentant globalement la variation de $\Delta\varepsilon$ pour un certain pourcentage d'acier, ne tient pas compte de l'adhérence résiduelle entre l'acier et le béton observée dans les résultats expérimentaux (même après la limite élastique des aciers).

Espion [ESP85] a effectué 13 essais mais en déduisant les valeurs de σ_{cr} réelles directement sur les corps d'épreuve. Il a remarqué que les fissures se stabilisaient après un chargement de 2 fois σ_{sr} ($\sigma_{sy}=2\sigma_{sr}$). D'après l'auteur, pour des pourcentages supérieurs à 1% le point C (figure I.16) de stabilisation des fissures se situe alors entre A et B. Après fissuration, la variation ($\Delta\varepsilon_{IIa}$) est linéaire et $\Delta\varepsilon_{IIb}$ reste constante comme montré par la relation I.12b. Pour des pourcentages inférieurs à 1%, Espion préconise d'utiliser la loi de Rabich [RAB69].

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varepsilon_{IIa} &= (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) - \frac{(\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) - \Delta\varepsilon_{IIb}}{\varepsilon_s(c)} (\varepsilon - \varepsilon_{sr}) \quad \text{si } \varepsilon_{cr} \leq \varepsilon \leq [\varepsilon_s(c) - \Delta\varepsilon_{IIb}] \\ \Delta\varepsilon_{IIb} &= \left(18 + \frac{3,55}{\rho}\right) 10^{-6} \quad \text{si } [\varepsilon_s(c) - \Delta\varepsilon_{IIb}] \leq \varepsilon \leq (\varepsilon_e - \Delta\varepsilon_{IIb}) \end{aligned} \right\} \quad (I.12b)$$

$$\text{avec } \varepsilon_s(c) = \frac{2\sigma_{sr}}{E_s} \text{ et } \rho > 1\%.$$

Le code modèle 90 (CEB-FIB, 1993), dans sa première proposition, considère qu'après l'apparition de la première fissure correspondant au point de coordonnées (σ_{sr} ; ε_{cr}), la stabilisation des fissures intervient au point d'ordonnée $\sigma_{sy}=1,3 \sigma_{sr}$ et d'abscisse ($\varepsilon_{sy} - 0,4\Delta\varepsilon_\gamma$). La variation de la courbe (σ ; ε) du tirant est supposée linéaire entre la première et la dernière fissure, au-delà $\Delta\varepsilon$ est considéré constant. Ces variations sont montrées figure I.16 et exprimées par la relation I.12c (diagramme fictif de l'acier).

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_{sr}}{\varepsilon_{cr}} \varepsilon \quad \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_A \\ \sigma &= \sigma_{sr} + \sigma_{sr} \frac{\varepsilon - \varepsilon_A}{\varepsilon_C - \varepsilon_A} \quad \text{si } \varepsilon_A \leq \varepsilon \leq \varepsilon_C \\ \sigma &= \sigma_{sy} + E_s (\varepsilon - \varepsilon_C) \quad \text{si } \varepsilon_C \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B \end{aligned} \right\} \quad (I.12c)$$

$$\text{où } \varepsilon_A = \varepsilon_{cr}; \quad \varepsilon_C = \varepsilon_{sy} - \Delta\varepsilon \quad \text{et} \quad \Delta\varepsilon = \beta (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr});$$

avec $\beta = 0,4$ pour une charge instantanée et des barres à haute adhérence ;

$\beta = 0,25$ pour une charge de longue durée ou cyclique et des barres à haute adhérence.

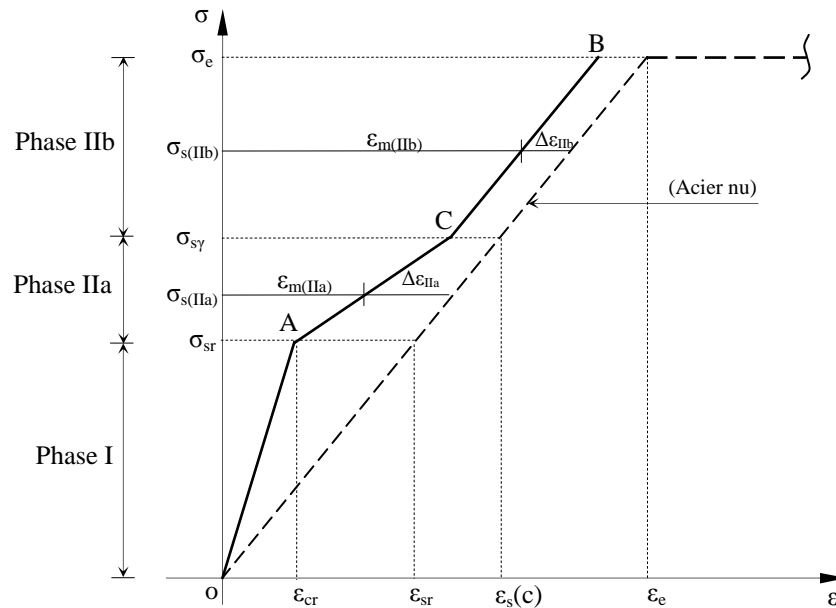


Fig. I.16. Loi de comportement fictive bilinéaire de l'acier selon Espion [ESP 85]

La relation (I.12b) tient compte de la valeur de σ_{cr} , du pourcentage d'acier et de la valeur σ_{sr} . Les deux phases (Ia) et (Ib) sont supposées distinctes pour un pourcentage d'acier supérieur à 1%. Ce dernier paramètre n'est pas le seul à fixer l'allure des courbes. Pour les deux relations I.12b et I.12c, $\Delta\epsilon$ est supposé constant après le point C ce qui n'est pas toujours le cas.

I.2.3.3. loi avec variation de $\Delta\epsilon$ en raison inverse de σ_s

Rao [RAO76], en 1976, fut le premier à proposer une loi de variation de $\Delta\epsilon$ en raison inverse de σ_s (Figure I.17).

Le premier modèle de ce type, valable pour les poutres sollicitées en flexion, fut étendu au tirant en béton armé par Rostasy et al [ROS76]. Ces derniers proposèrent l'expression I.13a.

$$\Delta\epsilon = \frac{\sigma_{cr}^2 (1 + n\rho)}{\rho^2 E_s \sigma_s}. \quad (\text{I.13a})$$

En 1981, Favre et al [FAV81] proposent une loi du même type avec $\Delta\epsilon$ tendant vers zéro lorsque σ_s tend vers l'infini (relation I.13b).

$$\Delta \varepsilon = \frac{(\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr})}{\sigma_s} \sigma_{sr} \tag{I.13b}$$

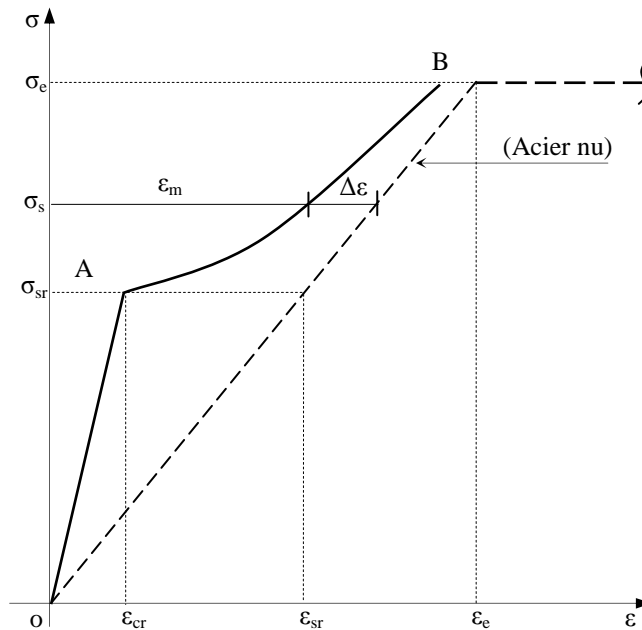


Fig. I.17. Loi de comportement fictive de l'acier selon Rao et Rostasy [RAO76]

Cette dernière formule ne prend en compte ni le pourcentage d'acier, ni la section de béton tendu.

Noakowski et Kupfer [NOA81] ont modifié légèrement cette dernière, en proposant $\Delta \varepsilon$ variant hyperboliquement avec σ_s (I.13c).

$$\Delta \varepsilon = 0,6 (1 - n \rho) \frac{\varepsilon_{sr}^2}{\varepsilon_s} \tag{I.13c}$$

Les auteurs ont supposé que $(n \cdot \rho)$ est petit devant l'unité, Espion [ESP85] propose alors la modification par la relation I13d suivante:

$$\Delta \varepsilon = \frac{0,6 \sigma_{sr}^2}{(1 + n \rho) E_s \sigma_s} \tag{I.13d}$$

alors que le CEB, en 1985 [CEB85], propose de considérer la formule I13e:

$$\Delta \varepsilon = (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} . \tag{I.13e}$$

Une formule empirique (I.13f), déduite de 19 essais de Holmserg et Lindgren, est citée dans le bulletin d'information du CEB [CEB73].

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_s \beta_1 \beta_2 \sigma_{cr}}{\rho(\rho \sigma_s - \beta_2 \sigma_{cr}) + \sigma_{cr} \beta_1 \beta_2} \quad (\text{I.13f})$$

avec $0,001 \leq \beta_1 \leq 0,002$ et $1,0 \leq \beta_2 \leq 1,1$

On peut ajouter la loi de variation de $\Delta\varepsilon$ en raison inverse de σ_s proposée par le CEB [CEB78] citée au paragraphe I.5.

Discussions :

- La relation (I.13a) tient compte directement de beaucoup de paramètres influant sur la fissuration du béton, mais la variation de $\Delta\varepsilon$ est hyperbolique quel que soit le pourcentage d'acier. Or ce dernier a une influence directe comme le montrent les résultats expérimentaux d'Espion [ESP85].
- Les expressions (I.13b) et (I.13e) ne tiennent pas compte directement du pourcentage d'acier, alors qu'il est l'un des facteurs les plus influant sur l'allure de la courbe.
- Les formules (I.13c) et (I.13d) sont issues d'un raisonnement théorique sur la distribution d'adhérence mais qui n'apparaît pas directement (la valeur de σ_{cr} n'apparaît pas explicitement). L'allure hyperbolique de la courbe, quel que soit le pourcentage d'acier, n'est pas toujours observée.
- La formulation empirique (I.13f) tient compte de deux facteurs β_1 et β_2 qui doivent être à chaque fois ajustés.

I.2.3.4. Courbe discontinue de Gilbert et Warner

Gilbert et Warner [GIL78] ont exprimé la rigidité fictive de l'armature par une courbe discontinue après fissuration (Figure I.18). Cette courbe fait apparaître le comportement de l'acier (ε_s) en fonction de la caractéristique du béton (ε_{ct}). Ce modèle fait participer l'acier au-delà de sa limite d'élasticité.

Quand $\varepsilon_y < \varepsilon_7$, on remarque que l'allure de la courbe générale est modifiée.

Ici, on ne voit pas apparaître directement le pourcentage d'acier et la valeur réelle de σ_{cr} . Aussi ce n'est pas évident d'avoir le même comportement quelles que soient les caractéristiques du béton.

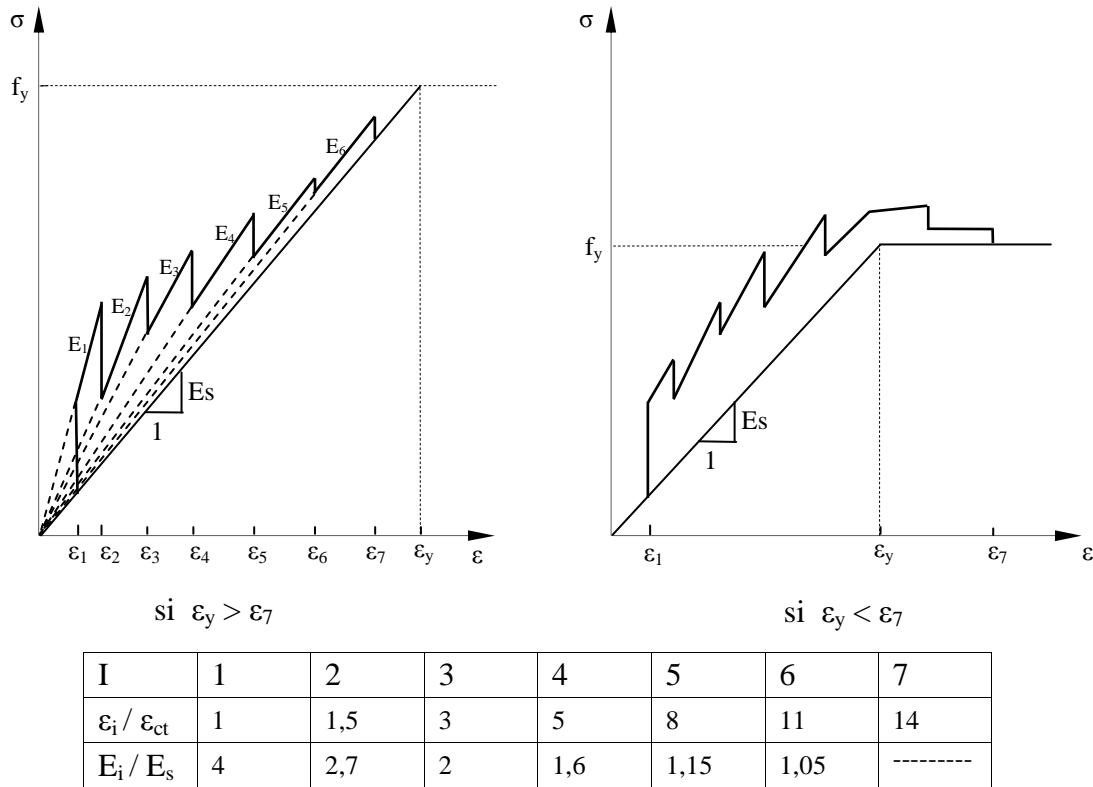


Fig. I.18. Loi de comportement fictive discontinue selon Gilbert et Warner [GIL78]

I.2.4. Conclusions

Pour l'utilisation des lois de comportement en traction du béton pour le béton armé, il ressort que les lois fictives sont mieux adaptées. On peut aussi utiliser des lois fictives de l'acier en traction.

Les essais de traction réalisés sur le béton seul s'avèrent très délicats. En effet, plusieurs précautions doivent être prises pour représenter fidèlement le diagramme efforts – déformations. D'un chercheur à un autre, les résultats sont différents car le béton a un comportement relatif fragile et les machines utilisées ne sont pas semblables (plus au moins rigides) et ne donnent pas les mêmes précisions.

Pour les modèles de lois fictives du béton, beaucoup d'auteurs utilisent après fissuration la loi du type $\sigma_{bt} = \frac{a f_t}{1 + \sqrt{b \varepsilon}}$ (relation I.7a). Mais il semble que ce type de relation reste valable pour des panneaux en béton armé.

Ces dernières années, une autre forme de loi fictive pour le béton du type $\sigma_{bt} = f_t \exp[-a.(b)]$ est utilisé (relations I.9a et I.9b) où a est une constante positive et b fonction de ε_{cr} (allongement relatif du béton à l'apparition de la première fissure). Toutefois, cette forme de relation a été justifiée sur des tirants en béton armé de section carré.

Les modèles proposés et, qui sont présentés dans cette revue bibliographique, concernant les lois fictives de l'acier en traction, ne mettent pas clairement en évidence l'adhérence acier – béton et les espacements de fissures.

Malgré les multiples relations existantes, il subsiste toujours des divergences dans les lois de comportement. En effet, les premières lois (dont celle de Johnson [JOH51] - relation (I.11a), supposent un $\Delta\varepsilon$ constant après fissuration. Ceci correspond à une adhérence résiduelle constante quelque soit l'effort de traction qui reste compris entre σ_{sr} et σ_e .

La variation linéaire après fissuration comme celle de Rabich [RAB69] - relation I.12a et figure I.15 - après fissuration, entre le point A et le point B (B de coordonnées $(\varepsilon_e, \sigma_e)$ correspondant à la plastification des aciers) est une représentation grossière de certaines courbes expérimentales où le pourcentage relatif de l'acier est élevé.

Les premiers modèles avec une variation de $\Delta\varepsilon$ en raison inverse de σ_s , comme celui considéré par Rao [RAO76], valables pour les poutres en flexion, ne sont efficaces que pour un intervalle bien défini du pourcentage d'acier. Si ce dernier est relativement faible, l'allure de la courbe change considérablement après fissuration.

Enfin, la variation multilinéaire, comme celle d'Espion [ESP85] – relation I.12b ou du Code modèle [CEB93] – relation I.12c déduites de certaines caractéristiques bien définies du béton ne peut être étendue à tous les cas pratiques. De plus, pour des pourcentages d'acier inférieurs à 1%, Espion adopte plutôt la relation I.12a de Rabich.

Nous pensons que pour des pourcentages d'acier faibles ($\approx \leq 1\%$), beaucoup de relations proposées ne représenteraient pas fidèlement le diagramme efforts –déformations d'un élément de structure soumis à la traction.

I.3. Adhérence acier – béton

Il faut noter que cette adhérence entre l'acier et le béton caractérise l'existence du «béton armé». La transmission des efforts, de la barre au béton, a lieu le long de la surface latérale de l'armature; «l'adhérence». Ce phénomène ainsi défini est le rapport de la variation par unité de longueur de l'effort axial et le périmètre utile de l'armature.

I.3.1. Historique, essais normalisés

Déjà en 1913 (presque un siècle maintenant), Abrams [ABR13] avait procédé à des essais d'arrachement de barres enrobées de béton où il avait étudié l'influence de divers paramètres intervenant dans la liaison béton - armature.

Les premières constatations, portant sur certains paramètres intervenant dans l'adhérence acier - béton, ont été rapportées par Slater en 1920 [SLA20].

En 1936, en étudiant la partie tendue fissurée d'une poutre fléchie, Salinger [SAL36] a mis en évidence le mécanisme de transmission des efforts par adhérence et déduit un espacement maximum des fissures (voir § I.4.1).

Avant les années 1970 et avec les moyens de l'époque, plusieurs auteurs ont étudié l'adhérence acier-béton en faisant varier plusieurs paramètres, on peut citer Menzel [MEN39], Watstein [WAT45], Clark [CLA49], Chamberlin [CHA52], Untrauer et Henry [UNT65], Lutz et Gergely [LUT67]

La relation adhérence – glissement entre l'acier et le béton, est généralement obtenue par l'essai d'arrachement « pull -out -test » ou l'essai par flexion « Beam -test » selon les normes de la RILEM [RIL78-1], [RIL78-2]. Ces deux essais sont très utilisés en pratique.

a) Essai de traction (pull out test)

C'est un essai normalisé suivant la RILEM, caractérisé par un bloc de béton cubique d'arête égale à dix fois le diamètre de la barre soumise à l'arrachement. Cette barre centrée dans le bloc de béton, adhère sur une longueur cinq fois son diamètre. Une assise en caoutchouc permet d'éliminer l'effet de frettage (Figure I.19). L'essai est réalisé après 28 jours.

On applique, alors, une force de traction croissante et, on mesure ainsi le déplacement relatif entre l'armature et le béton grâce au capteur de déplacement placé au-dessus de l'éprouvette.

La contrainte ultime d'adhérence donnée par la relation I.14, en MPa, est déterminée après avoir atteint la force d'arrachement P (en newton).

$$\tau_u = 0,0637 \frac{P}{d^2} \frac{30}{f_c} \quad (\text{I.14})$$

avec

d : diamètre de la barre en mm,

f_c : contrainte de rupture par compression du béton, en MPa.

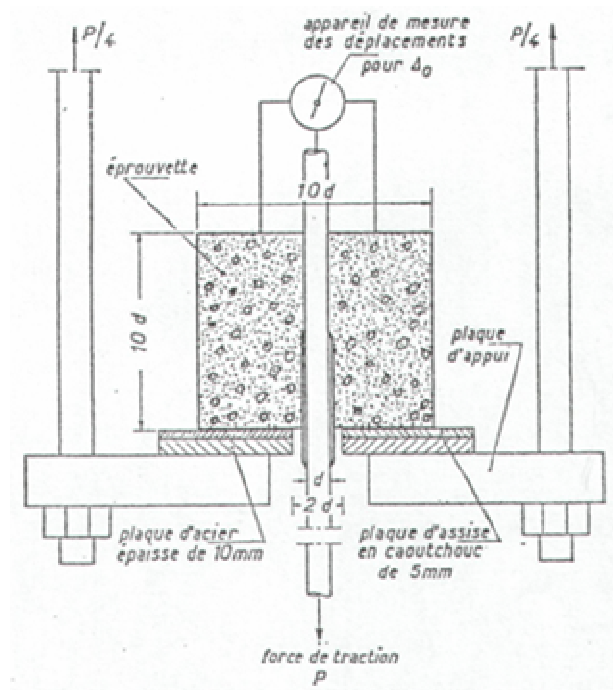


Fig. I.19. Essai de traction (pull out test)

b) Essai de flexion (Beam test)

Comme le montre la figure I.20, la poutre en béton armé est formée de deux moitiés symétriques. Dans chaque partie, l'armature principale de traction n'est adhérente que sur une longueur de dix fois son diamètre. Cet essai, aux normes de la RILEM, permet de mesurer le glissement relatif acier - béton et de déterminer la force d'arrachement c'est à dire la rupture d'adhérence.

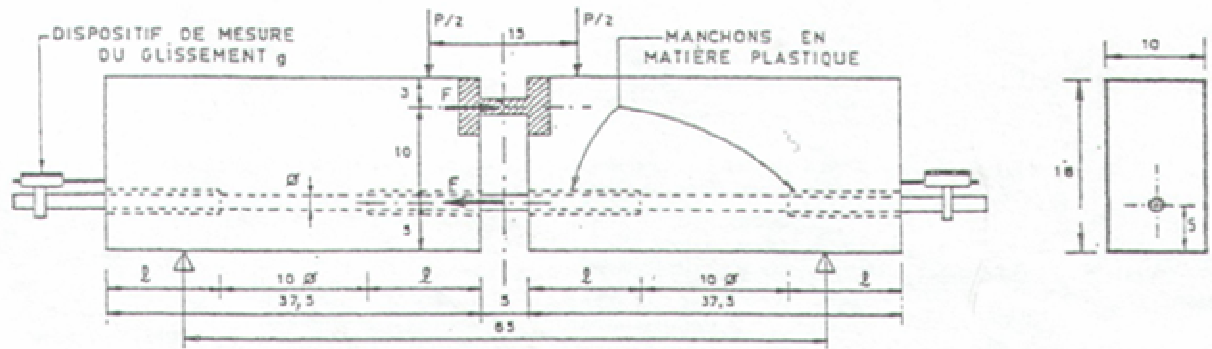


Fig. I.20. Essai de flexion (Beam test)

Pour ces deux types d'essais, la dispersion des résultats est plus élevée en utilisant l'essai de traction, mais celui-ci donne de meilleurs résultats pour des gros diamètres de barres. Les courbes de glissement présentent aussi une dispersion pour les deux essais. L'interprétation des courbes représentant la force en fonction du glissement (déplacement relatif acier-béton), montrent que le phénomène d'adhérence est analogue à un frottement.

Albert Caquot a montré que l'effet d'arrachement de la barre provoque la formation de bielles obliques comprimées à 45° qui elles-mêmes s'appuient sur des zones de béton plus allongées (Figure I.21).

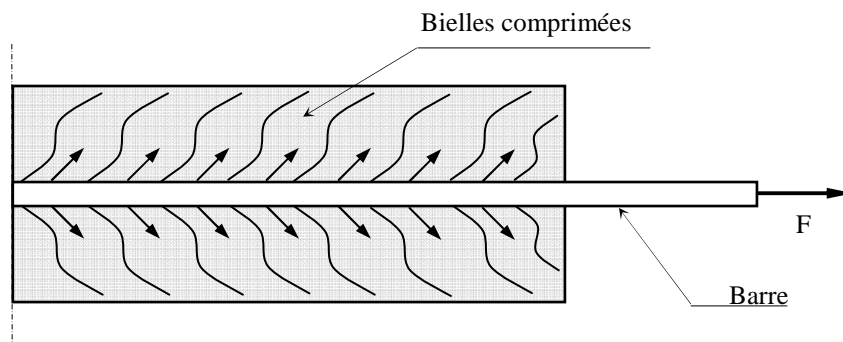


Fig. I.21. Effet d'arrachement et de formation de bielles comprimées selon Caquot

I.3.2. Mécanisme et mesure de l'adhérence en fonction du glissement entre l'acier et le béton

La notion d'adhérence a été initialement définie pour les barres lisses comme étant le frottement du béton sur la surface latérale de la barre d'armature ou appelé aussi contrainte tangentielle.

Cette définition s'applique également aux barres nervurées (haute adhérence), dont les différentes phases sont illustrées figure I.22 d'après Eligehausen et al [ELI83]. La forme générale de la courbe d'adhérence peut être obtenue par les essais de la RILEM (§I.5).

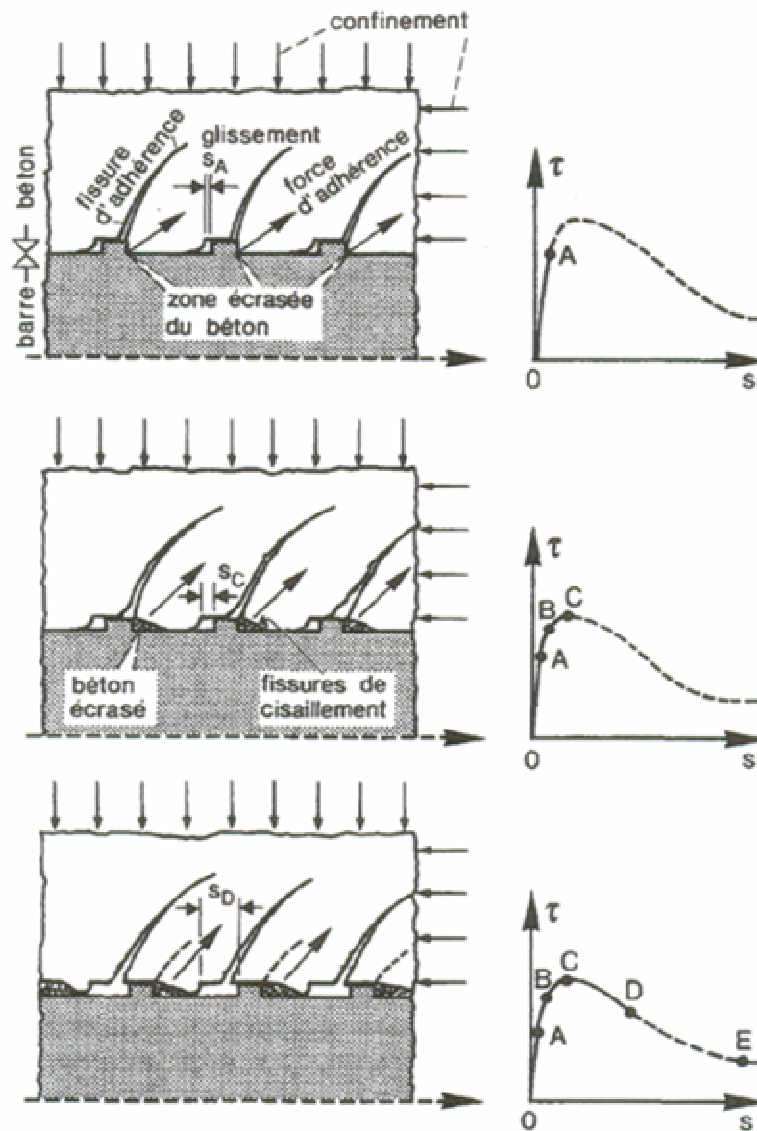


Fig. I.22. Mécanisme d'adhérence et schéma de la relation complète adhérence –glissement d'après Eligehausen et al [ELI83]

Il y a lieu de signaler que la pente de la courbe à sa naissance est relativement (par rapport au reste de la courbe) très élevée. En augmentant l'effort d'arrachement de la barre, les nervures de la barre d'acier butent sur le béton et commencent à l'écraser. A ce moment les premières fissures apparaissent et le glissement à ce stade est relativement faible (point A sur la figure I.22).

Le cisaillement partiel des bielles de béton se traduit par une réduction de la pente entre le point A et B.

Le point C représentant la contrainte d'adhérence maximum est obtenue si le confinement est suffisant, puis on atteint ainsi la branche descendante où la contrainte résiduelle correspond à la friction le long de la zone de béton cisailée, comme mentionné par Rehm [REH61], Eligehausen [ELI83] et précisé dans le bulletin N° 151 du CEB [CEB82].

Les travaux de Rehm [REH54] et Martin [MAR81], ont montré, dans le cas d'une armature nervurée ancrée dans un bloc de béton, que la contrainte à l'interface béton - armature se décompose en deux parties. La plus importante est la contrainte de butée (nervures et petites bielles de béton) et l'autre contrainte est due au frottement sur la partie lisse de la barre (figure I.23).

Rehm [REH54] a ainsi défini l'importance des nervures pour la reprise des efforts en remplaçant cette force de butée par une contrainte du type frottement comme dans le cas d'une barre lisse. Cette force de butée est décomposée en une force parallèle et une autre perpendiculaire à l'axe de la barre. Cette dernière force est équilibrée par l'anneau de béton entourant cette barre.

Le coefficient d'aire relative d'adhérence f_R d'un type de barre donné comme montré figure I.23, est défini, d'après Martin et Noakowski [MAR81] par la relation (I.15).

$$f_R = \frac{\sum F_R}{\sum F_M} \quad (I.15)$$

On peut écrire approximativement que $f_R = \frac{\sum F_R}{\sum F_M} \approx \frac{h_{ner}}{e_{ner}}$,

avec h_{ner} : hauteur des nervures,

e_{ner} : espacement des nervures

$\sum F_R$: en considérant la section droite (Figure I.23b), c'est l'aire de l'anneau définie par la hauteur des nervures ($\approx a_{ner} \cdot \pi \cdot \Phi$).

$\sum F_M$: en considérant la figure I.23a, c'est l'aire de la partie lisse de la barre comprise entre deux nervures ($\approx e_{ner} \cdot \pi \cdot \Phi$).

La résistance d'adhérence en fonction de la surface spécifique des nervures des barres a été étudiée par Bony et al [BON75].

La valeur du coefficient f_R varie de 0,05 à 0,15 pour les barres nervurées et elle est prise égale à 0 pour les barres lisses.

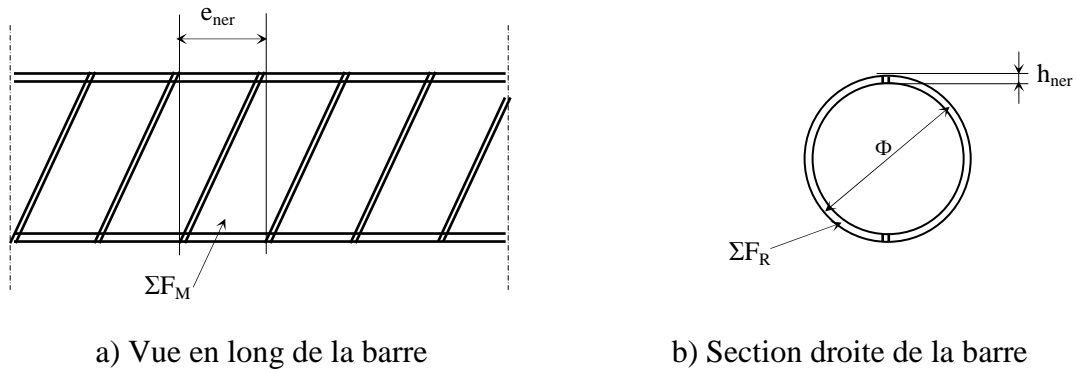


Fig.I.23. Définition du coefficient d'aire relative f_R d'après Martin et Noakowski [MAR81]

I.3.3. Facteurs qui influent sur l'adhérence acier - béton

L'influence des divers paramètres sur l'adhérence acier - béton ne sont pas toujours faciles à quantifier. Même avant le chargement, plusieurs éléments contribuent aux conditions d'adhérence. Les diverses expériences réalisées par ailleurs font ressortir certains facteurs qui améliorent la qualité du phénomène.

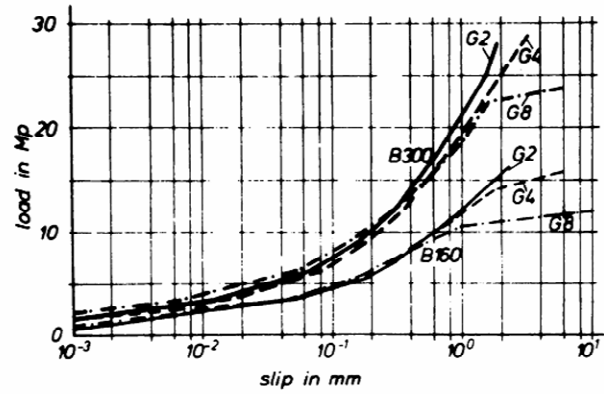
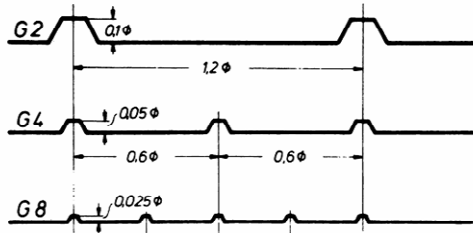
a) Adhérence physico-chimique

Ce genre d'adhérence a été mise en évidence par Martin [MAR67]. Cet état s'explique par la pénétration de la pâte fluide de ciment dans la couche extérieure oxydée des barres : cette rouille augmente la rugosité donc l'adhérence.

b) Engrenement entre le béton durci et les aspérités de la surface de la barre

Les barres ayant le même coefficient f_R , mais différentes hauteurs des nervures, donnent la même loi adhérence - glissement (τ - s) pour des valeurs faibles de glissement d'après Sorez et Hölzenbein [SOR79] figure I.24, et le comité européen de béton (bulletin d'information 151)[CEB82]. Mais selon ce dernier (CEB), une augmentation de la hauteur des nervures, sans changer le facteur f_R , risque de créer une rupture par fendage du béton.

Rehm, [REH61], a montré que les barres à faible hauteur de nervures sont plus sensibles à l'effet de position dans l'élément et au tassement du béton que les barres dont les hauteurs des nervures sont plus grandes.



a) Caractéristiques des barres nervurées (G2, G4 et G8) avec même F_R

b) Allures des courbes effort - glissement des barres G2, G4 et G8

Fig.I.24. Courbes effort -glissement de barres ayant même coefficient f_R mais des hauteurs de nervures différents ; d'après Sorez et Hölzenbein [SOR79]

Martin et Naokowski, [MAR81] ont montré que pour un glissement donné, la contrainte d'adhérence augmente linéairement avec le coefficient d'aire relatif f_R figure I.25.

c) Position de la barre

La position de la barre dans le coffrage et son inclinaison par rapport à la direction de bétonnage, influent sur la valeur de l'adhérence, ainsi que le confinement comme l'a signalé Ferguson [FER66]. Martin et Naokowski [MAR81] ont montré que les barres verticales adhèrent mieux que les barres horizontales figure I.25.

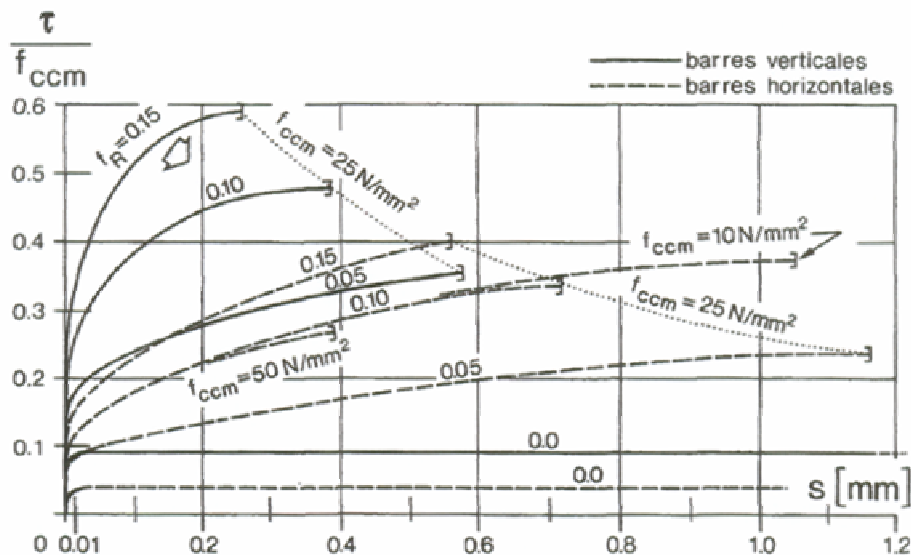


Fig.I.25. Influence du type d'armature (F_R différent) sur la relation d'adhérence ; d'après Martin et Naokowski [MAR81]

d) Retrait du béton

Les contraintes de compression normales à la surface de la barre, créées par le retrait du béton, influent sur l'adhérence acier -béton. Celles-ci ont été mesurées par Lutz et Gergely [LUT67] et sont de l'ordre de 0,5 MPa pour une déformation de 3.10^{-4} .

e) Enrobage du béton autour de la barre

Giuriani [GIU81] avec des essais présentés à la figure I.26 met en évidence l'enrobage du béton autour de la barre.

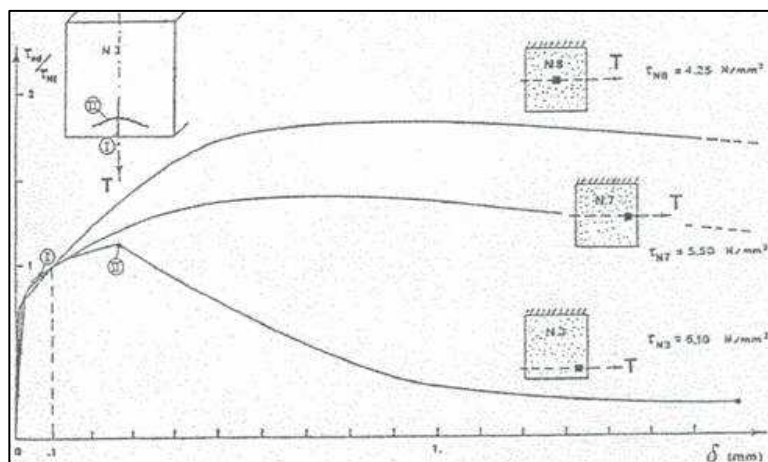


Fig. I.26. Adhérence des barres nervurées en fonction de leur enrobage selon Giuriani [GIU81]

f) Influence des armatures transversales

La figure I.27 montre que les armatures transversales créent des conditions de confinement du béton autour de la barre. Ces essais ont été réalisés par Eligenhausen et al [ELI83].

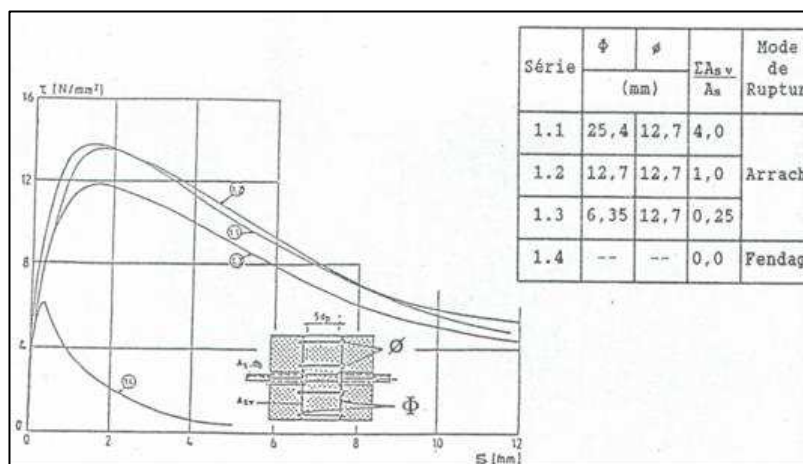


Fig. I.27. Influence des armatures transversales sur l'adhérence selon Eligenhausen [ELI83]

g) Qualité du béton d'enrobage

Plusieurs travaux ont visé à déterminer la résistance de la liaison d'adhérence en fonction de la résistance du béton, on peut citer Tepfer [TEP79], Kaku et al [KAK92], Zhiming et Zhiman [ZHI92] et Vandewalle [VAN92].

D'après Rehm [REH61], Martin [MAR73], Noakowski [NOA78] et Martin et Noakowski [MAR81], la contrainte d'adhérence pour des faibles valeurs du glissement est proportionnelle à la résistance à la compression moyenne du béton f_{cm} . Pour la contrainte de rupture d'adhérence τ_u de cette liaison, il semble quelle soit plutôt fonction de la résistance à la traction du béton et peut s'écrire avec une relation du type I.16 en fonction de f_{cm} .

$$\tau_u = a.(f_{cm})^b \quad (I.16)$$

où a et b des paramètres de calibrage.

Lahoud et Allaire [LAH91] ont réalisé des essais pour déterminer expérimentalement les relations d'adhérence en fonction de la résistance du béton et de la position des barres (Figure I.28).

On peut remarquer sur ces courbes que pour les bétons dont la résistance est élevée, la position de la barre n'a pas beaucoup d'influence sur la courbe adhérence – glissement.

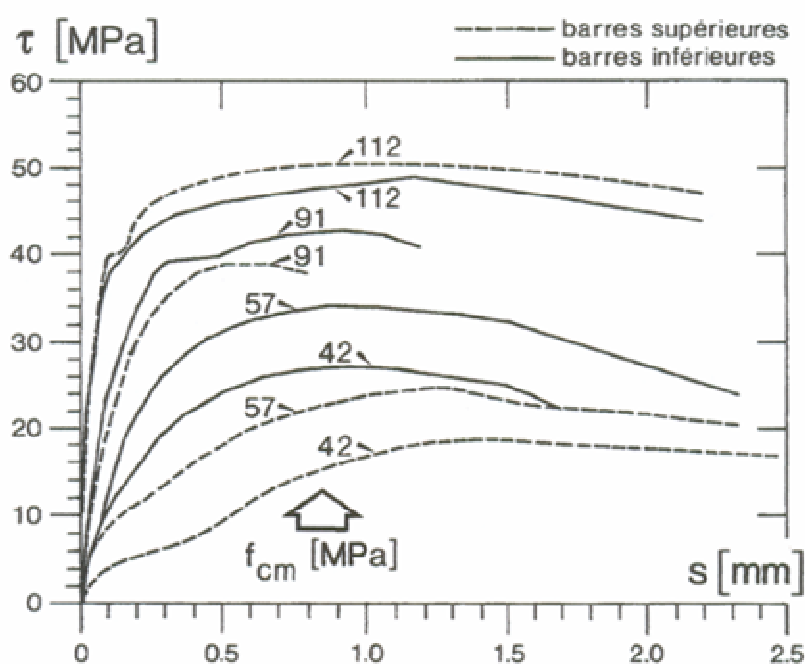


Fig.I.28. Relations d'adhérence expérimentales en fonction de la résistance du béton d'après Lahoud et Allaire [LAH91].

h) Espacement entre les barres

Ferguson et al [FER54] ont étudié l'influence des espacements des barres sur l'adhérence (figure I.29) en faisant intervenir le rapport $b/n\Phi$ (n = nombre de barres, Φ = diamètre des barres et b = largeur de la bande où sont réparties ces barres).

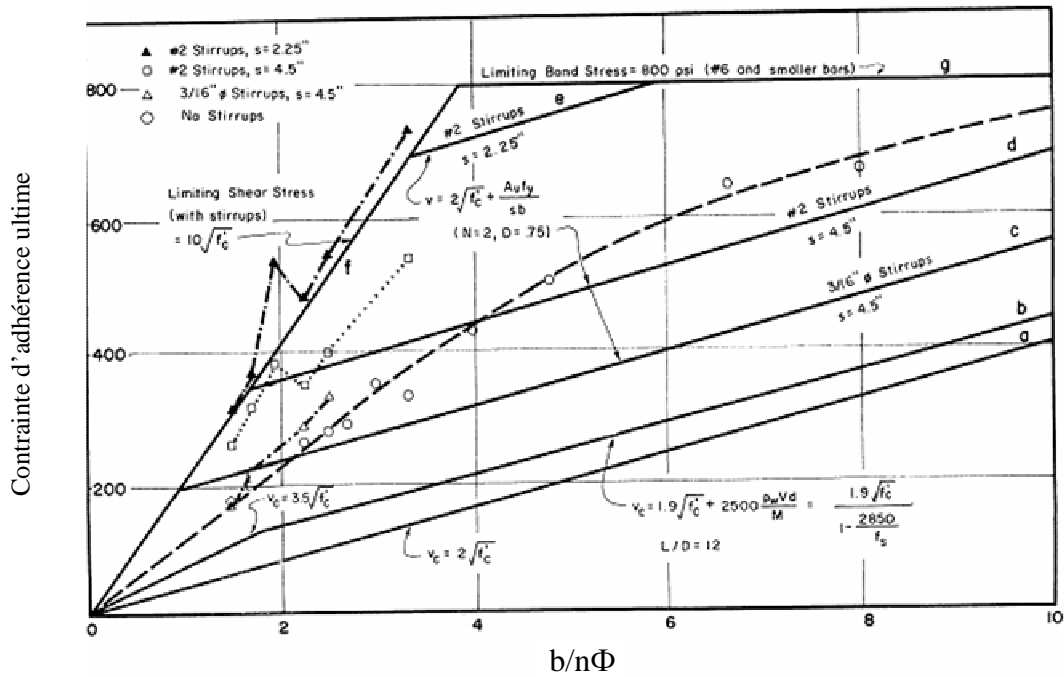


Fig. I.29. Influence des espacements de barres sur l'adhérence selon Ferguson et al [FER54]

Remarque : La quantification de tous ces paramètres énumérés de a à h rend complexe la détermination de la loi adhérence - glissement.

I.3.4. Lois expérimentales et théoriques de $\tau - g$

a) Résultats expérimentaux

Trost et al [TRO80] ont réalisé des essais sur des barres passives dont l'allure des courbes est présentée à la figure I.30 où β_c est la résistance à la compression du béton mesurée sur cube. Les auteurs ont aussi réalisés des essais d'adhérence sur des câbles de précontrainte (figure I.31).

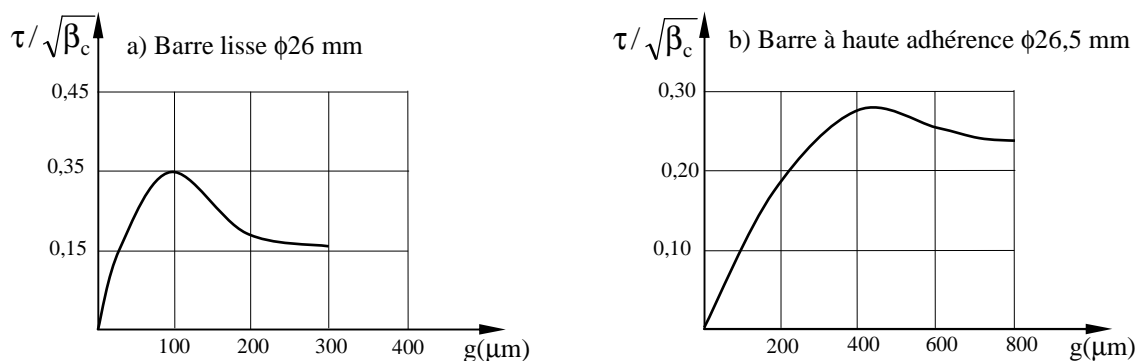


Fig. I.30. Essai d'adhérence des aciers passifs selon Trost et al [TRO80]

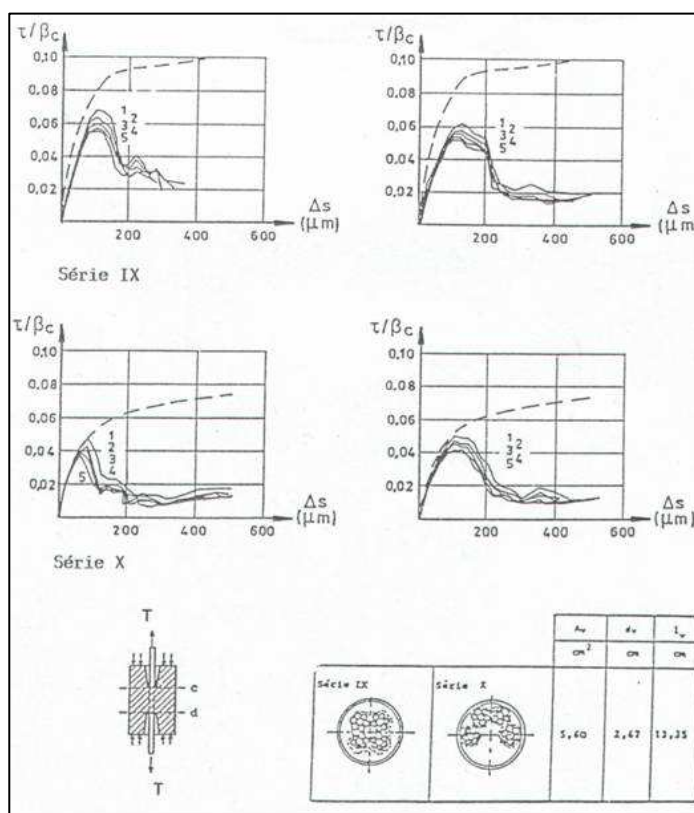
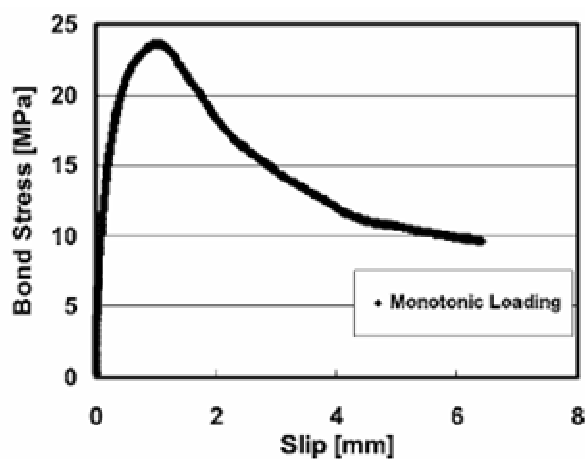
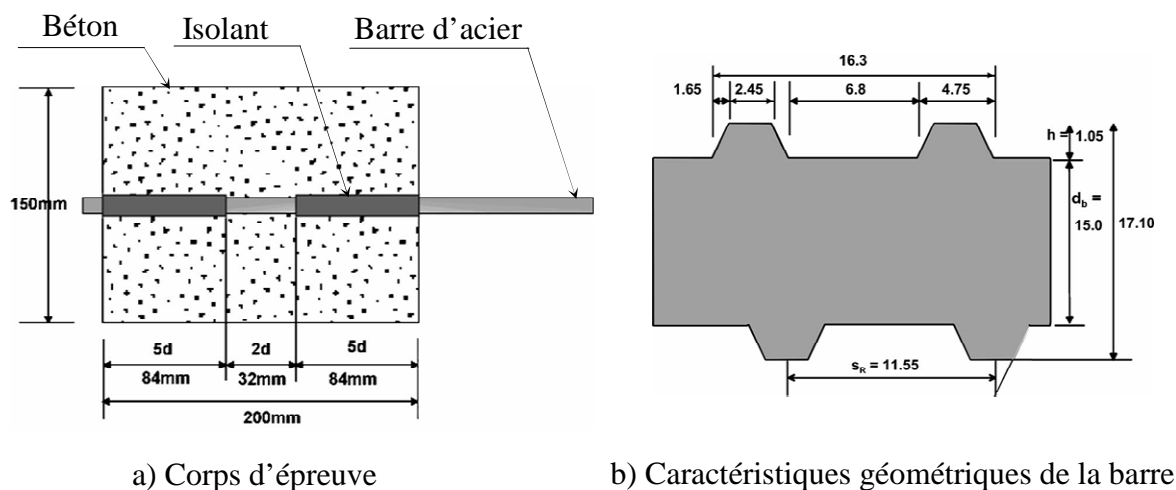


Fig. I.31. Allures des différentes courbes en traction alternée sur des câbles de précontrainte selon Trost et al [TRO80]

Avec le corps d'épreuve représenté figure I.32a, composé d'un béton dont la contrainte de compression à 28 jours est de 37 MPa et d'une barre à haute adhérence de limite d'élasticité 421 MPa, Oh et Kim [OH-07] ont réalisé l'essai de traction (pull out test). Les caractéristiques géométriques de la barre (avec coefficient d'aire relative $f_R = 0,098$) et l'allure de la courbe adhérence –glissement obtenue sont présentées respectivement figure I.32b et figure I.32c.



c) Allure de la courbe adhérence -glissement

Fig. I.32. Essai de traction (pull out test) avec une barre H.A d'après Oh et Kim [OH-07]

b) Lois théoriques $\tau - g$

Tassios et Koreneos [Tas 81] proposent une loi de forme polygonale, valable pour tout le domaine de glissement et ce, jusqu'à rupture de l'adhérence. Ce modèle, présenté à la figure (I.33), s'applique pour des sollicitations statiques et dynamiques.

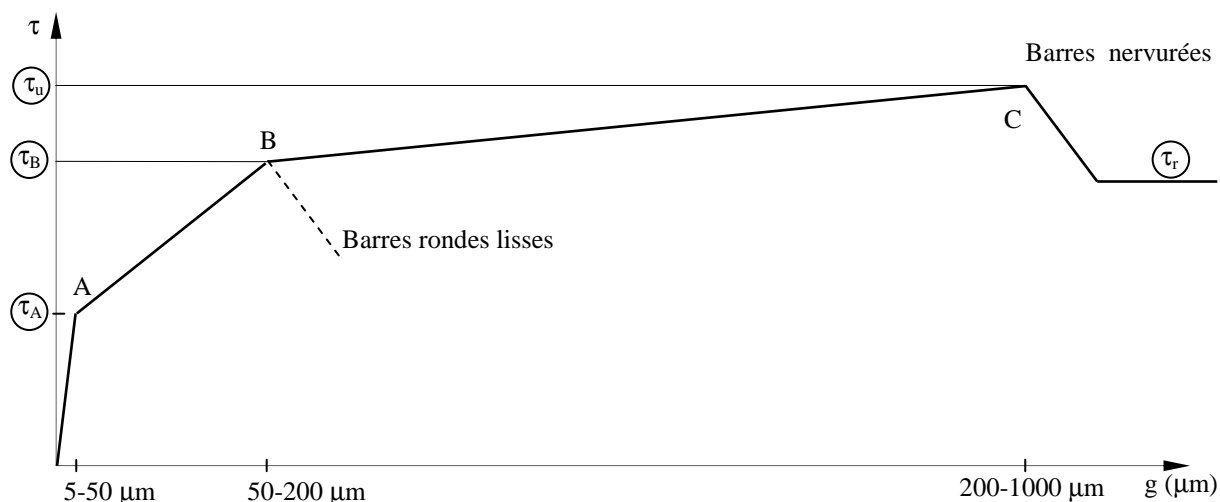


Fig. I.33. Proposition théorique de la loi $\tau - g$ selon Tassios et Koroneos [TAS 81]

En ce qui concerne les barres à haute adhérence, Dejean [DEJ83] a proposé une relation à partir des résultats expérimentaux (figure I.34). Son expression est sinusoïdale et l'adhérence s'annule pour des glissements faibles.

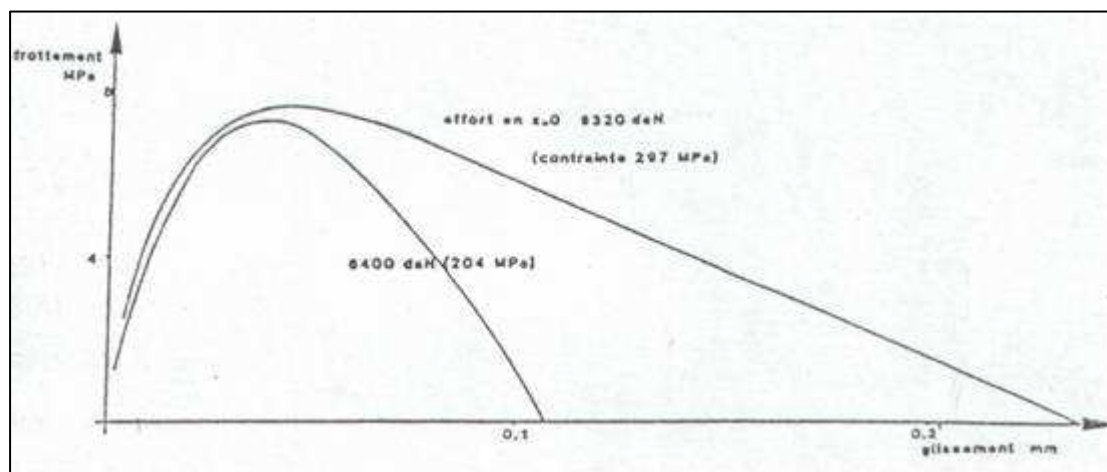


Fig. I.34. Proposition théorique de $\tau - g$ selon Dejean [DEJ83]

Une loi polygonale plus simple est proposée par Yankelevski [YAN84] [YAN97]. Elle s'avère utile pour une modélisation par éléments finis (Figure I.35). Cette loi permet d'atteindre la rupture de l'adhérence. Cette loi a été reprise par l'auteur en y apportant des modifications sur la courbe ascendante (en la rendant bilinéaire pendant cette phase) [YAN08] afin d'approcher l'allure de la courbe proposée par le code modèle 1990 [CEB88].

La même allure de la loi $\tau - g$ (Figure I.35b) pour les câbles de précontrainte a été proposée par Rezende-Martins [REZ89].

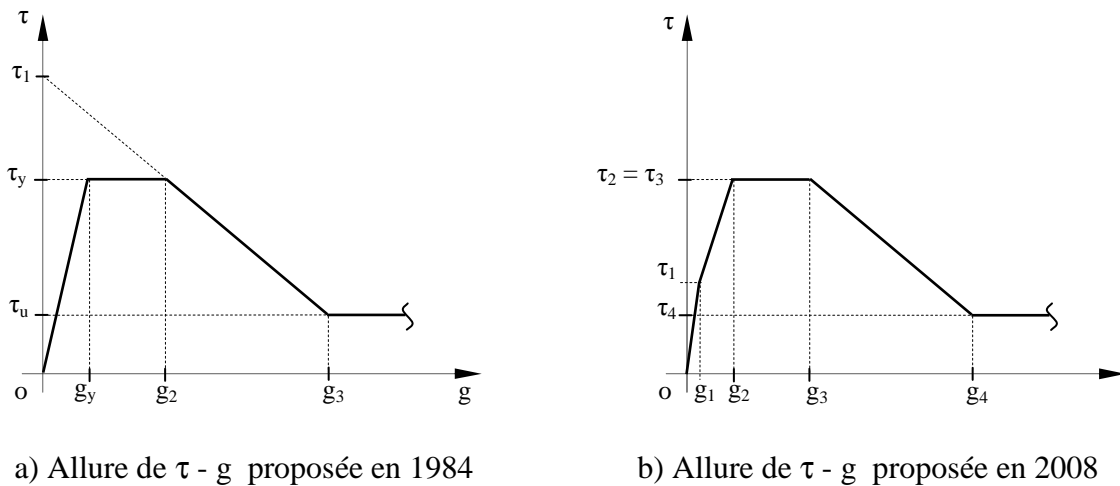


Fig. I.35. Allure de $\tau - g$ selon Yankelevsky [YAN84], [YAN88]

Dans le cas où le confinement est suffisant Shima et al. (1987) proposent la relation I.17 qui nous donne la courbe de la figure I.36 pour $\tau \leq \tau_1$ et où \bar{S} est sans dimensions égal à g/Φ (g est le glissement et Φ le diamètre de la barre).

$$\tau = 0,9f_c^{\frac{2}{3}} \left[1 - \exp\left(-40 \bar{S}^{0,6}\right) \right] \text{ pour } \tau \leq \tau_1 \tag{I.17}$$

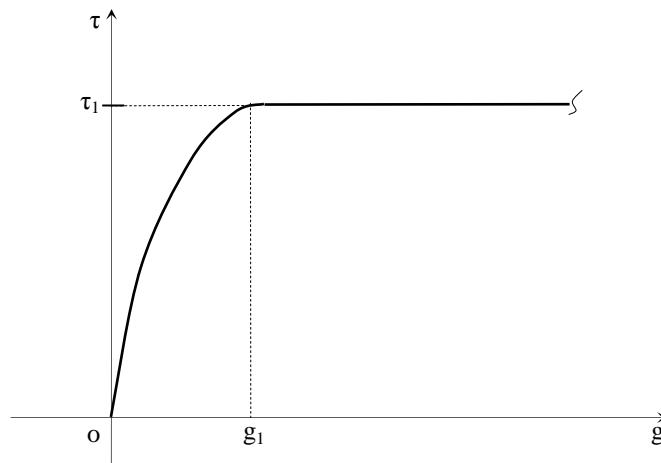


Fig. I.36. Loi $\tau - g$ proposée par Shima et al [SHI87]

La loi adoptée par le comite européen de béton [CEB88] avec une partie curviligne paraît plus réaliste (Figure I.37), la relation I.18 représente toutes les phases de la courbe contrainte d'adhérence –glissement.

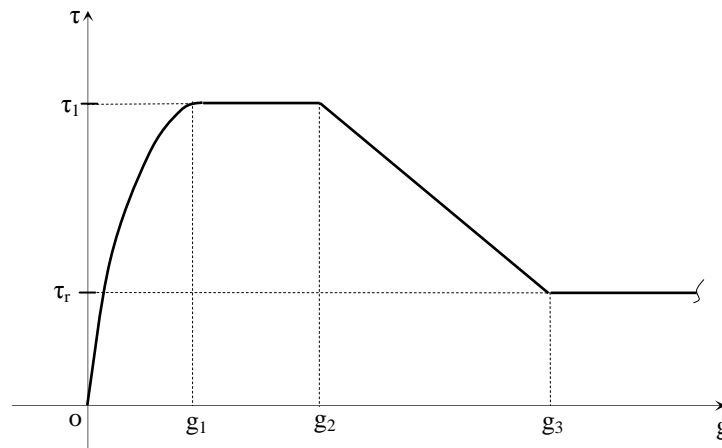


Fig. I.37. Loi $\tau - g$ proposée au C.E.B [CEB88]

$$\left. \begin{aligned}
 \tau &= \tau_1 \left(\frac{g}{g_1} \right)^\alpha && \text{si } 0 \leq g \leq g_1 \\
 \tau &= \tau_1 && \text{si } g_1 \leq g \leq g_2 \\
 \tau &= \tau_1 - (\tau_1 - \tau_r) \cdot \frac{g - g_2}{g_3 - g_2} && \text{si } g_2 \leq g \leq g_3 \\
 \tau &= \tau_r && \text{si } g > g_3
 \end{aligned} \right\} \quad (I.18)$$

Pour les différentes phases de la relation I.18, le comité européen de béton [CEB88] propose les valeurs présentées au tableau I.1 où f_{ck} représente la résistance caractéristique en compression du béton, mesurée sur cylindre à 28 jours.

Paramètres	Béton non confiné		Béton confiné	
	Bonne adhérence	Autres cas	Bonne adhérence	Autres cas
g_1 (mm)	0,25	0,40	1,00	
g_2 (mm)	0,35	0,60	3,00	
g_3 (mm)	1,00	2,50	Clear rib spacing	
α	0,25 - 0,35		0,40	
$\tau_1 = \tau_{max}$	$\approx 2,00 \sqrt{f_{ck}}$		$\approx 2,5 \sqrt{f_{ck}}$	$\approx 1,25 \sqrt{f_{ck}}$
τ_R	$0,15 \tau_{max}$		$\approx 1,00 \sqrt{f_{ck}}$	$\approx 0,50 \sqrt{f_{ck}}$

Tab. I.1. Valeurs caractéristiques des paramètres de la loi adhérence- glissement [CEB88]

Les valeurs du glissement g du tableau I.1 proposées par le comité européen de béton [CEB88] ne sont pas valables pour tous les cas. Ces valeurs (surtout

de g_1) influent considérablement sur le calcul des ouvertures de fissures ainsi que l'estimation des contraintes moyenne de l'acier et du béton.

Ren et al [REN10], dans un article à paraître en mars 2010, suppose une loi tri-linéaire de l'adhérence glissement (figure I.38 et relation I.19) du même type que celle de Abrishami et Mitchell [ABR96]. Les valeurs caractéristiques de g_1 (correspondant au pic de l'adhérence τ_f) et g_f (correspondant à la valeur de contrainte d'adhérence résiduelle $\tau_r = k \cdot \tau_f$) ne sont pas données *a priori* mais doivent être calibrées par des essais.

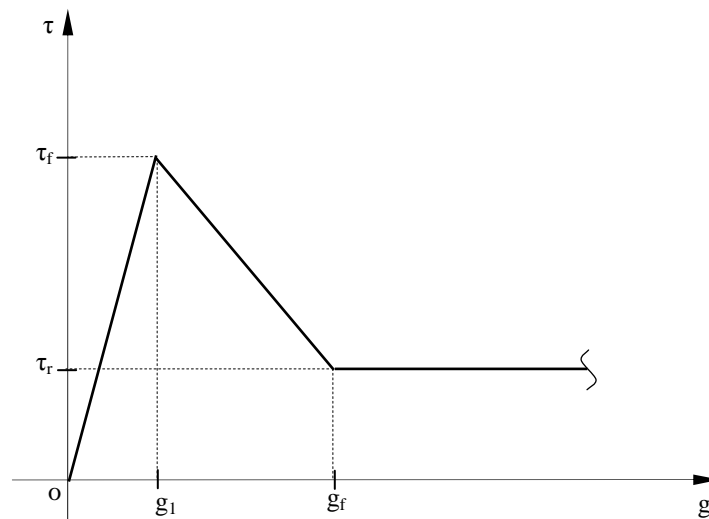


Fig. I.38. Loi tri -linéaire $\tau - g$ proposée par Ren et al [REN10]

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\tau_f}{g_1} g && \text{si } 0 \leq g \leq g_1 \\ \tau &= \frac{k \tau_f (g - g_1) + \tau_f (g_f - g)}{g_f - g_1} && \text{si } g_1 \leq g \leq g_f \\ \tau &= k \tau_f && \text{si } g > g_f \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.19})$$

Le coefficient k est compris entre 0 et 1. Pour $k=0$ ou $k=1$, avec la relation I.19 on obtient deux relations bilinéaires mais d'allures différentes.

Pour calibrer les différents paramètres, les auteurs proposent de déterminer les deux points A et B (en observant le changement de pente), correspondant respectivement à g_1 et g_2 , sur la courbe de chargement–glissement (figure I.39) de l'essai de traction « pull out test ».

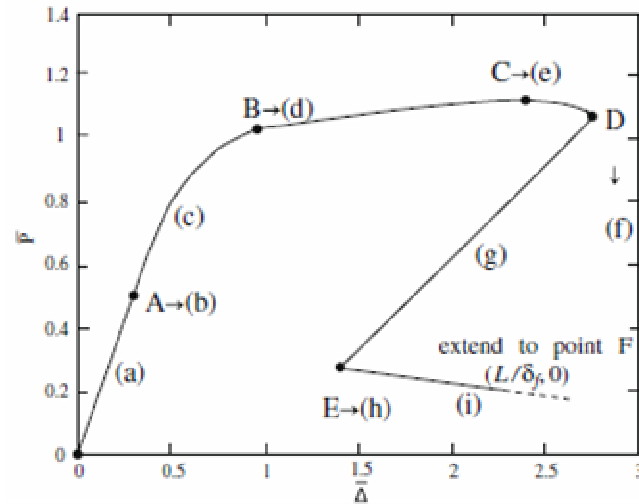


Fig. I.39. Courbe théorique chargement – glissement d’après Ren et al [REN10]

Dans la plupart des éléments en béton armé soumis à la traction, les premières fissures apparaissent alors que la mobilisation totale de l’adhérence n’est pas encore atteinte. La partie ascendante de la relation adhérence glissement (τ - s) étant donc importante, nous présentons ci-dessous certaines expressions illustrant cette phase et tenant compte des principaux paramètres exposés ci-dessus.

Plusieurs formulations du type (I.20) ont été proposées par Rehm [REH61].

$$\frac{\tau}{f_{cm}} = a.s^b + a_0.s \quad (\text{I.20})$$

où a_0 , a , b sont des constantes dépendant de chaque type d’armature.

La relation (I.20a) équivalente à I.20 a été utilisée par Martin [MAR73], mais sans le terme linéaire.

$$\frac{\tau}{f_{cm}} = a.s^b + a_0, \quad (\text{I.20a})$$

où a et b dépendant du type de barres en tenant compte du coefficient d’aire relative f_R variant de 0,05 à 0,4.

Pour généraliser cette dernière relation, Martin et Naokowski [MAR81] ont utilisé la formulation I.20b.

$$\frac{\tau}{f_{ccm}} = [f(s) \cdot f_R + a_0] a_3 \quad (I.20b)$$

$f(s)$: fonction du glissement

a_0 : coefficient tenant compte du frottement avec le béton de la partie de la barre entre deux nervures

a_3 : coefficient tenant compte de la position de la barre lors du bétonnage ;

$a_3 = 1$ pour une barre horizontale ;

$a_3 = 2,2$ pour une barre verticale chargée dans le sens contraire à celui du bétonnage.

Naokowski [NOA78], a déduit, à partir de la relation I.20b et en utilisant les essais de Martin [MAR73], la loi adhérence – glissement (τ -s) I.20c pour une barre nervurée ayant le coefficient d'aire relative $f_R = 0,065$. Cette formule a été simplifiée afin de faciliter la résolution de l'équation différentielle de l'adhérence.

$$\frac{\tau}{f_{ccm}} = 0,58 \cdot s^b, \quad s \text{ en cm.} \quad (I.20c)$$

Dans une publication ultérieure sur le calcul des ouvertures des fissures et des déformations, Naokowski [NOA88], a repris cette relation mais avec des essais réalisés par Janovic [JAN86] où le coefficient d'aire relative f_R des barres est égal à 0,06. Il obtient ainsi la formule I.20d.

$$\tau = a \cdot f_{cmm}^{0,66} \cdot s^b \quad (I.20d)$$

avec $a=0,95$ et $b=0,12$ pour les barres inférieures ;

$a=0,8$ et $b=0,20$ pour les barres supérieures ;

s en mm.

Bruggeling [BRU91] a proposé la relation adhérence- glissement I.20e où le coefficient d'aire relative f_R des barres est égal à 0,065, valable pour un béton ordinaire.

$$\tau = a \cdot (f_{cmm}^{0,66} + 4) \cdot s^b \quad (I.20e)$$

avec $a=0,38$ et $b=0,18$ pour le cas général ;

$a=0,32$ et $b=0,28$ pour les barres supérieures ;

f_{cmm} en MPa et s en mm.

Pour cette dernière relation, Bruggeling considère que les barres horizontales sont dites « supérieures » quand elles sont placées à une distance de 20 cm au moins du fond du coffrage ou à une distance inférieure à 20 cm de la face supérieure du béton.

I.3.5. Conclusions

Malgré les nombreux essais réalisés, le phénomène d'adhérence acier – béton reste encore méconnu et aucune relation ($\tau - g$) n'est satisfaisante. Cette relation dépend, en effet, de plusieurs paramètres.

La considération du comportement moyen paraît le moyen le plus adéquat pour représenter la loi $\tau - g$ en traction alternée.

Pratiquement tous les essais donnent l'allure de la courbe adhérence -glissement semblable à celle représentées figure I.32c.

La phase ascendante de la courbe adhérence –glissement entre l'acier et le béton est la partie la plus importante pour estimer les ouvertures de fissures, en utilisant l'équation différentielle du second ordre I.27 (§ I.4) surtout pour des pourcentages d'acier élevés.

La proposition de l'allure de la courbe adhérence –glissement donnée par le comité européen de béton [CEB88] (figure I.37) paraît plus réaliste, mais les valeurs du glissement pendant les différentes phases de chargement (tableau I.1) ne semblent pas représenter toute la réalité.

Par contre les intervalles de valeurs du glissement de la loi adhérence –glissement pour les différentes phases, proposés par Tassios et Koroneos [TAS 81] (figure I.33), paraissent plus justes.

La proposition de Ren et al [REN10], concernant la détermination des valeurs du glissement, entre l'acier et le béton, pendant les différentes phases de chargement nous paraît plus juste. Cependant l'allure de la courbe (figure I.38) représentant la variation de l'adhérence en fonction du glissement est trop simplifiée, surtout pendant la première phase de chargement ($0 \leq g \leq g_1$).

I.4. Espacement des fissures – ouverture des fissures

I.4.1. Espacement des fissures

En écrivant l'équilibre des forces au voisinage d'une fissure et en supposant une variation linéaire de la contrainte d'adhérence (avec τ_{max} au droit de la fissure, figure I.40), Salinger [SAL36] a déduit l'expression (I.21) de l'espacement maximum des fissures.

$$S_{r,max} = 0,23 \frac{\Phi f_{ctm}}{\rho \tau_{max}} \tag{I.21}$$

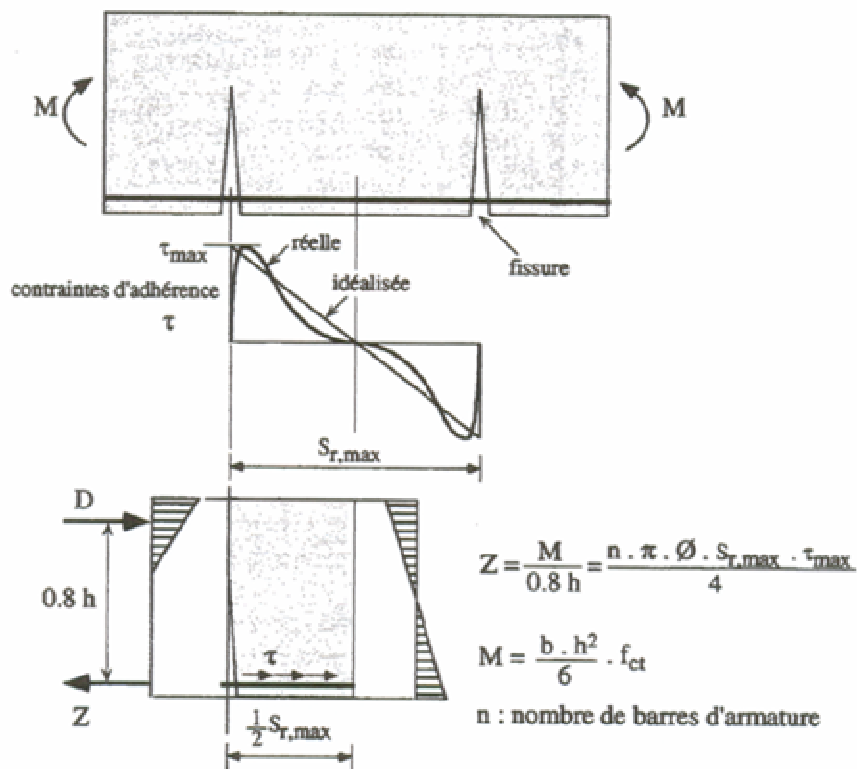


Fig.I.40. Mécanisme de transmission des forces par adhérence dans une poutre d'après Salinger [SAL36].

Après cette première relation I.21, plusieurs auteurs dont Ferry-Borges et Arga e lima [FER57], Brice [BRI64], Beeby [BEE72] [BEE78], Schiessl [SCH85], Jaccoud [JAC87-1]... se sont inspirés et ont ajouté un terme supplémentaire pour tenir compte de l'enrobage des barres d'armature (relation I.22).

$$S_{rm} = K.c + \frac{f_{ctm}}{\tau_m} \frac{\Phi}{4\rho} \tag{I.22}$$

τ_m : contrainte moyenne d'adhérence sur la longueur d'introduction

K : constante empirique

En 1964, Brice [BRI64] a proposé des relations de calcul d'espacement moyen des fissures utilisées par les règlements français BA60 et CCBA68 (voir § I.5.).

En 2005, Fouré [FOU05] a suggéré de revenir à la forme d'écriture (de l'espacement des fissures) à deux termes (relation I.23a) ; l'un tenant compte de l'enrobage c et l'autre du rapport Φ / ϖ_f .

$$S_m = \alpha.c + \beta. \frac{\Phi}{\varpi_f} \quad (\text{I.23a})$$

ϖ_f : pourcentage des armatures dans le « tirant ».

Par une interprétation statistique d'un grand nombre d'essais qui permet d'éliminer certains paramètres d'influence secondaires, Robinson et Morisset [ROB69] proposent (après simplification de notre part) l'expression I.23b.

$$S_m = 1,67.c + 0,117. \frac{\Phi}{\varpi_f} \quad (\text{I.23b})$$

Holmberg et Lindgren [HOL72] ont montré, avec de grands éléments de béton armé soumis à la traction pure en déformation contrôlée, que si la contrainte dans l'acier dépasse de moitié la contrainte correspondant à l'apparition de la première fissure, l'espacement moyen des fissures se stabilise à la valeur (en mm) donnée par la Relation I.24.

$$S_{rm} = 55 + 0,144 \frac{\Phi_1 A_{c,ef}}{\sum \Phi_i^2} \quad (\text{I.24})$$

avec Φ_1 : diamètre de la barre ayant le plus faible enrobage,

Φ_i : diamètre de la barre i ,

$A_{c,ef}$: exemple figure I.41 où c désigne l'enrobage.

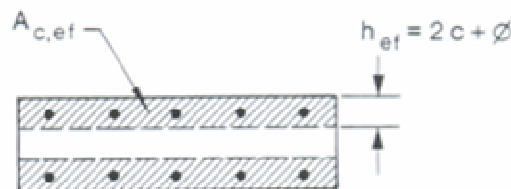


Fig.I.41. Définition de la section de béton effective $A_{c,ef}$; d'après [HOL72].

Cette définition de la section d'enrobage a été confirmée plus tard en 1985 par König [KON85] et Rostasy [ROS85]. Ces auteurs se sont basés sur les amorces de fissures et de la mécanique de la rupture.

Rostasy [ROS85] et Schiessl [SCH85] ont apporté deux manières de définir $A_{c,ef}$; selon que l'on considère la non plastification des aciers ou la limitation des ouvertures de fissures (figure I.42). Pour la première condition, le béton situé près des parements est en effet affaibli par la présence de nombreuses fissures, c'est donc la section du noyau de béton qui est déterminante. Par contre, la section du béton situé dans la zone d'enrobage est déterminante pour la limitation des ouvertures de fissures.

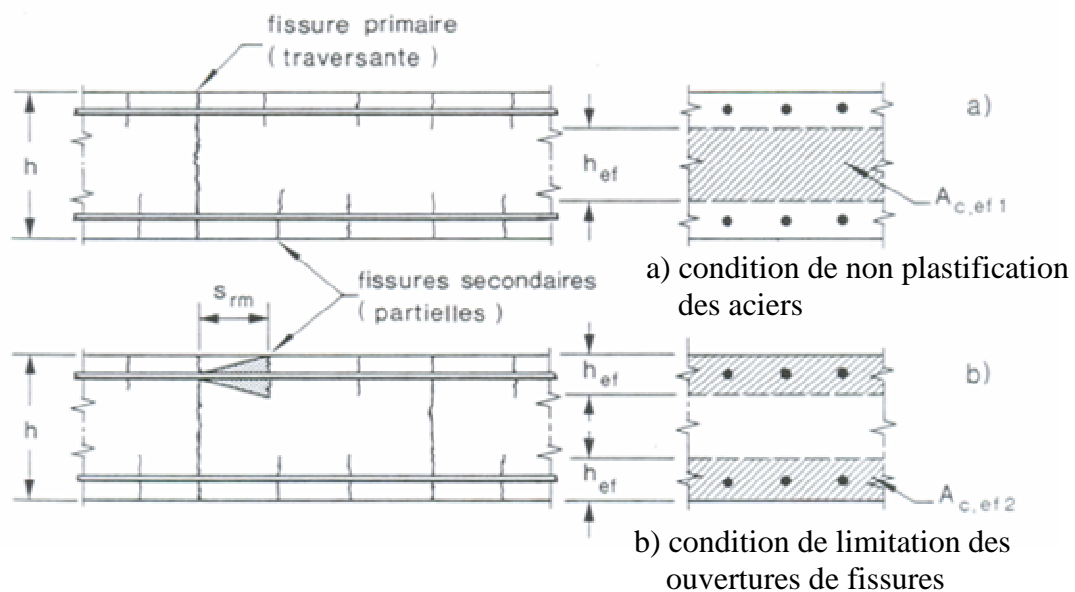


Fig.I.42 Définition $A_{c,ef}$; d'après Rostasy et Henning [ROS85] et Schiessl [SCH85]

On peut citer la proposition de Menn [MEN81], [MEN84], [MEN86] établie sur des observations in situ. Il a montré, relation I.25, qu'on pouvait écrire d'une manière simple et pratique la loi définissant l'espacement moyen des fissures (en mm).

$$S_{rm} = 60 + k \cdot s \quad (I.25)$$

s : espacement des barres d'armatures en mm

k : coefficient dépendant du diamètre et de l'enrobage des barres d'armature (la valeur moyenne proposée par Menn est $k = 1,3$).

Williams [WIL86], en réalisant des essais sur de grands éléments en béton armé (avec armature à haute adhérence) soumis à la traction pure en contrôlant la force, propose la relation I.26 pour l'espacement moyen des fissures.

$$S_{rm} = 2,2 c + 0,84 \frac{\Phi}{\rho} \quad (I.26)$$

Avec c : enrobage des barres,

Φ : diamètre des barres,

$\rho = A_s/A_{ct}$ où A_s est la section des armatures et A_{ct} l'aire de la section totale du béton tendu

Un modèle rationnel pour la transmission des efforts par adhérence dans un élément en béton armé a été présenté, pour la première fois par Rehm [REH57] [REH61]. Il a décrit le comportement physique d'adhérence des barres lisses et nervurées (haute adhérence). Il a établi un modèle mathématique et obtenu l'équation différentielle I.27 du second degré du glissement s en fonction de la distance x le long du « tirant ».

$$\frac{d^2s(x)}{dx^2} = \frac{4(1+n\rho)a}{\Phi E_s} s^b(x) \quad (I.27)$$

où a et b sont des paramètres du modèle.

La solution analytique a été déterminée par Martin [MAR73] et Noakowski [NOA78]. Cette résolution a permis de déterminer la répartition des contraintes et des déformations dans l'acier et le béton au voisinage d'une fissure isolée où l'espacement des fissures est supérieur à deux fois la longueur d'introduction L_r .

D'autres modèles de calcul d'espacement de fissures sont présentés à la sous section I.5.

I.4.2. Ouverture des fissures

En 1964, les relations de calcul des ouvertures de fissures proposées par Brice [BRI64] sont utilisés par les règlements français BA68 et CCBA68 (voir § I.5).

En 1985, une première solution analytique pour le calcul de l'ouverture moyenne des fissures (en phase de stabilisation) a été proposée par Krips [KRI85].

Les relations classiques de calcul d'ouverture de fissures utilisent une formulation empirique de l'espacement moyen des fissures et de la longueur d'introduction L_r .

Schiessl [SCH85] définit la longueur d'introduction (en mm) par la relation I.28 avec k_1 caractérisant la nuance des barres d'acier, k_2 dépendant du genre de sollicitation et ρ_{ef} pourcentage effective des armatures.

$$L_r \approx S_m = 50 + \frac{1}{4} k_1 k_2 \frac{\Phi}{\rho_{ef}} \quad (\text{I.28})$$

Cette relation a été adoptée par la commission technique de l'eurocode2 en 1992 (voir § I.5).

Jaccoud [JAC87-2], en supposant que l'espacement moyen des fissures est sensiblement égal à la longueur d'introduction (I.28) de Schiessl [SCH85], propose la relation (I.29) d'ouverture moyenne des fissures. Cette relation reste valable en phase de formation des fissures.

$$w_m = 0,7 \cdot L_r \cdot (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{cL}), \quad (\text{I.29})$$

ε_{s2} : déformation relative de l'armature au droit de la fissure,

ε_{cL} : déformation relative libre du béton au voisinage de la fissure.

Dans la plus part des modèles de calcul de l'espacement des fissures S_m , les relations ne font pas apparaître la résistance en traction du béton.

En effet le coefficient k_1 est un facteur tenant compte de la qualité d'adhérence des barres définie par le quotient $k_1 = f_{cm}/\tau_m$; pratiquement constant.

Un modèle a été développé par Beeby, [BEE78] [BEE79], en considérant que l'ouverture moyenne des fissures est donnée par le produit de l'espacement moyen des fissures et de la différence des déformations moyennes de l'acier et du béton sur cette longueur ; relation I.30.

$$w_m = S_m \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}). \quad (\text{I.30})$$

La déformation moyenne de l'acier ε_{sm} (relation I.31) est généralement estimée en faisant varier la contribution du béton tendu entre les fissures en fonction du niveau de chargement.

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sf} - \Delta\varepsilon_m. \quad (\text{I.31})$$

ε_{sf} : allongement relatif de l'acier au droit de la fissure

$\Delta\varepsilon_m$: contribution du béton tendu

Dans ce cas, Beeby a estimé cette contribution du béton tendu $\Delta\varepsilon_m$ en se basant sur la contrainte de l'acier à l'apparition de la première fissure (au droit de cette fissure).

Un autre travail a été effectué par Farra [FAR95] en étudiant l'effet de la résistance du béton sur la fissuration principalement sous déformation imposée. Un modèle de calcul empirique est ainsi développé quelle que soit la résistance du béton variant de 30 à 100 MPa et quelle que soit l'intensité et la nature des sollicitations.

D'autres formes de la contribution du béton entre les fissures ont été présentées (voir § I.2.3), afin de tracer le diagramme fictif de l'acier.

D'autres modèles de calcul d'ouverture de fissures sont donnés par les codes et règlements (§.I.5).

I.4.3. Conclusions

Différents auteurs proposent des formules théoriques donnant les espacements de fissures en fonction du pourcentage d'acier, du rapport de la section d'acier sur le périmètre utile de ces barres, de la nature des barres, de l'enrobage et des espacements des barres dans la section droite de l'élément. Ces formules d'expressions différentes figurent dans beaucoup de codes et règlements.

Certains auteurs considèrent que l'espacement moyen des fissures est sensiblement égal à la longueur d'introduction L_r , alors que d'autres estiment que la moyenne se situe entre L_r et $2.L_r$. Cette dernière proposition paraît plus juste.

Concernant l'application de ces relations aux poutres et autres éléments structuraux, la définition du « tirant » à considérer n'est pas clairement précisée.

La définition de ce « tirant » passe par la délimitation de la section effective du béton autour des armatures influencée par les efforts de traction. Ceci permet d'évaluer correctement le pourcentage d'acier dans cette zone et d'approcher les déformations des éléments de structures par des lois fictives adéquates proposées à la sous section I.2.

Les largeurs des ouvertures des fissures qui sont déterminées à partir des longueurs d'espacements des fissures, utilisent les contraintes moyennes de l'acier et du béton entre deux fissures consécutives. La détermination de ces contraintes moyennes (de l'acier et du béton) doit être estimée correctement afin de mieux évaluer ces ouvertures de fissures.

Pour les espacements et les ouvertures de fissures, il faut aussi considérer l'effet d'échelle. D'après Fouré [FOU02], pour les poutres il faut considérer les petites hauteurs ($\approx 0,30\text{m}$) et les grandes hauteurs ($\approx 1,50\text{m}$).

I.5. Codes et règlements européens sur la fissuration

Nous reprenons ici en partie le travail effectué par Fouré [FOU05] en le complétant avec quelques corrections et améliorations.

I.5.1. Règles françaises BA 1960, [RBA61]

a) Contrainte admissible de l'acier en traction

Dans ce règlement, on utilise les « contraintes admissibles des matériaux ». Pour les aciers, la contrainte admissible en traction $\bar{\sigma}_a$ est prise égale à deux tiers de la contrainte de traction d'élasticité nominale σ_{en} . Afin de limiter les préjudices de la fissuration, des contraintes limites σ_1 et σ_2 (en anciennes unités kgf/cm²) pour les aciers ont été introduites.

A l'annexe C de ce règlement, une théorie simplifiée sur la fissuration, issue des travaux de Brice [BRI51] [BRI57] et autres Sayard et al [SAY58], est exposée. La contrainte « admissible » de l'acier à utiliser en traction pour le béton armé est définie par la relation (I.32).

$$\bar{\sigma}_a = \text{Min} \left\{ \frac{2}{3} \sigma_{en}, \max(\sigma_1, \sigma_2) \right\} \quad (\text{I.32})$$

$$\text{où } \sigma_1 = k \frac{\eta}{\Phi} \frac{\varpi_f}{(10 + \varpi_f)} \text{ et} \quad (\text{I.32a})$$

$$\sigma_2 = 7,5 \sqrt{\frac{\eta}{\Phi} k \bar{\sigma}_b} \quad . \quad (\text{I.32b})$$

$$\varpi_f = 100 \frac{A}{B_f} \quad : \text{ Pourcentage effectif des aciers :}$$

A : section des barres tendues prises en compte à la section d'enrobage ;

B_f : aire de la section d'enrobage des aciers tendus,

Φ : désigne le diamètre nominal exprimé en mm de la plus grosse des barres tendues de la section d'enrobage,

η : coefficient de fissuration dépendant de la qualité d'adhérence entre l'acier et le béton :

- ronds lisses η = 1 ;

- barres HA, la valeur de η fixé par la fiche d'identification de l'acier,

$\bar{\sigma}_b$: contrainte de traction de référence du béton exprimée en kgf/cm^2 ,

k : grandeur à laquelle on attribue les valeurs suivantes :

- $k = 1,5 \cdot 10^5$ si la fissuration est peu nuisible ;
- $k = 10^5$ si la fissuration des zones tendues est préjudiciable ;
- $k = 0,5 \cdot 10^5$ si l'ouverture des fissures est très préjudiciable.

La valeur σ_2 correspond à la fissuration non systématique (fissures isolées, quand $\bar{\omega}_f$ est relativement faible) et σ_1 à la fissuration systématique.

Ces règles simplifiées sont applicables à défaut d'autres justifications, aux armatures longitudinales des tirants, poutres rectangulaires et à talon, voiles et coques.

b) Espacement moyen des fissures (expérimental)

Lorsque la fissuration est systématique, l'espacement moyen Δl_m (relation I.33) des fissures s'écrit :

$$\Delta l_m = \frac{3\Phi}{\eta} \left(1 + \frac{10}{\bar{\omega}_f}\right). \quad (\text{I.33})$$

c) Contrainte moyenne de l'armature σ_{fm} entre deux fissures consécutives

La contrainte des armatures au droit de deux fissures successives étant σ_j , σ_{fm} est donnée par la relation (I.34).

$$\sigma_{fm} = \sigma_f - \frac{45 \sigma_j}{\bar{\omega}_f} \quad (\text{I.34})$$

d) Ouverture des fissures

- Largeur des fissures lorsque la fissuration est systématique

Lorsque la formation des fissures est systématique, leur largeur moyenne, mesurée au centre de gravité des armatures tendues considérées, est donnée par la relation I.35a,

$$w_m = \frac{\sigma_{fm} \Delta l_m}{E_a}, \quad (\text{I.35a})$$

où E_a représente le module d'élasticité de l'acier,

ou encore avec (I.33), (I.34) et en négligeant la déformation du béton, on peut écrire la relation I.35b.

$$w_m = \left(\sigma_f - \frac{45 \sigma_j}{\bar{\omega}_f} \right) \frac{3\Phi}{E_a \eta} \left(1 + \frac{10}{\bar{\omega}_f} \right). \quad (\text{I.35b})$$

En exprimant σ_f , σ_j et E_a avec les mêmes unités, w_m a la même unité que Φ .

- Largeur des fissures lorsque la fissuration n'est pas systématique

Lorsque la formation des fissures n'est pas systématique, on admet $\sigma_{fm} = 0,5 \sigma_f$ et :

$$w_m = 2 \Delta l \frac{\sigma_{fm}}{E_a},$$

Δl étant la longueur d'ancrage :

$$\Delta l = \frac{\Phi \sigma_f}{4 \tau_d},$$

τ_d étant la contrainte d'adhérence :

$$\tau_d = \frac{15 \sigma_j \eta}{10 + \bar{\omega}_f},$$

l'ouverture moyenne de la fissure s'écrit alors (relation I.36):

$$w_m = \frac{\Phi (10 + \bar{\omega}_f) (\sigma_f)^2}{60 \sigma_j \eta E_a}. \quad (\text{I.36})$$

On remarque que la valeur de τ_d est, indirectement (par $\bar{\omega}_f$), fonction de l'enrobage.

Il n'est pas fait de référence explicite à des valeurs limites d'ouverture des fissures. En négligeant le terme $(45 \sigma_j / \bar{\omega}_f)$ et en posant $\sigma_f = \sigma_1$ (fissuration systématique), on obtient avec la relation I.35b ; $w_m = 3 k/E_a$ soit :

-- $k = 1,5 \cdot 10^5$ (fissuration peu nuisible), $w_m \approx 0,22 \text{ mm}$

-- $k = 10^5$ (fissuration préjudiciable), $w_m \approx 0,15 \text{ mm}$

-- $k = 0,5 \cdot 10^5$ (fissuration très préjudiciable), $w_m \approx 0,07 \text{ mm}$

I.5.2. Règles françaises CCBA 68 [RBA68]

Concernant la fissuration, on retrouve à peu près les mêmes types de formules que les Règles BA60 avec quelques modifications. Les contraintes sont toutes exprimées en bars et ϖ_f est pris égal à $\frac{A}{B_f}$ au lieu de $100 \frac{A}{B_f}$ dans les règles BA 60 et le module de l'acier $E_a = 2.10^6$ bars.

Les relations (I.32), (I.33), (I.34) et (I.35b) s'écrivent successivement (I.38), (I.39), (I.40) et (I.41).

$$\bar{\sigma}_a = \text{Min} \left\{ \frac{2}{3} \sigma_{en}, \max(\sigma_1, \sigma_2) \right\} \quad (\text{I.38})$$

$$\text{où } \sigma_1 = k \frac{\eta}{\Phi} \frac{\varpi_f}{(1+10\varpi_f)} \text{ et} \quad (\text{I.38a})$$

$$\sigma_2 = 2,4 \sqrt{\frac{\eta}{\Phi} k \bar{\sigma}_b}, \quad (\text{I.38b})$$

avec ici :

$$\varpi_f = \frac{A}{B_f},$$

k : une grandeur exprimée en bars - millimètres :

- k = 1,5 .10⁶ si la fissuration est peu nuisible ;
- k = 10⁶ si la fissuration des zones tendues est préjudiciable ;
- k = 0,5 . 10⁶ si l'ouverture des fissures est très préjudiciable.

$$\Delta l_m = \frac{3\Phi}{\eta} \left(1 + \frac{1}{10\varpi_f} \right) \quad (\text{I.39})$$

$$\sigma_{fm} = \sigma_f - \frac{0,45 \sigma_j}{\varpi_f} \quad (\text{I.40})$$

$$w_m = \left(\sigma_f - \frac{0,45 \sigma_j}{\varpi_f} \right) \frac{3\Phi}{E_a \eta} \left(1 + \frac{1}{10\varpi_f} \right) \quad (\text{I.41})$$

La largeur maximale d'ouverture des fissures peut être prise égale à :

$$w_{\max} = \frac{1}{5.10^6} \frac{\Phi}{\eta} \left(\frac{1+10 \bar{\omega}_f}{\bar{\omega}_f} \right) \sigma_f \quad (\text{I.41a})$$

Avec le même raisonnement que précédemment, on trouve en fissuration systématique, $w_{\max} = k / 5.10^6$ soit :

-- $k = 1,5 . 10^6$ (fissuration peu nuisible) : $w_{\max} \approx 0,3 \text{ mm}$;

-- $k = 10^6$ (fissuration préjudiciable) : $w_{\max} \approx 0,2 \text{ mm}$;

-- $k = 0,5.10^6$ (fissuration très préjudiciable) : $w_{\max} \approx 0,1 \text{ mm}$,

on a ainsi $w_{\max} \approx 1,4 w_m$.

I.5.3. Règles françaises BAEL 80 [RBA80]

Dans ces règles, il n'est plus fait mention du calcul des ouvertures de fissures, mais on y retrouve le même type de raisonnement que les règles BA 1960 et CCBA 68 pour limiter la contrainte des aciers en traction.

a) Cas où la fissuration est peu nuisible

Ce cas concerne les locaux couverts et clos sans condensation (aussi il n'est pas fait objet de conditions spécifiques d'ouverture des fissures). Aucune vérification n'est demandée pour les armatures en dehors de la condition de non fragilité.

b) Cas où la fissuration est préjudiciable

Ici l'élément est considéré exposé aux intempéries, ou à des condensations, ou peut être alternativement noyé ou émergé en eau douce. La contrainte de traction des armatures tendues σ_s est limitée à la valeur donnée par la relation (I.42a).

$$\sigma_s = \text{Min} \left\{ \frac{2}{3} f_e ; 150 \eta \right\} \quad (\text{I.42a})$$

f_e : contrainte limite élastique de l'acier

D'autres conditions sont ajoutées pour limiter les ouvertures de fissures :

- le diamètre des armatures est au moins égal à 6 mm ($\Phi \geq 6 \text{ mm}$),
- pour les poutres hautes, on doit disposer des armatures de peau le long de chaque parement avec au moins 3 cm^2 par mètre de longueur de parement,
- les barres tendues de diamètre supérieur à 20 mm doivent être espacées au plus de

quatre fois le diamètre,

- pour les voiles et les dalles dont l'épaisseur totale h est inférieure à 40 cm, la distance s entre axes des armatures ne doit pas dépasser $s_{\max} = \min \{25 \text{ cm} ; 2 h\}$.

c) Cas où la fissuration est très préjudiciable

Dans ce cas l'élément est exposé à un milieu agressif (eau de mer, embruns, brouillards salins, eau très pure, sol corrosif), ou doit assurer une étanchéité. La contrainte de traction des armatures tendues σ_s est limitée à la valeur donnée par la relation (I.42b).

$$\sigma_s = \text{Min} \left\{ \frac{1}{2} f_e ; 110 \eta \right\}, \quad (\text{I.42b})$$

avec les conditions ci-dessous :

- $\Phi \geq 8 \text{ mm}$,
- armatures de peau de $5 \text{ cm}^2/\text{m}$ de longueur de parement,
- $s_{\max} \leq 3\Phi$ pour $\Phi \geq 20 \text{ mm}$
- pour les voiles et les dalles dont l'épaisseur totale h est inférieure à 40 cm, la distance s entre axes des armatures ne doit pas dépasser :
 $s_{\max} = \min \{20 \text{ cm} ; 1,5 h\}$.

I.5.4. Règles françaises BAEL 83 [RBA83]

Ces règles sont une mise à jour des règles BAEL 80.

Pour la fissuration préjudiciable, les prescriptions pour les armatures de peau ($3 \text{ cm}^2/\text{m}$ de parement) et les écartements de barres de diamètre $\Phi \geq 20 \text{ mm}$ ne sont pas mentionnés. Toutefois, ces recommandations sont reprises dans le chapitre « Dispositions constructives ».

I.5.5. Règles françaises BAEL 91 [RBA91]

Dans ces règles, les classes de « fissurations peu préjudiciables », « fissurations préjudiciables » ou « fissurations très préjudiciables » ne sont plus directement définies mais déterminées par des documents spécifiques.

Les valeurs limites dépendant du coefficient η ont été remplacées par les expressions du type $k\sqrt{\eta f_{ij}}$.

La contrainte des aciers en traction est limitée aux valeurs :

- cas où la fissuration est peu préjudiciable : pas de limitation ;

Implicitement on a donc $\sigma_s \leq f_e$.

- Cas où la fissuration est préjudiciable :

$$\sigma_s = \text{Min} \left\{ \frac{2}{3} f_e ; 110 \sqrt{\eta f_{ij}} \right\} ; \quad (\text{I.43a})$$

- Cas où la fissuration est très préjudiciable :

$$\sigma_s = \text{Min} \left\{ 0,5 f_e ; 90 \sqrt{\eta f_{ij}} \right\}. \quad (\text{I.43b})$$

Les autres prescriptions pour le diamètre Φ des barres, l'espacement s des barres et les armatures de peau sont les mêmes que les règles BAEL 83.

I.5.6. Règles françaises BAEL 91- modificatif de 1999 [RBA99]

Il a été repris dans ces règles, la définition des trois cas de fissuration qui figure dans la version des règles BAEL 83.

La contrainte des aciers en traction est limitée aux valeurs :

- cas où la fissuration est peu préjudiciable : pas de limitation.

Implicitement on a donc $\sigma_s \leq f_e$.

- Cas où la fissuration est préjudiciable :

$$\sigma_s = \xi, \text{ avec } : \xi = \text{Min} \left[\frac{2}{3} f_e ; \max \left(0,5 f_e ; 110 \sqrt{\eta f_{ij}} \right) \right]. \quad (\text{I.44a})$$

- Cas où la fissuration est très préjudiciable :

$$\sigma_s = 0,8 \cdot \xi. \quad (\text{I.44b})$$

Exemple : armatures HA ($\eta = 1,6$; $f_e = 500$ MPa), béton $f_{cj} = 25$ MPa,

$f_{ij} = 2,1$ MPa : contraintes (en MPa) à utiliser pour l'acier en traction(tableau I.2):

<i>Cas de fissuration</i>	<i>BAEL 83</i>	<i>BAEL 91</i>	<i>BAEL 99</i>
<i>Fissuration préjudiciable</i>	240	201	250
<i>Fissuration très préjudiciable</i>	176	165	200

Tab. I.2. Comparaison des contraintes limites (en MPa) des aciers en traction

Dans cet exemple, avec un béton ordinaire, on remarque que le BAEL 91 est plus sévère et le BAEL 99 revient à des contraintes plus élevées (même plus que le BAEL 83).

Pour le BAEL 83, la contrainte limite des aciers à utiliser en traction ne dépendait que de la nature des aciers. Avec les règlements BAEL 91 et BAEL 99, cette contrainte dépend aussi de la nature du béton.

I.5.7. Code modèle CEB-FIP 1978 [CEB78]

Dans ce code, il est fait mention du calcul des espacements des fissures, des ouvertures de fissures et de la contrainte moyenne des armatures tendues.

Ce code modèle, exige certaines conditions pour le calcul des ouvertures de fissure :

- un enrobage minimum c ,
- sensibilité à la corrosion,
- conditions d'ambiance,
- combinaison d'action.

Pour les formules de calcul, il faut :

- un enrobage minimum de 10 mm,
- armature minimale de non fragilité,
- distance entre les barres supérieures au plus gros diamètre ou à 20 mm,
- distribution sensiblement uniforme des barres dans la section d'enrobage.

a) Ouverture des fissures

La valeur caractéristique w_k est égale à $1,7 w_m$.

Valeur moyenne w_m :

$$w_m = s_{rm} \cdot \varepsilon_{sm} \cdot \quad (\text{I.45a})$$

s_{rm} : espacement moyen des fissures

ε_{sm} : allongement moyen de l'armature

b) Espacement moyen des fissures

$$s_m = 2(c + 0,1s) + k_1 k_2 \frac{\Phi}{\rho_f} \quad (\text{I.45b})$$

$$\rho_f = \frac{A_s}{A_{c,ef}} \quad : \text{ratio d'armatures de la section d'enrobage,}$$

A_s : aire de l'armature contenue dans la section d'enrobage $A_{c,ef}$,

$A_{c,ef} = b_f \cdot h_f$: aire efficace du béton, où les armatures peuvent influencer l'ouverture des fissures (figure I.43 extraite du CEB-FIP 1978 [CEB78]).

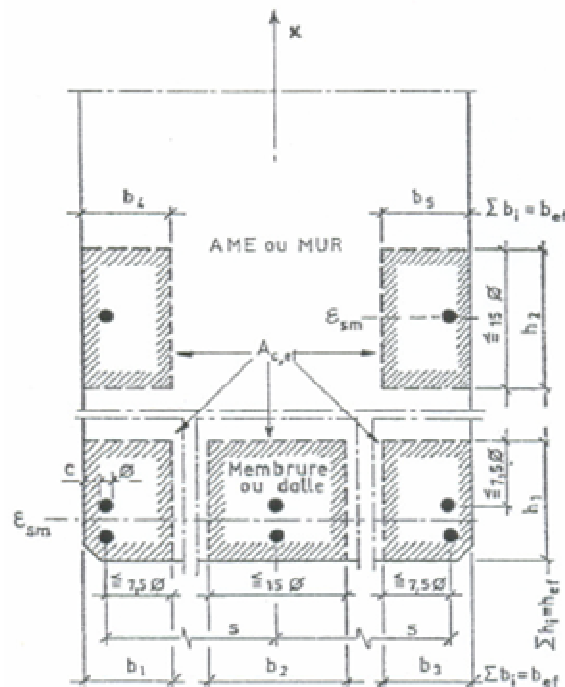


Fig. I.43. Définition de la section d'enrobage $A_{c,ef}$ selon CEB-FIP 1978 [CEB78]

Les « tirants individuels » sont limités par le contour de la section totale et les distances $7,5 \Phi$ à partir de l'axe de l'armature, dans les deux directions (selon b_i et h_i). Les largeurs et hauteurs efficaces sont égales à :

$$b_{ef} = \sum b_i \quad , \quad h_{ef} = \sum h_i.$$

Dans les cas des dalles, h_{ef} est borné supérieurement à $(h - x_1) / 2$; h étant l'épaisseur totale de la dalle (x_1 n'est pas précisé mais on peut supposer que c'est la hauteur comprimée).

Φ : diamètre des barres,

c : enrobage des aciers,

s : espacement des barres avec un maximum de 15Φ ,

k_1 : coefficient d'adhérence des armatures,

- $k_1 = 0,4$ pour les barres HA,

- $k_1 = 0,6$ pour les fils de précontrainte nervurés (d'après le Bulletin d'information N° 158-E du CEB [CEB85]),

- $k_1 = 0,8$ pour les barres lisses (et les fils de précontraintes crantés ou ondulés (d'après le Bulletin d'information N° 158-E du CEB [CEB85]) ;

k_2 : coefficient qui tient compte du gradient des déformations longitudinales dans la section, en fonction des déformations calculées en section fissurée,

- $k_2 = 0,125$ en flexion,

- $k_2 = 0,25$ en traction pure,

- $k_2 = 0,125 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$ en traction excentrée ou pour un zone de l'âme d'une poutre.

Pour cette relation (I.45b), on peut apporter les remarques suivantes :

- les valeurs de ε_1 et ε_2 ne sont pas clairement définies ,

- le cas de diamètre différent n'est pas envisagé,

- on doit normalement considérer la distance entre nu des barres,

- en flexion composée, il n'est pas précisé le cas de la flexion avec compression.

c) Allongement moyen de l'armature

Le code modèle CEB-FIP 1978 [CEB78] donne pour l'allongement moyen de l'armature ; la relation (I.45c). L'effet de la contribution du béton tendu est représenté Figure I.44.

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0,4 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (\text{I.45c})$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_{sm} = \beta_1 \beta_2 \frac{(\sigma_{sr})^2}{E_s \sigma_s} \quad (\text{I.45d})$$

σ_s : contrainte maximale de l'armature au droit de la fissure ;

E_s : module d'élasticité de l'acier ;

σ_{sr} : contrainte dans l'armature, en section fissurée, sous sollicitation de fissuration qui correspond à l'atteinte de la résistance à la traction moyenne du béton f_{tm} dans la section non fissurée ;

β_1 : = $1 / (2,5.k_1)$, coefficient caractérisant la qualité d'adhérence des barres ;

β_2 : coefficient représentant l'influence de la durée d'application et de la répétition des charges,

$\beta_2 = 1$ au premier chargement,

$\beta_2 = 0,5$ pour des charges de longue durée ou un grand nombre de cycles de chargement.

Les expressions (I.45a), (I.45b) et (I.45c) sont applicables aussi bien avant qu'après la stabilisation des fissures.

Il n'est pas évident que l'on ait les mêmes formulations pendant la phase de formation des fissures et la phase de stabilisation des fissures.

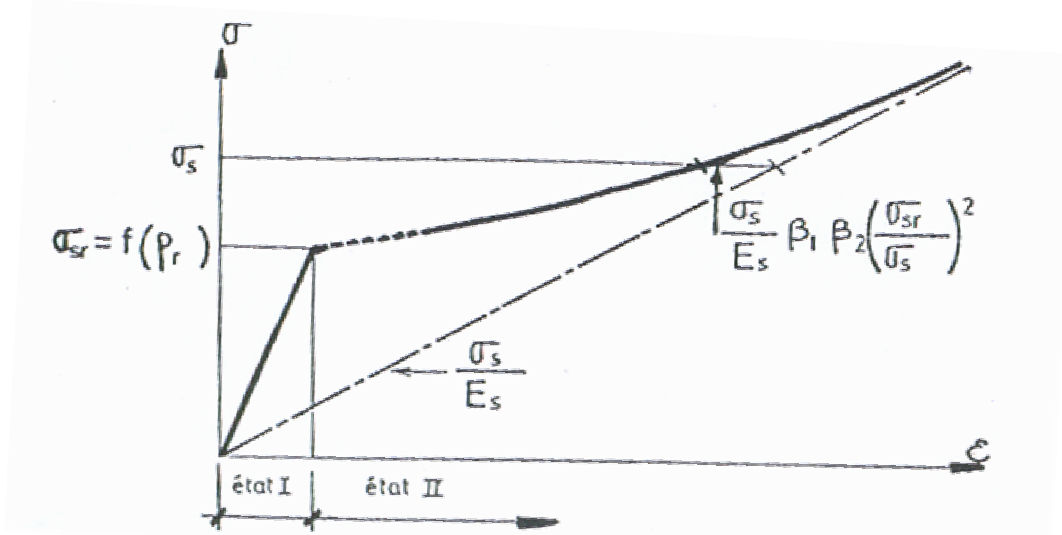


Fig. I.44. Effet de la contribution du béton tendu selon CEB-FIP 78 [CEB78]

d) Manuel CEB – Bulletin d'information n° 158-E [CEB84]

Dans ce manuel, un complément est apporté pour tenir compte de la déformation moyenne du béton entre les fissures, alors que celle-ci a été négligée dans la relation (I.45c).

Cette déformation du béton est donnée par la relation (I.46a).

$$\varepsilon_{cm} = \beta_1 \beta_2 \frac{\sigma_{sr} f_{tm}}{\sigma_s E_{ci}} \quad (\text{I.46a})$$

où E_{ci} est le module d'élasticité instantané du béton.

Si ce terme est négligé, alors le calcul de l'ouverture moyenne des fissures par l'expression (I.45a) est correct, sinon, il est plus juste d'utiliser la relation (I.46b).

$$w_m = s_{rm} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (\text{I.46b})$$

Dans ce cas, les contraintes σ_{sm} et σ_s de l'armature sont reliées par la relation (I.46c).

$$\sigma_{sm} = \sigma_s - \beta_1 \beta_2 \left[\frac{(\sigma_{sr})^2}{\sigma_s} - \frac{E_s}{E_{ci}} f_{tm} \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right] \quad (\text{I.46c})$$

Si la fissuration est due à des déformations imposées, on prend pour l'ouverture caractéristique $w_m = 1,3 w_m$ (au lieu de $1,7 w_m$ pour les charges imposées).

Pour une poutre fléchie à membrure tendue de largeur b' supérieur à la largeur d'âme b_0 (poutre à talon par exemple), le paramètre k_2 (relation I.45b) est alors :

$$k_2 = 0,125 \left(2 - \frac{b_0}{b'} \right).$$

Si la largeur de la poutre est constante ($b = b_0$), on retrouve $k_2 = 0,125$.

I.5.8. Code modèle CEB-FIP 1990 [CEB93]

a) Ouverture des fissures – valeur caractéristique

Compte tenu de la nature aléatoire de la fissuration, on peut se baser sur des valeurs nominales d'ouverture limites. Ces valeurs ne peuvent être comparées aux ouvertures mesurées in situ.

La corrosion de l'acier des armatures n'est pas nécessairement accrue par la formation des fissures, sous réserve que les ouvertures ne dépassent pas une valeur limite w_{lim} .

On doit donc avoir une ouverture caractéristique $w_k \leq w_{lim}$.

Pour les éléments en béton armé sous la combinaison d'actions quasi-permanente, la valeur w_{lim} est fixée pour toutes les classes d'exposition à 0,3 mm.

La valeur caractéristique est déterminée par la relation (I.47a) qui permet de calculer l'ouverture des fissures dans les zones d'enrobage des barres. Mais en dehors de ces zones, des fissures plus larges peuvent exister.

$$w_k = l_{\max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} + \varepsilon_{cs}) \quad (\text{I.47a})$$

l_{\max} : « longueur de glissement » égale à la distance sur laquelle il existe un glissement entre l'acier et le béton dû à la mise en œuvre de l'adhérence ; l_{\max} peut donc être considérée comme étant le double de la longueur d'ancrage. Les déformations ε_{sm} et ε_{cm} sont les moyennes sur cette longueur ;

ε_{cs} : déformation du retrait libre (en valeur absolue).

La relation I.47a diffère de celle du code modèle CEB-FIP 1978 avec l'utilisation de w_k (en fonction de l_{\max}) au lieu w_m et aussi avec l'introduction de ε_{cm} et ε_{cs} .

b) Contrainte de traction limite $\sigma_{s,\text{lim}}$ dans les armatures

Elle est définie par un calcul de traction simple sur le « tirant efficace » au moment de la fissuration, sa valeur est donnée par la relation (I.47b).

$$\sigma_{s,\text{lim}} = \left(\frac{1}{\rho_f} + \frac{E_s}{E_{ci}} \right) f_{tm} \quad (\text{I.47b})$$

Pour ρ_f faible et un béton de haute résistance (E_{ci} grand), on peut écrire $\sigma_{s,\text{lim}} \approx \frac{f_{tm}}{\rho_f}$

- $\sigma_s \leq \sigma_{\text{lim}}$: la formation d'une fissure isolée doit être envisagé,
- $\sigma_s > \sigma_{\text{lim}}$: on admet que la fissuration est stabilisée.

Normalement, il doit y avoir un intervalle entre l'apparition de la première fissure et la dernière fissure. Par exemple $\sigma_s > k \sigma_{\text{lim}}$ où k est un facteur (supérieur à 1) définissant les cas possibles.

$\rho_f = \frac{A_s}{A_{cf}}$: ratio où A_{cf} représente l'aire efficace définie ci-dessous.

L'aire efficace A_{cf} tient compte de la distribution non uniforme des contraintes normales (dans le béton) dues aux forces d'adhérence, au voisinage des extrémités de la longueur de glissement.

Cette aire est définie différemment de l'aire A_{cf} du code modèle CEB-FIB 1978.

A_{cf} est définie par sa hauteur efficace h_f (ou largeur b_f), selon la figure I.45.

- pour les dalles par exemple où les armatures de même diamètre sont disposées en un seul lit :

$$h_f' = \min \left\{ 2,5 \left(c + \frac{\Phi}{2} \right); \frac{(h - x)}{3} \right\},$$

où h est la hauteur totale et x la hauteur comprimée.

- pour un élément en traction (voiles, armatures de peau d'une âme de poutre, ...) :

$$b_f' = \min \left\{ 2,5 \left(c + \frac{\Phi}{2} \right); \frac{b_0}{2} \right\},$$

où b_0 est l'épaisseur totale de l'élément considéré.

- pour une poutre dont la hauteur utile d est définie par le centre de gravité de toutes les

armatures de la membrure tendue :

$$h_f' = \min \left\{ 2,5 (h - d); \frac{(h - x)}{3} \right\}$$

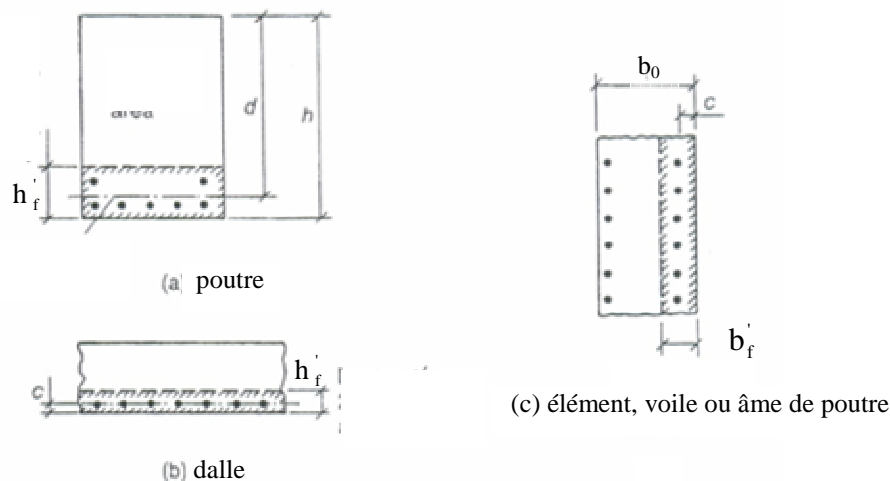


Fig. I.45. Définition de la section d'enrobage A'_{cf} selon le code modèle CEB-FIP 1990 [CEB93]

Nous remarquons que la figure I.45 ressemble à celle apparaissant en annexe des règles françaises CCBA 68.

Pour le calcul de h_f' , on a relevé une différence sensible pour les dalles entre les deux codes modèles CEB-FIB 78 et CEB-FIB 90. En effet, par exemple pour un $\Phi=12\text{mm}$ et $c=20\text{mm}$, la valeur limite de x serait souvent déterminante. Pour $h=180\text{mm}$ ($d=154\text{mm}$, $s=100\text{mm}$) et $x\approx 6\text{mm}$ nous avons :

- pour le code modèle CEB-FIB 1978 : $h_f = c + 8\Phi = 116\text{mm}$ et donc $(h-x)/2 \approx 87\text{mm}$,

- pour le code modèle CEB-FIB 1990 [CEB93]: $h'_f = 2,5 + 1,25\Phi = 65\text{mm}$ et donc $(h-x)/3 \approx 65\text{mm}$.

Dans les cas a) et b) de la figure I.45, la largeur b_f est égale à la largeur totale, quelque soit l'espacement entre les barres, lequel n'intervient pas non plus dans l'espacement des barres, contrairement au code modèle CEB-FIB 78.

c) Espacement des fissures – longueur de glissement

Le Code modèle CEB-FIP 1990 [CEB93] donne l'espacement maximum des fissures, dans le cas de la fissuration stabilisée (relation I.47c).

$$l_{\max} = \frac{\Phi}{3,6\rho'_f} \quad (\text{I.47c})$$

Cette expression est trop simplifiée comparée à celle donnée par le code modèle CEB-FIB 1978 qui paraît plus réaliste.

Pour une fissure unique, la longueur de glissement (double de la longueur d'encrage) est donnée par la formule I.47d.

$$l_{\max} = \frac{\sigma_s}{2\tau_{bk}} \frac{\Phi}{1 + \frac{E_s}{E_{ci}} \rho'_f} \quad (\text{I.47d})$$

où $\tau_{bk} = \varphi \cdot f_{tm}$: fractile inférieur de la contrainte d'adhérence moyenne,

$\varphi = 1,8$ au premier chargement,

$\varphi = 1,35$ pour un chargement permanent ou répété.

d) Allongement moyen

L'expression (I.47e) donnée par le Code modèle CEB-FIP 1990 [CEB93], est la différence entre l'allongement relatif moyen de l'acier et l'allongement relatif moyen du béton. Cette expression est valable pour une fissure unique ou pour la fissuration stabilisée.

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left(1 - \beta_2' \frac{\sigma_{s,lim}}{\sigma_s} \right) \quad (I.47e)$$

$\beta_2' = 0,60$: pour le cas général,

$\beta_2' = 0,38$: pour la fissuration stabilisée, sous l'effet des charges permanentes ou répétées.

Avec la formule (I.47f) traduisant la déformation moyenne constante du béton, on remarque ainsi que $\Delta\varepsilon$ (relation I.47g), dans le domaine élastique, est constant contrairement au code CEB-FIP 78 où il variait avec σ_s (relation I.45d).

$$\varepsilon_{cm} \approx \beta_2' \frac{f_{tm}}{E_{ci}} \quad (I.47f)$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_{sm} = \beta_2' \left(\frac{\sigma_{s,lim}}{E_s} - \frac{f_{tm}}{E_{ci}} \right) \quad (I.47g)$$

Nous remarquons certaines simplifications par rapport au code CEB-FIP 78 :

- *Il n'existe pas de facteur tenant compte de la qualité d'adhérence des barres*
- *le rapport $\sigma_{s,lim} / \sigma_s$ intervient à la puissance 1 (relation I.47e), au lieu de σ_{sr} / σ_s à la puissance 2 (relation I.45c),*
- *il n'y a pas de borne inférieure de $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$. Mais implicitement dans la relation (I.47e) si on fait $\sigma_{s,lim} = \sigma_s$, on obtient une borne inférieure égale à :*

$$\frac{\sigma_s}{E_s} (1 - \beta_2').$$

e) Bulletin d'information n° 217, Avril 1993, [CEB93-1]

Dans ce bulletin l'aire efficace A_{cf} est justifiée de la façon suivante. Avec une aire de béton grande par rapport au diamètre Φ et de l'enrobage c , après l'apparition d'une première fissure les contraintes de traction dans le béton ont une distribution non uniforme (figure I.46). L'effort F_c transmis au béton par l'armature varie de 0 à $F_{c,max}$ sur la longueur l_t . L'aire A_c intéressée par la diffusion à partir de la fissure s'accroît à partir de celle-ci. Il en résulte que la contrainte $\sigma_c = F_c / A_c$ peut atteindre un maximum situé à une distance de la fissure inférieure à l_t . Une autre fissure peut donc se produire à une distance inférieure à l_t . L'espacement l des fissures est alors inférieur à celui qu'on obtiendrait dans un tirant où les contraintes σ_c sont à peu près uniformes ($l \approx 2l_t$ à $3l_t$).

D'après Fouré [Fou05], La grandeur $2,5(c + 0,5\Phi)$ n'est pas ici quantitativement démontrée. De plus, ceci justifierait de considérer aussi l'influence de l'espacement des barres dans le sens de la largeur b , où se produit nécessairement un effet de diffusion comme spécifié dans le commentaire I.5.8.b sur l'aire efficace A'_c . En faisant le calcul approché, avec l'hypothèse que $F_c(x)$ est parabolique, une diffusion de $A_c(x)$ à 45° et l'épaisseur b constante :

$$F_c(x) = \left[1 - \left(1 - \frac{x}{l_t} \right)^2 \right] F_{c,\max} \text{ avec } A_c(x) = b(c+x) \text{ pour } x \geq c,$$

$$\sigma_c(x) = \frac{F_c(x)}{A_c(x)}.$$

Le maximum de $\sigma_c(x)$ est atteint pour $x=x_1$, solution de l'équation $x^2 + 2c.x - 2c.l_t = 0$:

$$x_1 = \left(\sqrt{1 + \frac{2l_t}{c}} - 1 \right) c,$$

où la longueur d'ancrage, en fonction de la contrainte limite d'élasticité de l'acier f_y et de la contrainte d'adhérence τ_b , est $l_t = \frac{\Phi f_y}{4\tau_b}$.

En prenant par exemple :

Adhérence (acier HA, $\Phi \leq 32\text{mm}$) : $\tau_b \approx 2,25 f_{tm}$;

Béton : $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$, $f_{tm} = 2,6 \text{ MPa}$, $\tau_b \approx 5,8 \text{ MPa}$;

Acier : $f_y = 500 \text{ MPa}$, $l_t \approx 21,5 \Phi$;

avec un minimum d'enrobage de 25 mm, et en comparant la quantité $(c+x_1)$ à la valeur $h_f = 2,5(c + \Phi/2)$ du code modèle CEB-FIP 1990 [CEB93] et à $(c+8\Phi)$ du code modèle CEB-FIB 78, nous obtenons les résultats présentés tableau I.3.

La valeur $c+x_1$, selon le présent raisonnement peut s'écrire :

$$c + x_1 = c \sqrt{1 + \frac{2l_t}{c}}.$$

Φ (mm)	6	8	10	12	14	16	20	25	32
l_t (mm)	129	172	216	259	302	345	431	539	690
CEB-FIP 90 : $h_f = 2,5 (c + \Phi/2)$ (mm)	70	73	75	78	80	83	88	94	103
Présent raisonnement : $c + x_1$ (mm)	84	96	107	117	125	134	149	166	187
CEB-FIP 78: $c + 8\Phi$ (mm)	73	89	105	121	137	153	185	225	281

Tab. I.3. Comparaison des hauteurs efficaces

Les valeurs calculées selon le raisonnement précédent sont, soit encadrées par celles des deux codes CEB-FIP 78 et CEB-FIP 90, soit plus proches du code CEB-FIP 78.

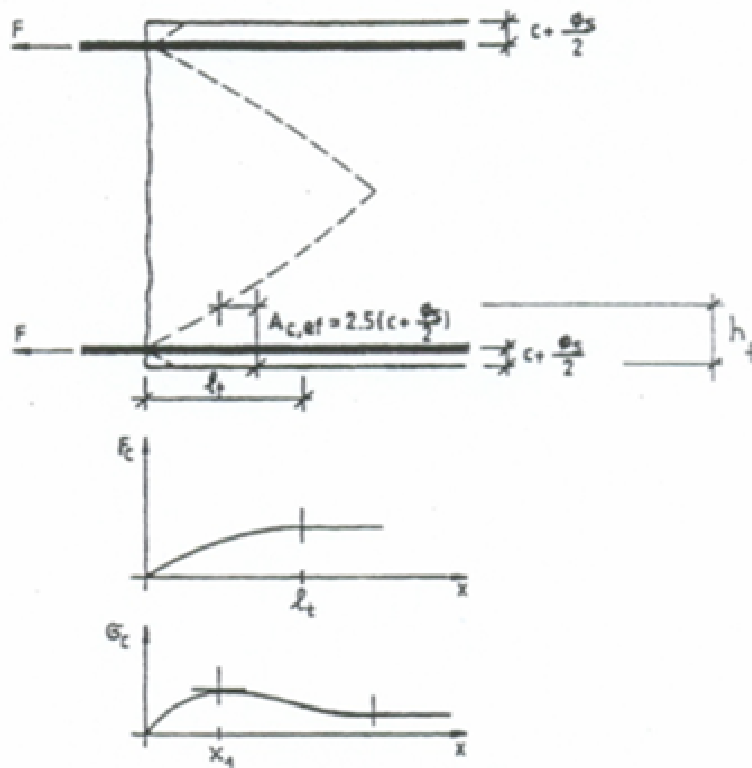


Fig. I.46. Définition de l'aire efficace du béton en traction selon le Bulletin d'information, n°217 du code modèle CEB-FIP 90 [CEB93-1]

I.5.9. Eurocode 2

La rédaction d'un ensemble de règles techniques nommé « eurocodes » a été entreprise en 1990 par le Comité Européen de Normalisation (CEN). Ces normes de conception, de dimensionnement et de justification des structures de bâtiment et de génie civil sont établies dans le but de leur donner par la suite un statut européen.

Jusqu'à la fin de l'année 2009, les eurocodes se composent de dix parties numérotées de zéro à neuf. Les Eurocodes sont chacun subdivisé en parties et sous-parties. Chacun vise un aspect spécifique de la conception, ou un type particulier de construction.

Pour notre travail, nous nous intéressons à l' Eurocode 2 et les deux sous-parties :

Eurocode 2 - Calcul des structures en béton

Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments

Partie 2 : Ponts en béton – calcul et dispositions constructives

I.5.9.1. Eurocode 2 provisoire - partie 1-1 : ENV 1992-1-1 [EUR92]

a) Enrobage et ouvertures de fissures

Les considérations générales sur la fissuration sont à peu près les mêmes que ceux du code modèle 1990 [CEB93], mais les enrobages sont plus grands de 5 à 10mm dans l'Eurocode 2.

Les formules de calcul sont assez proches de celles du Code Modèle CEB-FIP 78, avec quelques adaptations et compléments inspirés par le code modèle 1990.

L'ouverture des fissures est donnée par la relation (I.48a).

$$w_k = \beta \cdot l_m \cdot \varepsilon_{sm} \quad (\text{I.48a})$$

β : paramètre faisant passer de l'ouverture moyenne à l'ouverture caractéristique.

$\beta = 1,7$ pour la fissuration due aux charges ou à déformations gênées pour les éléments de dimension minimale supérieure à 800 mm.

$\beta = 1,3$ pour les déformations gênées de dimension minimale inférieure à 300 mm.

b) Espacement des fissures - Allongement moyen des aciers

L'espacement moyen des fissures est donné par la relation (I.48b).

$$l_m = 50 + 2k_1 k_2 \frac{\Phi}{\rho_f'} \quad (\text{I.48b})$$

k_1 et k_2 : définis comme au paragraphe I.5.7 (Code Modèle 1978),

ρ_f' : défini comme au paragraphe I.5.8 (Code modèle 1990 [CEB93]).

Dans la formule (I.48b), le premier terme est égal à celui de la relation (I.45b) donnée par le Code modèle 1978 à savoir $c=25$ mm et $s = 0$; le second terme est affecté du facteur 2 qui est compensé par le fait que ρ_f' est plus grand que ρ_f . Ainsi, la valeur fixe de 50 mm (relation I.48b) remplace les deux termes ; l'un d'enrobage c et l'autre s d'espacement des barres. Cette restriction, d'après Fouré [FOU05], ne résulte pas de considérations théorique mais du souci pratique de décourager les projeteurs de réduire l'enrobage et l'espacement des barres en utilisant de petits diamètres. En effet, ceci favorise la réduction de l'espacement entre barres et donc l'ouverture des fissures, mais n'est pas favorable à la durabilité.

Pour l'allongement moyen des armatures, nous retrouvons la même relation (I.45c) donnée par le Code modèle 1978 mais sans borne inférieure (relation I.48c).

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \quad (\text{I.48c})$$

I.5.9.2. Eurocode 2 provisoire - partie 1-2 : ENV 1992-2 [EUR99]

Dans cette partie 2 de l'eurocode 2, l'aire efficace à prendre en considération pour des calculs de fissuration a une définition un peu différente de celle du Code modèle 1990 et de l'ENV 1992-1-1 :

$$A_{cf}' = 2,5 b (h - d) \leq \frac{F_{cr}}{f_{tm}}$$

b : largeur de section au voisinage des armatures de section A_s ou A_p ,

$h - d = c + \Phi$ comme précédemment,

F_{cr} : force de traction dans la zone tendue avant la fissuration, à l'atteinte de f_{tm} .

I.5.9.3. Eurocode 2 provisoire révisé – partie 1-1 : pr EN 1992-1-1 (draft juillet 2002)

Pour la fissuration, la forme générale reste proche du Code Modèle CEB-FIP 78 mais avec des modifications par rapport l'ENV qui rapprochent du Code modèle 1990.

a) Ouvertures caractéristiques des fissures – Allongement moyen

L'ouverture caractéristique des fissures est déterminée par la relation (I.48d).

$$w_k = l_{\max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (\text{I.48d})$$

L'allongement moyen est donné par la formule (I.48e).

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - \beta'_2 \frac{f_{tm}}{\rho'_f} \left(1 + \frac{E_s}{E_{ci}} \rho'_f \right)}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (\text{I.48e})$$

Le coefficient β'_2 a été arrondi à 0,4 (au lieu de 0,38 dans la relation I.47e) mais ne concerne que les charges de longue durée.

La borne inférieure, qui était de $0,4\sigma_s/E_s$ pour le CEB-FIP 78 et implicitement limitée par $\sigma_{s,lim}$ pour le CEB-FIP 90, est passée ici $0,6 \sigma_s/E_s$.

La formule (I.48e) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta'_2 f_{tm} \left(\frac{1}{\rho'_f} + \frac{E_s}{E_{ci}} \right) \frac{1}{\sigma_s} \right] = \frac{\sigma_s}{E_s} \left(1 - \beta'_2 \frac{\sigma_{s,lim}}{\sigma_s} \right),$$

et avec $\sigma_{s,lim}$ selon (I.47b), on retrouve ainsi la formule (I.47e).

Pour le calcul du pourcentage ρ'_f , l'aire efficace fait intervenir la hauteur efficace :

$$h_f = \text{Min} \left[2,5(h - d) ; \frac{h - x}{3} ; \frac{h}{2} \right].$$

Pour les sections entièrement tendues, $(h-d)$ est la distance minimale du centre de gravité des armatures aux parements.

b) Espacement des fissures

Dans le cas où les armatures adhérentes ne sont pas espacées de plus de $5(c + \Phi/2)$, l'espacement maximal final est donné par la formule (I.48f),

$$l_{\max} = 1,7 \left(2c + 2k_1 k_2 \frac{\Phi}{\rho_f} \right). \quad (\text{I.48f})$$

Pour $c = 25 \text{ mm}$, on retrouve dans la parenthèse la valeur 50 de la formule (I.48b). On est passé de l_m à l_{\max} en ajoutant le facteur 1,7 ; il était appliqué directement dans le code modèle CEB FIP 78 ($w_m = l_m \varepsilon_{sm}$) et dans l'Eurocode2 ($w_m = \beta \cdot l_m \cdot \varepsilon_{sm}$).

La valeur du paramètre k_2 est précisée de la façon suivante, selon le cas de la figure I.45.

- cas a) et b) : ε_1 maximal, $\varepsilon_2 = 0$

- cas c) : ε_1 maximal, $\varepsilon_2 = \text{minimal}$ sur l'épaisseur totale, valable pour chacune des deux sections d'enrobage correspondant à chaque lit d'armatures.

L'expression "générale" $k_2 = 0,5 (1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1)$ s'applique pour la traction excentrée et "pour des aires locales".

Par traction excentrée en sous entend ; section entièrement tendue, mais pour des « aires locales », il n'y a aucune signification.

Quand l'espacement des barres excède $5(c + \Phi/2)$, l'espacement des fissures peut être pris égal à ; relation (I.48g).

$$l_{\max} = 1,3 \cdot (h - x) \quad (\text{I.48g})$$

I.5.9.4. Eurocode 2 provisoire révisé – partie 1-2 : prEN 1992-2 (stage 34, octobre 2003)

Le calcul de l'ouverture caractéristique est toujours : $w_k = l_{\max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$. La formule d'allongement moyen (I.48e) de la norme pr EN 1922-1-1 est reprise mais avec une borne inférieure de $(1-k_t) \sigma_s/E_s$; relation (I.48h).

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - \beta'_2 \frac{f_{tm}}{\rho_f} \left(1 + \frac{E_s}{E_{ci}} \rho_f \right)}{E_s} \geq (1 - k_t) \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (\text{I.48h})$$

k_t : facteur dépendant de la durée de charge,

$k_t = 0,6$ dans le cas d'un chargement de courte durée,

$k_t = 0,4$ dans le cas d'un chargement de longue durée,

Il n'est pas précisé ici le cas de charges répétées.

La hauteur efficace h_f a été modifiée par rapport à pr ENV 1992-1-1 :

$$h_f = \text{Min} \left[2,5(h - d) ; \frac{h - x''}{3} ; \frac{h - x'}{2} \right],$$

x' : hauteur comprimée avant fissuration

x'' : hauteur comprimée en section de fissure.

I.5.10. Conclusions sur l'examen de codes concernant la fissuration

Il est clair que la première remarque est que les modifications observées dans les versions successives montrent qu'il existe une certaine confusion sur la signification des paramètres de base. Cette confusion est notamment accentuée pour le calcul de l'espacement des fissures.

La prévision de l'ouverture des fissures passe par le calcul de deux grandeurs essentielles :

- l'espacement moyen des fissures,
- l'allongement moyen des armatures entre deux fissures.

a) Espacement des fissures

Faut-il que l'expression de l'espacement soit composée de deux termes (s'est interrogé Fouré [FOU05]); l'un d'enrobage c et l'autre dépendant du rapport Φ/ρ_f (relation I.49a) ou seulement du second terme.

$$l_m = \alpha c + \beta \frac{\Phi}{\rho_f}, \quad (\text{I.49a})$$

En effet, cette façon d'exprimer l'espacement moyen des fissures et à notre avis la plus judicieuse.

b) Définition du tirant fictif d'aire A_{cf}

Les Codes CEB-FIP 78 et code modèle 90 ont beaucoup varié sur la définition du tirant fictif.

Il faut noter que l'enrobage (c) et l'espacement des barres (s) interviennent implicitement dans la détermination de l'aire efficace A_{cf} .

Pour l'application pratique, lorsque les armatures sont concentrées en un seul lit, cette définition est claire. Aussi, lorsque les armatures sont réparties sur toute la hauteur d'une poutre, on peut négliger celles qui sont proches de l'axe neutre ; mais où fixer la limite. Dans le cas d'un voile à armatures assez espacées, l'ouverture des fissures peut varier selon la distance entre barres, ce qui a une importance pour les fuites (de liquide).

Enfin, il est plus simple de définir un tirant unique dont la largeur est égale à celle de la section et la hauteur (du tirant fictif) une fraction de la hauteur tendue (code modèle 1990 et ENV 1992).

c) Ouverture des fissures

L'expression la plus correcte de l'ouverture moyenne est donnée par la relation (I.49b) :

$$w_m = l_m (\varepsilon_{sm} + \varepsilon_{cs}^* - \varepsilon_{cm}), \quad (\text{I.49b})$$

ε_{cs}^* : allongement effective du au retrait, après la fissuration,

ε_{cm} : allongement moyen du béton entre deux fissures.

Ces deux derniers termes peuvent être conservés ou non, selon l'appréciation du moment.

On s'intéresse le plus souvent à une valeur maximale pour éviter le risque de corrosion des armatures et avoir une bonne esthétique des éléments. Pour limiter les fuites de liquide dans certains ouvrages, c'est la valeur moyenne qui est prise en considération.

d) Déformation moyenne des armatures ε_{sm}

Pour estimer correctement l'ouverture moyenne des fissures w_m , il faut d'abord déterminer, avec une certaine précision, ε_{sm} . Cette déformation moyenne des armatures traduit l'écart $\Delta\varepsilon$ entre le comportement de l'acier « nu » et celui de la barre enrobée de béton tendu et adhérent entre les fissures. La variation de $\Delta\varepsilon$ est plus au moins évolutif avec la contrainte

σ_s . Dans les différents règlements cités ci-dessus, deux types de formule de variation avec σ_s sont proposés :

- $\Delta\varepsilon$ constant après l'apparition de la première fissure,
- variation hyperbolique de $\Delta\varepsilon$ après l'apparition de la première fissure.

Cette dernière variation est représentée par une courbe de σ_{sm} concave dans le repère (σ - ε) (figure I.46). Pour des pourcentages d'acier relativement faibles, pendant la phase de formation des fissures, la courbe peut être convexe comme présentée dans la présente étude.

I.6. Conclusions

Il ressort des essais effectués sur le béton en traction que les lois fictives sont les mieux appropriées pour représenter les courbes efforts –déformations du matériau « béton armé ». Plusieurs paramètres influent sur le mélange acier –béton.

Concernant les essais de traction sur le béton seul, même en prenant certaines précautions (une bonne rigidité des machines d'essais, centrage des éprouvettes, ...) les résultats obtenus par les chercheurs sont très dispersés. Ceci est dû au comportement relatif fragile du matériau béton.

L'étude de tirants est à la base de la détermination par beaucoup d'auteurs de la combinaison armatures–béton. Il est, toutefois, admis en pratique comme modèle assez représentatif de la partie tendue des poutres fléchies.

Les lois proposées ne prennent pas en considération l'ensemble des paramètres qui influent sur la contribution du béton.

Malgré les nombreuses études réalisées, il existe toujours certaines divergences dans les approches et conclusions des auteurs. Elles apparaissent, même, dans les codes et règlements.

Dans cette revue bibliographique, les lois proposées imposent un certain pourcentage minimum d'acier et aussi un pourcentage maximum.

Certains paramètres comme le retrait et la reprise de bétonnage influent considérablement sur la fissuration du béton. Ceux-ci restent encore mal maîtrisés.

L'allure des courbes adhérence – glissement (τ - g) obtenues lors des différents essais de traction alternée est sensiblement la même. Cependant, les résultats obtenus présentent une

dispersion. Ceci nous amène à faire une autre approche afin de mieux estimer les valeurs caractéristiques moyennes de cette loi.

Les relations, concernant les espacements de fissures, donnent approximativement les mêmes résultats pour des éléments courants de tirants et de poutres. Nous utilisons, dans le cadre de cette étude, la relation la mieux adaptée pour chaque cas.

Concernant la réglementation sur la fissuration, une certaine confusion règne. En effet, les recommandations sont tantôt sévères pendant une période, puis ultérieurement on revient à d'anciennes suggestions plus indulgentes (certaines formules sont abandonnées avant de revenir à leur utilisation).

Pour pouvoir utiliser correctement les lois fictives du béton (ou de l'acier) en traction, il faut que la section effective du « tirant » à prendre en considération soit clairement définie.

CHAPITRE II : MODELISATION ET OUVERTURES DE FISSURES

II.1. Introduction

Les modèles proposés, concernant le diagramme fictif de l'acier enrobé de béton soumis à une traction, présentés au chapitre I, ne mettent pas clairement en évidence l'adhérence acier -béton et les espacements des fissures. De plus, ils ne tiennent pas compte de tous les paramètres et surtout du pourcentage d'acier.

En tenant compte de l'espacement des fissures, de l'adhérence acier – béton, du pourcentage d'acier et de la contrainte du béton, nous développons un modèle de calcul du béton armé soumis à la traction. Ce modèle est établi dans le cadre de l'approche globale et en considérant l'acier fictif.

La loi d'adhérence - glissement $\tau(g)$ adoptée par le comité européen de béton (CEB-FIP, 1988) est utilisée pour établir les équations gouvernant le glissement entre les armatures et le béton dans un « tirant » en béton armé. Pour cette loi (figure II.2), on suppose qu'au-delà du glissement g_3 au droit de la fissure, il ne peut y avoir de fissures systématiques dans un tirant en béton armé.

On déduit à partir de ces équations les variations des allongements relatifs de l'acier et du béton à l'intérieur de ce « tirant. On peut ainsi calculer les allongements moyens de ces matériaux sur une certaine distance et en général entre deux fissures successives.

L'espacement moyen des fissures observé par certains auteurs en fonction du pourcentage d'acier et des caractéristiques des deux matériaux (béton et acier) est utilisé ici pour estimer la valeur du glissement g_1 correspondant au pic d'adhérence.

À partir des équations gouvernant le glissement, on peut estimer les ouvertures des fissures à chaque niveau de chargement, pendant la phase de propagation des fissures et à la phase de stabilisation des fissures.

Le développement détaillé des formules pour un tirant en béton armé soumis à un effort monotone croissant jusqu'à épuisement de l'adhérence acier-béton (adhérence résiduelle) est présenté en Annexe A.

II.2. Relation contrainte d'adhérence τ - glissement g

II.2.1. Synthèse des résultats expérimentaux

Les courbes (τ - g) obtenues lors des différents essais (présentés au chapitre I), quand il n'y a ni fissuration du béton et ni plastification de l'armature, montrent en général l'existence de 4 zones de comportement différent. Elles sont schématisées à la figure II.1 :

- la zone 1 correspond à une augmentation de l'adhérence quand le glissement croît dans un intervalle très réduit par rapport au reste de la courbe (τ - g),
- la zone 2 correspond à la plastification des gaines de béton qui entourent les armatures,
- la zone 3 correspond à la rupture de la gaine par cisaillement du béton,
- et, la zone 4 correspond au frottement résiduel.

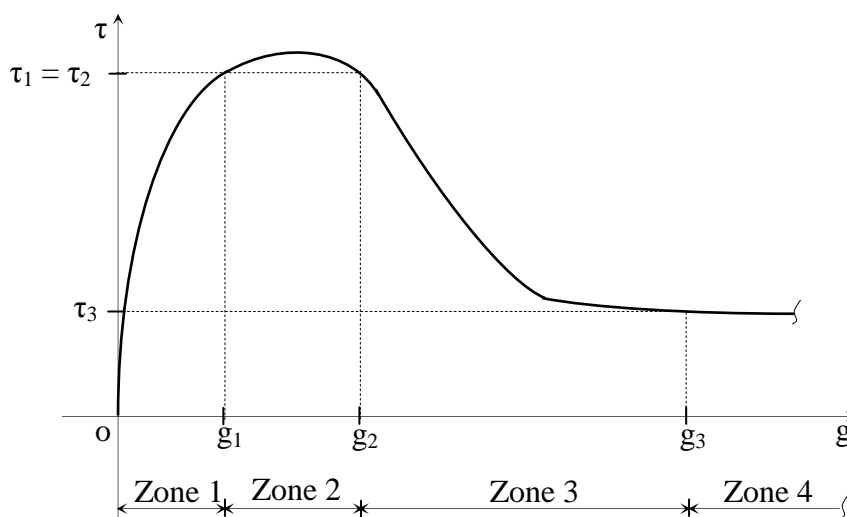


Fig. II.1: Synthèse des résultats expérimentaux de τ - g

II.2.2. Modélisation de la relation contrainte τ - glissement g (τ - g)

Les valeurs du glissement pendant les différentes phases de chargement (voir §1, tableau I.1), proposées par le comité européen de béton [CEB88] ne semblent pas représenter toute la réalité. L'allure de la courbe (figure II.1) paraît plus réaliste, représentant la synthèse des essais obtenus pour la loi (τ - g).

Pour les différentes phases (figure II.1), la proposition de Tassios et Koroneos [TAS 81] (voir §1, figure I.33), montrent qu'on ne peut pas fixer *a priori* de valeurs pour la loi adhérence - glissement car celles-ci sont trop disparates.

La loi adoptée par le comité européen de béton CEB-FIP code modèle 1990 [CEB88] est utilisée pour les calculs qui suivent (figure II.2). Son utilisation nécessite en particulier la connaissance de τ_1 , représentant le pic de l'adhérence acier-béton et du glissement g_1 correspondant.

Pour la valeur de τ_1 on utilise la formule donnée par le Comité Européen de Béton [CEB88], soit :

$$\tau_1 = a \sqrt{f_{ck}}, \quad (\text{II.1})$$

où

a : coefficient dépendant de l'état de confinement du béton ;

$a = 2,5$ quand le béton est confiné ;

$a = 2$ pour les autres cas,

f_{ck} : représente la contrainte limite de compression du béton en MPa ,

τ_1 : contrainte maximum d'adhérence en MPa.

Pour la valeur du glissement g_1 , correspondant au pic d'adhérence, elle peut être déterminée expérimentalement, alors dans ce cas, il faudrait déterminer tous les cas possibles. Sinon, on estime la valeur de g_1 en considérant les formules adéquates, pour chaque élément béton armé, donnant les espacements des fissures (voir chapitre III).

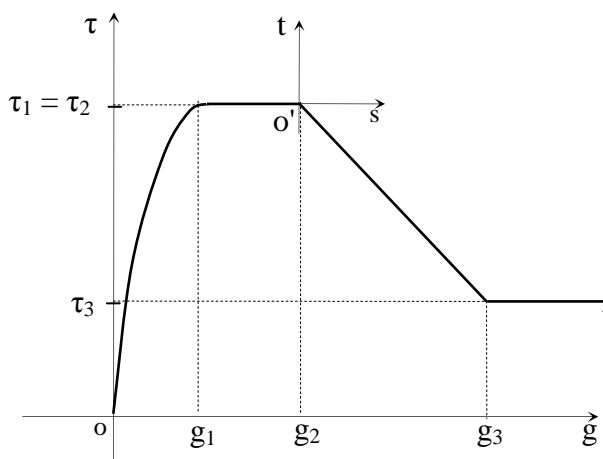


Fig. II.2. Loi τ - g proposée au comité européen de béton CEB-FIP code modèle 90

Les relations (II.2a), (II.2b), (II.2c) et (II.2d) représentent les variations de l'adhérence en fonction du glissement, respectivement pour les zones 1, 2, 3 et 4.

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \tau_1 \left(\frac{g}{g_1} \right)^\alpha & \text{si } 0 \leq g \leq g_1 & \quad \text{(II.2a)} \\ \tau &= \tau_1 & \text{si } g_1 \leq g \leq g_2 & \quad \text{(II.2b)} \\ \tau &= \tau_1 - (\tau_1 - \tau_3) \cdot \frac{g - g_2}{g_3 - g_2} & \text{si } g_2 \leq g \leq g_3 & \quad \text{(II.2c)} \\ \tau &= \tau_3 & \text{si } g > g_3 & \quad \text{(II.2d)} \end{aligned} \right\} \quad \text{(II.2)}$$

Pour la partie curviligne (g compris entre 0 et g_1) on utilise l'expression (II.2a) (où le paramètre α varie de 0,25 à 0,40 selon le confinement du béton).

II.3. Diagramme fictif de l'acier pour un « tirant » avec fissuration systématique

La fissuration est considérée systématique si le « tirant » ne comporte pas de fissures isolées, cela sous-entend un certain pourcentage minimum (voir chapitre I) d'acier à respecter pour éviter cet état.

II.3.1. Définition du diagramme fictif de l'acier

Le diagramme fictif de l'acier est défini comme étant la relation entre la contrainte normale dans l'acier (rapport entre l'effort normal appliqué et la section d'acier) et l'allongement relatif moyen mesuré sur une assez grande longueur recouvrant plusieurs fissures.

II.3.2. Comportement type du tirant en béton armé sous traction axiale

Sous l'action d'un effort normal N_t de traction croissant, dont la droite d'action passe par le centre de gravité de la section de béton et d'aciers, les différentes phases principales du comportement d'un tirant sont illustrées à la figure (II.3) [TRI86].

- Phase I (figure II.3, segment OA) : dans cette phase I, le comportement du tirant est homogène, le béton et l'acier résistent ensemble pour équilibrer l'effort N_t . Il y a compatibilité des déformations et l'on peut écrire, dans une section droite quelconque du tirant (indice c pour béton et indice s pour acier) :

$$N_t = \sigma_c (B - A_s) + n \sigma_s A_s$$

où $n = E_s/E_c$ et où B est l'aire de la section droite du tirant.

Dans le cas du matériau béton armé la section A_s des aciers est en général négligeable devant la section du béton. On utilise $(B - A_s)$ au lieu de B afin de généraliser pour d'autres composites. On désigne par L la longueur du tirant (considérée relativement grande) et ΔL son allongement. Le rapport entre l'effort normal appliqué au tirant et la section d'acier est égal à :

$$\frac{N_t}{A_s} = \sigma_s = \sigma_c \left(n + \frac{1-\rho}{\rho} \right)$$

où $\rho = \frac{A_s}{B}$ et, sachant que $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma_c}{E_c} = \varepsilon_c$ on a :

$$\Delta L = \frac{N_t L}{E_s A_s} (1 - \bar{\rho}), \quad (\text{II.3})$$

avec $\bar{\rho} = \frac{1}{1 + \frac{n\rho}{1-\rho}}$.

Avec la connaissance exacte de tous les paramètres, la formule (II.3) ci-dessus donne une estimation correcte de l'allongement moyen sur la longueur L pour un effort normal donné.

- Phase IIa (figure II.3, courbe AC) : elle débute dès l'apparition de la première fissure. Celle-ci apparaît vraisemblablement dans la section droite où la résistance du béton à la traction est la plus faible ; il y a alors une variation de la résistance à la traction du béton le long du tirant. En s'éloignant de part et d'autre de cette première fissure (où $\sigma_{sr} = N_t/A_s$), l'effort N_t est retransmis progressivement au béton par le jeu de l'adhérence acier-béton. En augmentant ainsi l'effort N_t , d'autres fissures apparaissent. Cette phase IIa prend fin quand la fissuration se stabilise (nombre de fissures stable). On désigne par σ_{sy} la contrainte normale dans l'acier à la dernière fissure et ε_{sy} l'allongement relatif correspondant.

- Phase IIb (figure II.3, courbe CB) : à ce stade, après la stabilisation des fissures principales, l'augmentation de N_t entraîne l'accroissement de la largeur des fissures. En phase IIb, le tirant a un comportement appelé « comportement élastique fissuré » car le diagramme $(\sigma_s - \varepsilon_m)$ est sensiblement linéaire.

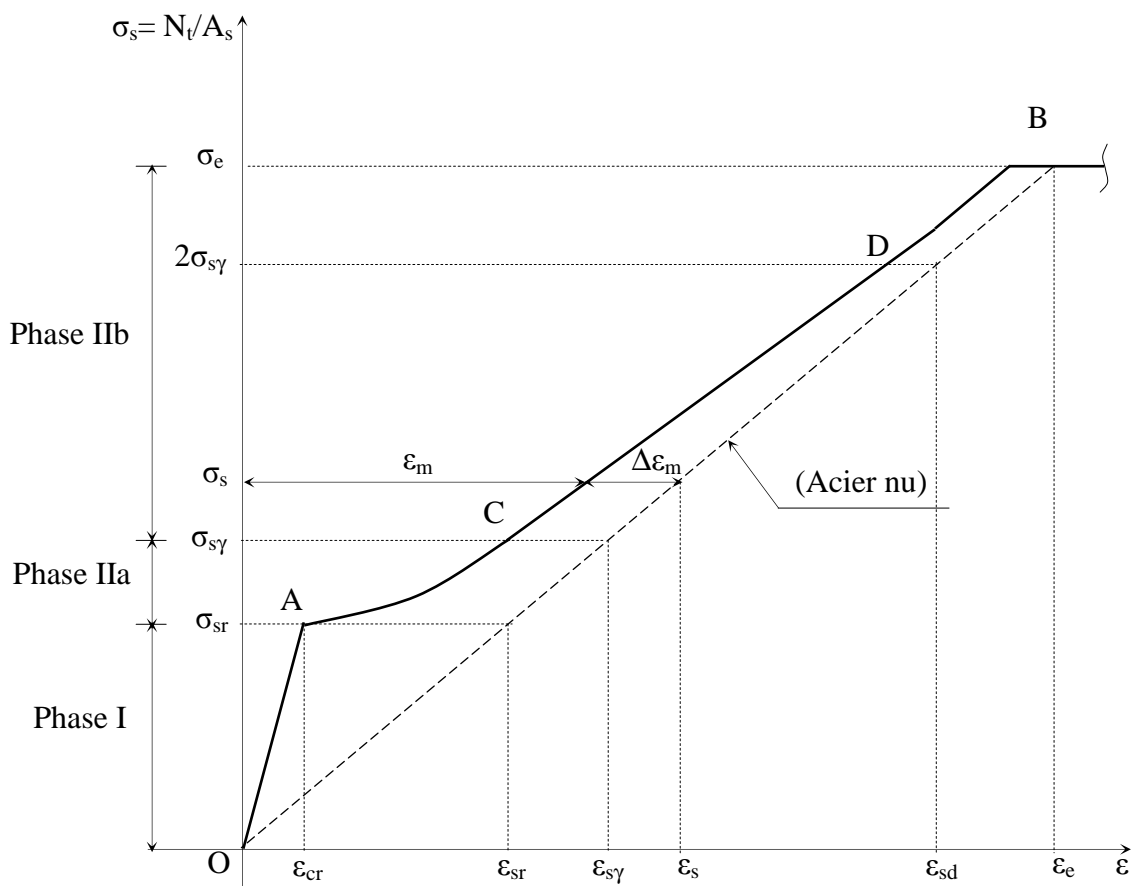


Fig. II.3. Allure de la courbe σ_s - ϵ_m d'un tirant

II.4. Équation différentielle gouvernant le glissement $g(x)$

En s'éloignant de la fissure, la contrainte normale dans l'acier diminue du fait de l'adhérence acier - béton (Figure II.4). La longueur d'introduction totale est notée l_t . La longueur l_0 représente la zone perturbée définie par certains auteurs [YAN88a] et elle est prise ici égale à $l_0 = \delta l_t$ ($\delta = 0,10 \sim 0,20$). La longueur $(l_t - l_0) (= (1-\delta) l_t)$ désigne la longueur d'introduction effective. L'équilibre de la portion $[0 ; x]$ entraîne :

$$\sigma_s(x) = \sigma_{sf} - \int_0^x \frac{p}{A_s} \tau(\xi) d\xi, \tag{II.4}$$

avec σ_{sf} la contrainte de traction dans l'acier au droit de la fissure.

En élasticité linéaire :

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \text{ et } \epsilon_s < \epsilon_e,$$

ϵ_e : désigne allongement relatif au seuil élastique de l'acier.

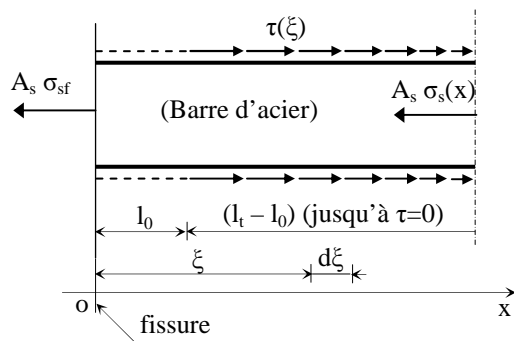


Fig. II.4. Variation $\sigma_s(x)$ dans l'acier

On a alors :

$$\varepsilon_s(x) = \varepsilon_{sf} - \frac{p}{A_s E_s} \int_0^x \tau(\xi) d\xi$$

$$d'où \quad \frac{d\varepsilon_s}{dx} = -\frac{p}{A_s E_s} \tau(x). \quad (II.5)$$

Le glissement (compté positif) à une distance x est exprimé par :

$$g(x) = u_c(x) - u_s(x)$$

On peut écrire :

$$\frac{dg}{dx} = \frac{du_c}{dx} - \frac{du_s}{dx} = \varepsilon_c - \varepsilon_s,$$

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{d\varepsilon_c}{dx} - \frac{d\varepsilon_s}{dx}. \quad (II.6)$$

À une distance x de la fissure, par le jeu de l'adhérence, les contraintes « diminuées » de l'acier se transmettent au béton. On a :

$$\sigma_c(x) (B - A_s) = p \int_0^x \tau(\xi) d\xi.$$

Entre deux fissures, le béton, étant toujours intact sur la longueur l_1 , on a ;

$$\varepsilon_c(x) = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \int_0^x \tau(\xi) d\xi ,$$

$$\frac{d\varepsilon_c(x)}{dx} = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{(1-\rho)} \tau(x). \quad (\text{II.7})$$

On reporte (II.5) et (II.7) dans (II.6), on obtient l'équation différentielle gouvernant le glissement :

$$\frac{d^2g}{dx^2} - \frac{p}{A_s E_s \bar{\rho}} \tau(x) = 0. \quad (\text{II.8})$$

Cette équation différentielle va être utilisée dans les paragraphes qui suivent pour établir les différentes expressions en fonction de x , le long de la longueur d'introduction l_t , du glissement $g(x)$, de l'adhérence $\tau(x)$, l'allongement relatif $\varepsilon_s(x)$ des armatures, l'allongement relatif du béton $\varepsilon_c(x)$...

Dans cette étude on a pris $l_0 = 0,10l_t$ pour la phase IIa tout en considérant que l'adhérence entre l'acier et le béton dans cette zone perturbée est nulle. La tangente à la courbe $g(x)$ pour $x = l_0$, représente la valeur de ε_{sf} .

Selon le niveau de chargement, on étudie tous les cas relatifs aux zones de glissement. En effet, plus l'intensité de l'effort N_t croit, plus la longueur d'introduction l_t augmente et le glissement au droit d'une fissure peut être située dans l'une des quatre zones montrées figure II.1 (ou figure II.2).

II.5. Cas 1 : $g(l_0) < g_1$ avant et après fissuration

On s'intéresse ici au cas où le glissement à la distance l_0 de la fissure ne dépasse pas le glissement g_1 correspondant au maximum d'adhérence τ_1 . La variation de l'adhérence dans l'intervalle $[0 ; l_0]$ est nulle.

II.5.1. Phase IIa et $\lambda > 2 l_t$

On désigne par λ la distance entre deux fissures consécutives avant la stabilisation des fissures telle que λ supérieur à deux fois la longueur totale d'introduction l_t . Cet état est représenté figure II.5 et modélisé figure II.6. Pour $g(l_0)$ inférieur à g_1 , λ peut être écrit avec un indice 1 (λ_1). La longueur d'introduction totale dans cette phase est notée $l_{t1} = l_{t1} (= l_0 + l_1)$.

En phase IIa, on suppose que, avant d'atteindre la moitié du nombre total de fissures, la distance entre elles reste supérieure à deux fois la longueur d'introduction ($l_0 + l_1$).

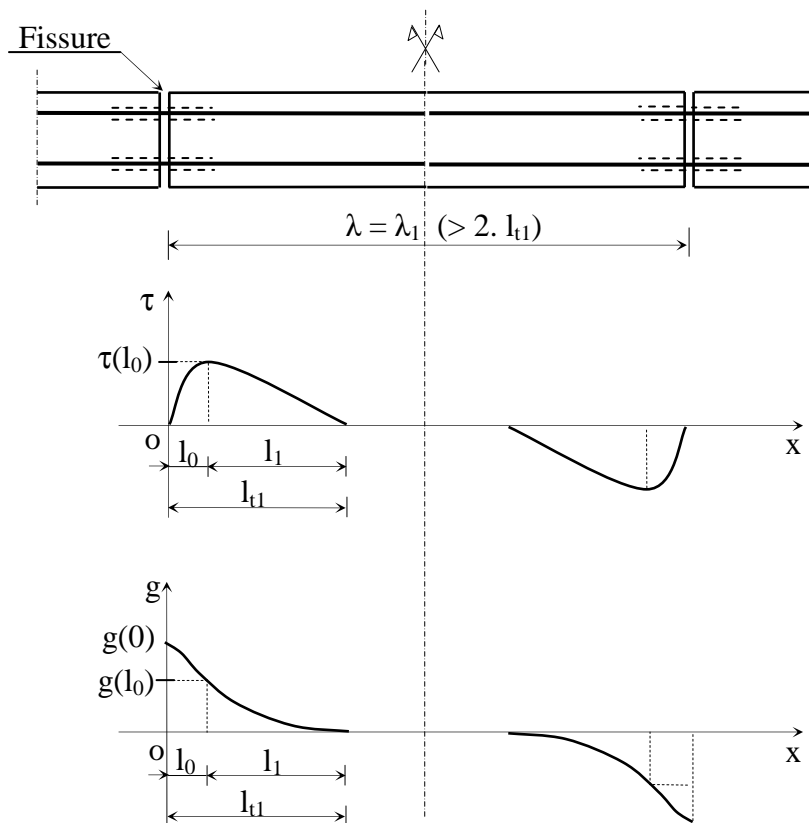


Fig. II.5. Variations réelles de τ et de g avant la stabilisation des fissures pour $g(l_0) < g_1$

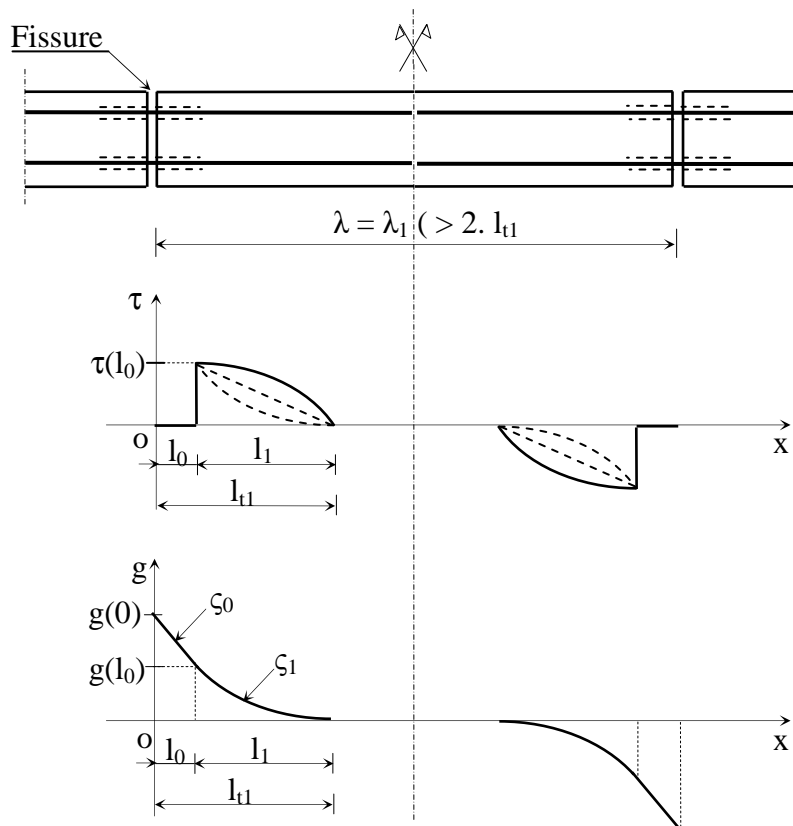


Fig. II.6. Variations modélisées de τ et de g avant la stabilisation des fissures

II.5.1.1. Domaine $l_0 \leq x \leq l_t$

Pour g compris entre 0 et g_1 , on reporte (II.2a) dans (II.8) qui s'écrit alors :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - \beta_1^2 g^\alpha = 0, \quad (\text{II.9})$$

$$\text{avec : } \beta_1 = \sqrt{\frac{k_1 p}{A_s E_s \bar{\rho}}} \quad \text{et} \quad k_1 = \frac{\tau_1}{g_1^\alpha}.$$

L'équation précédente admet pour solution [BAL93], [CHA98] :

$$g(x) = \theta^{1/(1-\alpha)} [l_t - x]^{2/(1-\alpha)}, \quad (\text{II.10})$$

$$\text{avec : } \theta = \frac{\beta_1^2 (1-\alpha)^2}{2(1+\alpha)}.$$

En effectuant le changement de variable $X = (x - l_0)$ on peut écrire :

$$g(X) = \theta^{1/(1-\alpha)} [l_1 - X]^{2/(1-\alpha)}, \quad (\text{II.11})$$

la représentation de l'allure de cette courbe (figure II.6) est notée ζ_1 .

Le glissement pour $x = l_0$ (ou $X = 0$) a pour expression :

$$g_{l1} = \theta^{1/(1-\alpha)} l_1^{2/(1-\alpha)}, \quad (\text{II.12})$$

où g_{l1} (g_{t1}) désigne le glissement cumulé sur la longueur l_1 .

On a également pour $x = l_0$: $\frac{dg}{dx_{x=l_0}} = -\varepsilon_{sf}$.

On peut ainsi exprimer l'allongement relatif de l'acier au droit de la fissure ε_{sf} en fonction de la longueur d'introduction effective l_1 .

$$\varepsilon_{sf} = \frac{2}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} l_1^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}. \quad (\text{II.13})$$

L'expression de la longueur d'introduction effective l_1 s'écrit donc :

$$l_1 = \left[\frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{\theta^{1/(1-\alpha)}} \varepsilon_{sf} \right]^{(1-\alpha)/(1+\alpha)}. \quad (\text{II.14})$$

La variation de la contrainte d'adhérence, entre l'armature et le béton, le long du tirant entre l_0 et $(l_0 + l_1)$ s'écrit :

$$\tau(X) = k_1 \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} [l_1 - X]^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}, \quad (\text{II.15})$$

La courbe représentant la variation de l'adhérence dans l'intervalle $[l_0 ; l_1]$, peut prendre les allures montrées en annexe A (on confirme ici les recommandations du CEB code modèle 1990 concernant les valeurs de α) :

- courbe concave (en traits pointillés figure II.6) pour un béton non confiné ($\alpha < 1/3$) ;
- courbe convexe (en trait plein figure II.6) pour un béton confiné ($\alpha > 1/3$) ;
- le cas particulier de $\alpha = 1/3$ correspond à une variation linéaire de l'adhérence.

Connaissant l'expression de l'adhérence $\tau(X)$ et l'allongement relatif de l'armature au droit d'une fissure, on peut déduire, en associant ξ et $d\xi$ au nouveau repère, la variation de l'allongement relatif de l'acier le long du tirant entre l_0 et $(l_0 + l_1)$:

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{p}{A_s E_s} \int_0^X \tau(\xi) d\xi = \varepsilon_{sf} - \frac{k_1 p}{A_s E_s} \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \int_0^X [l_1 - \xi]^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} d\xi,$$

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{k_1 p}{A_s E_s} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left\{ l_1^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - [l_1 - X]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \right\},$$

qu'on peut écrire aussi :

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{2\bar{\rho}}{1-\alpha} \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left\{ l_1^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - [l_1 - X]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \right\}, \quad (\text{II.16})$$

$$\varepsilon_s(X) = \left[1 - \bar{\rho} + \bar{\rho} \left(1 - \frac{X}{l_1} \right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \right] \varepsilon_{sf}. \quad (\text{II.17})$$

On vérifie ainsi la validité de cette relation (II.17) :

- pour $X = 0$, on a $\varepsilon_s(0) = \varepsilon_{sf}$;
- pour $X = l_1$, on obtient $\varepsilon_s(l_1) = \varepsilon_{sf} (1 - \rho_1) = \varepsilon_c(l_1)$

L'allongement relatif moyen de l'acier entre l_0 et $(l_0 + l_1)$ noté ε_{sm1} est déterminé par les relations :

$$\varepsilon_{sm1} = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \varepsilon_s(\mathbf{X}) d\mathbf{X},$$

$$\varepsilon_{sm1} = \frac{\varepsilon_{sf}}{l_1} \int_0^{l_1} \left[1 - \bar{\rho} + \bar{\rho} \left(1 - \frac{\mathbf{X}}{l_1} \right)^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right] d\mathbf{X},$$

après intégration on obtient l'expression (II.18):

$$\varepsilon_{sm1} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{2} \bar{\rho} \right) \varepsilon_{sf}. \quad (\text{II.18})$$

De même on peut établir la variation ($\varepsilon_c(\mathbf{X})$) et la moyenne (ε_{cm1}) de l'allongement relatif du béton le long de l'intervalle $[l_0; l_0+l_1]$ à l'intérieur du tirant :

$$\varepsilon_c(\mathbf{X}) = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \int_0^{\mathbf{X}} \tau(\xi) d\xi,$$

on trouve :

$$\varepsilon_c(\mathbf{X}) = \frac{k_1 p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \theta^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \left\{ l_1^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} - [l_1 - \mathbf{X}]^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\},$$

$$\varepsilon_c(\mathbf{X}) = \frac{2}{1-\alpha} (1-\bar{\rho}) \theta^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \left\{ l_1^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} - [l_1 - \mathbf{X}]^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\}, \quad (\text{II.19})$$

$$\varepsilon_c(\mathbf{X}) = (1-\bar{\rho}) \left[1 - \left(1 - \frac{\mathbf{X}}{l_1} \right)^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right] \varepsilon_{sf}. \quad (\text{II.20})$$

La contrainte moyenne du béton sur la longueur l_1 : $\varepsilon_{cm1} = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \varepsilon_c(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$,

$$\varepsilon_{cm1} = (1-\bar{\rho}) \frac{1+\alpha}{2} \varepsilon_{sf} \quad (\text{II.21})$$

II.5.1.2. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Dans ce cas $\tau(x)=0$ et l'équation (II.8) admet pour solution :

$$g(x) = -\varepsilon_{sf} x + g(l_0) + \varepsilon_{sf} l_0. \quad (\text{II.22})$$

Cette relation (II.22) représente l'équation d'une droite et la courbe correspondante est notée ζ_0 figure II.6.

On s'intéresse en pratique au glissement au droit de la fissure où $x=0$ (afin de déduire l'ouverture des fissures) qui vaut ici :

$$g(0) = g_{lt1} = \varepsilon_{sf} l_0 + \theta^{1/(1-\alpha)} l_1^{2/(1-\alpha)}, \quad (\text{II.23})$$

où g_{lt1} (g_{lt1}) désigne le glissement cumulé sur la longueur totale d'introduction l_{t1} ,

$$g_{lt1} = \varepsilon_{sf} \left(l_0 + \frac{1-\alpha}{2} l_1 \right), \quad (\text{II.24})$$

et peut s'écrire en fonction de l'allongement relatif de l'acier au droit de la fissure et de la longueur d'introduction totale :

$$g_{lt1} = \varepsilon_{sf} \left(1 + \frac{1-\alpha}{2} \frac{1-\delta}{\delta} \right) l_{t1}. \quad (\text{II.25})$$

L'allure des courbes concernant les variations des allongements relatifs de l'acier et du béton, le long de l'intervalle $[0 ; l_t]$ pour $g(l_0)$ inférieur à g_1 à l'intérieur du tirant, est présentée figure II.7.

II.5.1.3. Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale l_t

L'allongement relatif moyen de l'acier sur toute la longueur d'introduction totale l_t (ici l_{t1}) peut s'écrire :

$$\varepsilon_{smt1} = \frac{1}{l_{t1}} (\varepsilon_{sf} l_0 + \varepsilon_{sml} l_1), \quad (\text{II.26})$$

$$\varepsilon_{smt1} = \delta \varepsilon_{sf} + (1-\delta) \varepsilon_{sml},$$

$$\varepsilon_{smt1} = \left[\delta + (1-\delta) \left(1 - \frac{1+\alpha}{2} \right) \right] \varepsilon_{sf} \quad (II.27)$$

Sur la distance l_0 , la contrainte dans le béton est considérée nulle. La contrainte moyenne du béton sur la longueur d'introduction totale l_t est égale :

$$\varepsilon_{cmt1} = \frac{1}{l_t} \varepsilon_{cml} l_1, \quad (II.28)$$

$$\varepsilon_{cmt1} = (1-\delta) \varepsilon_{cml},$$

$$\varepsilon_{cmt1} = (1-\delta)(1-\bar{\rho}) \frac{1+\alpha}{2} \varepsilon_{sf} \quad (II.29)$$

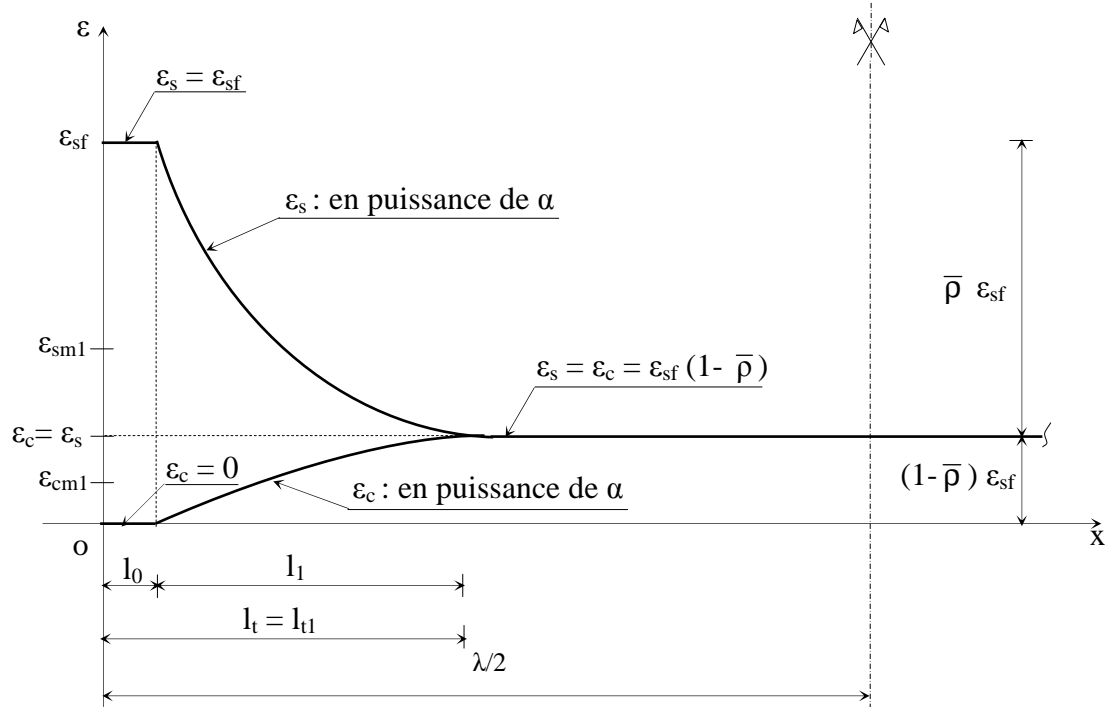


Fig. II.7. Variation de ε_s et ε_c le long de la longueur l_t ($l_t < \lambda/2$) quand $g(l_0) < g_1$ en phase IIa

II.5.2. Phase IIb et $\lambda < 2 l_{t1}$

Juste avant l'apparition de la première fissure, quand le glissement à la distance l_0 reste inférieur à g_1 , les longueurs l_1 et l_t (ici l_{t1}) sont notées respectivement l_{1r} et l_{tr} (ici l_{t1r}). La longueur perturbée est toujours liée à la longueur d'introduction totale (ici $l_{0r} = \delta.l_{t1r}$).

Avec la formule (II.14), la longueur l_{1r} s'écrit :

$$l_{1r} = \left[\frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{\theta^{1/(1-\alpha)}} \varepsilon_{sr} \right]^{(1-\alpha)/(1+\alpha)} \quad (\text{II.30})$$

où ε_{sr} désigne l'allongement relatif de l'acier au droit de la fissure à l'apparition de la première fissure. On déduit la longueur d'introduction totale l_{tir} :

$$l_{1r} = l_{tir} = l_{0r} + l_{1r} = \frac{1}{1-\delta} \left[\frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{\theta^{1/(1-\alpha)}} \varepsilon_{sr} \right]^{(1-\alpha)/(1+\alpha)} \quad (\text{II.31})$$

On désigne par $\bar{\lambda}$ l'espacement moyen entre deux fissures consécutives à la stabilisation des fissures et sa valeur est prise égale :

$$\bar{\lambda} = 1,7 l_{1r}, \quad (\text{II.32})$$

Ici avec $g(l_0) < g_1$, on peut spécifier :

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 = 1,7 (l_{0r} + l_{1r}) = 1,7 l_{tir}.$$

Cet état est représenté à la figure II.8 où le glissement $g'(0)$ et l'adhérence $\tau'(l_0)$ sont des valeurs avant la redistribution des efforts.

À la stabilisation des fissures, quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est inférieur à g_1 , la longueur l_{1r} diminue et elle est notée l_{a1} (indice « a » pour stabilisation des fissures) tel que :

$$\bar{\lambda}_1 = 2 (l_0 + l_{a1}) = 2 l_{ta1},$$

où l_{ta1} représentent la longueur d'introduction totale pour cet état. Sachant que $l_0 = \delta \frac{\bar{\lambda}_1}{2}$

alors ici:

$$l_{a1} = \frac{\bar{\lambda}_1}{2} (1 - \delta) \quad (\text{II.33})$$

Dans notre étude, on suppose que cet état existe aussi dans la phase IIa juste après que le nombre de fissures principales ait dépassé la moitié du nombre total. L'exemple donné figure II.9, avec un nombre total de neuf fissures, on observe qu'après la quatrième fissure, la distance entre la cinquième et la première fissure est égale à $\bar{\lambda}$.

Avec un nombre total de fissures γ sur la longueur L du tirant, la deuxième partie de la phase IIa commence à la fissure $\gamma/2$ pour un nombre pair de fissures et $(\gamma + 1)/2$ pour un nombre impair de fissures.

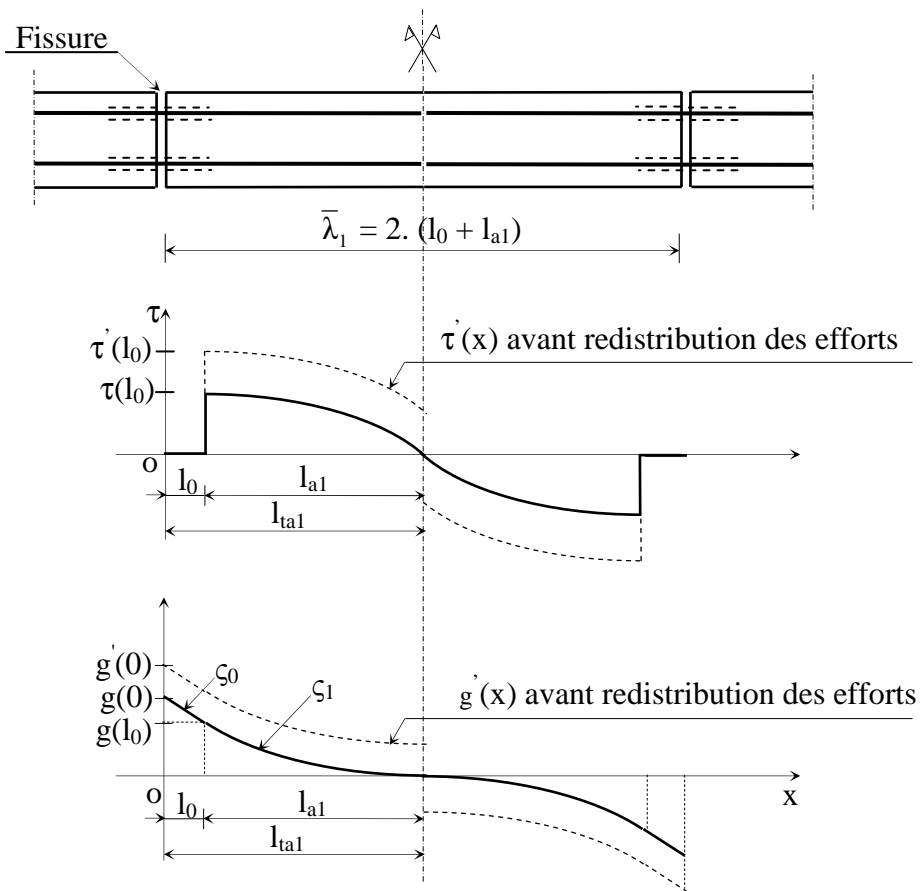


Fig. II.8. Variations modélisées de τ et de g à la stabilisation des fissures avec $g(l_0) < g_1$

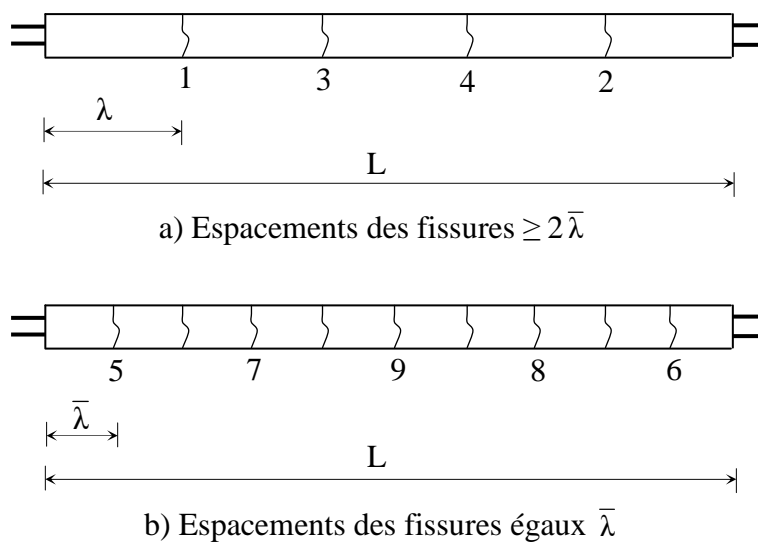


Fig. II.9. Ordre idéalisé d'apparition des fissures

Dans cette phase IIb, l'espacement entre les fissures ne permet pas le développement total de la longueur d'introduction effective l_1 . Avant la redistribution des efforts, nous avons entre l_0 et $(l_0 + l_{a1})$ le glissement cumulé donné par la même relation (II.12) pour l_{1r} . Après la redistribution des efforts, on utilise la même relation mais avec l_{a1} au lieu de l_1 , on peut ainsi écrire le glissement résiduel g_a :

$$g_a = g_{a11} = \theta^{1/(1-\alpha)} l_{1r}^{2/(1-\alpha)} - \theta^{1/(1-\alpha)} l_{a1}^{2/(1-\alpha)},$$

$$g_a = g_{a11} = \theta^{1/(1-\alpha)} \left[l_{1r}^{2/(1-\alpha)} - l_{a1}^{2/(1-\alpha)} \right], \tag{II.34}$$

où g_{a11} désigne explicitement le glissement résiduel provenant de la diminution de la longueur d'introduction totale de valeur l_{t1} avant fissuration à la valeur l_{ta1} après fissuration.

On néglige le glissement résiduel sur la longueur perturbée l_0 .

II.5.2.1. Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_{a1})$

Certaines relations établies à la sous-section II.5.1.1 restent valables en remplaçant l_1 par l_{a1} et l'allongement relatif ϵ_{sf} par :

$$\epsilon_{sfa1} = \frac{2}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} l_{a1}^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}. \tag{II.35}$$

où ϵ_{sfa1} désigne l'allongement relatif de l'acier au droit de la fissure (*ici fictif*) correspondant à la longueur d'introduction totale l_{ta1} figure II.10.

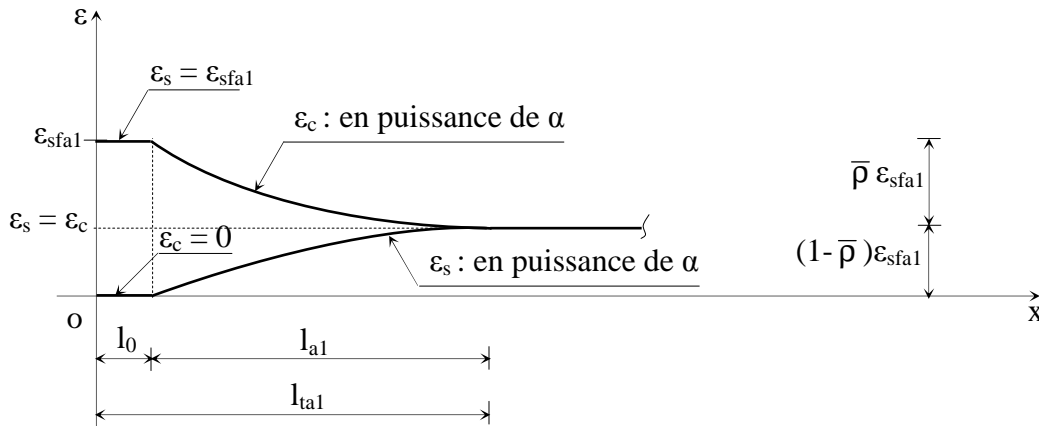


Fig. II.10. Variation de ϵ_s et ϵ_c pour $\epsilon_{sf} = \epsilon_{sfa1}$

La variation du glissement dans cet intervalle s'écrit :

$$g(x) = \theta^{1/(1-\alpha)} [l_0 + l_{a1} - x]^{2/(1-\alpha)}, \text{ ou avec le changement de variable en } X = x - l_0 :$$

$$g(X) = \theta^{1/(1-\alpha)} [l_{a1} - X]^{2/(1-\alpha)},$$

le glissement cumulé sur la longueur l_{a1} est donné par $g(X=0)$:

$$g_{l_{a1}} = \theta^{1/(1-\alpha)} l_{a1}^{2/(1-\alpha)} \quad (\text{II.36})$$

La variation de la contrainte d'adhérence le long de la longueur l_{a1} est donnée par la relation (II.37).

$$\tau(X) = k_1 \theta^{1/(1-\alpha)} [l_{a1} - X]^{2\alpha/(1-\alpha)}. \quad (\text{II.37})$$

La variation de l'allongement relatif de l'acier le long du tirant entre l_0 et $(l_0 + l_{a1})$ pour la phase IIb et pour certaines zones de la deuxième partie de la phase IIa s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s(X) &= \varepsilon_{sf} - \frac{p}{A_s E_s} \int_0^X \tau(\xi) d\xi, \\ \varepsilon_s(X) &= \varepsilon_{sf} - \frac{2 \bar{p}}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} \left\{ l_{a1}^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} - [l_{a1} - X]^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

après simplification, il vient :

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \left[1 - \left(1 - \frac{X}{l_{a1}} \right)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \right] \bar{p} \varepsilon_{sfa1}. \quad (\text{II.39})$$

A ce stade on peut exprimer l'allongement relatif moyen de l'acier sur la longueur l_{a1} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sma1} &= \frac{1}{l_{a1}} \int_0^{l_{a1}} \varepsilon_s(X) dX, \\ \varepsilon_{sma1} &= \varepsilon_{sf} - \frac{1}{l_{a1}} \int_0^{l_{a1}} \left[1 - \left(1 - \frac{X}{l_{a1}} \right)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \right] \bar{p} \varepsilon_{sfa1} dX, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\text{smal}} = \varepsilon_{\text{sf}} - \frac{1+\alpha}{2} \bar{\rho} \varepsilon_{\text{sfal}} \quad (\text{II.40})$$

La variation de l'allongement relatif du béton, le long de la longueur l_{a1} , s'écrit :

$$\varepsilon_c(X) = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \int_0^X \tau(\xi) d\xi ,$$

on trouve :

$$\varepsilon_c(X) = \frac{k_1 p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \theta^{\alpha/(1-\alpha)} \left\{ l_{a1}^{\alpha/(1-\alpha)} - [l_{a1} - X]^{\alpha/(1-\alpha)} \right\} ,$$

$$\varepsilon_c(X) = \frac{2}{1-\alpha} (1-\bar{\rho}) \theta^{\alpha/(1-\alpha)} \left\{ l_{a1}^{\alpha/(1-\alpha)} - [l_{a1} - X]^{\alpha/(1-\alpha)} \right\} , \quad (\text{II.41})$$

$$\varepsilon_c(X) = (1-\bar{\rho}) \left[1 - \left(1 - \frac{X}{l_{a1}} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \right] \varepsilon_{\text{sfal}} \quad (\text{II.42})$$

L'allongement relatif moyen du béton sur la longueur l_{a1} : $\varepsilon_{\text{cma1}} = \frac{1}{l_{a1}} \int_0^{l_{a1}} \varepsilon_c(X) dX ,$

$$\varepsilon_{\text{cma1}} = (1-\bar{\rho}) \frac{1+\alpha}{2} \varepsilon_{\text{sfal}} \quad (\text{II.43})$$

II.5.2.2. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

La valeur du glissement résiduel g_a étant négligeable devant l_0 et l_{a1} , la variation du glissement entre l_0 et $(l_0 + l_{a1})$ peut s'écrire :

$$g(x) = -\varepsilon_{\text{sf}} x + g(l_0) + \varepsilon_{\text{sf}} l_0 + g_a . \quad (\text{II.44})$$

Dans cette formule (II.44), en faisant $x=0$ et en remplaçant la valeur de $g(l_0)$ donnée par la relation (II.36) pour $X=0$, on retrouve ainsi la même expression que la formule (II.23).

On peut conclure qu'au droit d'une fissure le glissement est le *même*, juste avant et juste après fissuration.

On déduit que les formules (II.23), (II.24) et (II.25), exprimant le glissement au droit de la fissure si $g(l_0)$ reste inférieur à g_1 , restent valables (en phase de formation des fissures) même si la longueur d'introduction totale ne peut pas se développer.

II.5.2.3. Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale $l_t (= l_{ta1})$

Dans cette phase IIb (nombre de fissures stable) avec une longueur $\bar{\lambda}_1 (= 2(l_0 + l_{a1}))$ d'espacement de fissures, l'allongement relatif moyen de l'acier entre deux fissures consécutives peut s'écrire :

$$\varepsilon_{sm\bar{\lambda}_1} = \frac{2}{\bar{\lambda}_1} (\varepsilon_{sf} l_0 + \varepsilon_{sma1} l_{a1}), \quad (\text{II.45})$$

et avec $\bar{\lambda}_1 = 2l_{ta1}$ on peut écrire :

$$\varepsilon_{sm\bar{\lambda}_1} = \frac{1}{l_{ta1}} \left[\varepsilon_{sf} l_0 + \left(\varepsilon_{sf} - \frac{1+\alpha}{2} \bar{\rho} \varepsilon_{sfa1} \right) l_{a1} \right],$$

$$\varepsilon_{sm\bar{\lambda}_1} = \varepsilon_{sf} - (1-\delta) \frac{1+\alpha}{2} \bar{\rho} \varepsilon_{sfa1}. \quad (\text{II.46})$$

Les relations (II.47) et (II.48) représentent la valeur de l'allongement moyen du béton entre deux fissures consécutives (qui est inférieur à ε_{cma1}).

$$\varepsilon_{cm\bar{\lambda}_1} = \frac{2}{\bar{\lambda}_1} \varepsilon_{cma1} l_{a1}, \quad (\text{II.47})$$

ou encore :

$$\varepsilon_{cm\bar{\lambda}_1} = (1-\delta)(1-\bar{\rho}) \frac{1+\alpha}{2} \varepsilon_{sfa1}. \quad (\text{II.48})$$

On représente à la figure II.11 l'allure des courbes des variations des allongements relatifs de l'acier et du béton, le long de la longueur $\bar{\lambda}_1$ pour $g(l_0)$ inférieur à g_1 .

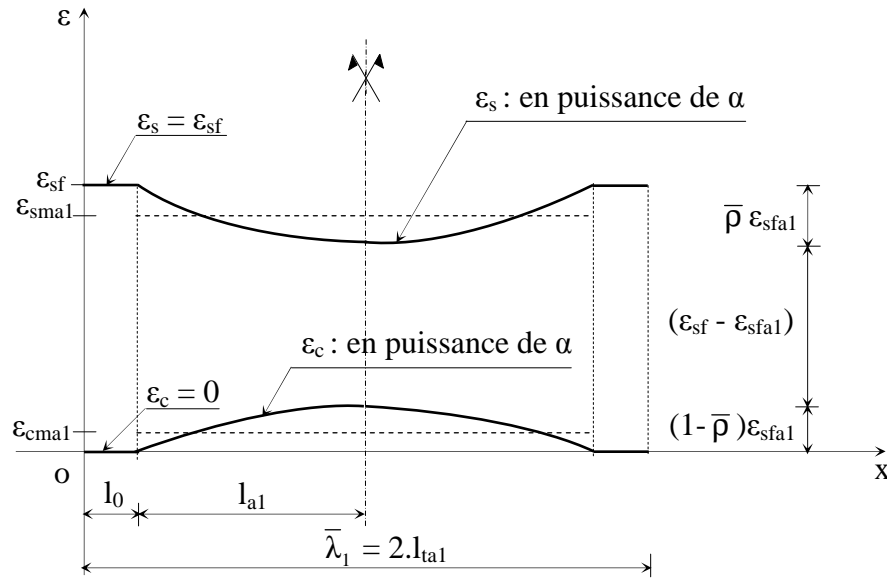


Fig. II.11. Variation de ε_s et ε_c entre deux fissures consécutives distantes de $\bar{\lambda}_1$

II.6. Cas particulier de $g(l_0) = g_1$ avec $\lambda > 2 l_t$

Ce cas peut être envisagé pendant la phase IIa (1^{ère} partie) où le nombre de fissures reste inférieur à la moitié du nombre total (avec des espacements de fissures supérieurs à deux fois la longueur d'introduction totale l_t).

Toutes les équations établies précédemment à la section II.5.1 restent valables, il suffit de remplacer $g(l_0)$ par g_1 , l_1 par l_{g1} et l_t par l_{tg1} .

l_{g1} : longueur d'introduction effective quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est égal à g_1 ,

$l_{tg1} := (l_0 + l_{g1})$, longueur d'introduction totale quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est égal à g_1 ,

On donne ci-après quelques résultats particuliers.

a) Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_{g1})$

Le glissement à la distance l_0 de la fissure est égal à g_1 :

$$g_1 = g_{l_{g1}} = \theta^{1/(1-\alpha)} l_{g1}^{2/(1-\alpha)} \quad (\text{II.49})$$

On peut ainsi exprimer la longueur d'introduction effective l_{g1} en fonction de g_1 :

$$l_{g1} = \sqrt{\frac{g_1^{(1-\alpha)}}{\theta}}, \quad (\text{II.50})$$

Pour mettre en évidence les paramètres de base, on peut écrire l'expression (II.50) de la manière suivante :

$$l_{g1} = \frac{1}{(1-\alpha)} \sqrt{2(1+\alpha) \frac{A_s E_s \bar{\rho}}{p} \frac{g_1}{\tau_1}}. \quad (\text{II.51})$$

L'allongement relatif de l'acier au droit de la fissure correspondant au glissement $g(l_0)$ égal à g_1 , noté ε_{sf1} , s'écrit :

$$\varepsilon_{sf1} = \frac{2}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} l_{g1}^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} = \frac{2}{1-\alpha} \frac{g_1}{l_{g1}}, \quad (\text{II.52})$$

$$\varepsilon_{sf1} = \beta_1 \sqrt{\frac{2}{1+\alpha} \frac{1}{g_1^{(1-\alpha)}}} = \sqrt{\frac{2}{1+\alpha} \frac{p}{A_s E_s \bar{\rho}} \tau_1 g_1}. \quad (\text{II.53})$$

b) Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Pour les différentes expressions du glissement, il suffit de remplacer dans les relations (II.23) à (II.25), respectivement ε_{sf} , l_1 , l_{t1} par ε_{sf1} , l_{g1} , l_{tg1} et on remarque que :

$$g(0) = g_{lt1} = g_1 + \varepsilon_{sf1} l_0$$

c) Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale $l_t (= l_{tg1})$

On a les mêmes résultats qu'au § II.5.1.3 (remplacer ε_{sf} , l_1 , l_{t1} par ε_{sf1} , l_{g1} , l_{tg1}).

II.7. Cas 2 : $g_1 < g(l_0) < g_2$ avant fissuration

On s'intéresse ici au cas (avant fissuration) où le glissement à une distance l_0 d'une fissure est compris entre les deux valeurs g_1 et g_2 .

La longueur totale d'introduction l_t est notée ici l_{t2} . Elle est égale à :

$$l_t = l_{t2} = l_0 + l_2 + l_{g1},$$

avec l_2 , longueur d'introduction comprise entre le glissement g_1 et le glissement $g(l_0)$ quand celui-ci reste inférieur à g_2 . Cet état est modélisé figure II.12.

II.7.1. Phase IIa et $\lambda > 2 l_{t2}$ (avec $l_t = l_{t2} = l_0 + l_2 + l_{g1}$)**II.7.1.1. Domaine $(l_0 + l_2) \leq x \leq l_{t2}$**

En utilisant les relations établies à la sous-section II.5.1.1, en faisant le changement de variable $X = x - l_0 - l_2$, et sachant que $g(0)_{X=0} = g_1$ et $\tau(0)_{X=0} = \tau_1$ on peut écrire :

$$g(X) = \theta^{1/(1-\alpha)} [l_{g1} - X]^{2/(1-\alpha)},$$

$$\tau(X) = k_1 \theta^{\alpha/(1-\alpha)} [l_{g1} - X]^{2\alpha/(1-\alpha)},$$

$$\varepsilon_s(X) = (\varepsilon_s)_{X=0} - \left[1 + \left(1 - \frac{X}{l_{g1}} \right)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \right] \bar{\rho} \cdot \varepsilon_{sf1},$$

$$\varepsilon_{sm1} = (\varepsilon_s)_{X=0} - \frac{1+\alpha}{2} \bar{\rho} \varepsilon_{sf1}$$

$$\varepsilon_c(X) = (\varepsilon_c)_{X=0} + (1 - \bar{\rho}) \left[1 - \left(1 - \frac{X}{l_{g1}} \right)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \right] \varepsilon_{sf1},$$

$$\varepsilon_{cm1} = (\varepsilon_c)_{X=0} + (1 - \bar{\rho}) \frac{1+\alpha}{2} \varepsilon_{sf1}$$

$(\varepsilon_s)_{X=0}$ et $(\varepsilon_c)_{X=0}$ sont déterminés à la sous-section II.7.1.2 ci-dessous avec respectivement

$(\varepsilon_s)_{X=l_2}$ et $(\varepsilon_c)_{X=l_2}$.

II.7.1.2. Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_2)$

Pour g compris entre g_1 et g_2 , en effectuant le changement de variable ($X = l_0 - x$), on reporte (II.2b) dans (II.8) qui s'écrit alors :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - \frac{p}{A_s E_s \bar{\rho}} \tau_1 = 0.$$

Avec les conditions aux limites :

$$\frac{dg}{dX}_{X=0} = -\varepsilon_{sf} \quad \text{et} \quad g(l_2) = g_1, \quad \text{et en posant} \quad \beta_2 = \frac{p \tau_1}{A_s E_s \bar{\rho}},$$

la variation de $g(X)$ pour $0 < X < l_2$ s'écrit :

$$g(X) = \beta_2 \frac{X^2}{2} - \varepsilon_{sf} X + g_1 + \varepsilon_{sf} l_2 - \beta_2 \frac{l_2^2}{2}, \quad (II.54)$$

la variation du glissement est, dans cet intervalle, parabolique avec une concavité dirigée vers les glissement positifs (figure II.12).

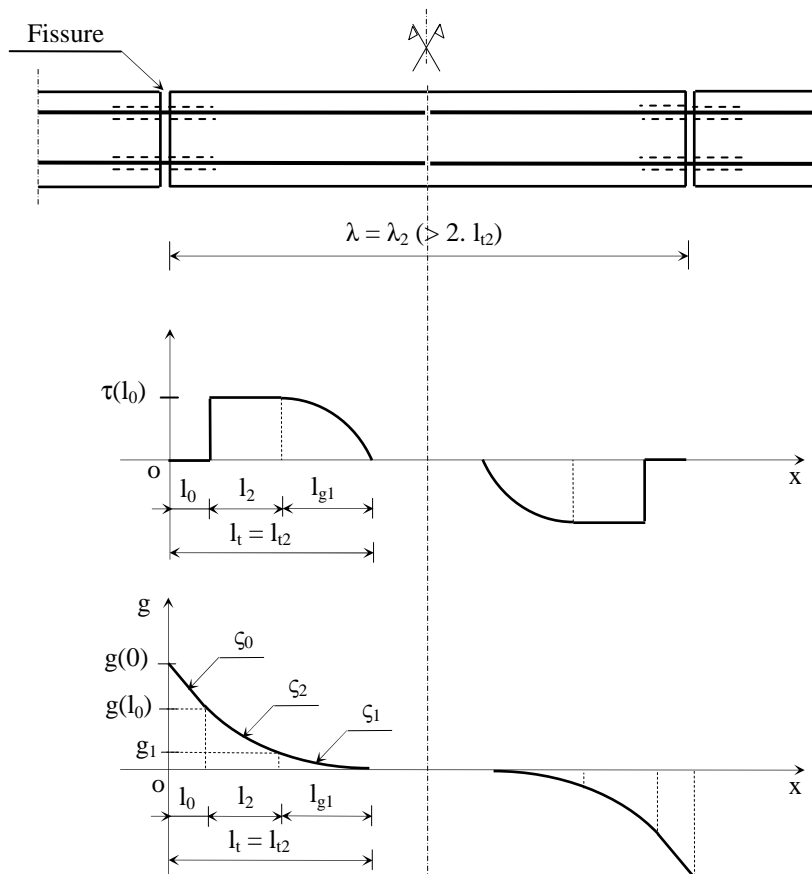


Fig. II.12. Variations de τ et de g pour $g_1 < g(l_0) < g_2$ et $\lambda_2 > 2.l_2$

Dans l'intervalle $[l_0 ; (l_0 + l_2)]$, la contrainte d'adhérence étant constante, la variation de l'allongement relatif s'écrit :

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{p \tau_1}{A_S E_S} X,$$

aussi,

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \beta_2 \bar{\rho} X. \quad (II.55)$$

Entre l_0 et $(l_0 + l_2)$, L'allongement relatif moyen de l'acier noté ε_{sm2} est déterminé par :

$$\varepsilon_{sm2} = \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} \varepsilon_s(X) dX,$$

après intégration on obtient l'expression (II.56) :

$$\varepsilon_{sm2} = \varepsilon_{sf} - \beta_2 \bar{\rho} \frac{l_2}{2}. \quad (\text{II.56})$$

La variation de l'allongement relatif du béton $\varepsilon_c(X)$ le long de l'intervalle $[l_0 ; l_0+l_2]$ à l'intérieur du tirant :

$$\varepsilon_c(X) = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \tau_1 X, \text{ qui peut s'écrire aussi :}$$

$$\varepsilon_c(X) = \beta_2 (1-\bar{\rho}) X. \quad (\text{II.57})$$

Sur la longueur l_2 , l'allongement relatif moyen du béton peut se traduire par :

$$\varepsilon_{cm2} = \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} \varepsilon_c(X) dX,$$

$$\varepsilon_{cm2} = \beta_2 (1-\bar{\rho}) \frac{l_2}{2}. \quad (\text{II.58})$$

Pour $X = l_2$, on peut exprimer l'allongement relatif de l'acier correspondant au glissement g_1 :

$$\varepsilon(l_2) = \varepsilon_{sf} - \beta_2 \bar{\rho} l_2 = \varepsilon_c(l_2) + \varepsilon_{sf1} = \beta_2 (1-\bar{\rho}) l_2 + \varepsilon_{sf1},$$

$$\varepsilon_{sf1} = \varepsilon_{sf} - \beta_2 l_2 = \frac{2}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} l_{g1}^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}. \quad (\text{II.59})$$

II.7.1.3. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Avec la relation (II.54) on détermine la valeur $g(l_0)$:

$$g(l_0) = g(X)_{X=0} = g_1 + \varepsilon_{sf} l_2 - \beta_2 \frac{l_2^2}{2}, \quad (\text{II.60})$$

l'expression (II.22) s'écrit alors :

$$g(x) = -\varepsilon_{sf} x + g_1 + \varepsilon_{sf} (l_2 - l_0) - \beta_2 \frac{l_2^2}{2}. \quad (\text{II.61})$$

On peut déduire ainsi le glissement au droit de la fissure :

$$g(0) = g_{lt2} = \varepsilon_{sf} (l_0 + l_2) + g_1 - \beta_2 \frac{l_2^2}{2}, \quad (\text{II.62})$$

où g_{lt2} désigne le glissement cumulé sur la longueur d'introduction totale l_{t2} .

II.7.1.4. Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale l_t

Durant cette phase IIa avec ($g_1 < g(l_0) < g_2$) et quand le nombre de fissures principales n'a pas dépassé la moitié du nombre total, on peut écrire l'allongement relatif moyen de l'acier sur toute la longueur d'introduction totale l_t (ici l_{t2}) :

$$\varepsilon_{smt2} = \frac{1}{l_{t2}} (\varepsilon_{sf} l_0 + \varepsilon_{sm1} l_{g1} + \varepsilon_{sm2} l_2), \quad (\text{II.63})$$

la valeur de ε_{sm2} est donnée par la relation II.56, et l'allongement moyen relatif de l'acier sur la longueur l_1 s'écrit :

$$\varepsilon_{sm1} = \varepsilon_{sf} - \beta_2 \bar{\rho} l_2 - \frac{1+\alpha}{2} \bar{\rho} \varepsilon_{sf1}. \quad (\text{II.64})$$

On peut aussi déduire, quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est compris entre g_1 et g_2 ($g_1 < g(l_0) < g_2$), l'allongement relatif moyen du béton sur la longueur d'introduction totale l_t (ε_{cmt2}) :

$$\varepsilon_{cmt2} = \frac{1}{l_{t2}} (\varepsilon_{cm1} l_{g1} + \varepsilon_{cm2} l_2). \quad (\text{II.65})$$

L'allongement relatif moyen sur la longueur l_2 (ε_{cm2}) est donné par la relation (II.58) et sachant que $\varepsilon_c(l_2) = \beta_2 (1 - \bar{\rho}) l_2$, alors :

$$\varepsilon_{cm1} = (1 - \bar{\rho}) \left(\beta_2 l_2 + \frac{1+\alpha}{2} \varepsilon_{sf1} \right). \quad (\text{II.66})$$

L'allure des courbes représentant les variations des allongements relatifs de l'acier et du béton, le long de l'intervalle $[0 ; l_t]$ pour $g(l_0)$ compris entre g_1 et g_2 à l'intérieur du tirant, est présentée figure II.13.

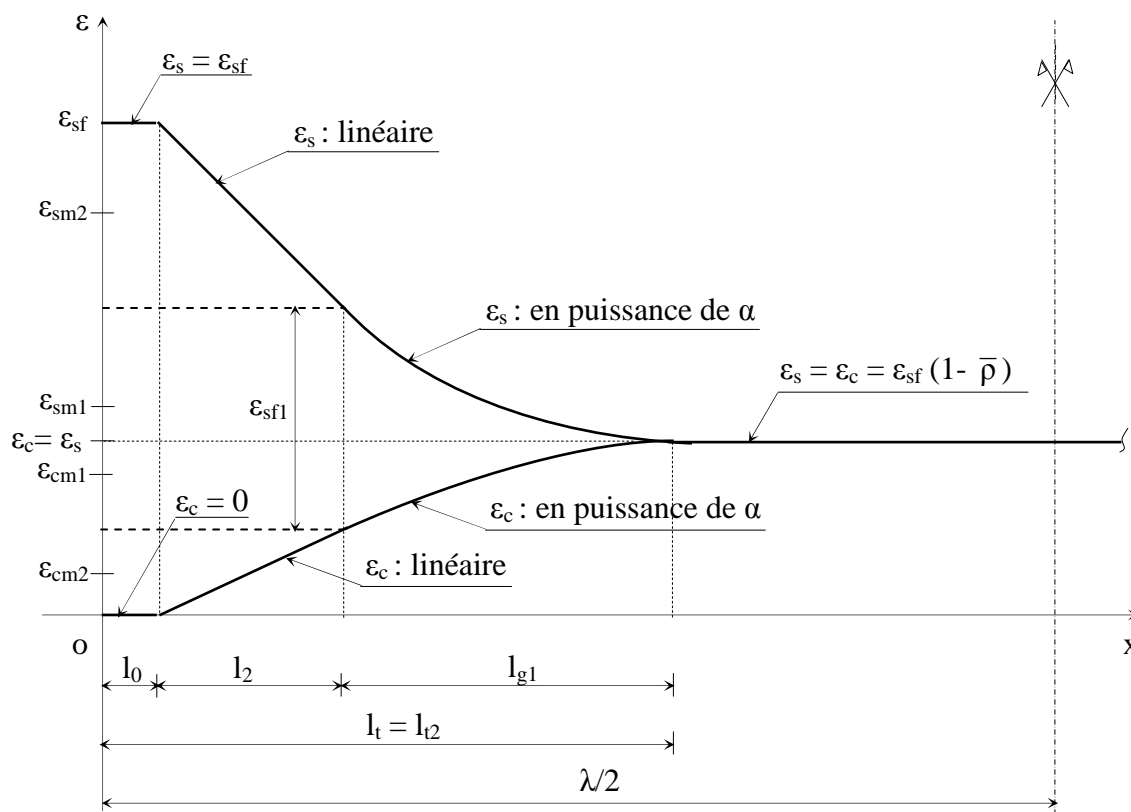


Fig. II.13. Variation de ϵ_s et ϵ_c le long de la longueur l_t quand $g_1 < g(l_0) < g_2$ avec $\lambda > \bar{\lambda}$

II.7.2. Phase IIb et $\lambda < 2(l_0 + l_{g1} + l_2)$

Avec le même raisonnement que la sous-section II.5.2, la distance entre deux fissures consécutives à la stabilisation des fissures est égale à:

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_2 = 1,7 (l_{0r} + l_{2r} + l_{g1}) = 1,7l_{tr} = 1,7l_{t2r},$$

où l_{2r} et l_{t2r} représentant respectivement les longueurs l_2 et l_{t2} à l'apparition de la première fissure.

Juste avant l'apparition de la première fissure, avec la relation (II.59) on peut écrire :

$$\epsilon_{sf1} = \epsilon_{sr} - \beta_2 l_{2r}, \text{ d'où}$$

$$l_{2r} = \frac{\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sf1}}{\beta_2}, \quad (\text{II.67})$$

$$l_{t2r} = \frac{1}{1-\delta} \left(\frac{\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sf1}}{\beta_2} + l_{g1} \right)$$

À la stabilisation des fissures deux cas peuvent être envisagés :

$$\text{-1}^{\text{er}} \text{ cas : } l_{tg1} > \frac{\bar{\lambda}_2}{2} \text{ et}$$

$$\text{-2}^{\text{eme}} \text{ cas : } l_{tg1} < \frac{\bar{\lambda}_2}{2}.$$

II.7.2.1. Phase IIb : 1^{er} cas : $l_{tg1} > \frac{\bar{\lambda}_2}{2}$

Dans ce cas, après la redistribution des efforts le glissement à la distance l_0 devient inférieur à g_1 comme il est montré à la figure II.14. On a alors deux courbes (ζ_0 et ζ_1) au lieu de trois courbes avant la redistribution des efforts. De même pour l'allure de la courbe de la contrainte d'adhérence où le palier de valeur maximale τ_1 disparaît après le redistribution des efforts.

L'espacement moyen des fissures, après la stabilisation des fissures, est égal:

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_2 = 2 (l_0 + l_{a1}) = 2l_{ta1}, \text{ c'est-à-dire } l_{ta1} = \frac{1,7}{2} l_{t2r} \text{ et ici}$$

$$l_{a1} = \frac{\bar{\lambda}_2}{2} (1-\delta) \quad (\text{II.68})$$

Les relations établies à la sous-section II.5.2 peuvent être utilisées ici en utilisant pour l'espacement moyen des fissures la valeur $\bar{\lambda}_2$.

La variation du glissement dans le domaine $[0 ; l_0]$ s'écrit :

$$g(x) = -\varepsilon_{sf} x + g(l_0) + \varepsilon_{sf} l_0 + g_a,$$

où le glissement résiduel est déterminé en utilisant la relation (II.60), avec l_{2r} , juste avant fissuration et la relation (II.36) juste après fissuration.

$$g_a = g_{a21} = g_1 + \varepsilon_{sf} l_{2r} - \beta_2 \frac{l_{2r}^2}{2} - \theta^{1/(1-\alpha)} l_{a1}^{2/(1-\alpha)}, \tag{II.69}$$

où g_{a21} désigne explicitement le glissement résiduel provenant de la diminution de la longueur d'introduction totale de valeur l_{l2} avant fissuration à la valeur l_{ta1} après fissuration.

L'allure des courbes des allongements relatifs de l'acier et du béton, le long de la longueur $\bar{\lambda}_2$ pour $g(l_0)$ inférieure à g_1 ressemble à celui présentée à la figure II.11 de la sous section II.5.2.

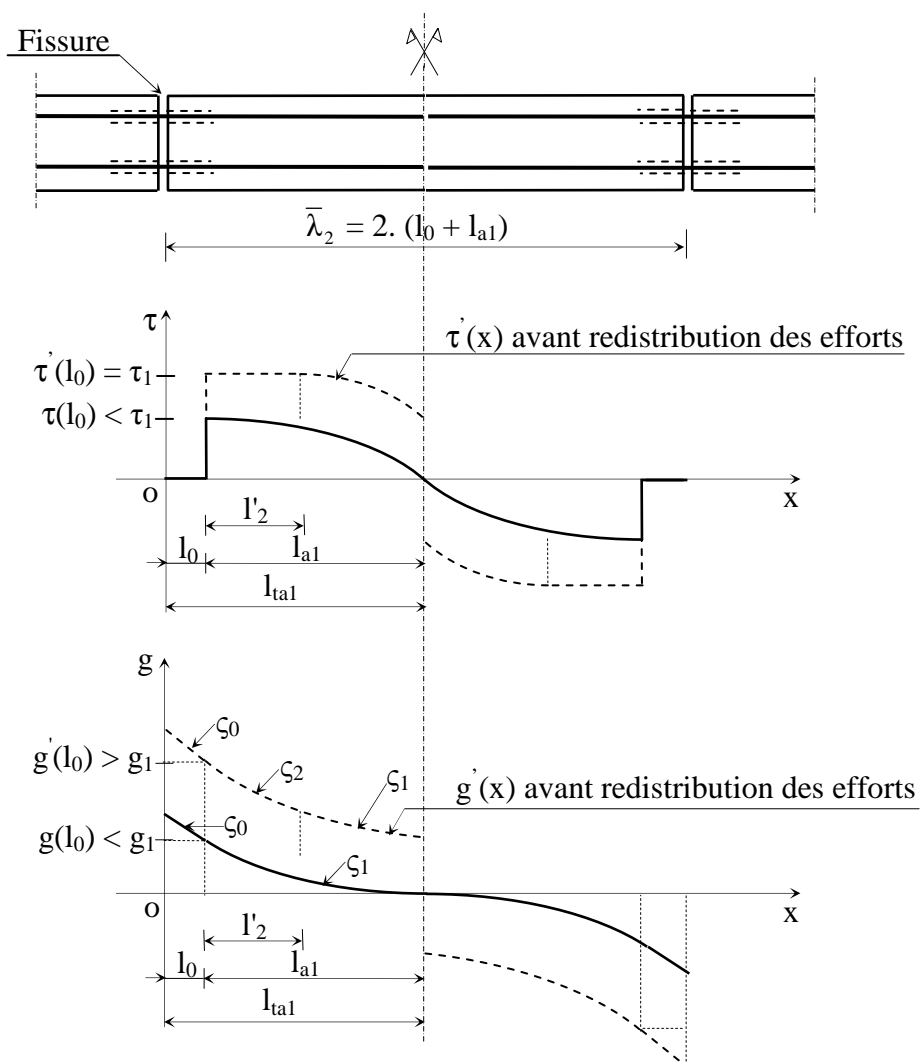


Fig. II.14. Variations de τ et de g le long de $\bar{\lambda}_2$ avec $g(l_0) < g_1$

II.7.2.2. Phase IIb : 2^{ème} cas : $l_{tg1} < \frac{\bar{\lambda}_2}{2}$

Ici, après la stabilisation des fissures, la longueur d'introduction l_{g1} correspondant au glissement g_1 est entièrement développée, mais la longueur l_2 diminue et prend la valeur l_{a2} .

Cet état est représenté figure II.15 où la longueur l_2 avant la stabilisation des fissures, est notée l_{a2} après la stabilisation des fissures telle que $l_{a2} < l_2$.

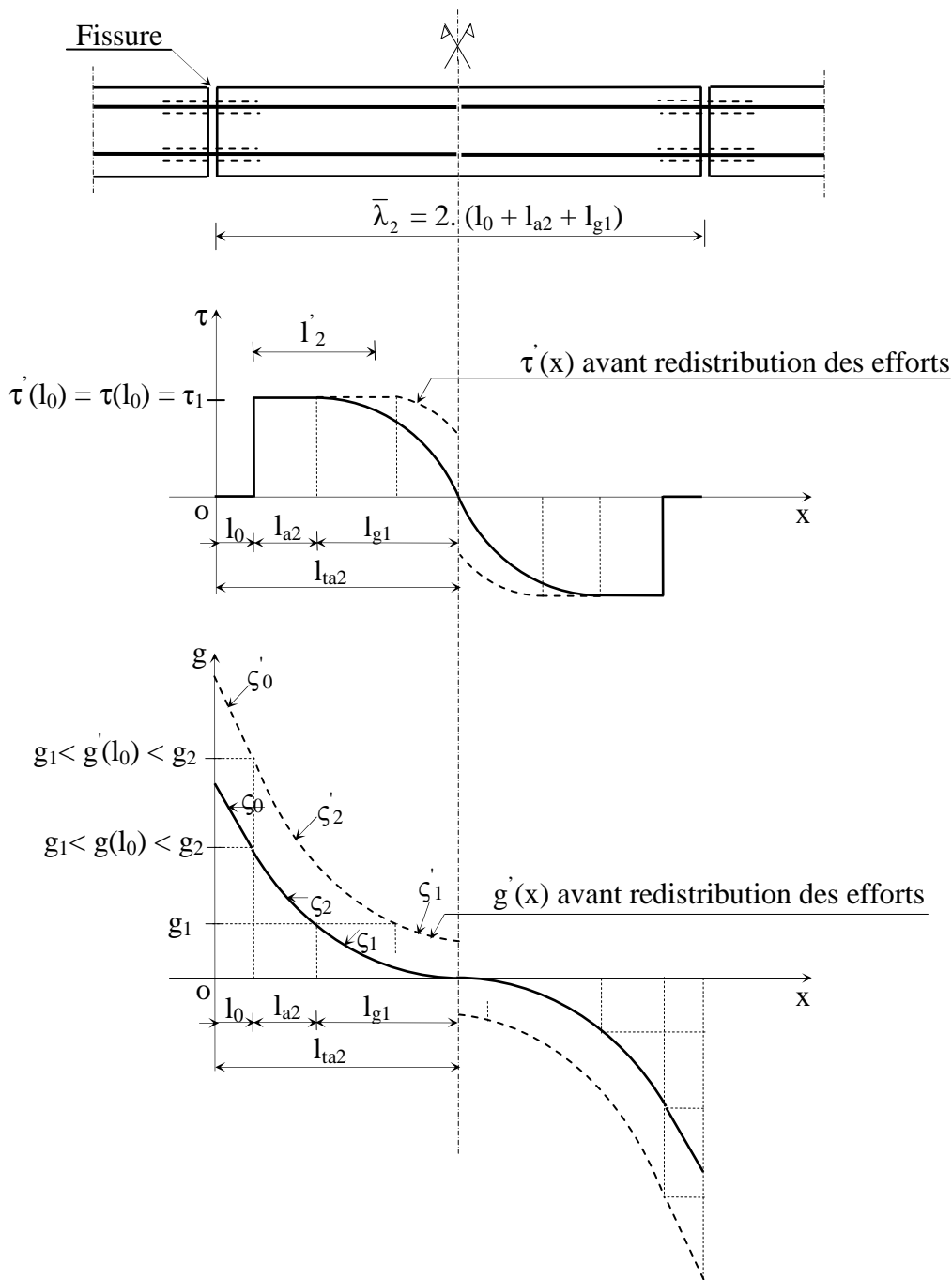


Fig. II.15. Variations de τ et de g le long de $\bar{\lambda}_2$ avec $g_1 < g(l_0) < g_2$

L'espace moyen des fissures est donné par la relation :

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_2 = 2 (l_0 + l_{a2} + l_{g1}) = 2l_{ta2}, \text{ aussi } l_{ta2} = \frac{1,7}{2} l_{t2r} \text{ et}$$

$$l_{a2} = \frac{\bar{\lambda}_2}{2} (1 - \delta) - l_{g1} \quad (\text{II.70})$$

a) Domaine $(l_0 + l_{a2}) \leq x \leq l_{ta2}$

Avec les relations établies à la sous-section II.7.1.1, les expressions de $g(X)$ et $\tau(X)$ restent sans changement. Dans ce cas les allongements relatifs des matériaux (béton et acier) en remplaçant l_2 par l_{a2} , s'écrivent :

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \beta_2 \bar{\rho} l_{a2} - \left[1 + \left(1 - \frac{X}{l_{g1}} \right)^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right] \bar{\rho} \cdot \varepsilon_{sf1},$$

$$\varepsilon_{sm1} = \varepsilon_{sf} - \beta_2 \bar{\rho} l_{a2} - \frac{1+\alpha}{2} \bar{\rho} \varepsilon_{sf1} \quad (\text{II.71})$$

$$\varepsilon_c(X) = \beta_2 (1 - \bar{\rho}) l_{a2} + (1 - \bar{\rho}) \left[1 - \left(1 - \frac{X}{l_{g1}} \right)^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right] \varepsilon_{sf1},$$

$$\varepsilon_{cm1} = (1 - \bar{\rho}) \left(\beta_2 l_{a2} + \frac{1+\alpha}{2} \varepsilon_{sf1} \right) \quad (\text{II.72})$$

b) Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_{a2})$

On a les mêmes expressions trouvées à la sous-section II.7.1.2, il suffit de remplacer l_2 par l_{a2} . L'allongement relatif fictif (ε_{sfa2}) correspondant à la longueur d'introduction totale l_{ta2} est déterminée à l'aide de la relation (II.59) après fissuration :

$$\varepsilon_{sfa2} = \varepsilon_{sf1} + \beta_2 l_{a2} \quad (\text{II.73})$$

Les variations de ε_s et ε_c pour $\varepsilon_s = \varepsilon_{sfa2}$ sont montrées figure II.16.

c) Domaine $0 \leq x \leq l_0$

En utilisant la relation (II.60), avec la longueur l_{2r} puis avec la longueur l_{a2} , le glissement résiduel est déduit de :

$$g_a = \left(g_1 + \varepsilon_{sf} l_{2r} - \beta_2 \frac{l_{2r}^2}{2} \right) - \left(g_1 + \varepsilon_{sfa2} l_{a2} - \beta_2 \frac{l_{a2}^2}{2} \right),$$

après simplification le glissement g_a s'écrit :

$$g_a = g_{a22} = \varepsilon_{sf} l_{2r} - \varepsilon_{sfa2} l_{a2} - \frac{\beta_2}{2} (l_{2r}^2 + l_{a2}^2), \tag{II.74}$$

où g_{a22} désigne explicitement le glissement résiduel provenant de la diminution de la longueur d'introduction totale de valeur l_{t2} avant fissuration à la valeur l_{ta2} après fissuration.

Le glissement résiduel sur la longueur perturbée étant négligé, le glissement au droit de la fissure est donné par la relation (II.62).

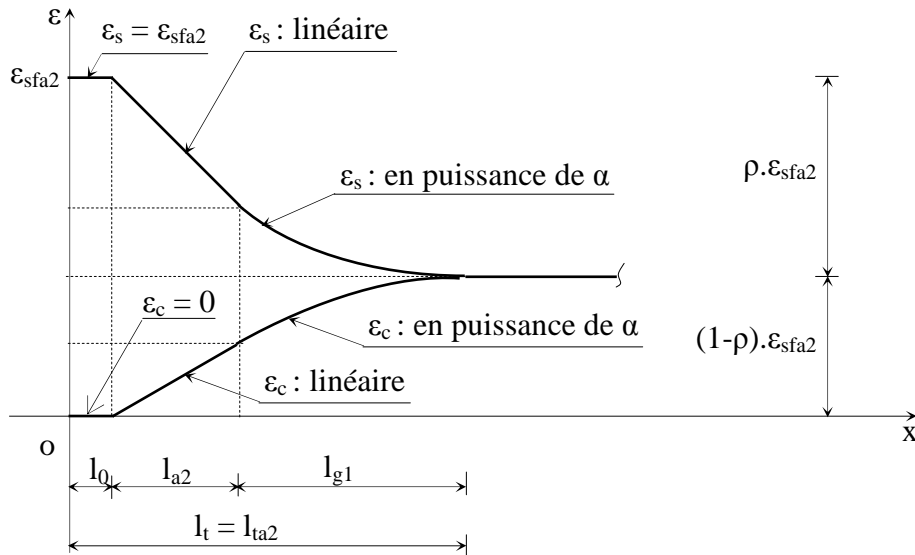


Fig. II.16. Variation de ε_s et ε_c pour $\varepsilon_{sf} = \varepsilon_{sfa2}$

c) Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale l_{ta2}

L'allongement relatif moyen de l'acier entre deux fissures consécutives distantes de $\bar{\lambda}_2$ est donné par :

$$\varepsilon_{sm\bar{\lambda}_2} = \frac{2}{\bar{\lambda}_2} (\varepsilon_{sf} l_0 + \varepsilon_{sm1} l_{g1} + \varepsilon_{sma2} l_{a2}), \tag{II.75}$$

où ε_{sm1} est déterminé plus haut et sur la longueur l_{a2} on a,

$$\epsilon_{sma2} = \epsilon_{sf} - \beta_2 \bar{\rho} \frac{l_{a2}}{2}. \tag{II.76}$$

Entre deux fissures consécutives distantes de $\bar{\lambda}_2$, on peut écrire l'allongement relatif moyen du béton :

$$\epsilon_{cm\bar{\lambda}_2} = \frac{2}{\bar{\lambda}_2} (\epsilon_{cm1} l_{g1} + \epsilon_{cma2} l_{a2}), \tag{II.77}$$

avec l'allongement relatif moyen du béton sur la longueur l_{a2} :

$$\epsilon_{cma2} = \beta_2 (1 - \bar{\rho}) \frac{l_{a2}}{2}, \tag{II.78}$$

Les variations des allongements relatifs de l'acier et du béton, le long de la longueur $\bar{\lambda}_2$ pour $g(l_0)$ compris entre g_1 et g_2 , sont présentées à la figure II.17.

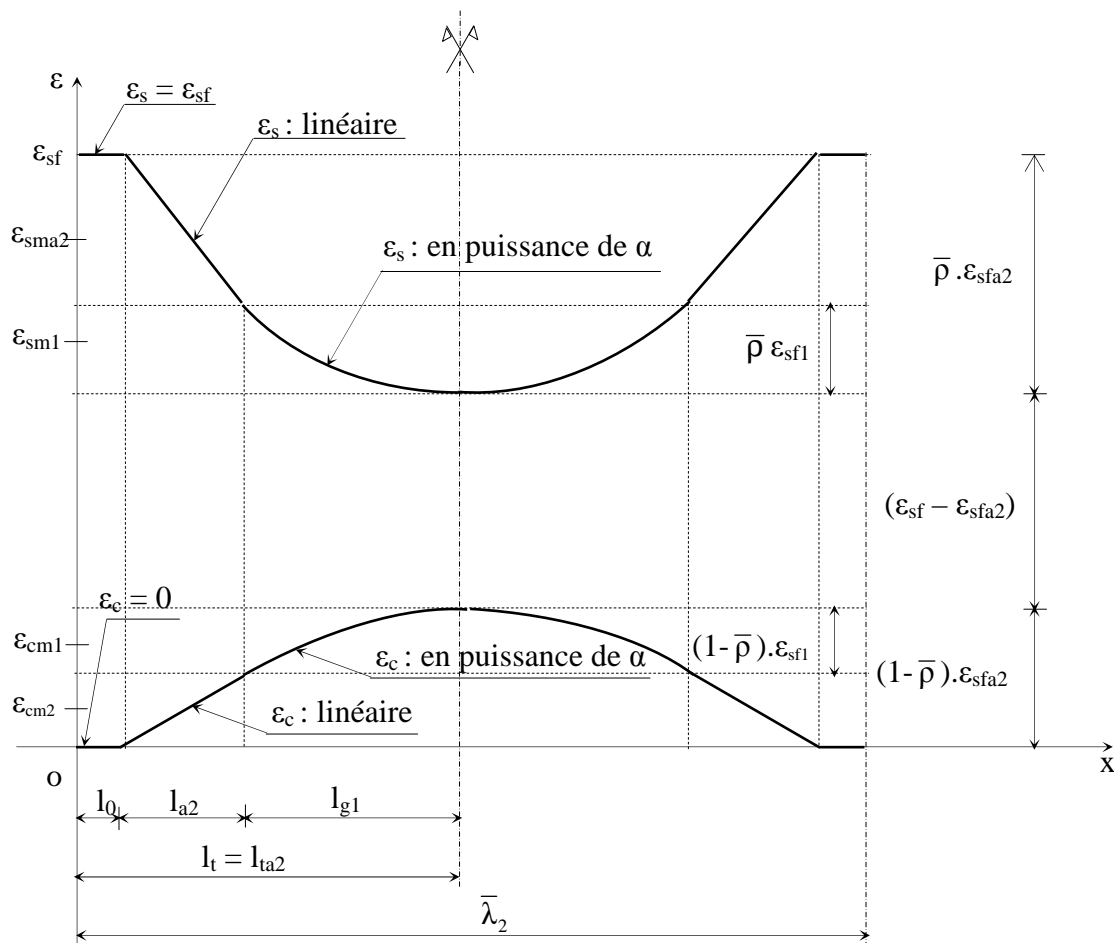


Fig. II.17. Variation de ϵ_s et ϵ_c entre deux fissures consécutives distantes de $\bar{\lambda}_2 > 2l_{tg1}$

II.8. Cas particulier de $g(l_0) = g_2$ avec $\lambda > 2 l_t$

Toutes les équations établies précédemment à la section II.7.1 restent valables, il suffit de remplacer, $g(l_0)$ par g_2 , l_2 par l_{g2} , l_t par l_{tg2} et ε_{sf} par ε_{sf2} .

l_{g2} : longueur d'introduction effective quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est égal à g_2 ,

$l_{tg2} := (l_0 + l_{g2} + l_{g1})$, longueur d'introduction totale quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est égal à g_2 .

ε_{sf2} : allongement relatif de l'acier correspondant au glissement g_2 à la distance l_0 de la fissure (c'est-à-dire $l_t = l_0 + l_{g2} + l_{g1}$).

On donne, dans ce cas, quelques résultats particuliers :

En écrivant à la distance $(l_0 + l_{g2})$ l'allongement relatif de l'acier avec les relations (II.55) et (II.57), l'expression de ε_{sf2} est donnée par :

$$\varepsilon_{sf2} - \beta_2 \bar{\rho} l_{g2} = \varepsilon_{sf1} + \beta_2 (1 - \bar{\rho}) l_{g2} ,$$

$$\varepsilon_{sf2} = \varepsilon_{sf1} + \beta_2 l_{g2} \quad (\text{II.79})$$

Dans l'intervalle $[0 ; l_0]$, le glissement $g(x)$ est donné par l'expression (II.22). Avec la relation (II.54) on a :

$$g_2 = g(l_0) = g(X)_{X=0} = g_1 + \varepsilon_{sf2} l_{g2} - \beta_2 \frac{l_{g2}^2}{2} , \quad (\text{II.80})$$

on peut écrire ainsi le glissement au droit de la fissure :

$$g(x)_{x=0} = g_2 + \varepsilon_{sf2} l_0 . \quad (\text{II.81})$$

II.9. Cas 3 : $g_2 < g(l_0) < g_3$ avant fissuration

Le glissement dans ce cas à une distance l_0 de la fissure est compris entre les deux valeurs g_2 et g_3 .

La longueur totale d'introduction l_t est notée ici l_{t3} et elle est égale à :

$$l_t = l_{t3} = l_0 + l_3 + l_{g2} + l_{g1} ,$$

avec l_3 , longueur d'introduction comprise entre le glissement g_2 et le glissement $g(l_0)$ quand celui-ci reste inférieur à g_3 .

II.9.1. Phase IIa et $\lambda > 2$ ($l_0 + l_3 + l_{g2} + l_{g1}$)

II.9.1.1. Domaine ($l_{t3} - l_{g1}$) $\leq x \leq l_{t3}$

Dans ce domaine, nous obtenons les mêmes résultats que la sous-section II.7.1.1 avec le changement de variable $X = x - l_0 - l_3 - l_{g2}$ et les valeurs de $(\varepsilon_s)_{X=0}$ et $(\varepsilon_c)_{X=0}$ à déterminer.

II.9.1.2. Domaine ($l_0 + l_3$) $\leq x \leq (l_{t3} - l_{g1})$

En utilisant les relations établies à la sous-section II.7.1.2, en faisant le changement de variable $X = x - l_0 - l_3$, et sachant que : $\tau(X) = \tau_1$, $g_{X=0} = g_2$ et

$$\frac{dg}{dX}_{X=0} = \varepsilon_c(0) - \varepsilon_s(0) = -\varepsilon_{sf2},$$

on peut écrire :

$$g(X) = \beta_2 \frac{X^2}{2} - \varepsilon_{sf2} X + g_2,$$

sachant que $g_{X=l_{g2}} = g_1$, alors on retrouve la relation (II.80):

$$(g_2 - g_1) = \varepsilon_{sf2} l_{g2} - \beta_2 \frac{l_{g2}^2}{2}.$$

Pour les allongements relatifs des matériaux :

$$\varepsilon_s(X) = (\varepsilon_s)_{X=0} - \beta_2 \bar{\rho} X$$

$$\varepsilon_{sm2} = (\varepsilon_s)_{X=0} - \beta_2 \bar{\rho} \frac{l_{g2}^2}{2}$$

$$\varepsilon_c(X) = (\varepsilon_c)_{X=0} + \beta_2 (1 - \bar{\rho}) X$$

$$\varepsilon_{cm2} = (\varepsilon_c)_{X=0} + \beta_2 (1 - \bar{\rho}) \frac{l_{g2}^2}{2}$$

$(\varepsilon_s)_{X=0}$ et $(\varepsilon_c)_{X=0}$ sont déterminés à la sous-section II.9.1.3 (où $X = x - l_0$) ci-dessous avec respectivement $(\varepsilon_s)_{X=l_3}$ et $(\varepsilon_c)_{X=l_3}$.

II.9.1.3. Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_3)$

Avec le changement de repère (o's t) montré à la figure II.2, la relation II.2c s'écrit :

$$t = -\frac{\tau_1 - \tau_3}{g_3 - g_2} s, \quad (\text{II.82})$$

avec $t = (\tau - \tau_1)$ et $s = (g - g_2)$,

en posant $k_3 = \frac{\tau_1 - \tau_3}{g_3 - g_2}$ qui prend toujours une valeur positive, on obtient :

$$t = -k_3 \cdot s. \quad (\text{II.83})$$

Avec le changement de variable $X = x - l_0$, l'équation différentielle (II.8) s'écrit :

$$\frac{d^2 s}{dX^2} - \frac{p}{A_s E_s \bar{\rho}} t(X) = 0, \quad (\text{II.84})$$

et en posant $\beta_3 = \sqrt{\frac{k_3 p}{A_s E_s \bar{\rho}}}$ on a :

$$\frac{d^2 s}{dX^2} + \beta_3^2 s = 0. \quad (\text{II.85})$$

Avec les conditions aux limites : $\frac{ds}{dX}_{X=0} = -\varepsilon_{sf}$ et $s(X)_{X=l_3} = 0$,

l'équation différentielle admet pour solution :

$$s(X) = \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \operatorname{tg} \beta_3 l_3 \cdot \cos \beta_3 X - \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \cdot \sin \beta_3 X. \quad (\text{II.86})$$

Dans l'intervalle $[l_0 ; (l_0 + l_3)]$, la variation du glissement est représentée par une fonction sinusoïdale.

La contrainte d'adhérence s'écrit :

$$t(X) = -k_3 \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \cos\beta_3 X + k_3 \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \cdot \sin\beta_3 X \quad (\text{II.87})$$

Les variations de la contrainte d'adhérence et la variation du glissement pour $g(l_0)$ compris entre les valeurs g_2 et g_3 , le long de l_0 , sont représentées figure II.18 où la courbe ζ_3 représente la fonction sinusoïdale donnée par la relation II.86.

La variation de l'allongement relatif de l'acier et sa moyenne sur la longueur l_3 se calculent de la manière suivante :

- Variation de l'allongement relatif de l'acier sur la distance l_3

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \left(-\frac{p}{A_s E_s} \int_0^X t(\xi) d\xi \right), \text{ le signe « moins » est introduit ici car avec le}$$

changement de repère, $t(X)$ est négatif sur la distance l_3 , comme montré à la figure II.18.

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \varepsilon_{sf} (\operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \sin\beta_3 X + \cos\beta_3 X - 1). \quad (\text{II.88})$$

L'allongement relatif de l'acier à la distance $X = l_3$ est égal :

$$\varepsilon_s(l_3) = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \left(\frac{1}{\cos\beta_3 l_3} - 1 \right) \varepsilon_{sf}. \quad (\text{II.89})$$

- Allongement relatif moyen de l'acier sur la distance l_3

$$\varepsilon_{sm3} = \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} \varepsilon_s(X) dX,$$

$$\varepsilon_{sm3} = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \left(\frac{\operatorname{tg}\beta_3 l_3}{\beta_3 l_3} - 1 \right) \varepsilon_{sf} \quad (\text{II.90})$$

De même pour le béton sur la longueur l_3 , la variation de l'allongement relatif et sa moyenne sont calculés de la manière suivante :

- variation de l'allongement relatif du béton

$$\varepsilon_c(X) = - \left(\frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \int_0^X t(\xi) d\xi \right),$$

$$\varepsilon_c(X) = \varepsilon_{sf} (1 - \bar{\rho}) (\operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \sin\beta_3 X + \cos\beta_3 X - 1). \quad (\text{II.91})$$

L'allongement relatif du béton à la distance $X = l_3$ est égal :

$$\epsilon_c(l_3) = \epsilon_{sf} (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_3} - 1 \right) \tag{II.92}$$

- allongement relatif moyen du béton

$$\epsilon_{cm3} = \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} \epsilon_c(X) dX ,$$

$$\epsilon_{cm3} = (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{\text{tg} \beta_3 l_3}{\beta_3 l_3} - 1 \right) \epsilon_{sf} . \tag{II.93}$$

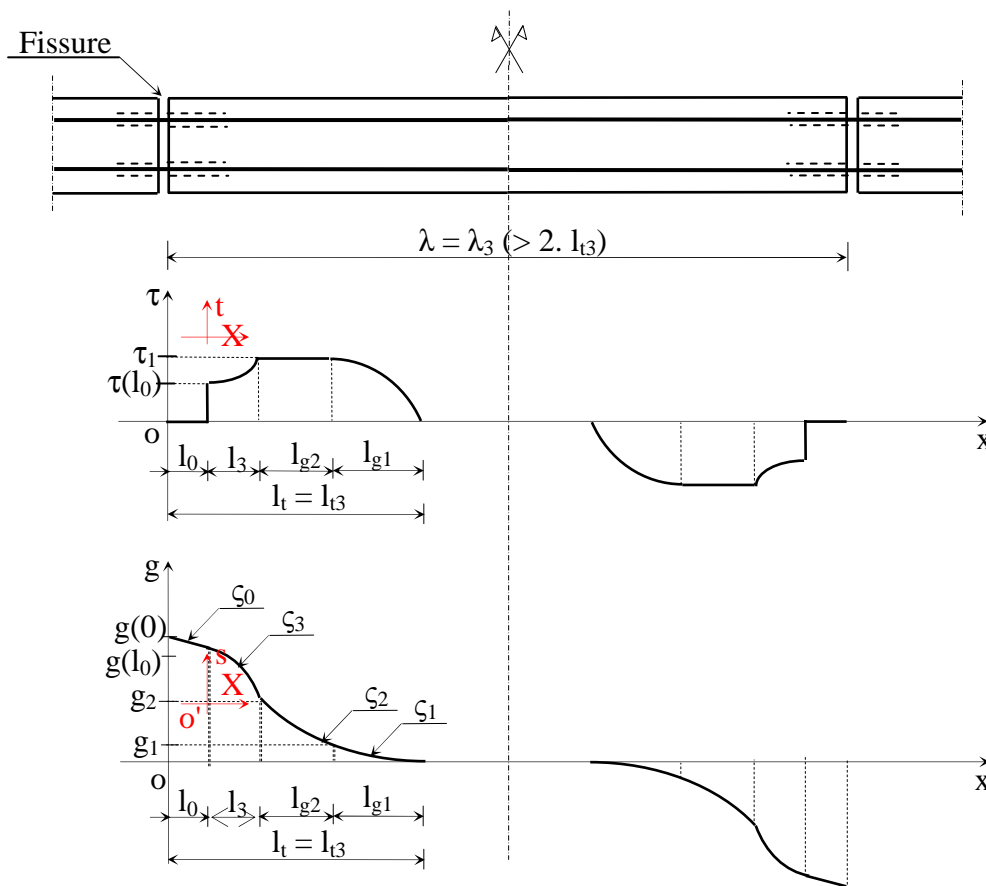


Fig. II.18. Variations de τ et de g avant la stabilisation des fissures pour $g_2 < g(l_0) < g_3$

II.9.1.4. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Le glissement $g(x)$ est donné par l'expression :

$$g(x) = -\varepsilon_{sf} x + g(l_0) + \varepsilon_{sf} l_0,$$

et la valeur à la distance l_0 de la fissure est déterminée par la relation (II.86) en faisant $X=0$.

$$g(x)_{x=l_0} = s(X)_{X=0} + g_2 = g_2 + \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \operatorname{tg}\beta_3 l_3, \quad (\text{II.94})$$

on peut écrire ainsi le glissement au droit de la fissure :

$$g(0) = g_{lt3} = g_2 + \varepsilon_{sf} \left(l_0 + \frac{\operatorname{tg}\beta_3 l_3}{\beta_3} \right) \quad (\text{II.95})$$

II.9.1.5. Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale l_t

Quand le nombre de fissures principales n'a pas dépassé la moitié du nombre total, on peut écrire l'allongement relatif moyen de l'acier sur toute la longueur d'introduction totale l_t (ici l_{t3}) :

$$\varepsilon_{sm3} = \frac{1}{l_{t3}} \left(\varepsilon_{sf} l_0 + \varepsilon_{sm3} l_3 + \varepsilon_{sm2} l_{g2} + \varepsilon_{sm1} l_{g1} \right). \quad (\text{II.96})$$

La valeur de ε_{sm3} est donnée par la relation (II.94). En utilisant les résultats établis aux sous sections II.7.1.1 et II.9.1, les valeurs moyennes sur les longueurs l_{g1} et l_{g2} s'écrivent respectivement ici :

$$\varepsilon_{sm1} = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \left(\frac{1}{\cos\beta_3 l_3} - 1 \right) \varepsilon_{sf} - \beta_2 \bar{\rho} l_{g2} - \frac{1+\alpha}{2} \bar{\rho} \varepsilon_{sf1}, \quad (\text{II.97})$$

$$\varepsilon_{sm2} = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \left(\frac{1}{\cos\beta_3 l_3} - 1 \right) \varepsilon_{sf} - \beta_2 \bar{\rho} \frac{l_{g2}}{2}. \quad (\text{II.98})$$

L'allongement relatif moyen du béton sur la longueur d'introduction totale l_{t3} est donnée par la relation (II.99).

$$\varepsilon_{cm3} = \frac{1}{l_{t3}} \left(\varepsilon_{cm3} l_3 + \varepsilon_{cm2} l_{g2} + \varepsilon_{cm1} l_{g1} \right). \quad (\text{II.99})$$

Avec la relation (II.92), on détermine l’allongement relatif moyen du béton sur la longueur l_3 (ϵ_{cm3}). On peut déduire aussi dans ce cas les valeurs moyennes sur les longueurs l_{g1} et l_{g2} en utilisant les résultats établis aux sous sections II.7.1.1. et II.9.1.

$$\epsilon_{cm1} = (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_3} - 1 \right) \epsilon_{sf} + \beta_3 (1 - \rho) l_{g2} + (1 - \bar{\rho}) \frac{1 + \alpha}{2} \epsilon_{sf1} \quad , \quad (II.100)$$

$$\epsilon_{cm2} = (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_3} - 1 \right) \epsilon_{sf} + \beta_2 (1 - \bar{\rho}) \frac{l_{g2}}{2} \quad . \quad (II.101)$$

On représente à la figure II.19, les variations des allongements relatifs de l’acier et du béton, le long de la longueur l_{t3} .

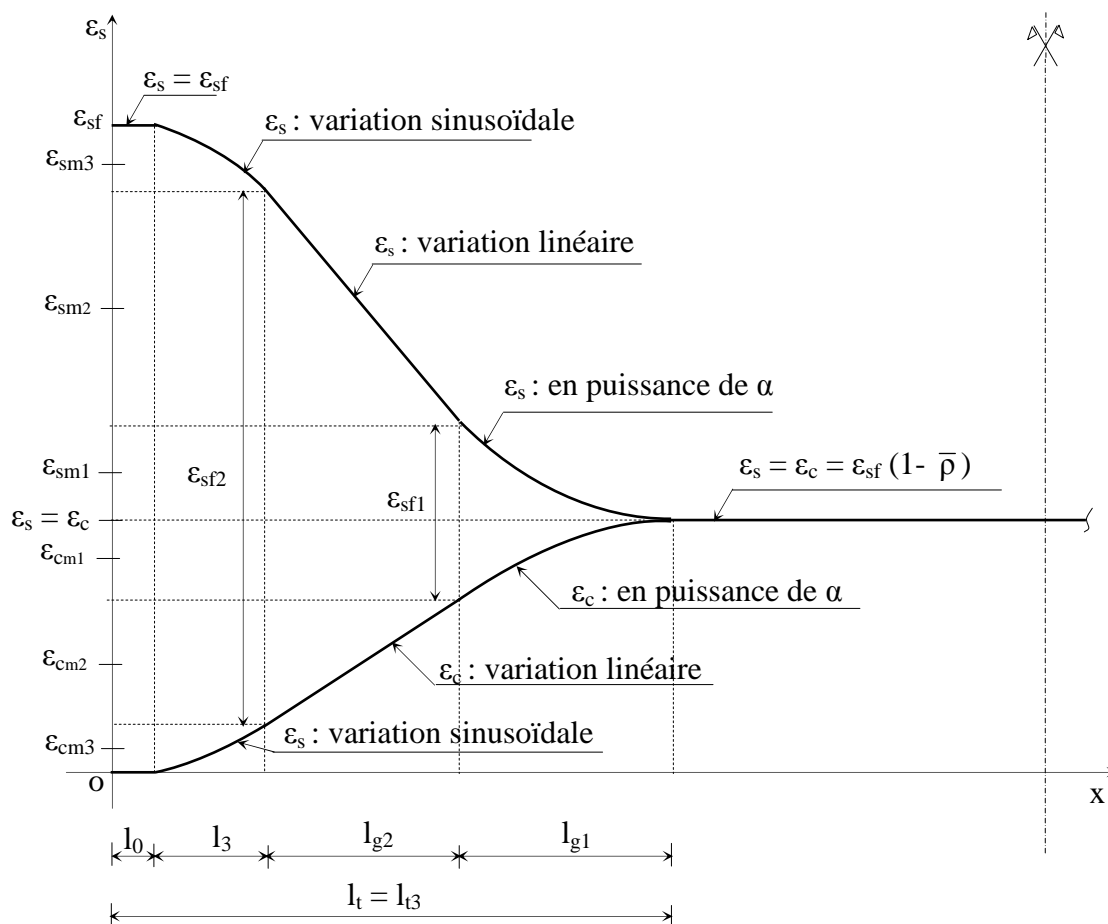


Fig. II.19. Variation de ϵ_s et ϵ_c le long de la longueur l_t quand $g_1 < g(l_0) < g_2$ avec $\lambda > \bar{\lambda}$

II.9.2. Phase IIb et $\lambda < 2 l_{t3}$

La distance entre deux fissures successives à la stabilisation des fissures est égale à :

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_3 = 1,7 (l_{0r} + l_{3r} + l_{g2} + l_{g1}) = 1,7l_{tr} = 1,7l_{t3r},$$

où l_{3r} et l_{t3r} représentant respectivement les longueurs l_3 et l_{t3} à l'apparition de la première fissure.

À l'apparition de la première fissure, avec la figure II.19, on peut écrire :

$$\varepsilon_s (l_{3r}) = \varepsilon_{sf2} + \varepsilon_c (l_{3r}) .$$

En utilisant les relations (II.89) et (II.92), on peut déterminer l_{3r} en faisant $\varepsilon_{sf} = \varepsilon_{sr}$:

$$\varepsilon_{sr} - \bar{\rho} \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{3r}} - 1 \right) \varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sf2} + \varepsilon_{sr} (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{3r}} - 1 \right),$$

$$\cos \beta_3 l_{3r} = \frac{1}{2 - \frac{\varepsilon_{sf2}}{\varepsilon_{sr}}},$$

$$l_{3r} = \frac{1}{\beta_3} \arccos \left(\frac{1}{2 - \frac{\varepsilon_{sf2}}{\varepsilon_{sr}}} \right). \quad (\text{II.102})$$

On peut déduire la longueur d'introduction totale:

$$l_{t3r} = \frac{1}{1 - \delta} (l_{3r} + l_{g1} + l_{g2}),$$

$$l_{t3r} = \frac{1}{1 - \delta} \left[\frac{1}{\beta_3} \arccos \left(\frac{\varepsilon_{sr}}{2\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sf2}} \right) + l_{g1} + l_{g2} \right]. \quad (\text{II.103})$$

Remarque :

À ce stade, la gaine entourant le béton est plastifiée sur la longueur l_{g2} , et commence à se détériorer sur la longueur l_3 . Toutefois le raisonnement peut être poursuivi en considérant, après que l'espacement moyen entre les fissures devienne inférieur à la longueur d'introduction totale que la valeur du pic de la contrainte d'adhérence diminue d'un certain pourcentage.

À la stabilisation des fissures trois cas peuvent être envisagés :

$$- 1^{\text{er}} \text{ cas : } l_{tg1} < \bar{\lambda}_3/2$$

$$- 2^{\text{eme}} \text{ cas : } l_{tg1} < \bar{\lambda}_3/2 < l_{tg2}$$

$$- 3^{\text{eme}} \text{ cas : } l_{tg2} > \bar{\lambda}_3/2$$

II.9.2.1. Phase IIb : 1^{er} cas : $l_{tg1} > \bar{\lambda}_3/2$

Dans ce cas, après la redistribution des efforts le glissement à la distance l_0 devient inférieur g_1 comme il est montré à la figure II.20. Sur les quatre courbes différentes de $g(x)$ avant la redistribution des efforts, il ne reste que deux courbes (ζ_0 et ζ_1). De même pour l'allure de la courbe de la contrainte d'adhérence où le palier de valeur maximale τ_1 disparaît après le redistribution des efforts.

L'espacement moyen des fissures est égal, dans ce cas, après la stabilisation des fissures :

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_3 = 2 (l_0 + l_{a1}) = 2l_{ta1}, \text{ c'est-à-dire } l_{ta1} = \frac{1,7}{2} l_{t3r} \text{ et ici}$$

$$l_{a1} = \frac{\bar{\lambda}_3}{2} (1 - \delta). \quad (\text{II.104})$$

Les relations établies à la sous-section II.5.2 peuvent être utilisées avec l'espacement moyen des fissures de valeur égale à $\bar{\lambda}_3$.

La variation du glissement dans le domaine $[0 ; l_0]$ s'écrit :

$$g(x) = -\varepsilon_{sf} x + g(l_0) + \varepsilon_{sf} l_0 + g_a ,$$

où le glissement résiduel est déterminé en utilisant la relation (II.94) juste avant fissuration et la relation (II.36) juste après fissuration.

$$g_a = g_{a31} = g_2 + \frac{\varepsilon_{sr}}{\beta_3} \text{tg}\beta_3 l_{3r} - \theta^{1/(1-\alpha)} l_{a1}^{2/(1-\alpha)}, \quad (\text{II.105})$$

où g_{a31} désigne explicitement le glissement résiduel provenant de la diminution de la longueur d'introduction totale de valeur l_{t3} avant fissuration à la valeur l_{ta1} après fissuration.

L'allure des courbes de variation des allongements relatifs de l'acier et du béton, le long de la longueur $\bar{\lambda}_3$ pour $g(l_0)$ inférieur à g_1 est présentée (semblable) figure II.11 de la sous section II.5.2.

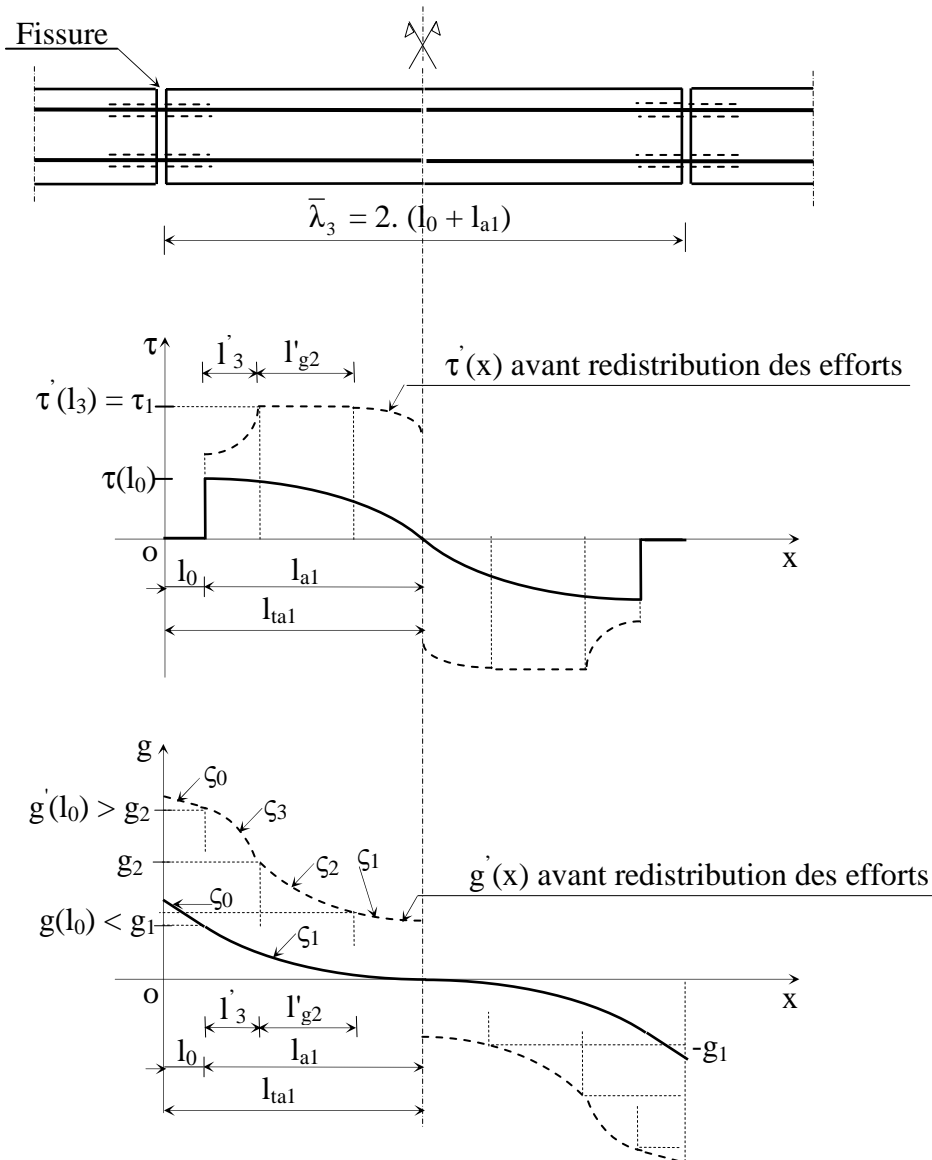


Fig. II.20. Variations de τ et de g le long de $\bar{\lambda}_3$ avec $g(l_0) < g_1$

II.9.2.2. Phase IIb : 2^{ème} cas : $l_{tg1} < \bar{\lambda}_3/2 < l_{tg2}$

Dans ce cas, après la stabilisation des fissures, l_3 n'existe pas, mais la longueur l_{g2} correspondant au glissement g_2 diminue et elle est notée alors l_{a2} . La longueur l_{g1} est invariable.

L'espace moyen des fissures est donné par la relation :

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_3 = 2 (l_0 + l_{a2} + l_{g1}) = 2l_{ta2},$$

$$\text{aussi } l_{ta2} = \frac{1,7}{2} l_{t3r} \text{ et avec } l_0 = \delta \frac{\bar{\lambda}_3}{2} \text{ on a :}$$

$$l_{a2} = \frac{\bar{\lambda}_3}{2} (1 - \delta) - l_{g1} \quad (\text{II.106})$$

Cet état est représenté figure II.21 où la longueur l_{g2} avant la stabilisation des fissures, est notée l_{a2} après la stabilisation des fissures telle que $l_{a2} < l_{g2}$. Dans ce cas, on a les mêmes résultats que la sous-section II.7.2.2 sauf pour le glissement résiduel et les allongements moyens qui sont déterminés de la manière suivante.

- glissement résiduel

La longueur $(l_{3r} + l_{g2})$ avant fissuration diminue et prend la valeur l_{a2} après fissuration, en utilisant les relations (II.94) et (II.60), on trouve :

$$g_a = g_{a32} = \left(g_2 + \frac{\varepsilon_{sr}}{\beta_3} \text{tg} \beta_3 l_{3r} \right) - \left(g_1 + \varepsilon_{sfa2} l_{a2} - \beta_2 \frac{l_{a2}^2}{2} \right), \quad (\text{II.107})$$

où g_{a32} désigne explicitement le glissement résiduel provenant de la diminution de la longueur d'introduction totale de valeur l_{t3} avant fissuration à la valeur l_{ta2} après fissuration.

Le glissement résiduel sur la longueur perturbée étant négligé, le glissement au droit de la fissure est donné par la relation (II.95).

- Valeurs moyennes sur la longueur $\bar{\lambda}_3$ (ici = $2l_{ta2}$)

Les allongements relatifs moyens de l'acier et du béton entre deux fissures successives distantes de $\bar{\lambda}_3$ s'écrivent :

$$\varepsilon_{sm\bar{\lambda}_3} = \frac{2}{\bar{\lambda}_3} (\varepsilon_{sf} l_0 + \varepsilon_{sma2} l_{a2} + \varepsilon_{sml} l_{g1}), \quad (\text{II.108})$$

$$\varepsilon_{cm\bar{\lambda}_3} = \frac{2}{\bar{\lambda}_3} (\varepsilon_{cma2} l_{a2} + \varepsilon_{cml} l_{g1}). \quad (\text{II.109})$$

Les allongements relatifs moyens sur les différentes longueurs établis à la sous-section II.7.2.2 restent valables ici.

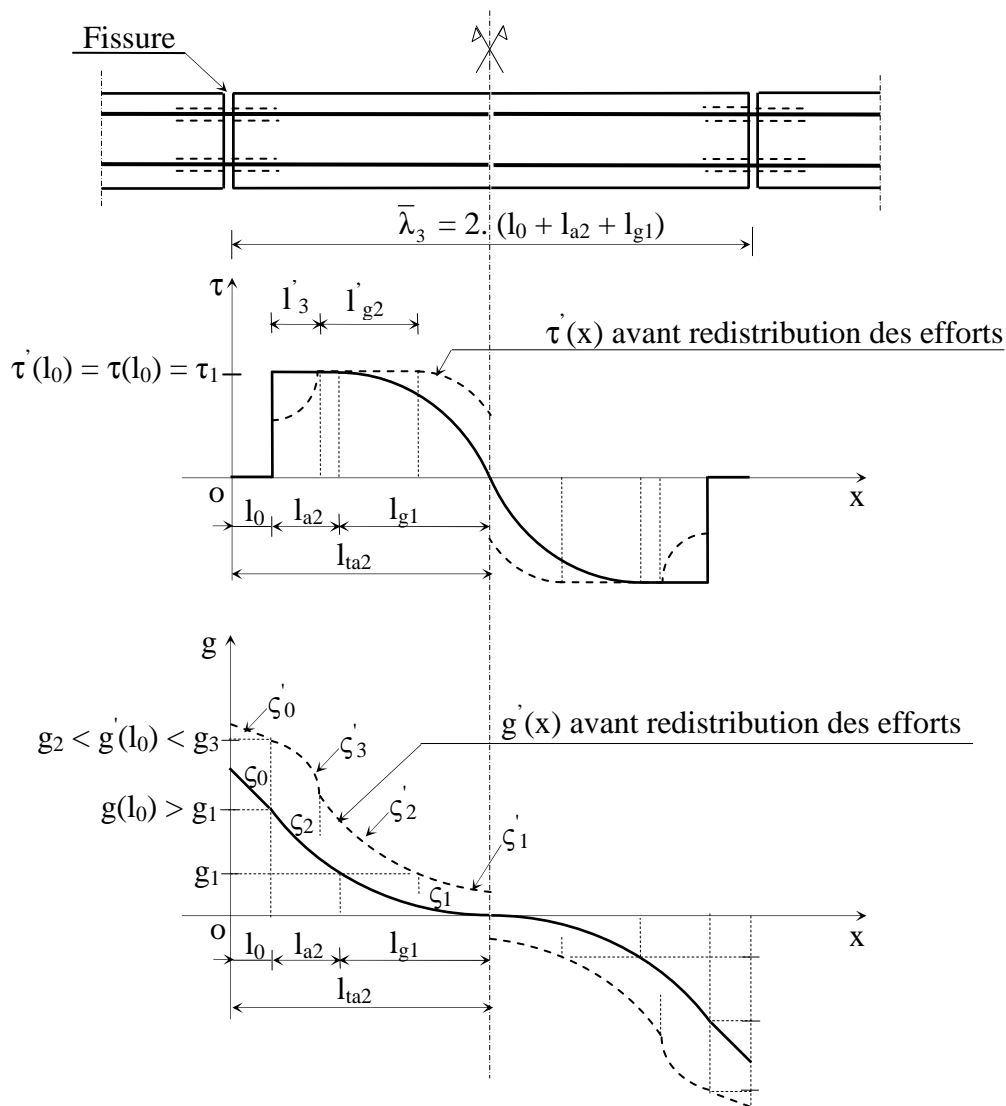


Fig. II.21. Variations de τ et de g le long de $\bar{\lambda}_3$ avec $g_1 < g(l_0) < g_2$

II.9.2.3. Phase IIb : 3^{eme} cas : $l_{tg2} > \bar{\lambda}_3/2$

Dans ce cas, après la stabilisation des fissures, les longueurs d'introduction l_{g1} et l_{g2} correspondant respectivement aux glissements g_1 et g_2 sont entièrement développées, mais la longueur l_3 diminue et prend la valeur l_{a3} .

Les variations du glissement et de la contrainte d'adhérence avant et après fissuration sont présentées figure II.22.

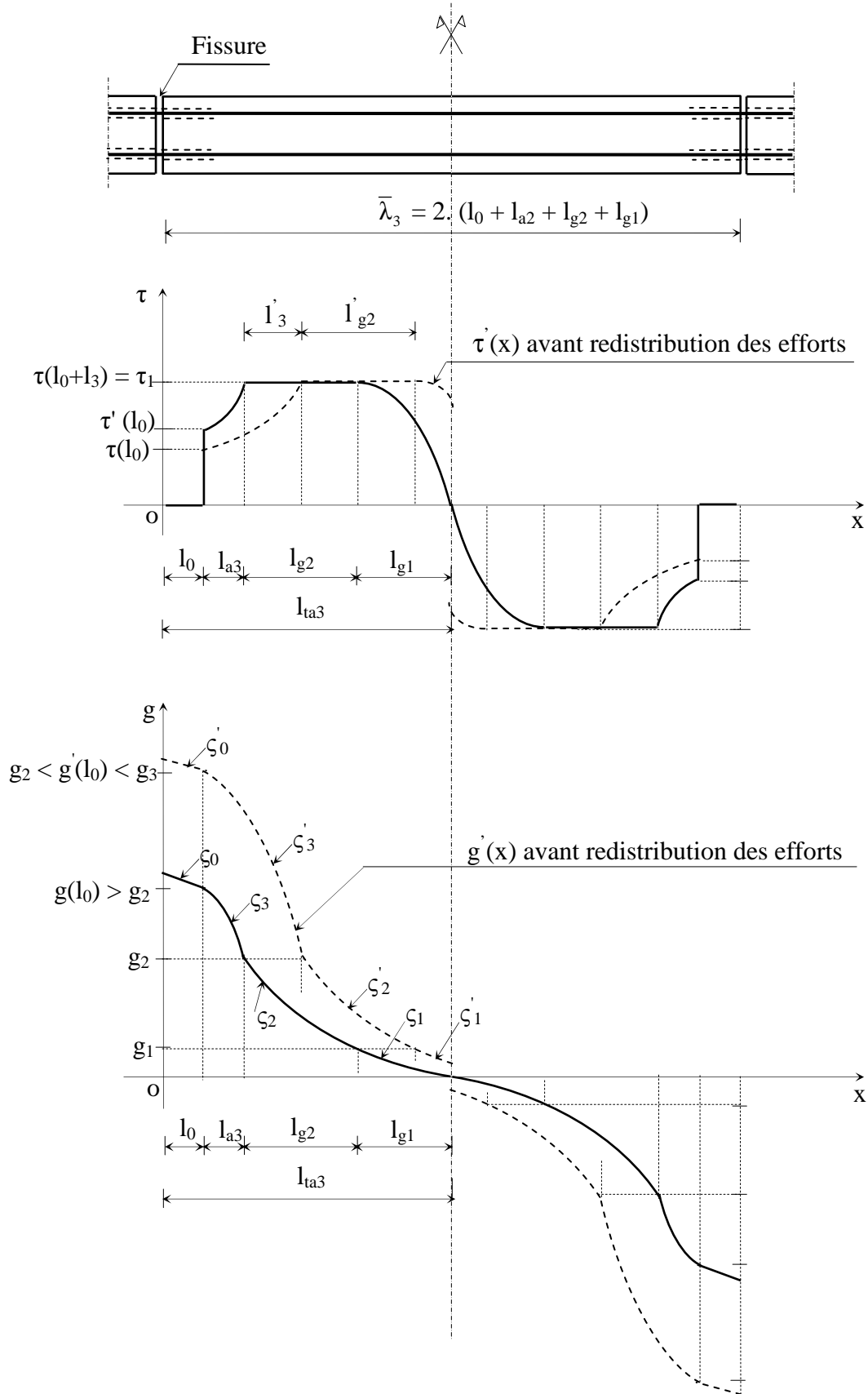


Fig. II.22. Variations de τ et de g le long de $\bar{\lambda}_3$ avec $g_2 < g(l_0) < g_3$

L'espace moyen des fissures est donné par la relation :

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_3 = 2 (l_0 + l_{a3} + l_{g2} + l_{g1}) = 2l_{ta3},$$

$$\text{aussi } l_{ta3} = \frac{1,7}{2} l_{t3r} \text{ et avec } l_0 = \delta \frac{\bar{\lambda}_3}{2} \text{ on a :}$$

$$l_{a3} = \frac{\bar{\lambda}_3}{2} (1 - \delta) - l_{g2} - l_{g1} \quad (\text{II.110})$$

a) Domaine $(l_{ta3} - l_{g1}) \leq x \leq l_{ta3}$

Pour ce domaine, en utilisant les résultats établis aux sous-sections II.7.1.1 et II.9.1, on peut déduire les allongements (variations et moyennes) relatifs des matériaux. Ici :

$$\frac{dg}{dx}_{x=0} = -\varepsilon_{sfa3},$$

ε_{sfa3} représente l'allongement relatif fictif de l'acier correspondant à la longueur d'introduction l_{ta3} .

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sfa3} - \beta_2 \bar{\rho} l_{g2} - \left[1 + \left(1 - \frac{X}{l_{g1}} \right)^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right] \bar{\rho} \cdot \varepsilon_{sf1},$$

$$\varepsilon_{sm1} = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sfa3} - \beta_2 \bar{\rho} l_{g2} - \frac{1+\alpha}{2} \bar{\rho} \varepsilon_{sf1}, \quad (\text{II.111})$$

$$\varepsilon_c(X) = (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sf} + \beta_2 (1 - \bar{\rho}) l_{g2} + (1 - \bar{\rho}) \left[1 - \left(1 - \frac{X}{l_{g1}} \right)^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right] \varepsilon_{sf1},$$

$$\varepsilon_{cm1} = (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sfa3} + \beta_2 (1 - \bar{\rho}) l_{g2} + (1 - \bar{\rho}) \frac{1+\alpha}{2} \varepsilon_{sf1}. \quad (\text{II.112})$$

b) Domaine $(l_0 + l_{a3}) \leq x \leq (l_{ta3} - l_{g1})$

Dans ce domaine, les différentes expressions sont déterminées le long de la longueur l_{g2} . En utilisant les relations établies aux sous-sections II.9.1.2 et II.9.1.3, $g(X)$ et $\tau(X)$ sans changement (avec $X = x - l_0 - l_{a3}$). Dans ce cas, les allongements relatifs des matériaux (béton et acier), en remplaçant l_3 par l_{a3} , s'écrivent :

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sfa3} - \beta_2 \bar{\rho} X,$$

$$\varepsilon_{sm2} = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sfa3} - \beta_2 \bar{\rho} \frac{l_{g2}}{2}, \tag{II.113}$$

$$\varepsilon_c(X) = (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sfa3} + \beta_2 (1 - \bar{\rho}) X,$$

$$\varepsilon_{cm2} = (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sfa3} + \beta_2 (1 - \bar{\rho}) \frac{l_{g2}}{2}. \tag{II.114}$$

c) Domaine $l_0 \leq x \leq (l_0 + l_{a3})$

L'allongement relatif fictif (ε_{sfa3}) au droit de la fissure est déterminé à l'aide des formules (II.89) et (II.92) et la figure II.23.

$$\varepsilon_s(l_{a3}) = \varepsilon_{sf2} + \varepsilon_c(l_{a3}),$$

$$\varepsilon_{sfa3} = \frac{\varepsilon_{sf2}}{2 - \frac{1}{\cos \beta_3 l_{a3}}}. \tag{II.115}$$

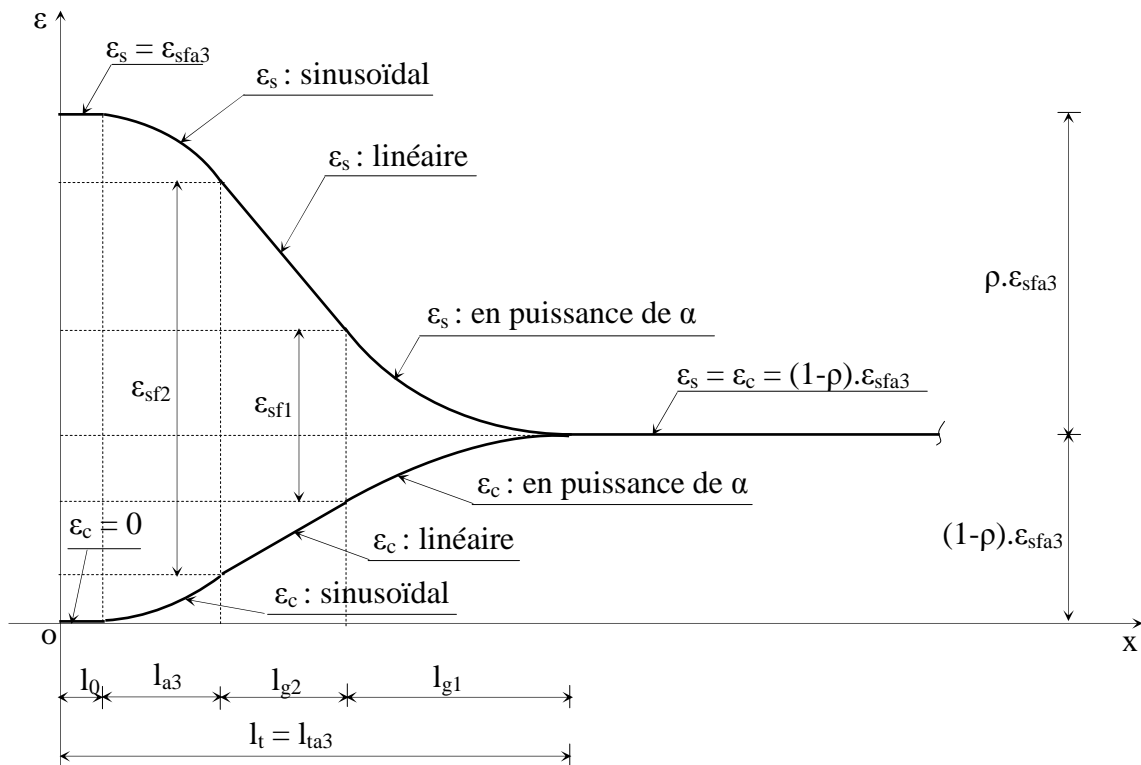


Fig. II.23. Variation de ε_s et ε_c le long de la longueur l_{ta3} pour $\varepsilon_{sf} = \varepsilon_{sfa3}$

En remplaçant l_3 par l_{a3} et ε_{sf} par ε_{sfa3} dans les relations (II.90) et (II.93), on détermine respectivement les allongements relatifs moyens de l'acier et du béton sur la longueur l_{a3} .

$$\varepsilon_{sma3} = \varepsilon_{sf} - \bar{\rho} \left(\frac{\text{tg}\beta_3 l_{a3}}{\beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sfa3}, \quad (\text{II.116})$$

$$\varepsilon_{cma3} = (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{\text{tg}\beta_3 l_{a3}}{\beta_3 l_{a3}} - 1 \right) \varepsilon_{sfa3}. \quad (\text{II.117})$$

d) Domaine $0 \leq x \leq l_0$

La longueur avant fissuration l_{3r} diminue et prend la valeur l_{a3} après fissuration, en utilisant la relation (II.94), le glissement résiduel s'écrit :

$$g_a = g_{a33} = \left(g_2 + \frac{\varepsilon_{sr}}{\beta_3} \text{tg}\beta_3 l_{3r} \right) - \left(g_2 + \frac{\varepsilon_{sfa3}}{\beta_3} \text{tg}\beta_3 l_{a3} \right),$$

$$g_{a33} = \frac{1}{\beta_3} (\varepsilon_{sr} \text{tg}\beta_3 l_{3r} - \varepsilon_{sfa3} \text{tg}\beta_3 l_{a3}) \quad (\text{II.118})$$

où g_{a33} désigne explicitement le glissement résiduel provenant de la diminution de la longueur d'introduction totale de valeur l_{t3} avant fissuration à la valeur l_{ta3} après fissuration.

Le glissement résiduel sur la longueur perturbée étant négligé, le glissement au droit de la fissure est donné par la relation (II.98).

e) Valeurs moyennes sur la longueur d'introduction totale l_{ta3}

Entre deux fissures consécutives distantes de $\bar{\lambda}_3 (= 2.l_{ta3})$, les allongement relatifs moyens de l'acier et du béton sont donnés par :

$$\varepsilon_{sm\bar{\lambda}_3} = \frac{2}{\bar{\lambda}_3} (\varepsilon_{sf} l_0 + \varepsilon_{sma3} l_{a3} + \varepsilon_{sm2} l_{g2} + \varepsilon_{sm1} l_{g1}), \quad (\text{II.119})$$

$$\varepsilon_{cm\bar{\lambda}_3} = \frac{2}{\bar{\lambda}_3} (\varepsilon_{cma3} l_{a3} + \varepsilon_{cm2} l_{g2} + \varepsilon_{cm1} l_{g1}), \quad (\text{II.120})$$

où les valeurs moyennes sur les différentes longueurs sont données plus haut.

L'allure des courbes de variation des allongements relatifs de l'acier et du béton, le long de la longueur $\bar{\lambda}_3$ pour $g(l_0)$ compris entre g_2 et g_3 , est présentée à la figure II.24.

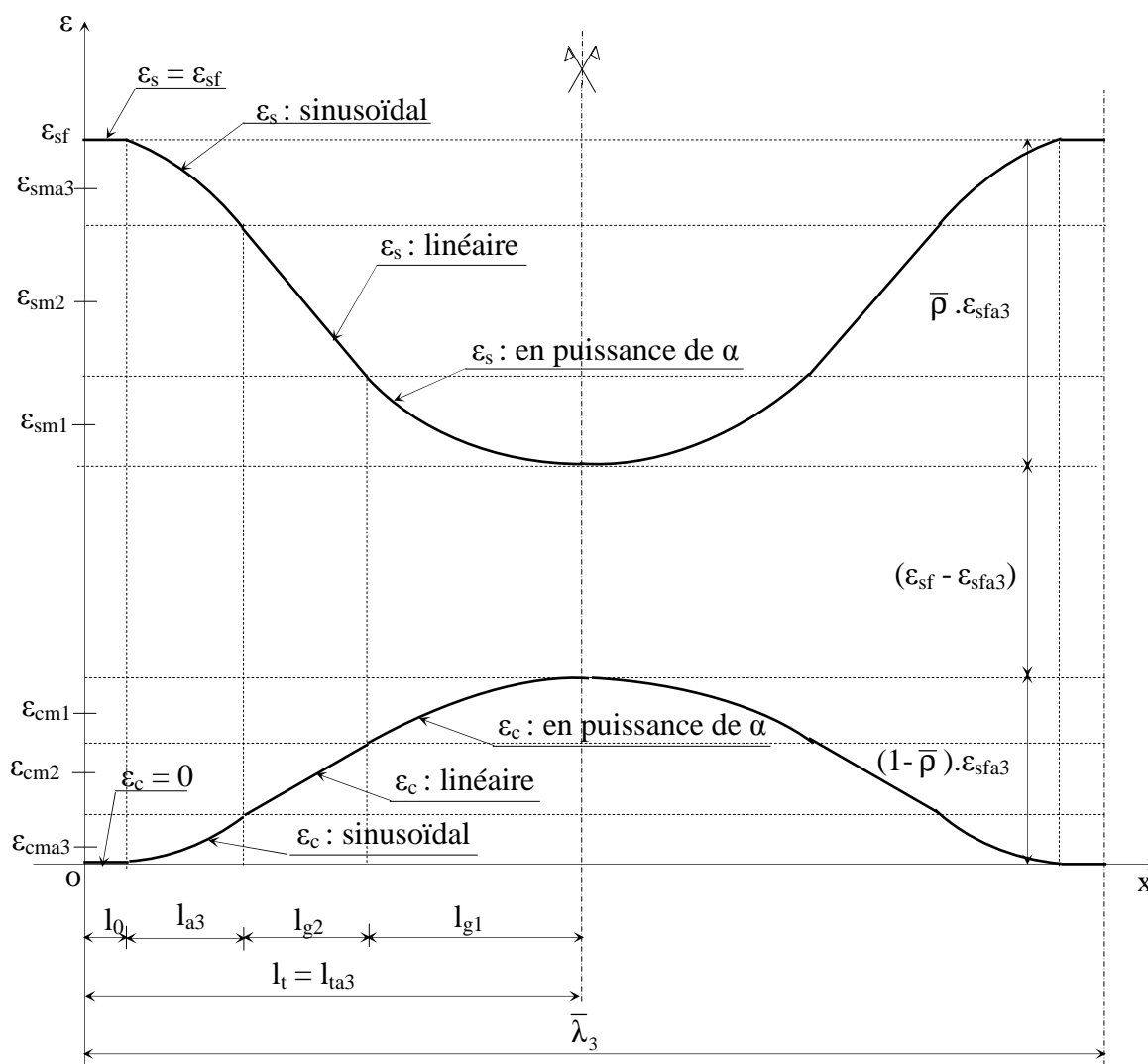


Fig. II.24. Variation de ϵ_s et ϵ_c entre deux fissures consécutives distantes de $\bar{\lambda}_3 > 2l_{tg2}$

II.10. Cas particulier de $g(l_0) = g_3$ avant fissuration

Il suffit de reprendre les équations établies précédemment à la section II.9.1 en remplaçant $g(l_0)$, l_3 , l_t et ϵ_{sf} respectivement par g_3 , l_{g3} , l_{tg3} et ϵ_{sf3} .

l_{g3} : longueur d'introduction effective quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est égal à g_3 ,

$l_{tg3} := (l_0 + l_{g3} + l_{g2} + l_{g1})$, longueur d'introduction totale quand le glissement à la distance l_0 de la fissure est égal à g_3 .

ε_{sf3} : allongement relatif de l'acier correspondant au glissement g_3 à la distance l_0 de la fissure.

Nous obtenons ainsi quelques résultats particuliers :

L'allongement relatif de l'acier est égal à ε_{sf3} à la distance $(l_0 + l_{g3})$. En utilisant les relations (II.89), (II.92) et la figure II.19, on peut écrire :

$$\varepsilon_s(l_{g3}) = \varepsilon_{sf2} + \varepsilon_c(l_{g3}) ,$$

$$\varepsilon_{sf3} - \bar{\rho} \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{g3}} - 1 \right) \varepsilon_{sf3} = \varepsilon_{sf2} + \varepsilon_{sf3} (1 - \bar{\rho}) \left(\frac{1}{\cos \beta_3 l_{g3}} - 1 \right) ,$$

$$\varepsilon_{sf3} = \frac{\varepsilon_{sf2}}{2 - \frac{1}{\cos \beta_3 l_{g3}}} \quad (\text{II.121})$$

Dans l'intervalle $[0 ; l_0]$, le glissement $g(x)$ est donné par l'expression (II.22). Avec la relation (II.91) on a :

$$s(X) = \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \operatorname{tg} \beta_3 l_{g3} \cdot \cos \beta_3 X - \frac{\varepsilon_{sf3}}{\beta_3} \cdot \sin \beta_3 X$$

$$g(l_0) - g_2 = g_3 - g_2 = S(X)_{X=0} = \frac{\varepsilon_{sf3}}{\beta_3} \operatorname{tg} \beta_3 l_{g3} ,$$

$$g_3 = g_2 + \frac{\varepsilon_{sf3}}{\beta_3} \operatorname{tg} \beta_3 l_{g3} , \quad (\text{II.122})$$

on obtient ainsi le glissement au droit de la fissure (cumulé sur la longueur totale l_{g3}) :

$$g(x)_{x=0} = g_{lg3} = g_3 + \varepsilon_{sf3} l_0 \quad (\text{II.123})$$

II.11. Conclusions

La loi de comportement idéalisée adhérence – glissement (τ - g représentée à la figure II.2) donnée par le comité européen de béton [CEB88] est à la base de la détermination des allongements relatifs (variation et moyenne) de l'acier et du béton, ainsi que le glissement entre ces deux matériaux en fonction du chargement. Ainsi, le passage aux contraintes développées dans le « tirant » peut facilement se déduire avec la loi de Hooke.

Le niveau de chargement dans ce chapitre a été limité au glissement ne dépassant pas la valeur g_3 de la loi τ - g . En effet, on suppose à ce stade que la gaine de béton entourant l'armature commence à se détériorer et qu'il ne peut y avoir de fissuration systématique. Toutefois, dans le cas de l'arrachement d'une barre ancrée dans le béton présentée en annexe A, l'étude a été menée jusqu'à l'adhérence résiduelle (glissement supérieur à g_3).

Après l'apparition de la première fissure, des relations sont ainsi établies pour un « tirant » en béton armé en considérant deux cas :

- après fissuration, et pendant la propagation des fissures (phase IIa) quand les espacements des fissures restent supérieurs à la longueur d'introduction totale l_i , les valeurs moyennes des allongements relatifs de l'acier et du béton sont calculés et sont notés respectivement ε_{smti} et ε_{cmti} .
- À la stabilisation des fissures (phase IIb) et pendant la propagation des fissures quand la longueur d'introduction totale ne peut pas se développer, les valeurs moyennes sont calculées et notés ε_{smtai} (ou $\varepsilon_{sm\bar{\lambda}_i}$) pour l'acier et ε_{cmtai} (ou $\varepsilon_{cm\bar{\lambda}_i}$) pour le béton.

Ainsi, selon le niveau de chargement, on peut, avec ces valeurs moyennes des allongements relatifs, tracer les diagrammes fictifs des deux matériaux (acier et béton).

Avec les différentes expressions du glissement, les ouvertures de fissures peuvent être estimées, à chaque niveau de chargement, en calculant le double de ce glissement au droit des fissures.

Les méthodes de détermination de ces diagrammes fictifs et des ouvertures de fissures sont développées au chapitre III.

CHAPITRE III : PROPOSITION DE METHODES DE CALCUL

III.1. Introduction

On présente dans ce chapitre, en utilisant les résultats théoriques établis au chapitre II, des méthodes de détermination du diagramme fictif de l'acier (la même démarche peut être utilisée pour tracer le diagramme fictif du béton) et d'estimation des ouvertures de fissure dans les « tirants » en béton armé.

La loi adhérence- glissement donnée par le Comité Européen de Béton (CEB-FIB, 1988) est utilisée (figure II.2). La valeur du pic d'adhérence τ_1 est prise égale :

$$\tau_1 = \tau_2 = 2,5\sqrt{f_{ck}} \text{ (béton confiné) ou } \tau_1 = \tau_2 = 2\sqrt{f_{ck}} \text{ (béton non confiné)}$$

où f_{ck} représente la contrainte limite de compression du béton en MPa et τ_1 (et τ_2) la contrainte maximale d'adhérence en MPa.

La valeur de la contrainte résiduelle τ_3 est prise égale à $0,20 \tau_1$.

Dans cette étude, deux cas sont envisagés :

- cas où les valeurs des glissements g_1 , g_2 et g_3 sont connues, alors les calculs sont effectués en utilisant les relations établies au chapitre II. On peut alors déduire directement l'espacement moyen des fissures $\bar{\lambda}$ en considérant que la longueur d'introduction à l'apparition de la première fissure l_{tr} est égale à $\bar{\lambda}/1,7$.
- cas où les valeurs des glissements correspondant au pic d'adhérence et à l'adhérence résiduelle ne sont pas données, alors, on est amené à calculer la relation appropriée d'espacement moyen des fissures $\bar{\lambda}$ afin d'estimer les valeurs de g_1 , g_2 et g_3 .

Pour les deux cas, selon les caractéristiques des matériaux, on cherche le cas correspondant au domaine d'étude pour pouvoir utiliser les relations du chapitre II (§ II.5, § II.7 ou § II.9). Avec les valeurs moyennes des allongements relatifs, un modèle de diagramme fictif de l'acier est proposé.

Les valeurs des glissements au droit des fissures établies au chapitre II, sont utilisées pour calculer les largeurs des ouvertures de fissures.

III.2. Méthode de détermination du diagramme fictif de l'acier : $\sigma_s = f(\epsilon_m)$

III.2.1. Méthode générale

- Un organigramme est présenté à la section III.4 pour les phases IIa et IIb.
- Pour la première phase, le comportement du tirant est considéré comme homogène (voir sous-section II.3.2). Toutefois il y a lieu de noter que si la longueur du tirant est relativement faible, la courbe OA de la figure II.3 ne sera pas linéaire. Il y a lieu de tenir compte dans ce cas des deux longueurs d'introduction aux extrémités du tirant. Sinon, le nombre de fissures principales est déterminé en considérant la longueur totale du tirant diminuée des deux espacements d'about [ROB69], [WIL86].
- Pour la phase IIa : la méthode retenue consiste à considérer que l'apparition des fissures s'effectue l'une après l'autre à mesure que l'effort de traction augmente. La résistance effective en traction du béton varie le long du tirant. Cette variation peut être exprimée par un certain pourcentage (par exemple 20%) de la contrainte effective du béton en traction selon certains auteurs [TAS81]. Si on note γ le nombre total de fissures, on aura donc γ valeurs différentes de la contrainte de traction du béton σ_c pendant la phase IIa variant de σ_{cr} à $1,20\sigma_{cr}$. Pour la première fissure on prendra $\sigma_{c1} = \sigma_{cr}$ et, pour la dernière fissure, $\sigma_{c\gamma} = 1,20\sigma_{cr}$. À l'apparition d'une nouvelle fissure, on détermine la contrainte dans l'acier, la nouvelle longueur d'introduction et l'allongement du tirant.
- Pour la phase IIb : à ce stade, le nombre de fissures est stable. Par contre, si l'effort de traction augmente, alors la longueur de la zone perturbée l_0 augmente tandis que $\Delta\epsilon_m$ diminue (voir figure II.3). On considère, au vu des résultats expérimentaux réalisés par Espion [ESP85], que $\Delta\epsilon_m$ varie linéairement à partir de la dernière fissure. Au-delà d'un certain niveau de contrainte (on a pris ici $2\sigma_{sy}$ avec ϵ_{sd} correspondant), on considère que $\Delta\epsilon_m$ est constant. On rappelle que l'étude a été menée pour σ_s inférieur à la limite élastique de l'acier.

III.2.2. Diagramme fictif de l'acier en phase IIa

Pendant cette phase on distingue deux parties :

- Première partie de la phase IIa : La moitié du nombre total de fissures n'est pas atteint, ce qui permet le développement de la longueur d'introduction totale l_{ij} (j prenant les valeurs 1, 2 ou 3 correspondant aux zones de la loi τ - g). Relativement à la fissure i et sachant que les largeurs des ouvertures sont négligeables par rapport aux longueurs l_{ij} , on désigne par :

L_{0i} = la somme des longueurs (l_{0i}) des zones perturbées du tirant ;

L_{tji} = la somme des longueurs d'introduction totale (l_{tji}) du tirant ;

avec L_i la longueur du tirant à la fissure i ,

$L_{hi} = (L_i - L_{tji}) \approx (L - L_{tji})$, la somme des longueurs des zones homogénéisées ($\varepsilon_s(x) = \varepsilon_c(x)$).

À la fissure i , l'allongement du tirant s'écrit :

$$\Delta L_i = \Delta L_{tji} + \Delta L_{hi} \text{ avec: } \Delta L_{tji} = \varepsilon_{smtji} L_{tji} \text{ et } \Delta L_{hi} = \varepsilon_{ci} L_{hi}.$$

La valeur de ε_{smtji} , désigne la valeur moyenne de l'allongement relatif sur la longueur d'introduction totale l_{tji} correspondant à la fissure i . La valeur ε_{ci} ($= \sigma_{ci} E_c$) représente l'allongement relatif du béton homogénéisé à la fissure i . La contrainte de traction effective du béton croît à mesure que les fissures apparaissent, la longueur L_{tji} augmente et la longueur homogénéisée L_{hi} diminue. On détermine à chaque étape la contrainte $\sigma_s = N_t/A_s$ et l'allongement relatif moyen du tirant $\Delta L_i/L$.

- Deuxième partie de la phase IIa : Dans cette étape, la moitié du nombre total de fissures est dépassée et, dans certaines parties du tirant, la longueur d'introduction effective l_{tji} ne peut pas se développer : on se trouve devant les deux cas existants simultanément, l'un présenté ici et l'autre à la sous-section III.2.3 ci-après.

III.2.3. Diagramme fictif de l'acier en phase IIb

En phase IIb, le nombre de fissures est stable et, comme le montre la figure II.9, la somme des longueurs homogénéisées L_h est nulle et $L = L_{taj}$ (L_{taj} représente la somme des longueurs d'introduction totales à la stabilisation des fissures). Dans cette phase, lorsqu'on augmente l'effort N_t , la zone perturbée progresse (L_0 augmente), ce qui signifie que $\Delta \varepsilon_m$ décroît. L'allongement relatif moyen du tirant peut donc être exprimé par l'allongement relatif moyen entre deux fissures consécutives.

Les relations établies dans cette phase IIb sont aussi utilisées dans certaines zones de la deuxième partie de la phase IIa où la distance entre deux fissures successives est égale à $\bar{\lambda}$. Lorsque $\sigma_s > 2\sigma_{sy}$, on estime que $\Delta \varepsilon_m$ reste constant. Cette phase IIb est donc scindée en deux parties (voir organigramme à la section III.4) :

- une première partie quand $\Delta \varepsilon_m$ varie linéairement et ;
- une deuxième partie quand $\Delta \varepsilon_m$ reste constant.

III.2.4. Les valeurs caractéristiques (g_1 , g_2 et g_3) de la loi $\tau(g)$ sont données

III.2.4.1. Détermination des grandeurs ε_{sf1} , ε_{sf2} et ε_{sf3}

a) Valeurs de ε_{sf1} et l_{g1}

Avec les résultats obtenus aux sous-sections II.6 (relations II.52 et II.53) et sachant que $\beta_2 = \frac{p \tau_1}{A_s E_s \bar{\rho}}$, l'allongement relatif de l'acier correspondant au glissement g_1 peut s'écrire :

$$\varepsilon_{sf1} = \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} \beta_2 g_1, \quad (\text{III.1})$$

$$\varepsilon_{sf1} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \beta_2 l_{g1}. \quad (\text{III.2})$$

Avec ces deux relations on peut déduire la valeur de la longueur l_{g1} correspondant au glissement g_1 à la distance l_0 de la fissure.

$$l_{g1} = \frac{1}{1-\alpha} \sqrt{\frac{2(1+\alpha)}{\beta_2}} g_1 \quad (\text{III.3})$$

b) Valeurs de ε_{sf2} et l_{g2}

Quand le glissement à la distance l_0 la fissure vaut g_2 , alors l'allongement relatif (ε_{sf2}) est déterminé en utilisant les relations de la sous section II.8 on a :

$$\varepsilon_{sf2} = \varepsilon_{sf1} + \beta_2 l_{g2}, \quad (\text{III.4})$$

avec l'expression (II.80) du glissement à la distance l_0 , on obtient l'équation du second degré en l_{g2} :

$$g_2 = g_1 + \varepsilon_{sf2} l_{g2} - \beta_2 \frac{l_{g2}^2}{2} = g_1 + (\varepsilon_{sf1} + \beta_2 l_{g2}) l_{g2} - \beta_2 \frac{l_{g2}^2}{2},$$

$$\beta_2 \frac{l_{g2}^2}{2} + \varepsilon_{sf1} l_{g2} - (g_2 - g_1) = 0,$$

Qui admet pour solution :

$$l_{g2} = \frac{-\varepsilon_{sf1} + \sqrt{\varepsilon_{sf1}^2 + 2\beta_2(g_2 - g_1)}}{\beta_2} \quad (\text{III.5})$$

c) Valeurs de ε_{sf3} et l_{g3}

L'allongement relatif ε_{sf3} correspondant au glissement g_3 à la distance l_0 de la fissure est donné par la relation (II.121) où il faut déterminer la longueur l_{g3} :

$$\varepsilon_{sf3} = \frac{\varepsilon_{sf2}}{2 - \frac{1}{\cos\beta_3 l_{g3}}}$$

Sachant que $g_3 = g_2 + \frac{\varepsilon_{sf3}}{\beta_3} \text{tg}\beta_3 l_{g3}$, en remplaçant la valeur de ε_{sf3} ci-dessus, on obtient l'équation en l_{g3} :

$$\varepsilon_{sf2} \sin\beta_3 l_{g3} - 2\beta_3(g_3 - g_2) \cos\beta_3 l_{g3} + \beta_3(g_3 - g_2) = 0, \quad (\text{III.6})$$

en posant $2a = \beta_3 l_{g3}$, $b = \text{tg}a$ et sachant que :

$$\cos 2a = \frac{1 - \text{tg}^2 a}{1 + \text{tg}^2 a}, \quad \sin 2a = \frac{2 \text{tg} a}{1 + \text{tg}^2 a},$$

la relation du second degré en b s'écrit :

$$3\beta_3(g_3 - g_2)b^2 + 2\varepsilon_{sf2}b - \beta_3(g_3 - g_2) = 0. \quad (\text{III.7})$$

On peut écrire :

$$3b^2 + B.b - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad B = \frac{2\varepsilon_{sf2}}{\beta_3(g_3 - g_2)}$$

et l'équation admet pour solution :

$$b = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 12}}{6}, \quad (\text{III.8})$$

alors,

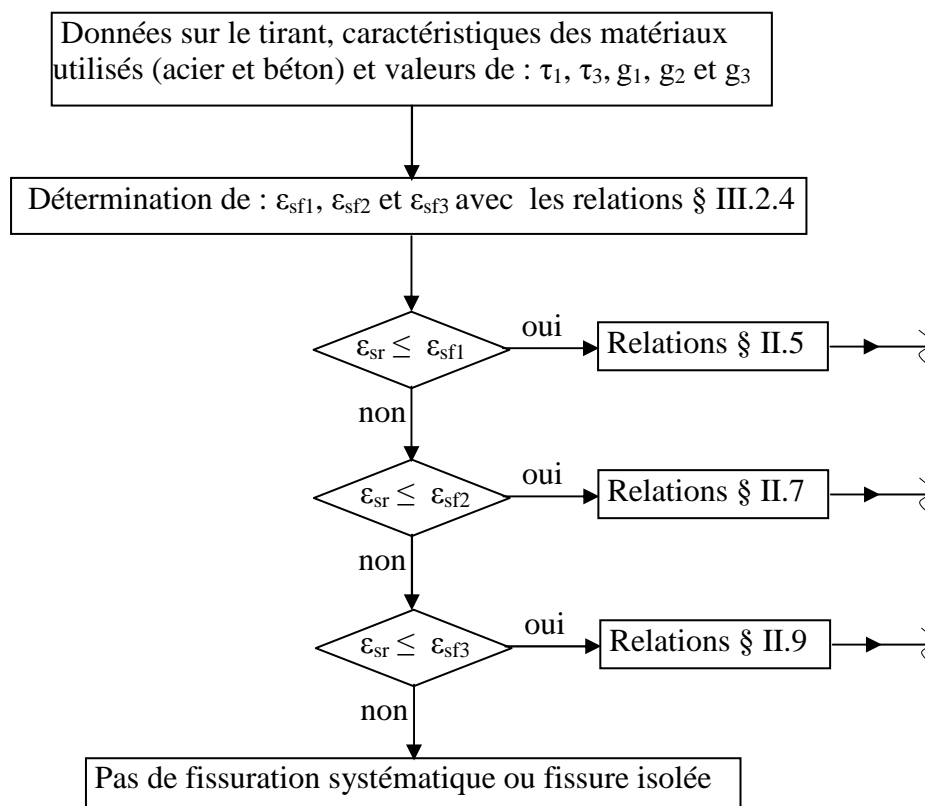
$$l_{g3} = \frac{2 \text{arctg} b}{\beta_3}, \quad (\text{III.9})$$

et on détermine ainsi la valeur de ε_{sf3} .

III.2.4.2. Détermination du domaine d'étude

Dans ce cas, il suffit de déterminer à la distance l_0 de la fissure les différents allongements relatifs de l'acier ε_{sf1} , ε_{sf2} et ε_{sf3} correspondant respectivement aux glissements g_1 (sous section II.6), g_2 (sous section II.8) et g_3 (sous section II.10).

Connaissant la contrainte de traction effective du béton σ_{cr} , on déduit ε_{cr} et ε_{sr} . Ainsi cette dernière grandeur est comparée aux différentes valeurs ε_{sf1} , ε_{sf2} et ε_{sf3} pour pouvoir utiliser les relations correspondantes (organigramme III.1).



Org. III.1. Utilisation des relations des sections II.5 à II. 10 selon la valeur de ε_{sr}

III.2.5. Les valeurs caractéristiques (g_1 , g_2 et g_3) de la loi $\tau(g)$ ne sont pas données

Si les valeurs caractéristiques de cette loi ne sont pas connues, une autre approche est utilisée ici afin de mieux estimer les valeurs moyennes. Pour pouvoir utiliser les équations établies aux paragraphes précédents, il faut déterminer différents paramètres, notamment les valeurs g_1 , g_2 et g_3 .

En exprimant g_2 et g_3 en fonction de g_1 :

$$g_2 \approx m_2 g_1 \quad \text{et} \quad g_3 \approx m_3 g_1,$$

on peut déterminer les autres paramètres. D'après les résultats expérimentaux donnés au chapitre I, on peut prendre approximativement : $m_2 = 1,5$ et $m_3 = 3$.

Partant de la relation appropriée donnant les espacements des fissures (voir chapitre I) et de la contrainte effective du béton en traction (ε_{cr}), on peut estimer la valeur du glissement g_1 de la loi adhérence – glissement adoptée par le comité européen de béton [CEB88].

On utilise ici, par exemple, la formule (III.10) simplifiée de l'espacement des fissures λ , donnée par (Eurocode 2, 1992).

$$\bar{\lambda} = 50 + k_1 k_2 \frac{A_s}{p \rho_{ef}}, \text{ avec } \rho_{ef} = \frac{A_s}{A_{cef}}, \bar{\lambda} \text{ en mm,} \quad (\text{III.10})$$

$k_1 = 0,8$ pour les barres à haute adhérence ; $1,6$ pour les aciers lisses,

$k_2 = 0,5$ pour la flexion simple ; 1 pour la traction simple,

p = périmètre utile des aciers (en mm), A_s = section d'acier tendue (en mm^2),

A_{cef} = section de béton effectivement tendue (en mm^2).

III.2.5.1. Cas où le glissement $g(l_0)$ est tel que : $g(l_0) \leq g_1$

Nous étudions ici le cas où l'allongement relatif de l'acier au droit de la fissure ε_{sr} , à l'apparition de la première fissure, est inférieur à ε_{sf1} .

L'espacement $\bar{\lambda}$ des fissures peut être exprimé en fonction de l_{1r} à l'apparition de la première fissure correspondant à ε_{sr} ,

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 = 1,7 (l_{or} + l_{1r}) = 1,7 l_{1r} \quad \text{et avec } l_{or} = \delta l_{1r} = \frac{\delta}{1,7} \bar{\lambda}, \text{ on a :}$$

$$l_{1r} = \frac{(1-\delta)}{1,7} \bar{\lambda}_1. \quad (\text{III.11})$$

Les relations (II.30) et (II.32) permettent de déterminer la valeur de g_1 .

$$g_1 = \frac{(1-\alpha)}{2} \left[\beta_2 \frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)} \frac{l_{1r}^{(1+\alpha)}}{\varepsilon_{sr}^{(1-\alpha)}} \right]^{1/\alpha} \quad (\text{III.12})$$

En remplaçant la valeur de g_1 dans la relation (III.1), on vérifie que $\varepsilon_{sr} \leq \varepsilon_{sf1}$, c'est-à-dire $g(l_0) \leq g_1$. On peut alors utiliser les relations établies à la sous section II.5 pour déterminer les contraintes moyennes des matériaux et les ouvertures de fissures à chaque niveau de chargement.

III.2.5.2. Cas où le glissement $g(l_0)$ est tel que : $g_1 < g(l_0) \leq g_2$

À l'apparition de la première fissure, avec la relation (II.59), on a :

$$\varepsilon_{sf1} = \varepsilon_{sr} - \beta_2 l_{2r}, \quad (III.13)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_2 = 1,7 (l_{0r} + l_{2r} + l_{g1}) = 1,7 l_{1r} = 1,7 l_{2r},$$

et la longueur l_{2r} , s'écrit :

$$l_{2r} = \frac{\bar{\lambda}}{1,7} (1 - \delta) - l_{g1} = \frac{\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sf1}}{\beta_2}. \quad (III.14)$$

Sachant que (relation III.2):

$$l_{g1} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \frac{\varepsilon_{sf1}}{\beta_2}, \quad (III.15)$$

et en remplaçant l_{g1} dans (III.14), on obtient la valeur de ε_{sf1} :

$$\varepsilon_{sf1} = \frac{1 - \alpha}{2\alpha} \left[\frac{\beta_2 \bar{\lambda}}{2} (1 - \delta) - \varepsilon_{sr} \right]. \quad (III.16)$$

On peut déterminer (relation III.1) ainsi la valeur g_1 correspondant au pic d'adhérence :

$$g_1 = \frac{1 + \alpha}{2} \frac{\varepsilon_{sf1}^2}{\beta_2} \quad (III.17)$$

Il faut toutefois vérifier que l'allongement relatif de l'acier ε_{sf2} correspondant au glissement g_2 à la distance l_0 de la fissure reste inférieur à ε_{sr} . Pour cela, on utilise les relations de la sous section II.8. Avec la relation (III.5), et sachant que $g_2 = m_2 g_1$ on peut écrire :

$$l_{g2} = \frac{-\varepsilon_{sf1} + \sqrt{\varepsilon_{sf1}^2 + 2\beta_2(m_2g_1 - g_1)}}{\beta_2},$$

en exprimant g_1 (relation III.17) en fonction de ε_{sf1} , il vient :

$$l_{g2} = \frac{\varepsilon_{sf1}}{\beta_2} \left[\sqrt{m_2 + \alpha(m_2 - 1)} - 1 \right], \quad (\text{III.18})$$

et pour $m_2 = 1,5$: $l_{g2} = \left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} - 1 \right) \frac{\varepsilon_{sf1}}{\beta_2}$

En remplaçant cette valeur dans la formule (III.4), on obtient :

$$\varepsilon_{sf2} = \varepsilon_{sf1} + \beta_2 l_{g2} = \varepsilon_{sf1} + \beta_2 \frac{\varepsilon_{sf1}}{\beta_2} \left[\sqrt{m_2 + \alpha(m_2 - 1)} - 1 \right],$$

après simplification, on peut écrire :

$$\varepsilon_{sf2} = \varepsilon_{sf1} \sqrt{m_2 + \alpha(m_2 - 1)}, \quad (\text{III.19})$$

et pour $m_2 = 1,5$: $\varepsilon_{sf2} = \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \varepsilon_{sf1}$.

Si cette valeur de ε_{sf2} est inférieure à ε_{sr} , alors on peut utiliser les relations établies à la sous section II.7 sinon on passe à l'étape ci-après.

III.2.5.3. Cas où le glissement $g(l_0)$ est tel que : $g_2 < g(l_0) \leq g_3$

À ce niveau, l'espacement moyen entre deux fissures consécutives peut s'écrire :

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_3 = 1,7 (l_{0r} + l_{3r} + l_{g2} + l_{g1}) = 1,7l_{tr} = 1,7l_{t3r},$$

avec $l_{0r} = \delta l_{tr}$, la longueur recherchée l_{3r} est égale :

$$l_{3r} = \frac{\bar{\lambda}}{1,7} (1 - \delta) - l_{g2} - l_{g1}, \quad (\text{III.20})$$

où les grandeurs l_{g1} et l_{g2} sont données en fonction de ε_{sf1} (donc de g_1) par successivement les relations (III.15) et (III.18).

Après simplification, on obtient l'équation III.21,

$$l_{3r} + \left(\sqrt{m_2 + \alpha(m_2 - 1)} + \frac{2\alpha}{1 - \alpha} \right) \frac{\varepsilon_{sf1}}{\beta_2} - \frac{\bar{\lambda}}{1,7} (1 - \delta) = 0 , \quad (\text{III.21})$$

où l_{3r} , en utilisant la relation (II.102) et en remplaçant ε_{sf2} (relation III.19) en fonction de ε_{sf1} , on trouve :

$$l_{t3r} = \frac{1}{\beta_3} \arccos \left(\frac{\varepsilon_{sr}}{2\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sf1} \sqrt{m_2 + \alpha(m_2 - 1)}} \right) , \quad (\text{III.22})$$

et pour $m_2 = 1,5$: $l_{t3r} = \frac{1}{\beta_3} \arccos \left(\frac{\varepsilon_{sr}}{2\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sf1} \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}}} \right)$

La résolution de l'équation (III.21) en ε_{sf1} se fait par itération. Ensuite, en utilisant la relation (III.17), on détermine la valeur g_1 (donc les valeurs de g_2 et g_3).

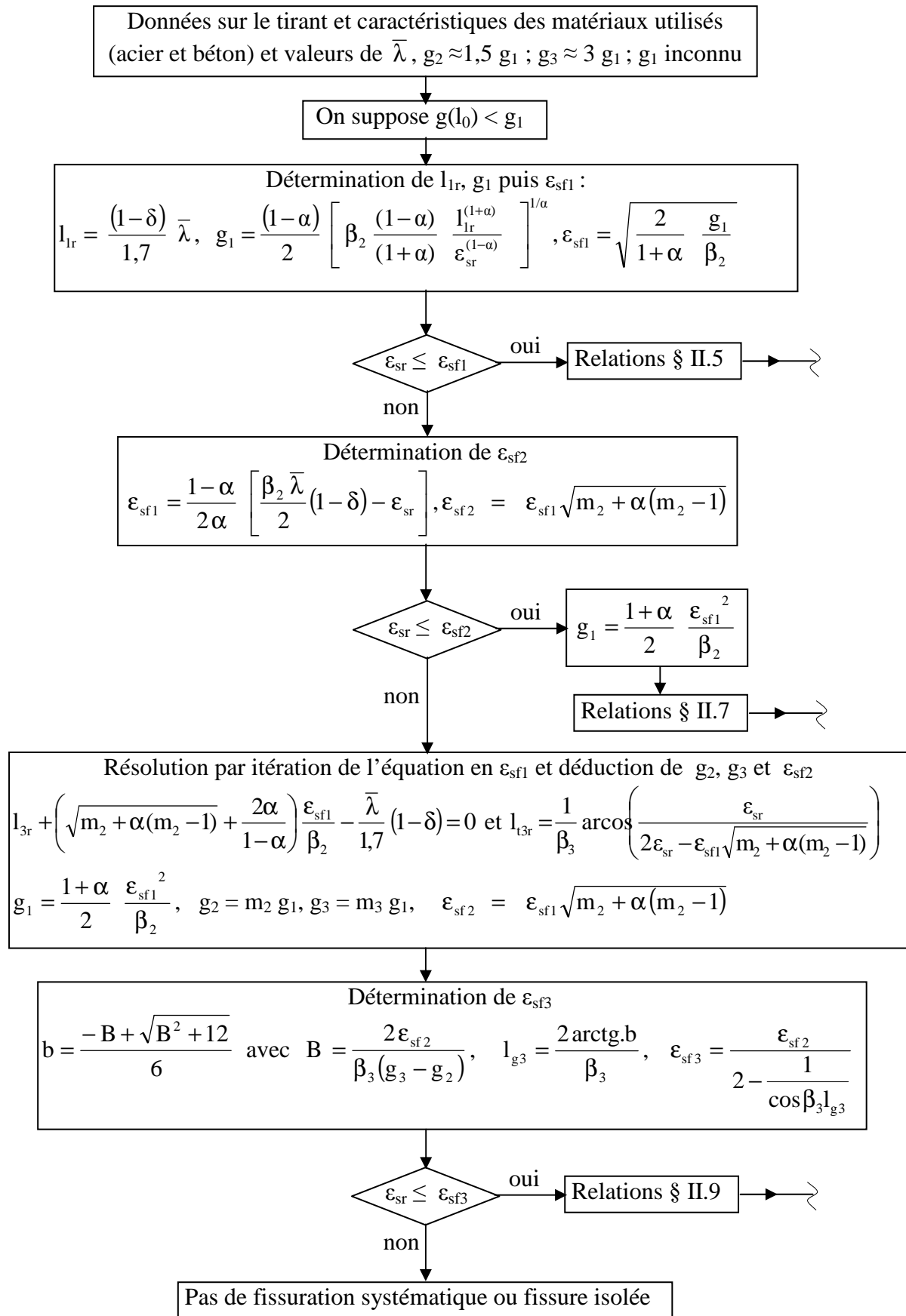
Pour la vérification ($\varepsilon_{sf3} < \varepsilon_{sr}$), il faut déterminer la valeur ε_{sf3} correspondant à g_3 . Connaissant, à ce stade la valeur de ε_{sf2} , avec les relations (III.6) à (III.9) on détermine la valeur de l_{g3} et bien sur la quantité ε_{sf3} (relation II.121).

Si $\varepsilon_{sf3} < \varepsilon_{sr}$, on est dans le cas où le glissement à la distance l_0 de la fissure est supérieur à la valeur g_3 , on peut conclure que la fissuration n'est pas systématique (ou existence d'une fissure isolée), sinon on peut utiliser les relations établies à la sous section II.9.

III.2.5.4. Organigramme de détermination du glissement g_1 et du domaine d'étude

L'organigramme III.2 représente les différentes étapes à effectuer, dans l'ordre, afin de déterminer le domaine d'étude approprié à utiliser parmi ceux exposés ci-dessus.

Au début des calculs, on suppose qu'à l'apparition de la première fissure le glissement à la distance l_0 reste inférieur à la valeur du glissement g_1 correspondant au pic d'adhérence.



Org. III.2. Détermination du domaine d'étude dans le cas où g_1 , g_2 et g_3 ne sont pas donnés

En fonction de l'espacement moyen des fissures et des caractéristiques des matériaux on détermine la valeur du glissement g_1 (relation III.12). On déduit alors la valeur de l'allongement relatif de l'acier au droit de la fissure ε_{sf1} quand $g(l_0) = g_1$. Si dans ce cas, ε_{sr} reste inférieur à ε_{sf1} , on peut utiliser les relations de la sous section II.5, sinon on passe à l'étape suivante.

Dans cette deuxième étape, on suppose que le glissement à la distance l_0 est compris entre g_1 et g_2 . Avec les caractéristiques des matériaux et l'espacement moyen des fissures, on détermine l'allongement relatif de l'acier ε_{sf2} . Cette dernière grandeur est comparée à ε_{sr} , si elle est supérieur on utilise les relations de la sous section II.5, sinon on passe à l'étape suivante.

Dans la troisième étape, ici on suppose $g(l_0)$ compris entre les glissement g_2 et g_3 , la valeur ε_{sf1} est déterminée par itération en utilisant l'équation (III.21) avec l_{3r} donnée par la relation (III.22). Avec l'équation du second degré (III.7), on trouve la valeur l_{g3} (relation III.9) et on déduit ainsi ε_{sf3} . Si l'allongement relatif de l'acier à l'apparition de la première fissure (ε_{sr}) reste inférieur à cette dernière valeur (ε_{sf3}), alors on peut utiliser les expressions établies à la sous section II.9, sinon, on conclut qu'il ne peut y avoir de fissuration systématique.

III.2.6. Méthode de détermination des allongements relatifs moyens

Après avoir défini le domaine d'étude (§.III.2.4 ou §.III.2.5) en fonction des intervalles $[0 ; g_1]$, $[g_1 ; g_2]$ ou $[g_2 ; g_3]$ du glissement à la distance l_0 du droit de la fissure correspondant respectivement aux relations établies aux sous sections II.5, II.7 ou II.9, on peut calculer les allongements relatifs moyens des deux matériaux (acier et béton).

Avant l'apparition de la première fissure, on suppose que l'intensité de l'effort appliquée est directement proportionnelle aux allongements du tirant.

Juste après l'apparition de la première fissure, on va montrer, pour chaque cas, la méthode à suivre pour calculer les allongements relatifs moyens de l'acier et du béton. Ces valeurs moyennes vont servir à déterminer le diagramme fictif de l'acier (et du béton).

En supposant que l'espacement moyen des fissures à l'apparition de la première fissure vaut $\bar{\lambda} = 1,7 l_{tr}$, et à la stabilisation des fissures il prend la valeur $\bar{\lambda} = 2 l_{ta}$, alors on déduit pour tous les cas :

$$l_{ta} = 0,85 l_{tr} \quad (\text{III.23})$$

III.2.6.1. Cas où $g(l_0) < g_1$ avant fissuration (relations du §.II.5)

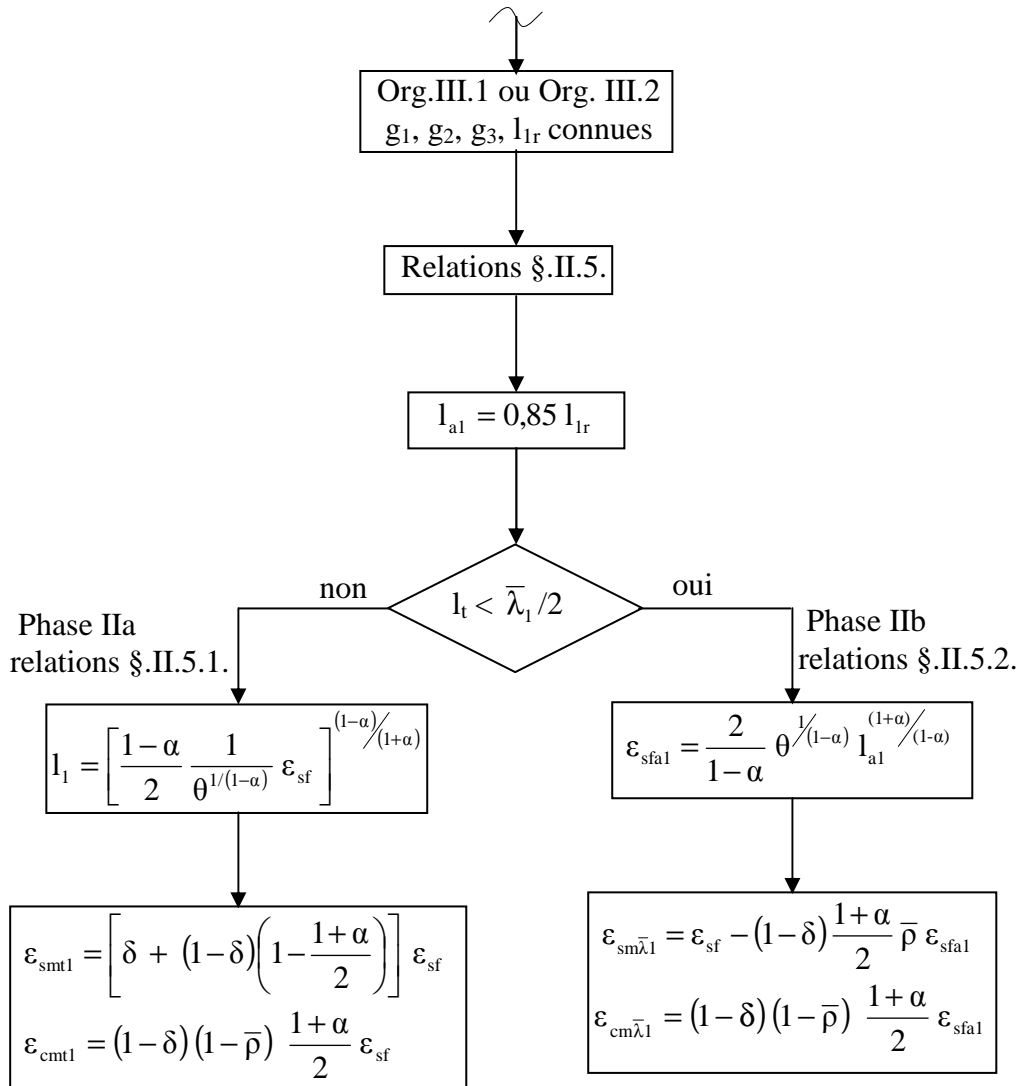
Juste après la première fissure, la longueur totale d'introduction diminue de l_{tr} (ici l_{tr}) à l_{ta} (ici l_{ta1}).

$$l_{tr} = l_{tr} = l_{or} + l_{lr} = \frac{\bar{\lambda}_1}{1,7},$$

$$l_{ta} = l_{ta1} = l_0 + l_{a1} = \frac{\bar{\lambda}_1}{2},$$

sachant que $l_0 = \delta.l_{ta1}$, on déduit :

$$l_{a1} = \frac{(1-\delta)}{2} \bar{\lambda}_1 = 0,85 l_{tr} \tag{III.24}$$



Org.III.3. Calcul des allongements relatifs moyens de l'acier et du béton: Cas : $g(l_0) < g_1$

Cette valeur l_{a1} permet de déterminer les allongements relatifs moyens des deux matériaux après fissuration $\varepsilon_{sm\bar{\lambda}_1}$ et $\varepsilon_{cm\bar{\lambda}_1}$ (voir §.II.5.2). On présente à l'organigramme III.3, la démarche à suivre pour calculer à chaque étape de chargement (phases de formation et de stabilisation des fissures) les allongements relatifs moyens de l'acier et du béton.

III.2.6.2. cas où $g_1 < g(l_0) < g_2$ avant fissuration (relations du §.II.7)

À l'apparition de la première fissure, l'espacement moyen des fissures est égal :

$$l_{tr} = l_{2r} = l_{0r} + l_{2r} + l_{g1} = \frac{\bar{\lambda}_2}{1,7}$$

Après fissuration, avec $l_{tg1} = l_0 + l_{g1} = \frac{l_{g1}}{(1-\delta)}$, cet espacement moyen peut s'écrire :

$$\text{- premier cas : } l_{ta} = l_{ta1} = l_0 + l_{a1} = \frac{\bar{\lambda}_2}{2} \quad \text{si } l_{tg1} > \frac{\bar{\lambda}_2}{2}$$

$$\text{- deuxième cas : } l_{ta} = l_{ta2} = l_0 + l_{a2} + l_{g1} = \frac{\bar{\lambda}_2}{2} \quad \text{si } l_{tg1} < \frac{\bar{\lambda}_2}{2}.$$

a) Premier cas : $l_{tg1} > \frac{\bar{\lambda}_2}{2}$

Dans ce cas, après la stabilisation des fissures, la longueur l_{a1} est déterminée en fonction de $\bar{\lambda}_2$.

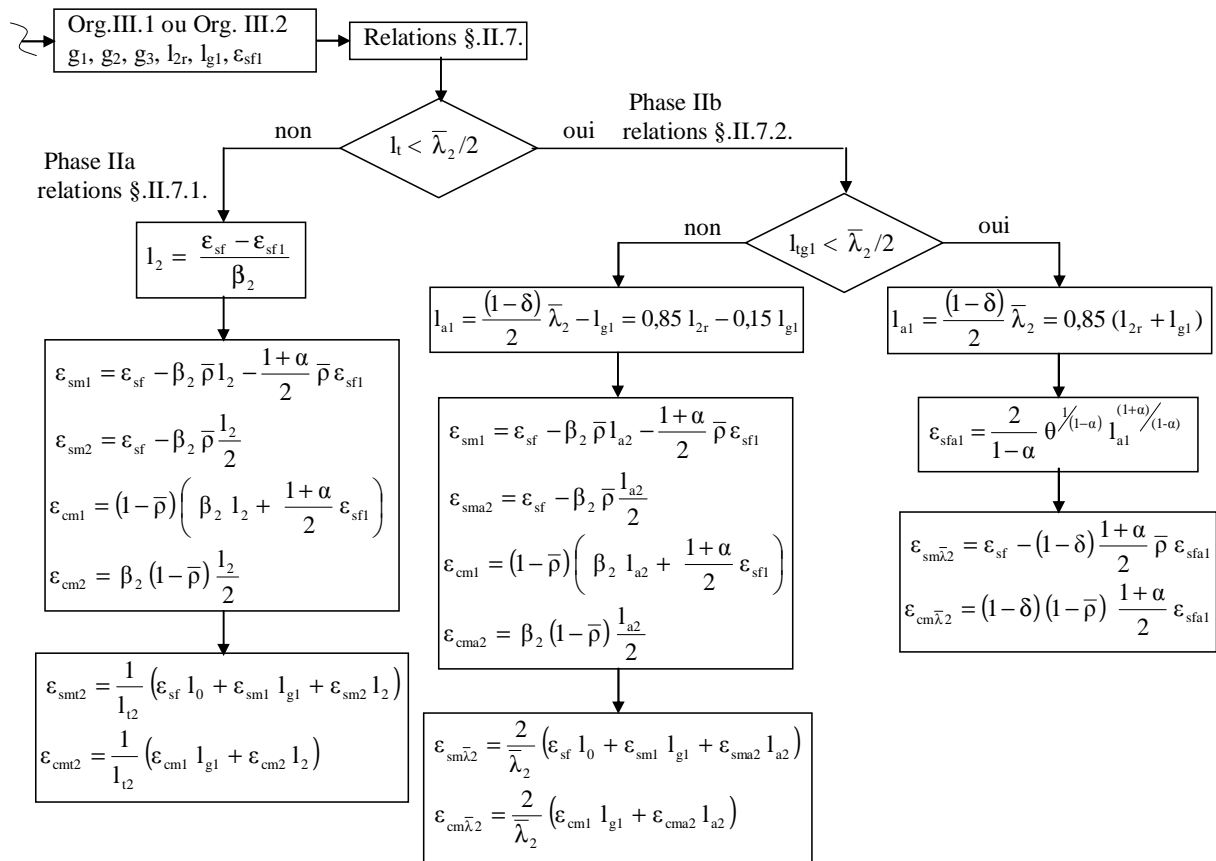
$$l_{a1} = \frac{(1-\delta)}{2} \bar{\lambda}_2 = 0,85 (l_{2r} + l_{g1}) \quad (\text{III.25})$$

b) Deuxième cas : $l_{tg1} < \frac{\bar{\lambda}_2}{2}$

Ici la longueur l_{g1} n'a pas diminué et on a :

$$l_{a1} = \frac{(1-\delta)}{2} \bar{\lambda}_2 - l_{g1} = 0,85 l_{2r} - 0,15 l_{g1} \quad (\text{III.26})$$

On montre à l'organigramme III.4, dans le cas où $g(l_0)$ est compris entre g_1 et g_2 , le calcul des allongements relatifs moyens de l'acier et du béton.



Org.III.4. Calcul des allongements relatifs moyens de l'acier et du béton: Cas : $g_1 < g(l_0) < g_2$

III.2.6.3. cas où $g_2 < g(l_0) < g_1$ avant fissuration (relations du §.II.9)

L'espaceur moyen des fissures est égal :

$$l_{tr} = l_{t3r} = l_{0r} + l_{3r} + l_{g2} + l_{g1} = \frac{\bar{\lambda}_3}{1,7},$$

Sachant que :

$$l_{tg2} = l_0 + l_{g2} + l_{g1} = \frac{l_{g2} + l_{g1}}{(1-\delta)},$$

l'espaceur moyen $\bar{\lambda}_3$ peut s'écrire en phase IIb (et dans certains cas de la phase IIa) :

- premier cas : $l_{ta} = l_{ta1} = l_0 + l_{a1} = \frac{\bar{\lambda}_3}{2}$ si $l_{tg1} > \frac{\bar{\lambda}_3}{2}$

$$\text{- deuxième cas : } l_{ta} = l_{ta2} = l_0 + l_{a2} + l_{g1} = \frac{\bar{\lambda}_3}{2} \quad \text{si } l_{tg1} < \frac{\bar{\lambda}_2}{2} < l_{tg2}.$$

$$\text{- troisième cas : } l_{ta} = l_{ta3} = l_0 + l_{a3} + l_{g2} + l_{g1} = \frac{\bar{\lambda}_3}{2} \quad \text{si } \frac{\bar{\lambda}_2}{2} > l_{tg2}.$$

a) Premier cas : $l_{tg1} > \bar{\lambda}_3/2$

Ici la longueur totale d'introduction l_{t2} diminue telle que la longueur l_{g2} disparaît après fissuration et l_{g1} raccourcit en prenant la valeur l_{a1} .

$$l_{a1} = \frac{(1-\delta)}{2} \bar{\lambda}_3 = 0,85 (l_{2r} + l_{g2} + l_{g1}) \quad (\text{III.27})$$

b) Deuxième cas : $l_{tg1} < \bar{\lambda}_3/2 < l_{tg2}$

Dans ce cas, après fissuration, la longueur l_{g1} est invariable mais l_{g2} diminue et prend la valeur l_{a2} .

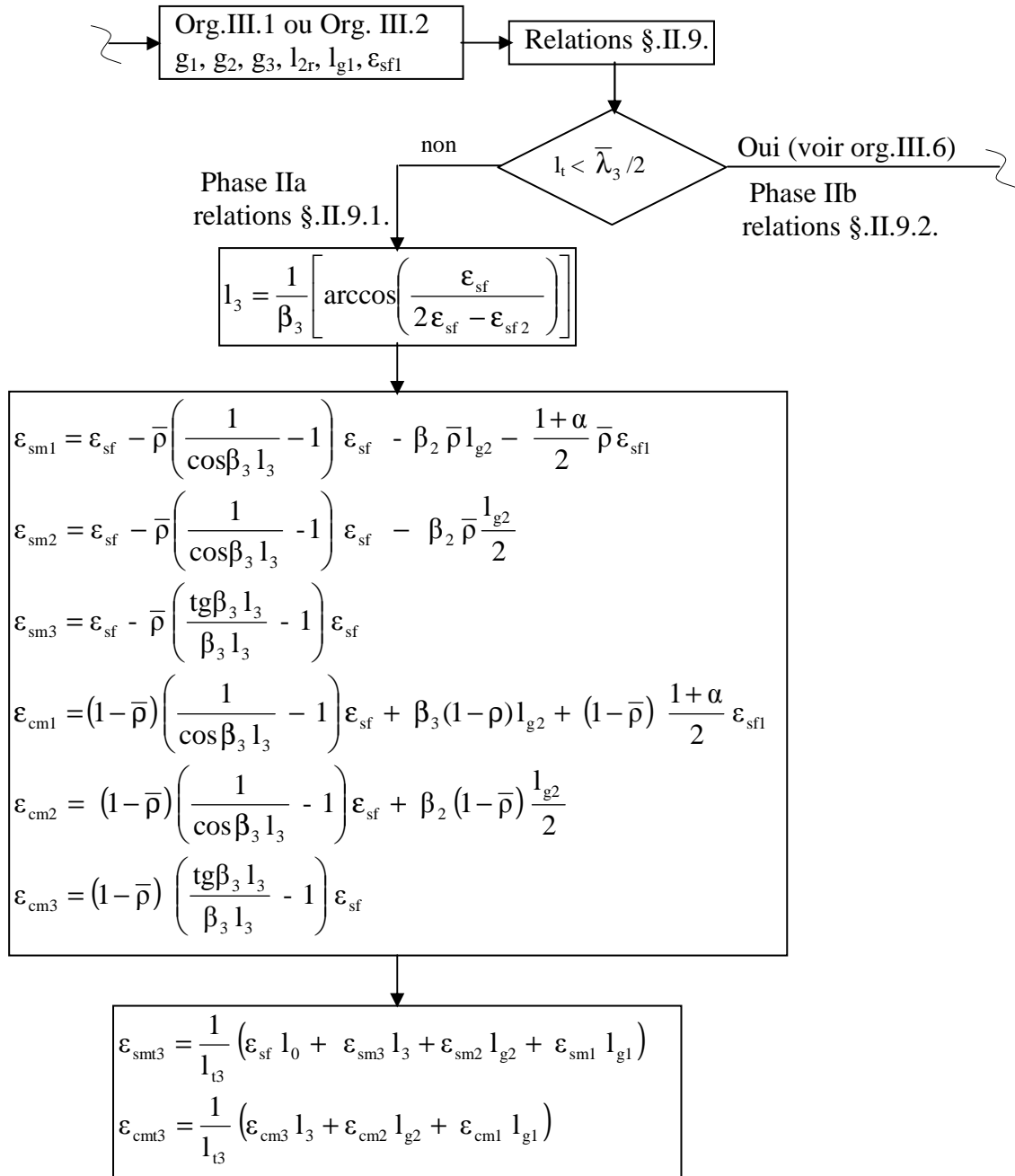
$$l_{a2} = \frac{(1-\delta)}{2} \bar{\lambda}_3 - l_{g1} = 0,85 (l_{2r} + l_{g2}) - 0,15 l_{g1} \quad (\text{III.28})$$

c) Troisième cas : $l_{tg2} < \bar{\lambda}_3/2$

Dans ce dernier cas les longueurs l_{g1} et l_{g2} restent invariables mais la longueur l_{3r} diminue et prend la valeur l_{a3} .

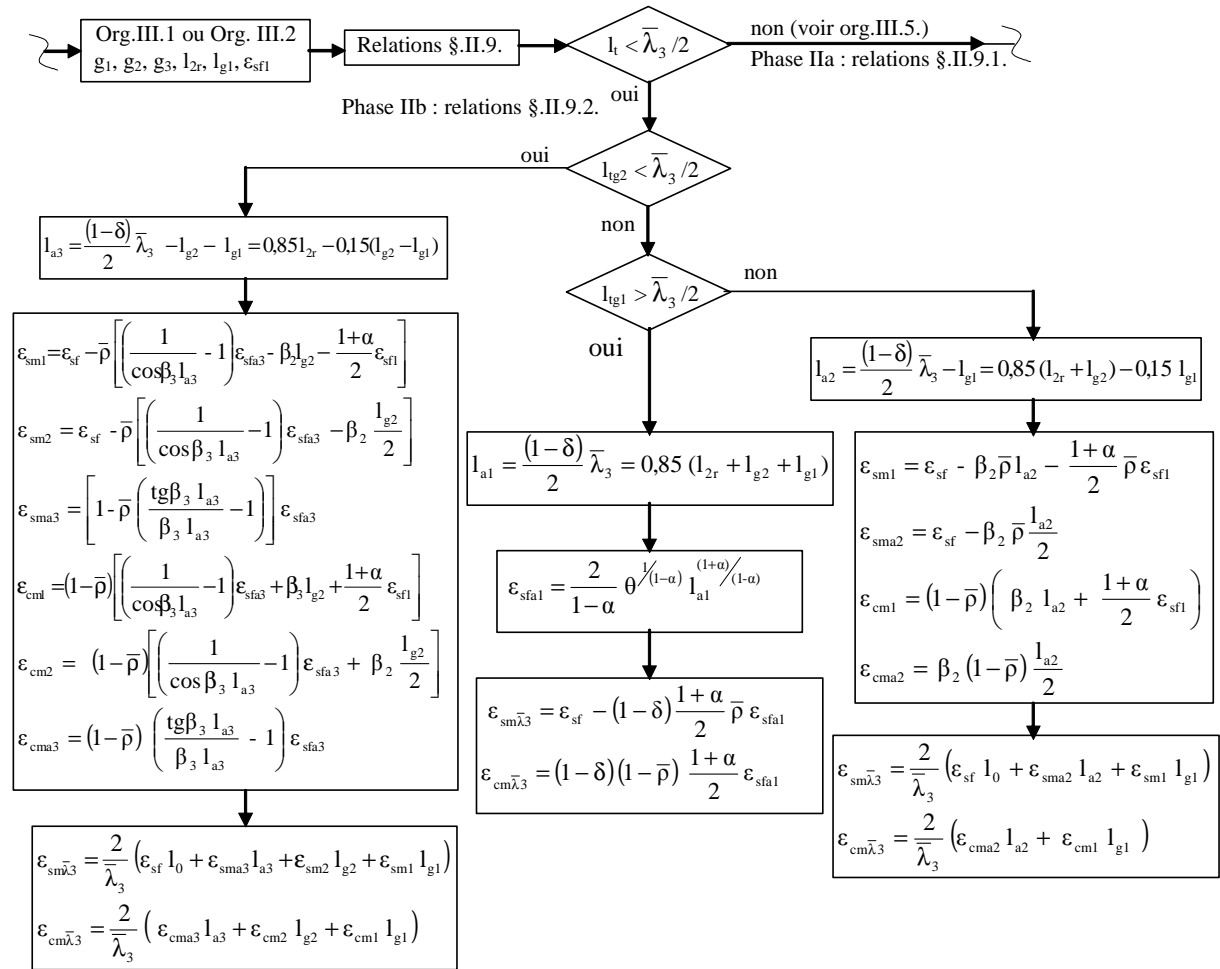
$$l_{a3} = \frac{(1-\delta)}{2} \bar{\lambda}_3 - l_{g2} - l_{g1} = 0,85 l_{2r} - 0,15 (l_{g2} - l_{g1}) \quad (\text{III.29})$$

Les organigrammes III.5 et III.6 représentent la méthode de détermination des allongements relatifs moyens de l'acier et du béton dans le cas où $g(l_0)$ est compris entre g_2 et g_3 .



Org.III.5. Calcul des allongements relatifs moyens de l'acier et du béton

Cas : $g_2 < g(l_0) < g_3$ quand $l_t < \bar{\lambda}_3 / 2$



Org.III.6. Calcul des allongements relatifs moyens de l'acier et du béton Cas : g₂ < g(l₀) < g₃ quand l_t > λ₃/2

III.2.7. Proposition d'un modèle analytique

Pour toutes choses égales par ailleurs, l'allure de la courbe σ(ε_m) dépend essentiellement du pourcentage d'acier et de la variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant.

Pour les différents cas possibles établis aux paragraphes précédents, on propose les différentes relations correspondantes. À partir de la première fissure jusqu'à la dernière fissure, on utilise un polynôme d'interpolation de Lagrange. Ce polynôme est défini par les coordonnées (σ_s; ε_m) des différents points d'apparition des fissures. L'abscisse du point A correspondant à l'allongement relatif de traction de rupture du béton ε_{cr} (=ε_{c1}).

III.2.7.1. Cas où $2\sigma_{sy} < \sigma_e$

Dans ce cas, le double de la contrainte de l'acier au droit de la fissure correspondant à la stabilisation des fissures reste inférieure à la contrainte limite élastique. Cet état est exprimé par la relation (III.30) et représenté figure III.1. La relation (III.30b) est un polynôme d'interpolation de Lagrange défini par les différents points d'apparition des fissures. Les autres relations représentent une variation linéaire du diagramme (σ_s - ε_m).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\sigma_{sr}}{\varepsilon_{sr}} \varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_A & \quad (\text{II.30a}) \\ \sigma_s &= \sum_{k=1}^{k=\gamma} \sigma_s(\varepsilon_{mk}) \cdot L_k \text{ où (avec } i \neq k) L_k = \prod_{i=1}^{i=\gamma} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{(\varepsilon_k - \varepsilon_i)} & \text{si } \varepsilon_A \leq \varepsilon \leq \varepsilon_C & \quad (\text{II.30b}) \\ \sigma_s &= \sigma_{sy} + \sigma_{sy} \frac{\varepsilon - \varepsilon_C}{\varepsilon_D - \varepsilon_C} & \text{si } \varepsilon_C \leq \varepsilon \leq \varepsilon_D & \quad (\text{II.30c}) \\ \sigma_s &= 2\sigma_{sy} + E_s(\varepsilon - \varepsilon_D) & \text{si } \varepsilon_D \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B & \quad (\text{II.35d}) \\ \sigma_s &= \sigma_e & \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon_B & \quad (\text{II.30e}) \end{aligned} \right\} (\text{III.30})$$

III.2.7.2. Cas où $\sigma_{sy} < \sigma_e \leq 2\sigma_{sy}$

Ici le double de la contrainte de l'acier au droit de la fissure correspondant à la stabilisation des fissures est supérieur à la contrainte limite élastique. Alors la courbe DB n'existe pas (figure III.2), ce cas est défini par la relation (III.31).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\sigma_{sr}}{\varepsilon_{sr}} \varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_A & \quad (\text{II.31a}) \\ \sigma_s &= \sum_{k=1}^{k=\gamma} \sigma_s(\varepsilon_{mk}) \cdot L_k \text{ où (avec } i \neq k) L_k = \prod_{i=1}^{i=\gamma} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{(\varepsilon_k - \varepsilon_i)} & \text{si } \varepsilon_A \leq \varepsilon \leq \varepsilon_C & \quad (\text{II.31b}) \\ \sigma_s &= \sigma_{sy} + \sigma_{sy} \frac{\varepsilon - \varepsilon_C}{\varepsilon_B - \varepsilon_C} & \text{si } \varepsilon_C \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B & \quad (\text{II.31c}) \\ \sigma_s &= \sigma_e & \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon_B & \quad (\text{II.31d}) \end{aligned} \right\} (\text{III.31})$$

III.2.7.3. Cas où $\sigma_{sr} < \sigma_e \leq \sigma_{sy}$

Dans ce cas, la phase de propagation des fissures n'est pas terminée alors que la contrainte de l'acier au droit de la fissure est supérieure à la contrainte limite élastique. Ce cas est défini par la relation (III.32) et représenté figure III.3 où la courbe CB n'existe pas. *On*

pense que la courbe AB a tendance à être convexe plutôt que concave comme il est représenté habituellement. Cette concavité dépend d'un certain pourcentage d'acier restant à définir selon les caractéristiques des deux matériaux utilisés (acier et béton).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\sigma_{sr}}{\epsilon_{sr}} \epsilon & \text{si } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_A & \quad (\text{II.32a}) \\ \sigma_s &= \sum_{k=1}^{k=\gamma} \sigma_s(\epsilon_{mk}) \cdot L_k \quad \text{où (avec } i \neq k) L_k = \prod_{i=1}^{i=\gamma} \frac{(\epsilon - \epsilon_i)}{(\epsilon_k - \epsilon_i)} & \text{si } \epsilon_A \leq \epsilon \leq \epsilon_B & \quad (\text{II.32b}) \\ \sigma_s &= \sigma_e & \text{si } \epsilon \geq \epsilon_B & \quad (\text{II.32c}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.32})$$

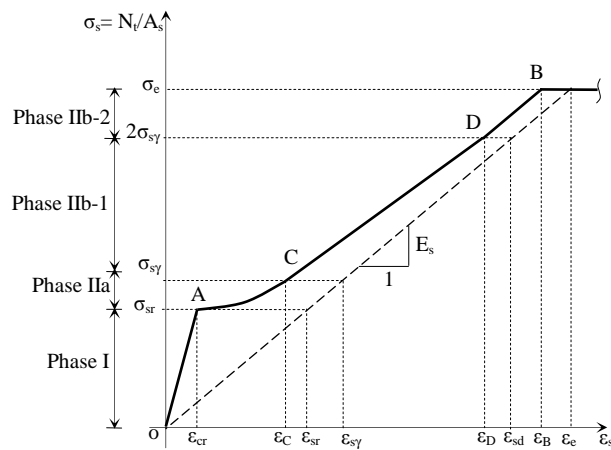


Fig. III.1. Allure de la courbe σ_s - ϵ_m d'un tirant dans le cas où $2\sigma_{sy} < \sigma_e$

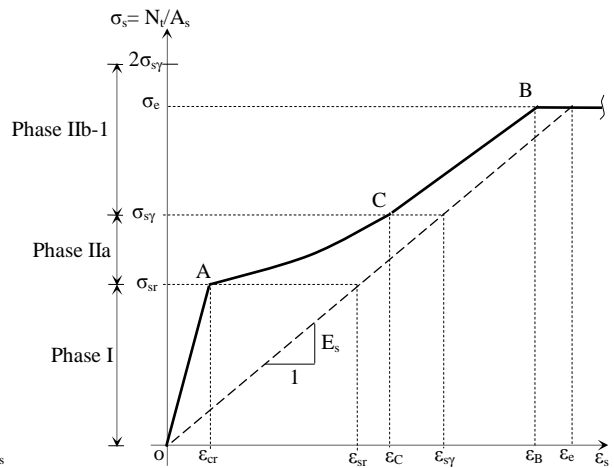


Fig. III.2. Allure de la courbe σ_s - ϵ_m d'un tirant dans le cas où $\sigma_{sy} < \sigma_e \leq 2\sigma_{sy}$

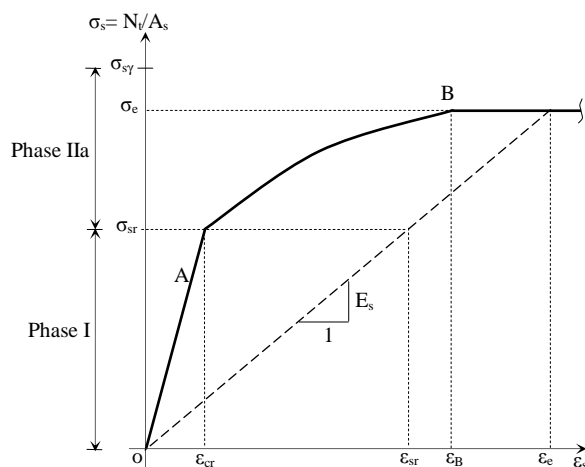


Fig. III.3. Allure de la courbe σ_s - ϵ_m d'un tirant dans le cas où $\sigma_{sr} < \sigma_e \leq \sigma_{sy}$

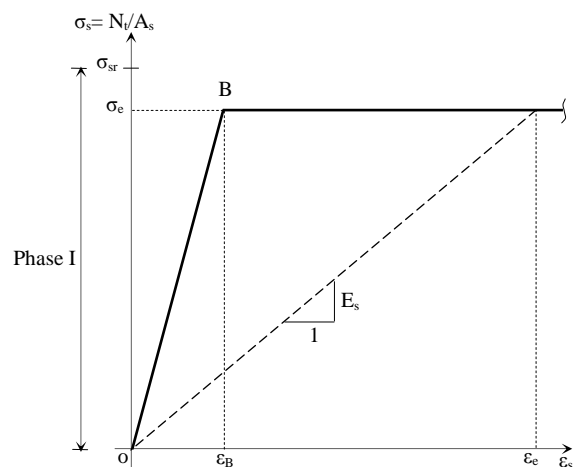


Fig. III.4. Allure de la courbe σ_s - ϵ_m d'un tirant dans le cas où $\sigma_e \leq \sigma_{sr}$

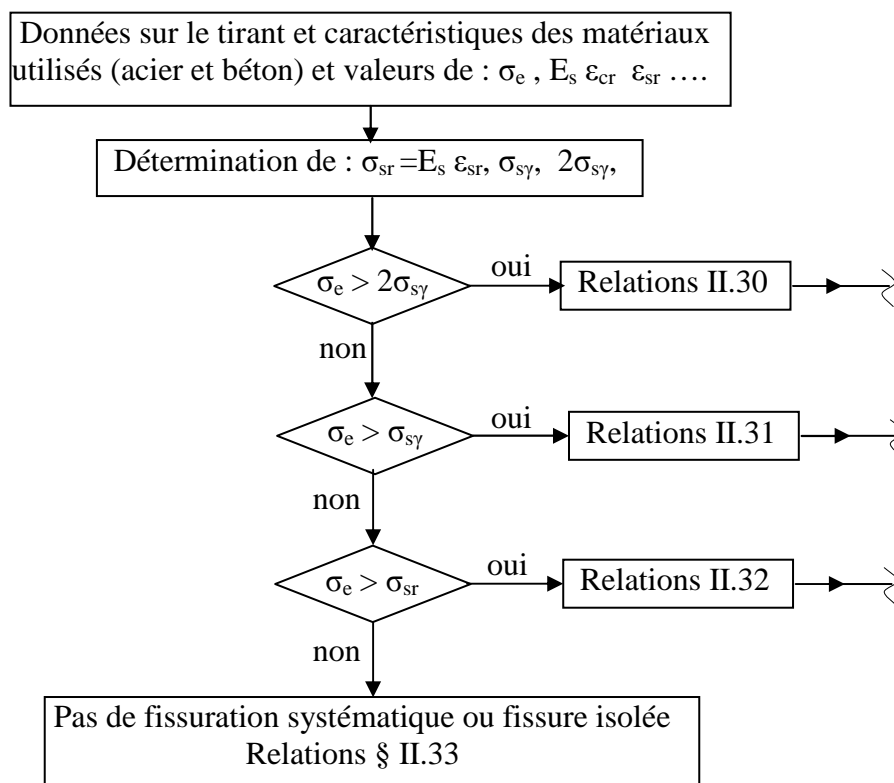
III.2.7.4. Cas où $\sigma_e \leq \sigma_{sr}$

Cette étude a été menée dans le cas où la contrainte appliquée au tirant reste inférieure la contrainte limite élastique de l'acier. On propose dans ce cas la relation III.33 dont l'allure de la courbe est représentée figure III.4.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\sigma_{sr}}{\epsilon_{sr}} \epsilon & \text{si } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_B & \text{ (III.33a)} \\ \sigma_s &= \sigma_e & \text{si } \epsilon \geq \epsilon_B & \text{ (III.33b)} \end{aligned} \right\} \text{ (III.33)}$$

Remarque

Pour tous les cas, afin de déterminer l'abscisse du point B, on suppose que le diagramme de l'acier ($\sigma = E_s \epsilon$) est linéaire à l'infini. Ainsi les différents points D, C et A sont définis d'une manière fictive et il suffit pour chaque cas de faire $\sigma = \sigma_e$. Le choix du modèle à utiliser est défini par l'organigramme III.7.



Org. III.7. Détermination du modèle (comparaison de σ_e par rapport à $2\sigma_{sy}$, σ_{sy} et σ_{sr})

III.3. Méthode de détermination des ouvertures de fissures

Le calcul des ouvertures de fissures, présentées ci-après, est intégré dans les différents organigrammes du calcul des allongements relatifs moyens des armatures et du béton de la sous section III.2.6.

III.3.1. Ouverture des fissures en phase IIa

- Première partie de la phase IIa : Ici la moitié du nombre total de fissures n'est pas encore atteint. L'ouverture des fissures est déterminée par le double du glissement en $x=0$ de la relation (II.22) quelque soit le niveau de chargement.

Le glissement à la fissure i s'écrit :

$${}^i g(0) = {}^i g(l_0) + {}^i \varepsilon_{sf} {}^i l_0 = {}^i g_{lt} + {}^i \varepsilon_{sf} {}^i l_0, \quad (\text{III.34})$$

on déduit ainsi l'ouverture de fissure ${}^i w = 2 {}^i g(0)$:

$${}^i w = 2 \left({}^i g_{lt} + {}^i \varepsilon_{sf} {}^i l_0 \right). \quad (\text{III.35})$$

- Deuxième partie de la phase IIa : Dans ce cas la longueur d'introduction ne peut pas se développer. Comme il a été montré au chapitre II, on obtient, en considérant le glissement résiduel g_a , dans cette phase IIa, entre le moment où la moitié du nombre total des fissures est atteint et le moment où apparaît la dernière fissure, la même expression (III.34) et donc la même relation d'ouverture de fissure (III.35).

a) Ouverture des fissures en phase IIa quand $g(l_0) \leq g_1$

Avec la relation II.23, on peut écrire à la fissure i :

$${}^i g(0) = \theta^{1/(1-\alpha)} {}^i l_1^{2/(1-\alpha)} + {}^i \varepsilon_{sf} {}^i l_0, \quad (\text{III.36})$$

et déduire l'ouverture de fissure pour ce cas :

$${}^i w = 2 \theta^{1/(1-\alpha)} {}^i l_1^{2/(1-\alpha)} + 2 {}^i \varepsilon_{sf} {}^i l_0. \quad (\text{III.37})$$

b) Ouverture des fissures en phase IIa quand $g_1 < g(l_0) \leq g_2$

Le glissement à ce niveau de chargement est donné par la relation (II.62), à la fissure i , on a :

$${}^i g(0) = {}^i g_{lt2} = {}^i \varepsilon_{sf} ({}^i l_0 + {}^i l_2) + g_1 - \beta_2 \frac{{}^i l_2^2}{2}. \quad (\text{III.38})$$

L'ouverture de la fissure s'écrit :

$${}^i w = 2 {}^i \varepsilon_{sf} ({}^i l_0 + {}^i l_2) + 2g_1 - \beta_2 {}^i l_2^2. \quad (\text{III.39})$$

c) Ouverture des fissures en phase IIa quand $g_2 < g(l_0) \leq g_3$

Avec la formule (II.95), le glissement à la fissure i s'écrit :

$${}^i g(0) = {}^i g_{lt3} = g_2 + {}^i \varepsilon_{sf} \left({}^i l_0 + \frac{\text{tg}\beta_3 {}^i l_3}{\beta_3} \right), \quad (\text{III.40})$$

et l'ouverture de fissure est donnée par la relation (III.41).

$${}^i w = 2.g_2 + 2.{}^i \varepsilon_{sf} \left({}^i l_0 + \frac{\text{tg}\beta_3 {}^i l_3}{\beta_3} \right), \quad (\text{III.41})$$

III.3.2. Ouverture des fissures en phase IIIb

En phase IIa, avec relation (III.34), le glissement à la dernière fissure γ est égal :

$${}^\gamma g(0) = {}^\gamma g(l_0) + {}^\gamma \varepsilon_{sf} {}^\gamma l_0 = {}^\gamma g_{lt} + {}^\gamma \varepsilon_{sf} {}^\gamma l_0, \quad (\text{III.42})$$

et l'ouverture de fissure ${}^\gamma w = 2 {}^\gamma g(0)$ s'écrit :

$${}^\gamma w = 2 \left({}^\gamma g_{lt} + {}^\gamma \varepsilon_{sf} {}^\gamma l_0 \right). \quad (\text{III.43})$$

Au-delà de la dernière fissure, on peut exprimer l'ouverture de fissure en fonction de ${}^\gamma w$ et de l'espacement des fissures $\bar{\lambda}$,

$$w = {}^\gamma w + \bar{\lambda} (\varepsilon_{sf} - {}^\gamma \varepsilon_{sf}) \quad (\text{III.44})$$

Pour chaque cas ci-dessous, il suffit de déterminer le glissement à la dernière fissure pour exprimer l'ouverture des fissures quand $\varepsilon_{sf} > {}^\gamma \varepsilon_{sf}$.

a) Ouverture des fissures en phase IIb quand $g(l_0) \leq g_1$

Durant cette phase, le nombre de fissures est stable et ; à l'apparition de la dernière fissure γ le glissement peut être déduit de la relation (II.23).

$$g(0) = g_{lt1} = \gamma \varepsilon_{sf} \gamma l_0 + \theta^{1/(1-\alpha)} \gamma l_1^{2/(1-\alpha)}, \quad (III.45)$$

$$\gamma w = 2 \theta^{1/(1-\alpha)} \gamma l_1^{2/(1-\alpha)} + 2 \gamma \varepsilon_{sf} \gamma l_0. \quad (III.46)$$

Au-delà $\varepsilon_{sf} > \gamma \varepsilon_{sf}$, on peut écrire:

$$w = 2 \left(\theta^{1/(1-\alpha)} \gamma l_1^{2/(1-\alpha)} + \gamma \varepsilon_{sf} \gamma l_0 \right) + \bar{\lambda} (\varepsilon_{sf} - \gamma \varepsilon_{sf}), \quad (III.47)$$

où l_0 peut varier selon le niveau de contrainte.

b) Ouverture des fissures en phase IIb quand $g_1 < g(l_0) \leq g_2$

En utilisant la relation (II.62), le glissement au droit de la fissure, à la dernière fissure principale, vaut :

$$\gamma g(0) = \gamma g_{lt2} = \gamma \varepsilon_{sf} (\gamma l_0 + \gamma l_2) + g_1 - \beta_2 \frac{\gamma l_2^2}{2}. \quad (III.48)$$

L'ouverture de fissure à ce stade vaut :

$$\gamma w = 2 \gamma \varepsilon_{sf} (\gamma l_0 + \gamma l_2) + 2g_1 - \beta_2 \gamma l_2^2, \quad (III.49)$$

au-delà, pour $\varepsilon_{sf} > \gamma \varepsilon_{sf}$, on peut écrire :

$$w = 2 \gamma \varepsilon_{sf} (\gamma l_0 + \gamma l_2) + 2g_1 - \beta_2 \gamma l_2^2 + \bar{\lambda} (\varepsilon_{sf} - \gamma \varepsilon_{sf}). \quad (III.50)$$

c) Ouverture des fissures en phase IIb quand $g_2 < g(l_0) \leq g_3$

À ce stade, avec la relation (II.95), le glissement pour $x=0$ et l'ouverture de fissure, à la dernière fissure, s'écrivent successivement :

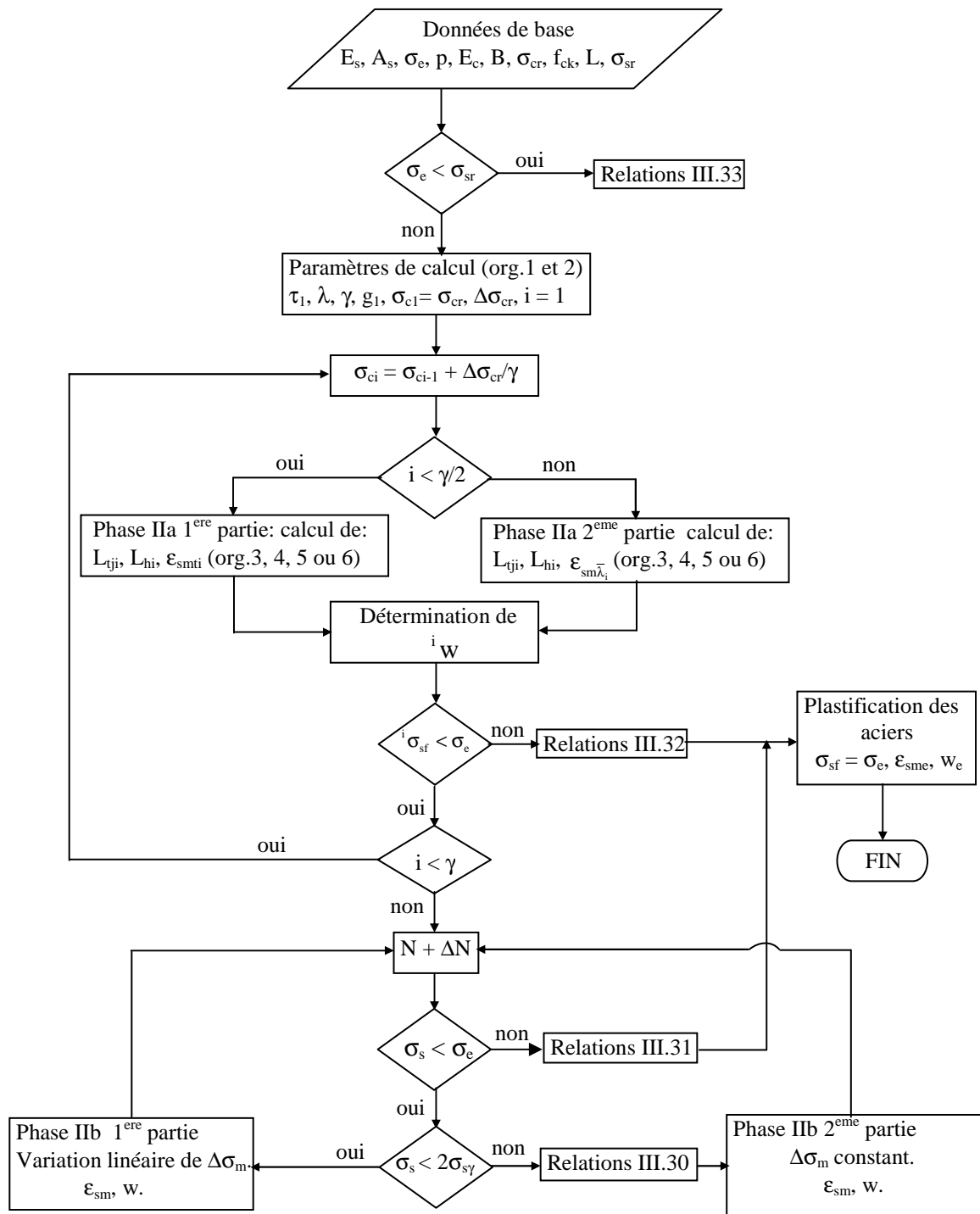
$$\gamma g(0) = \gamma g_{lt3} = g_2 + \left(\gamma l_0 + \frac{\text{tg} \beta_3 \gamma l_3}{\beta_3} \right) \gamma \varepsilon_{sf}, \quad (III.51)$$

$$\gamma w = 2g_2 + 2 \left(\gamma l_0 + \frac{\text{tg} \beta_3 \gamma l_3}{\beta_3} \right) \gamma \varepsilon_{sf}. \quad (III.52)$$

L'ouverture des fissures pour $\epsilon_{sf} > \gamma \epsilon_{sf}$ s'écrit :

$$w = 2g_2 + 2 \left(\gamma l_0 + \frac{tg\beta_3 \gamma l_3}{\beta_3} \right) \gamma \epsilon_{sf} + \bar{\lambda} (\epsilon_{sf} - \gamma \epsilon_{sf}) \quad (III.53)$$

III.4. Organigramme général de calcul



Org. III.8. Organigramme général de calcul

L'organigramme (III.8) permet de tracer le diagramme fictif de l'acier et de calculer les ouvertures de fissures.

Les paramètres de calcul sont déterminés par les organigrammes III.1 ou III.2, selon le cas.

Dans le cas où la fissuration est systématique, le polynôme de Lagrange est défini par les coordonnées des points (σ_{sf} - ε_m) d'apparition des fissures.

À chaque niveau de chargement, on peut déduire les ouvertures de fissures.

III.5. Conclusions

La loi de comportement idéalisée adhérence – glissement (τ - g représentée à la figure 2) est à la base de la méthode de calcul de l'acier fictif en traction proposée dans cette étude pour des efforts ne dépassant pas la limite élastique de l'acier.

Cette étude est menée en considérant une dispersion de la contrainte de traction du béton le long du tirant. Cette dispersion varie selon le contrôle effectué sur les essais (surtout sur le béton).

On a partagé la phase IIa qui s'étend de l'apparition de la première fissure à la stabilisation de la fissuration en deux parties. Dans la première partie où le nombre de fissures est inférieur à la moitié du nombre total, la longueur d'introduction totale l_t peut se développer. Les calculs sont menés différemment pour la deuxième partie où certaines zones ne permettent pas le développement de la longueur d'introduction totale.

On conclut que la « durée » de la phase IIa lors de l'augmentation de l'effort dépend essentiellement de la variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant.

On a introduit dans cette étude la notion de « zone perturbée », située de part et d'autre de la fissure et estimée sa longueur à $0,10 l_t$ en phase IIa, qui peut augmenter en phase IIb (détérioration de la gaine de béton entourant les aciers) pour un certain niveau de contrainte puis se stabiliser ensuite.

Cet état entraîne une variation linéaire de $\Delta\varepsilon_m$ juste après la stabilisation des fissures jusqu'à un certain niveau de contrainte qu'on estime à $2\sigma_{sy}$ après quoi $\Delta\varepsilon_{sm}$ est constant.

Dans le cas où les caractéristiques de la loi adhérence- glissement sont connus, les calculs sont directs pour estimer les valeurs des allongements relatifs de l'acier ε_{sf1} , ε_{sf2} et ε_{sf3} (correspondant respectivement à g_1 , g_2 et g_3). De la comparaison de ces grandeurs avec

l'allongement relatif de l'acier à l'apparition de la première fissure ε_{sr} , on déduit les relations à utiliser établies au chapitre II.

Si les valeurs caractéristiques de la loi adhérence –glissement ne sont pas connus, en utilisant la formule d'espacement de fissure adéquate pour le cas considéré, on estime ainsi les glissements g_1 , g_2 et g_3 et on déduit les allongements relatifs correspondants ε_{sf1} , ε_{sf2} et ε_{sf3} .

Pour ces deux cas, le calcul des valeurs moyennes des allongements relatifs de l'acier et du béton à l'intérieur du « tirant », avant et après la stabilisation des fissures, permet de connaître les diagrammes fictifs de l'acier et du béton et d'estimer les ouvertures de fissures à chaque niveau de chargement.

CHAPITRE IV : VALIDATION DES MODELES DE CALCUL

Dans ce chapitre, on compare les résultats théoriques établis au chapitre II et les méthodes de calculs expliquées au chapitre III avec des essais sur tirant et des éléments de poutre.

IV.1. Confrontation à des essais sur tirants

IV.1.1. Essais d’Espion

Espion [ESP85] a réalisé des essais sur des prismes de 150 x 150 x 1500 mm, ($B = 22500 \text{ mm}^2$). La disposition des armatures est représentée à la figure IV.1. Les barres d’acier sont des barres à adhérence améliorée ($\sigma_e = 400 \text{ MPa}$ et $E_s = 200000 \text{ MPa}$). On donne dans le tableau IV.1 la description géométrique des essais où β_w est la résistance à la compression du béton mesurée sur cube.

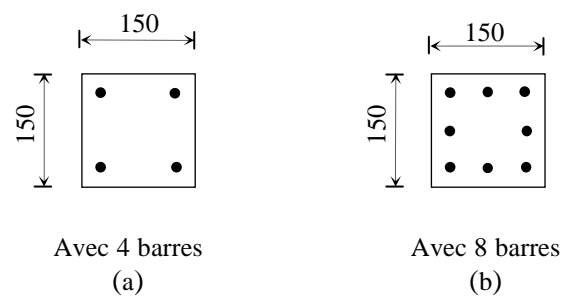


Fig. IV.1. Section du tirant (150×150) mm

Essai	Aciers	$A_s \text{ (mm}^2\text{)}$	$\rho \text{ (\%)}$	$p \text{ (mm)}$	$\beta_w \text{ (MPa)}$	$\sigma_{sr} \text{ (MPa)}$
1	4HA6	113	0,502	75,4	35,4	292
2	4HA8	201	0,893	100,5	45,4	212
3	8HA6	226	1,00	150,8	29,1	132
4	4HA10 (II)	314	1,40	125,7	31,0	126
5	4HA10 (IV)	314	1,40	125,7	41,6	130
6	8HA8	402	1,79	113	42,1	116
7	4HA12	452	2,01	150,8	34,5	82
8	8HA10	628	2,79	251,3	37,3	80
9	4HA16	804	3,57	201,1	35,1	60
10	8HA12	905	4,02	301,6	39,6	56

Tab.IV.1. Description des essais d’Espion [ESP85]

Espion, en observant la position apparente du point A, représentant la fin de la phase élastique, sur les différents essais a déterminé ainsi les valeurs correspondantes de σ_{sr} . Avec une régression linéaire par les moindres carrés, Espion a déterminé la valeur de $\sigma_{cr}=1,4$ MPa. Il applique la formule : $E_c = 5200\sqrt{\beta w} = 31600$ MPa, ce qui donne $\epsilon_{cr} = 44.10^{-6}$. Les résultats expérimentaux des 10 essais réalisés, par l'auteur, sont présentés aux figures IV.2 et IV.3.

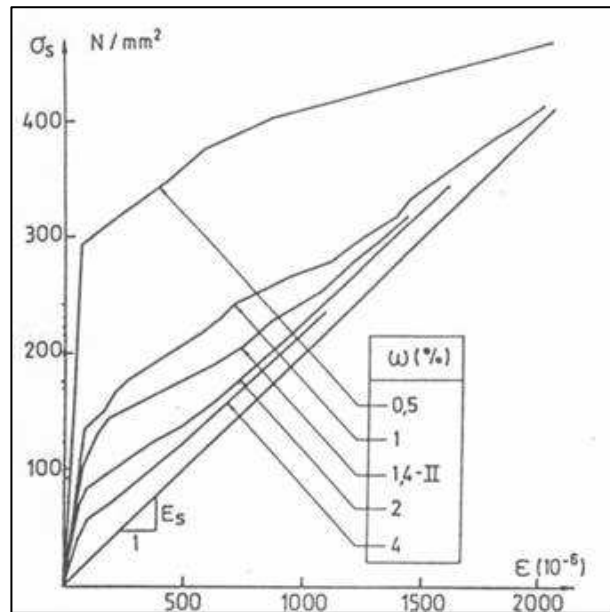


Fig. IV.2. Résultats expérimentaux ESPION [ESP85]
Essais : 0.5% ; 1.0% ; 1.4%(II) ; 2.0% et 4.0%

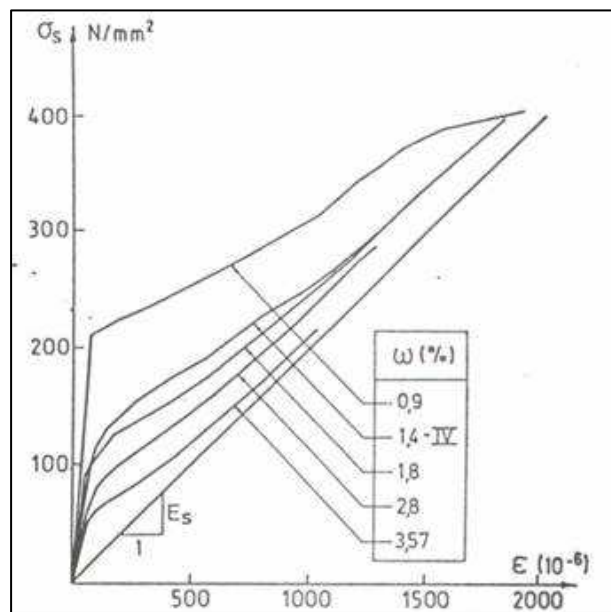
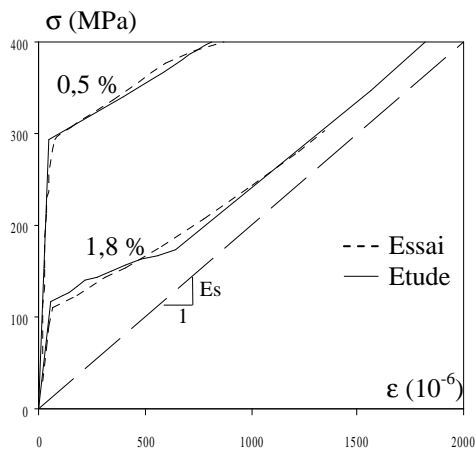
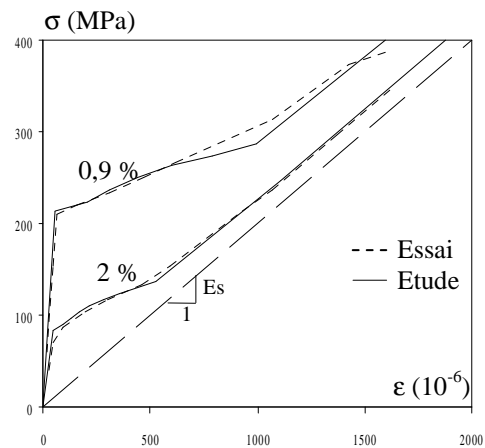


Fig. IV.3. Résultats expérimentaux ESPION [ESP85]
Essais : 0.9% ; 1.4%(IV) ; 1.8% ; 2.8% et 3.57%

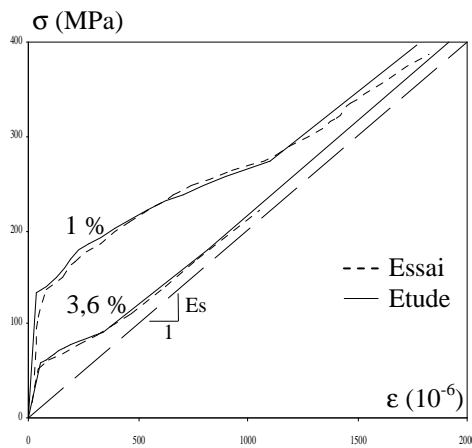
Avec la méthode de calcul du diagramme fictif de l'acier proposée au chapitre III, on a effectué la comparaison avec huit des dix essais expérimentaux et les résultats sont présentés à la figure 9. On a pris pour les essais d'Espion une variation de la contrainte effective du béton de $\pm 20\%$ pour l'ensemble des essais sauf pour l'essai avec $\rho = 1\%$ où on considère une variation de $\pm 35\%$. On observe en effet pour cet essai un certain prolongement relatif de la phase IIa lors de l'accroissement de l'effort.



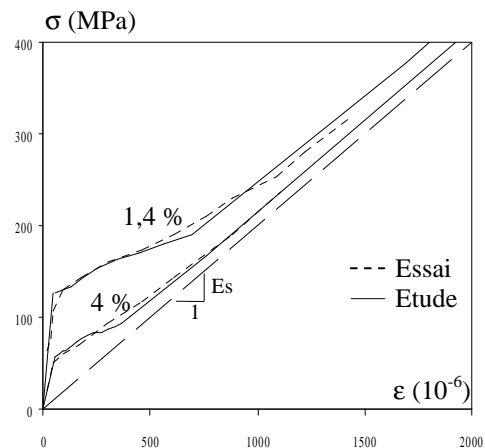
a) Essais d'Espion : $\rho = 0,5\%$ et $\rho = 1,8\%$



b) Essais d'Espion : $\rho = 0,9\%$ et $\rho = 2\%$



c) Essais d'Espion : $\rho = 1\%$ et $\rho = 3,6\%$



d) Essais d'Espion : $\rho = 1,4\%$ et $\rho = 4\%$

Fig.IV.4. Confrontation présente étude - essais d'Espion [ESP85]

IV.1.2. Essais de Rostasy

Rostasy [ROS76] a réalisé des essais sur des tirants composés de béton à granulats légers. Les dimensions des prismes sont 300 x 500 x 6000 mm. Les déformations sont mesurées sur une longueur centrée de 3500 mm. Ces tirants sont ferrailés avec des armatures à haute adhérence ayant une limite d'élasticité $\sigma_e = 544$ MPa. Les autres caractéristiques sont données au tableau IV.2 où f'_c et f_t représentent respectivement la résistance à la compression et à la traction du béton mesurées sur éprouvettes. Les résultats d'essais sont représentés à la figure IV.5.

Essai	Armatures	ρ (%)	E_s (MPa)	f'_c (MPa)	f_t (MPa)
V1	20HA6	0,375	204966	7,65	1,00
V2	10HA8	0,333	204966	8,88	0,87
V3	20HA8	0,666	202800	10,20	1,26
V4	30HA8	0,987	204966	8,98	1,00

Tab. IV.2. Caractéristiques techniques des différents corps d'épreuve de Rostasy

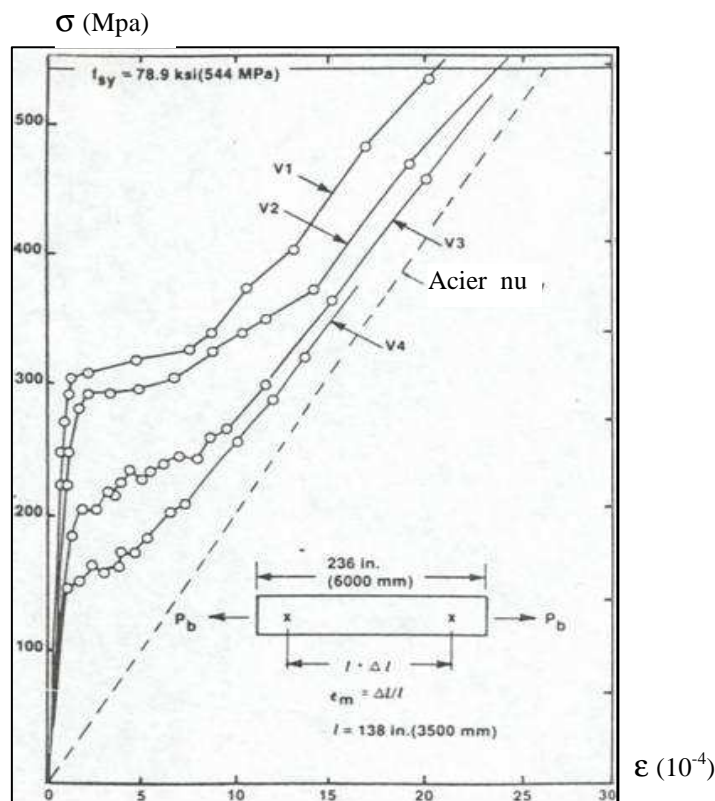


Fig. IV.5. Résultats expérimentaux de ROSTASY et al [ROS76]

On a représenté à la figure IV.6 la comparaison des résultats expérimentaux avec les prédictions obtenues avec la méthode de calcul du diagramme fictif de l'acier proposée au chapitre III. On a pris pour les essais de Rostasy une variation de la contrainte de traction effective du béton de $\pm 10\%$ pour l'ensemble des essais. Ce pourcentage faible indique que les tests ont été effectués dans de bonnes conditions.

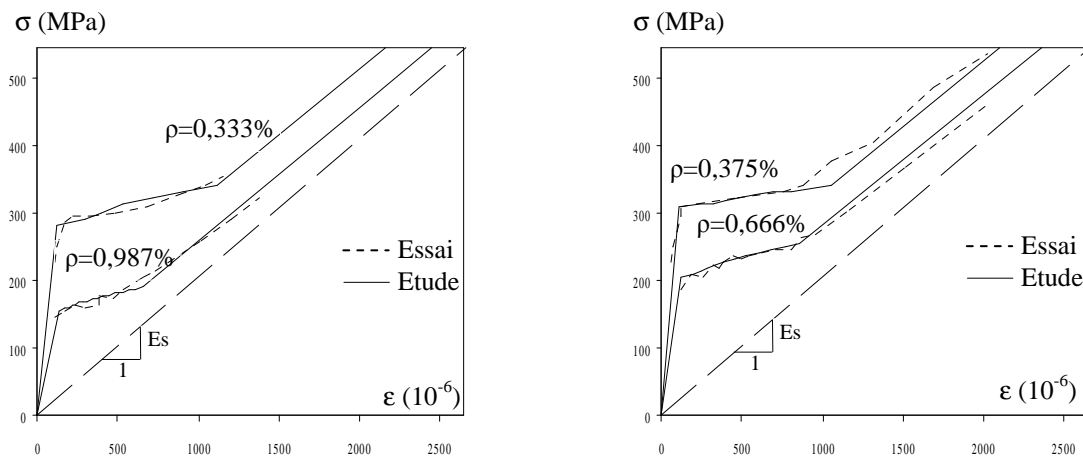


Fig. IV.6. Confrontation présente étude - essai de Rostasy

IV.1.3. Essais de Lorrain

Lorrain [LOR98] a réalisé des essais sur des tirants composés de béton et d'acier avec des caractéristiques différentes. Les dimensions des prismes sont 100 x 100 x 2000 mm. Ces tirants sont ferrailés avec une seule barre centrée à haute adhérence avec une limite d'élasticité $\sigma_e = 544$ MPa. La confrontation est effectuée avec deux tirants armés d'une barre de diamètre 12mm (avec $f_c = 610$ MPa et $E_s = 200$ GPa) représentant un pourcentage de 1,13 %. Les caractéristiques du béton sont : $f_c' = 42$ MPa, $f_t = 3,1$ MPa, $E_c = 38,2$ GPa pour l'essai CA et $f_c' = 101$ MPa, $f_t = 4,6$ MPa, $E_c = 51,2$ GPa pour l'essai CE.

Les prédictions obtenues à l'aide des méthodes de calcul du diagramme fictif de l'acier et de l'ouverture des fissures proposées au chapitre III, ont été comparés aux essais et les résultats sont présentés aux figures IV.7 et IV.8.

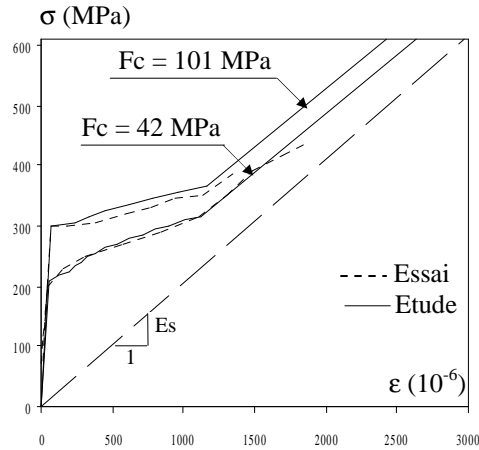


Fig. IV.7. Confrontation $\sigma_s = f(\epsilon_{sm})$ présente étude avec les essais Lorrain

On a pris pour les essais de Lorrain une variation de la contrainte de traction effective du béton de $\pm 10\%$. On peut ici aussi conclure que ces essais ont été effectués dans de bonnes conditions.

On peut conclure que l'allure de la courbe de la loi de comportement moyen de l'acier fictif pendant la phase IIa (phase de propagation des fissures) dépend uniquement de la variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant. Cette variation est représentée par l'organigramme présenté en annexe entre l'apparition de la première fissure et l'apparition de la dernière fissure.

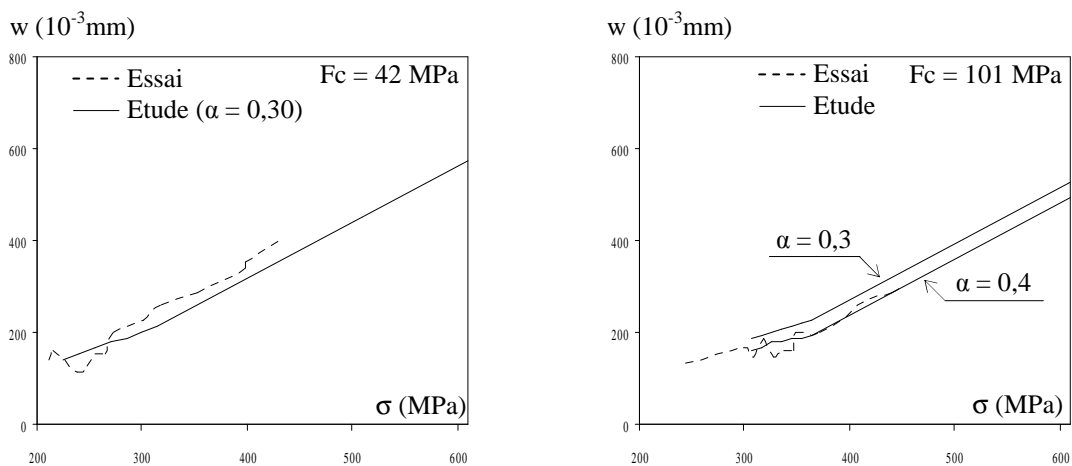


Fig. IV.8. Confrontation $w = f(\sigma_s)$ présente étude - essais Lorrain, $\rho = 1,13\%$

Pour les pourcentages d'acier faibles, une petite variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant entraîne une grande variation de l'allongement moyen du tirant entre l'apparition successive de deux fissures.

Si la résistance en traction était la même le long du tirant, toutes les fissures se formeraient simultanément sous l'effort N_r et on aurait donc à ce niveau un palier. Cette méthode a été proposée par certains auteurs et par le comité européen de béton en 1967 et 1973.

IV.2. Confrontation à des essais sur des poutres : Essais Fouré

Fouré [FOU85] a réalisé des essais au C.E.B.T.P sur deux poutres (OG3 et OG4) en flexion simple, présentées aux figures IV.9 et IV.10. Les caractéristiques des bétons et des aciers sont présentées au tableau IV.3. Les aciers sont en Torsid, acier à palier plastique et raffermissement avant rupture. La comparaison des essais OG et de la présente étude a porté sur les ouvertures de fissures situées entre les deux charges P (distantes de 50 cm). Cette partie est sollicitée en flexion circulaire.

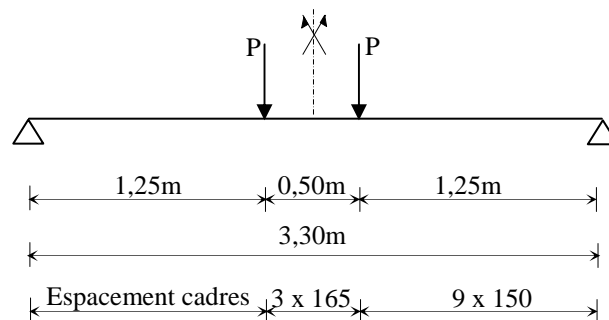


Fig. IV.9. Schéma statique des poutres OG et espacement des cadres en mm

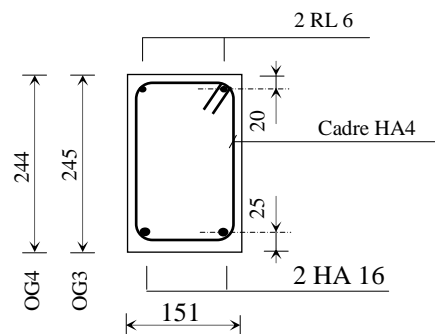


Fig. IV.10. Section droite (en mm) des poutres OG

Poutre	f_c' (MPa)	E_C (GPa)	f_t (MPa)	E_s (GPa)	σ_e (MPa)
OG3	52,5	39,9	3,35	205	575
OG4	71	46,9	4,05	210	590

Tab. IV.3. Caractéristiques techniques du béton et des aciers des poutres OG : essais Fouré

IV.2.1. Confrontation : ouverture de fissures (présente étude) - essais Fouré

La comparaison des essais OG et de la présente étude a porté sur les ouvertures de fissures situées entre les deux charges P (distances de 50 cm).

En flexion simple, la section effective A_{cef} est calculée en considérant la section du béton entourant les armatures tendues. Fouré a mesuré des espacements moyens de fissures de 72 mm et 89 mm, respectivement pour les poutres OG3 et OG4. Les espacements de fissures, estimés par la formule donnée par l'Eurocode2, sont de 88 mm pour les deux poutres. Le moment maximal induit par le poids propre de la poutre et de certains instruments d'essai est estimé à 1,3 kNm (M_r) au milieu de la poutre.

L'effort de traction dans les armatures au droit de la fissure est calculé par la relation $N_t = M/0.9d$, avec $d = 0,22m$ et M le moment de flexion entre les deux charges P pris égal à $(1,25P + M_r)$. On peut ainsi déduire N_t (donc l'allongement relatif de l'acier au droit de la fissure) et l'ouverture des fissures à chaque étape de chargement.

La figure IV.11 illustre la comparaison des résultats expérimentaux avec les prédictions obtenues avec la méthode de calcul des ouvertures de fissures proposée au chapitre III.

On remarque ici en flexion simple que la phase IIa (phase de propagation des fissures) est relativement faible par rapport à la phase IIb. Ceci s'explique par le pourcentage d'acier relativement élevé dans la zone tendue soit 4,26%. En estimant la variation de la contrainte de traction du béton le long du tirant (ici 50cm entre les deux charges) à $\pm 10\%$, la phase IIa s'étend de la charge 10,2kN (= 2P) à 12,1 kN pour la poutre OG3 et de 12,4 kN à 14,6 kN pour la poutre OG4. Cette phase de chargement représente environ 1% du chargement total pour les deux poutres. Il y a lieu de noter que si le pourcentage d'acier était plus faible cette phase sera plus importante.

Il est certain que les espacements de fissures augmentent pour un pourcentage d'acier plus faible, ce qui entraîne un accroissement de la contribution du béton tendu. La

détermination des espacements de fissures revêt une certaine importance. En effet, pour la poutre OG3 avec $\bar{\lambda} = 72$ mm (observé), l'approche est meilleure avec la présente étude. Pour la poutre OG4, l'espacement $\bar{\lambda}$ observé est pratiquement le même que celui calculé avec la formule de l'Eurocode2, la courbe calculée approche mieux la courbe expérimentale.

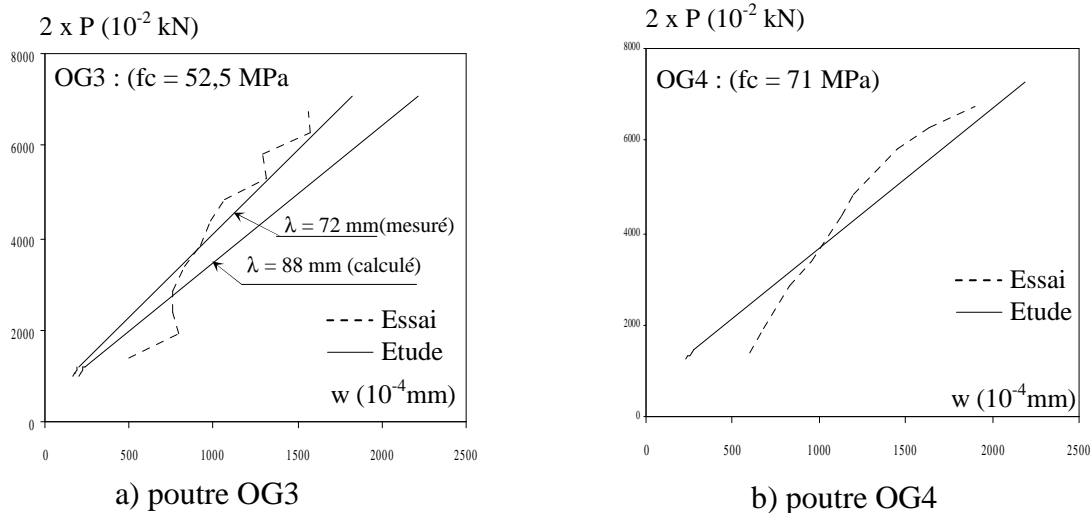


Fig. IV.11. Confrontation $2P = f(w)$ présente étude- essais Fouré [FOU85]

IV.2.2. Prise en compte du béton tendu (présente étude)- essais Fouré

La confrontation des essais OG et de la présente étude a porté sur la déformation du tronçon délimité par les deux charges P.

Pour mieux suivre et décrire le comportement d'une section, assez représentative d'un tronçon de poutre, soumise à une flexion simple ou composée, il est nécessaire de prendre en compte la contribution du béton fissuré dans la zone tendue.

Afin de comparer la loi de comportement fictive des aciers tendus proposée au chapitre III à des résultats expérimentaux, un logiciel de calcul « cmp » pour une section droite d'une poutre en élasticité non linéaire a été élaboré et les grandes lignes sont présentées en annexe B.

On présente aux figures IV.12 et IV.14, respectivement les diagrammes de $M = f(\delta w)$ de OG3 et OG4 où M représente le moment appliqué entre les deux charges et δw la courbure de la section au milieu de la poutre.

Pour mettre en évidence la contribution du béton tendu, surtout pendant la première phase de chargement (environ 25 % du chargement total), on montre aux figures IV.13 et

IV.15 les détails de variation du moment en fonction de la courbure en utilisant la loi proposée dans la présente étude (avec le diagramme fictif de l'acier) et de la courbe $M = f(\delta_w)$ en négligeant le béton tendu.

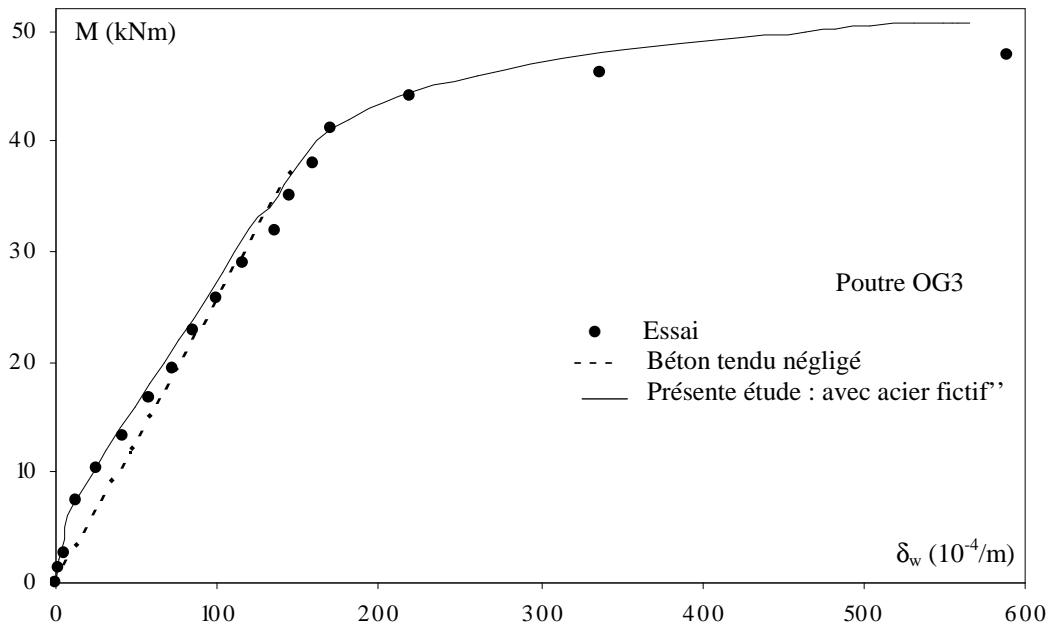


Fig. IV.12. Confrontation présente étude – essai- Fouré : poutre OG3 pour $M = f(\delta_w)$

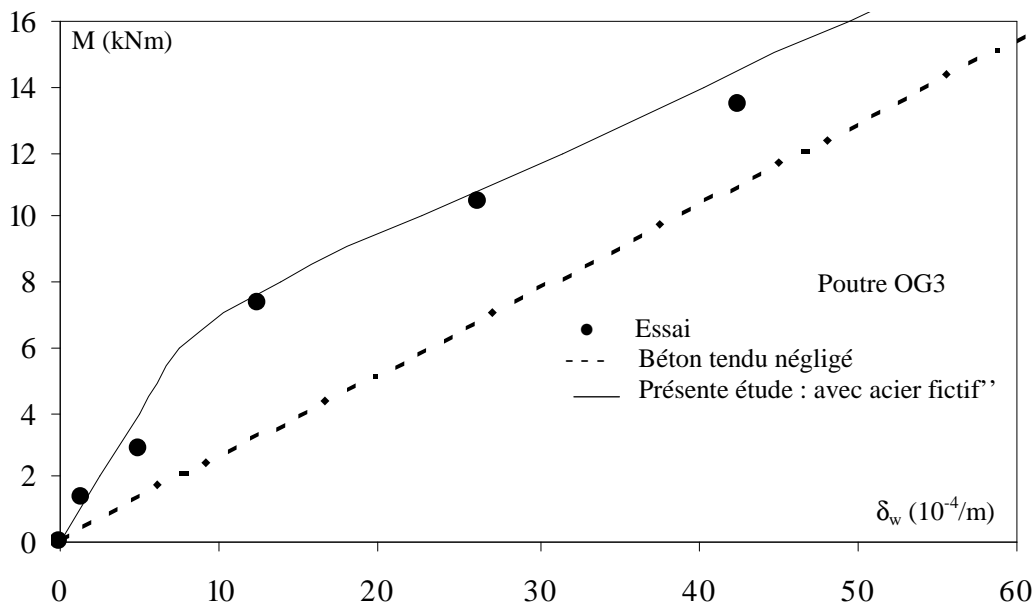


Fig. IV.13. Détail de mise en évidence de la contribution du béton tendu : poutre Fouré OG3

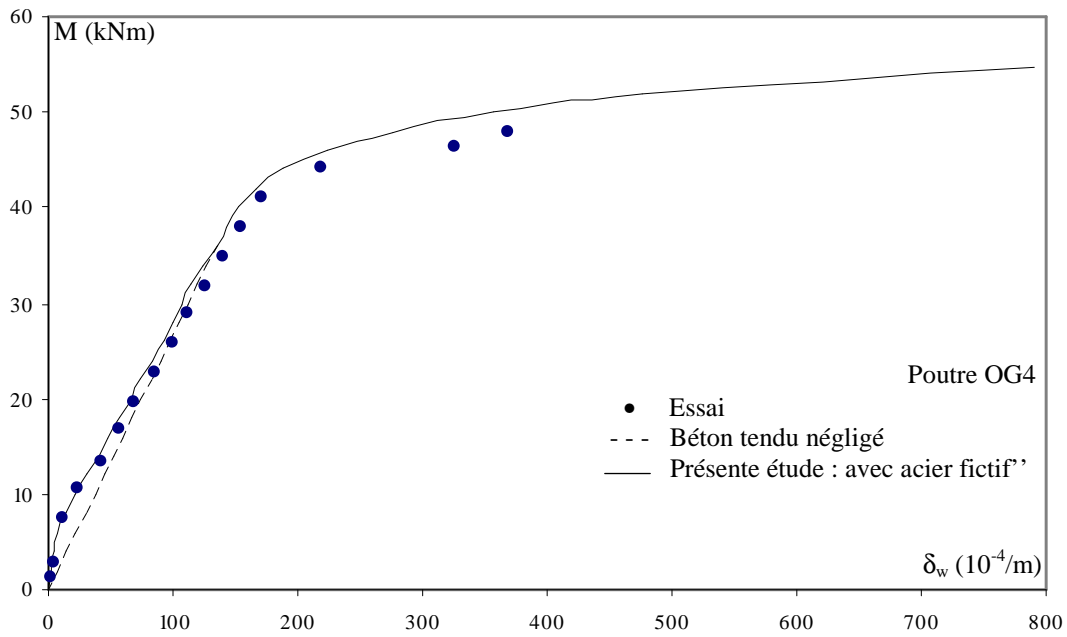


Fig. IV.14. Confrontation présente étude – essai- Fouré : poutre OG4 pour $M = f(\delta_w)$

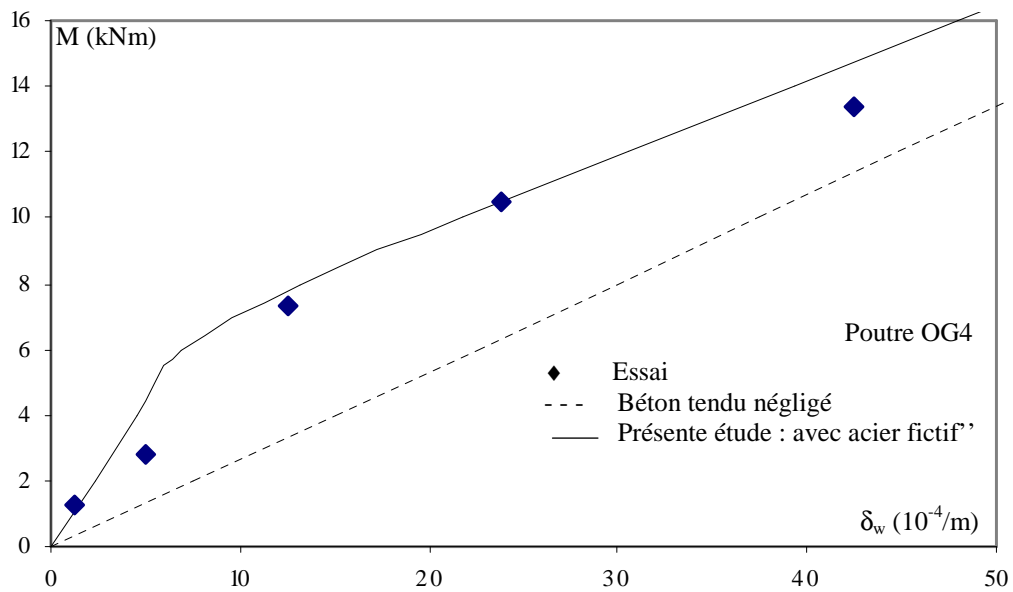


Fig. IV.15. Détail de mise en évidence de la contribution du béton tendu : poutre Fouré OG4

Avec les deux détails présentés figures IV.13 et IV.15, on remarque qu'au début du chargement la contribution du béton est effective pour les deux essais (OG3 et OG4).

La loi fictive de l'acier proposée dans la présente étude est introduite dans le logiciel « cmp ». L'évolution du moment en fonction de la courbure, obtenue dans cette phase, est très proche de la courbe expérimentale pour les deux poutres.

La variation brusque de la courbure se situe pour les deux essais pour un moment compris entre 6 et 8 kNm soit un chargement d'environ 11 kN (= 2 P). À cet instant on peut conclure que le béton tendu commence à se fissurer.

IV.3. Conclusions

La confrontation des prédictions obtenues à partir de la méthode proposée pour le diagramme fictif de l'acier, avec les courbes expérimentales des différents tirants testés en traction par Espion [ESP85], Rostasy [ROS76] et Lorrain [LOR98] est très satisfaisante. Pour rapprocher les différentes courbes expérimentales des différents auteurs, on a ajusté le pourcentage de variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant pour chaque cas.

On a pris pour les essais d'Espion une variation de la contrainte effective du béton de $\pm 20\%$ pour l'ensemble des essais sauf pour l'essai avec $\rho = 1\%$ où on considère une variation de $\pm 35\%$. On observe en effet pour cet essai un certain prolongement relatif de la phase IIa lors de l'accroissement de l'effort.

Pour les essais de Rostasy une variation de la contrainte de traction effective du béton de $\pm 10\%$ s'est avérée suffisante pour rapprocher les courbes d'essai, avec ce pourcentage on peut conclure que ces tests ont été effectués dans de bonnes conditions.

De même, une variation de $\pm 10\%$ de la contrainte de traction effective du béton a suffi pour rapprocher le diagramme fictif de l'acier des deux essais sur tirant de Lorrain (figure IV.17).

Pour la comparaison avec les poutres OG de Fouré, la loi fictive de l'acier de la présente étude rapproche convenablement les résultats des essais, surtout pour le début du chargement où il est montré une contribution effective du béton tendu.

On conclut, pour le diagramme fictif de l'acier, que la « durée » de la phase IIa lors de l'augmentation de l'effort dépend essentiellement de la variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant (et bien sûr des conditions et du contrôle des essais). Pour des pourcentages d'acier relativement faibles (exemple : essai d'Espion pour $\rho = 0,5\%$), la

plastification des aciers peut être atteinte sans que la phase IIa ne soit terminée (c'est-à-dire alors que le nombre de fissures n'est pas stabilisé ; relation III.37).

La comparaison des relations théoriques établis au chapitre III pour les ouvertures de fissures avec les essais des deux tirants réalisés par Lorrain, présentées à la figure IV.8, montre une bonne approche dans l'allure et les valeurs des deux courbes. On remarque qu'on prenant pour le coefficient de confinement $\alpha = 0,4$ pour l'essai avec $f_c = 101$ MPa, les calculs d'ouverture des fissures de cette étude approche mieux la courbe d'essai.

De même pour les éléments de poutres (ici essais de Fouré), en estimant correctement le pourcentage d'acier dans la zone tendue c'est-à-dire définir judicieusement le « tirant » à considérer, les résultats de la méthode proposée sont sensiblement proches des résultats d'essais. Le pourcentage d'acier est ici dans le « tirant » élevé (4,26 %), la phase de propagation des fissures représente environ 1% du chargement total pour les deux poutres. Il y a lieu de noter que si le pourcentage d'acier était plus faible cette phase sera plus importante.

Pour la poutre OG3, l'espacement moyen des fissures principales mesuré est de 77 mm, inférieur à celui calculé (88 mm) avec une erreur de 22 %. La courbe de chargement en fonction des ouvertures des fissures de la présente étude approche mieux la courbe d'essai avec $\lambda = 77$ mm que $\lambda = 88$ mm. On conclut ; le calcul d'espacement moyen des fissures doit être correctement estimé (utilisation d'une relation appropriée).

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Les lois proposées dans la littérature existante ne prennent pas en considération l'ensemble des paramètres qui influent sur la contribution du béton tendu. Malgré les nombreuses études réalisées, il existe toujours certaines divergences dans les approches et conclusions des auteurs. Elles apparaissent, même, dans les codes et règlements. Les lois proposées imposent un certain pourcentage minimum d'acier et aussi un pourcentage maximum. De plus, certains paramètres comme le retrait et la reprise de bétonnage influent considérablement sur la fissuration du béton. Ceux-ci restent encore mal maîtrisés. Les modèles proposés concernant les lois fictives de l'acier en traction, ne mettent pas clairement en évidence l'adhérence acier – béton et les espacements de fissures.

Concernant la réglementation sur la fissuration, une certaine confusion règne. En effet, les recommandations sont tantôt sévères pendant une période, puis ultérieurement on revient à d'anciennes suggestions plus indulgentes (certaines formules sont abandonnées avant de revenir à leur utilisation). Pour pouvoir utiliser correctement les lois fictives du béton (ou de l'acier) en traction, il faut que la section effective du « tirant » à prendre en considération soit clairement définie.

Concernant les essais de traction sur le béton seul, même en prenant certaines précautions (une bonne rigidité des machines d'essais, centrage des éprouvettes, ...) les résultats obtenus par les chercheurs sont très dispersés. Ceci est dû au comportement relatif fragile du matériau béton. Il ressort des essais effectués sur le béton en traction que les lois fictives sont les mieux appropriées pour représenter les courbes efforts –déformations du matériau « béton armé »

L'allure des courbes adhérence – glissement (τ - g) obtenues lors des différents essais de traction alternée est sensiblement la même. Cependant, les résultats obtenus présentent une dispersion. Si, *a priori*, les valeurs caractéristiques de cette loi ne sont pas connues une autre approche est utilisée dans cette étude afin de mieux estimer les valeurs moyennes. En effet, partant de la relation appropriée donnant les espacements des fissures et de la contrainte effective du béton en traction, on estime la valeur du glissement g_1 de la loi adhérence – glissement adoptée par le comité européen de béton [CEB88].

Certains auteurs parlent d'un pourcentage ($\approx 1\%$) à partir duquel les diagrammes σ - ε_m changent complètement d'allure. Or dans les essais de Rostasy et al [ROS76] même avec des

pourcentages d'acier inférieurs à 1%, l'allure des courbes est la même que celle des essais réalisés par Espion [ESP85], où le pourcentage est supérieur 1%. Donc l'allure des courbes ne dépend pas uniquement du pourcentage d'acier mais aussi de la valeur de la contrainte de traction effective du béton σ_{cr} et du rapport des modules E_s et E_c ($n=E_s/E_c$). Dans le modèle que nous proposons, la détermination des différents paramètres fait que pour chaque matériau « béton armé », nous avons l'allure de courbe correspondante.

Partant de l'équilibre des forces dans une section droite d'un « tirant » en béton armé, la loi d'adhérence - glissement $\tau(g)$ adoptée par le comité européen de béton (CEB-FIP, 1988) est utilisée pour établir les équations gouvernant le glissement entre les armatures et le béton . Nous obtenons ainsi une équation différentielle du second ordre en g (glissement) en fonction de la profondeur d'introduction de l'effort. Sa résolution nous a permis de déduire, à chaque niveau de chargement, les variations des allongements relatifs de l'acier et du béton à l'intérieur de ce « tirant. On peut ainsi calculer les allongements relatifs moyens de ces matériaux sur une certaine distance et en général entre deux fissures consécutives.

Pour cette loi (figure II.2), on suppose qu'au-delà du glissement g_3 au droit de la fissure correspondant à l'adhérence résiduelle, il ne peut y avoir de fissures systématiques dans un tirant en béton armé.

Si la longueur du « tirant » considérée n'est pas relativement grande, la courbe contrainte -déformation moyenne ($\sigma-\varepsilon_m$) avant fissuration (phase I) n'est pas linéaire, ceci est du aux deux « longueurs d'introduction » aux extrémités.

La méthode retenue consiste à considérer que l'apparition des fissures s'effectue l'une après l'autre à mesure que l'effort de traction augmente. La résistance effective en traction du béton varie le long du tirant. Cette variation peut être exprimée par un certain pourcentage (par exemple 10 à 20%) de la contrainte effective du béton en traction. Dans cette étude, la phase de propagation des fissures (phase IIa) a été subdivisée en deux sous phases ; l'une avant d'atteindre la moitié du nombre total des fissures noté γ et l'autre à partir de la fissure n° $\gamma/2$ (ou $\gamma/2 + 1$ selon le cas). En effet, à partir de l'instant où la moitié du nombre total des fissures est dépassé, dans certaines zones du tirant la longueur d'introduction ne peut pas se développer totalement.

Pour la première fissure on prendra $\sigma_{c1} = \sigma_{cr}$ et, pour la dernière fissure, $\sigma_{c\gamma} = 1,10\sigma_{cr}$ (ou $1,20 \sigma_{cr}$). À l'apparition d'une nouvelle fissure, on détermine la contrainte dans l'acier, la nouvelle longueur d'introduction et l'allongement du tirant.

Pour la phase IIb : à ce stade, le nombre de fissures est stable. Les espacements de fissures ne permettent plus aux longueurs d'introduction de se développer, les zones homogénéisées sont nulles et $\Delta\varepsilon_m$ diminue, on parle alors ici de contrainte de traction fictive au droit de la fissure. Au-delà d'un certain niveau de contrainte (on a pris ici $2\sigma_{sy}$ avec ε_{sd} correspondant), on considère que $\Delta\varepsilon_m$ est constant. On rappelle que l'étude a été menée pour une contrainte normale au droit de la fissure inférieure à la limite élastique de l'acier σ_e .

Avec les lois proposées (relations III.36 à III.38), à chaque niveau de contrainte on peut déterminer les différents points (σ - ε_m) et les ouvertures de fissures correspondantes. La confrontation des lois proposées avec les courbes expérimentales des différents tirants testés en traction est très satisfaisante. En effet, au delà de la fissuration, le modèle décrit de façon convenable les deux phases IIa et IIb. On peut conclure que l'allure de la courbe de la loi de comportement moyen de l'acier fictif pendant la phase IIa (phase de propagation des fissures) dépend uniquement de la variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant. Si la résistance en traction était la même le long du tirant, toutes les fissures se formeraient simultanément sous l'effort N_r et on aurait donc à ce niveau un palier.

Pour les pourcentages d'acier faibles, une petite variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant entraîne une grande variation de l'allongement moyen du tirant entre l'apparition successive de deux fissures.

En utilisant le modèle proposé pour simuler le comportement du « béton armé » tendu, par la considération de l'acier fictif, le comportement des poutres OG3 ($f_c=52.5\text{MPa}$) et OG4 ($f_c=71\text{MPa}$), testées par Fouré, est bien approché. En effet, l'influence de la contribution du béton tendu se fait sentir dès le début de la fissuration et ne s'annule ou chute réellement (selon le pourcentage d'acier) qu'à la plastification des aciers.

On remarque ici en flexion simple (pour les poutres OG) que la phase IIa (phase de propagation des fissures) est relativement faible par rapport à la phase IIb. Ceci s'explique par le pourcentage d'acier relativement élevé dans la zone tendue soit 4,26%. En estimant la variation de la contrainte de traction du béton le long du tirant (ici 50cm entre les deux charges) à $\pm 10\%$, la phase IIa s'étend de la charge 10,2kN (= 2P) à 12,1 kN pour la poutre OG3 et de 12,4 kN à 14,6 kN pour la poutre OG4. Cette phase de chargement représente environ 1% du chargement total pour les deux poutres. Il y a lieu de noter que si le pourcentage d'acier était plus faible cette phase sera plus importante.

Pour toutes choses égales par ailleurs, l'allure de la courbe $\sigma(\epsilon_m)$ pendant la phase de propagation des fissures dépend essentiellement du pourcentage d'acier et de la variation de la contrainte de traction effective du béton le long du tirant. Connaissant *a priori* la valeur de cette variation, le modèle proposé permet d'établir la loi de comportement moyenne fictive de l'acier pendant la propagation des fissures.

Les résultats de la confrontation du calcul avec les résultats d'essais réalisés par d'autres auteurs sont plutôt satisfaisants et ce pour différentes caractéristiques du béton et différents pourcentages d'acier. Pour des pourcentages d'acier relativement faibles, la plastification des aciers peut être atteinte sans que la phase de propagation des fissures ne soit terminée.

En calculant les ouvertures de fissures à partir de la loi $\tau(g)$ du comité européen de béton (CEB-FIB, 1988), la valeur du glissement spécifique g_1 a une influence directe sur le calcul des ouvertures des fissures et sur l'allure de la courbe $\sigma_s(\epsilon_m)$.

La comparaison des relations théoriques établis au chapitre III pour les ouvertures de fissures avec les essais des deux tirants réalisés par Lorrain, présentées à la figure IV.8, montre une bonne approche dans l'allure et les valeurs des deux courbes.

De même pour les éléments de poutres (ici essais de Fouré), en estimant correctement le pourcentage d'acier dans la zone tendue c'est-à-dire définir judicieusement le « tirant » à considérer, les résultats de la méthode proposée sont sensiblement proches des résultats d'essais. Pour des pourcentages d'acier élevés, lors d'un chargement croissant, les valeurs des ouvertures des fissures obtenues après la stabilisation de la fissuration sont prépondérantes.

En perspective ; afin de mieux apprécier les valeurs caractéristiques de la loi adhérence – glissement, il est nécessaire de réaliser une étude expérimentale en faisant varier les paramètres suivants : type de barre, type de béton, ainsi que le pourcentage d'acier. La valeur de σ_{cr} doit être connue avec précision car elle influe considérablement sur l'allure des courbes $\sigma-\epsilon_m$.

Ces résultats théoriques peuvent être affinés en améliorant la précision de la détermination spécifique des espacements de fissures pour chaque mélange du « matériau » acier - béton. À partir de ces espacements, on peut ainsi déduire la valeur du glissement spécifique g_1 défini par les caractéristiques techniques de ces composants et bien sûr en grande partie par le pourcentage d'acier.

La transposition du « tirant en traction simple » à la poutre en flexion simple peut être effectuée si on peut prédire correctement l'espacement moyen des fissures. En effet, la section de béton effectivement tendue en flexion simple doit être clairement définie.

Les lois proposées dans cette étude supposent que la contrainte maximale de l'acier, au droit de la fissure, ne dépasse pas la limite élastique. Une suite à ce travail consisterait à étendre cette proposition au cas des aciers écrouis et des aciers de précontrainte dans la zone située entre la limite élastique de l'acier et le début de plastification (équation du cinquième degré de $\varepsilon = f(\sigma)$).

Le même travail peut être envisagé dans les cas où l'acier est plastifié, cependant, à ce stade, l'adhérence se dégrade rapidement du fait de la réduction sensible du diamètre de la barre (effet de Poisson) et le frottement acier –béton diminue considérablement.

La section du béton effectivement tendue (A_{cef}), dans cette étude, a été considérée constante le long du tirant. Une autre approche peut être faite en considérant une diffusion à 45° de cette section ($A_{cef}(x)$) sur une certaine profondeur, comme il est spécifié par Fouré [Fou05] (voir § I.5.8).

Avec les relations et les méthodes de calcul proposées dans la présente étude, des lois fictives du béton (armé), en utilisant les allongements relatifs moyens, peuvent être facilement établies.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1- Sigles couramment utilisés en abrégé

A.C.I. - American Concrete Institute

A.I.P.C. – Association Internationale des Ponts et Charpentes

A.S.C.E. – American Society of Civil Engineering

B.A.E.L. – Béton Armé aux Etats Limites

B.P.E.L. – Béton Précontraint aux Etats Limites

C.E.B. – Comité Euro -International du Béton

C.E.B.T.P. – Centre Expérimental de recherches et d'études du Bâtiment et des Travaux Publiques

D.A.F.St - Deutsch Ausschuss für Stahlbeton

E.J.E.C.E. – European Journal of Environmental and Civil Engineering

I.N.S.A. – Institut National de Sciences Appliquées

I.T.B.T.P. – Institut Technique des Bâtiments et des Travaux Publiques

RILEM - Réunion Internationale des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les matériaux et les Constructions

S.E.S. - Service d'Etudes des Structures du C.E.B.T.P.

SETRA - Service d'Etudes Techniques des routes et Autoroutes du Ministère des Transports de la République Française

2- Références

[ABR13] Abrams D.A., «Test of Bond Between Concrete and Steel», University of Illinois Bulletin, Vol. XI, No. 15, December 1913.

[ABR96] Abrishami H.H., Mitchell D., «Influence of splitting cracks on tension stiffening», ACI Structural Journal, p. 703-710, November-December 1996.

[ALD75] Aldstedt E., «Nonlinear analysis of reinforced concrete frames», report N° 75-1, NTH- Trondheim, 177pp., March 1975.

[BAL93] Balazs G.L., «Cracking analysis based on slip and bond stresses», ACI Materials Journal, vol. 90, n° 4, p. 340-348, July-August 1993.

[BAZ84] Bazant J.P., OH B.H., «Deformation of progressively cracking reinforced concrete beams», Proc. ACI, 81, 268-278, (1984).

[BEE72] Beeby A.W., «A Study of cracking in Reinforced Concrete Members Subjected to Pure Tension», Cement and Concrete Association, Report 42.468, June 1972.

- [BEE78] Beeby A.W., «Concrete in the Oceans-Cracking and Corrosion», CIRIA/UEG, Cement and Concrete Association, Departement of Energy, Technical Report No. 1, 1978.
- [BEE79] Beeby A.W., «The prediction of Crack Width in Hardened Concrete», The Structural Engineer, Vol. 57A, No. 1, January 1979.
- [BEE83] Beeby A.W., «Cracking, cover and corrosion of reinforcement», Concrete international, February 1983.
- [BEL94], Belarbi A., Hsu T. T. C., «Constitutive laws of concrete in tension an reinforced bars stiffened by concrete», ACI Structural Journal, pp. 465-474, July-August 1994.
- [BEN05] Bentz E., C., «Explaining the Riddle of Tension Stiffening Models for Shear Panel Experiments», Journal of Structural engineering, Vol. 131, N° 9, pp.1422-1425, 9/2005.
- [BER79] Bergan P. G., Holland I., «Non linear finite element analysis of concrete structures», Comp. Meth. App. Mech. Engng. , 17/18, 443-467, 1979.
- [BON75] Bony J. C., Claude G., Soretz S., «Comparaison des prescriptions relatives à la résistance d'adhérence et à la surface spécifique des nervures des barres à béton», Matériaux et constructions, N° 45, 1975.
- [BOU87] Bouafia Y., «Simulation numérique du comportement moyen, jusqu'à rupture d'une zone de poutre, Application au béton armé, béton précontraint et/ou béton de fibres», Mémoire DEA, Université PARIS 6, juin 1976.
- [BOU91] Bouafia Y., «Résistance à l'effort tranchant des poutres en béton à précontrainte extérieure – Etude expérimentale et calcul à la rupture», Thèse de doctorat, E.C.P., Novembre 1991.
- [BOU98] Bouafia Y., Fouré B., Kachi M. S., « Relation effort-ouverture des fissures dans le cas du béton armé de fibres d'acier », Edition ESKA, Annales du BTP, n° 2, Avril 1998.
- [BOU02] Bouafia Y., Kachi M. S., Fouré B., « Relation contrainte-déformation dans le cas du béton armé de fibres d'acier », Edition ESKA, Annales du BTP, n° 3, Juin 2002.
- [BRI51] Brice M.L.P., «Adhérence des barres d'acier dans le béton», Annales de l'ITBTP, série Essais et Mesures n° 19, mars - avril 1951.
- [BRI57] Brice M.L.P., «Fissuration des corps fragiles et du béton armé», Annales de l'ITBTP, série Béton et Béton armé n° 43, janvier 1957.
- [BRI64] Brice M.L.P., «Idées générales sur la fissuration du béton armé et du béton précontraint», I.T.B.T.P. N°198, juin 1964.
- [BRU87] Bruggeling A.S.G., «Control of Crack Width under Imposed Deformation», IABSE Colloquium, pp 143-148, Paris- Versailles, 1987.

- [BRU91] Bruggeling A. S. G., «An Engineering Model for Structural Concrete», IABSE Colloquium, pp 27-36, 1990.
- [CAR85] Carreira D. J., Chu K. H., «Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression», ACI Journal, Proceedings V. 82, No. 6, pp. 797-804, Nov.-Dec. 1985.
- [CAR86] Carreira D. J., Chu K. H., «Stress-Strain Relationship of reinforced Concrete in Tension», ACI Journal, Proceedings V. 83, No. 1, pp. 21-28, Jan.-Fev. 1986.
- [CEB67] Comité Euro -international du Béton, «Fissuration», Bulletin d'information, N° 61, Paris, 1967.
- [CEB73] Comité Euro -international du Béton, «Fissuration», Bulletin d'information, N° 89, Paris, 1973.
- [CEB78] Comité Euro -international du Béton, «Code modèle CEB-FIP pour les structures en béton», 3^{ème} édition des Recommandations internationales CEB-FIP, 1978.
- [CEB82] Comité Euro -international du Béton, «Bond Action and Bond Behaviour of Reinforced – State of the Art Report», Bulletin d'information, N°151, Avril 1982.
- [CEB84] Comité Euro -international du Béton, «Cracking and Deformations», Bulletin d'information, N°158E, 1984.
- [CEB85] Comité Euro -international du Béton, «Fissuration et déformation», Bulletin d'information, N°158, 1985.
- [CEB88] Comité Euro -international du Béton, «CEB-FIP MODEL CODE 1990», Bulletin d'information, N° 190 a, Juillet 1988.
- [CEB93] Comité Euro -international du Béton, «CEB-FIP MODEL CODE 1990», (Final version published by Thomas Telford Ltd., London), 465 p., 1993.
- [CEB93-1] Comité Euro -international du Béton, «Selected justification notes», Colloquium on the final draft CEB-FIP Model Code 1990, Rio de Janeiro, aout 1991, Bulletin d'information, n°217, avril 1993.
- [CHA52] Chamberlin S. J., «Spacing of Spliced Bars in Tension Pull- out Specimens», A.C.I. Journal, Vol. 24, No. 4, pp. 261-274, December 1949.
- [CHA98] Chaussin R., «Bases de la théorie de la fissuration, Fissuration et durabilité du béton», Revue Française de Génie Civil, vol. 2, n° 2, p. 243-254, 1998.
- [CHO84-1] Chow C. O., Hinton E., Abdel Rahman H. H., «Analysis of creep and shrinkage effects in reinforced concrete beams», Proc. of Int. Conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Split, Yugoslavia, 371-387, 1984.
- [CHO84-2] Chow C. O., «Nonlinéaire analysis of creep and shrinkage effects on reinforced concrete beams», M. Sc. Thesis, University of Wales, Swansea, 261pp, (1984).

- [CLA49] Clark A. P., «Bond of Concrete Reinforcing Bars», A.C.I. Journal, Vol. 21, No. 3, pp. 161-184, November 1949.
- [CLE85] Clear C. A., «The effects of autogenous healing upon the leakage of water through cracks», Technical Report 559, May 1985.
- [COE78] Coenen J., «Equations de comportement du béton armé et application au calcul des structures par éléments finis», Thèse de doctorat, Université Libre de Liège, (1978).
- [DEJ83] Dejean J., «Contribution à l'étude de l'association acier -béton- Application aux structures en béton armé à fissuration discrète», Thèse de doctorat de troisième cycle, I.N.S.A. de Lyon, France, 1983.
- [DEM79] Demidovitch B., Maron I., «Eléments de calcul numérique», Edition Mir., 1979.
- [COL87] Collins M. P., Mitchell D., «Prestressed concrete basics», Canadian Prestressed Concrete Institute, Ottawa, 1987.
- [ELI83] Eligenhaussen R., Popov E. P. and Bertero V. V., «Local bond stress-slip relationships of deformed bar under generalized excitations», Rep. No. UCB/EERC 83-23, Earthquake Engineering Research Centre, Report No. UCB/EERC – 83/23, Univ. of California at Berkeley, Berkeley, 129 pp., October 1983.
- [ESP85] Espion B., Provost M., Halleux P., «Rigidité d'une zone tendue de béton armé», Matériaux de Construction, Vol. 18, N° 105, pp. 185-191, Mai - Juin 1985.
- [ESP86] Espion B., «Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures planes. Application aux structures en béton armé», Thèse de Doctorat ès sciences, vols I et II, Université libre de Bruxelles, Belgique, 1986.
- [EUR92] ENV 1992-1-1 (norme NF P 18-711), Eurocode 2, «Calcul des structures en béton», Document d'Application Nationale, Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, AFNOR, décembre 1992.
- [EUR99] ENV 1992-2 (norme NF P 18-720), «Eurocode 2, Partie 2 : Ponts en béton», DAN – AFNOR, août 1999.
- [EVA68] Evans R. H., Marathe M. S., «Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension», Materials and Structures, 1(1), 61-64, (1968).
- [FAL83] Falkner H., «Fugenlose und wasserundurchlässige Stahlbetonbauten ohne zusätzliche Abdichtung», Vortrag am Deutschen Betontag, Deutscher Beton-Verein, 1983.
- [FAL84] Falkner H., «Fugenloser Stahlbetonbau», Beton- und Stahlbetonbau 7/1984.
- [FAR95] Farra B., «Influence de la résistance du béton et de son adhérence avec l'armature sur la fissuration», Thèse de Doctorat EPF Lausanne No. 1359, 1995.

- [FAV81] Favre R., Koprna M., Putallaz J. C., «Deformation of concrete structures. Theoretical basis for the calculation», AZIPC periodicals, Zurich, S-16/81, 1981.
- [FER54] Ferguson P.M., Turpin R.D. and Thompson J.N., «Minimum Bar Spacing as a function of Bond and Shear Strength», A.C.I Journal, Proceedings vol.50, No.10, pp. 869-888, June 1954.
- [FER66] Ferguson P.M., «Bond stress the state of the art», A.C.I Journal, vol.63, N°11, 1966.
- [FER57] Ferry-Borges JF., Arga e Lima J., «Formation of Cracks in Beams with low Percentage of Reinforcement», RILEM, Symposium on Bond an Cracks Formation in Reinforced, Vol. II, Stockolm, 1957.
- [FIE04] Fields K., Bischoff P. H., «Tension Stiffening and Cracking of High-Strength Reinforced Concrete Tension Members», ACI Structural Journal, V. 101, No. 4, July-August 2004.
- [FLÖ] Flögl H., Mang H. A., «On Tension Stiffening in Cracked Reinforced Concrete Slabs and Shells Considering Geometric and Physical Nonlinearity», Ingenieur-Archiv, 51, S. 215 – 242, 1981.
- [FOU85] Fouré B., «Béton à haute résistance- Rapport sur les essais de poteaux et poutres (OG)», Contrat SETRA-CEBTP 84 - 40 – 020, rapport interne, Avenant n°1, Index S.E.S. OG, phase D, Novembre 1985.
- [FOU02] Fouré B., «Comportement des ouvrages sous action sismique - Simulation numérique», Contrat SETRA-CTOA et CEBTP, rapport interne, Dossier R112-6-244, Août 2002.
- [FOU03], Fouré B., «Déformations limites des armatures tendues et du béton comprimé pour le calcul sismique des structures», VI^{ème} Colloque national de l'AFPS, vol. 2, p. 67-74, juillet 2003.
- [FOU05] Fouré B., «Etat de l'art relatif à la prédiction de l'endommagement par fissuration des voiles en béton armé sous sollicitations sismiques», Contrat SETRA-CTOA et CEBTP, rapport interne, Dossier R112-6-283, Septembre 2005.
- [GIL78] Gilbert R.I., Warner R.F., «Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs with Tension Stiffening», UNICIV Report No. R-167, Scool of Civil Engineering, University of New South Wales, Kensington, Australia, January 1977.
- [GIL78] Gilbert R.I., Warner R.F., «Tension stiffening in reinforced concrete slabs», A.S.C.E., Journal of Structural Division, V. 104, ST12, pp.1885-1900, Dec. 1978.
- [GIU81] Giuriani E., «Experimental investigation on the bond-slip Law of deformed bar in concrete», I.A.B.S.E, Colloquium on «advanced Mechanics of Reinforced concrete», Find Report, Delft, Holland, December, pp.121, 141, 1981.
- [GIU82] Giuriani E., « On the effective axial stiffness of a bar in cracked concrete », Bond in Concrete, Ed. Bartos, Applied Science Publishers, London, p. 107-126, 1982.

- [GRE78] Grelat A., «Calcul non linéaire des ossatures en béton armé», Thèse de Docteur ingénieur, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), France, 1978.
- [GRO81] Groot A. K., Kusters G. M. A., Monnier T., Concrete Mechanics, Part B, «Numerical modelling of bond-slip behaviour», Heron, 26(1b), 90pp, 1981.
- [GUP90] Gupta A, Maestrini S. R. «Tension-stiffness model for reinforced concrete bars», ASCE Journal of Structural Engineering, 116(3), 769–91,1990.
- [HAR81] Harrison T. A., «Early-age thermal crack control in concrete», CIRIA Report 91, London, 1981.
- [HEI69] Heilmann H. G., Hilsdorf H., Finsterwalder K., «Festigkeit und Verformung von Beton unter Zugspannungen», D.A.f.St., pp. 94, 1969.
- [HIN81] Hinton E., Abdel Rahman H. H. and Zienkiewicz O. C., «Computational models for reinforced concrete slab systems», In Advanced Mechanics of Reinforced Concrete - Final report on IABSE Colloquium held at Delft , Holland, 1981 , IABSE Publications, 303-313, 1981.
- [HOL72] Holmberg A. and Lindgren S., «Cracks in Concrete Walls», National Swedish Building Research, Document D7, 1972.
- [HUG66] Hughes B. P., Chapman G. P., «The complete stress-strain curve for concrete in tension», Bulletin de la RILEM, 30, 95-97, 1966.
- [JAC87-1] Jaccoud J.P., «Une nouvelle approche du dimensionnement des structures en béton à la fissuration», Publication IBAP n° 120, EPF Lausanne, Avril 1987.
- [JAC87-2] Jaccoud J.P., «Armature minimale pour le contrôle de la fissuration des structures en béton», Thèse de Doctorat EPF Lausanne No. 666, 1987.
- [JAN86] Janovic K., «Cracking in reinforced Concrete and Prestressed Concrete», Betonwerk + Fertigteil- technik, Heft 12, pp. 815-823, 1986.
- [JOH51] Johnson A. I., «Deformation of reinforced concrete», International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE) Publications, Vol. 11, pp. 253-290, 1951.
- [KAC97] Kachi K. S., «Calcul non linéaire jusqu'à rupture d'une section en béton armé de fibres métalliques», Thèse de magister, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, Février 1997.
- [KAC06-1] Kachi M.S., Fouré B., Bouafia Y., Muller P., «L'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint », E.J.E.C.E., (Revue européenne de génie civil), Vol. 10, n° 10, pp. 1235-1264, 2006.

- [KAC06-2] Kachi K. S., «Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure», Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, Novembre 2006.
- [KAK92] Kaku T., Yamada M., Iizuka S. and Zhang J., «A Proposal of Bond Strength Equation for R. C. Members High Strength Concrete Level», CEB-RTU International Conference (Bond in Concrete –from Research to Practice), Proceedings Topics 3-7, Riga, October 1992.
- [KWA02] Kwak H.G., Song J. Y., «Cracking analysis of RC members using polynomial strain distribution function», *Engineering Structures* 24 (2002) 455-468.
- [KIR86] Kirschner U., Collins M. P., «Investigating the behavior of reinforced concrete shell elements» Publ. No. 86-09, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Toronto, 1986.
- [KON85] König G., «Berechnen und gezieltes Begrenzen von Rissbreiten im Stahlbeton und Spannbeton», Vortrag am Deutschen Betontag, Deutscher Beton-Verin, 1985.
- [KRI85] Krips M., «Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton», Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Heft 33, Ernst und Sohn, Berlin, 1985.
- [KUL75] Kulicki J. M., Kostem C. N., «Inelastic response of prestressed concrete beams», *Mem. A.I.P.C.*, 35(II), 101-112, 1975.
- [KUP85] Kupfer H., «Kriterien der Rissbreitenbeschränkung», Vortrag am Deutschen Betontag, Deutscher Beton-Verein, 1985.
- [LAH91] Lahoud A.E. et Allaire G.J., «Etude expérimentale de l'adhérence béton-armature dans les bétons à hautes performances», Département de génie civil, Université de Sherbrooke, Rapport n° 06-91, 1991.
- [LIM86] Lim T. Y., Pramasvam P., Lee S., «Analytical model for tensile behaviour of steel fiber concrete», *J. ACI*, July – august 1987.
- [LIN75] Lin C. S., Scordelis A. C., «Nonlinear analysis of R.C shells of General Form», *A.S.C.E., Journal of Structural Division*, Vol. 101, No ST3, pp 523-538, Mar. 1975.
- [LOH 84] Lohmeyer G., «Wasserundurchlässige Betonbauwerke, Gegenmassnahmen bei Durchfeuchtungen», *Beton* 2/1984.
- [LUT67] Lutz L.A., Gergely P., «Mechanics of Bond and Slip of Deformed Bars in Concrete», *A.C.I. Journal*, vol. 64, No. 11, 1967.
- [MAN81] Mang H. A, Flögl H., «Tension-Stiffening Concept for Reinforced Concrete Surface Structures»; in: "Proceedings of the IABSE (IVBH) Colloquium on Advanced Mechanics of Reinforced Concrete", IABSE, S. 351 – 370, 1981.
- [MAR67] Martin H., «Die Haftung der bewerkung im stabil beton». *Rades -rundschau*, 1967.

- [MAR73] Martin H., «Zusammenhang zwischen Oberflächenbeschaffenheit, Verbund und Sprengwirkung von Bewehrungsstählen unter Kurzzeitbelastung», Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 228, Berlin, 1973.
- [MAR81] Martin H. et Noakowsky, «Verbundverhalten von Betonstählen – Untersuchung auf der Grundlage von Ausziehversuchen», Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 319, 1981.
- [MAZ84] Mazar J., «Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non -linéaire et à la rupture du béton de structure», Thèse de Docteur d'état, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), France, 1984.
- [MEN81] Menn C., «Gebrauchsfähigkeit von Stahlbetontragwerken», Schweizer Ingenieur und Architekt, 1-2, 1981.
- [MEN84] Menn C., «Konstruktive und bemessungstechnische Massnahmen zur Erhöhung der Dauerhaftigkeit von Stahlbeton», SIA-Dokumentation 72, 1984.
- [MEN86] Menn C., «Zwang und Mindestbewehrung», Beton und Stahlbetonbau 4, 1986.
- [MEN39], Menzel C. A., «Some Factors Influencing Results of Pull-Out Bond Tests», A.C.I. Journal, vol. 35, pp. 517-542, June 1967.
- [NOA78] Noaskowski P., «Die Bewehrung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangsbeanspruchung infolge Temperatur», Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 296, Berlin, 1978.
- [NOA81] Noaskowski P., KUPPER H., «Versteifende Mitwirkung des Betons von turmatigen Bauwerken», Beton Stahlbeton, Heft 10, 1981, P.241-246, 1981.
- [NOA88] Noaskowski P., «Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchung und Rissbreite», Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 394, Berlin, 1988.
- [OH-07] Oh B. H. and Hoon Kim S. H., «Realistic Models for Local Bond Stress-Slip of Reinforced Concrete under Repeated Loading», Journal of Structural Engineering, Vol. 133, No. 2, pp. 216-224, February 1, 2007.
- [PAD71] Padilla J. D., Robles F., «Human response to cracking in concrete slabs. Cracking, deflexion and ultimate load of concrete slab systems», Publication SP-30, ACI, 1971.
- [PAL66] Palotas L., «Beiträge zur Berechnung der Riessicherheit», Mém. ass. int. Ponts Charp., Vol.26, P.365-397, 1966.
- [PET81] Peterson P.E., «Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials», Report TVBM-1006; Lund institute of technology, Sweden, 1981.
- [PFE74] Pfefferkorn W., «Konstruktive Besonderheiten beim Geno-Haus in Stuttgart», Beton- und Stahlbetonbau 8/1974.

- [PIS80] Piskonov N., «Calcul différentiel et intégral», Tome I, édition Mir., 1980.
- [PRA90] Prakhya G. K. V., Morley C. T., «Tension stiffening and moment-curvature relations of reinforced concrete elements », ACI Journal, pp. 597-605, September-october 1990.
- [QUA80] Quast U., «Rechenansätze in Form einer Spannungsdehnungsbeziehung für das Mitwirken des Betons in der gerissenen Zugzone von Stahlbetonquerschnitten», Bericht aus dem Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der T.U Braunschweig, 64pp., 1980.
- [QUA81] Quast U., «Zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone», Beton Stahlbetonb., 76(10), 247-250, 1981.
- [RAB69] Rabich R., «Beiträge zur Berechnung der Formänderungen von Stahlbetonbauteilen unter Berücksichtigung der Rissbildung», Heft 4, P. 184-187, 1969.
- [RAO76] Rao P.S., «Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkraft», D.A.F.St., Berlin, Heft 177, 1976.
- [RAZ82] Razaqpur A. G., Ghali A., «Shear lag analysis in reinforced concrete», IABSE Colloquim on Concrete», Delft, pp.671-686, 1982.
- [RBA61] CSTB/ITBTP, «Règles pour le calcul et l'exécution des constructions en béton armé», Document Technique Unifié, Règles B.A. 1960, Documentation Technique du Bâtiment et des Travaux Public, mars 1961.
- [RBA68] Document Technique Unifié (Règles C.C.B.A. 1968), «Règles technique de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé», Société de diffusion des techniques du bâtiment et des travaux publics, mai 1968.
- [RBA80] Document technique unifié (Règles B.A.E.L. 80), «Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites», Editions Eyrolles, septembre 1980.
- [RBA83] Document technique unifié (Règles B.A.E.L. 83), «Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états -limites», Fascicule n°62, titre 1, section 1, bulletin officiel, fascicule spécial n°83-45 bis, 1983.
- [RBA91] Règles BAEL 91, «Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites», Cahiers du CSTB, mars 1992.
- [RBA99] Règles BAEL 91 modifiées 99, «Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites», Editions Eyrolles, 1992.

- [REH57] Rehm G., «The fundamental Law of Bond», Symposium on Bond and Crack Formation in Reinforced Concrete, Vol. II, Stockholm, 1957.
- [REH61] Rehm G. «Über die Grundlagen des Verbundes zwischen stahl und Beton», Translation No. 134, London, Cement and concrete Association from (Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 138, Berlin), 1961.
- [REN10] Ren F.F., Yang Z.F., Chen J.F., Chen W.W., «An Analytical Analysis of the full-range behaviour of grouted rockbolts based on a tri-linear bond slip model», Construction and Building Materials, Vol. 24, Issue 3, pp. 361-376, March 2010.
- [REZ89] Rezende Martins P.C., «Modélisation du comportement jusqu'à la rupture en flexion de poutres en béton à précontrainte extérieure ou mixte», Thèse de Doctorat, Ecole centrale des arts et Manufactures, Paris, 1989.
- [RIL78-1] RILEM, «Essai portant sur l'adhérence des armatures du béton-1- Essai par flexion», Recommandation RILEM/CEB/FIB - RC5, Matériaux et constructions, Vol. 6, N° 32, 1978.
- [RIL78-2] RILEM, «Essai portant sur l'adhérence des armatures du béton-1- Essai par traction», Recommandation RILEM/CEB/FIB – RC6, Matériaux et constructions, Vol. 6, N° 32, 1978.
- [ROB69] Robinson J. R., Morisset A., «Paramètres fondamentaux de la fissuration des tirants en béton armé», Annales de l'I.T.B.P.T.P., n° 254, Février 1969.
- [ROS76] Rostasy F.S., Koch R., Leonard F., «Zur milden Wehrung für zwang von aussen wänden aus stahlbeton», (Regarding minimum reinforcement against pressure on exterior walls of reinforced light concrete), Buletten N° 267, D.A.F.St, Berlin, 1976, pp.5-83, 1976.
- [ROS85] Rostasy F.S., «Risse infolge Zwang und Eigenspannungen», Vortrag am Deutschen Betontag, Deutscher Beton-Verin, 1985
- [ROT85] Rots J.G., Nauta P., Kusters G. M. A., Blaauwendraad J., «Smearred crack approach and fracture localization in concrete», Heron, 30(1), 48p., 1985.
- [SAA04] Saad M., « Contribution à la modélisation du comportement post-fissuration du béton armé en traction », Thèse de magister, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, Juillet 2004.
- [SAA10] Saad M., Kachi M.S., Bouafia Y., Muller P., Fouré B., «Influence du pourcentage d'acier sur le comportement du béton tendu fissuré- Calcul de l'ouverture des fissures par le biais de « l'acier fictif »», E.J.E.C.E., (Revue européenne de génie civil), Vol. 14, n° 3, pp. 303-327, 2010.
- [SAL36] Salinger R., «Acier à haute résistance dans le béton armé», Association Internationale des Ponts et Charpentes, deuxième congrès, Berlin – Munich, 1-11, octobre 1936.
- [SAY58] Saillard Y., «Etude comparative des critères d'adhérence et de fissuration suivant les théories de Brice, Efsen, Rüschi, Salinger, Wastlund», Symposium RILEM, Liège, juillet 1958

- [SCA71] Scanlon A., «Time-Dependent Deflexion Concrete Slabs», thesis presented to the University of Alberta, at Edmonton, Alberta, Canada, in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, in 1971.
- [SCA72] Scanlon A., Murray D.W., «An Analysis to Determine the Effects of Cracking in Reinforced Concrete Slabs», Proceedings of the Speciality Conference on the Finite Element Method in Civil Engineering, Canada, Engineering Institute of Canada, McGill University, Montreal, pp. 841-867, 1972.
- [SCA74] Scanlon A., Murray D.W., «Time-dependent reinforced concrete slab deflections», A.S.C.E, Journal of Structural Division, Vol 100 No ST9, pp 1911-1924, September 1974.
- [SCH85] Schiessl P., «Mindestbewehrung zur Vermeidung klaffender Risse», Institut für Betonstahl und Stahlbetonbau, München, Bericht 284, Juni 1985.
- [SCH76] Schiessl P., «Zur Frage der zulässigen Rissbreite und der erforderlichen Betondeckung im Stahlbetonbau unter besonderer Berücksichtigung der Karbonatisierung des Betons», Dafst Hesft 255, 1976
- [SHI87] Shima, H., Chou L.L., and Okamura H., «Micro and Macro Models for Bond in Reinforced Concrete», Journal of the Faculty of Engineering, the University of Tokyo, Tokyo, Japan, Vol. 39, No. 2, pp. 133-194, 1987.
- [SLA20] Slater W. A., Richart F. E. and Scofield. G. G., «Test of Bond Resistance Between Concrete and Steel», U. S. Bureau of Standards Notes, Dec. 1920.
- [SOR79]. Soretz S. et Hölsenbein H., «Influence of Rib Dimensions of Reinforcing Bars on Bond and Bendability», ACI Journal, Title No. 76-6, January 1979.
- [STR08] Stramandinolia R. S. B., La Rovereb H. L., «An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members», Engineering Structures 30, 2069-2080, 2008.
- [TAM87] Tamai S., Shima H., Izumo J., Okamura H., «average stress-strain relationship in post yield range of steel bar in concrete», Concrete Library of JSCE 11, 117-129, 1987.
- [TAS81] Tassios T.P., Yannopoulos P.J., «Etudes analytiques sur l'adhérence acier -béton et la fissuration du béton armé sous charges cycliques», Annales de L'I.T.B.T.P., N°393, série béton 242, 1981.
- [TEP79] Tepfer R., «Cracking of concrete Cover along Anchored Deformed», Magazine of Concrete Reseach, Vol. 31, No. 106, March 1979.
- [TRI86] Trinh J., «Comportement de panneaux de béton armé sollicité en traction simple dans son plan», Etude bibliographique pour l'E.D.F-S.E.P.E.N, Rapport du S.E.S. du C.E.B.T.P., France, 1986.

- [TRO80] Trost H., Cordes H., Tornahlen V., Hagen H., «La précontrainte partielle», (en Allemand), D.A.F.St heft 310, 1980.
- [UNT65] Untrauer R. E. and Henry R. L., «Influence of Normal Pressure on Bond Strength», A.C.I. Journal, Vol. 62, No. 5, pp. 577-586, May 1965.
- [VAN79] Van Greunen J., «Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete slab and panels», Ph. D. Thesis, Report UC-SESM 79-3, Department of civil Engineering, University of California, Berkeley, 275p., October 1979.
- [VAN83] Van Greunen J., Scordelis A. C., «Nonlinear analysis of prestressed concrete slabs», Journal of Structural Engineering, ASCE, 109(ST7), 1742-1759, (1983).
- [VAN90] Van der Veen C. «Cryogenic Bond Stress-Slip Relationship», Ph. D. thesis, Delft University of Technology, 1990.
- [VAN92] Vandewalle L., «Theoretical Prediction of the Ultimate Bond Strength Between a Reinforcement Bar and Concrete», CEB-RTU International Conference (Bond in Concrete –from Research to Practice), Proceedings Topics 3-7, Riga, October 1992.
- [VEC86] «The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear», ACI Journal, pp 219-231, March-April 1986.
- [VIR86] Virlogeux M., M'rad A., «Etude d'une section de poutre en élasticité non linéaire. Application au béton armé, précontraint ou section mixte», Annales de l'IPBTP, N° 444, mai 1986.
- [WAS80] Wastiels J., «Studie van het tijdsafhankelijk gedrag van beton. Analytische en numerieke toepassingen», Doctorale Thesis, Vrije Universiteit Brussel, (1980).
- [WAL81] Walraven J. C., Reinhardt H. W., Concrete Mechanics, Part A ; «Theory and experiments on the mechanical behaviour of crack in plain and reinforced subjected to shear loading», Heron, 26(1a), 68pp., 1981.
- [WAL97] Walker P. R., Batayaneh M. K., Regan P. E., «Bond strength tests on deformed reinforcement in normal weight concrete», Materials and Structures, Vol. 30, pp. 424-429, August-September 1997.
- [WAT45] Watstein D., «Distribution of Bond Stress in Concrete Pull-Out Specimens», A.C.I. Journal, vol. 18, No. 9, pp. 1041-1052, May 1947.
- [WIL86] Williams A., «Tests on large reinforced concrete elements subjected to direct tension», Cement and Concrete Association, Technical Report 562, April 1986.
- [YAN84] Yankelevsky D.Z., «A new finite element for bond-slip analysis», Journal of the Structural Engineering Division ASCE, Vol. 11, No. 7, pp. 1533-42, 1984.

- [YAN88] Yankelevsky D. Z., Jabareen M., Abutbul A. D., «On-dimensional analysis of tension stiffening in reinforced concrete with discrete cracks», *Engineering Structures* 30, 206-207, 2008.
- [YAN97] Yankelevsky D.Z., «A two phase one dimensional model for steel concrete interaction», *Computers & Structures*, Vol. 65, No. 6, pp. 781–94, 1997.
- [YAN08] Yankelevsky D.Z., «One-dimensional analysis of tension stiffening in reinforced concrete with discrete cracks», *Engineering Structures*, No. 30, pp. 206–217, 2008.
- [YAN88a] Yang S., Chen J., «Bond slip and crack width calculations of tension members», *ACI Materials Journal*, n° 85-S39, p. 414-422, July-August 1988.
- [ZHA91] Zhan Z., «Contribution au dimensionnement des pieux en béton armé des fibres», Thèse de doctorat, Université d'Orléans, France, 1991.
- [ZHE87] Zhen-Hai G. and Xiu-Qin Z., «Investigation of complete stress-deformation curves for concrete in tension», *ACI Materiel Journal*, July – August, 1987.
- [ZHI92] Zhiming T. and ZhimanY., «Bond Behaviour of Deformed Bars in High Strength Concrete», *CEB-RTU International Conference (Bond in Concrete –from Research to Practice)*, Proceedings Topics 3-7, Riga, October 1992.

ANNEXE A

ETABLISSEMENT DES EQUATIONS GOUVERNANT LE GLISSEMENT, L'ADHERENCE ACIER – BETON ET LES CONTRAINTES DANS UN TIRANT EN BETON ARME

A.1. Hypothèses et équation différentielle gouvernant le glissement g

A.1.1. Hypothèses

Soit un « tirant » de longueur L composé d'une barre d'acier (de section A_s) enrobée de béton (figure A1) sollicité par un effort de traction N_t . Tout au long du chargement, on suppose qu'il n'y a ni fissuration du béton et ni plastification de l'armature. On suppose la longueur L suffisante afin de décrire toutes les phases de la loi (relation A1 et figure A2) adhérence- glissement (τ - g) proposée par le CEB code modèle 1990 [CEB88].

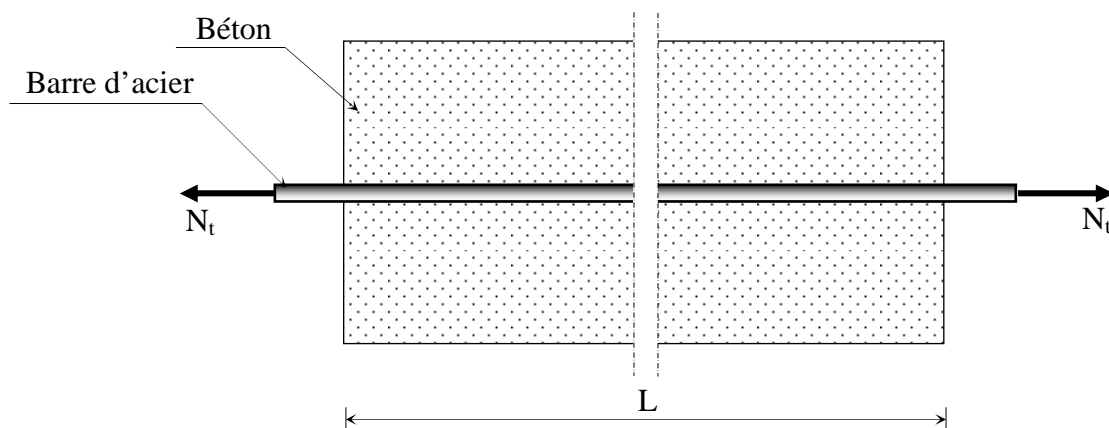


Fig. A1. « Tirant » en béton armé de longueur L soumis à un effort de traction

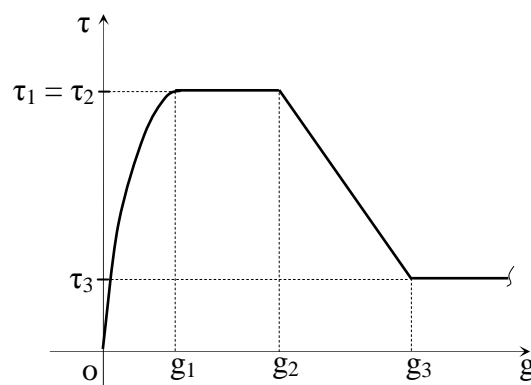


Fig. A2. Loi τ - g proposée au comité européen de béton [CEB88]

$$\left. \begin{aligned}
 \tau &= \tau_1 \left(\frac{g}{g_1} \right)^\alpha & \text{si } 0 \leq g \leq g_1 & \quad (A1a) \\
 \tau &= \tau_1 & \text{si } g_1 \leq g \leq g_2 & \quad (A1b) \\
 \tau &= \tau_1 - (\tau_1 - \tau_3) \cdot \frac{g - g_2}{g_3 - g_2} & \text{si } g_2 \leq g \leq g_3 & \quad (A1c) \\
 \tau &= \tau_3 & \text{si } g > g_3 & \quad (A1d)
 \end{aligned} \right\} \quad (A1)$$

La valeur de α est comprise entre 0,25 et 0,40, selon le confinement du béton.

La section de béton effective entourant la barre et intervenant dans la liaison acier-béton est notée B . Cette section est supposée constante tout au long du chargement.

On utilise l'indice c pour le béton et l'indice s pour l'acier.

Sous l'action d'un effort normal N_t (figure A3) de traction croissant, dont la droite d'action passe par le centre de gravité de la section de béton et de l'armature, la barre d'acier s'allonge de u_s et le béton de u_c (O vient en O' et O_1 en O_1').

On considère le repère $x'x$, ayant son origine en O , pour mesurer les différents paramètres (u_s et u_c comptés algébriquement).

- l_t : longueur d'introduction totale (varie selon le niveau de chargement).

- l_0 : la longueur l_0 représente la zone perturbée définie par certains auteurs [YAN88a]

et elle est prise ici égale à δl_t ($\delta = 0,10 \sim 0,20$). On suppose la contrainte

d'adhérence nulle le long de cette longueur l_0 .

- $(l_t - l_0)$ représente la longueur d'introduction effective.

Les valeurs des allongements de l'acier (u_s) et du béton (u_c) sont négligeables devant les longueurs l_0 , l_t et $(l_t - l_0)$.

Le rapport entre l'effort normal appliqué au tirant et la section d'acier au niveau de l'encastrement (point O) noté σ_{sf} est égal à : N_t / A_s .

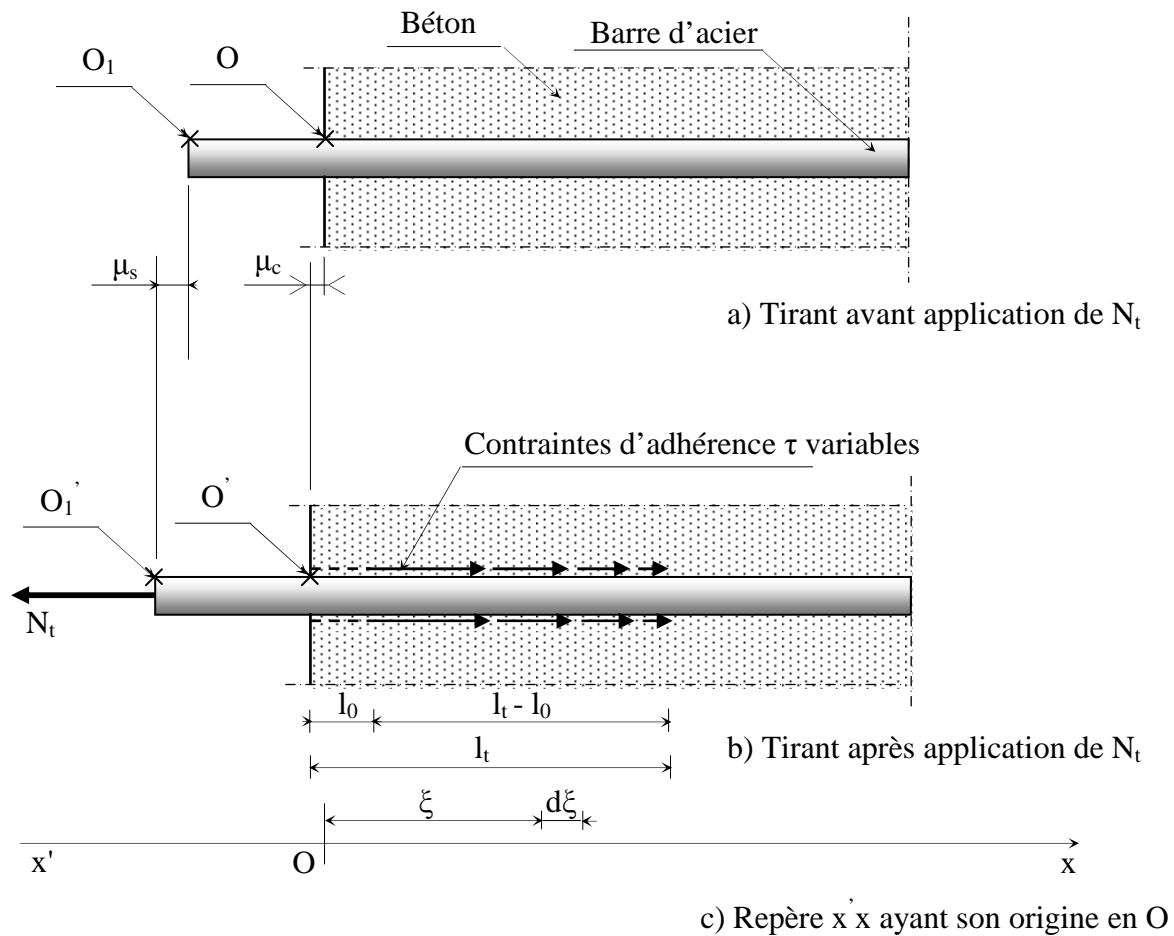


Fig. A.3. Variation de τ et g dans un tirant en béton armé sous un effort de traction N_t croissant

A.1.2. Equation différentielle gouvernant le glissement g

Le glissement à une distance x est exprimé par : $g(x) = u_c(x) - u_s(x)$. Comme u_c et u_s sont négatifs et $|u_s| > |u_c|$, alors g est positif.

a) Sections droites situées dans l'intervalle $[l_t ; (L - l_t)]$

A une distance x , comprise entre la longueur d'introduction l_t et la distance $(L - l_t)$, le comportement du tirant est homogène, le béton et l'acier résistent ensemble pour équilibrer l'effort N_t . On note la longueur de cet intervalle L_h et l'allongement correspondant ΔL_h . Il y a compatibilité des déformations ($u_s = u_c$) et le glissement entre l'armature et le béton est nul. On peut écrire, dans une section droite quelconque de cet intervalle du tirant:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c.$$

Les contraintes normales dans l'acier et le béton s'écrivent respectivement:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s, \quad \sigma_c = E_c \varepsilon_c.$$

Ici, on suppose que la contrainte σ_c dans la section effective de béton est uniforme.

$$N_t = \sigma_c (B - A_s) + \sigma_s A_s$$

$$N_t = \sigma_c (B - A_s) + n \sigma_c A_s \quad (A2)$$

où $n = E_s/E_c$ et A_s est l'aire de la section droite de la barre (ou la section totale des armatures du tirant).

Dans le cas du matériau béton armé, la section A_s des aciers est en général négligeable devant la section du béton. On utilise $(B - A_s)$ au lieu de B afin de généraliser pour d'autres composites.

En divisant par A_s les deux termes de la relation (A2), on a :

$$\frac{N_t}{A_s} = \sigma_{sf} = \sigma_c \left(n + \frac{1-\rho}{\rho} \right) = \sigma_s \left(1 + \frac{1-\rho}{n\rho} \right) \quad \text{où} \quad \rho = \frac{A_s}{B}.$$

Pour une longueur L *relativement grande* (sinon il faut considérer L_h) on peut écrire :

$$\frac{\Delta L_h}{L_h} \approx \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma_c}{E_c} = \varepsilon_c = \varepsilon_s \quad \text{et,}$$

$$\frac{N_t}{A_s} = \sigma_{sf} = \frac{\Delta L}{L} E_s \left(1 + \frac{1-\rho}{n\rho} \right) \quad \text{aussi,}$$

$$\frac{N_t}{A_s} = \sigma_{sf} = \frac{\Delta L}{L} \frac{E_s}{(1-\rho_1)} \quad \text{où} \quad \bar{\rho} = \frac{1}{1 + \frac{n\rho}{1-\rho}}.$$

Donc, pour l'intervalle $[l_t ; L - l_t]$ le diagramme fictif de l'acier peut s'écrire avec la relation (A4). On déduit ainsi le module fictif E_f .

$$\frac{N_t}{A_s} = \sigma_{sf} = \frac{\Delta L}{L} E_f \quad (A4)$$

$$\text{avec} \quad E_f = \frac{E_s}{(1 - \rho_l)}$$

b) Sections droites situées dans l'intervalle [0 ; l_t]

Par symétrie, on a le même état dans l'intervalle [(L - l_t) ; L].

En s'éloignant de la fissure, la contrainte normale dans l'acier σ_s diminue du fait de l'adhérence acier- béton (Figure A3). l'équilibre de la portion [0 ; x] entraîne :

$$\sigma_s(x) = \sigma_{sf} - \int_0^x \frac{p}{A_s} \tau(\xi) d\xi, \quad (\text{A5})$$

où p est le périmètre de la section droite de la barre (ou la somme des périmètres utiles des armatures du tirant).

En élasticité linéaire, $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$ et $\varepsilon_s < \varepsilon_e$ (ε_e désigne allongement relatif au seuil élastique de l'acier). On a alors :

$$\varepsilon_s(x) = \varepsilon_{sf} - \frac{p}{A_s E_s} \int_0^x \tau(\xi) d\xi, \quad (\text{A6})$$

$$\frac{d\varepsilon_s}{dx} = -\frac{p}{A_s E_s} \tau(x). \quad (\text{A7})$$

Le glissement à une distance x est exprimé par :

$$g(x) = u_c(x) - u_s(x) \quad (\text{A8a})$$

La première et la deuxième dérivée de g par rapport à x s'écrivent respectivement :

$$\frac{dg}{dx} = \frac{du_c}{dx} - \frac{du_s}{dx} = \varepsilon_c - \varepsilon_s, \quad (\text{A8b})$$

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{d\varepsilon_c}{dx} - \frac{d\varepsilon_s}{dx}. \quad (\text{A8c})$$

À une distance x de la fissure, par le jeu de l'adhérence, les contraintes « diminuées » de l'acier se transmettent au béton. On a :

$$\sigma_c(x) (B - A_s) = p \int_0^x \tau(\xi) d\xi. \quad (\text{A9})$$

Entre deux fissures, le béton, étant toujours intact sur la longueur l_t , on a :

$$E_c \varepsilon_c(x) = \frac{p}{B - A_s} \int_0^x \tau(\xi) d\xi,$$

$$\varepsilon_c(x) = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \int_0^x \tau(\xi) d\xi \text{ et}$$

$$\frac{d\varepsilon_c(x)}{dx} = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \tau(x). \quad (\text{A10})$$

En remplaçant (A10) et (A7) dans (A8c), on peut écrire :

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \tau(x) - \frac{p}{A_s E_s} \tau(x),$$

et l'équation différentielle gouvernant le glissement se traduit par la relation (A11).

$$\frac{d^2g}{dx^2} - \frac{p}{A_s E_s \bar{\rho}} \tau(x) = 0. \quad (\text{A11})$$

A.2. Détermination des expressions des différents paramètres sur l'intervalle $[0 ; l_t]$

On recherche dans ce paragraphe les expressions des différents paramètres (adhérence, glissement, allongement de l'acier, allongement du béton...) en fonction de x le long de la longueur d'introduction l_t .

La profondeur l_t dépend de l'intensité de l'effort de traction N_t .

A.2.1. Détermination des différents paramètres pour $g(l_0) < g_1$

Dans ce cas la longueur totale l_t est égale à $(l_0 + l_1)$ et peut être noté l_{t1} (figure A4). La longueur l_1 représente la distance entre le glissement $g(l_0)$ et $g(l_t) = 0$.

A.2.1.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Dans ce domaine, on suppose une adhérence nulle ($\tau(x) = 0$) et l'équation différentielle (A11) admet pour solution :

$$g(x) = C_1 x + C_2.$$

Avec les conditions aux limites et l'équation (A8b) :

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{du_s}{dx} = -\varepsilon_{sf} = C_1$$

La fonction $g(x)$ étant continue, la constante C_2 est déterminée par la valeur de g en l_0 selon l'expression de ce glissement sur l'intervalle $[l_0 ; l_t]$. On peut donc écrire :

$$g(l_0) = -\varepsilon_{sf} l_0 + C_2 \quad \text{et} \quad C_2 = g(l_0) + \varepsilon_{sf} l_0,$$

$$g(x) = -\varepsilon_{sf} x + g(l_0) + \varepsilon_{sf} l_0. \quad (\text{A12})$$

Cette variation linéaire $g(x)$ est représentée figure A4b dans l'intervalle $[0 ; l_0]$. L'allongement relatif de l'acier est constant :

$$\varepsilon_s(x) = -\varepsilon_{sf}.$$

A.2.1.2. Domaine $l_0 \leq x \leq l_t$

a) Variation du glissement et de l'adhérence le long de la longueur d'introduction l_t

Pour des valeurs de ε_{sf} relativement faible, le glissement en $x = l_0$ reste inférieur à g_1 , dans ce cas, la contrainte d'adhérence τ est exprimée en fonction du glissement par la relation (A1a). En remplaçant cette relation dans (A11) qui s'écrit alors :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - \frac{p}{A_s E_s} \tau_1 \left(\frac{g}{g_1} \right)^\alpha = 0.$$

$$\text{En posant} \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{k_1 p}{A_s E_s \rho_1}} \quad \text{et} \quad k_1 = \frac{\tau_1}{g_1^\alpha} \quad \text{on peut écrire :}$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - \beta_1^2 g^\alpha = 0. \quad (\text{A13})$$

Sachant que le glissement g est nul pour $x = (l_0 + l_1)$, la solution de cette équation (A13) peut s'écrire [BAL93], [CHA98] :

$$g(x) = \theta^{1/(1-\alpha)} (l_0 + l_1 - x)^{2/(1-\alpha)}, \quad (\text{A14a})$$

$$\text{avec } \theta = \frac{\beta_1^2 (1-\alpha)^2}{2(1+\alpha)}.$$

En remplaçant $(l_0 + l_1)$ par l_t , on peut écrire :

$$g(x) = \theta^{1/(1-\alpha)} (l_t - x)^{2/(1-\alpha)}, \quad (\text{A14b})$$

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{2}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} (l_t - x)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \quad (\text{A14c})$$

L'allure de la courbe du glissement $g(x)$, le long de l'intervalle $[l_0 ; l_t]$, est tracée figure A4b en remarquant :

- avec la relation (A14c), sachant que :

$$\theta_1 > 0 \text{ et } \alpha < 1 \text{ alors } \frac{dg}{dx} < 0 \text{ quelque soit } x, \text{ on déduit } g(x) \text{ monotone décroissante,}$$

- avec la seconde dérivée (relation A13),

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \beta_1^2 g^\alpha > 0 \text{ quelque soit } x, \text{ alors la concavité de la courbe } g(x) \text{ est dirigée vers}$$

les glissements positifs,

- pour $\alpha = 1/3$, la variation du glissement est cubique.

Le glissement pour $x = l_0$ a pour expression :

$$g(l_0) = \theta^{1/(1-\alpha)} l_1^{2/(1-\alpha)}. \quad (\text{A15})$$

On a également avec la relation (A8b) et (A14c):

$$\left(\frac{dg}{dx} \right)_{x=l_0} = -\frac{2}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} (l_t - l_0)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} = -\varepsilon_{sf}.$$

Donc on peut exprimer la déformation relative pour $x = l_0$ en fonction de la longueur d'introduction l_t :

$$\varepsilon_{sf} = \frac{2}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} (l_t - l_0)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}, \quad (\text{A16a})$$

$$\varepsilon_{sf} = \frac{2}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} l_1^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}. \quad (\text{A16b})$$

Inversement, on peut écrire la valeur de la longueur d'introduction effective l_1 en fonction de la déformation relative ε_{sf} .

$$l_1 = \left[\frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{\theta^{1/(1-\alpha)}} \varepsilon_{sf} \right]^{(1-\alpha)/(1+\alpha)} \quad (\text{A17a})$$

Dans cet intervalle, avec $l_1 = l_t - l_0 = l_t (1 - \delta)$, on peut exprimer aussi la valeur de la longueur d'introduction totale $l_t (= l_{t1})$:

$$l_t = l_{t1} = \frac{1}{1-\delta} \left[\frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{\theta^{1/(1-\alpha)}} \varepsilon_{sf} \right]^{(1-\alpha)/(1+\alpha)} \quad (\text{A17b})$$

La variation de la contrainte d'adhérence le long du tirant entre l_0 et $(l_1 + l_0)$, en considérant les relations (A1a) et (14b), s'écrit :

$$\tau(X) = k \theta^{\alpha/(1-\alpha)} [l_1 - X]^{2\alpha/(1-\alpha)}, \quad (\text{A18})$$

L'allure de la courbe $\tau(X)$, le long de l'intervalle $[l_0 ; l_1]$, est tracée figure A4a en remarquant :

- la première et la deuxième dérivée de $\tau(X)$ s'écrivent successivement :

$$\frac{d\tau}{dX} = - \frac{2\alpha}{1-\alpha} k \theta^{\alpha/(1-\alpha)} [l_1 - X]^{(3\alpha-1)/(1-\alpha)},$$

$$\frac{d^2\tau}{dX^2} = \frac{3\alpha-1}{1-\alpha} \frac{2\alpha}{1-\alpha} k \theta^{\alpha/(1-\alpha)} [l_1 - X]^{(4\alpha-2)/(1-\alpha)},$$

- $\frac{d\tau}{dX} < 0$ quelque soit X , donc $\tau(X)$ est monotone décroissante,

- Sachant que $\alpha < 1$, le signe de $\left(\frac{d^2\tau}{dX^2}\right)$ dépend du signe du terme $(3\alpha-1)$;

- si $\alpha = 1/3$: la variation de la contrainte d'adhérence le long de l'intervalle

$[l_0 ; l_1]$ est linéaire (figure A4a).

- $\alpha < 1/3$: $\left(\frac{d^2\tau}{dX^2}\right) < 0$ quelque soit x , alors la concavité de la courbe est dirigée

vers les valeurs négatives de τ comme représentée figure A4a.

- $\alpha > 1/3$: $(\frac{d^2\tau}{dX^2}) > 0$ quelque soit X, alors la concavité de la courbe est dirigée

vers les valeurs positifs de τ comme représentée en pointillés figure

A4a.

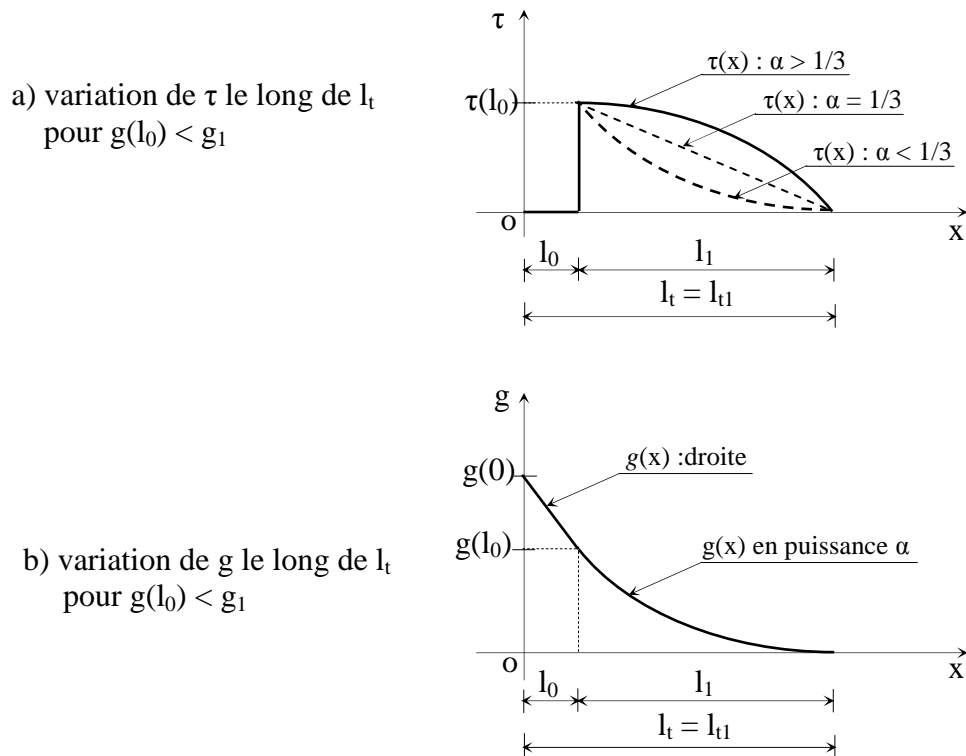


Fig. A4. Variation de τ (adhérence) et du glissement g le long de la longueur l_t pour $g(l_0) < g_1$

b) Variation de l'allongement relatif de l'acier et du béton le long de l_1

Connaissant l'expression de $\tau(x)$ le long de l_1 , l'allongement relatif de l'acier se déduit de la relation (A6) :

$$\varepsilon_s(x) = \varepsilon_{sf} - \frac{P}{A_s E_s} \int_{l_0}^x k \theta^{\alpha/(1-\alpha)} [l_t - \xi]^{2\alpha/(1-\alpha)} d\xi,$$

en effectuant le changement de variable $X = (x - l_0)$ et en associant ξ et $d\xi$ à ce nouveau repère, on peut écrire :

$$\varepsilon_s(x) = \varepsilon_{sf} - \frac{kp}{A_s E_s} \theta_1^{\alpha/(1-\alpha)} \int_0^x [l_1 - \xi]^{2\alpha/(1-\alpha)} d\xi,$$

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{kp}{A_s E_s} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \theta_1^{\alpha/(1-\alpha)} \left[(l_1 - \xi)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \right]_0^X, \text{ et après intégration on a :}$$

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{kp}{A_s E_s} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \theta_1^{\alpha/(1-\alpha)} \left\{ l_1^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} - [l_1 - X]^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \right\}. \quad (\text{A19a})$$

La première et la second dérivée de $\varepsilon_s(X)$ s'écrivent successivement :

$$\frac{d\varepsilon_s(X)}{dX} = -\frac{kp}{A_s E_s} \theta_1^{\alpha/(1-\alpha)} [l_1 - X]^{2\alpha/(1-\alpha)},$$

$$\frac{d^2\varepsilon_s(X)}{dX^2} = \frac{kp}{A_s E_s} \frac{2\alpha}{1-\alpha} \theta_1^{\alpha/(1-\alpha)} [l_1 - X]^{(3\alpha-1)/(1-\alpha)}.$$

Sachant $\frac{d\varepsilon(X)}{dX} < 0$ et $\frac{d^2\varepsilon(X)}{dX^2} > 0$ quelque soit X, alors $\varepsilon_s(X)$ est décroissante avec une concavité dirigée vers les allongements relatifs positifs $\varepsilon_s(X)$ sur l'intervalle $[l_0 ; l_1]$.

De même, la variation de l'allongement relatif du béton le long de la longueur l_1 s'écrit :

$$\varepsilon_c(X) = \frac{kp}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \theta_1^{\alpha/(1-\alpha)} \left\{ l_1^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} - [l_1 - X]^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \right\} \quad (\text{A19b})$$

La première et la second dérivée de $\varepsilon_c(X)$ étant de signe contraire que la première et la second dérivée de $\varepsilon_s(X)$, la variation de l'allongement relatif du béton sur l'intervalle $[l_0 ; l_1]$ est croissante avec une concavité dirigée vers les $\varepsilon_c(X)$ négatifs.

L'allure des diagrammes de $\varepsilon_s(X)$ et $\varepsilon_c(X)$ pour $g(l_0) < g_1$, le long de la longueur d'introduction l_t , est illustrée figure A5.

On peut calculer l'allongement moyen de l'acier sur la longueur l_1 (noté ε_{sm1}) à l'aide des relations :

$$\varepsilon_{sm1} = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \varepsilon_s(X) dX,$$

$$\varepsilon_{sm1} = \varepsilon_{sf} - \frac{kp}{A_s E_s} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \beta_1^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \left\{ l_1^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} - [l_1 - X]^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\} dX,$$

$$\varepsilon_{sm1} = \varepsilon_{sf} - \frac{kp}{A_s E_s} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \theta^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \frac{1}{l_1} \left\{ l_1 l_1^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} - \frac{1-\alpha}{2} l_1^{\frac{2}{(1-\alpha)}} \right\},$$

$$\varepsilon_{sm1} = \varepsilon_{sf} - \frac{kp}{A_s E_s} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \theta^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \left\{ l_1^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} - \frac{1-\alpha}{2} l_1^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \right\},$$

et après simplification, il vient :

$$\varepsilon_{sm1} = \varepsilon_{sf} - \frac{kp}{A_s E_s} \frac{1-\alpha}{2} \theta^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} l_1^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \quad (A20)$$

On peut déduire, en utilisant la relation (A20), l'allongement moyen du béton sur la longueur l_1 (noté ε_{cm1}) en comparant les relations (A19a) et (A19b).

$$\varepsilon_{cm1} = \frac{kp}{A_s E_s} \frac{1-\alpha}{2} \frac{n\rho}{1-\rho} \theta^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} l_1^{\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}} \quad (A21)$$

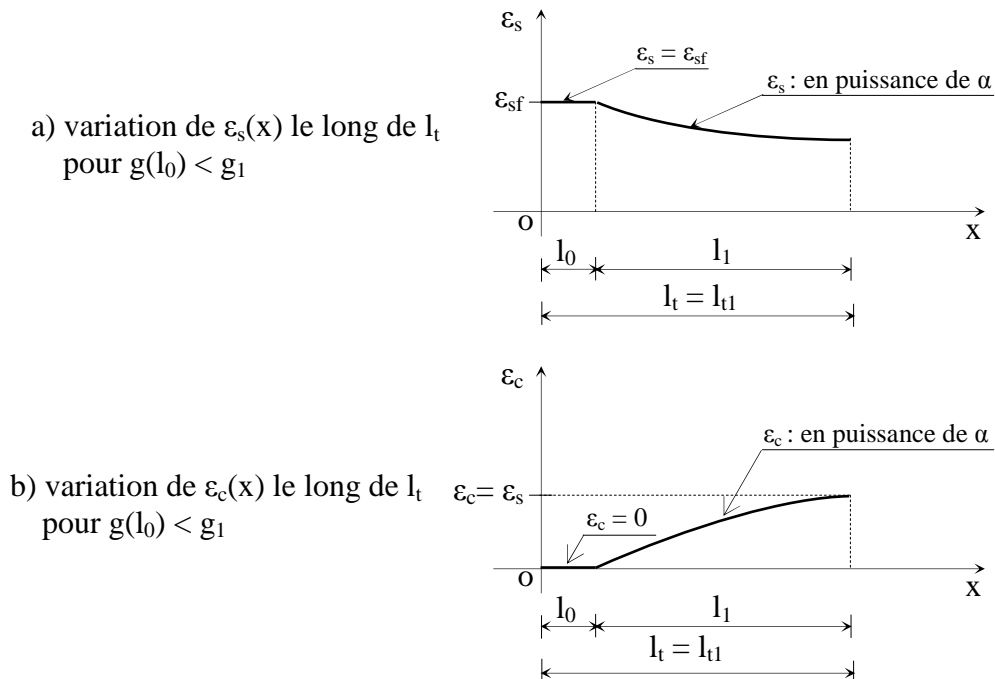


Fig. A5. Variation des allongements relatifs ε_s et ε_c le long de la longueur l_t quand $g(l_0) < g_1$

A.2.2. Détermination des différents paramètres pour $g(l_0) = g_1$

Dans ce cas, le glissement a atteint son pic g_1 au point d'abscisse $x = l_0$ et on a comme le montre la figure A6 :

$$\tau(l_0) = \tau_1,$$

la longueur d'introduction effective l_1 est notée l_{g1} ,

la longueur d'introduction totale est notée l_{tg1} ($= l_0 + l_{g1}$),

l'allongement relatif de l'acier, dans l'intervalle $[0 ; l_0]$ est noté ε_{sfl} .

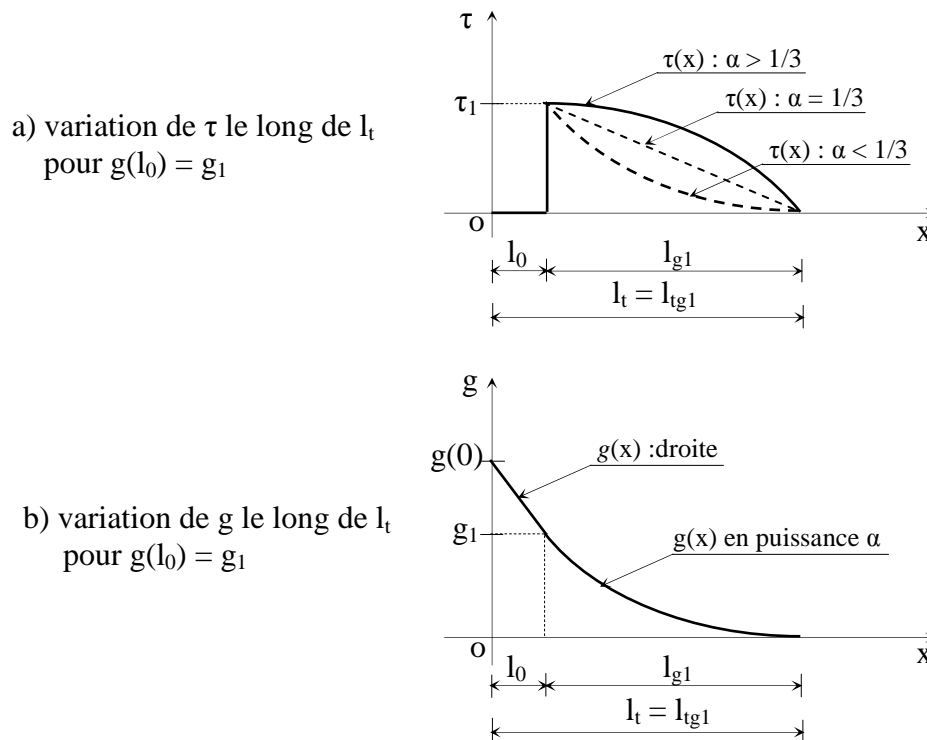


Fig. A6. Variation de τ (adhérence) et du glissement g pour $g(l_0) = g_1$

A.2.2.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Quand $g(l_0) = g_1$, l'expression (A12) du glissement s'écrit :

$$g(x) = -\varepsilon_{sfl} x + g_1 + \varepsilon_{sfl} l_0, \quad (\text{A22})$$

et prend la valeur pour $x = 0$: $g(0) = g_1 + \varepsilon_{sfl} l_0$

A.2.2.2. Domaine $l_0 \leq x \leq l_{tg1}$

Le glissement g_1 a pour expression :

$$g_1 = g_{l_{g1}} = \theta^{1/(1-\alpha)} l_{g1}^{2/(1-\alpha)}. \quad (A23)$$

L'expression (A24) exprime l'allongement relatif ε_{sf1} de l'armature,

$$\varepsilon_{sf1} = \frac{2}{1-\alpha} \theta^{1/(1-\alpha)} l_{g1}^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}, \quad (A24)$$

et inversement on a :

$$l_{g1} = \left[\frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{\theta^{1/(1-\alpha)}} \varepsilon_{sf1} \right]^{(1-\alpha)/(1+\alpha)}. \quad (A25a)$$

La relation (A17b) s'écrit à ce stade :

$$l_t = l_{tg1} = \frac{1}{1-\delta} \left[\frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{\theta^{1/(1-\alpha)}} \varepsilon_{sf1} \right]^{(1-\alpha)/(1+\alpha)} \quad (A25b)$$

Pour exprimer les contraintes moyennes de l'acier (ε_{sm1}) et du béton (ε_{cm1}) sur la longueur l_{g1} , il suffit de remplacer dans les relations (A20) et (A21), l_1 par l_{g1} et ε_{sf} par ε_{sf1} .

A.2.3. Détermination des différents paramètres pour ($g_1 < g < g_2$)

A.2.3.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Le glissement $g(x)$ est donné par l'expression (A12).

A.2.3.2. Domaine $l_0 \leq x \leq l_2$

La longueur l_2 représente la distance entre le glissement $g(l_0)$ et g_1 , c'est-à-dire $l_t = l_{t2} = l_0 + l_2 + l_{g1}$ (voir figure A7).

a) Variation du glissement le long de la longueur d'introduction l_2

Quand le glissement est compris entre les deux valeurs g_1 et g_2 , la contrainte d'adhérence est supposée constante égale à la valeur τ_1 .

En effectuant le changement de variable $X = (x - l_0)$, l'équation différentielle (A11) s'écrit :

$$\frac{d^2g}{dX^2} - \frac{p}{A_s E_s \bar{\rho}} \tau_1 = 0,$$

et admet pour solution :

$$g(X) = \beta_2 \frac{X^2}{2} + C_3 X + C_4,$$

$$\text{avec } \beta_2 = \frac{p \tau_1}{A_s E_s \bar{\rho}}.$$

Les valeurs des constantes C_3 et C_4 sont déterminées avec les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{dg}{dX} = \beta_2 X + C_3,$$

$$\frac{dg}{dX}_{X=0} = -\varepsilon_{sf} = C_3,$$

$$g(l_2) = g_1 = \beta_2 \frac{l_2^2}{2} - \varepsilon_{sf} l_2 + C_4 \text{ et}$$

$$C_4 = g_1 + \varepsilon_{sf} l_2 - \beta_2 \frac{l_2^2}{2}.$$

L'expression de $g(X)$ s'écrit alors :

$$g(X) = \beta_2 \frac{X^2}{2} - \varepsilon_{sf} X + g_1 + \varepsilon_{sf} l_2 - \beta_2 \frac{l_2^2}{2}. \quad (\text{A26})$$

La relation (A26) représente une fonction du second degré (variation parabolique de g). La seconde dérivée ($\frac{d^2g}{dx^2} = \beta_2$) est positive donc la concavité est dirigée vers les glissement positifs.

La variation de la contrainte d'adhérence et la variation du glissement pour $g(l_0)$ compris entre les valeurs g_1 et g_2 , le long de l_0 , sont représentées figure A7.

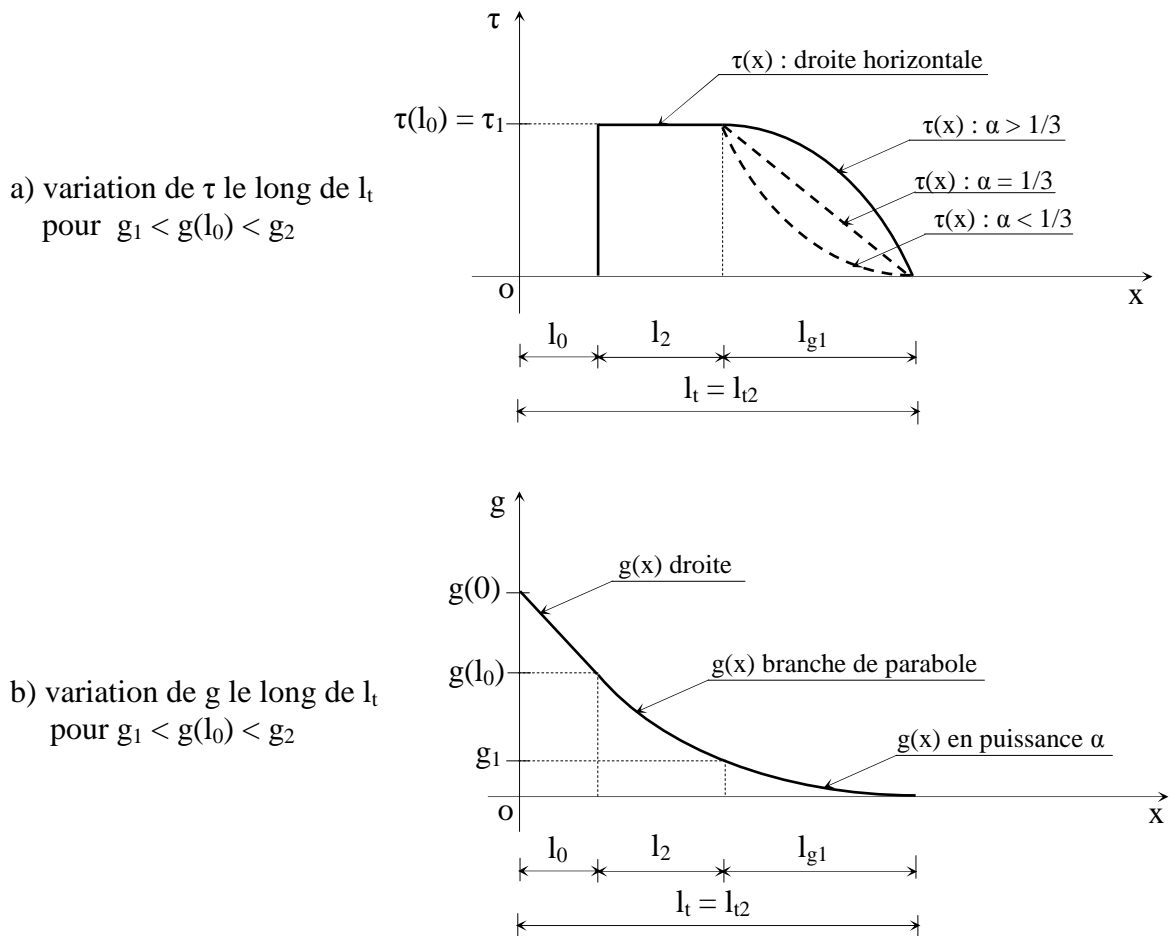


Fig. A7. Variation de τ (adhérence) et du glissement g pour $(g_1 < g(0) < g_2)$

b) Variation de l'allongement relatif de l'acier et du béton le long de l_2

La variation de l'allongement relatif de l'armature sur la distance l_2 où la contrainte d'adhérence est constante et égale à τ_1 s'écrit :

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{p}{A_s E_s} \int_0^X \tau_1 d\xi,$$

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{p \tau_1}{A_s E_s} X. \quad (\text{A27})$$

L'allongement relatif moyen de l'acier sur la longueur l_2 est :

$$\varepsilon_{sm2} = \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} \varepsilon_s(X) dX,$$

$$\varepsilon_{sm2} = \varepsilon_{sf} - \frac{1}{l_2} \left[\frac{p \tau_1}{A_s E_s} \frac{X^2}{2} \right]_0^{l_2},$$

$$\varepsilon_{sm2} = \varepsilon_{sf} - \frac{1}{l_2} \frac{p \tau_1}{A_s E_s} \frac{l_2}{2},$$

$$\varepsilon_{sm2} = \varepsilon_{sf} - \frac{p \tau_1}{A_s E_s} \frac{l_2}{2} \quad (A28)$$

La variation de l'allongement relatif du béton sur la distance l_2 s'écrit :

$$\varepsilon_c(X) = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \int_0^X \tau_1 d\xi,$$

$$\varepsilon_c(X) = \frac{p \tau_1}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} X. \quad (A29)$$

L'allongement relatif moyen du béton sur la longueur l_2 est :

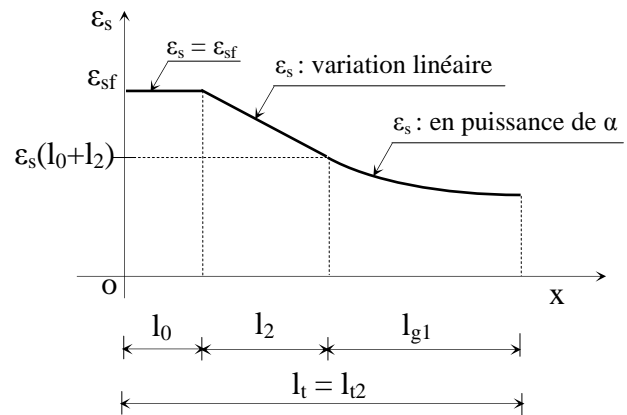
$$\varepsilon_{cm2} = \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} \varepsilon_c(X) dX$$

$$\varepsilon_{cm2} = \frac{1}{l_2} \left[\frac{p \tau_1}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \frac{X^2}{2} \right]_0^{l_2}$$

$$\varepsilon_{cm2} = \frac{p \tau_1}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \frac{l_2}{2}. \quad (A30)$$

L'allure des diagrammes de $\varepsilon_s(X)$ et $\varepsilon_c(X)$ pour $g_1 < g(l_0) < g_2$, le long de la longueur d'introduction l_t , est illustrée figure A8.

a) variation de $\varepsilon_s(x)$ le long de l_t
pour $g_1 < g(l_0) < g_2$



b) variation de $\varepsilon_c(x)$ le long de l_t
pour $g_1 < g(l_0) < g_2$

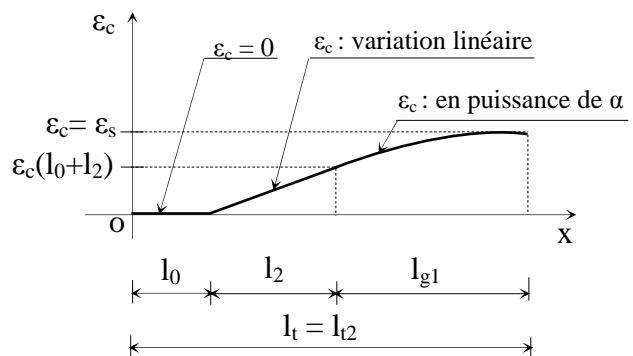


Fig. A8. Variation des allongements relatifs ε_s et ε_c le long de la longueur l_t quand $g_1 < g(l_0) < g_2$

A.2.4. Détermination des différents paramètres pour $g(l_0) = g_2$

Dans ce cas, le glissement a atteint la valeur g_2 au point d'abscisse $x = l_0$ et on a comme le montre la figure A9 :

$$\tau(l_0) = \tau_1,$$

la longueur d'introduction effective est égale $(l_{g1} + l_{g2})$,

la longueur d'introduction totale est notée l_{tg1} ($= l_0 + l_{g1} + l_{g2}$),

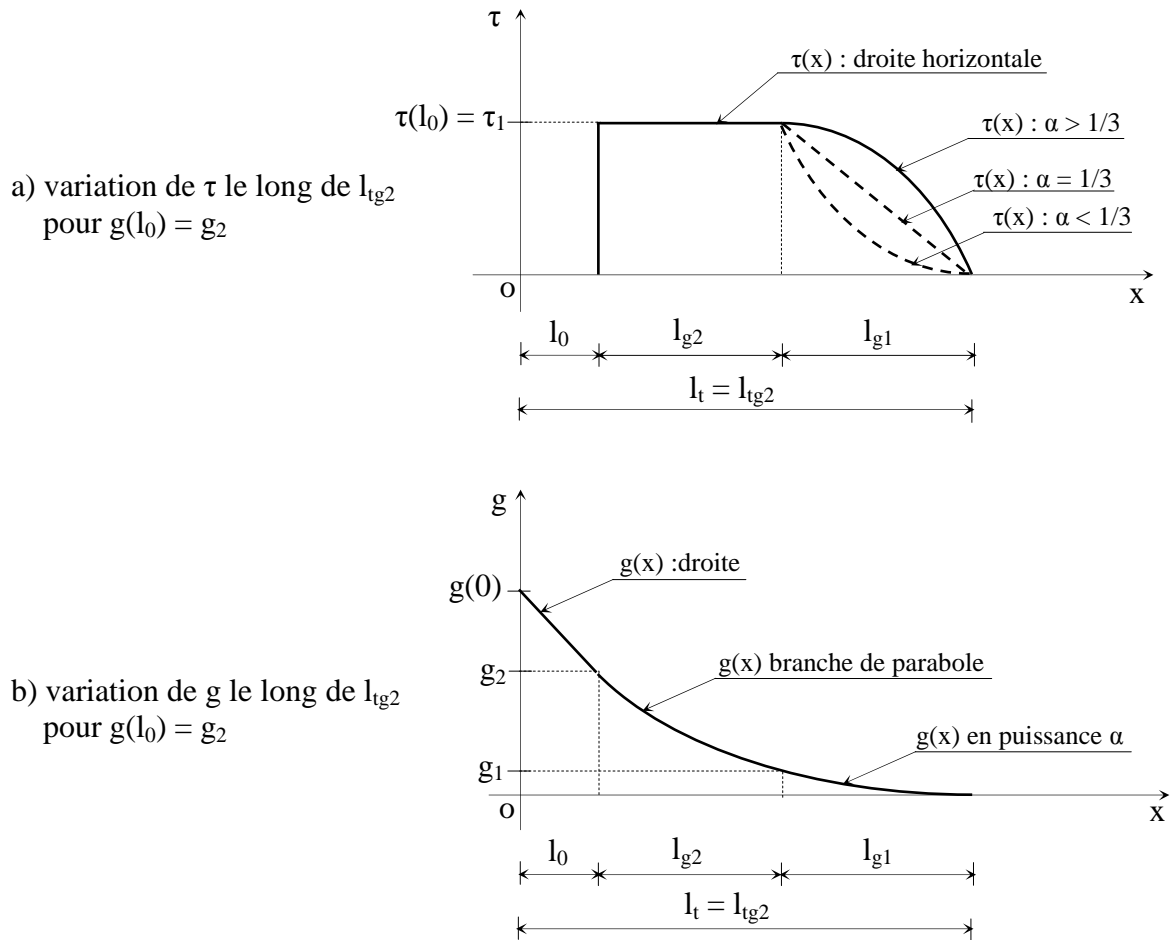
l'allongement relatif de l'acier, dans l'intervalle $[0 ; l_0]$ est noté ε_{sf2} .

A.2.4.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Quand $g(l_0) = g_2$, l'expression du glissement s'écrit :

$$g(x) = -\varepsilon_{sf2} x + g_2 + \varepsilon_{sf2} l_0, \quad (\text{A31})$$

et prend la valeur pour $x = 0$: $g(0) = g_2 + \varepsilon_{sf2} l_0$.

Fig. A9. Variation de τ (adhérence) et du glissement g pour $g(l_0) = g_2$

A.2.4.2. Domaine $l_{g1} \leq x \leq l_{tg1}$ ($0 \leq X \leq l_{g2}$)

La variation du glissement g a pour expression :

$$g(X) = \beta_2 \frac{X^2}{2} - \varepsilon_{sf2} X + g_1 + \varepsilon_{sf2} l_{g2} - \beta_2 \frac{l_{g2}^2}{2}. \quad (A32)$$

Les expressions (A33) et (A34) représentent respectivement la variation de l'allongement relatif de l'armature et l'allongement moyen de l'armature sur la longueur l_{g2} .

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf2} - \frac{p \tau_1}{A_s E_s} X, \quad (A33)$$

$$\varepsilon_{sm2} = \varepsilon_{sf2} - \frac{p \tau_1}{A_s E_s} \frac{l_{g2}}{2} \quad (A34)$$

La variation de l'allongement relatif du béton est donnée par la relation (A29) et sa valeur moyenne sur la longueur l_{g2} par l'expression (A35).

$$\varepsilon_{cm2} = \frac{p \tau_1}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \frac{l_{g2}}{2} \quad (A35)$$

A.2.5. Détermination des différents paramètres pour ($g_2 < g(l_0) < g_3$)

A.2.5.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Le glissement $g(x)$ est donné par l'expression (A12).

A.2.5.2. Domaine $l_2 \leq x \leq l_3$

Pour faciliter la résolution de l'équation différentielle (A11), on utilise le nouveau repère de la figure A10 ($o't s$) où les coordonnées de o' par rapport à l'ancien repère ($o g \tau$) sont ($g_2 ; \tau_1$).

La longueur l_3 représente la distance à partir du glissement g_2 jusqu'à $g(l_t)$, c'est-à-dire $l_t = l_0 + l_{g3} + l_{g2} + l_{g1}$ (voir figure A11).

a) Variation du glissement le long de la longueur d'introduction l_2

Quand le glissement est compris entre les deux valeurs g_2 et g_3 , la contrainte d'adhérence décroît linéairement de τ_1 à τ_3 .

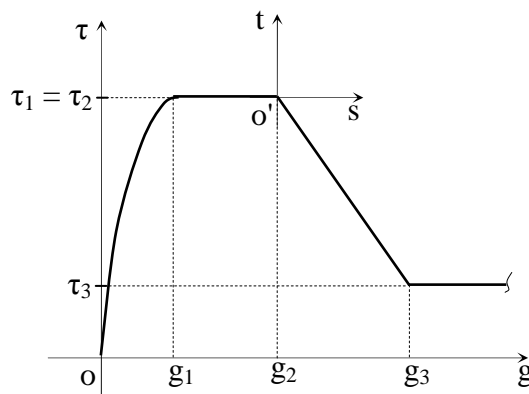


Fig. 10. Changement de repère ($o'h s$) pour la loi τ - g proposée au [CEB88]

Dans ce nouveau repère, la variation de l'adhérence t en fonction du glissement s entre g_2 et g_3 s'écrit :

$$t = -\frac{\tau_1 - \tau_r}{g_3 - g_2} s, \text{ et} \quad (\text{A36a})$$

$$t = -k_3 \cdot s, \quad (\text{A36b})$$

$$\text{où } t = (\tau - \tau_1), \quad s = (g - g_2) \quad \text{et} \quad k_3 = \frac{\tau_1 - \tau_r}{g_3 - g_2} \text{ (toujours positif).}$$

L'équation différentielle (A11), avec $X = x - l_0$, s'écrit :

$$\frac{d^2s}{dX^2} - \frac{p}{A_s E_s \bar{\rho}} t(X) = 0, \quad \text{aussi}$$

$$\frac{d^2s}{dX^2} + \frac{p}{A_s E_s \bar{\rho}} k_3 s = 0, \quad (\text{A37})$$

$$\text{et en posant } \beta_3 = \sqrt{\frac{k_3 p}{A_s E_s \bar{\rho}}},$$

l'équation (A37b) se simplifie à :

$$\frac{d^2s}{dX^2} + \beta_3^2 s = 0. \quad (\text{A38})$$

Cette équation différentielle admet pour solution :

$$s(X) = C_5 \cos\beta_3 X + C_6 \sin\beta_3 X.$$

La première et la deuxième dérivée de $s(X)$ s'écrivent successivement :

$$\frac{ds(X)}{dX} = -\beta_3 C_5 \sin\beta_3 X + \beta_3 C_6 \cos\beta_3 X,$$

$$\frac{d^2s}{dX^2} = -\beta_3^2 C_5 \cos\beta_3 X - \beta_3^2 C_6 \sin\beta_3 X.$$

Les valeurs des constantes C_5 et C_6 sont déterminées avec les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{ds}{dX}_{X=0} = -\varepsilon_{sf} = \beta_3 C_6 \text{ et}$$

$$C_6 = -\frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3},$$

comme $g(l_3) = g_2$ alors $s(l_3) = 0 = C_5 \cos\beta_3 l_3 - \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \sin\beta_3 l_3$ et

$$C_5 = \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \operatorname{tg}\beta_3 l_3.$$

L'expression de $s(X)$ s'écrit alors :

$$s(X) = \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \cos\beta_3 X - \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \cdot \sin\beta_3 X. \quad (\text{A39})$$

La relation (A39) représente une fonction sinusoïdale.

$$\frac{ds(X)}{dX} = -\varepsilon_{sf} \operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \sin\beta_3 X - \varepsilon_{sf} \cos\beta_3 X$$

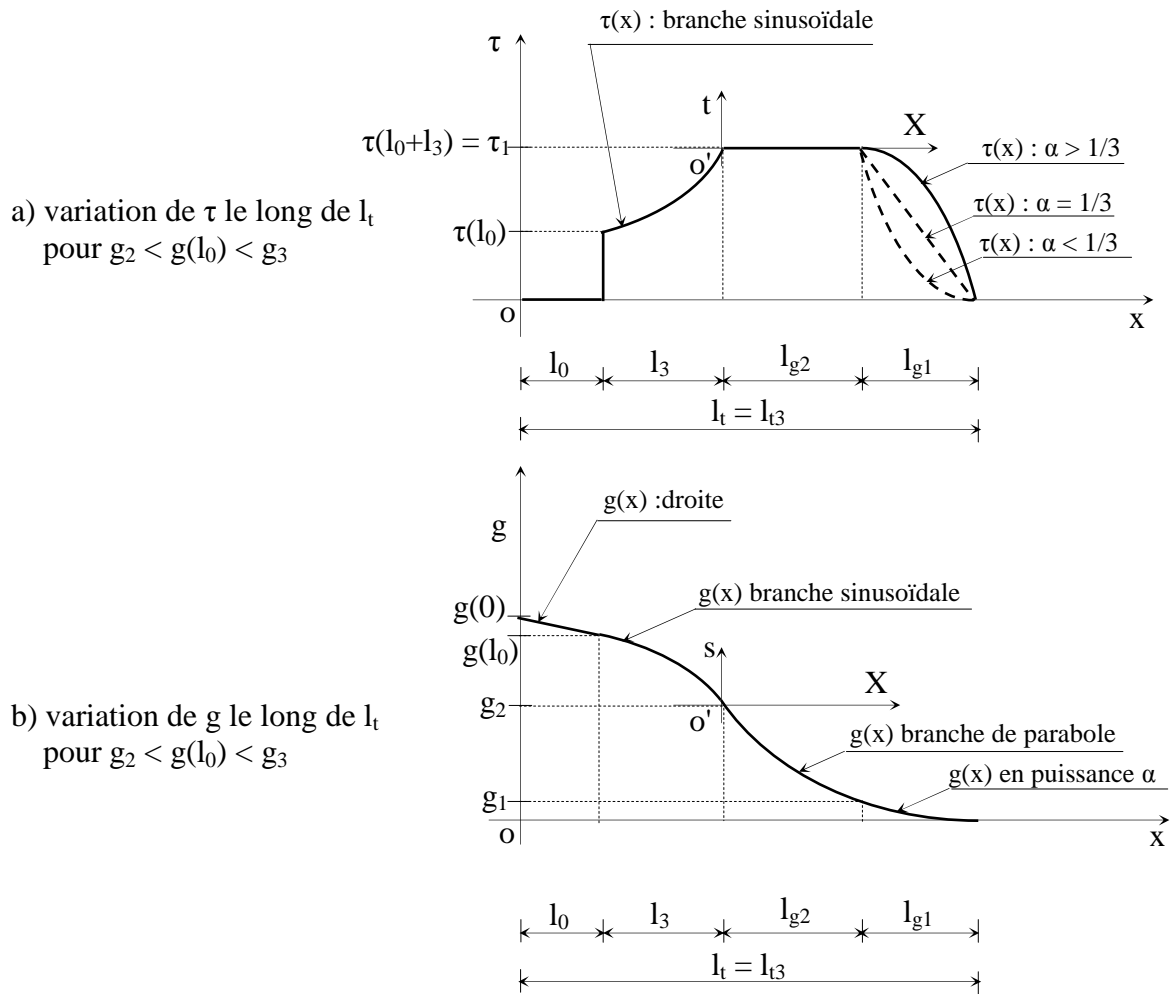
Le glissement est positif mais diminue de valeur quand $X > 0$, alors $s(X)$ est décroissante. Sachant que la seconde dérivée est négative ($\frac{d^2s}{dX^2} = -\beta_3^2 s$), alors la concavité de $s(X)$ dans cet intervalle est dirigée vers les glissements négatifs.

La contrainte d'adhérence s'écrit :

$$t(X) = -k_3 \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \cos\beta_3 X + k_3 \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \cdot \sin\beta_3 X \quad (\text{A40})$$

La seconde dérivée de $t(X)$ est positive, la concavité est dirigée vers les valeurs positives de l'adhérence.

La variation de la contrainte d'adhérence et la variation du glissement pour $g(l_0)$ compris entre les valeurs g_2 et g_3 , le long de l_0 , sont représentées figure A11.

Fig. A11. Variation de τ (adhérence) et du glissement g pour $g_2 < g(l_0) < g_3$

b) Variation de l'allongement relatif de l'acier et du béton le long de l_3

La variation de l'allongement relatif de l'armature sur la distance l_3 s'écrit :

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \left(-\frac{P}{A_s E_s} \int_0^X t(\xi) d\xi \right),$$

l'intégrale est affectée d'un signe « moins » car $t(X)$ est toujours négatif dans le nouveau repère $[o'X, o't]$, comme montré à la figure A.11.

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{P}{A_s E_s} \int_0^X \left(k_3 \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \cos\beta_3 \xi - k_3 \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3} \cdot \sin\beta_3 \xi \right) d\xi,$$

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{k_3 P}{A_s E_s \beta_3^2} \left[\operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \sin\beta_3 \xi + \cos\beta_3 \xi \right]_0^X,$$

après simplification, on trouve :

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} (\operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \sin\beta_3 X + \cos\beta_3 X - 1) \quad (\text{A41})$$

De même, la variation de l'allongement relatif du béton le long de la longueur l_3 s'écrit :

$$\varepsilon_c(X) = \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} \frac{n\rho}{1-\rho} (\operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \sin\beta_3 X + \cos\beta_3 X - 1) \quad (\text{A42})$$

L'allure des diagrammes de $\varepsilon_s(X)$ et $\varepsilon_c(X)$ pour $g_2 < g(l_0) < g_3$, le long de la longueur d'introduction l_t , est illustrée figure A12.

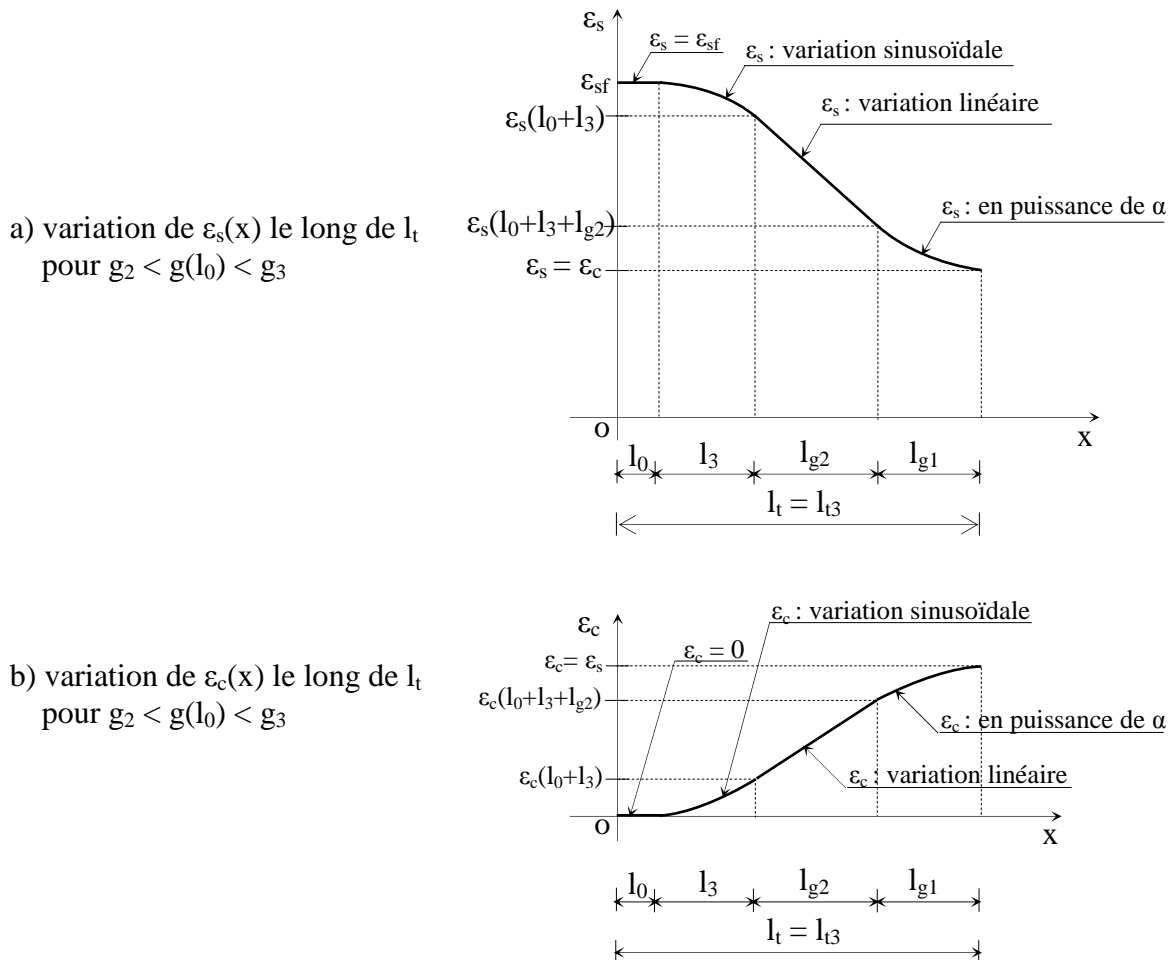


Fig. A12. Variation des allongements relatifs ε_s et ε_c le long de la longueur l_t quand $g_2 < g(l_0) < g_3$

L'allongement relatif moyen de l'acier sur la longueur l_3 est :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sm3} &= \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} \varepsilon_s(X) dX, \\ \varepsilon_{sm3} &= \frac{1}{l_3} \int_0^{l_3} \left[\varepsilon_{sf} - \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} (\operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \sin\beta_3 X + \cos\beta_3 X - 1) \right] dX, \\ \varepsilon_{sm3} &= \varepsilon_{sf} + \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} - \frac{1}{l_3} \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} \int_0^{l_3} [(\operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \sin\beta_3 X + \cos\beta_3 X)] dX, \\ \varepsilon_{sm3} &= \varepsilon_{sf} + \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} - \frac{1}{l_3} \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} [-\operatorname{tg}\beta_3 l_3 \cdot \cos\beta_3 X + \sin\beta_3 X]_0^{l_3} \\ \varepsilon_{sm3} &= \varepsilon_{sf} + \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} - \frac{1}{l_3} \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} \operatorname{tg}\beta_3 l_3,\end{aligned}$$

Et après simplification :

$$\varepsilon_{sm3} = \varepsilon_{sf} - \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} \left(\frac{\operatorname{tg}\beta_3 l_3}{l_3 \beta_3} - 1 \right). \quad (\text{A43})$$

L'allongement relatif moyen du béton sur la longueur l_3 s'écrit :

$$\varepsilon_{cm3} = \frac{k_3 p}{A_s E_s} \frac{\varepsilon_{sf}}{\beta_3^2} \frac{n\rho}{1-\rho} \left(\frac{\operatorname{tg}\beta_3 l_3}{l_3 \beta_3} - 1 \right) \quad (\text{A44})$$

A.2.6. Détermination des différents paramètres pour $g(l_0) = g_3$

Dans ce cas, le glissement a atteint la valeur g_3 au point d'abscisse $x = l_0$ et on a comme le montre la figure A13 :

$$\tau(l_0) = \tau_3,$$

la longueur d'introduction effective est égale ($l_{g1} + l_{g2} + l_{g3}$),

la longueur d'introduction totale est notée l_{tg1} ($= l_0 + l_{g1} + l_{g2} + l_{g3}$),

l'allongement relatif de l'acier, dans l'intervalle $[0 ; l_0]$ est noté ε_{sf3} .

A.2.6.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Quand $g(l_0) = g_3$, l'expression du glissement s'écrit :

$$g(x) = -\varepsilon_{sf3} x + g_3 + \varepsilon_{sf3} l_0, \quad (\text{A45})$$

et prend la valeur pour $x = 0$: $g(0) = g_3 + \varepsilon_{sf3} l_0$.

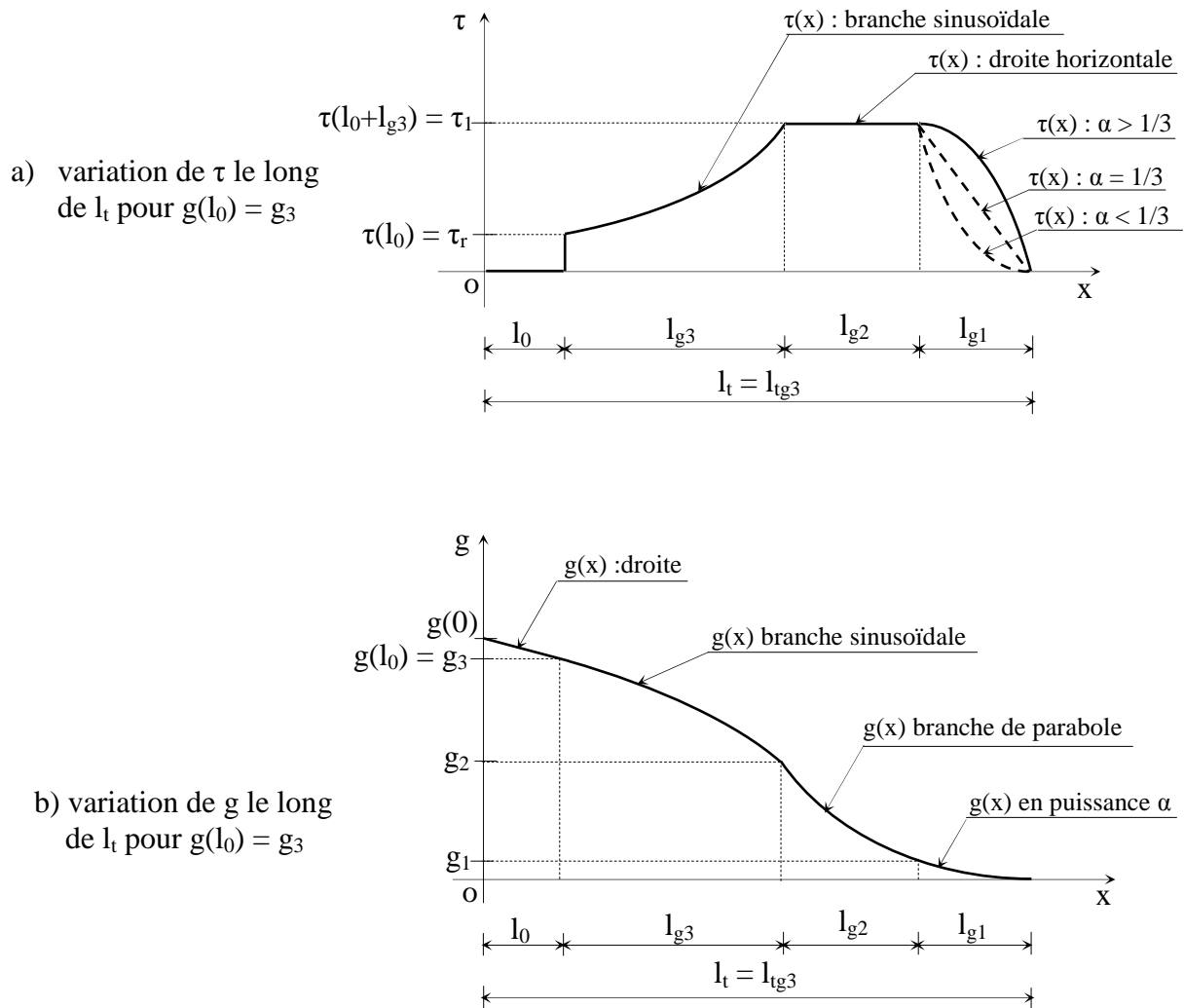


Fig. A13. Variation de τ (adhérence) et du glissement g pour $g(l_0) = g_3$

A.2.6.2. Domaine $l_0 \leq x \leq l_{g3}$ ($0 \leq X \leq l_{g3}$)

Les variations du glissement g et de l'adhérence τ ont, respectivement, pour expression :

$$s(X) = \frac{\varepsilon_{sf3}}{\beta_3} \operatorname{tg} \beta_3 l_{g3} \cdot \cos \beta_3 X - \frac{\varepsilon_{sf3}}{\beta_3} \cdot \sin \beta_3 X \quad (\text{A46})$$

$$t(X) = -k_3 \frac{\varepsilon_{sf3}}{\beta_3} \operatorname{tg}\beta_3 l_{g3} \cdot \cos\beta_3 X + k_3 \frac{\varepsilon_{sf3}}{\beta_3} \cdot \sin\beta_3 X \quad (\text{A47})$$

Pour les variations des allongements relatifs et des allongements relatifs moyens de l'armature et du béton (relations (A41), (A42), (A43) et (A44)), il suffit de remplacer l_3 par l_{g3} et ε_{sf} par ε_{sf3} .

A.2.7. Détermination des différents paramètres pour ($g(l_0) > g_3$)

A.2.7.1. Domaine $0 \leq x \leq l_0$

Le glissement $g(x)$ est donné par l'expression (A12).

A.2.7.2. Domaine $l_0 \leq x \leq l_4$

La longueur l_4 représente la distance entre le glissement $g(l_0)$ et g_3 , c'est-à-dire $l_t = l_0 + l_4 + l_{g3} + l_{g2} + l_{g1}$ (voir figure A14).

a) Variation du glissement le long de la longueur d'introduction l_4

Quand le glissement est supérieur à g_3 , la contrainte d'adhérence est supposée constante égale à la valeur τ_3 .

En effectuant le changement de variable $X = (x - l_0)$, l'équation différentielle (A11) s'écrit :

$$\frac{d^2g}{dX^2} - \frac{p}{A_s E_s \bar{\rho}} \tau_3 = 0,$$

Elle admet pour solution :

$$g(X) = \beta_4 \frac{X^2}{2} + C_7 X + C_8 \quad \text{avec} \quad \beta_4 = \frac{p \tau_3}{A_s E_s \bar{\rho}}.$$

Les valeurs des constantes C_7 et C_8 sont déterminées avec les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{dg}{dX} = \beta_4 X + C_7,$$

$$\frac{dg}{dX}_{X=0} = -\varepsilon_{sf} = C_7,$$

$$g(l_4) = g_3 = \beta_4 \frac{l_4^2}{2} - \varepsilon_{sf} l_4 + C_8 \quad \text{et} \quad C_8 = g_3 + \varepsilon_{sf} l_4 - \beta_4 \frac{l_4^2}{2}.$$

L'expression de $g(X)$ s'écrit alors :

$$g(X) = \beta_4 \frac{X^2}{2} - \varepsilon_{sf} X + g_3 + \varepsilon_{sf} l_4 - \beta_4 \frac{l_4^2}{2}. \quad (\text{A48})$$

La relation (A48) représente une fonction du second degré (variation parabolique de g). La seconde dérivée ($\frac{d^2g}{dx^2} = \beta_2$) est positive donc la concavité est dirigée vers les glissement positifs. La variation de la contrainte d'adhérence et la variation du glissement pour $g(l_0)$ supérieur à g_3 , le long de l_t , sont représentées figure A14.

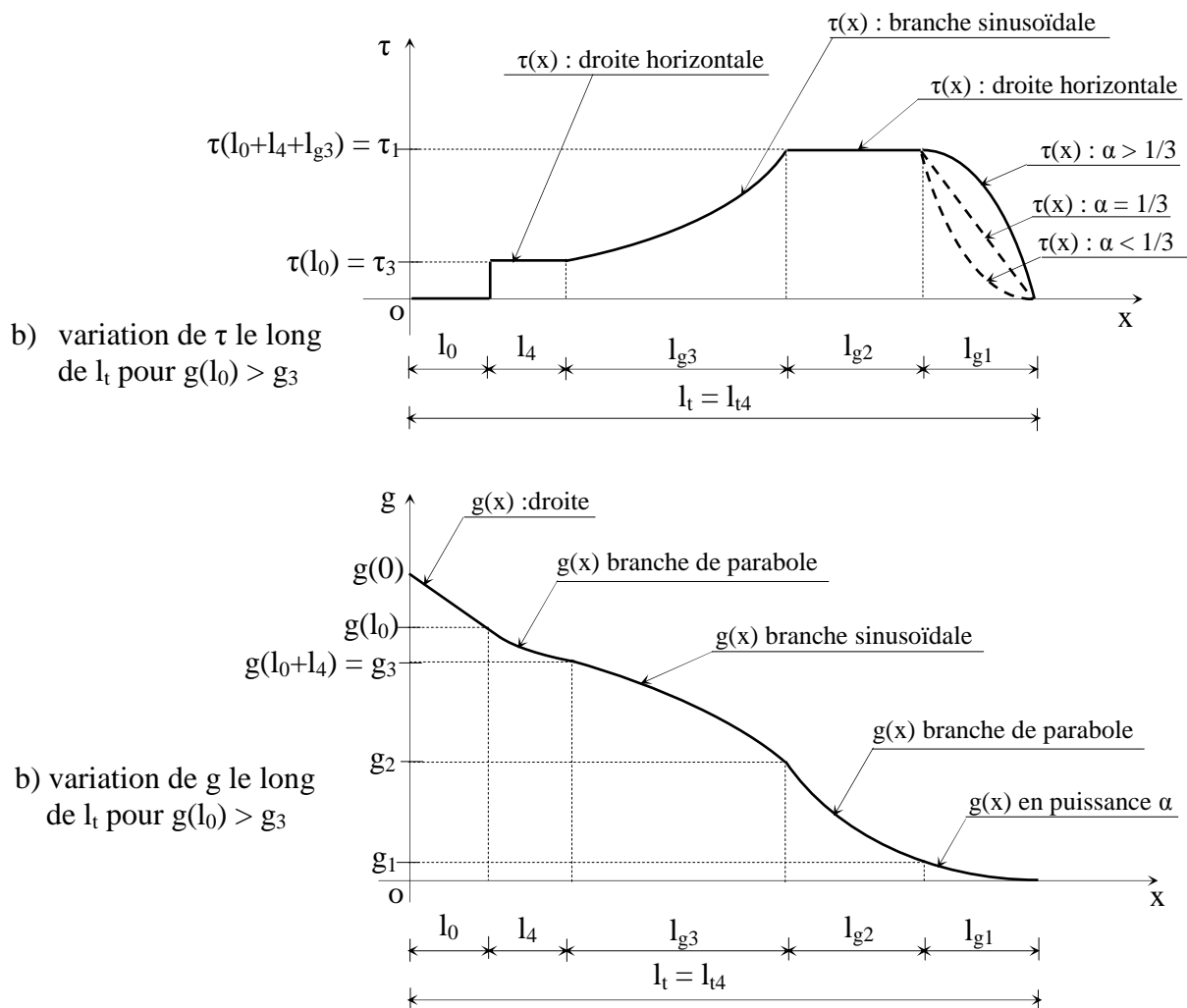


Fig. A14. Variation de τ (adhérence) et du glissement g pour $g(l_0) > g_3$

b) Variation de l'allongement relatif de l'acier et du béton le long de l_4

La variation de l'allongement relatif de l'armature sur la distance l_4 où la contrainte d'adhérence est constante et égale à τ_3 s'écrit :

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{p}{A_s E_s} \int_0^X \tau_3 d\xi,$$

$$\varepsilon_s(X) = \varepsilon_{sf} - \frac{p \tau_3}{A_s E_s} X. \quad (A49)$$

L'allongement relatif moyen de l'acier sur la longueur l_2 est :

$$\varepsilon_{sm4} = \frac{1}{l_4} \int_0^{l_4} \varepsilon_s(X) dX,$$

$$\varepsilon_{sm4} = \varepsilon_{sf} - \frac{1}{l_4} \left[\frac{p \tau_3}{A_s E_s} \frac{X^2}{2} \right]_0^{l_4},$$

$$\varepsilon_{sm4} = \varepsilon_{sf} - \frac{1}{l_4} \frac{p \tau_3}{A_s E_s} \frac{l_4}{2},$$

$$\varepsilon_{sm4} = \varepsilon_{sf} - \frac{p \tau_3}{A_s E_s} \frac{l_4}{2} \quad (A50)$$

La variation de l'allongement relatif du béton sur la distance l_4 s'écrit :

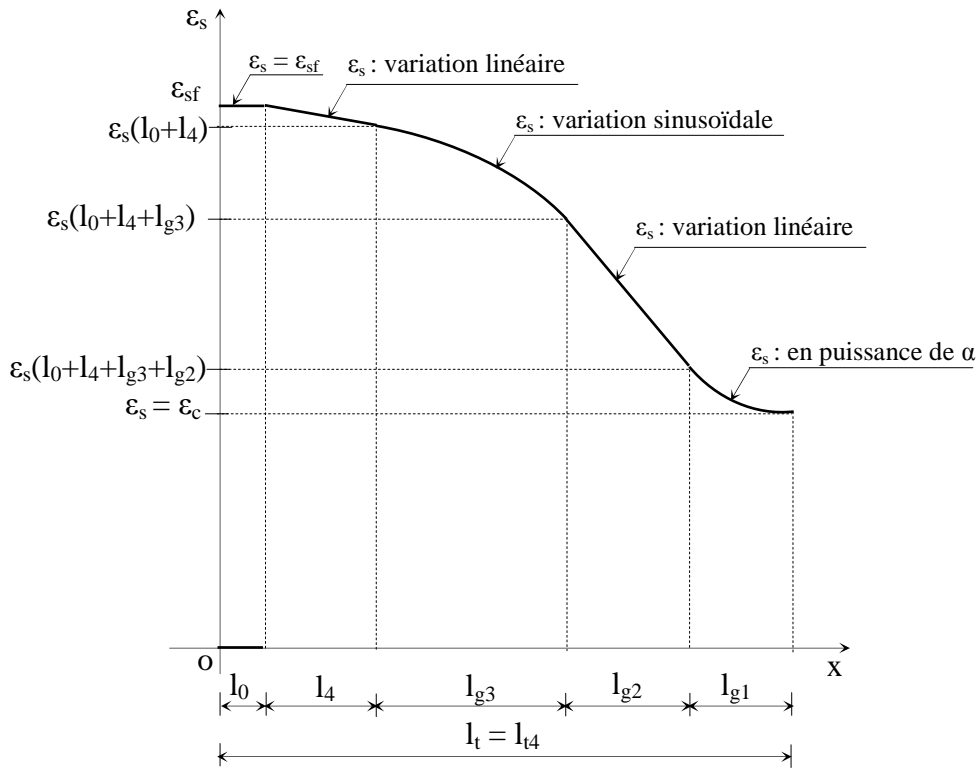
$$\varepsilon_c(X) = \frac{p}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \int_0^X \tau_3 d\xi,$$

$$\varepsilon_c(X) = \frac{p \tau_3}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} X. \quad (A51)$$

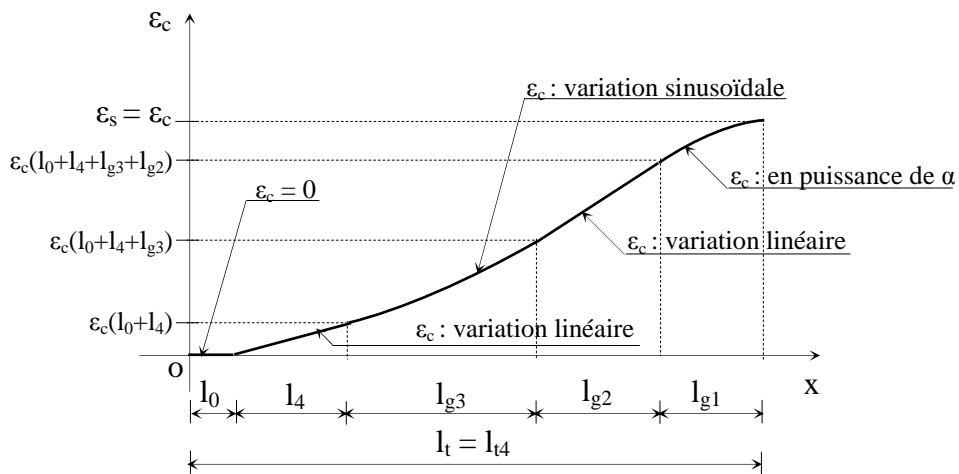
L'allongement relatif moyen du béton sur la longueur l_4 est :

$$\varepsilon_{cm4} = \frac{p \tau_3}{A_s E_s} \frac{n\rho}{1-\rho} \frac{l_4}{2}. \quad (A52)$$

L'allure des diagrammes de $\varepsilon_s(X)$ et $\varepsilon_c(X)$ pour $g(l_0) > g_3$, le long de la longueur d'introduction totale l_t , est illustrée figure A15.



b) variation de $\varepsilon_c(x)$ le long de l_t pour $g(l_0) > g_3$



a) variation de $\varepsilon_s(x)$ le long de l_t pour $g(l_0) > g_3$

Fig. A15. Variation des allongements relatifs ε_s et ε_c le long de la longueur l_t quand $g(l_0) > g_3$

ANNEXE B

ELABORATION D'UN LOGICIEL DE CALCUL EN ELASTICITE NON LINEAIRE « CMP » - APPLICATION A UNE SECTION DROITE

B.1. Introduction

Afin de confronter la loi de comportement fictive des aciers tendus à des résultats expérimentaux, un logiciel de calcul pour une section droite d'une poutre en élasticité non linéaire a été élaboré et généralisé (en langage «GW BASIC»).

Bien sur, il existe dans la littérature certains logiciels en particulier dans [BOU87] et [KAC97] qu'on pourrait utiliser, mais afin d'être en mesure de faire varier différents paramètres, il y a lieu de maîtriser soi même ce genre de calculs pour y apporter les modifications nécessaires à tout instant.

Dans ce travail, on a simplifié les calculs en créant des sous programmes et en généralisant la méthode à tous les matériaux car nous n'avons pas fixé à priori des valeurs caractéristiques. Le calcul des intégrales étant numériques, on peut donc utiliser des courbes de comportement d'expression quelconque des matériaux. De plus pour certaines sections, notamment les sections circulaires, on peut introduire directement le contour réelle de la section en définissant, au début des calculs, l'expression de b (largeur) en fonction du diamètre et de l'ordonnée y .

Nous avons aussi introduit des données pour les différents diagrammes fictifs en traction des aciers selon cette présente étude.

Enfin le coté interactif du programme facilite l'introduction (ou la correction) des données.

B.2. Hypothèses fondamentales

Ce logiciel a été élaboré en faisant certaines hypothèses à savoir :

- La poutre possède un plan moyen et elle est chargée dans son plan. On s'intéressera à l'équilibre d'une section droite représentant le comportement moyen d'un tronçon de cette poutre.

- Des résultats expérimentaux ont montré qu'on peut admettre que les sections droites restent planes après déformation même en dehors du domaine linéaire.
- La section est définie dans un repère d'origine quelconque ou au centre de gravité de la section homogénéisée (Figure B1).

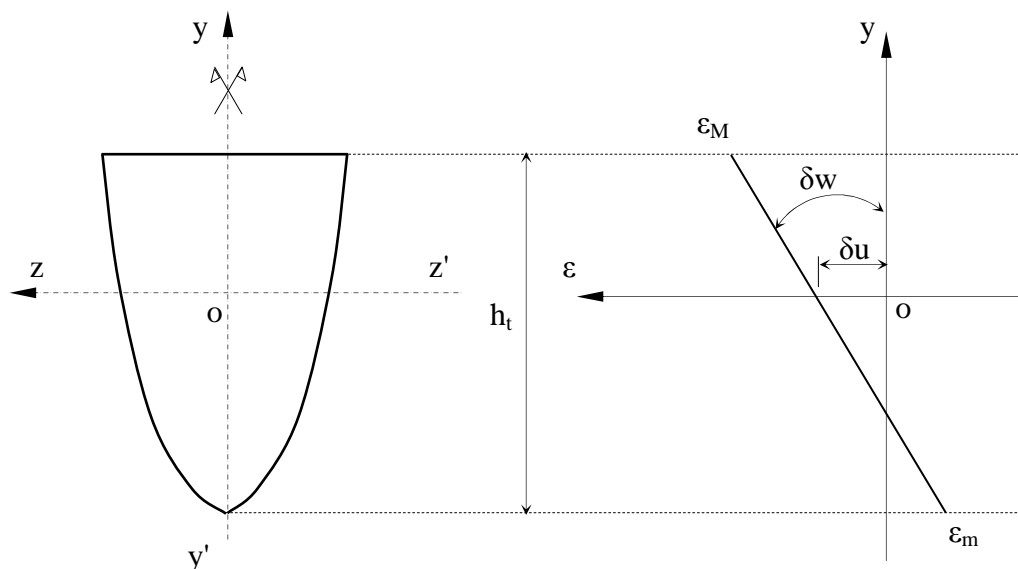


Fig. B1: Section avec axe de symétrie et déformation ε dans une section droite quelconque

La déformation algébrique ($\varepsilon > 0$ compression) en tout point de la section s'écrit :

$$\varepsilon = \delta u + \delta w \cdot y \quad (\text{B1})$$

δu : déplacement à l'origine,

δw : rotation différentielle,

y : ordonnée de ce point,

ε_m : déformation de la fibre extrême située vers les y négatifs,

ε_M : déformation de la fibre extrême située vers les y positifs.

B.3. Modélisation des sections

Dans ce programme, les matériaux de base sont soit le béton armé, soit le béton de fibres d'acier, soient les deux, auxquels on peut ajouter des aciers laminés, des aciers passifs ou des aciers de précontrainte (aciers actifs).

Les lois de comportement de ces matériaux peuvent être quelconques comme il est montré à la figure B2. Il suffit de définir dans chaque intervalle $[\varepsilon_j ; \varepsilon_{j+1}]$ la relation contrainte

-déformation $\varphi_j(\varepsilon)$ correspondante où ε_m et ε_M sont, respectivement, les déformations relatives (comptées algébriquement) minimum et maximum.

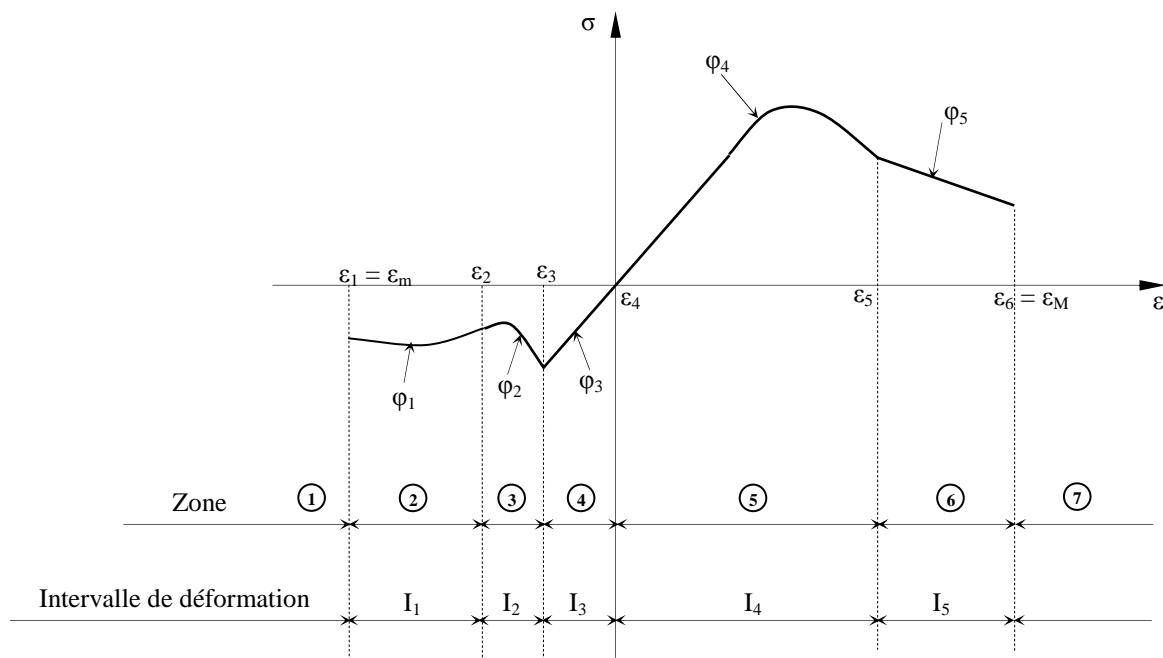


Fig. B2. Exemple d'une loi de comportement $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ quelconque

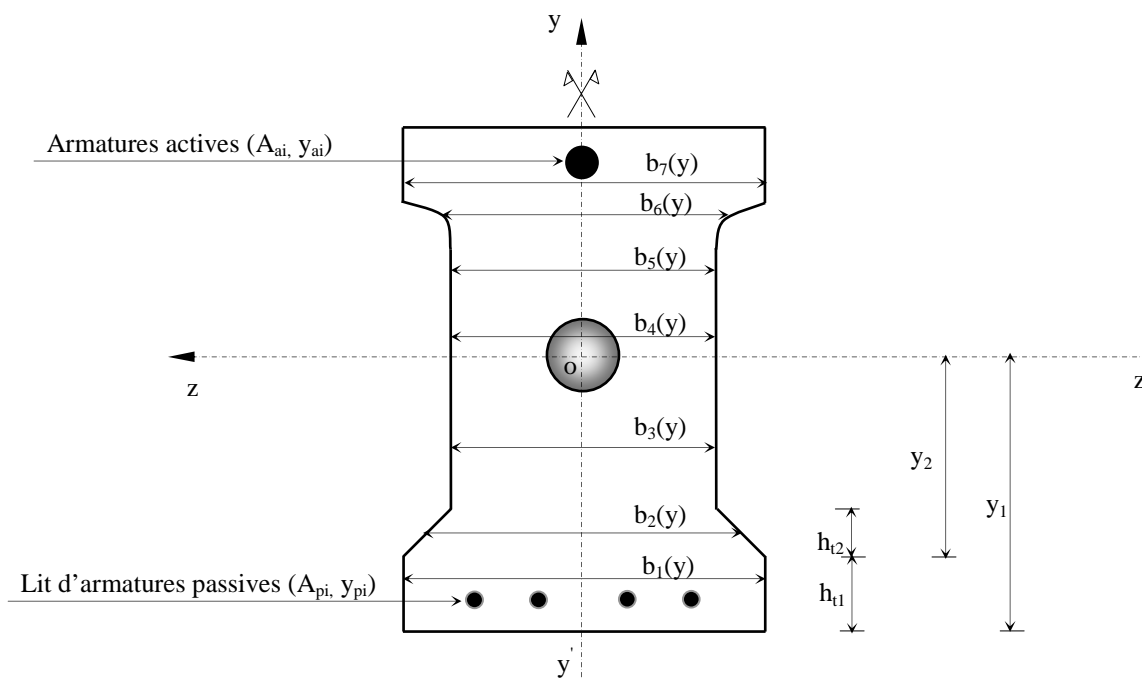


Fig. B3. Exemple de modélisation des sections

Pour le béton, béton de fibres et acier laminés (considérés comme sections *pleines*) Virlogeux [VIR86] a modélisé les sections par une succession de sections rectangulaires élémentaires, Bouafia [BOU87] et Kachi [KAC97], [KAC06-1] [KAC06-2], par des sections trapézoïdales.

Dans ce programme la modélisation des sections droites de ces matériaux est définie par une succession de tables élémentaires caractérisées par leur largeur b_i (y), l'ordonnée de la fibre inférieure y_i et sa hauteur h_{ti} comme montré à la figure B3.

b) Aciers passifs et aciers actifs (sections « ponctuées »)

Pour les aciers passifs et aciers actifs, on suppose que chaque section d'armature est concentrée en son centre de gravité. Chaque lit d'armatures sera ainsi défini par sa section totale A_i et son ordonnée y_i .

B.4. Lois de comportement des matériaux utilisées pour le programme «cmp»

B.4.1. Comportement du béton en compression

Pour le béton en compression, nous avons utilisé la loi de Sargin rapportée par Bouafia [BOU91] présentée à la figure B4. La contrainte σ est donnée par la relation :

$$\sigma = f_{cj} \frac{K_b \bar{\varepsilon} - (K_b' - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (K_b - 2) K_b' \bar{\varepsilon}^2} \quad (\text{B2})$$

$$\text{où } \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \text{ et } K_b = \frac{E_{b0} \varepsilon_0}{f_{cj}}$$

K_b paramètre ajustant la courbe ascendante ;

f_{cj} : résistance à la compression du béton à j jours ;

ε_0 : déformation de pic correspondant à f_{cj} ;

E_{b0} : module élastique du béton à l'origine ;

K_b' est un paramètre permettant d'ajuster la branche décroissante de la courbe :

- Pour $K_b' = 0$, le béton a un comportement élastique fragile et la branche descend brutalement.

- Pour $K_b' = 1$, le béton a un comportement ductile et la branche est assez plate. En général, pour un béton normal, on peut prendre : $K_b' = K_b - 1$

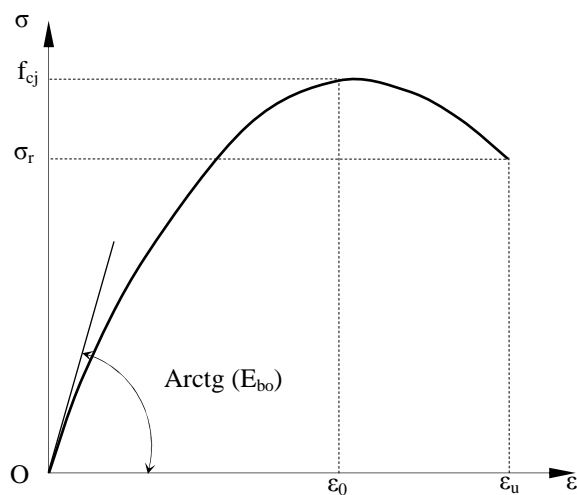


Fig. B4. Comportement du béton en compression selon SARGIN

B.4.2. Comportement des aciers naturels (passifs) dans la zone comprimée

Les aciers naturels sont caractérisés par une loi de comportement élasto -plastique parfaite (figure B5) on a :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = E_s \varepsilon \quad \text{pour} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ \sigma = \sigma_e \quad \text{pour} \quad \varepsilon_e \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ \sigma = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon > \varepsilon_u \end{array} \right\} \quad (B3)$$

E_s : module longitudinal de l'acier,

ε_e : déformation limite élastique de l'acier,

σ_e : contrainte élastique de l'acier,

ε_u : déformation ultime de l'acier.

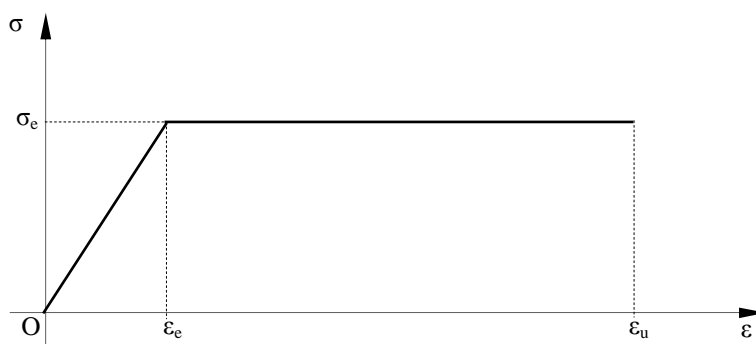


Fig. B5. Comportement des aciers naturels

B.4.3. Comportement des aciers écrouis (passifs) dans la zone comprimée

Les règlements préconisent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70% de σ_e puis au-delà, une courbe $\varepsilon = f(\sigma)$ du cinquième degré (Figure B6).

Les relations se traduisent par :

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E_s \varepsilon && \text{pour } \sigma \leq 0,7\sigma_e \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E_s} + 0,823 \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 0,7\right)^5 && \text{pour } 0,7\sigma_e \leq \sigma \leq 1,1\sigma_e \\ \varepsilon &= 1,1\sigma_e && \text{pour } 1\% < \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{aligned} \right\} \quad (B4)$$

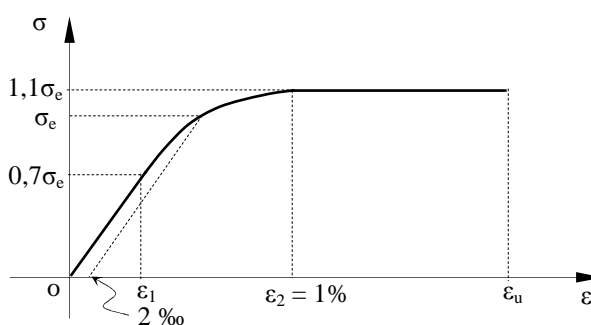


Fig. B6. Comportement des aciers écrouis

B.4.4. Comportement des aciers actifs (selon règlement B.P.E.L.)

L'allure des courbes est la même que celles des aciers écrouis mais avec un comportement linéaire élastique jusqu'à 90% de σ_e (Figure B7) et les relations :

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E_s \varepsilon && \text{pour } 0 < \sigma \leq 0,9\sigma_e \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E_s} + 100 \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 0,9\right)^5 && \text{pour } 0,9\sigma_e \leq \sigma \leq 1,06\sigma_e \\ \sigma &= 1,06\sigma_e && \text{pour } \varepsilon > 2\% \end{aligned} \right\} \quad (B5)$$

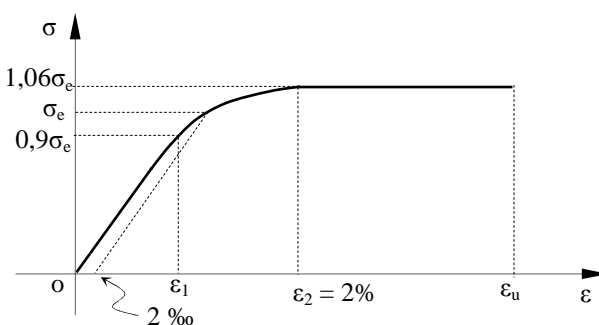


Fig. B.7. Loi σ - ε d'un acier de précontrainte

B.4.5. Comportement des aciers laminés (ou aciers de charpente)

Dans ce cas, l'acier est ancré dans le béton par des connecteurs (soudés à l'acier) pour empêcher le glissement. On admet alors une liaison rigide entre les deux matériaux et ainsi cette section mixte se comporte comme une section homogène sous l'action des charges extérieures. La loi σ - ε de ces aciers est la même que celle des aciers naturels (passifs).

B.4.6. Diagramme fictif de l'acier naturel en traction

Ces aciers sont enrobés de béton, la théorie développée au chapitre II a permis de proposer les relations III.35 à III.38 représentées respectivement aux figures III.1 à III.4.

B.4.7. Diagramme fictif de l'acier écroui et de précontrainte en traction

Pour l'acier quand $\varepsilon < \varepsilon_e$, on a les mêmes diagrammes que l'acier naturel. Les relations (B6) et (B7) représentent les différents cas montrés à la figure B8.

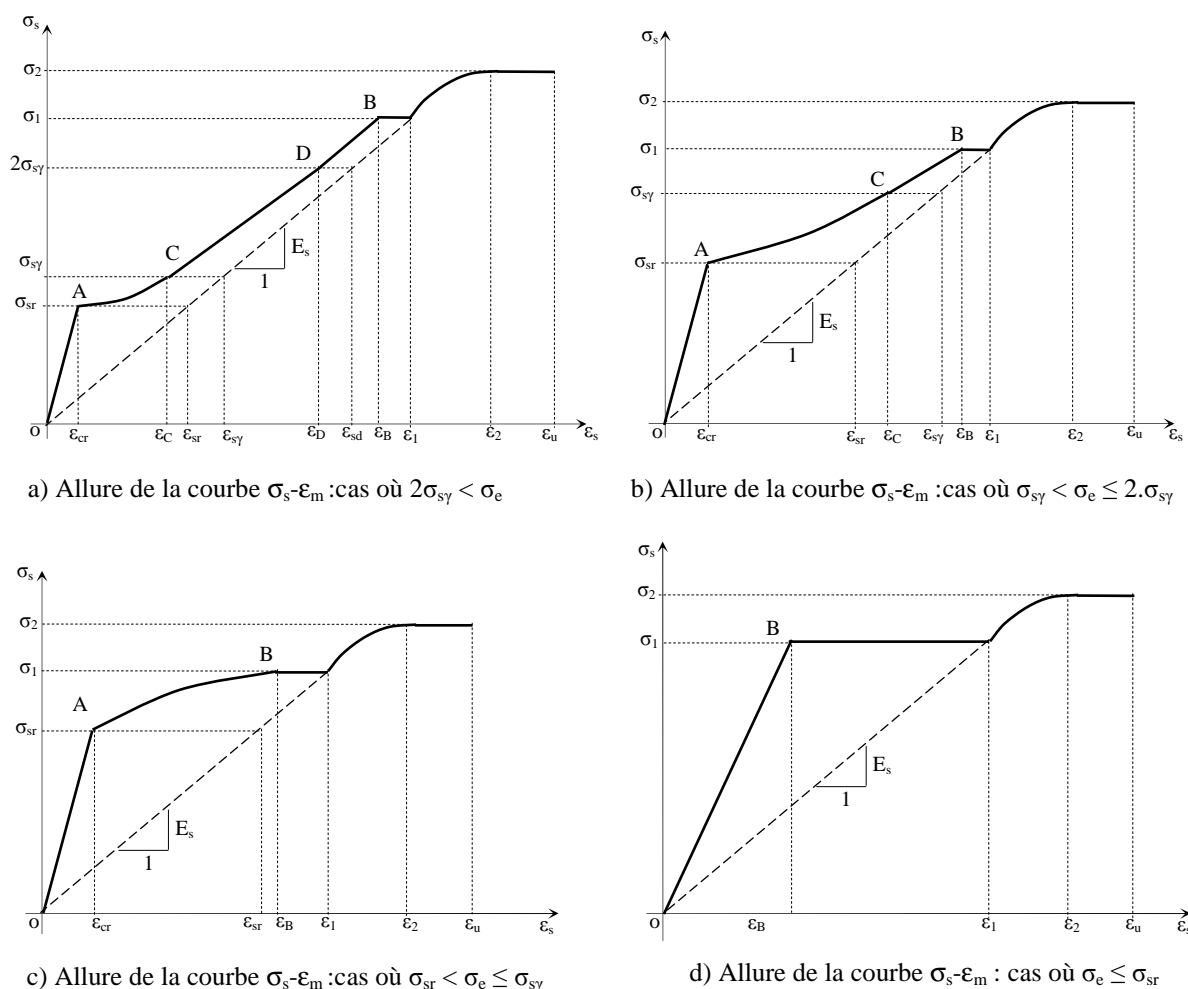


Fig. B8. Diagramme fictif σ - ε de l'acier écroui (ou de précontrainte) en traction

- Loi fictive de l'acier écroui en traction

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{Relations (III.35), (III.36), (III.37) ou (III.38)} & \text{pour } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B \\
 \sigma = 0,7 \sigma_e & \text{pour } \varepsilon_B \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 \\
 \varepsilon = \frac{\sigma}{E_s} + 0,823 \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 0,7 \right)^5 & \text{pour } 0,7 \sigma_e \leq \sigma \leq 1,1 \sigma_e \\
 \varepsilon = 1,1 \sigma_e & \text{pour } \varepsilon_2 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u
 \end{array} \right\} \quad (\text{B6})$$

- Loi fictive de l'acier précontrainte en traction

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{Relations (III.35), (III.36), (III.37) ou (III.38)} & \text{pour } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_B \\
 \sigma = 0,9 \sigma_e & \text{pour } \varepsilon_B \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 \\
 \varepsilon = \frac{\sigma}{E_s} + 100 \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 0,9 \right)^5 & \text{pour } 0,9 \sigma_e \leq \sigma \leq 1,06 \sigma_e \\
 \sigma = 1,06 \sigma_e & \text{pour } \varepsilon > 2\%
 \end{array} \right\} \quad (\text{B7})$$

B.4.8. Béton armé de fibres d'acier

a) Comportement en compression

L'allure et la loi de comportement sont les mêmes que celles du béton traditionnel (Figure B4 et relation B2).

b) Comportement en traction (figure B9)

On a adopté dans le logiciel de calcul la loi établie par Bouafia et al [BOU98], [BOU02] avec les relations ci dessous :

$$\left. \begin{array}{ll}
 \sigma = E_{ct} \varepsilon & \text{si } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{ft} \\
 \sigma = \sigma_{uc} - (\sigma_{uc} - f_{ft}) \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)^6} & \text{si } \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\
 \sigma = \sigma_{uc} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_r - \varepsilon_u)^6} \right] & \text{si } \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r
 \end{array} \right\} \quad (\text{B8})$$

E_{ct} : module initial du composite en traction,

f_{ft} : résistance à la traction du composite,

ε_{ft} : déformation de fissuration du béton,

ε_u : déformation correspondant à la mobilisation totale de l'adhérence fibres matrice,

σ_{uc} : contrainte ultime maximale du composite (valeur « plateau »),

ε_{rt} : déformation de rupture du composite en traction.

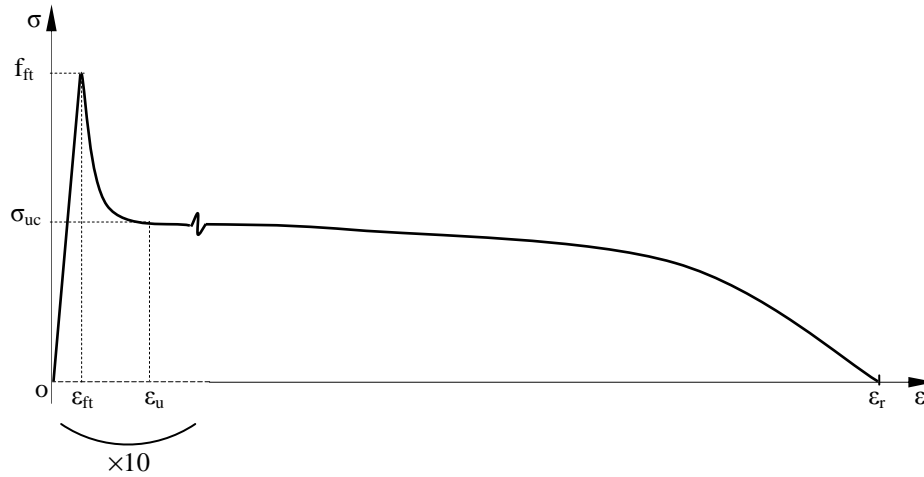


Fig. B9. Comportement du béton de fibres d'acier en traction selon Bouafia et Kachi [BOU02]

B.5. Lissage des courbes pour les aciers dont la section est ponctuée

Pour éviter la non dérivabilité de l'opérateur ϕ_t (dont l'expression analytique est donnée à la sous section B.5), les courbes des aciers présentant des points anguleux sont lissées. Soit une courbe quelconque $\varphi(\varepsilon)$ d'un acier présentant un point anguleux C de coordonnées $(\varepsilon_k, \sigma_k)$. Désignons par $\varphi_k(\varepsilon)$ et $\varphi_{k+1}(\varepsilon)$, les courbes de part et d'autre de ce point (Figure B10).

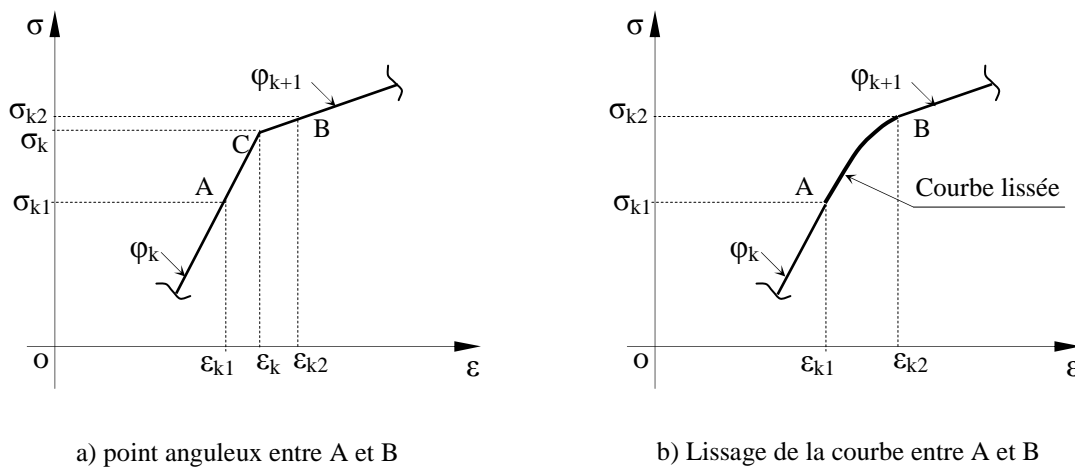


Fig. B10. Lissage d'un tronçon de courbe ayant un point anguleux

Le lissage autour de ce point peut se faire par un polynôme entre $A(\epsilon_{k1}, \sigma_{k1})$ et $B(\epsilon_{k2}, \sigma_{k2})$, dans l'intervalle $[\epsilon_{k1}, \epsilon_{k2}]$ en prenant :

$$\epsilon_{k1} = \epsilon_k - \frac{\epsilon_k}{\alpha} \text{ et } \epsilon_{k2} = \epsilon_k + \frac{\epsilon_k}{\alpha},$$

où α est choisi assez grand (de l'ordre de 100 ou plus) pour ne pas influencer sur l'allure générale de la courbe $\varphi(\epsilon)$.

On considère le polynôme de l'Hermite, de la forme :

$$P(\epsilon) = P_1(\epsilon) \varphi(\epsilon_{k1}) + P_2(\epsilon) \varphi(\epsilon_{k2}) + P_3(\epsilon) \varphi'(\epsilon_{k1}) + P_4(\epsilon) \varphi'(\epsilon_{k2}). \quad (\text{B9})$$

Nous avons 4 conditions à respecter :

$$P(\epsilon_{k1}) = \varphi_k(\epsilon_{k1}) \quad (1)$$

$$P(\epsilon_{k2}) = \varphi_{k+1}(\epsilon_{k2}) \quad (2)$$

$$P'(\epsilon_{k1}) = \varphi'_k(\epsilon_{k2}) \quad (3)$$

$$P'(\epsilon_{k2}) = \varphi'_{k+1}(\epsilon_{k2}) \quad (4).$$

Celles-ci se traduisent respectivement par :

$$(1) : P_1(\epsilon_{k1}) = 1 ; P_2(\epsilon_{k1}) = 0 ; P_3(\epsilon_{k1}) = 0 \text{ et } P_4(\epsilon_{k1}) = 0$$

$$(2) : P_1(\epsilon_{k2}) = 0 ; P_2(\epsilon_{k2}) = 1 ; P_3(\epsilon_{k2}) = 0 \text{ et } P_4(\epsilon_{k2}) = 0$$

$$(3) : P'_1(\epsilon_{k1}) = 0 ; P'_2(\epsilon_{k1}) = 0 ; P'_3(\epsilon_{k1}) = 1 \text{ et } P'_4(\epsilon_{k1}) = 0$$

$$(4) : P'_1(\epsilon_{k2}) = 0 ; P'_2(\epsilon_{k2}) = 0 ; P'_3(\epsilon_{k2}) = 0 \text{ et } P'_4(\epsilon_{k2}) = 1.$$

Après résolution, on trouve en optant pour un degré le moins élevé :

$$\left. \begin{aligned} P_1(\epsilon) &= \frac{(\epsilon - \epsilon_{k2})^3}{(\epsilon_{k1} - \epsilon_{k2})^3} - 3 \frac{(\epsilon - \epsilon_{k1})(\epsilon - \epsilon_{k2})^2}{(\epsilon_{k1} - \epsilon_{k2})^3} \\ P_2(\epsilon) &= -\frac{(\epsilon - \epsilon_{k1})^3}{(\epsilon_{k1} - \epsilon_{k2})^3} + 3 \frac{(\epsilon - \epsilon_{k2})(\epsilon - \epsilon_{k1})^2}{(\epsilon_{k1} - \epsilon_{k2})^3} \\ P_3(\epsilon) &= \frac{(\epsilon - \epsilon_{k1})(\epsilon - \epsilon_{k2})^2}{(\epsilon_{k1} - \epsilon_{k2})^2} \\ P_4(\epsilon) &= \frac{(\epsilon - \epsilon_{k1})^2(\epsilon - \epsilon_{k2})}{(\epsilon_{k1} - \epsilon_{k2})^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B10})$$

Pour déterminer l'opérateur ϕ_t , nous avons besoin de l'expression de $P'(\epsilon)$:

$$P'(\epsilon) = P'_1(\epsilon) \varphi(\epsilon_{k1}) + P'_2(\epsilon) \varphi(\epsilon_{k2}) + P'_3(\epsilon) \varphi'(\epsilon_{k1}) + P'_4(\epsilon) \varphi'(\epsilon_{k2}), \quad (\text{B11})$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} P'_1(\varepsilon) &= -6 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{k1})(\varepsilon - \varepsilon_{k2})}{(\varepsilon_{k1} - \varepsilon_{k2})^3} \\ P'_2(\varepsilon) &= -P'_1(\varepsilon) \\ P'_3(\varepsilon) &= \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{k2})^2}{(\varepsilon_{k1} - \varepsilon_{k2})^2} + \frac{2(\varepsilon - \varepsilon_{k1})(\varepsilon - \varepsilon_{k2})}{(\varepsilon_{k1} - \varepsilon_{k2})^2} \\ P'_4(\varepsilon) &= \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{k1})^2}{(\varepsilon_{k1} - \varepsilon_{k2})^2} + \frac{2(\varepsilon - \varepsilon_{k1})(\varepsilon - \varepsilon_{k2})}{(\varepsilon_{k1} - \varepsilon_{k2})^2} \end{aligned} \right\} \quad (B12)$$

B.6. Calcul des efforts internes dans les sections «pleines»

La poutre étant chargée dans son plan, une section droite (représentative d'un tronçon de poutre) sera sollicitée par un couple d'effort (N, M). Ce couple engendre une déformation (δ_u , δ_w) d'où on peut déduire les efforts internes (N_{int} et M_{int}) :

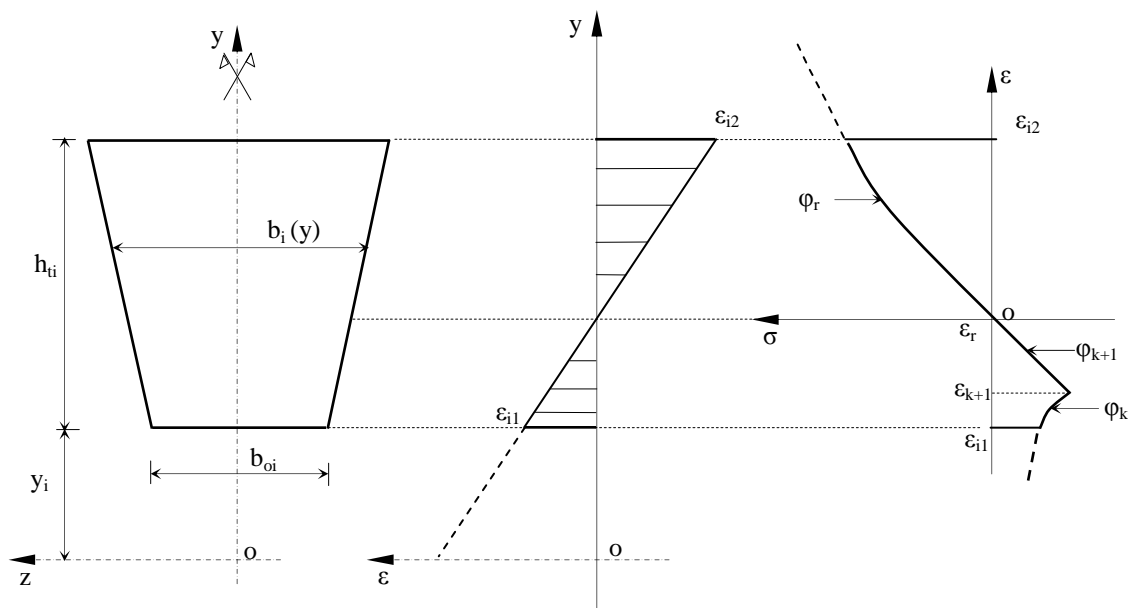
$$\left. \begin{aligned} N_{int} &= \int_{\Omega} dN_{ij} \\ M_{int} &= \int_{\Omega} dM_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (B13)$$

où l'indice i est relatif à la section élémentaire i et l'indice j à la fonction $\varphi_j(\varepsilon)$ (Figure B2). Nous allons développer l'expression de N_{int} (ce qui reste valable pour M_{int}). Pour calculer les efforts internes dans ces matériaux, il faut connaître pour chaque intervalle de déformation $I_j = [\varepsilon_j; \varepsilon_{j+1}]$ la loi de contrainte -déformation $\varphi_j(\varepsilon)$. Sachant que le calcul est itératif, et qu'à chaque étape on connaît les valeurs δ_u et δ_w , on peut déterminer les déformations des fibres extrêmes ε_{i1} et ε_{i2} de chaque élément i.

A chaque étape, δ_u et δ_w étant fixés, alors $\varphi_j(\varepsilon)$ est seulement fonction de (y) pour un élément i quelconque. Par exemple, avec le diagramme $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ représenté à la figure B11, en comptant algébriquement ε_{i1} et ε_{i2} on a :

$\varepsilon_{im} = \varepsilon_{i1}$: déformation limite inférieure de l'élément i (en général vers les y négatifs);

$\varepsilon_{iM} = \varepsilon_{i2}$: déformation limite supérieure de l'élément i (en général vers les y positifs).



a) Élément i dans le repère oyz b) déformation de l'élément i c) Diagramme $\sigma - \varepsilon$ correspondant

Fig. B.11. Élément (i) soumis à une déformation quelconque

Dans ce cas, on peut écrire :

- avec un seul intervalle de déformation pour l'élément i avec φ_j ,

$$N_i = \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_{i2}} \varphi_j(\varepsilon) b_i(y) dy, \quad (\text{B14})$$

- avec deux intervalles de déformation pour l'élément i avec φ_j et φ_{j+1} ,

$$N_i = \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_{j+1}} \varphi_j(\varepsilon) b_i(y) dy + \int_{\varepsilon_{j+1}}^{\varepsilon_{i2}} \varphi_{j+1}(\varepsilon) b_i(y) dy, \quad (\text{B15})$$

- Avec trois ou plusieurs intervalles de déformation pour l'élément i (exemple : figure B11c),

$$N_i = \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_{k+1}} \varphi_k(\varepsilon) b_i(y) dy + \sum_{j=k+1}^{j=r-1} \int_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \varphi_j(\varepsilon) b_i dy + \int_{\varepsilon_r}^{\varepsilon_{i2}} \varphi_r(\varepsilon) b_i(y) dy, \quad (\text{B16})$$

où $r-k \geq 2$

et pour toute la section décomposée en NE éléments:

$$N_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{i=\text{NE}} N_i. \quad (\text{B17})$$

De même pour M_{int} :

- avec un seul intervalle de déformation pour l'élément i avec φ_j ,

$$M_i = \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_{i2}} \varphi_j(\varepsilon) b_i(y) y dy, \quad (B18)$$

- avec deux intervalles de déformation pour l'élément i avec φ_j et φ_{j+1} ,

$$M_i = \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_{j+1}} \varphi_j(\varepsilon) b_i(y) y dy + \int_{\varepsilon_{j+1}}^{\varepsilon_{i2}} \varphi_{j+1}(\varepsilon) b_i(y) y dy, \quad (B19)$$

- avec trois ou plusieurs intervalles de déformation pour l'élément i ,

$$M_i = \int_{\varepsilon_{i1}}^{\varepsilon_{k+1}} \varphi_k(\varepsilon) b_i(y) y dy + \sum_{j=k+1}^{j=r-1} \int_{\varepsilon_j}^{\varepsilon_{j+1}} \varphi_j(\varepsilon) b_i(y) y dy + \int_{\varepsilon_r}^{\varepsilon_{i2}} \varphi_r(\varepsilon) b_i(y) y dy, \quad (B20)$$

où $r - k \geq 2$,

et pour toute la section :

$$M_{int} = \sum_{i=1}^{i=NE} M_i \quad (B21)$$

Remarque importante

Dans le cas où $\varepsilon_{i1} < \varepsilon_m$: il faut remplacer la borne inférieure d'intégration de l'élément i ε_{i1} par ε_m . De même si $\varepsilon_{i2} > \varepsilon_M$: la borne supérieure d'intégration de l'élément i sera dans ce cas ε_M , au lieu de ε_{i2} .

-Virlogeux [VIR86] a utilisé pour la modélisation des sections des tables rectangulaires (b_i =constante) et pour $\varphi_j(\varepsilon)$ des fonctions polynomiales pour le béton, donc l'intégration peut se faire analytiquement mais nous avons dans ce cas des lois de comportement de matériaux simplifiées.

-Bouafia [BOU87] et Kachi [KAC97] ont modélisé les sections par une succession de tables trapézoïdales (b_i varie linéairement) mais $\varphi_j(\varepsilon)$ quelconque ce qui a nécessité un calcul numérique pour les intégrales définies.

- Dans cette étude, on utilise la méthode d'intégration numérique Gauss –Legendre rapportée par Demidovitch [DEM79] qui donne de bons résultats car les fonctions $\varphi_j(\varepsilon)$ et $b_i(y)$ ne sont pas oscillantes.

Rappel de la méthode d'intégration de Gauss- Legendre:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx = \frac{a_2 - a_1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} A_i f(x_i) \quad (B22)$$

où a_1 et a_2 sont des bornes d'intégration et,

$$x_i = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2} t_i,$$

t_i : zéros du polynôme de Legendre $P_n(t)$

A_i : coefficients de Gauss ;

n : nombre de points

$f(x)$: fonction quelconque

Avec cette modélisation des sections, nous avons remarqué, par exemple pour les sections circulaires (exemples : pieux en béton de fibres étudiées par Zhan [ZHA91], il suffit de prendre un seul élément et si le centre du cercle est pris comme origine alors la variation de la largeur b peut s'écrire (avec R rayon du pieu):

$$b_i(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}.$$

Par contre, avec la modélisation en tables rectangulaires ou trapézoïdales, il faut beaucoup d'éléments pour approcher avec une certaine précision ce genre de sections.

Dans la recherche de la solution par itération, par exemple avec la méthode de Newton-Raphson et la formule de Leibniz dans l'ouvrage de Piskonov [PIS80], on peut déterminer les différentes dérivées partielles ci-dessous :

$$\frac{\partial N_{int}}{\partial u}, \frac{\partial N_{int}}{\partial \omega}, \frac{\partial M_{int}}{\partial u}, \frac{\partial M_{int}}{\partial \omega}.$$

Rappel de la formule de Leibniz:

$$\left[\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx \right]' = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f_{\alpha}(x, \alpha) dx + f[b(\alpha), \alpha] \frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha] \frac{da}{d\alpha} \quad (B23)$$

$a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ bornes d'intégration dépendant de α .

Virlogeux [VIR86] a montré que si le déterminant de la matrice :

$$\Phi_t = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_{int}}{\partial u} & \frac{\partial N_{int}}{\partial w} \\ \frac{\partial M_{int}}{\partial u} & \frac{\partial M_{int}}{\partial u} \end{vmatrix} \quad (B24)$$

s'annule cela signifie que le maximum est atteint pour certaines courbes (exemple N_{fixe} et recherche M_{max}). Toutefois, ceci n'est valable, comme la montré Kachi [KAC97], que si la section considérée est suffisamment armée (non rupture de l'acier).

B.7. Efforts internes dans les sections « ponctuées »

Les équations déterminant les efforts internes des sections ponctuées sont s'écrivent :

- Pour chaque lit d'armatures passives, on a la déformation et les efforts internes :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{pi} = \delta_u + \delta_w \cdot y_{pi} \\ N_{pi} = A_{pi} \cdot \varphi_j(\varepsilon_{pi}) \\ M_{pi} = A_{pi} \cdot \varphi_j(\varepsilon_{pi}) y_{pi} \end{array} \right\} \quad (B25)$$

- Pour chaque câble i d'aciers de précontrainte, on a de même :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{ai} = \delta_u + \delta_w \cdot y_{ai} - \varepsilon_{a0i} \\ N_{ai} = A_{ai} \cdot \varphi_j(\varepsilon_{ai}) \\ M_{ai} = A_{ai} \cdot \varphi_j(\varepsilon_{ai}) y_{ai} \end{array} \right\} \quad (B26)$$

où ε_{a0i} représente la pré déformation ε_{a0i} des aciers de précontrainte.

Pour les lois donnant la déformation à partir des contraintes $\varepsilon = \varphi(\sigma)$, un programme d'inversion a été écrit pour trouver σ en fonction de ε .

B.8. Applications du programme « cmp »

B.8.1. Organigrammes et type de calcul

Le programme établi dans la présente étude est conçu pour être interactif et peut traiter plusieurs types de calcul. Avec les organigrammes B1 et B2, on peut traiter les 5 types de calcul ci- après.

Type 1 - N_{fixe} et recherche de M_{max} ,

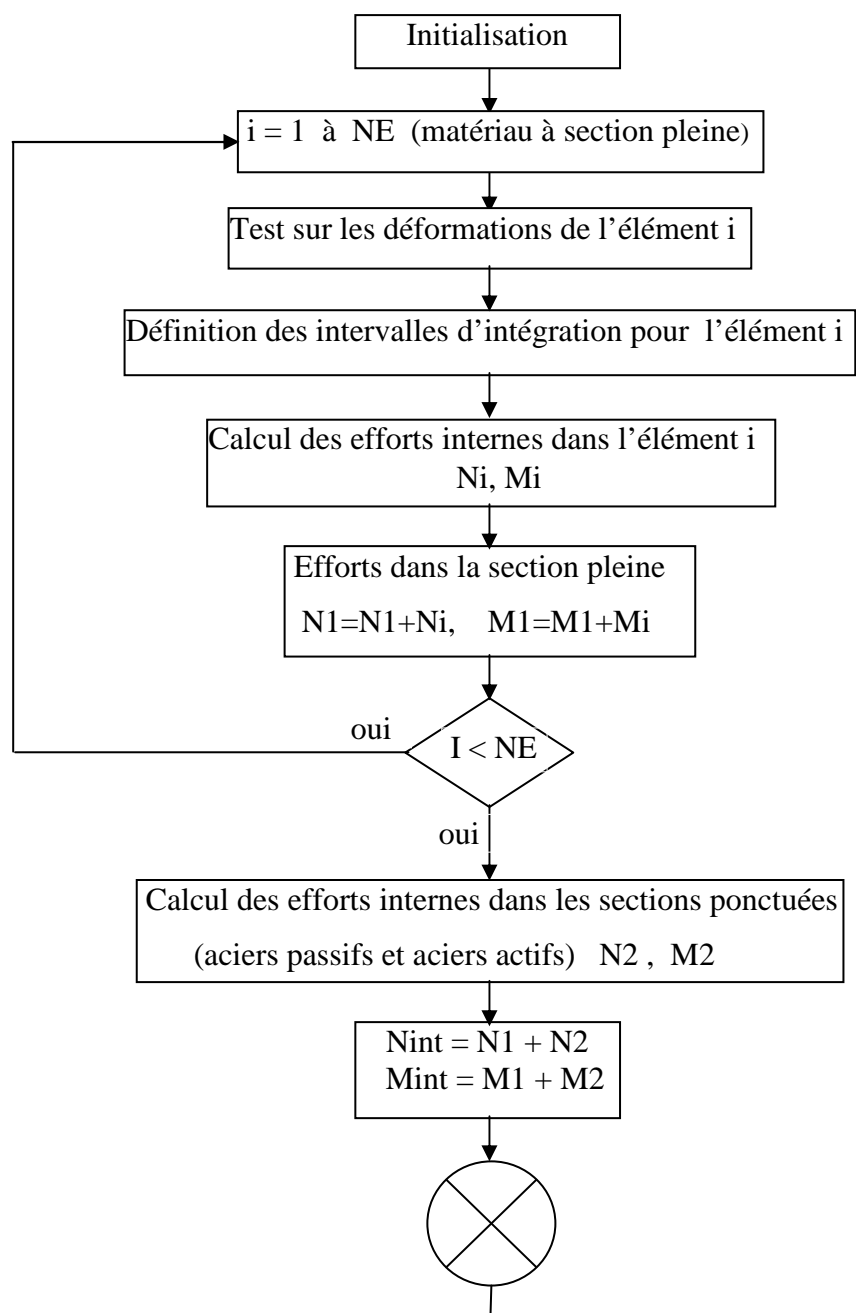
Type 2 - M_{fixe} et recherche de N_{max} ,

Type 3 - N_{fixe} et recherche de $M = f(dw)$,

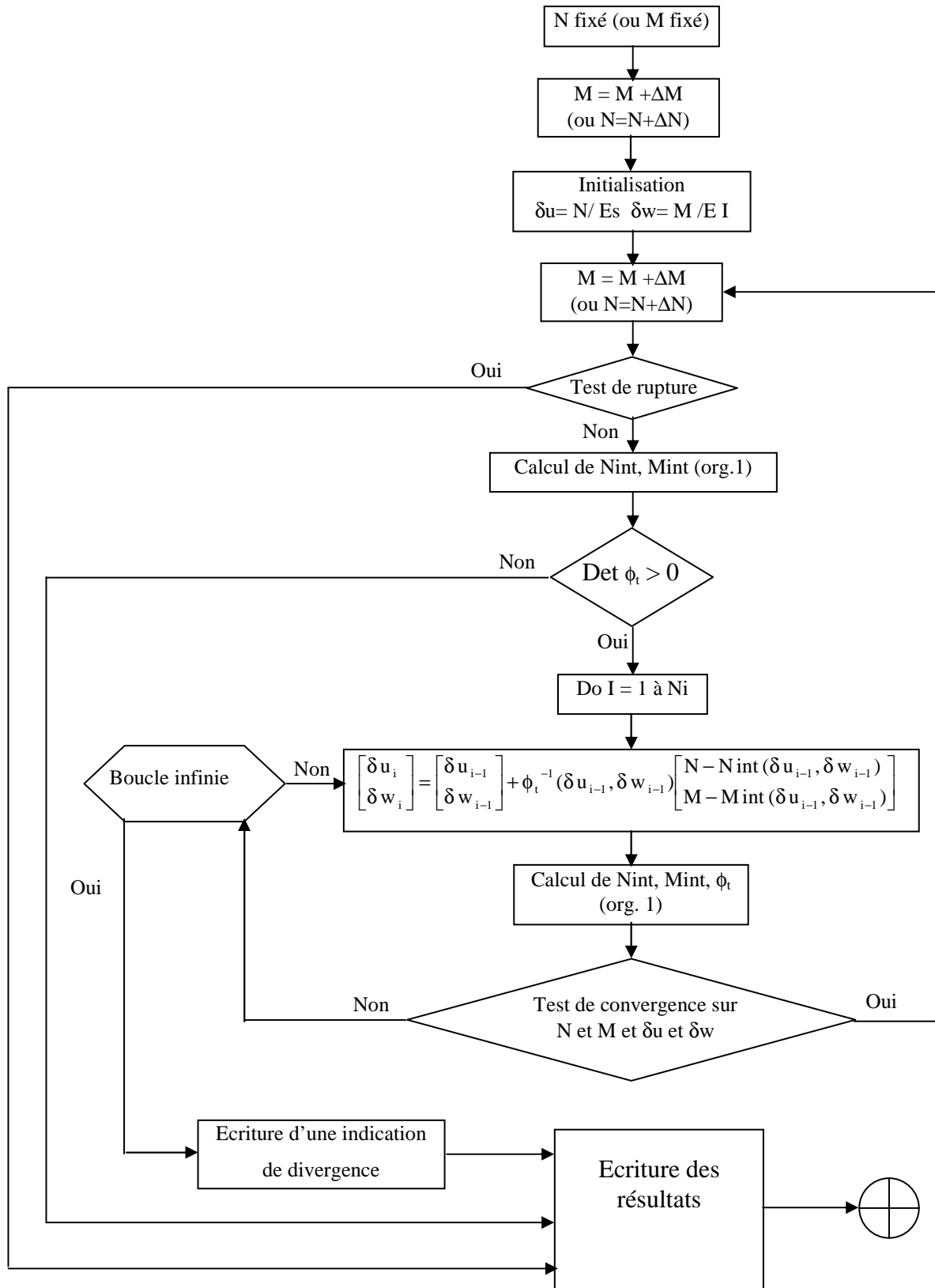
Type 4 - M_{fixe} et recherche de $N = f(du)$,

Type 5- Courbe d'interaction $N = f(M_{\text{max}})$.

Des exemples pratiques [BOU87] et [KAC97] et des exemples théoriques [VIR86] ont été traités à l'aide de ce logiciel et montrés ci-après, avec des résultats satisfaisants.



Org. B.1. Détermination des efforts internes pour une déformation $(\delta u, \delta w)$ de la section droite



Org. B.2. Organigramme général de calcul en élasticité non linéaire
– application à une section droite

B.8.2. Exemples pratiques

B.8.2.1. Application à la poutre OH4 en béton précontraint

Cette poutre testée par Bouafia [BOU91], a une section droite en double té (figure B12). La poutre de longueur 5,80m est posée sur deux appuis avec un porte à faux de 1,25m, les caractéristiques géométriques et techniques des matériaux sont présentés ci dessous. La tension initiale des aciers actifs en travée est de 556 kN.

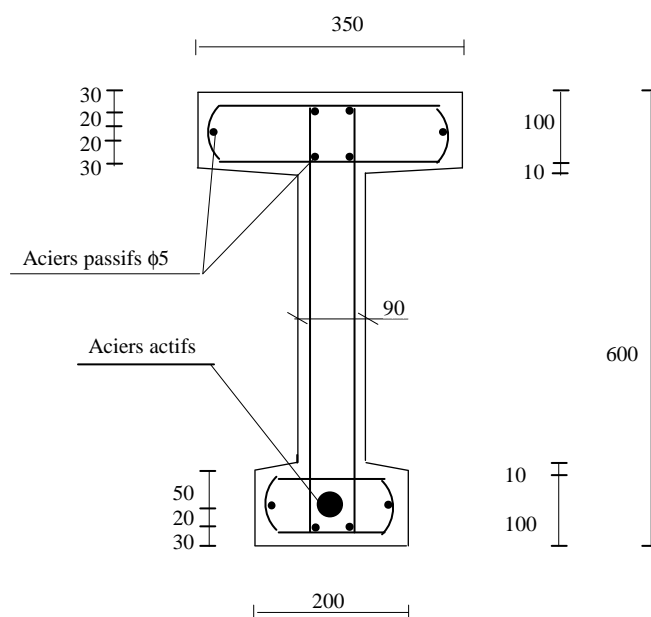


Fig. B12. Section droite en travée de la poutre OH4

f_{co} (MPa)	F_{tj} (MPa)	E_{bo} (MPa)	ϵ_{rt}	ϵ_o	ϵ_{cu}	K_b	K'_b
33	-3,20	31900	-0,0094	0,0016	0,0027	1,503	0,503

Tab. B1: Caractéristiques du béton de la poutre OH4

A_s mm ²	V_i (mm) [*]	σ_e (MPa)	σ_r (MPa)	ϵ_r	E_s (MPa)	TI^* (kN)
558	50	1890	1940	0,04	210.500	556

* TI : tension initiale des câbles.

Tab. B2. Caractéristiques des aciers actifs de la poutre OH4

A_s (par nappe en mm^2)	V_i (mm)	σ_e (MPa)	σ_r (MPa)	ϵ_r	E_s (MPa)
39	30 / 50 / 530 / 550 / 570	550	580	0,016	212.000

Tab. B3. Caractéristiques des aciers passifs de la poutre OH4

Essai poutre OH4		Simulation P - ϵ_b		Simulation M - δ_w	
ϵ_b (10^{-4})	P (kN)	ϵ_b (10^{-4})	P (kN)	δ_w (10^{-4})	M (kNm)
0	71,6	-0,95	16	-1,03	20
0,294	87,5	-1,29	48	-0,72	60
0,515	99,4	0,68	80	-0,42	100
0,956	119	1,48	112	-0,12	140
1,47	147	2,28	144	0,18	180
2,21	179	3,09	176	0,48	220
2,94	199	3,90	208	0,78	260
3,82	223	4,81	240	1,16	300
4,41	233	6,18	272	1,96	340
5,15	247	7,83	304	3,16	380
5,96	265	9,61	336	4,59	420
6,62	278	11,5	368	6,14	460
7,35	288	13,7	400	7,91	500
8,09	302	16,2	432	9,82	540
8,82	314	16,5	435	10,0	544
10,3	330	16,9	438	10,3	548
12	360	17,2	442	10,5	552
15	400	17,4	445	10,9	556
17	420	18,2	448	11,3	560
19	430	22,0	456	14,7	570
--	--	22,8	456,3	15,3	570,4

Tab. B4. Résultats expérimentaux et théoriques de la poutre OH4

A la figure B13, on a représenté la courbe expérimentale, P en fonction de la déformation de la fibre supérieure du béton ϵ_b . Bouafia [BOU91] a signalé quelques perturbations lors des lectures de ces déformations que nous pouvons observer avec la courbe simulée. Théoriquement, nous trouvons un moment maximum de 570 kNm (équivalent à $P_{\max} = 456\text{kN}$). Expérimentalement, il a été observé la rupture de la poutre par effort tranchant avec $P_{\max} = 440\text{ kN}$. L'écart observé entre les deux courbes est du aux

déformations d'effort tranchant, non prises en compte dans le calcul. Nous avons aussi tracé la courbe théorique $M - \text{courbure}$ représentée à la figure B14.

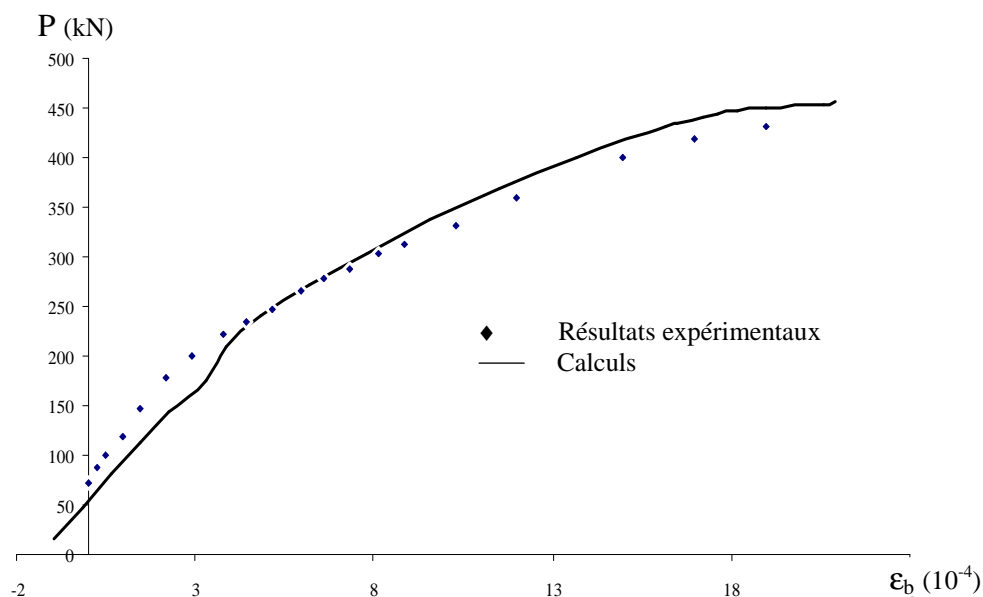


Fig. B13. Confrontation essai - calculs de la poutre OH4

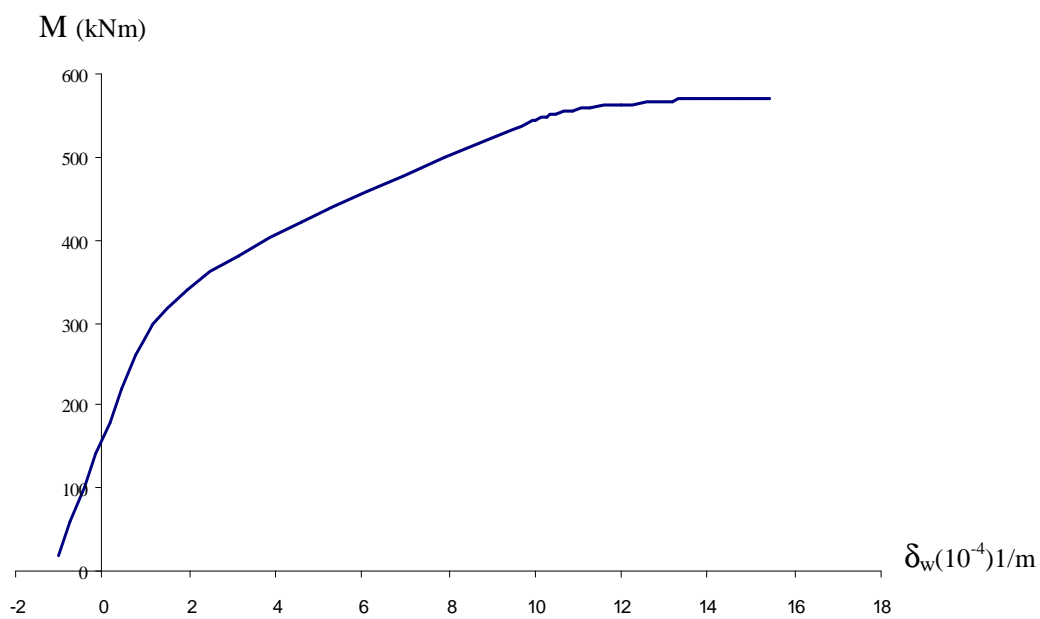


Fig. B14. Tracé de la courbe théorique $M - \delta_w$ de la poutre OH4

B.8.2.2. Application à une section circulaire en béton de fibres (pieu BF25).

Afin de mettre en évidence « le potentiel de résistance négligé » en modélisant une section circulaire pleine par des sections trapézoïdales ou rectangulaires, on a effectué une simulation sur un pieu «BF25 » en béton de fibres d'acier dont l'étude a été réalisée au CEBTP et rapportée par Kachi [KAC97]. Le pieu a un diamètre de 50 cm, et il est soumis à un effort normal centré de 1374 kN.

Le béton est renforcé par des fibres d'acier ondulées à raison de 25 kg/m³. Les caractéristiques mécaniques du composite et les propriétés des fibres sont données aux tableaux B5 et B6.

f_{co} (MPa)	F_{ij} (MPa)	E_{bo} (MPa)	ϵ_{rt}	ϵ_o	ϵ_{cu}	K_b	K'_b
47,75	-2,94	38181	-0,010	0,0021	0,0035	1,6	0,7

Tab. B5. Caractéristiques mécaniques du composite «BF25 »

E_s	L (mm)	ϖ (%)	ϕ (mm)	τ (MPa)	θ_o
2.10^5	60	0,31	1	7	0,405

Tab. B6. Propriétés des fibres d'acier ondulées

La loi de comportement utilisée en compression et celle de Sargin et en traction celle de Bouafia et Kachi (paragraphe B.4.8). Nous avons choisi cet exemple pour mettre en évidence, la nouveauté introduite dans ce logiciel En effet, avec notre programme, au lieu de partager la section droite en plusieurs «trapèzes élémentaires », il suffit d'écrire dans le logiciel que la largeur variable du pieu est égale à :

$$b = \sqrt{D^2 - 4y^2}$$

avec D = diamètre du pieu.

Avec le logiciel « cmp », on trouve $M_{max}=258,2$ kNm avec 10 sous éléments et un moment de 268 kNm en prenant un seul élément car dans ce dernier cas la section est prise en totalité. Les résultats sont présentés tableau B7 et figure B13.

Essai BF 25		Simulation avec 10 éléments		Simulation avec un seul élément	
δ_w (10^{-6})	M (kNm)	δ_w (10^{-4})	M (kNm)	δ_w (10^{-4})	M (kNm)
1,06	13,0	0,97	10	1,06	10
2,48	26,1	1,95	20	2,13	20
3,54	39,1	2,92	30	3,19	30
4,60	49,6	3,90	40	4,26	40
6,02	62,6	4,88	50	5,33	50
7,79	86,1	5,85	60	6,39	60
9,20	96,5	6,83	70	7,46	70
10,6	107	7,81	80	8,53	80
12,4	123	8,80	90	9,60	90
16,6	146	9,78	100	10,7	100
19,5	157	10,8	110	11,7	110
23,0	170	11,7	120	12,8	120
26,6	180	12,8	130	13,8	130
35,1	190	14,0	140	15,1	140
47,8	206	15,4	150	16,5	150
61,2	217	17,2	160	18,3	160
74,3	224	19,6	170	20,5	170
91,0	232	22,7	180	23,4	180
109	237	26,9	190	27,1	190
126	243	32,5	200	31,8	200
143	250	39,8	210	37,8	210
163	252	49,6	220	45,5	220
182	254	63,3	230	55,4	230
--	--	84,0	240	68,6	240
--	--	121	250	87,5	250
--	--	132	252	118	260
--	--	147	254	126	262
--	--	168	256	137	264
--	--	186	258	152	266
--	--	223	258,2	182	267,9

Tab. B7. Résultats expérimentaux et théoriques du pieu BF25

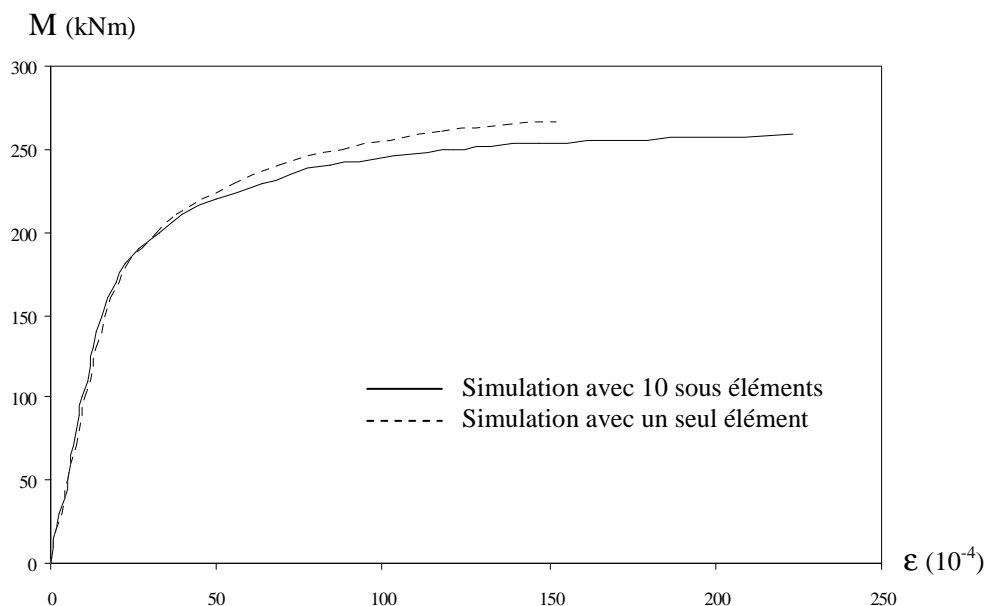


Fig. B13. Mise en évidence du potentiel de résistance négligé du pieu

B.8.2.3. Confrontation à des essais sur des poutres en béton armé: Essais Fouré[FOU85]

La confrontation de la présente étude avec les poutres OG3 et OG4, testées au CEBTP par Fouré, est présentée à la sous section IV.2.2. Les figures IV.12 et IV.14, représentent respectivement les diagrammes de $M = f(\delta w)$ de OG3 et OG4 où M représente le moment appliqué entre les deux charges et δw la rotation de la section au milieu de la poutre. Les résultats chiffrés, expérimentaux et théoriques, sont présentés tableau B8.

En utilisant le modèle proposé pour simuler le comportement du « béton armé » tendu, par la considération de l'acier fictif, le comportement des poutres OG3 ($f_c=52.5\text{MPa}$) et OG4 ($f_c=71\text{MPa}$) est bien approché. En effet, l'influence de la contribution du béton tendu se fait sentir dès le début de fissuration et ne s'annule ou chute réellement qu'à la plastification des aciers.

Les efforts et déformations, à la rupture des poutres, sont bien approchés par le présent calcul. En ce qui concerne la poutre OG3, les rapports sont 0,97 et 1,02. Pour la poutre OG4, les rapports sont de 0,91 et 0,88. Cet écart est du au fait que la charge de rupture n'a pas été atteinte lors de l'essai. Elle a été, effectivement, estimée par Fouré, en extrapolant la courbe.

Résultats expérimentaux Poutre OG3		Résultats théoriques (présente étude) Poutre OG3		Résultats expérimentaux Poutre OG4		Résultats théoriques (présente étude) Poutre OG4	
δ_w ($10^{-4}/m$)	M (kNm)	δ_w ($10^{-4}/m$)	M (kNm)	δ_w ($10^{-4}/m$)	M (kNm)	δ_w ($10^{-4}/m$)	M (kNm)
1,25	1,31	2,4	2	1,25	1,31	2,2	2
5,00	2,78	4,90	4	5,00	2,78	4,3	4
12,5	7,35	7,3	6	12,5	7,35	6,5	6
26,3	10,5	14,1	8	23,8	10,5	9,0	8
42,5	13,4	23,6	10	42,5	13,4	17,6	10
57,5	16,7	33,2	12	57,5	16,7	26,8	12
72,5	19,4	42,9	14	70,0	19,4	36,1	14
85,0	22,7	52,6	16	85,0	22,7	45,4	16
100	25,8	61,3	18	100	25,8	54,8	18
116	28,9	69,5	20	113	28,9	64,1	20
136	31,9	77,7	22	126	31,9	72	22
145	35,0	86	24	140	35,0	80	24
160	37,9	94,2	26	155	37,9	88	26
171	41,1	103	28	171	41,1	96	28
220	44,1	111	30	220	44,1	104	30
338	46,1	119	32	325	46,6	112	32
590	47,7	127	34	595	48,0	120	34
--	--	141	36	--	--	135	36
--	--	150	38	--	--	143	38
--	--	162	40	--	--	152	40
--	--	181	42	--	--	166	42
--	--	212	44	--	--	189	44
--	--	261	46	--	--	224	46
--	--	337	48	--	--	277	48
--	--	464	50	--	--	357	50
--	--	483	50,2	--	--	476	52
--	--	504	50,4	--	--	669	54,0
--	--	531	50,6	--	--	698	54,2
--	--	549	50,7	--	--	734	54,4
--	--	554	50,72	--	--	756	54,5
--	--	559	50,74	--	--	777	54,56
--	--	566	50,76	--	--	791	54,58

Tab. B8. Résultats expérimentaux et théoriques des poutres OG3 et OG4

B.9. Conclusions

Avec la poutre OH4, le logiciel « CMP » simule correctement le chargement jusqu'à rupture. La charge maximale obtenue est très voisine du poids expérimental avec 4% d'erreurs.

Pour le pieu BF25 de section circulaire, nous avons remarqué que les calculs étaient relativement beaucoup plus rapides en prenant un seul élément. A partir de la figure A.10, on remarque que le potentiel de résistance est meilleur avec un seul élément (qu'avec 10 éléments), en effet en considérant $b = \sqrt{D^2 - 4y^2}$ la section du pieu est prise en totalité. Dans ce cas, la courbure est beaucoup plus faible.

Pour les poutres OG3 et OG4 en béton armé, le modèle développé suit correctement les courbes expérimentales. Le mode de rupture est obtenu par flexion pour les deux poutres, et les résultats obtenus sont en parfaite concordance avec l'expérimentation.

RESUME

La contribution du béton tendu en phase fissurée est prise en compte dans les calculs de structures pour évaluer correctement les déformations et limiter aussi, pour des raisons de sécurité, les ouvertures de fissures. Cette étude a pour but d'établir les relations nécessaires pour mener ces calculs dont l'élément de base est le tirant. Des méthodes de calcul, basées sur la loi contrainte d'adhérence - glissement entre l'acier et le béton, sont présentées en fonction des caractéristiques des matériaux utilisés et surtout du pourcentage d'acier.

La loi d'adhérence - glissement $\tau(g)$ adoptée par le comité européen de béton (CEB-FIP, 1988) est définie en estimant la valeur maximum d'adhérence τ_1 , mais en fixant une valeur très variable du glissement correspondant g_1 . Cette valeur (dont le cas où elle n'est pas connue *a priori*) qui influence l'allure de la courbe $\tau(g)$, et donc les ouvertures de fissures est déterminée ici en considérant l'espacement moyen des fissures, le pourcentage d'acier et les caractéristiques des matériaux utilisés (béton et acier).

Mots clés :

Béton armé, « aciers fictifs », « tension stiffening », adhérence, fissuration, modélisation.

ABSTRACT

The contribution of the cracked stretched concrete is taken into account in the calculations of structures to estimate accurately the deformations and also to limit, for the sake of security, the opening of cracks. The aim of this study is to lay down the expressions which are necessary to perform these calculations, the basic element of which is the tie-beam. Some methods of calculation resting on the relation between the adherence-stress and the steel-concrete sliding are produced according to the specifications of the materials in use, and especially the rate of steel.

The law of adhesion - sliding $\tau(g)$ adopted by the European concrete committee (CEB-FIP, on 1988) is defined by estimating the maximum value of adhesion τ_1 , but by fixing a very variable value of the corresponding sliding g_1 . This value (who the case where it is not known in priori) which influences the look of the curve $\tau(g)$, and thus the openings of cracks is determined here by considering the average spacing of cracks, the percentage of steel and the characteristics of used materials (concrete and steel).

Key words:

Reinforced concrete, "fictive steels", "tension stiffening", adherence, cracking, modeling.