REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

EN ELECTROTECHNIQUE
Option : Entrainements Electriques

Présenté par

M^r. Madjid MEZIANI

Ingénieur d'état en électrotechnique

Thème

Contribution à la modélisation analytico-numérique des transformateurs de puissance

Soutenu publiquement le 18/12/2011 devant le jury d'examen :

M^r. Hassane MOHELLEBI	Professeur	UMMTO	Président
M^r. M'hemed RACHEK	Maitre de Conférences A	UMMTO	Rapporteur
M^r. Nacer Eddine BENAMROUCHE	Professeur	UMMTO	Examinateur
M^r. Salah HADDAD	Professeur	UMMTO	Examinateur
M^r. Tahar OTMANE CHERIF	Maitre de conférences A	UMMTO	Examinateur

Remerciements

*J'adresse des remerciements tout particuliers à mon promoteur Monsieur **M'hemed RACHEK** maitre de conférence « A » à l'université de Tizi-Ouzou, qui a rendu possible ce travail de mémoire en me faisant profiter de ses vastes connaissances et de son expérience.*

*Je remercie profondément Monsieur **Hassane MOHELLEBI** professeur au département de l'électrotechnique de l'UMMTO de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de soutenance.*

*C'est pour moi un grand honneur de voire juger ce travail par monsieur **Nacer Eddine BENAMROUCHE** professeur au département de l'électrotechnique de l'UMMTO, je voudrai lui témoigner aussi, ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance.*

*Que Monsieur **Salah HADDAD** professeur au département de l'électrotechnique de l'UMMTO, soit vivement remercié pour l'intérêt qu'il à accordé au sujet et pour nous avoir fait l'honneur d'accepter l'évaluation de ce travail.*

*Mes sincères remerciements vont également à Monsieur **Tahar OTMANE CHERIF** maitre de conférences « A » à l'université de Tizi-Ouzou pour avoir accepté de participer dans le jury de soutenance.*

*Je tiens vivement à remercié Monsieur **Arezki DICHE** enseignant à l'UMMTO, pour ses conseils judicieux et sa sympathie.*

Sommaire

Chapitre II : Modélisation électromagnétique des transformateurs

Chapitre III : Modélisation des transformateurs par une méthodologie mixte Circuits Electriques Magnétiquement Couplés (CEMC) et Eléments Finis(EF)

Chapitre IV: Applications est validations

Introduction Générale

La modélisation des transformateurs de puissance à traditionnellement occupé beaucoup d'attention durant des années, pour leur importances dans les systèmes de puissance, le grand intérêt porté à l'étude de ces dernier on permit de réaliser un développement remarquable dans le domaine de la conversion, du transport et de la distribution de l'énergie électrique. La compréhension des phénomènes électromagnétiques qui régissent leur fonctionnement et la détermination des différentes pertes et les paramètres électriques constitue une étape déterminante pour une meilleure exploitation de ces dispositifs. Ce qui permet également de prédire sont comportement aux différentes contraintes pour éviter sa détérioration, et élargir sa durée de vie en vue de minimiser son coût d'exploitation. Il existe deux types de modélisations : la modélisation par calcul de champs dite numérique ou semi-analytique et la modélisation par circuit électrique équivalent dite analytique.

Vu la complexité des caractéristiques géométriques et physiques des systèmes électromagnétiques réels, les méthodes disponibles sont alors des méthodes numériques ou semi-analytiques qui font appel à des techniques de discrétisations. Les outils numériques de modélisation sont nécessaires pour traiter des problèmes liés au fonctionnement du transformateur en exploitation et aussi à leur conception, cela offre une modélisation fine des phénomènes physiques en permettant d'accéder aux variables locales et aux variations spatio-temporelles des différentes grandeurs. Plusieurs méthodes ont étés développées, à chaque méthode ses avantages et ses inconvénients, ses applications et ses limites. On peut citer la méthode des volumes finis, méthode des différences finis et méthode des éléments finis. Le choix se fait selon plusieurs contraintes physiques et selon la complexité des géométries des dispositifs électrotechniques, les propriétés physiques des matériaux, et le cout en capacité mémoire et en temps de résolution.

Le but de notre travail est de mettre en œuvre une méthode de modélisation, pour retranscrire le comportement électromagnétique du transformateur de puissance dans les différents états opérationnels aussi bien en régime permanent qu'en régime transitoire.

On a opté pour la méthode des Circuits Electriques Magnétiquement Couplés (CEMC) qui se base sur des techniques de discrétisations. Une méthode qui offre beaucoup de possibilités de modélisations locale des transformateurs et permet aussi l'évaluation des paramètres électriques dans une large gamme de fréquences. Cette dernière trouve ces limites en regardant la géométrie réel du transformateur et aux détails (non linéarité, hystérésis, anisotropie de la perméabilité magnétique et conductivité électrique du circuit magnétique). La présence de circuit magnétique complique l'approche semi-analytique, la méthode des éléments finis est une excellente alternative pour des géométries complexes et à caractères physiques non linéaires. Mais elle peut conduire à des difficultés pour la prise en compte de grand nombre de conducteurs, et plus particulièrement en présence de conducteurs filaires.

Pour cette raison on à adopté pour une méthodologie hybride pour la modélisation électromagnétique qui s'appuie sur des formulations analytiques et numériques basées respectivement sur la théorie des circuits couplés et la méthode des éléments finis.

Ce travail ce décompose en quatre chapitres :

Le premier chapitre expose les différents types de transformateurs de puissances, leur description et constitution ainsi que les méthodes de modélisation. Nous aborderons le problème de modélisation en utilisant deux méthodes : la première est basée sur le schéma électrique équivalent global et la deuxième méthode est une approche locale basée sur un calcul numérique ou bien semi-analytique effectué respectivement par la méthode des éléments finis (EF) et la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés (CEMC).

Le deuxième chapitre a pour objet la description des phénomènes électromagnétiques dans le cadre des hypothèses de l'électrotechnique. Le modèle mathématique, que nous allons élaborer comprendra les équations de Maxwell, les lois de comportement des matériaux et les conditions aux limites. Puis, nous donnons les formulations, magnétostatique et magnétodynamique en introduisant le potentiel vecteur magnétique.

Le troisième chapitre est consacré à l'application de la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés sur un transformateur de puissance. La considération de contraintes de conservation en courant et tension permet l'assemblage du système matriciel électromagnétique complet nécessaire au calcul de la distribution de densités de courant et donc des pertes Joule dans les conducteurs.

La problématique d'étude nécessite une méthode mixte ou bien un couplage analytico-numérique, cela nous permettra de tirer profit de deux méthodes, afin de pouvoir retranscrire efficacement le comportement de cet équipement. Le circuit magnétique réel sera pris en charge à travers le modèle magnétique formulé numériquement par la méthode des éléments finis.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation ainsi que l'exploitation des résultats obtenus avec le modèle développé. Ces derniers seront confrontés aux mesures expérimentales données par l'entreprise Electro-Industries d'Azzazga.

Chapitre I

État de l’art sur la modélisation des transformateurs

I.1 Introduction

Les transformateurs sont des machines statiques à induction électromagnétique généralement utilisés pour modifier les caractéristiques de l’énergie électrique alternative afin de la rendre aussi commodes que possible à tous les stades, de la production, du transport de la distribution et de l’utilisation. Cet appareil est d’un emploi absolument universel, en effet il transforme les signaux des sources de tensions et de courants sinusoïdaux en signaux de même fréquence mais de valeurs efficaces généralement différentes.

La compréhension des phénomènes électromagnétiques qui régissent le fonctionnement des transformateurs et la détermination de ses pertes, constitue une étape déterminante pour l’exploitation optimale de ces appareils et également pour leur conception. La modélisation des transformateurs est une tâche très difficile due à l'introduction des caractéristiques du noyau magnétique tel que la saturation, l’hystérésis et les pertes par courants de Foucault, aussi bien que de sa topologie et la configuration de ses enroulements. Ainsi, une variété de méthodes pour sa modélisation et analyse de sont comportement pour différents états opérationnels ont été développées. On peut distinguer deux approches de modélisation :

- Approche locale orientée vers le calcul numérique ou bien semi-analytique.
- Approche globale orientée vers le calcul analytique basé sur un schéma équivalent électrique ou magnétique (réseau de réluctances).

I.2 Principaux éléments des transformateurs

D'une manière générale, un transformateur est constitué d'un circuit magnétique feuilleté et d'un ensemble de bobines séparées par des écrans électrostatiques qui entourent des noyaux magnétiques. Chaque bobine formant le milieu conducteur est organisée en paquets de spires et chaque spire étant constituée de brins élémentaires. Les différents types de transformateurs se distinguent suivant la disposition géométrique de leurs constituants, de la forme de leur circuit magnétique et du type de refroidissement.

I.3 Principe de fonctionnement

En vertu de la loi de Faraday, lorsqu’un flux d’induction magnétique variable $\emptyset$ circule dans le circuit magnétique, il induit dans chacun des enroulements une force électromotrice proportionnelle dans le temps aux taux de changement ($d\emptyset/dt$) et au nombre de spire que comporte cet enroulement.

Lorsque le primaire est alimenté par une source alternative, il circule dans le circuit magnétique un flux également alternatif dont l'amplitude dépend du nombre de spires du primaire et de la tension appliquée. Ce flux induit dans l'enroulement secondaire une tension proportionnelle au nombre de spires du secondaire. La fermeture du secondaire sur une charge provoque la circulation du courant secondaire.

Le noyau magnétique fournit un chemin de canalisation de flux magnétique tel que montré par la figure (I-1)

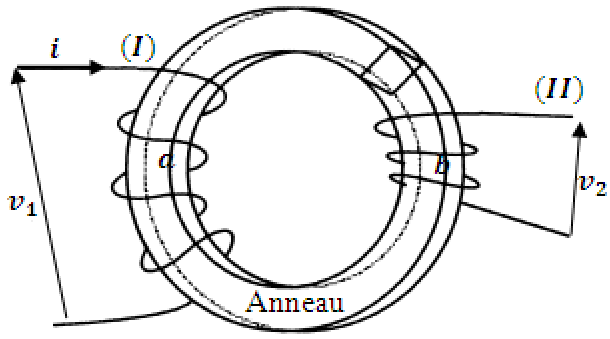

Fig. I-1 : Circuits magnétiques et électriques liés.

I.4 Différents types de transformateurs

Il existe différents types de transformateurs, mais nous nous intéresserons à l'étude des transformateurs de puissances de réseaux électriques car ils présentent le plus grand intérêt dans le développement de l'interconnexion des réseaux.

du point de vue construction, deux principales technologies sont distinguées, à savoir les transformateurs à colonnes et les transformateurs cuirassés.

I.4.1 Transformateur à colonnes

Le transformateur à colonnes est constitué de deux enroulements concentriques par phase. Ces enroulements sont montés sur un noyau ferromagnétique qui se referme à ses extrémités via des culasses généralement de sections circulaires afin d'assurer une bonne canalisation du flux magnétique. Dans cette technologie, ce sont les enroulements qui entourent le circuit magnétique (figure. I.2).

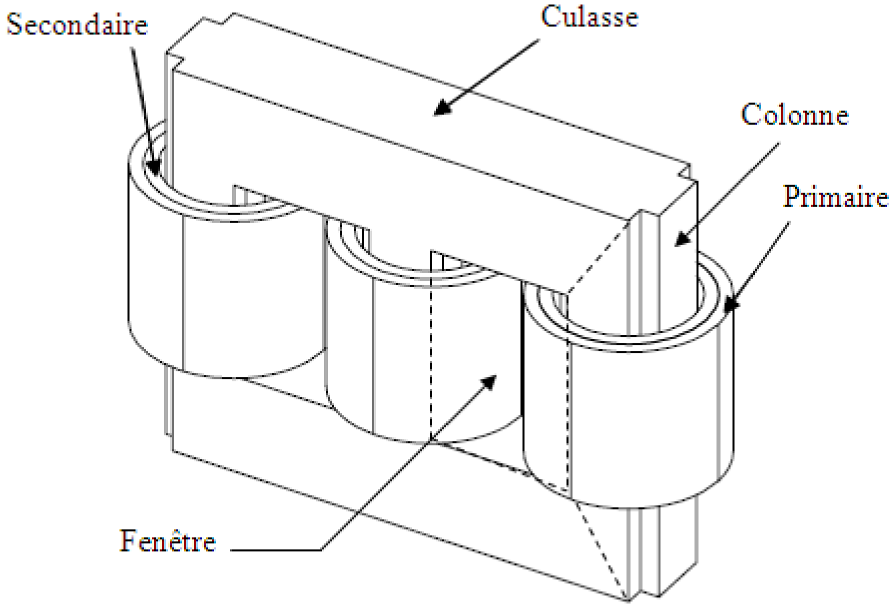

Fig. I.2 : Transformateur à colonnes [Le-1999]

I.4.1.1 Les enroulements

Les enroulements sont constitués de spires dont le nombre est différent pour les enroulements de haute et de basse tension respectivement primaire/secondaire. Les spires sont elles mêmes subdivisées en plusieurs brins mis en parallèle. Les conducteurs formant les enroulements sont en cuivre ou en aluminium pour les puissances plus importantes. Ces matériaux sont ainsi préférés à d'autres pour leurs bonnes conductivités thermiques. Selon la gamme de puissance des transformateurs, les conducteurs peuvent êtres sous forme de fils massifs, de section circulaire ou carrée, de type méplat, ou encore laminés en fines feuilles **[**Lef-2006].

I.4.1.2 Le Circuit magnétique

Le noyau est composé d'un empilage de tôles ferromagnétiques à cristaux orientés, isolées électriquement entres elles afin de réduire les pertes par courants de Foucault. Les tôles de circuit magnétique de type (Fe-Si), à grain orienté laminé à froid, ont une épaisseur qui varie de 0.15mm à 0.3mm [Gue-1994]. Des joints enchevêtrés et orthogonaux effectuent la liaison entre les colonnes et les culasses sur les transformateurs de petite puissance. Ces joints qui constituent une succession de stratifications jouent un rôle important dans la performance du noyau afin d'obtenir une stabilité mécanique plus élevée, et diminuent également le bruit des vibrations pendant le fonctionnement du transformateur. [Nak-1982] [Oli-2003]. L'espace délimité par deux colonnes successives et les culasses est dénommé "fenêtre magnétique" et accueille donc les bobinages **[**Lef-2006].

I.4.1.3 Limitations des transformateurs à colonnes

Le circuit magnétique des transformateurs à colonnes est plus grand en volume que celui d'un type cuirassé. Par conséquence, le nombre de spires et le rapport volumique entre les matériaux conducteurs et ferromagnétiques sont plus importants. Par ailleurs ce type de construction qui à fait ses preuves pour des puissances relativement faibles (environ jusqu'à 30 KVA), présente quelque difficultés pour des fortes puissances (plus de 100 KVA) et des tensions plus élevées. Pour des tensions supérieures à 220 KV, certains constructeurs ont abandonné la construction du transformateur à colonne au profit de la structure cuirassée.

I.4.2 Transformateur cuirassé

Dans cette technologie, le circuit magnétique entoure les enroulements formés de bobines rectangulaires à axe horizontal. Le circuit magnétique, de section rectangulaire est constitué de tôles posées à plat. La cuve assure le calage du circuit magnétique et des enroulements.

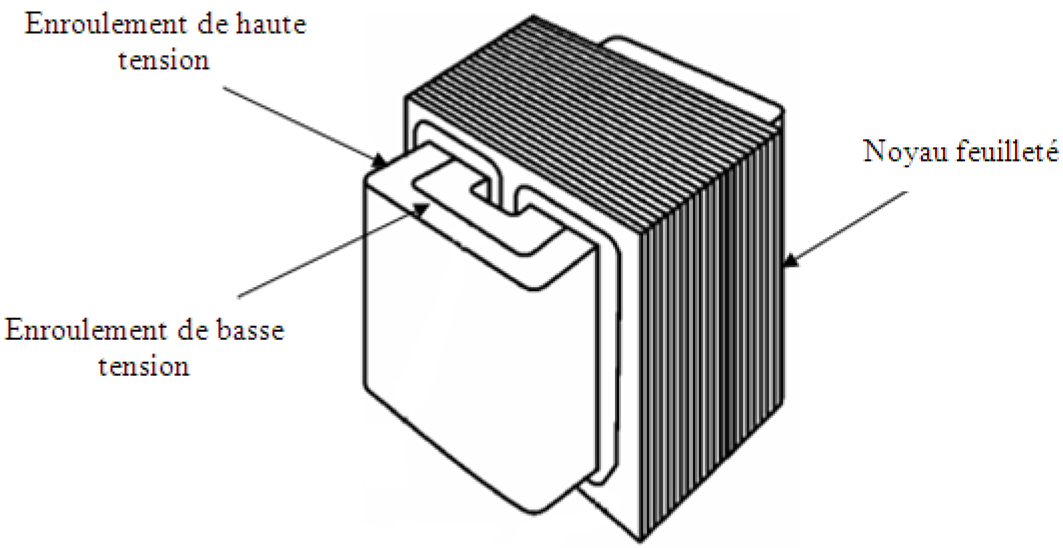

Fig. I.3 : Transformateur type cuirassé

Ces transformateurs sont utilisés au sein des réseaux de transport et de répartitions ou les surtensions transitoires sont fréquentes. Dans cet environnement, ils doivent se prémunir des effets néfastes de ces surtension sur les enroulements. Pour cela des écrans sont utilisés afin de réduire les contraintes liées aux champs électriques dans les bobinages.

I.4.2.1 Les enroulements

Dans ce type de construction la bobine qui est en fait une grande spirale rectangulaire très plate (galette), contient un certain nombre de spires, chaque spire étant elle même constituée d'une ou de plusieurs couches de conducteurs. Les galettes sont alternées entre la haute et la basse tension afin de diminuer les fuites magnétiques et le gradient de tension. En outre, cette topologie offre l'avantage d'engendrer des forces en opposition entre chaque galette lors de court-circuit.

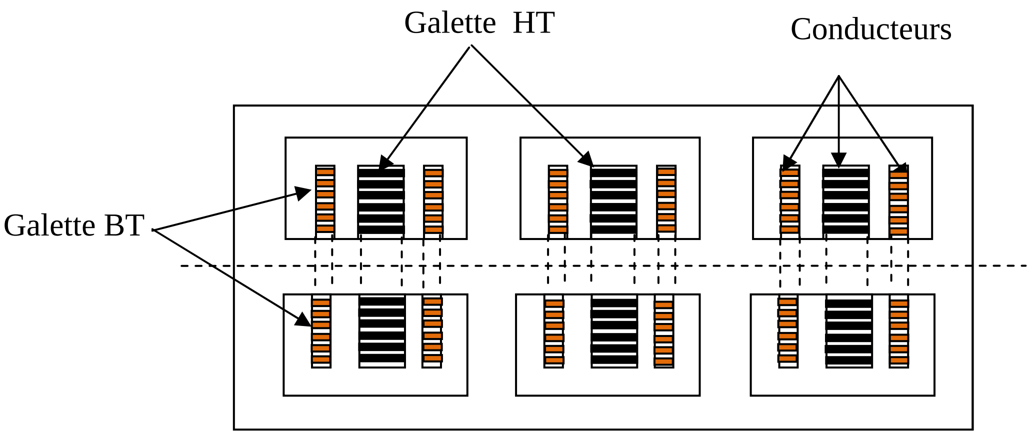

Fig. I.4 : Transformateur triphasé type cuirassé [Kos-1979] **[**Lef-2006].

I.4.2.2 Les écrans électrostatiques

Des feuilles métalliques à haute résistivité et de faible épaisseur sont employées pour réduire les contraintes entre les spires. Celles-ci sont insérées entre les feuilles isolantes des bobines haute tension. L'effet capacitif, uniformément distribué de cette manière permet alors de mieux répartir la tension sur toute la longueur de la bobine lors d'une onde de choc.

I.4.2.3 Avantages et inconvénients du transformateur cuirassé

Le transformateur cuirassé possède un circuit magnétique plus court, ce qui permet d'avoir un courant à vide relatif plus faible et ses enroulements sont plus simples car le nombre de spires est moins grand vu que la section du noyau dans un transformateur cuirassé peut être plus grande que dans le transformateur à colonnes. Mais il présente aussi certains inconvénients : ses enroulements sont moins accessibles à l'agent refroidissant, l'examen et la réparation sont plus difficiles et demande d'avantage de matériaux isolants pour la haute tension.

I.4.3 Transformateur ordinaire de phase

Du point de vue de leurs applications, les transformateurs ordinaires de phase (monophasé, biphasé, et triphasé), groupés dans trois ou cinq colonnes se classent en trois catégories :

- Les transformateurs pour les grands réseaux et les grandes centrales, leur puissance varie de 100 à 400 MVA.
- Les transformateurs pour réseaux de répartition qui alimentent les lignes à moyenne tension, leur puissance varie de 5 à 30 MVA.
- Les transformateurs de distribution destinés à l’alimentation des utilisateurs de

l’énergie éclectique en basse tension (380 ou 220V), leur puissance varie de 5 à 1000 KVA.

I.4.4 Transformateur immergé dans l'huile et transformateur sec

Selon le type de refroidissement on distingue : les transformateurs à l’huile et les transformateurs secs.

I.4.4.1 Transformateur à l’huile

Pour prévenir l’action néfaste de l’air sur l’isolation des bobines et améliorer le refroidissement du transformateur, on place le noyau magnétique avec les enroulements dans une cuve remplie d’huile minérale. Malgré ces propriétés avantageuses, l’huile de transformateurs a deux défauts principaux : elle est inflammable et sa vapeur forme avec l’air dans certaines conditions un mélange explosif.

En plus de son rôle de réservoir au liquide diélectrique, la cuve assure le maintien mécanique du circuit magnétique et des enroulements. La construction de la cuve généralement de forme ovale est liée au calcul thermique du transformateur. Le refroidissement du transformateur est d’autant plus difficile à réaliser que la puissance du transformateur est grande. La cuve est tapissée de shunts magnétiques, dont on distingue deux types :

- Les shunts magnétiques formés d’un empilement de tôles magnétiques semblable au noyau et qui canalise le flux de fuite.
- les shunts amagnétiques plus économiques, constitués de plaque de cuivre ou aluminium ayant pour rôle de repousser le flux de fuite.

I.4.4.2 Transformateur sec

Les transformateurs immergés dans l'huile liquide à base minérale ou de silicone sont plus répondus pour les plus fortes puissances et les niveaux de tension élevés, mais présentent des risques de fuite, d'incendie et la pollution de l'environnement. Cela à permis de laisser la place aux transformateurs avec technologie sèche, avec des enroulements enrobés (imprégnés). Le système d'isolation électrique est remplacé par une résine (époxyde) et l'air. Des résines ont été développées pour résister aux tensions électriques et aux contraintes mécaniques, thermiques qui apparaissent dans un transformateur en service. L'aspect favorable est son comportement non inflammable et léger. Ce genre de transformateur est le plus appropriés pour la distribution de l'électricité en degré élevé de sûreté [Esl-2010].

I.5 Transformateurs triphasés

Les transformateurs triphasés sont présents à différents endroits dans les réseaux électriques pour adapter les valeurs efficaces des tensions aux niveaux souhaitables. De façon simplifiée, l'énergie électrique est produite dans les centrales sous des tensions moyennes. Le transport à longue distance exige des hautes tensions afin de limiter les pertes par effet Joule et réduire le dimensionnement des conducteurs, et l'utilisation demande des tensions basses ou moyennes. Des transformateurs élévateurs sont nécessaires au départ, et des transformateurs abaisseurs sont indispensables à l'arrivée coté consommateurs.

I.6 Groupe de couplage

Le groupe de couplage désigne l'association des couplages des enroulements choisis pour la haute tension et pour la basse tension. L'enroulement haute tension d'un transformateur triphasé de nombre de spires N_1 peut être connecté en étoile (symbole Y) ou en triangle (symbole D). L'enroulement basse tension avec un nombre de spires N_2 peut être connecté en étoile (symbole y), en triangle (symbole d) ou en zigzag (symbole z). Les systèmes des tensions du primaire et du secondaire d'un transformateur triphasé sont en général déphasés avec un angle θ. Comme cette angle est multiple de $\pi/6$, on définit l'indice horaire par : $I = \theta/(\pi/6)$

I.6.1 Couplages normalisés

Trois couplages sont particulièrement utilisés en pratique : ce sont les couplages normalisés Yy 0, Dy 11, Yz 11.

I.6.1.1 Couplage étoile –étoile

Pour le couplage étoile –étoile, les tensions aux bornes des bobines du primaire est du secondaire de la même colonne sont des tensions simples (Fig. I.5-a). Ce qui permet de construire le diagramme vectoriel (Fig. I.5-b). le rapport de transformation est $m = N_2/N_1$. Le déphasage θ de basse tension par rapport à la haute tension est nul, ce qui donne un indice horaire I=0.

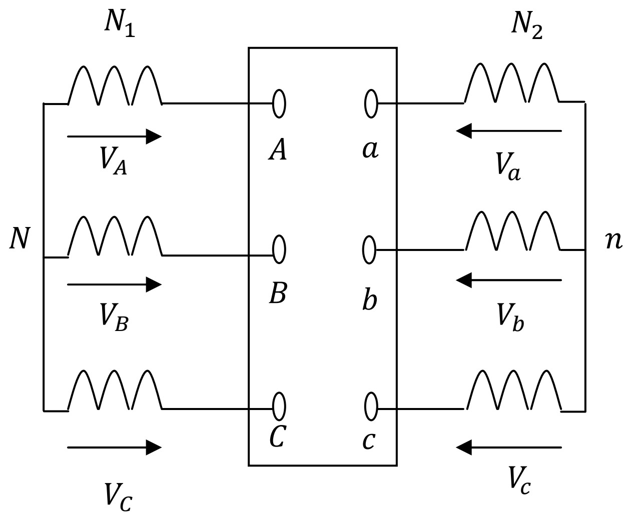

Fig. I.5-a: Couplage Yy 0

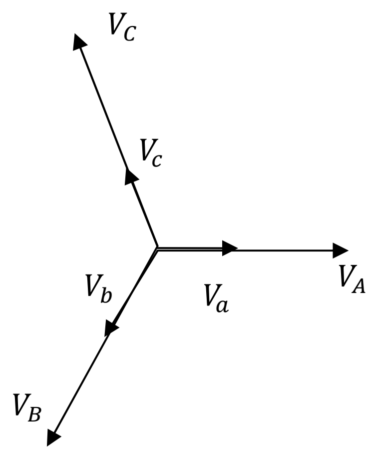

Fig. I.5-b : Diagramme vectoriel

I.6.1.2 Couplage triangle-étoile

Pour le couplage triangle-étoile la tension aux bornes d'une phase du primaire est une tension composée, alors que la tension aux bornes de la phase correspondante du secondaire est une tension simple (Fig. I.6-a). Le rapport de transformation est $m = \sqrt{3}.(N_2/N_1)$. Le déphasage θ entre les tensions du primaire et le secondaire est de $(-\pi/6)$, ce qui veut dire l'indice horaire est I=11. (Fig. I.6 -b)

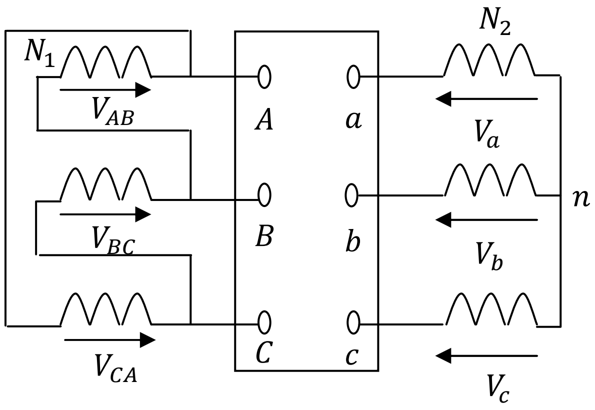

Fig. I.6-a : Couplage Dy 11

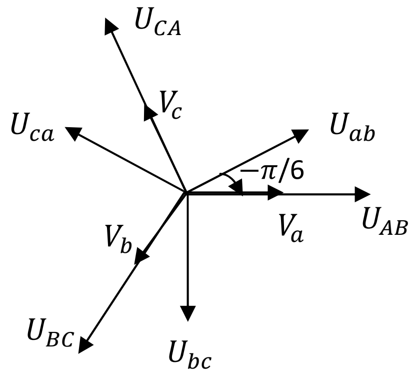

Fig. I.6-b : Diagramme vectoriel

I.6.1.3 Couplage étoile –zigzag

Pour le couplage étoile zigzag **(**Fig. I.7-a), la tension aux borne d'une phase du primaire est une tension simple alors qu'une tension aux bornes d'une phase du secondaire est la somme des deux tensions aux bornes de demi bobines ce qui permet de construire le diagramme vectoriel **(**Fig. I.7-b). Le rapport de transformation est $m = \sqrt{3}.(N_2/N_1)$.

Le déphasage θ entre les tension est de $(-\pi/6)$, en choisissant la première détermination position positif de l'angle, ce qui veut dire l'indice horaire est I=11.

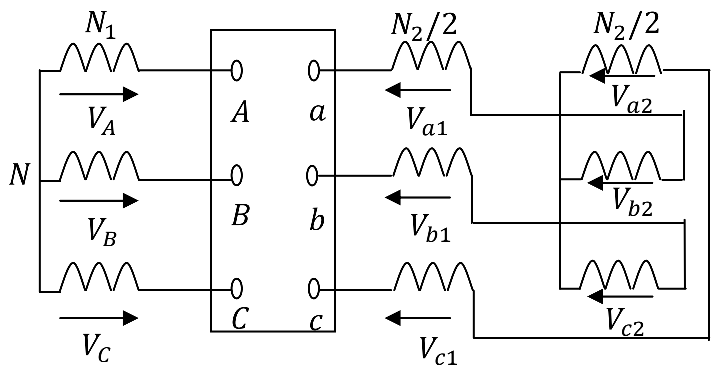

Fig. I.7-a : Couplage Yz 11

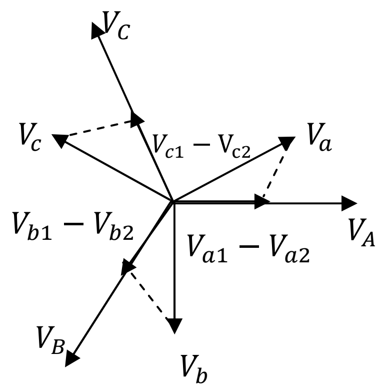

Fig. I.7-b : Diagramme vectoriel

I.6-2 Choix du couplage dans les transformateurs usuels.

La présence du conducteur neutre dans une distribution basse tension permet de disposer des deux types de tension ; la tension simple pour l'usage domestique usuel, et le système triphasé de tensions composées pour l'usage artisanal ou industriel. De plus il est intéressant, coté haute tension de disposer d'un couplage ayant un neutre et de mettre ce neutre, ainsi que le circuit magnétique et les parties métalliques (cuve) du transformateur au potentiel de la terre. Ceci permet de réduire les distances d'isolement des bobines hautes tensions[May2006].

Ce qu'il faut éviter c'est d'avoir le même couplage au primaire et au secondaire d'un transformateur, ceci évite de transmettre intégralement le déséquilibre éventuel des grandeurs (courants, tensions) d'un coté du transformateur à l'autre. On voit donc apparaître l'intérêt d'un couplage Yz offrant un neutre des deux cotés et des couplages différents.

I.7 Contraintes subies par le transformateur

Les transformateurs de puissance sont soumis à plusieurs contraintes qui sont les effets d'actions physiques ou chimiques. Les contraintes normales sont celles qui entrainent une usure et un vieillissement lent du matériel. Les contraintes anormales étant celles qui provoquent un vieillissement prématuré ou destruction immédiate du matériel.

Les surtensions de foudre, de manœuvre ou de court-circuit peuvent provoquer des défauts mécaniques comme les vibrations en régime permanent ou les efforts électrodynamiques sur les bobinages.

Les pertes qui se dégagent dans le noyau et les enroulements du transformateur lors de son fonctionnement se manifestent par de la chaleur qui induit l'échauffement des parties constitutives de l'appareil. Son action se traduit par une destruction lente des isolants ou la diminution de leur rigidité diélectrique pouvant par conséquent amplifier le risque d'avarie du matériel.

I.8 Régimes de fonctionnement

Les régimes de fonctionnement des transformateurs sont les régimes de surcharge, les régimes déséquilibrés et les régimes transitoires. [Gue-1994]

I.8.1 Régime de surcharge

Les transformateurs d'interconnexion de grandes puissances de réseau électrique doivent supporter les variations de la charge du réseau électrique. Ils sont soumis à des surcharges plus ou moins fortes et sur des durées plus ou moins longues.

L'élévation des courants de lignes lors des régimes de surcharge induisent un accroissement du flux de fuite, encore amplifié par la saturation du circuit magnétique. Les pertes dans les éléments principaux : les bobinages, la cuve et les shunts sont accrues. Ces pertes contribuent à un accroissement de la température globale ou locale (points chauds) des éléments constitutifs et de l'huile de refroidissement de l'isolation. Ainsi, la réaction de décomposition des isolants cartonnés baignés par l'huile se trouve accélérée. ce qui peut diminuer sa durée de vie et provoquer sa destruction à terme.

I.8.2 Régime déséquilibré

Le régime déséquilibré correspond à un incident sur l'une des trois phases du réseau. La composante homopolaire du courant dans les bobines devient importante, entrainant un déséquilibre des ampères-tours du circuit magnétique et par conséquent une augmentation des pertes supplémentaires dans le fer et le cuivre provoquant des surchauffes locales considérables.

I.8.3 Régime transitoire

Les phénomènes transitoires dans le transformateur sont causés d'une part par les enclenchements d'autre part par les courts-circuits. Les enclenchements engendrent des surtensions, qui peuvent détériorer l'isolation. Les courts- circuits créent des surintensités qui engendrent des échauffements et des efforts électrodynamiques importants au niveau des enroulements.

I.9 Protection des transformateurs contre les surtensions

Depuis la construction des premières lignes à haute tension le problème de protection des transformateurs contre les surtensions présentaient un intérêt exceptionnel. Ces protections peuvent êtres intérieures ou extérieures. Les mesures de protections internes sont le renfoncement adéquat de l'isolation des bobines d'entrée et d'extrémité, où peuvent apparaitre les plus grands gradients de tension. [Kos-1979]

Les mesures de protections extérieures ont pour but d'atténuer l'onde qui arrive dans le transformateur en diminuant son amplitude et en la rendant moins raide, au moyen d'éléments capables d'absorber une grande partie de l'énergie transportée par la surtension en l'écoulant vers la terre. On distingue les deux types répondus : les parafoudres et les éclateurs.

I.10 Différentes approches de modélisation des transformateurs

La modélisation des transformateurs consiste à établir une structure mathématique qui décrit l'ensemble des phénomènes électromagnétiques qui sont régis par les équations de Maxwell. Celles-ci constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui lient les phénomènes magnétiques aux phénomènes électriques, la résolution de ces équations est intimement liée à la géométrie et aux caractéristiques de la structure à étudiée.

Selon qu'on s'intéresse aux grandeurs locales ou globales différentes types de méthodes peuvent se présenter :

- Méthodes basées sur le calcul numérique (méthode des Eléments Finis) qui fait intervenir des grandeurs locales électromagnétiques.
- Méthodes dites analytiques basées sur un schéma équivalent électrique ou magnétique qui font intervenir des grandeurs globales.
- Méthodes dites semi-analytiques basées sur un schéma équivalent électrique fin qui fait intervenir des grandeurs locales. La méthode la plus appropriée est la méthode des Circuits Electriques Magnétiquement Couplés.

I.11 Schéma électrique équivalent en tant que modèle

Un schéma équivalent de transformateur s'articule autour d'éléments modélisant les phénomènes magnétiques pour le circuit magnétique, et les phénomènes électromagnétique et électrostatique pour les bobinages, en intégrant le couplage, les inductances, les résistances et les capacités. L'élaboration d'un schéma équivalent suppose de passer d'un problème géométrique décrit dans un espace à deux ou à trois dimensions (ce que nous appelons un modèle spatial) à seulement quelques paramètres caractéristiques: les éléments localisés d'un schéma électrique **[**Rob-1999**].**

I.11.1 Schéma classique

Un schéma équivalent complet décrit bien le fonctionnement du transformateur qu'on peut présenter comme suit :

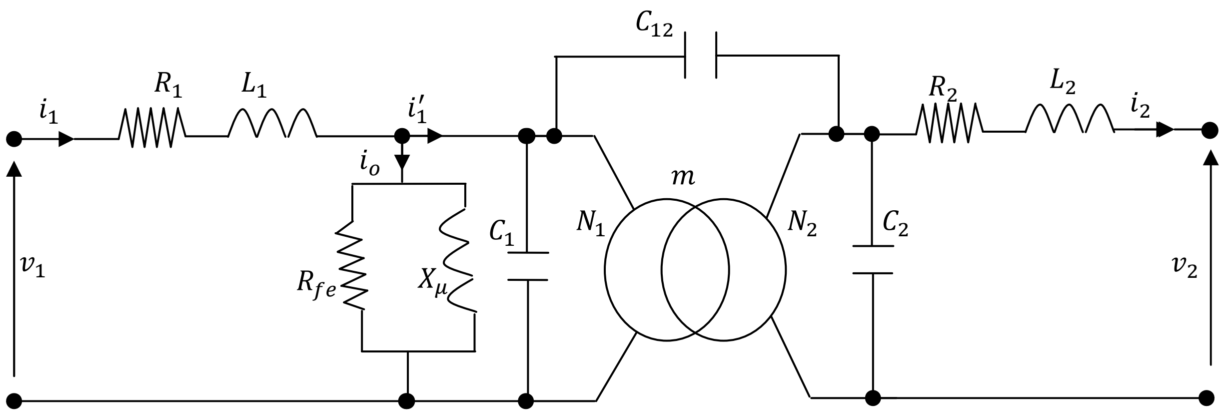

Fig. I.8 : Schéma équivalent d'un transformateur réel **[**Lef-2006]

En désignant par R_1, R_2, L_1, l_2 les résistances et inductances de fuites des enroulements primaire de N_1spires et du secondaire de N_2 spires ; R_{fe} résistance du circuit magnétique et X_μ est la réactance de magnétisation du circuit magnétique correspondant à ce flux.

C_1, C_2 et C_{12} sont des capacités parasites qui apparaissent en hautes fréquences.

Le transformateur est alimenté sous une tension $v_1$variable, délivrant une tension v_2 et traversé par les courants i_1 au primaire et i_2 au secondaire.

I.11.2 Phénomènes électromagnétiques

Il existe un champ magnétique dans le bobinage dû aux fuites de champ magnétique. Ces éléments se traduisent, en plus des résistances, par deux circuits prenant en compte ces fuites inductances L_1et L_2.

Dans les enroulements, les phénomènes magnétiques peuvent être résumés par un coefficient d'inductance liant le flux au courant qui lui donne naissance.

$$\begin{cases} \emptyset_c = L_1 i_1 + M_{12} i_2 & (\mathrm{I.1}) \\ \emptyset_c = L_2 i_2 + M_{21} i_1 & (\mathrm{I.2}) \end{cases}$$

$\emptyset_c$ est le flux commun à toutes les spires.

Lorsque les fréquences des courants liés à la charge augmentent, le trajet des lignes de fuite est modifié et diminue par la même occasion les valeurs de inductances

Sachant qu'une tension variable, par l'intermédiaire du flux, induit une force électromotrice non seulement dans le conducteur qui porte ce courant mais également dans tout conducteur placé à proximité. Ces forces sont données comme suit:

$$\begin{cases} e_1 = N_1 \dfrac{d\emptyset_c}{dt} & (\mathrm{I.3}) \\ e_2 = -N_2 \dfrac{d\emptyset_c}{dt} & (\mathrm{I.4}) \end{cases}$$

Un transformateur réel est fondamentalement caractérisé par le système d'équations ci-dessous:

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + N_1 \dfrac{d\emptyset_c}{dt} & (\mathrm{I.5}) \\ v_2 = -R_2\, i_2 - L_2 \dfrac{di_2}{dt} - N_2 \dfrac{d\emptyset_c}{dt} & (\mathrm{I.6}) \\ N_1 i_1 + N_2 i_2 = \mathcal{R}\emptyset_c = N_1 i_0 & (\mathrm{I.7}) \end{cases}$$

La réluctance est l'analogue magnétique de la notion de résistance. Elle vaut classiquement pour un tube de flux de longueur l et de section S constante:

$$\mathcal{R} = \frac{\mu\, S}{l} \tag{I.8}$$

I.11.2.1 Couplage parfait (transformateur idéal)

La fonction première du transformateur est d'assurer un couplage entre ses deux enroulements, couplage qui trouve son origine dans l'existence d'un flux commun à ceux-ci. Le couplage est parfait lorsque la totalité du flux est commun aux deux enroulements. Le transformateur idéal néglige les pertes cuivre, aucune hystérésis et les pertes de courant de Foucault dans les enroulements, et assume le couplage idéal **[**Dix-2004**]**.

Les courants et tensions sont alors liés par le rapport de transformation, noté m et défini par:

$$m = \frac{e_2}{e_1} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \tag{I.9}$$

I.11.2.2 Couplage imparfait

En pratique, il est impossible de coupler parfaitement deux enroulements: du fait que dans les dispositifs réels il existe toujours un « flux de fuite » qui réduit le flux commun. L'importance de cette réduction est caractérisée par le coefficient de couplage dont la valeur dans ce cas est inférieure à l'unité.

$$k = \frac{M_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{I.10}$$

I.11.2.3 Pertes cuivre

Un schéma équivalent doit également modéliser les effets dissipatifs dans les enroulements, à savoir les pertes cuivre, qui sont les pertes par effet Joule dans les enroulements, elles s'expriment par la formule suivante :

$$P_{J,tot} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \tag{I.11}$$

I.11.2.4 Calcul des résistances (grandeurs électriques)

La résistance de chaque enroulement est en fonction de la longueur de fil l_{fil} , de sa surface et de sa résistivité. Sa relation générale est donnée par :

$$R = \frac{\rho(T).\, l_{fil}}{S} \qquad (\mathrm{I}.12)$$

Pour obtenir la résistivité électrique du matériau $'\rho(T)'$, comme on ne connaît pas la température du cuivre ou l'aluminium a priori, l'utilisateur doit l'estimer en fonction de la norme de l'enroulement.

$$\rho(T) = \frac{1}{\sigma(T)} = \rho_0(1 - \alpha\, T) \qquad (\mathrm{I}.13)$$

σ: Conductivité électrique du milieu $[S.m^{-1}]$

ρ_0 : est la résistivité électrique du matériau à 0^0C $\begin{cases} 1.72 \times 10^{-8} & \text{pour le cuivre} \\ 2.69 \times 10^{-8} & \text{pour l'aluminium} \end{cases}$ $[\Omega.m]$

α : est le coefficient de température du matériau soit $\begin{cases} 3.93 \times 10^{-3} & \text{pour le cuivre} \\ 4.03 \times 10^{-3} & \text{pour l'aluminium} \end{cases}$

La dépendance fréquentielle des pertes dans le conducteur de l'enroulement est liée aux courants de Foucault. Ces derniers sont dus à la variation dans le temps du champ magnétique. En effet les courants de Foucault engendrent une augmentation des pertes et une réduction du flux magnétique total. Ces pertes peuvent se décomposer suivant deux origines : les pertes propres dues à l'effet de peau par le biais du champ magnétique créé par le conducteur sur lui-même et celles dues aux effets de proximité par le biais d'un champ crée par les autres conducteurs. L'effet de peau et de proximité sont la source de pertes Joule additionnelles. Les pertes augmentent alors la température des enroulements et par conséquent leurs résistances.

I.11.2.5 grandeurs magnétiques

Ceci est schématisé par une réactance X_μ en parallèle aux bornes du primaire du transformateur. La réactance est liée à la réluctance équivalente de circuit magnétique par la relation suivante :

$$X_m = \omega.\, N_1^2.\frac{1}{\mathcal{R}} \qquad (\mathrm{I}.14)$$

$$\omega = 2\pi f \qquad (\mathrm{I}.15)$$

I.11.2.6 Energie magnétique emmagasinée

L'énergie stockée dans l'inductance magnétisante L_μ a pour expression :

$$W = \frac{1}{2} L i_0^2 = \frac{1}{2} . N_1^2 \frac{\mu \, S_m}{l_m} . i_0^2 \qquad (I.16)$$

Le théorème d'ampère appliqué au circuit magnétique permet d'écrire :

$$N_1 i_0 = H l_m \qquad (I.17)$$

Ce qui nous conduit à l'expression :

$$W = S_m l_m \frac{B^2}{2\mu} \qquad (I.18)$$

l_m est la longueur du circuit magnétique, S_m sa section et μ la perméabilité magnétique absolue du matériau le constituant, B est l'induction magnétique.

L'énergie stockée dans le circuit magnétique est inversement proportionnelle à la perméabilité magnétique du matériau constituant le circuit magnétique. Si on veut limiter cette énergie on a intérêt à choisir un matériau de perméabilité magnétique élevée.

I.11.2.7 Pertes fer

Les pertes fer sont souvent modélisées par une simple résistance R_{fe} en parallèle sur l'inductance de magnétisation. Elles résultent de la variation du flux dans le circuit magnétique et se composent des pertes par courant de Foucault (P_{cf}) et les pertes par hystérésis (P_h) .

Pour des faibles fréquences les pertes fer sont définies par la formule semi-empirique suivante : [Sho-2004]

$$P_f = P_h + P_{cf} = K_h v_f f B^\eta + K_{cf} v_f e_t f^2 B^2 \qquad (I.19)$$

Dans celle-ci, les coefficients $K_h \; et \; K_{cf}$ dépendent des particularités de fabrication de la tôle mais également de la fréquence et de la valeur de l'induction. Les coefficients $v_f \; et \; e_t$ représentent respectivement le volume du noyau et l'épaisseur des tôles ferromagnétiques, tandis que η est coefficient de Steinmetz (1.7 à 2). A hautes fréquences, quand l'épaisseur de peau δ devient très inférieure à l'épaisseur des tôles, les pertes par courant de Foucault sont alors proportionnelles à la fréquence f **[**Lef-2006].

Dans les matériaux ferromagnétiques feuilletés les pertes fer sont données par la formule :

$$P_{cf} = \frac{\pi^2 f^2\, e_t^2}{2\rho} B_{max}^2 . \frac{\delta\, sh(e_t\, /\, \delta) - sin(e_t\, /\, \delta)}{e_t ch(e_t\, /\, \delta) - cos(e_t\, /\, \delta)} \qquad avec \qquad \delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi\, f\, \mu_0 \mu_r}} \qquad (I.20)$$

ρ la résistivité du matériau, μ_r perméabilité relative et perméabilité du vide ($\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ $[H/m]$).

Pour les hautes fréquences ($e_t/\delta > 1.4$) ; Pour les basses fréquences ($e_t/\delta < 1.4$)[Fre-2009].

I.11.3 Phénomènes électrostatiques

Dans le transformateur il y'a différentes capacités distribuées le long des enroulements ; entre conducteurs ; entre enroulement haute et basse tension ; entre bobinages et écran ou masse mécanique. Ces éléments sont la conséquence du champ électrostatique dont l'effet est beaucoup accentué en haute fréquence.

I.11.3.1 Pertes diélectriques

Les pertes diélectriques dues à des courants de déplacement dans les isolants sont pour la plupart du temps négligeables par rapport aux autres pertes. Le facteur de dissipation $tan\delta$ est de l'ordre 10^{-4} à 10^{-2}. Ces pertes sont importantes lorsque les éléments actifs interviennent, car leur isolation contient une teneur d'humidité élevée [Oli-2003], et peuvent êtres modélisées par un réseau de résistances et de condensateurs en cascade et en parallèle [Ahm-92], leur expression est de la forme suivante :

$$P_d = V^2 . \omega . tan\, \delta . C \qquad (I.21)$$

V : est la tension en volt. C : est la capacité (F). ω : est la pulsation (rad/s).

I.11.3.2 Calcul des capacités (grandeurs électrostatiques)

Le calcul des ces capacités dépend de la géométrie et des caractéristiques électriques des spires des enroulements (Fig. I.12). [Ven-2009].

Certaines de ces capacités sont calculées avec des formules géométriques simplifiées et d'autres sont calculées avec des formulations semi-empiriques.

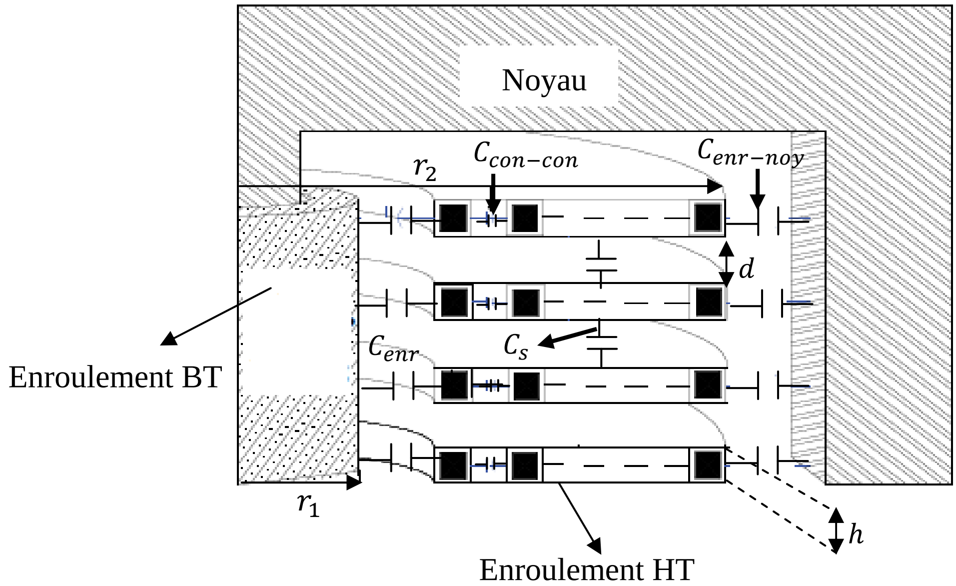

Fig. I 8 : Représentation de l'effet électrostatique par différentes capacités [Ven-2009]

I.11.3.3 Capacité entre enroulements

Les enroulements n'étant rien d'autre que des conducteurs proches portés à des potentiels différents, ils introduisent des effets capacitifs dont les principales manifestations sont des résonances avec les inductances du transformateur.
En considérant une configuration cylindrique la capacité entre une spire de l'enroulement haute tension et l'enroulement basse tension est calculée au moyen : [Ven-2009]

$$C_{enr} = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{I.22}$$

C_{enr} : Capacité entre enroulement de BT et HT r_1 : Rayon de l'enroulement BT
r_2 : Rayon de l'enroulement HT ε_r : Permittivité relative du milieu considéré

ε_0 : Permittivité du vide **(**$\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \quad [F/m]$)

I.11.3.4 Capacité entre conducteur

La capacité entre conducteurs d'une même spire ou bien entre conducteurs de spires différentes est approchée par l'équation suivante :[Ven-2009]

$$C_{con-con} = C_s = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S_{con}}{d} \tag{I.23}$$

I.11.3.5 Capacité entre phases

La formule suivante est appliquée pour capacités entre de jambes adjacentes.

$$C_{ph} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \pi h'}{ln\left(\frac{b}{d_2} + \sqrt{\left(\frac{b}{d_2}\right)^2 - 1}\right)} \qquad (\mathrm{I}.24)$$

Avec

b : la distance entre deux enroulements adjacent (centre-centre), d_2 est le diamètre de l'enroulement.

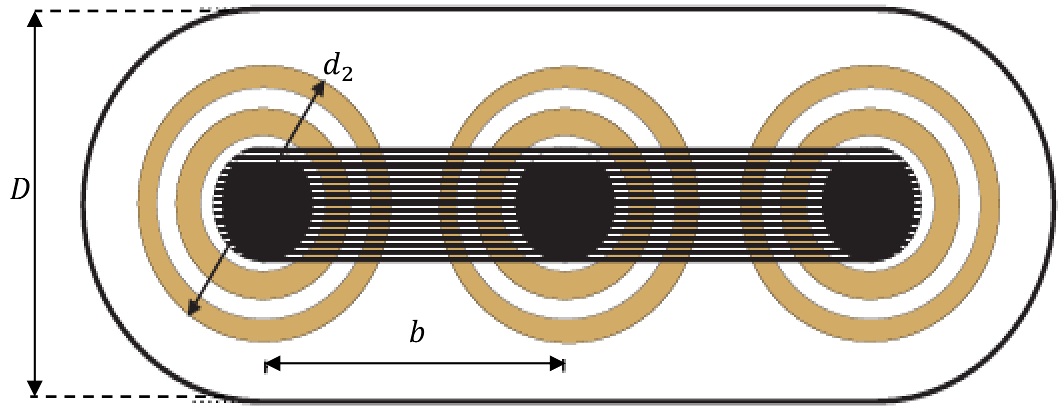

Fig. I 10 : Dimension entre deux enroulements adjacents et entre l'enroulement et la cuve [Bje-2005]

I.11.3.6 Capacité entre enroulement et cuve

La capacité entre l'enroulement et la cuve peut être calculé à partir de l'équation$(\mathrm{I}.24)$, avec un facteur réduit de 0.25 pour une configuration cylindrique [Bje-2005] :

$$C_{enr-cuv} = 0.25.\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \pi h'}{ln\left(\frac{D}{d_2} + \sqrt{\left(\frac{D}{d_2}\right)^2 - 1}\right)} \qquad (\mathrm{I}.25)$$

D est la largeur interne de la cuve. $h' = h + b - d_2$.

La capacité entre l'extrémité de la phase et la cuve peut être approchée par [Bje-2005] :
Cela pour un facteur réduit de 0.75 (si la cuve n'est pas complètement circulaire).

$$C_c = 0.75.\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \pi h'}{ln\left(\frac{D}{d_2}\right)} \qquad (\mathrm{I}.26)$$

I.12 Modélisation par la méthode semi-analytique

La méthode semi-analytique est basée sur des techniques de discrétisation numériques en petits éléments, sur lesquelles on applique des formules analytiques. Cette méthode nous permet d'avoir un modèle de schéma électrique fin et détaillé et le calcul des ces paramètres est plus précis. Parmi ces méthodes on peut citer la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés. Elle est d'un emploi restreint aux milieux linéaires, et dispositif avec géométrie simple et homogène [Bje-2005].

I.13 Modèle détaillé (fin) basé sur le calcul des inductances et les résistances

La méthode est basée sur un réseau d'éléments composé des selfs et des inductances mutuelles. Quel que soit le type de représentation, les éléments sont calculés en fonction des caractéristiques géométriques du bobinage ainsi que des caractéristiques géométriques du noyau magnétique. L'objectif de cette méthode c'est d'établir un modèle d'un circuit électrique équivalent détaillé et fin des enroulements illustré sur (Fig. I.11). [Ahm-1992] [Bje-2005] [Ras-2008]

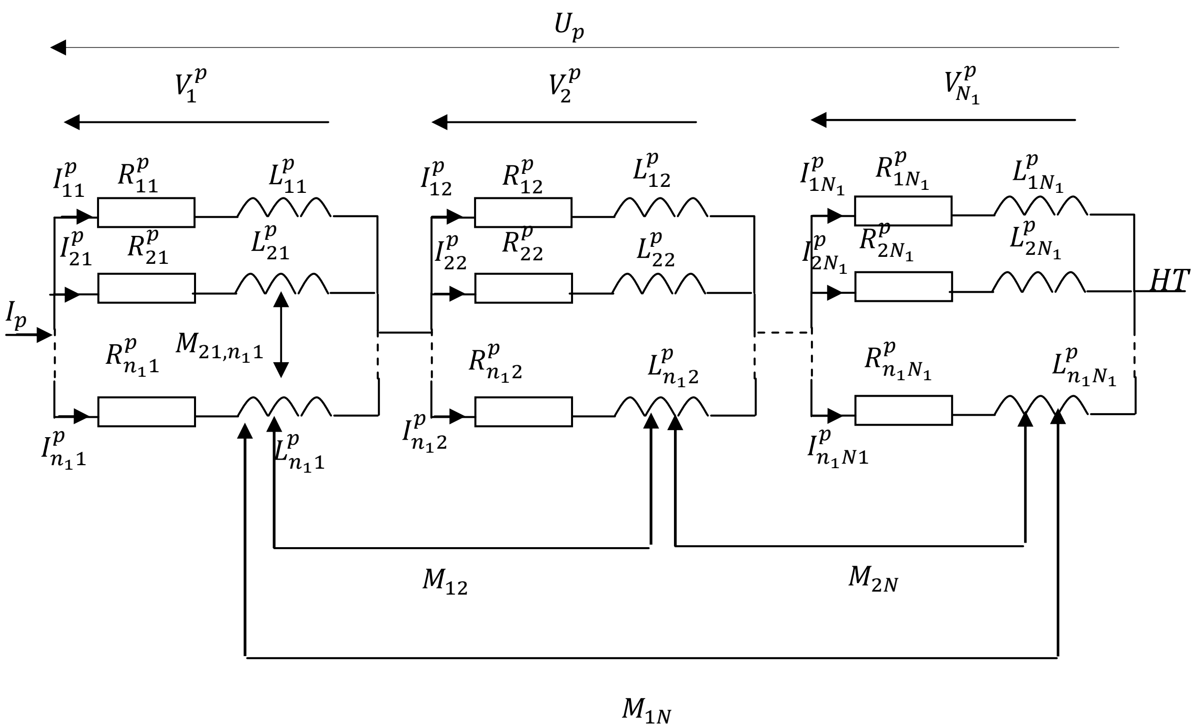

Fig. I.11 : Modèle d'un circuit électrique équivalent de l'enroulement primaire [Bje-2005]

I.13.1 Calcul des selfs inductances

Pour le calcul de la self-inductance d'une spire de section rectangulaire on peut utiliser une formule approximative basée sur la géométrie des enroulements donnée comme suit:

$$L_i = \mu_0 r \left[\ln\left(\frac{8r}{GMD}\right) - 2 \right] \qquad (I.27)$$

r : rayon moyen de la spire

GMD : rayon géométrique moyen de la spire donné par Grover : [Rah-2003] [Bje-2005] :

$$\ln(GMD) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{2b}{3a} tan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{2a}{3b} tan\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^2}{12a^2} ln\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{a^2}{12b^2} ln\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{25}{12}\right) \qquad (I.28)$$

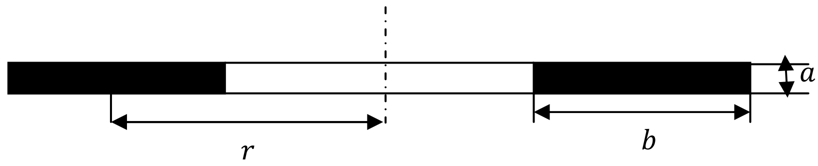

Fig. I.12 : Dimension d'une spire de section rectangulaire

Les paramètres r, a et b sont respectivement le rayon moyen, la hauteur et la largeur de la spire.

I.13.2 Calcul des inductances mutuelles

Une formule exacte pour la mutuelle inductance entre l'élément i et j désigné par M_{ij} est donnée par Maxwell en utilisant les intégrales elliptiques: [Shi-2004] [Bje-2005]

$$M_{ji} = \mu_0 \sqrt{r_i r_j} \cdot \left[\frac{(2 - k^2)E_1(k) - 2\, E_2(k)}{k}\right] \qquad (I.29)$$

$$k^2 = \frac{4 r_i r_j}{(r_i + r_j)^2 + z^2} \qquad (I.30)$$

r_i et r_j rayons de l'élément i et j
$E_1(k)$; $E_2(k)$ integrales élyptiques de 1er et 2eme ordre.

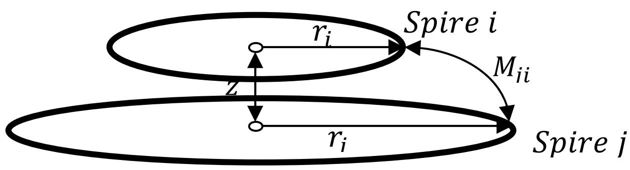

Fig. I.13 : Mutuelle inductance entre deux éléments filamentaires circulaires [Shi-2004]

I.13.3 Calcul des résistances

La résistance d'une spire élémentaire est calculée au moyen :

$$R_i = \frac{\rho_i l_i}{S_i} \tag{I.31}$$

ρ_i:résistivité de l'élément i **;** l_i et S_i sont respectivement la longueur et la section de l'élément.

I.14 Modélisation par la méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis est une méthode incontournable lorsque l'on traite la modélisation des milieux continus. Son domaine d'application très étendu fait probablement d'elle le premier outil de conception. Ainsi, appliquée au domaine de l'électromagnétisme, elle permet d'étudier des problèmes aux formes complexes, avec des matériaux linéaires ou non, des couplages circuits, du mouvement…etc. Du fait de sa prise en compte des phénomènes au niveau local, sans injection de connaissance a priori, elle est la méthode à utiliser pour comprendre finement les phénomènes physiques en jeu dans un dispositif. L'obstacle souvent rencontré par cette méthode dans beaucoup d'applications est la prise en compte des conditions aux limites existant à l'infini : l'utilisation d'un maillage pour approcher le problème réel demande un nombre de nœuds important et préjudiciable au temps de calcul. De plus cette méthode trouve ses limites lorsque le domaine d'étude présente de singularités.

I.15 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de présenter les principaux types de transformateurs, leurs régimes de fonctionnement. Du point de vue modélisation, différentes méthodes on étés développées entre autres le schéma électrique équivalent. Ce modèle permet de reproduire certains comportements électromagnétiques du transformateur. Mais masque en réalité des phénomènes plus complexes et comme tout modèle souffre d'hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses conduisent cependant à des paramètres de représentation trop idéalisés pour les applications industrielles actuelle. Les difficultés de modélisation nécessitent le recours aux méthodes numériques ou semi-analytique de discrétisation en petits éléments de circuit telles que la méthode des éléments finis, et la méthode des circuits couplés. Ces modèles sont les plus répandus et utilisés, à l'heure actuelle, pour modéliser un transformateur. Quel que soit le type de représentation, les éléments sont calculés en fonction des caractéristiques géométriques et diélectriques du bobinage ainsi que des caractéristiques géométriques du noyau magnétique.

Le prochain chapitre sera consacré à la modélisation électromagnétique des transformateurs.

Chapitre II

Modélisation électromagnétique des transformateurs

II.1 Introduction

Nous présentons dans ce deuxième chapitre, les bases mathématiques des équations électromagnétiques pour la modélisation d'un problème électrotechnique, à travers le rappel des équations de Maxwell, ainsi que les différentes formulations magnétostatiques et magnétodynamiques qui en résultent. Ces formulations conduisent à des équations aux dérivés partielles auxquelles il faut associer des conditions aux limites et des conditions d'interfaces.

La résolution analytique de telles équations nécessite généralement des hypothèses simplificatrices fortes, et ne rend donc pas compte de la réalité des phénomènes physiques. Dans le souci de prendre en considération la complexité des structures des systèmes électromagnétiques (non linéarité, phénomènes couplés, géométrie 3D), on a recours soit aux méthodes couplées analytico-numérique soit purement numériques.

II.2 Equations de Maxwell

La répartition spatiale et temporelle des champs magnétique et électrique est donnée par les équations de Maxwell: [Dha-2005] [Ped-2003] [Hen-2004]

$$Loi\ de\ Maxwell - Gauss \qquad div\vec{D} = \rho \quad \Rightarrow \iint_s \overrightarrow{D}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V \rho.dV = Q_i \qquad (II.1)$$

$$Loi\ de\ Maxwell - Faraday \qquad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_s \vec{B}.\overrightarrow{ds} \qquad (II.2)$$

$$Loi\ de\ consevation\ de\ flux \qquad div\vec{B} = 0 \Rightarrow \iint_s \vec{B}.\overrightarrow{ds} = 0 \qquad (II.3)$$

$$Loi\ de\ Maxwell - Ampère \qquad \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \oint_c \vec{H}\overrightarrow{dl} = \iint_s \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\overrightarrow{ds} \qquad (II.4)$$

Avec :

$\vec{H}$: Champ magnétique [A/m]
$\vec{E}$: Champ électrique [V/m]
$\vec{J}_c$: Densité de courant de conduction [A/m^2]
t : Le temps [s]
ds : Elément de surface [m^2]
dl : Elément de longueur [m]
$\vec{B}$: Induction magnétique [T]
$\vec{D}$: Induction électrique [C/m^2]
ρ: Densité de charge volumique [C/m^3]
Q_i: charge contenue dans le volume V [C]
dV : Elément de volume [m^3]

Ces équations sont associées aux relations constitutives des matériaux qui sont en général, anisotropes ou non linéaires

II.3 Lois de comportement des matériaux

Une relation constitutive décrit localement le comportement des grandeurs électromagnétiques dans un matériau donné. Elles sont données dans le cas le plus général

Dans un milieu diélectrique
$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\vec{E} & \text{milieu linéaire isotrope} \quad (II.5) \\ \vec{D} = \|\varepsilon(x,y,z)\|\,\vec{E} & \text{milieu linéaire anisotrope} \quad (II.6) \\ \vec{D} = \varepsilon(\vec{E})\vec{E} & \text{milieu non linéaire isotrope} \quad (II.7) \end{cases}$$

Dans un milieu magnétique
$$\begin{cases} \vec{B} = \mu\vec{H} + \vec{B}_r & \text{linéaire isotrope} \quad (II.8) \\ \vec{B} = \|\mu\,(x,y,z)\|\,\vec{H} + \vec{B}_r & \text{linéaire anisotrope} \quad (II.9) \\ \vec{B} = \mu(\vec{H})\vec{H} + \vec{B}_r & \text{non linéaire isotrope} \quad (II.10) \end{cases}$$

ε : Permitivité électrique absolue $[\mathrm{F}/m]$

μ : Perméabilité magnétique absolue $[H/m]$

$\vec{B}_r$: induction rémanente $[Tesla]$

II.4 La loi d'Ohm

C'est la loi exprimant, dans un milieu conducteur la densité de courant $\vec{J}$ en fonction du champ électrique $\vec{E}$, la loi s'applique à tout milieu présentant une conductivité électrique.

$$\begin{cases} \vec{J}_c = \sigma\vec{E} & \text{milieu conducteur} \quad (II.11) \\ \vec{J}_c = \sigma\vec{E} + \vec{J}_s & \text{milieu conducteur avec source} \quad (II.12) \end{cases}$$

$\vec{J}_s$: Densité de courant source $[A/m^2]$

II.5 Relations de passage

Les champs électriques et magnétiques des différents milieux sont liés à l'interface par des relations de continuité. Soient deux milieux Γ_1 et Γ_2, et soit n_{12} le vecteur normal à la surface dirigé du milieu Γ_1 vers le milieu Γ_2. (Figure II.1)

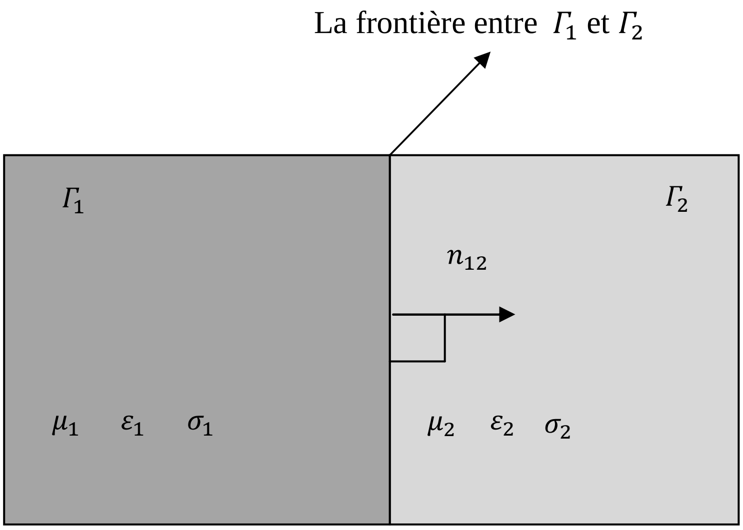

Fig. II-1 : Interface entre deux milieux [Doi-2007]

La discontinuité du milieu de la composante tangentielle du champ magnétique $\vec{H}$ due aux densités de courants surfaciques $\vec{K}_s$.

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) \wedge \vec{n} = \vec{K}_s \tag{II.13}$$

La conservation de la composante tangentielle du champ électrique $\vec{E}$

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \wedge \vec{n} = 0 \tag{II.14}$$

La discontinuité de la composante du déplacement électrique $\vec{D}$ due aux charges surfaciques ρ_s .

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right).\vec{n} = \rho_s \tag{II.15}$$

La conservation de la composante normale de l'induction magnétique $\vec{B}$

$$\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right).\vec{n} = 0 \tag{II.16}$$

II.6 Equations de Maxwell simplifiées

Les hypothèses simplificatrices généralement posées dans le traitement des équations de modélisations des problèmes Electrotechniques sont :

- Dans le domaine de l'électrotechnique, les fréquences de travail sont inférieures aux radios fréquences qui sont de l'ordre 10^{12} Hz, ce qui nous permet de négliger les courants de déplacement $\vec{J}_D = \partial\vec{D}/\partial t$ devant les courants de conductions $\vec{J}_c$ dans l'équation $(\mathrm{II.4})$, le système est quasi-stationnaire.
- Les charges d'espace dans les conducteurs sont négligées dans l'équation $(\mathrm{II.1})$, ainsi pour les conducteurs le rapport (ε/σ) est très faible, de l'ordre de $10^{-18}s^{-1}$. ce qui est négligeable devant celui qu'on considère pour les fréquences inférieures à 10^{12} Hz.

En considérant les hypothèses simplificatrices précédentes, les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme suivante :

$$div\vec{D} = 0 \tag{II.17}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \tag{II.18}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{II.19}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \sigma\vec{E} + \vec{J}_s \tag{II.20}$$

II.7 Modèles électromagnétiques

Sur la base des équations de Maxwell simplifiées $(\mathrm{II.17}-20)$ relatives au domaine de l'électrotechnique nous définirons les modèles magnétostatique et magnétodynamique.

II.7.1 Modèle magnétostatique

Dans le cas de la magnétostatique, on supose que le champ magnétique est produit par des sources de courant indépendantes du temps. Le terme $(\partial\vec{B}/\partial t)$ est nul et les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ sont découplés.

Le système d'équations régissant les phénomènnes magnétostatiques s'écrit :

$$div\vec{B} = 0 \tag{II.21}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{J}_s \tag{II.22}$$

A ce système, on peut ajouter la loi de comportement des matériaux magnétiques $(\mathrm{II.8})$, ainsi que les conditions aux limites.

II.7.2 Modèle magnétodynamique

Dans le cas magnétodynamique, les sources de tension ou de courant varient en fonction du temps, cela veut dire que les courants induits résultants feront le couplage du champ électrique et magnétique. Le système d'équations régissant les phénomènes magnétodynamiques s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (II.23)$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \sigma\vec{E} + \vec{J}_s \qquad (II.24)$$

Il faut ajouter à ce système les lois de comportement des matériaux électriques$(II.5)$ et magnétiques$(II.8)$ et les conditions aux limites.

II.8 Choix de la variable d'état

Pour traiter les équations magnétostatique et magnétodynamique différentes formulations mathématiques du problème peuvent êtres obtenues, soit en utilisant les champs magnétiques ou électriques comme variables principales, ou en introduisant de nouvelles variables que sont les potentiels électriques ou magnétiques. A chacune de ces grandeurs magnétiques et électriques correspond une équation aux dérivées partielles.

Les formulations en champs présentent un inconvénient majeur, qui est la discontinuité aux interfaces et l'utilisation d'éléments d'arrêtes dans la discrétisation. De plus les vecteurs ont généralement trois composantes, augmentant par-là le nombre d'inconnues, ce qui entraine un temps de résolution plus important. Pour remédier à ces inconvénients on fait appel aux potentiels vecteur/scalaire électriques ou magnétiques.

Il existe plusieurs types de potentiels, parmi les quels, on peut citer le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique. La résolution des équations en potentiel vecteur magnétique, s'avère être particulièrement intéressante dans des configurations axisymétriques, car seule la composante azimutale est non nulle. La condition de Jauge de continuité qui assure l'unicité du potentiel vecteur magnétique A est naturellement vérifiée [Lef-2005] [Doi-2007].

II.9 Formulation en potentiel vecteur magnétique

Cette formulation est basée sur l'existence d'un potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ issu de l'équation$(\mathrm{II}.3)$, tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \qquad (\mathrm{II}.25)$$

La combinaison des équations $(\mathrm{II}.2)$ et $(\mathrm{II}.25)$ conduit à :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (\mathrm{II}.26)$$

La relation $(\mathrm{II}.26)$ nous permet de déduire qu'il existe un potentiel électrique scalaire V tel que :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - (\overrightarrow{grad}\, V) \qquad (\mathrm{II}.27)$$

À partir des équations $(\mathrm{II}.4)$, $(\mathrm{II}.25)$ et $(\mathrm{II}.27)$ nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \begin{cases} -\sigma\left(\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \sigma.\overrightarrow{grad}\,V & \text{équation magnétodynamique} \qquad (\mathrm{II}.28) \\ -\sigma\left(\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) & \text{équation magnétodynamique sans source} \qquad (\mathrm{II}.29) \\ -\sigma.\overrightarrow{grad}V & \text{équation magnétostatique avec source} \qquad (\mathrm{II}.30) \\ 0 & \text{équation magnétostatique sans source} \qquad (\mathrm{II}.31) \end{cases}$$

L'équation $(\mathrm{II}.28)$ représente la formulation magnétodynamique en terme de $\vec{A}$ tenant compte du terme source.

II.10 Conditions de Jauge

Les champs électromagnétiques définis par l'ensemble des équations de Maxwell ne sont pas uniques. En effet les champs à divergence sont définis à un rotationnel près et les champs à rotationnel sont définis à un gradient prés. Il convient donc d'imposer une condition supplémentaire afin d'assurer l'unicité de la solution issue de la résolution du système d'équations $(\mathrm{II}.28)$-$(\mathrm{II}.31)$. Cette condition, appelée condition de Jauge est généralement exprimée sous deux formes [Doi-2007].

$$div(A) = 0 \qquad jauge\ de\ Coulomb \tag{II.32}$$

$$div(A) + k\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad jauge\ de\ Lorentz \tag{II.33}$$

II.11 Formulation bidimensionnelle en potentiel vecteur magnétique

Le terme à gauche de l'équation $(\mathrm{II}.28)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\left(\nu\, \overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = -\overrightarrow{div}\left(\nu\ \overrightarrow{grad}\ \vec{A}\right) + \overrightarrow{grad}\left(\nu\ \overrightarrow{div}\ \vec{A}\right) \\ \quad \nu = \dfrac{1}{\mu} \end{cases} \tag{II.34}$$

En adoptant la condition de Jauge de Coulomb donnée par$(\mathrm{II}.32)$, l'équation $(\mathrm{II}.34)$ devient :

$$\overrightarrow{rot}\left(\nu\, \overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = -\overrightarrow{div}\left(\nu\ \overrightarrow{grad}\ \vec{A}\right) = -\sigma\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \vec{J}_s \tag{II.35}$$

Si on considère que la source est harmonique sinusoïdale l'équation $(\mathrm{II}.35)$ s'écrit :

$$-\overrightarrow{div}\left(\nu\ \overrightarrow{grad}\ \vec{A}\right) + \sigma j\omega\vec{A} = \vec{J}_s \tag{II.36}$$

II.11.1 Formulation 2D cartésien

Dans le cas d'un problème 2D cartésien (x, y) , le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ et la densité de courant $\vec{J}$ n'ayant qu'une seule composante suivant oz. Ces derniers sont de la forme :

$\vec{A} = (0,0,A_z)$ et $\vec{J} = (0,0,J_{sz})$.

En coordonnées cartésiens nous avons :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_i & \vec{e}_j & \vec{e}_k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} \tag{II.37}$$

$\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$, $\vec{e}_k$: Vecteurs unitaires.

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left[\frac{\partial(A_z)}{\partial y}\right]\vec{e}_i + \left[-\frac{\partial(A_z)}{\partial x}\right]\vec{e}_j \tag{II.38}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\nu\, \overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu.\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu.\frac{\partial(A_z)}{\partial y}\right)\right]\vec{e}_z \tag{II.39}$$

L'équation $(\mathrm{II}.36)$ devient :

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu.\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu.\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-\sigma.j.\omega.A_z+J_{sz} \qquad (\mathrm{II}.40)$$

II.11.2 Formulation 2D axisymétrique

Dans le cas d'un problème 2D axisymétrique(r,z), le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ et la densité de courant $\vec{J}$ n'ayant qu'une seule composante azimutale.

$\vec{A}=(0,A_\theta,0)$ et $\vec{J}=(0,J_{s\theta},0)$.

En coordonnées cylindriques axisymétriques nous avons :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A}=\frac{1}{r}.\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & rA_\theta & 0\end{vmatrix} \qquad (\mathrm{II}.41)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\nu\,\overrightarrow{rot}\vec{A}\right)=\left[-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu}{r}.\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu.\frac{\partial(A_\theta)}{\partial z}\right)\right]\vec{e}_\theta \qquad (\mathrm{II}.42)$$

L'équation $(\mathrm{II}.36)$ devient :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu.\frac{\partial(A_\theta)}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu}{r}.\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\right)=-\sigma.j.\omega.A_\theta+J_{s\theta} \qquad (\mathrm{II}.43)$$

II.12 Les conditions aux limites

Les valeurs d'un champ A à la frontière du domaine satisfait principalement deux relations simples. Le champ peut être soit de valeur connue, soit normal à la surface, ce qui de traduit par :

$$A|_\Gamma=A_0 \qquad \textit{condition de Dirichlet} \qquad (\mathrm{II}.44)$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial n}\right|_\Gamma=A_0 \qquad \textit{condition de Neumann} \qquad (\mathrm{II}.45)$$

Les conditions de Dirichlet et de Neumann sont dites homogènes si les valeurs imposées A_0 sont nulles. Elles sont dites non homogènes dans le cas contraire.

II.13 Méthodes de résolution

II.13.1 Méthodes numériques

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation pour la résolution des équations mathématiques établies, consiste à ramener la résolution des équations aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équations algébriques dont la solution donne les valeurs et la distribution des grandeurs recherchées. Parmi ces méthodes on trouve la méthode aux différences finies, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis. La méthode des éléments finis est sans doute la plus utilisée car elle est mieux adaptée pour traiter les géométries complexes et les milieux non linéaires.

II.13.1.1 Principe de la méthode des éléments finis

Dans les formulations présentées, il s'agit de résoudre des équations aux dérivées partielles sur le domaine Ω, auxquelles sont associées des conditions aux limites sur la frontière Γ. La méthode des éléments finis ne s'applique pas directement pour la résolution des équations aux dérivées partielles, mais à une formulation intégrale du problème, en utilisant l'une des deux approches suivantes :

- La méthode variationnelle exige la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système à étudié, elle s'exprime par :

$$F(A) = \int_{\Omega} L.\,d\Omega \qquad \text{(II.46)}$$

$L = w_c - w_p$: Lagrangien construit à partir de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système à étudier.

- La méthode des résidus pondérés ou méthode projective qui consiste à minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction inconnue. C'est une méthode plus générale, son application ne nécessite pas la connaissance de la fonctionnelle d'énergie du système, elle traite directement l'équation aux dérivées partielles qu'on veut résoudre.

L'équation à résoudre étant :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial f(A)}{\partial A_2} = \cdots = \frac{\partial f(A)}{\partial A_n} = 0 \qquad \text{(II.47)}$$

n: Nombre de nœuds du domaine d'étude

A_i : Inconnu au nœud i du domaine.

L'inconnue A du problème est approximée sur les éléments de maillage par la fonction d'interpolation α_j telle que :

$$A_j^e = \sum_{j}^{\cdot} \alpha_j . A_j \qquad (II.48)$$

α_j **:** dépend des coordonnées des nœuds correspondant à chaque élément de maillage.

II.13.2 Méthodes semi-analytiques

Parmi les méthodes intégrales dites semi-analytiques, on distingue la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés (CEMC), et la méthode des intégrales de frontières. Contrairement aux modèles basés sur les méthodes purement numériques qui incluent l'air environnant dans le domaine de résolution, les méthodes semi-analytiques s'affranchissent de la discrétisation de l'air. La méthode des circuits couplés est une méthode de résolution semi analytique qui s'applique qu'aux milieux conducteurs. Appliquée notamment pour l'étude des systèmes à induction à structure asymétrique, dont le fonctionnement est basé sur les courants de Foucault [Meu-2002].

II.13.2.1 Principe de la méthode des circuits couplés

La méthode des circuits électriques magnétiquement couplés consiste à subdiviser le conducteur en éléments de circuits circulaires et coaxiaux fictifs, dont la forme et les dimensions sont telles que la densité de courant peut être supposée constante dans chacun de ces éléments. La subdivision peut se faire en mailles non régulières selon la pièce modélisée, zone de forte variation des grandeurs physiques, effet de peau important.

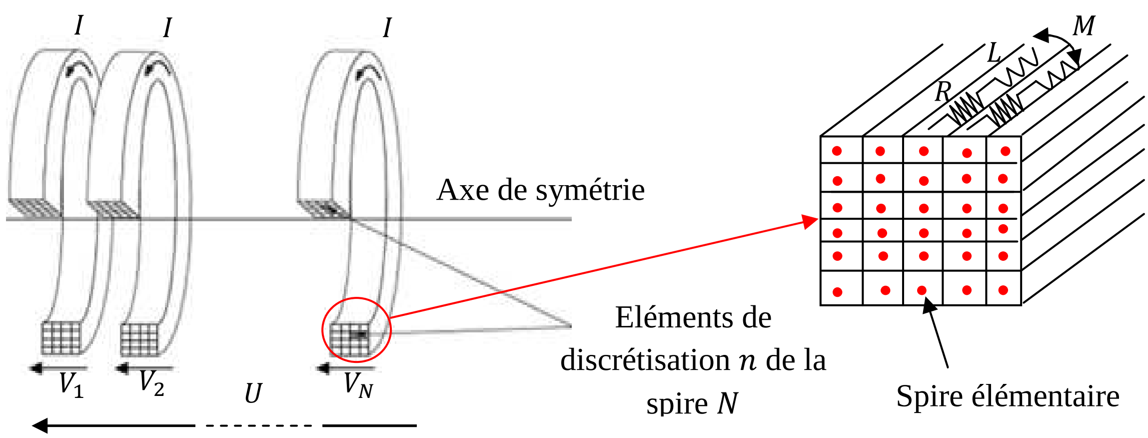

Fig. II.2: Découpage des conducteurs en éléments **[**Lef-2006]

III.13.2.2 Interaction entre les éléments de circuits électriques

Chaque élément du circuit électrique est représenté par sa résistance électrique et son inductance, ces éléments forment entre eux un système de circuits mutuellement couplés [Mao-1996] [Che-1994] [Doi-2007]. La discrétisation par la méthode des circuits couplés est représentée dans la (Fig.II.3), où tout conducteur d'une bobine est formée de « N » spires principales en série et chacune de ces spires est constituées de « n » spires élémentaires en parallèles.

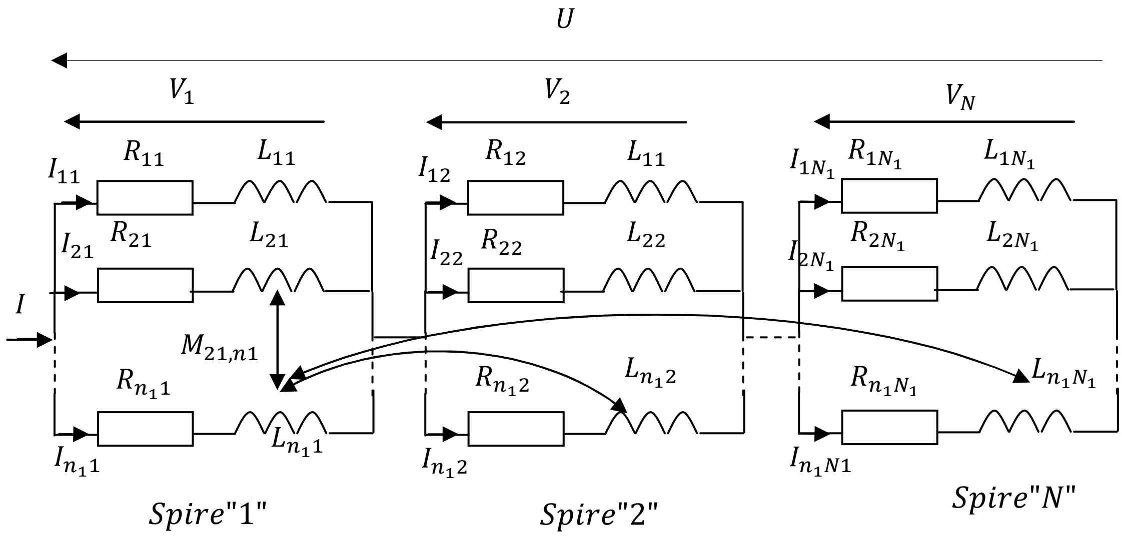

Fig. II.3: Schéma électrique équivalent pour le primaire **[**Lef-2006]

Le système résultant est alors régi par « $n \times N$ » équations, à « $n \times N$ » inconnues qui sont « n » courants et les « N » tensions « V_i ». Chaque spire élémentaire est soumise à une tension identique à la tension à la quelle est soumise la spire principale.

L'application de la loi de Kirchhoff au schéma équivalent de la (Fig. II.3) nous permet d'écrire :

Dans la spire 1

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} I_{11} + L_{11} \dfrac{dI_{11}}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l \neq 1}^{N} M_{11,kl} \dfrac{dI_{kl}}{dt} \\ \vdots \\ V_1 = R_{n1} I_{n1} + L_{n1} \dfrac{dI_{n1}}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l \neq 1}^{N} M_{n1,kl} \dfrac{dI_{kl}}{dt} \end{cases} \quad \text{(II. 49)}$$

Dans la spire 2

$$\begin{cases} V_2 = R_{12} I_{12} + L_{12} \dfrac{dI_{12}}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{N} M_{12,kl} \dfrac{dI_{kl}}{dt} \\ \vdots \\ V_2 = R_{n2} I_{n2} + L_{n2} \dfrac{dI_{n2}}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{N} M_{n2,kl} \dfrac{dI_{kl}}{dt} \end{cases} \tag{II.50}$$

Dans la spire N

$$\begin{cases} V_N = R_{1N} I_{1N} + L_{1N} \dfrac{dI_{1N}}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{N} M_{1N,kl} \dfrac{dI_{kl}}{dt} \\ \vdots \\ V_N = R_{nN} I_{nN} + L_{nN} \dfrac{dI_{nN}}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{N} M_{nN,kl} \dfrac{dI_{kl}}{dt} \end{cases} \tag{II.51}$$

k désigne la spire élémentaire et l est la spire principale et l'ensemble des équations de circuit $(\text{II}.49)$ à $(\text{II}.51)$ conduit au système d'équations différentielles linéaire suivant :

$$[R][I] + [L] \frac{\partial}{\partial t} [I] = [V] \tag{II.52}$$

$[I]$: Vecteur des courants I_i dans les spires filiformes

$[V]$: Vecteur de tension V_i dans les spires filiformes

$[R]$: Matrice diagonale, ses éléments représentent les résistances des spires élémentaires

$[L]$: Matrice inductance pleine, l'élément de la diagonale M_{ii} représente l'inductance propre de la spire élémentaire i et l'élément hors diagonale M_{ij} représente l'inductance mutuelle entre la spire i et la spire j.

III.13.2.3 Alimentation sinusoïdale

Dans le cas des phénomènes électromagnétiques sinusoïdaux, le système d'équations obtenu est linéaire et à coefficients complexes, il est de forme :

$$[Z][I] = [V] \qquad (II.53)$$

Les différents opérateurs de différentiation temporelle sont remplacés par le coefficient « $j\omega$ ».

$$[Z] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & R_{ii} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} & M_{ik} & \\ \cdots & L_{ii} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \qquad (II.54)$$

$[Z]$: Matrice impédance de dimension $(nN * nN)$

R_{ii} : Résistance de la $i^{éme}$ spire ;

L_{ii} : Inductance propre de la $i^{éme}$ spire

M_{ik} : Mutuelle inductance entre la spire i et la spire k

II.14 Conclusion

Les équations générales régissant les phénomènes électromagnétiques sont décrites par des équations aux dérivées partielles. La résolution de ces équations permet de connaitre l'évolution du champ en tout point de l'espace. Nous nous somme intéressés d'une façon particulière aux modèles magnétostatique et magnétodynamique qui sont obtenus à l'aide du potentiel vecteur magnétique. Ces équations peuvent êtes résolues par des méthodes analytiques ou méthodes numériques ou bien semi-analytiques. Parmi ces méthodes on retiendra la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés, et un modèle numérique basé sur une approche éléments finis qui prend en compte la non linéarité et l'anisotropie des matériaux, les grandes lignes de ces deux méthodes ont étés présentées.

Dans le chapitre qui suit nous détaillerons la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés et l'appliquerons à notre dispositif.

Chapitre III

Modélisation des transformateurs par une méthodologie mixte Circuits Electriques Magnétiquement Couplés (CEMC) et Eléments Finis(EF)

III.1 Introduction

La méthode des circuits électriques magnétiquement couplés est basée sur une discrétisation numérique du domaine conducteur en éléments de circuit. Chaque élément ou spire élémentaire est représenté par sa résistance et son inductance. Pour cela les bobinages HT et BT sont discrétisés en éléments électriques correspondant à une portion (spires élémentaires) auxquels s'applique des expressions analytiques des grandeurs électromagnétiques, déduites de la loi de Biot et Savart. Le calcul de différents effets résistifs et inductifs, propres et mutuels entre ces multiples spires et éventuellement le circuit magnétique est exprimé à partir de l'expression analytique du potentiel vecteur magnétique A.

III.2 Modèle géométrique

Notre dispositif est un transformateur triphasé, à colonnes, pour lequel on modélise le bobinage d'une colonne latérale. Le dispositif est ainsi approché par un système axisymétrique est ayant une symétrie de révolution, permettant de prendre en considération une partie du domaine d'étude tel que représenté par la Fig. III.1.

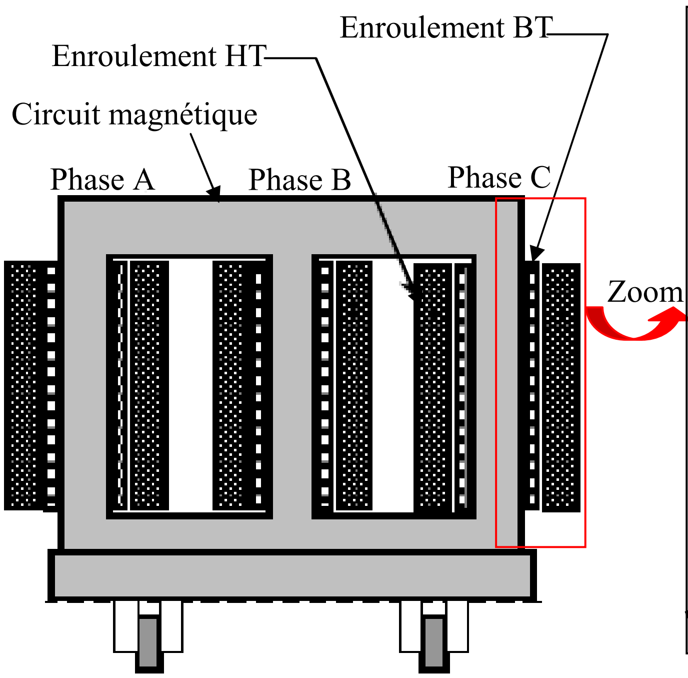

Fig. III.1.a : Architecture du transformateur [Hoc-2009]

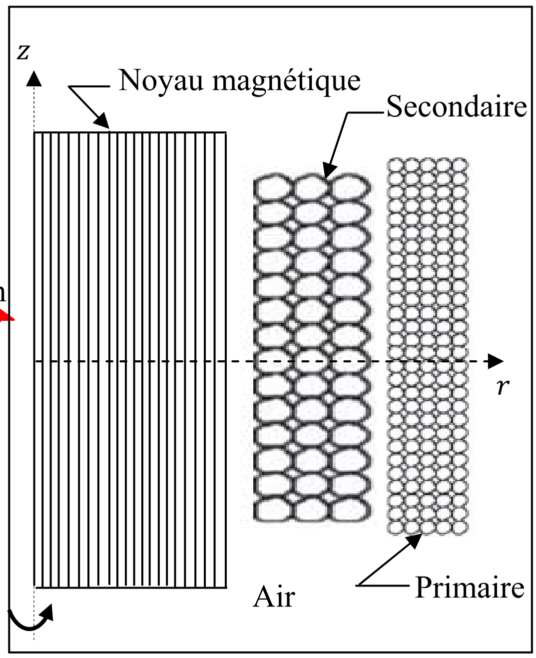

Fig. III.1.b : Domaine d'étude

III.3 Discrétisation des enroulements

Classiquement il existe deux modèles de conducteurs : les conducteurs filamentaires et les conducteurs massifs. Cependant un nouveau type de conducteur très efficace est appliqué aux transformateurs, il s'agit de feuilles d'enroulements, résistant aux efforts axiaux et aux températures élevées dues aux courts circuits [Ger-2001].

On peut distinguer deux sortes de discrétisations : dans le cas ou l'épaisseur de peau est très faible (hautes fréquences), on ne discrétise que le pourtour de la section du conducteur (Fig.III.2), et dans le cas contraire en (basses fréquences), on discrétise toute la section (Fig.III.3).

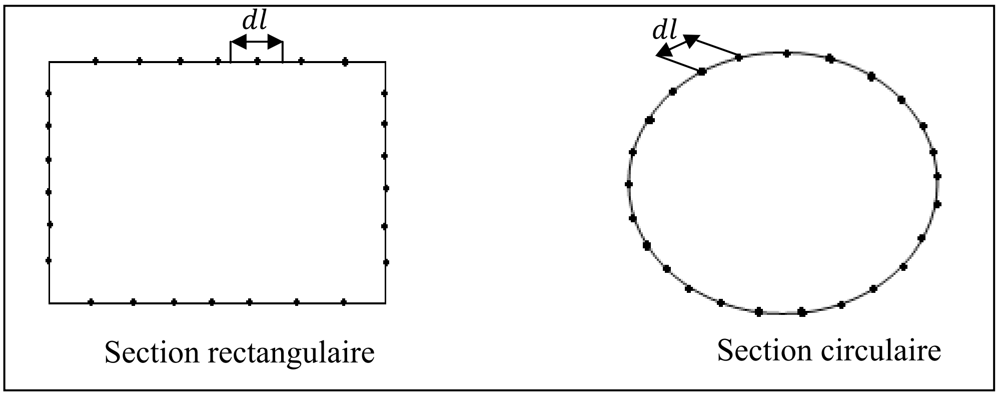

Fig.III.2 : Discrétisation linéique de la frontière du conducteur

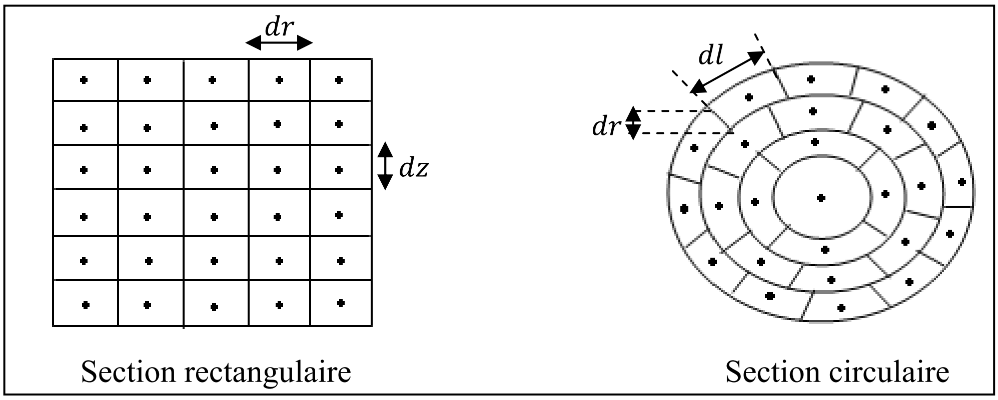

Fig.III.3 : Discrétisation totale de la section du conducteur [Mao-1996]

Si l'épaisseur de peau est grande par rapport aux dimensions des conducteurs et pour des fréquences égales à 50 Hertz, les densités de courant sont pratiquement uniformes comme c'est le cas pour les régions filaires pour lesquels toute la section du conducteur est discrétisée. Par contre lorsque l'épaisseur de peau est petite par rapport aux dimensions des conducteurs, dans ce cas les pertes produites par les flux de fuite dominent, on ne discrétise pratiquement que le pourtour de ces derniers.

III.4 Formulation en potentiel vecteur magnétique

Cette méthode consiste à formuler la loi d'Ohm pour chaque élément, de façon à aboutir à un système d'équations différentielles, faisant intervenir les chutes de tension résistives et inductives correspondant d'une part à l'inductance propre et d'autre part aux mutuelles inductances avec tous les autres éléments.

Pour la mise en œuvre de cette méthode, des hypothèses ont été faites :

- La géométrie étudiée est à symétrie de révolution.
- L'hélicité des enroulements est négligée.
- Les matériaux utilisés sont à propriétés physiques isotropes et linéaires.

Les modèles diffèrent selon la manière d'introduire la source, le premier suppose une source de courant et le second prend comme source une tension. Chacun de ces modèles est formulé suivant la fréquence d'excitation, des caractéristiques électriques, magnétiques et géométriques du problème. Le modèle d'excitation en tension à pour objectif la détermination de la répartition de la densité de courant circulant dans chaque spire.

III.4.1 Équations caractéristiques en axisymétrique

Pour décrire le phénomène électromagnétique, nous choisissons de ramener les équations de Maxwell à un système de deux équations exprimant le couplage entre la densité du courant et le potentiel vecteur magnétique, les équations de Maxwell mènent au système suivant : équations (II. 36) et (III. 1) [Mao-2006] [Mao-2009] [Esl-2010]

$$J = -\sigma\left(g\overrightarrow{ra}d\ V + \frac{\partial A}{\partial t}\right) \qquad \text{(III. 1)}$$

$J_{ind} = -\sigma \dfrac{\partial A}{\partial t}$ densité de courant induit

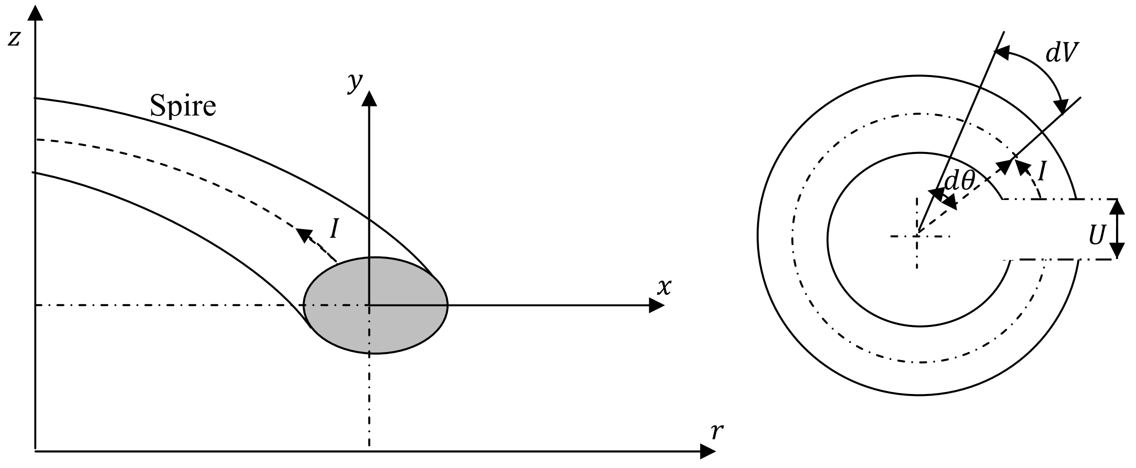

Fig.III. 4: Coupe transversale et radiale d'une spire [Mao-2006]

Le fait que le courant circule le long du périmètre moyen de la spire on ramène le potentiel scalaire électrique à la variation angulaire tel que :

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{U}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{U}_\theta \qquad \text{(III. 2)}$$

La variation de la tension suivant le rayon est nulle l'équation (III. 2) devient :

$$\overrightarrow{grad}V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{U}_\theta \qquad \text{(III. 3)}$$

La tension 'U' au borne de la spire est donnée par :

$$\overrightarrow{grad}V = -\frac{U}{2\pi.r} \qquad \text{(III. 4)}$$

En utilisant le théorème de stockes (équation(III. 1)) on peut écrire :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{2\pi.r}\frac{\partial \psi}{\partial t} \iff A = 2\pi\, r\, .\psi \qquad \text{(III. 5)}$$

A partir des équations (III. 2), (III. 3), (III. 4),(III. 5) on obtient l'équation générale pour un élément de circuit.

$$U = \left(2\pi.r\rho J + \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 2\pi.r\left(\rho J + \frac{\partial A}{\partial t}\right) \qquad \text{(III. 6)}$$

En régime harmonique (III. 6) s'écrit :

$$U = (2\pi.r\rho J + j\omega\, \psi) = 2\pi.r(\rho J + j\omega\, A) \qquad \text{(III. 7)}$$

On reconnaît l'expression de la tension aux bornes d'une spire élémentaire utilisée dans la formulation de la méthode des circuits couplés, exprimée en termes de densité de courant J et du potentiel vecteur A. Le terme $2\pi.r\rho J$ correspond à la chute de tension résistive, alors que le terme $j\omega 2\pi.rA$ représente la chute de tension inductive.

Le potentiel vecteur magnétique comprendrait la contribution du courant de la spire elle-même (inductance propre), ainsi que la contribution des courants circulant dans les autres spires (inductances mutuelles), cela est représenté sur la (Fig.III.5) :

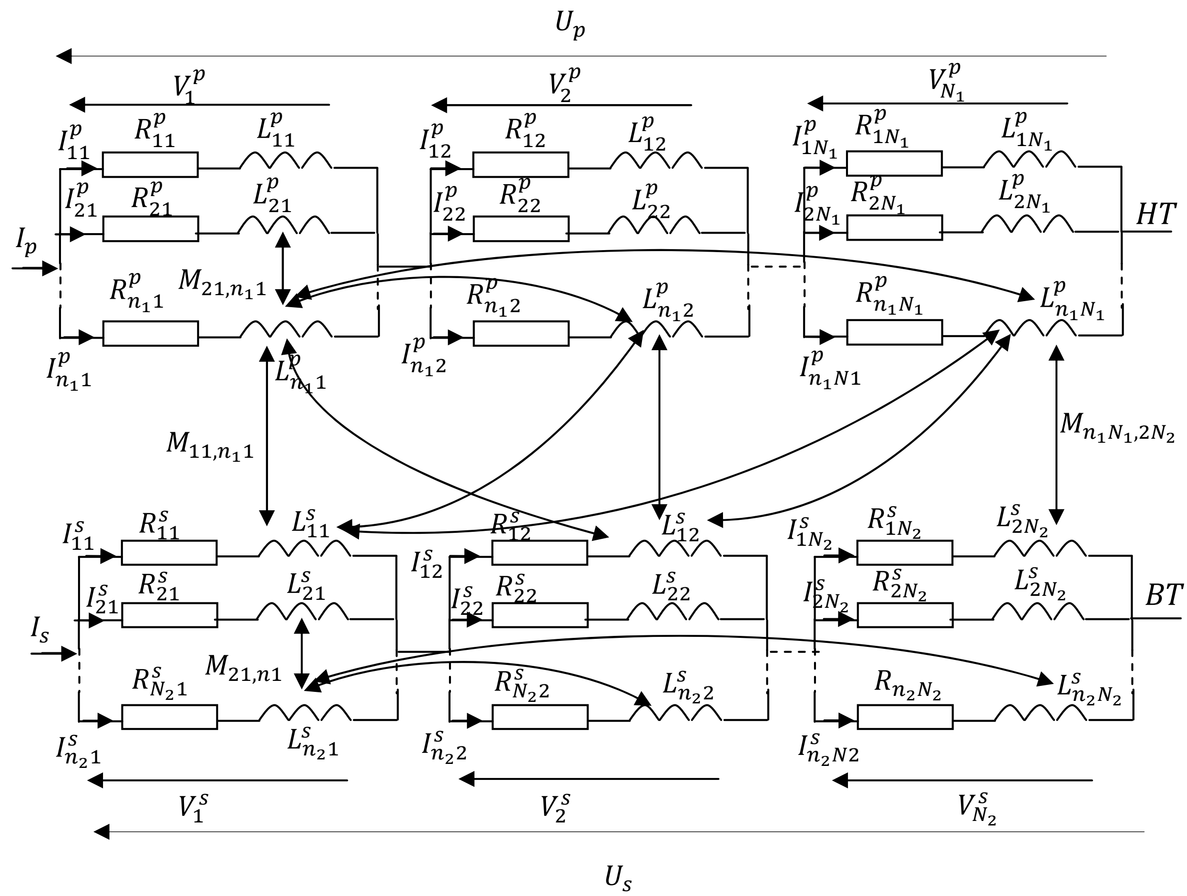

Fig.III.5: Schéma électrique équivalent des deux enroulements HT et BT

L'expression(III. 8), peut être écrite pour toute spire élémentaire k de la spire l avec la contribution des courants circulant dans les spires élémentaires i de la spire j comme suit : [Lef-2005]

$$V_{kl} = 2\pi r_{kl}\left[\rho J_{kl} + j\omega\left(\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{N_1} A_{kl,ij} + \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{N_2} A_{kl,ij}\right)\right] \qquad \text{(III. 8)}$$

N_1, N_2 : Nombre de spire des enroulements primaire /secondaire

n_1, n_2 : Nombre de discrétisation par spire primaire / secondaire*

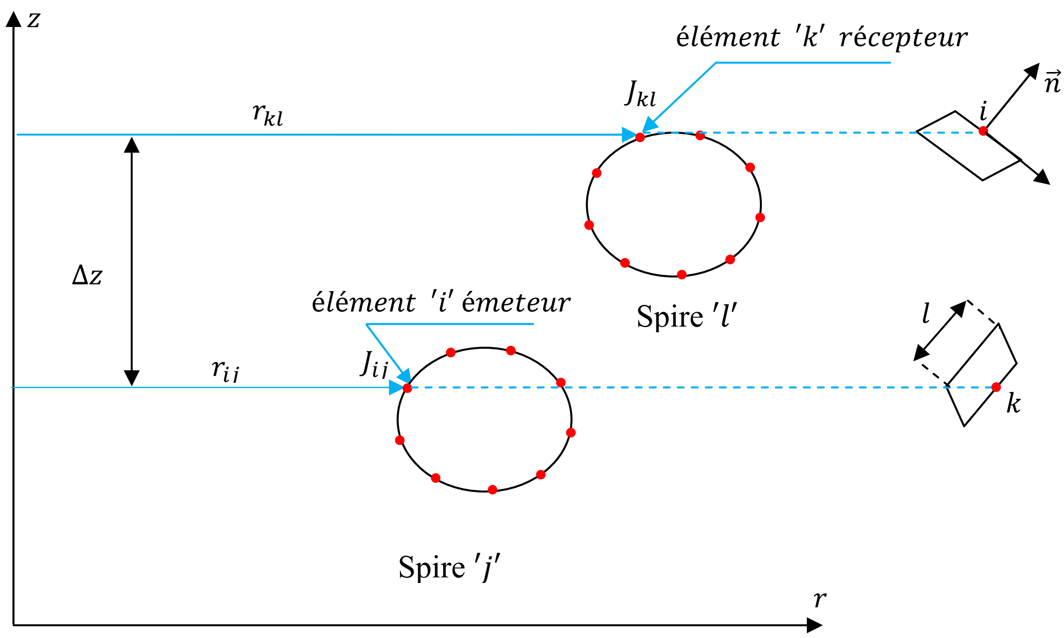

Fig.III.6 : Représentation des spires élémentaires ij et kl [Leo-1992]

III.5 Expression du potentiel vecteur magnétique

Nous considérons le cas de la (fig. III.7), dans l'air, qui exprime le potentiel crée par la spire de contour C_i parcourue par un courant I au point k. R est la distance entre éléments du contour $\overrightarrow{dl}$.

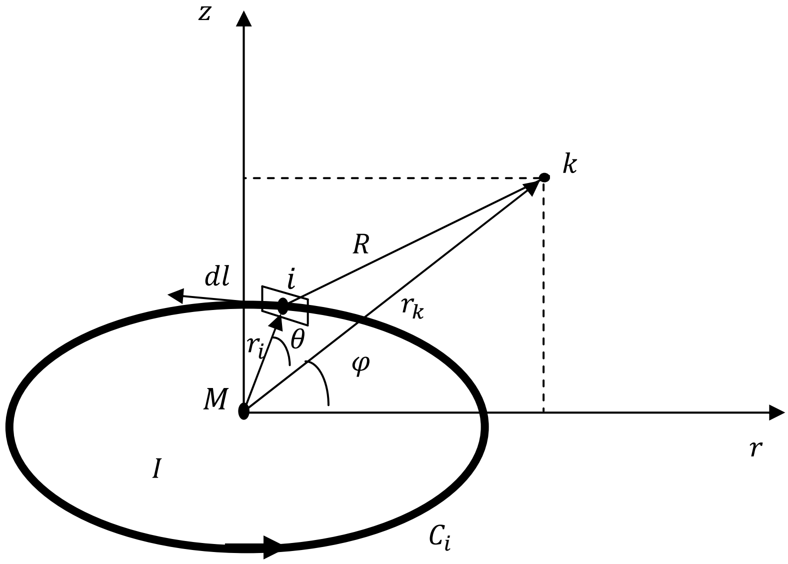

Fig. III.7: Potentiel vecteur magnétique crée par une spire filiforme [Mao-1996] [Cha-2003]

Le potentiel vecteur A du champ électromagnétique entre deux nœuds émetteur i et récepteur k est défini par l'expression loi de Biot et Savart donnée par l'équation: [Mao-2006]

$$\vec{A}(i) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V_i} \frac{\vec{J}(i).dV_i}{\|\vec{R}\|} \tag{III.9}$$

L'approximation du courant est constant dans la section de la spire :

$$I(i) = J(r,z).dr.dz.d\theta = J(r,z).S.d\theta \tag{III.10}$$

Dans une configuration axisymétrique, le potentiel vecteur magnétique et la densité de courant électrique sont réduits à leurs composants angulaires. [Leo-1992] [Mao-1996]

$$\vec{A}(r,z) = A_\theta(r,z)\vec{e}_\theta = \frac{\mu_0.dr.dz}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{J(r,z)\overrightarrow{dl}}{\|\vec{R}\|} \tag{III.11}$$

$\theta: est\ l'angle\ entre\ r_i\ et\ r_k$

On défini R au moyen de :

$$R = \sqrt{r_i^2 + r_k^2 - 2r_ir_k cos\theta} \tag{III.12}$$

$$|r_k - r_i|^2 = r_i^2 + r_k^2 - 2r_ir_k.\cos\theta \tag{III.13}$$

Le réarrangement de l'équation (III.11) nous permet d'écrire

$$A(r,z) = \frac{\mu_0}{2\pi}.I(r,z) \int_0^{2\pi} \frac{r_i cos\theta\ d\theta}{\sqrt{(r_k + r_i)^2 + (z_k + z_i)^2}} \tag{III.14}$$

Avec :

$$k^2 = \frac{4r_ir_j}{(r_i + r_j)^2 + \left(z_i + z_j\right)^2} \tag{III.15}$$

$on\ posant:\ \varphi = \pi - 2\theta,\ \ soit\ d\varphi = -2\theta\ \ et\ \ cos\varphi = 2sin^2\theta$

L'intégrale (III. 14) peut s'écrire :

$$A(r,z) = \frac{\mu_0}{2\pi}.I(r,z).r_i \int_0^{2\pi} \frac{2.(2sin^2\varphi - 1)}{\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}}\, d\varphi \qquad \text{(III. 16)}$$

En considérant l'identité [Mao-1996] :

$$\frac{k^2sin^2\theta}{\sqrt{(1-k^2sin^2\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-k^2sin^2\theta)}} - \sqrt{(1-k^2sin^2\theta)}$$

Le potentiel vecteur magnétique s'exprime par l'intermédiaire des intégrales elliptiques de premier et de deuxième espèce E_1 et E_2.

$$A(r,z) = \frac{\mu_0}{2\pi}.I(r,z).\sqrt{\frac{r_i}{r_k}}.\left[\frac{(2-k^2)E_1(k) - 2.E_2(k)}{k}\right] \qquad \text{(III. 17)}$$

$$E_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\theta}{\sqrt{(1-k^2sin^2\theta)}} \quad et \quad E_2(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-k^2sin^2\theta)}.d\theta \qquad \text{(III. 18)}$$

E_1 et E_2 peuvent êtres calculés par une méthode des géométries arithmétiques, qui consiste à calculer une séries de deux coefficients a_n, b_n comme suit [Rez-1992] :

$$E_1(k) = E_2(k)\left[1 - \frac{1}{8}\sum_0^{\infty} 2^n.(a_n - b_n)^2\right]$$

$$E_2(k) = lim\left(\frac{\pi}{2a_n}\right)$$

$$a_0 = 1 \quad ; \quad b_0 = \sqrt{1-k^2} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \quad ; \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}}$$

$$A_{ij,kl} = \frac{\mu_0}{2\pi}.\iint_{S_{ij}} J_{ij}(r,z).\sqrt{\frac{r_{ij,kl}}{r_{kl}}}\left[\frac{(2-k^2)E_1(k) - 2.E_2(k)}{k}\right] ds_{ij} \qquad \text{(III. 19)}$$

$A_{ij,kl}$ Correspond alors au potentiel vecteur magnétique au sein de la boucle élémentaire réceptrice k de la spire l, créé par la densité de courant J_{ij} dans la boucle élémentaire émettrice i de la spire j **(**Fig.III.6**)**.

Dans le cas ou l'épaisseur de peau δ est très petite devant la largeur l des spires élémentaires on intègre par rapport à l'élément de tangente l, en tenant compte de la décroissance exponentielle du courant à la distance x de la normale $\vec{n}$ d'où [Che-1995] [Che-1996] :

$$J_{ij}(r,z) = J_{ij}.e^{-\left((1+j).\frac{x}{\delta}\right)} \tag{III.20}$$

L'équation (III. 19) peut se ramener à :

$$A_{ij,kl} = \frac{\mu_0}{2\pi}.\frac{1-j}{2}J_{ij}.\delta\int_l^{\cdot}\frac{r_{ij,kl}}{r_{kl}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)E_1(k)-E_2(k)\right]dl \tag{III.21}$$

$$Avec:\ k = 2.\frac{\sqrt{r_{ij}r_{kl}}}{r_{ij,kl}} \qquad et \qquad r_{ij,kl} = \sqrt{\left(r_{ij}+r_{kl}\right)^2+\Delta_z^2}$$

$$V_{kl} = 2\pi r_{kl}\left[\rho J_{kl} + j\omega\left(\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\mu_0}{2\pi}.\frac{1-j}{2}J_{ij}.\delta.\int_l^{\cdot}g_{ij,kl}^{p}.dl\right) + j\omega\left(\sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{N_2}\frac{\mu_0}{2\pi}.\frac{1-j}{2}J_{ij}.\delta.\int_l^{\cdot}g_{ij,kl}^{s}.dl\right)\right] \tag{III.22}$$

On pose

$$\frac{\mu_0.\delta.\omega}{4\pi}.\int_l^{\cdot}g_{ij,kl}^{p}.dl = G_{ij,kl}^{p} \quad et \quad \frac{\mu_0.\delta.\omega}{4\pi}.\int_l^{\cdot}g_{ij,kl}^{s}.dl = G_{ij,kl}^{s} \tag{III.23}$$

L'équation (III. 22) devient : [Mao-1996]

$$V_{kl} = 2\pi r_{kl}\left[\rho J_{kl} + (1+j).\left(\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{N_1}J_{ij}\,G_{ij,kl}^{p} + \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{N_2}J_{ij}.G_{ij,kl}^{s}\right)\right] \tag{III.24}$$

La tension totale aux bornes de la bobine est la somme des tensions V_i aux bornes de chaque spire. Le nombre de tensions inconnues est la somme des tensions de deux bobines (N_1+N_2) [Lef-2005] [Lef-2006].

$$\begin{cases} V_{1j}^{p} = V_{2j}^{p} = \cdots = V_{n1j}^{p} & et \quad \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{N_1} V_{kl}^{p} = n_1 U_p \\ V_{1j}^{s} = V_{2j}^{s} = \cdots = V_{n2j}^{s} & et \quad \sum_{k=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{N_2} V_{kl}^{s} = n_2 U_s \end{cases} \qquad (\text{III}.25)$$

La conservation de courants d'une spire à l'autre et exprimée par l'équation :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n_1} J_{i,1}^{p}.S^{p} = \sum_{i=1}^{n_1} J_{i,2}^{p}.S^{p} = \cdots = \sum_{i=1}^{n_1} J_{i,N1}^{p}.S^{p} = I_p \\ \sum_{i=1}^{n_2} J_{i,1}^{s}.S^{s} = \sum_{i=1}^{n_2} J_{i,2}^{s}.S^{s} = \cdots = \sum_{i=1}^{n_2} J_{i,N2}^{s}.S^{s} = I_s \end{cases} \qquad (\text{III}.26)$$

Dans le but de diminuer la taille du système d'équations à résoudre et comme on ne s'intéresse qu'aux densités de courant, on élimine les tensions élémentaires, par conséquent on réduit le système matriciel.

D'après $(\text{III}.24), (\text{III}.25), (\text{III}.26)$ on obtient un système de $\{n_1N_1, n_2N_2\}$, équations à $\{n_1N_1, n_2N_2\}$ inconnues de la forme :

$$\begin{bmatrix} Mpp & Mps \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Mps^{tr} & Mss \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^{p} \\ . \\ . \\ J_{n_1 1}^{p} \\ . \\ . \\ J_{1N_1}^{p} \\ . \\ . \\ J_{n_1N_1}^{p} \\ \cdots\cdots.. \\ J_{11}^{s} \\ . \\ . \\ J_{n_2 1}^{s} \\ . \\ . \\ J_{1N_2}^{s} \\ . \\ . \\ J_{n_2N_2}^{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ n_1U_p \\ \cdots\cdots.. \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ n_2U_s \end{bmatrix} \qquad (\text{III}.27)$$

Mpp : Matrice représentant l'influence entre spires du primaire.

Mss : Matrice représentant l'influence entre spires du secondaire.

A partir de la loi de conservation du courant $(\mathrm{III}.26)$ nous construisons les matrices$[S^p]$, $[S^s]$ de dimension$(n_1 * N_1)$, $(n_2 * N_2)$ qui représentent respectivement la matrice sections spires primaire et secondaire tel que : [Doi-2007]

$$[S^p] = \begin{bmatrix} S_{11}^p & \dots & \dots & S_{1N_1}^p & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & S_{n_1 1}^p & \dots & S_{n_1 N_1}^p & \end{bmatrix} \quad (\mathrm{III}.28)$$

$$[S^s] = \begin{bmatrix} S_{11}^s & \dots & \dots & S_{1N_2}^s & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & S_{n_2 1}^s & \dots & S_{n_2 N_2}^s & \end{bmatrix} \quad (\mathrm{III}.29)$$

A partir de l'équation $(\mathrm{III}.24)$, et les équations de conservation de tension (III.25) et du courant (III.26) nous obtenons les matrices $[p \leftarrow p]$ et $[s \leftarrow s]$ caractérisant l'effet des conducteurs sur eux-mêmes qui définissent le couplage entre les spires élémentaires des conducteurs, respectivement de dimension $\{N_1 * (n_1 - 1), n_1 N_1\}$, $\{N_2 * (n_2 - 1), n_2 N_2\}$. La matrice Mpp est formée en assemblant les deux matrices $[S_p]$ et $[p \leftarrow p]$ tel que : [Doi-2007]

$$[Mpp] = \begin{bmatrix} [S^p] \\ [[p \leftarrow p]] \end{bmatrix} \quad (\mathrm{III}.30)$$

La matrice Mss est formée en assemblant les deux matrices $[S_s]$ et $[s \leftarrow s]$:

$$[Mss] = \begin{bmatrix} [S^s] \\ [[s \leftarrow s]] \end{bmatrix} \quad (\mathrm{III}.31)$$

Mps : Matrice représente l'interaction entre spires du primaire et celles du secondaire de dimension $\{N_2 * (n_2 - 1), n_1 N_1\}$.

Mps^{tr} : Matrice transposée de même dimension que Mps.

III.6 Prise en compte du circuit magnétique

L'utilisation de circuits magnétiques (tôle ferromagnétique, ferrites pour des fréquences plus élevées) peut présenter un certain nombre d'avantages, notamment lorsqu'il s'agit de concentrer localement le champ magnétique ou de dévier celui-ci vers une région bien précise. La présence du circuit magnétique modifie le potentiel vecteur magnétique.

Certain matériaux tels que l'acier, le Nickel ou le Cobalt se caractérisent par une perméabilité magnétique dépendante du champ magnétique. Ces matériaux sont fortement utilisés dans l'industrie, il est donc important de prendre en compte leur spécificité.

Nous considérons que la saturation du circuit magnétique n'est pas atteinte ; ainsi la perméabilité magnétique est supposée constante. Les courants de Foucault sont donc négligés dans le circuit. Ce dernier se comporte donc comme un matériau homogène et isotrope. L'ensemble de ces considérations nous permet de modéliser toute partie de la culasse par des courants fictifs surfaciques. [Dur-1968].

III.6.1 Modélisation du noyau par des densités superficielles de courant

La méthode des circuits électriques magnétiquement couplés basée sur une discrétisation de l'inducteur en spires élémentaires et une discrétisation en segments du circuit magnétique, donnant ainsi un maillage des différents domaines conducteurs. A chaque spire est associée d'une part l'équation magnétodynamique (II.28) et les lois de Kirchhoff pour les enroulements, et d'autre part les équations de Fredholm de $2^{\text{ème}}$ espèce pour la culasse magnétique. Les inconnues étant les densités de courant dans chaque élément de discrétisations des enroulements et du noyau magnétique. [Ern-1987]

L'élément ferromagnétique, peut être remplacé par des densités de courant fictives surfaciques et éventuellement volumiques. Considérons le circuit magnétique (noyau) et une distribution de courant véhiculé par le conducteur caractérisée par une densité de courant $\vec{J}^0$.

Nous supposons que le milieu magnétique à une perméabilité $(\mu_1 = \mu_0\mu_r)$ est une conductivité électrique$(\sigma_1 = 0)$. Le milieu extérieur au circuit magnétique étant de l'air, il a une perméabilité$(\mu_2 = \mu_0)$ μ_0 étant la perméabilité de vide.

La perméabilité magnétique du noyau est importante par rapport à celle de l'air, et le champ magnétique est perpendiculaire à la surface du noyau [Leo-1992].

L'induction dans le circuit magnétique se décompose en un terme source $\vec{B}_0$ généré par la densité de courant source $\vec{J}_0$ crée par l'enroulement primaire, et un terme de magnétisation $\vec{B}'_k$

$$\vec{B}_k = \vec{B}_0 + \vec{B}'_k \qquad (\text{III}.32)$$

C'est l'induction magnétique $\vec{B}_k$ résultante qui agit sur le milieu Ω_1 pour produire l'intensité d'aimantation $\vec{M}$.

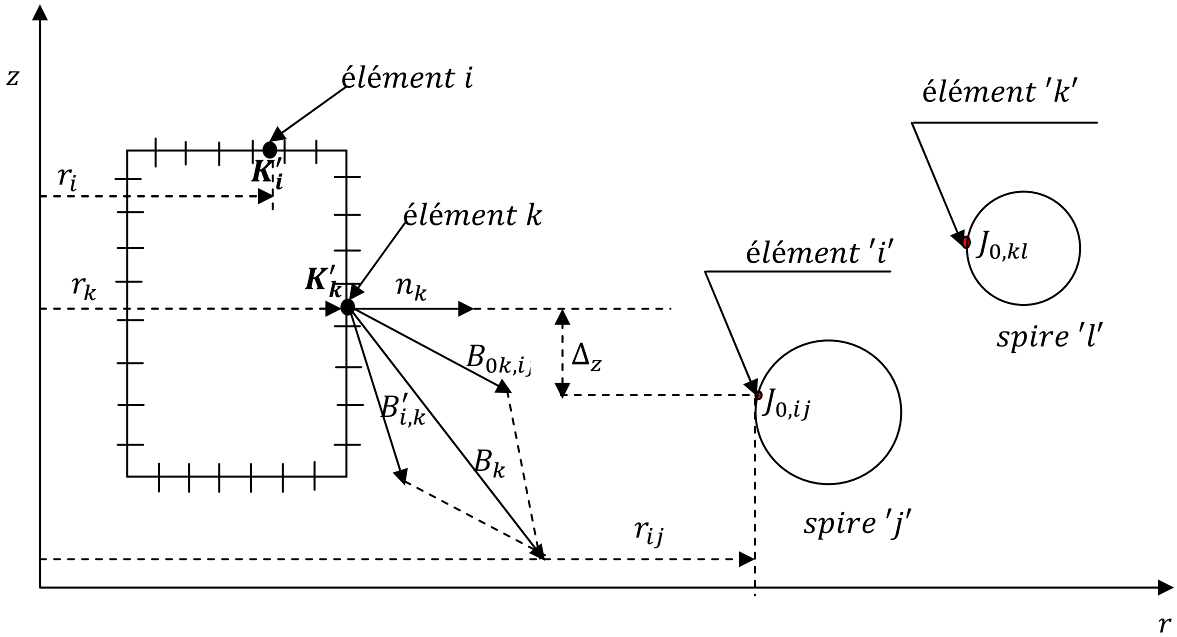

Fig.III.8 : Schéma de principe du système « bobine –culasse » [Doi-2007]

Le milieu magnétique produisant l'induction magnétique $\vec{B}'_k$ se comporte comme la superposition de deux distributions de courant. Une distribution volumique fictive $\vec{J}'_k$ et une distribution de courant superficiel fictive $\vec{K}'_k$, circulant respectivement à l'intérieur de la culasse et sur sa surface, avec :

$$\vec{J}'_k = \overrightarrow{rot}\,\vec{M} \tag{III.33}$$

$$\vec{K}'_k = -(\vec{n} \wedge \vec{M}) \tag{III.34}$$

$\vec{n}$ étant la surface orientée positivement à l'extérieur en tout point de la surface. L'hypothèse d'homogénéité de la perméabilité magnétique de la culasse implique que $\overrightarrow{rot}\,\vec{M} = 0$, donc $\vec{J}'_k$ est nulle, ainsi la culasse est représentée uniquement par une distribution de courants superficiels $\vec{K}'_k$ sur sa surface [Ern-1987] [Ern-1990] [Joa-2004].

III.6.2 Expression intégrale caractéristique du noyau

Le noyau de géométrie axisymétrique est donc modélisé par distribution linéique de courants fictifs. A partir des conditions aux limites à l'interface du noyau, l'équation intégrale de Fredholm de 2éme espèce en $\vec{K}'_k$, peut être utilisée pour calculer l'induction magnétique en chaque segment de la surface du noyau tel que :[Ern-1987]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_r+1}{\mu_r-1}\right)\mu_0\vec{K}'_k + n\wedge\int_l d\vec{B}' = -n\wedge\vec{B}_0 \qquad (\text{III}.35)$$

Nous discrétisons le noyau en n_c segments de longueur l_i, sur les quels les densités de courants fictifs $\vec{K}'_k$ sont constantes. La superposition de l'ensemble des éléments linéiques du noyau, et tenant compte de l'effet des bobines permet d'exprimer la relation magnétique au point k du noyau comme suit : $(\text{III}.36)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_r+1}{\mu_r-1}\right)\mu_0\vec{K}'_k + \sum_{i=1}^{n_c}\left(\int_{l_i} n_k\wedge d\vec{B}'_{k,i}\right) = -\sum_{i=1}^{n1}\sum_{j=1}^{N1}\iint_{S_{ij}} n_k\wedge\vec{B}_{0k,ij} - \sum_{i=1}^{n2}\sum_{j=1}^{N2}\iint_{S_{ij}} n_k\wedge\vec{B}_{0k,ij} \qquad (\text{III}.36)$$

Segment du noyau « Magnétisation propre »

Segment du noyau « Magnétisation mutuelle »

Segment de l'inducteur « Source »

Pour le calcul de $(\text{III}.36)$ nous devons déterminer l'induction magnétique créée par une spire circulaire en tout point de la discrétisation k du noyau. Pour ce faire, nous utilisons l'expression du potentiel vecteur magnétique créé par une spire.

Ainsi, les composantes de l'induction magnétique élémentaire B_{rk}, B_{zk} et $B_{\theta k}$dérivées de l'équation $(\text{III}.21)$ s'écrivent :

$$dB_{rk} = \frac{\mu_0.k.\Delta z}{4\pi.r_i.\sqrt{r_k r_i}}[-E_1(k)+C.E_2(k)].\vec{K}'_k.dl \qquad (\text{III}.37)$$

$$dB_{\theta k} = 0 \qquad (\text{III}.38)$$

$$dB_{zk} = -\frac{\mu_0.k}{4\pi.\sqrt{r_k r_i}}[E_1(k)+D.E_2(k)].\vec{K}'_k.dl \qquad (\text{III}.39)$$

$$\text{Avec}\begin{cases} k = \sqrt{\dfrac{4r_i r_j}{\left(r_i+r_j\right)^2+\Delta z^2}} \\ C = \dfrac{r_i^2+r_j^2+\Delta z^2}{\left(r_i-r_j\right)^2+\Delta z^2} \\ D = \dfrac{r_i^2-r_j^2-\Delta z^2}{\left(r_i-r_j\right)+\Delta z^2} \end{cases}$$

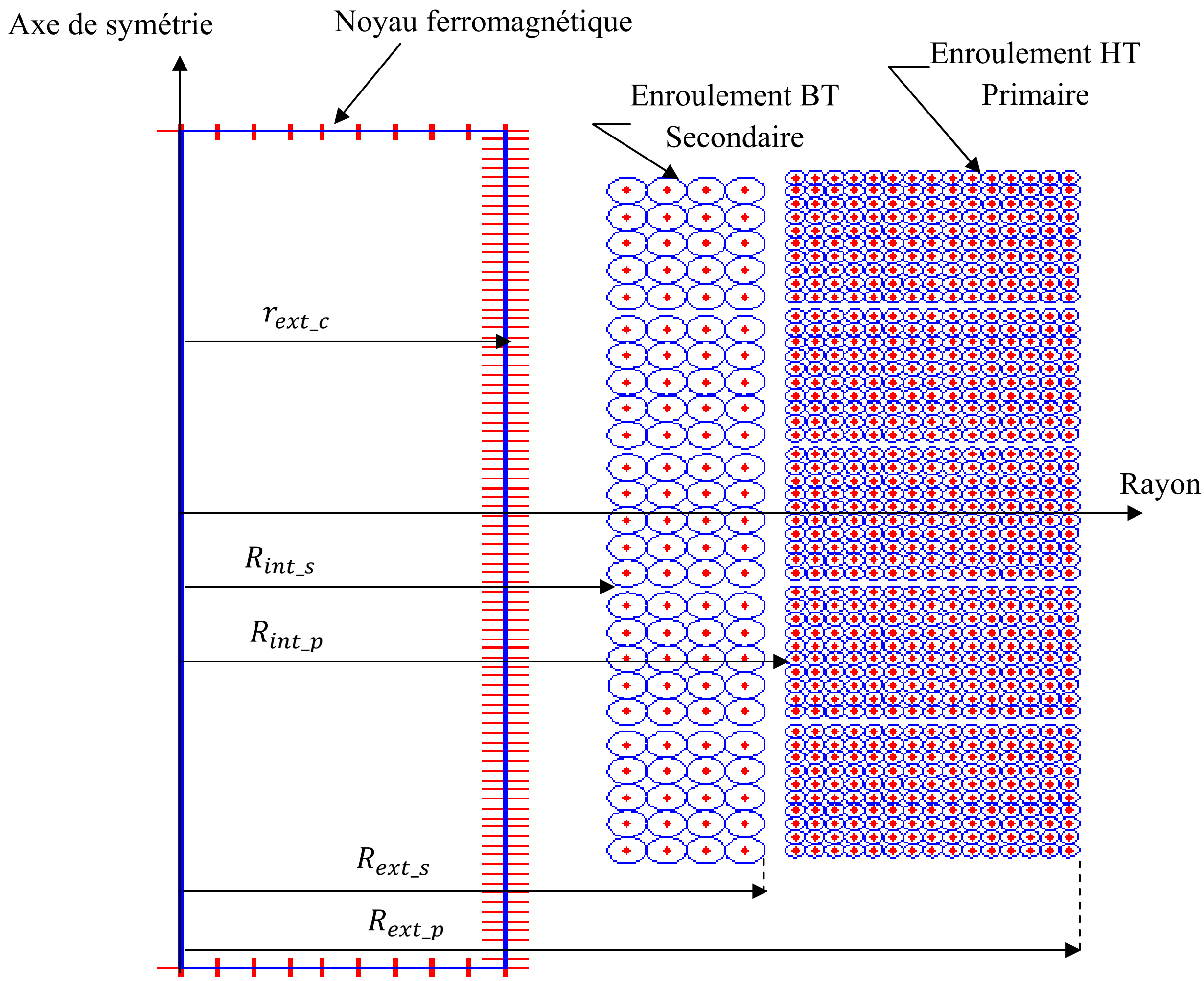

Fig. III.9: Discrétisation du système « bobine et noyau » [Leo-1992] [Doi-2007]

Finalement l'équation de la tension aux bornes d'une spire élémentaire est complétée par l'équation de Fredholm en incluant la contribution du noyau ferromagnétique. Cela augmente le nombre d'inconnues, ainsi alourdissement de la matrice globale sachant que le coût en place mémoire dépend du nombre de discrétisations.

$$V_{kl} = 2\pi r_{kl}\left[\rho J_{kl} + (1+j).\left(\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{N_1} J_{ij}\, G^{p}_{ij,kl} + \sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=1}^{N_2} J_{ij}.\, G^{s}_{ij,kl} + \sum_{i=1}^{n_c} A_{kl,i}\right)\right] \qquad (III.40)$$

Ainsi, le champ électromagnétique dans le circuit magnétique peut être calculé à partir des équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce.

Le système matriciel final est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} Mpp & Mps & Mpc \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ Mps^{tr} & Mss & Msc \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ Mpc^{tr} & Msc^{tr} & Mcc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^{p} \\ . \\ . \\ J_{n_1 1}^{p} \\ . \\ . \\ J_{1N_1}^{p} \\ . \\ . \\ J_{n_1 N_1}^{p} \\ \dots\dots.. \\ J_{11}^{s} \\ . \\ . \\ J_{n_2 1}^{s} \\ . \\ . \\ J_{1N_2}^{s} \\ . \\ . \\ J_{n_2 N_2}^{s} \\ \dots\dots.. \\ K_1^{'} \\ . \\ . \\ K_m^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ n_1 U_p \\ \dots\dots.. \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ n_2 U_s \\ \dots\dots.. \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{III}.41)$$

Mcc ; Mpc ; Msc sont des matrices pleines, elles proviennent de l'équation de Fredholm de deuxième espèce ($\mathrm{III}.36$).

Mcc : Matrice de dimension $(n_c * n_c)$, elle représente l'influence entre les spires du noyau.

Mpc : Matrice de dimension $(n_1 * N_1)*n_c$, elle représente l'interaction entre spires du primaire et celles du noyau ; Mpc^{tr}est la matrice transposée de même dimension que la matrice Mpc .

Msc: Matrice de dimension $(n_2 * N_2)*n_c$, elle représente l'interaction entre spires du secondaire et celles du noyau ; Msc^{tr} est la matrice transposée de même dimension que la matrice Msc.

III.7 Calcul analytique des paramètres inductifs du modèle

Plusieurs techniques sont proposées pour le calcul des paramètres du modèle à savoir les résistances et les inductances. On peut classer celles-ci en trois grandes classes la méthode basée sur la géométrie et les propriétés des matériaux ; méthode d'énergie emmagasinée dans le système et la méthode basée sur une formulation en potentiel vecteur magnétique.

III.7.1 Inductance mutuelle

- D'après le théorème de Stockes le flux d'induction magnétique est donné par l'équation suivante : [Bab-2002] [Cha-2003] [Ven-2009]

$$\psi_{ik} = \iint_S \vec{B}\,.\,\overrightarrow{ds} = \oint_C \vec{A}\,.\,\overrightarrow{dl} = M_{ik} I \qquad (\mathrm{III}.42)$$

En utilisant l'expression analytique du potentiel vecteur, on déduit les expressions des mutuelles M_{ik} :

$$M_{ik} = \frac{1}{I}\oint_C \vec{A}\,.\,\overrightarrow{dl} \qquad (\mathrm{III}.43)$$

L'inductance mutuelle est donnée par l'expression $(\mathrm{I}.29)$: [Ven-2009]

On pose :

$$\begin{cases} E(k) = \left[\dfrac{(2-k^2)E_1(k) - 2\,E_2(k)}{k}\right] & (\mathrm{III}.44) \\ G(k) = r_k.\sqrt{\dfrac{r_i}{r_k}}\,.\,E(k) = \sqrt{r_i r_k}\,.\,E(k) & (\mathrm{III}.45) \end{cases}$$

L'expression de la mutuelle se simplifie comme suit :

$$M_{ik} == \mu_0\,.\sqrt{r_i r_k}\,.\,E(k) = \mu_0\,.\,G(k) \qquad (\mathrm{III}.46)$$

Dans un système (solénoïde massif) nous subdivisons l'enroulement en mailles filamentaires, la section de l'enroulement primaire est divisée en n_1 cellules, et celui de l'enroulement secondaire en n_2 cellules, chaque cellule contient un filament, et on suppose que la densité de courant dans l'enroulement est uniforme, de sorte que tous les courants du filament soient égaux. L'inductance mutuelle de cette configuration est obtenue par la superposition des inductances mutuelles de chaque couple composé par les enroulements (spires filamentaires) [Bab-2004] [Bon-1997] [Bab-2003].

$$M_{12} = \frac{N_1 . N_2}{n_1 . n_2} \sum_{i=-n_1}^{n_1} \sum_{k=-n_2}^{n_2} M_{ik} \qquad (III.47)$$

N_1: Nombre de spires de l'enroulement primaire.

N_2 est le nombre de spires de l'enroulement secondaire.

M_{ik} est La mutuelle entre deux éléments élémentaires i et k.

III.7.2 Inductance propre

Le calcul de l'inductance propre d'une spire circulaire ne peut être entrepris sans définir certains paramètres géométriques qui sont : le rayon moyen de la spire r ; le rayon interne de la spire r_i ; le diamètre a du fil constituant la spire et le rapport k' définis comme k'=$\frac{r}{a}$.

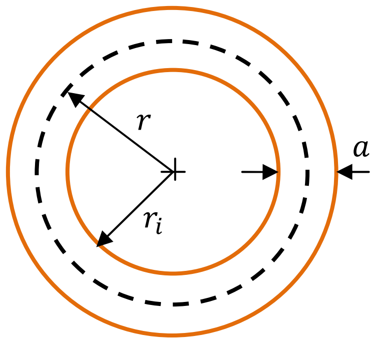

Fig. III.10 : Définition géométrique d'une spire élémentaire

L'inductance propre, est la somme de deux termes. Un premier « interne », que nous dénommerons L_i est associé au flux traversant la section du conducteur, un second L_e « externe », traduisant le flux partiel embrassé par le fil. [Fou-1979]

$$L = L_i + L_e \qquad (III.48)$$

L'inductance interne d'une bobine est associée à la distribution de la densité d'énergie interne aux fils constituant la bobine.

$$L_i = \frac{2W_{mi}}{I^2} = \frac{1}{I^2} \int_{V_i} \vec{B}\vec{H} \; dV \qquad (III.49)$$

Où W_{mi} est l'énergie stockée dans le volume V_i des conducteurs, et I le courant efficace total.

En accord avec la loi d'Ampère, appliquée à des conducteurs de section circulaire, le champ d'induction magnétique dans les conducteurs est donné par :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (r \leq a) \tag{III.50}$$

Avec (III.49) et (III.50), L_i devient :

$$L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \tag{III.51}$$

l : est la longueur totale de la spire.

On peut assimiler l'inductance propre extérieure à la mutuelle entre la fibre moyenne et une fibre périphérique quelconque [Fou-1979], d'où :

$$L_e = \mu_0 r \left[\ln\left(\frac{8r}{r - r_i}\right) - 2\right] \tag{III.52}$$

L'expression de l'inductance propre est donnée par

$$L = \mu_0 r \left[\ln\left(\frac{8r}{r - r_i}\right) - \frac{7}{4}\right] \tag{III.53}$$

III.8 Nécessité du couplage avec la méthode des éléments finis

La méthode des circuits électriques magnétiquement couplés qui ne discrétise que les parties actives (inducteur, charge amagnétique, etc.), peut être avantageusement couplée à une méthode numérique de représentation des milieux non linéaires. Le noyau ferromagnétique peut être modélisé par une méthode analytique basée sur l'introduction de densités fictives et superficielles de courant pour un cas linéaire isotrope est homogène, vue les caractéristiques physiques non linéaires du noyau magnétique la nécessité d'un couplage avec une méthode numérique est inévitable. Le couplage tire profit des avantages des deux méthodes, cela nous offre l'avantage de limiter le domaine de résolution de ces méthodes aux seuls domaines conducteurs. Cela engendre la réduction de maillage (non maillage de l'air) et un gain en espace mémoire et en temps de résolution.

III.8.1 Technique mixte circuits couplés-éléments finis

On applique la méthode des circuits couplés uniquement dans les enroulements primaire et secondaire et sur la frontière du domaine Γ, et on lui associe la méthode des éléments finis à l'intérieur du domaine Ω Fig. III.1

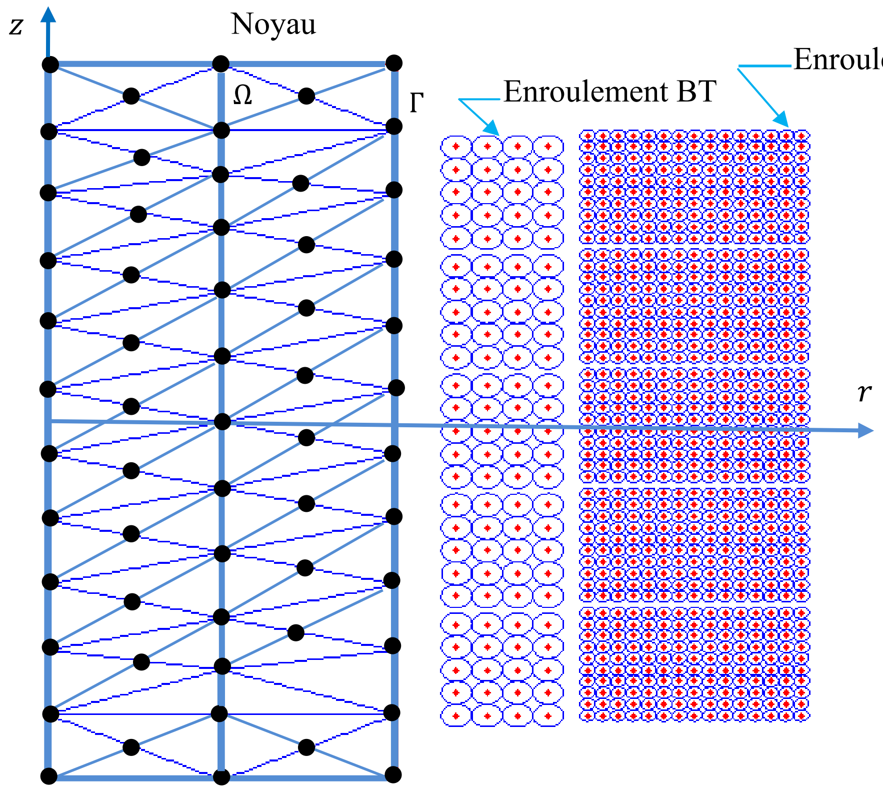

Fig. III.1 : Discrétisation des enroulements et du noyau

III.8.2 Formulation éléments finis des équations électromagnétiques du noyau

Le domaine d'étude est décomposé en un nombre fini d'éléments triangulaires qui forment le maillage. La valeur du potentiel vecteur est déterminée sur tous les sommets (les nœuds) des triangles. En utilisant des fonctions d'interpolation appropriées, la solution sera déterminée sur tout point sommet de l'élément.

Pour transformer un système d'équations aux dérivées partielles en une formulation intégrale, on utilise soit la formulation des résidus pondérés ou encore la méthode variationnelle. On se limitera dans ce qui suit à présenter la méthode projective de Galerkine [Sab-1986] [Dha-2005].

En remplaçant le terme rA_θ par A dans l'équation magnétodynamique donnée par $(\mathrm{II}.43)$, et en annulant le terme source on aura :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\upsilon}{r}.\frac{\partial(A)}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\upsilon}{r}.\frac{\partial(A)}{\partial r}\right)+\sigma.j.\omega.\frac{A}{r}=0 \qquad (\mathrm{III}.54)$$

La formulation résidus pondérés relative aux problèmes magnétodynamiques harmoniques exprimés par l'équation précédente sera :

$$-\iint_{\Omega}\alpha_i\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial(A)}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial(A)}{\partial z}\right)\right)dr.dz+j\omega\iint_{\Omega}\alpha_i.\sigma.A.\frac{dr.dz}{r}=0 \qquad (\mathrm{III}.55)$$

L'application du théorème de Green nous permet d'écrire

$$\iint_{\Omega}\frac{\upsilon}{r}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial r}.\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{\partial\alpha_i}{\partial z}.\frac{\partial A}{\partial z}\right)dr.dz-\int_{\Gamma}\frac{\upsilon}{r}.\alpha_i.\frac{\partial A}{\partial n}\,d\Gamma+j\omega\iint_{\Omega}\alpha_i.\sigma.A.\frac{dr.dz}{r}=0 \qquad (\mathrm{III}.56)$$

Utilisant la procédure de Galerkine qui consiste à choisir des fonctions d'interpolation identiques aux fonctions de pondération, (A) est approximé par : [Per-1995]

$$A_j^e=\sum_{j=1}^{nc}\alpha_i.A_j$$

Avec :

n_c : Nombre de nœuds du domaine de résolution.

A_j : Inconnues en chaque nœud du domaine.

Lorsqu'on introduit l'expression de discrétisation de l'inconnue dans la formulation éléments finis cette dernière devient :

$$\sum_{j=1}^{nc}\left(\iint_{\Omega}\frac{\upsilon}{r}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial r}.\frac{\partial\alpha_j}{\partial r}+\frac{\partial\alpha_i}{\partial z}.\frac{\partial\alpha_j}{\partial z}\right)dr.dz\right)A_j-\sum_{j=1}^{nc}\left(\int_{\Gamma}\frac{\upsilon}{r}.\alpha_j.\frac{\partial\alpha_j}{\partial n}\,d\,\Gamma\right)A_j$$
$$+j\omega\sum_{j=1}^{nc}\left(\iint_{\Omega}\alpha_i.\alpha_j.\sigma.\frac{dr.dz}{r}\right)A_j=0 \qquad (\mathrm{III}.57)$$

En écrivant (III. 57) pour tout nœud du domaine on aboutit au système matriciel suivant

$$\{[M] + j\omega.[N]\}[A] = 0 \qquad (III.58)$$

Les coefficients des différentes matrices sont fournis par :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\upsilon}{r}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial r}.\frac{\partial\alpha_j}{\partial r} + \frac{\partial\alpha_i}{\partial z}.\frac{\partial\alpha_j}{\partial z}\right) dr.dz - \left(\int_{\Gamma} \frac{\upsilon}{r}.\alpha_j.\frac{\partial\alpha_j}{\partial n}\right) d\Gamma \qquad (III.59)$$

α_j : Fonction de forme associée au nœud j du domaine.

$$N_{ij} = \iint_{\Omega} \alpha_i.\alpha_j.\sigma.\frac{dr.dz}{r} \qquad (III.60)$$

Le couplage hybride CEMC et EF se fera à travers les valeurs du potentiel vecteur magnétique A_Γ posé comme étant conditions aux limites de type Dirichlet.
On obtient un système de $(n_c - n_\Gamma)$ équations qui s'écrit :

$$[S][A]_\Omega = [C]\,[A]_\Gamma \qquad (III.61)$$

Avec :

$$[S] = \{[M] + j\omega.[N]\} \qquad (III.62)$$

$[A]_\Gamma$: correspond aux valeurs du potentiel sur les frontières du noyau.

A partir (III. 24), (III. 25), (III. 26), (III. 58), (III. 61) On aura la matrice globale, les inconnues sont les termes du potentiel vecteur magnétique sur la frontière et à l'intérieur du noyau (milieu Ω).

$$\begin{bmatrix} Mpp & Mps & Mp_{\Gamma} & Mpc \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ Mps^{tr} & Mss & Ms_{\Gamma} & Msc \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ Mpc^{tr} & Msc^{tr} & Mc_{\Gamma} & Mcc \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ 0 & 0 & -C & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ \ldots. \\ J_2 \\ \ldots. \\ A_{\Gamma} \\ \ldots \\ A_{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ n_1 U_p \\ \ldots. \\ 0 \\ . \\ n_2 U_s \\ \ldots. \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ \ldots. \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{III}.63)$$

Mp_{Γ} : Matrice pleine, qui caractérise l'effet du primaire sur la frontière du noyau.

Mpc : Matrice pleine, qui caractérise l'effet du primaire sur le noyau.

Mpc^{tr} : Matrice transposée de même dimension que Mpc.

Ms_{Γ} : Matrice pleine, qui caractérise l'effet du secondaire sur la frontière du noyau

Msc : Matrice pleine, qui caractérise l'effet du secondaire sur le noyau

Msc^{tr} : Matrice transposée de même dimension que Msc.

Mc_{Γ} : Matrice creuse, qui caractérise l'effet de potentiel vecteur sur la frontière du noyau

Mcc : Matrice creuse, qui caractérise l'effet de potentiel vecteur magnétique dans le noyau

III.8.3 Méthodes de résolution des systèmes algébriques

Généralement on peut classer les méthodes de résolution en deux catégories : les méthodes itératives et les méthodes directes. Les matrices qui proviennent de la méthode des éléments finis sont creuses par contre les matrices qui proviennent de la méthode des circuits couplés sont pleines.

Il existe des cas ou les structures du système linéaire ne peuvent êtres résolues par les méthodes directes. C'est par exemple le cas des systèmes ou la matrice A est très creuse. C'est la raison pour laquelle, on préfère utiliser des méthodes itératives.
Les méthodes itératives donnent, en théorie, la solution d'un système linéaire après un nombre fini d'itérations. A chaque pas, elles nécessitent le calcul du résidu du système.

Le modèle algébrique obtenu sera résolu par un processus itératif, on suppose a priori la valeur initiale de l'inconnu (fournie par les conditions initiales).

La solution à une itération donnée est obtenue à partir de la solution précédente, on arrête les itérations lorsque la différence relative entre deux solutions successives A^K et A^{K+1} est inférieure à une valeur donnée tel que :

$$\frac{A^{K+1} - A^K}{A^{K+1}} < \varepsilon$$

Le modèle d'équations algébriques s'écrit :

$$[Mpp]\,J_1 = [-Mps]\,J_2 + [-Mp_\Gamma]A_\Gamma + [-Mpc]A_\Omega + n_1U_p \qquad \text{(III.64)}$$

$$[Mss]\,J_2 = [-Mps^{tr}]\,J_1 + [-Ms_\Gamma]A_\Gamma + [-Msc]A_\Omega + n_2U_s \qquad \text{(III.65)}$$

$$[Mc_\Gamma]A_\Gamma = [-Mpc^{tr}]\,J_1 + [-Msc^{tr}]\,J_2 + [-Mcc]A_\Omega \qquad \text{(III.66)}$$

$$[S]A_\Omega = [C]A_\Gamma \qquad \text{(III.67)}$$

Le système d'équations devient :

$$J_1 = [Mpp]^{-1}\{[-Mps]\,J_2 + [-Mp_\Gamma]A_\Gamma + [-Mpc]A_\Omega + n_1U_p\} \qquad \text{(III.68)}$$

$$J_2 = [Mss]^{-1}\{[-Mps^{tr}]\,J_1 + [-Ms_\Gamma]A_\Gamma + [-Msc]A_\Omega + n_2U_s\} \qquad \text{(III.69)}$$

$$A_\Gamma = [Mc_\Gamma]^{-1}\{[-Mpc^{tr}]\,J_1 + [-Msc^{tr}]\,J_2 + [-Mcc]A_\Omega\} \qquad \text{(III.70)}$$

$$A_\Omega = [S]^{-1}\{[C]A_\Gamma\} \qquad \text{(III.71)}$$

Nous utilisons l'algorithme (Fig. III.2) pour la résolution de notre problème

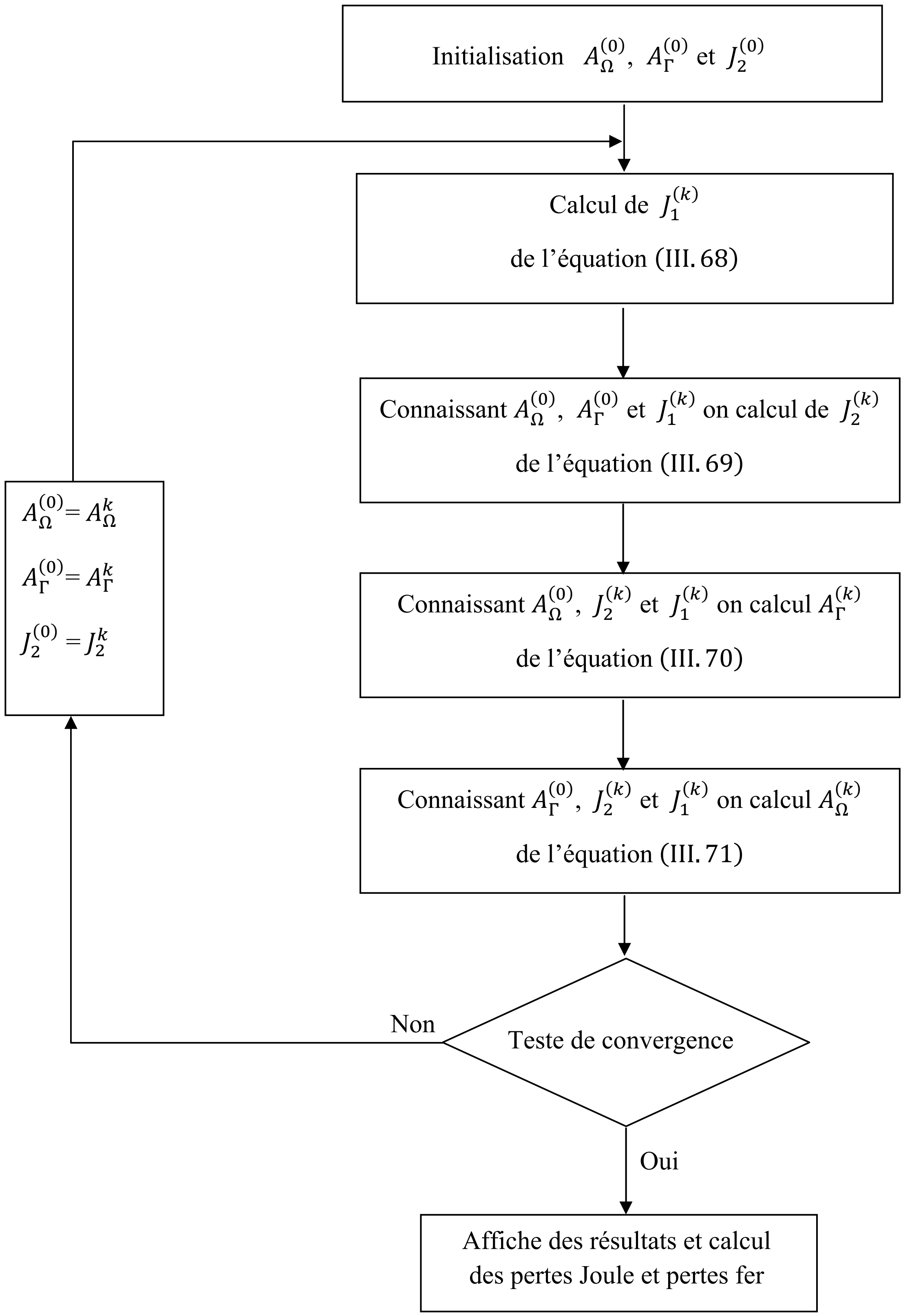

Fig. III.2 : Algorithme de résolution

III.9 Conclusion

Nous avons détaillé dans ce chapitre la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés, appliquée à un dispositif axisymétrique représenté par un transformateur. Les expressions introduites permettent de calculer les inductances et les résistances et déterminer la répartition des courants inducteurs, cela en appliquant le modèle « excitation en tension ». La modélisation du circuit magnétique est faite analytiquement par l'utilisation de densités superficielles et fictives de courant, ce dernier se comporte comme un matériau linéaire, isotrope et homogène utiles pour le fonctionnement à vide, en court circuit et au voisinage d'un point en charge en supposant que sa perméabilité magnétique est constante. L'application de la méthode des circuits couplés nous permettra de déterminer les valeurs de la densité de courant dans chaque spire. Cette méthode semi-analytique est limitée aux dispositifs axisymétriques de milieux linéaires. Son couplage éventuel avec une méthode numérique permet de considérer la non linéarité, pour cette raison nous avons effectué un couplage hybride de deux méthodes analytique et numérique. Un modèle 2D éléments finis en termes de potentiel vecteur magnétique pour le calcul du champ magnétique dans la partie ferromagnétique (non linéaire), combiné à une méthode semi-analytique (Circuit Electriques Magnétiquement Couplés) dans les enroulements primaire et secondaire.

Finalement ce modèle de couplage est appliqué à deux modèles de transformateurs de puissance pour valider l'efficacité de la méthode proposée.

Chapitre IV

Applications et validations

IV.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de valider les codes de calcul implémenté à travers la simulation du fonctionnement en régime statique à propriétés physiques linéaires du transformateur. Les modèles circuits électriques magnétiquement couplés et éléments finis mis en œuvre ainsi que la procédure de leur couplage, sont implémentés sous environnement Matlab. L'implémentation des codes de calcul porte sur la discrétisation-maillage, calcul des diverses matrices inductances et résistance, des intégrants éléments finis, et de l'algorithme de couplage hybride (CEMC-EF).

En premier lieu nous définissons les caractéristiques géométriques et physiques du transformateur d'étude. En second lieu, nous présenterons les simulations réalisées en régime à vide et en court-circuit en vue de connaitre d'une part les niveaux de valeurs des diverses grandeurs courants, potentiel vecteur magnétique, induction magnétique, paramètres résistifs et inductifs, et d'autres part déterminer les pertes joules et les pertes fers respectivement dans les enroulements primaire et secondaire et dans le circuit magnétique.

Les résultats de simulation du comportement électromagnétique relatifs au deux modèles semi-analytique (circuits électriques magnétiquement couplés) et hybrides CEMC-EF, aussi bien en régime de fonctionnement à vide qu'en court-circuit seront confrontés aux mesures expérimentales fournies par l'entreprise Electro-industries (ex- ENEL Azzazga, Tizi-Ouzou).

IV.2 Description du transformateur

Le transformateur de distribution utilisé est fabriqué et commercialisé par l'entreprise Electro-industries [E.E.I-2008]. Il s'agit d'un transformateur triphasé de distribution à trois colonnes à refroidissement par huile. Les enroulements haute tension (HT) sont connectés en triangle et comportent chacun 3000 spires réparties sur 14 couches, et les enroulements basse tension (BT) connectés en étoile comportent chacun 22 spires réparties sur deux couches.

IV.3 Caractéristiques du dispositif

Caractéristiques	**Valeur**	**Unité**
Puissance apparente (Sn)	630	kVA
Fréquence	50	Hz
Tension nominale de l'enroulement HT (Un)	30	kV
Tension nominale de l'enroulement BT (Un)	0.4	kV
Groupe de couplage	Dyn 11	

IV.4 Dimensions géométriques du transformateur

Composante	**valeur**	**Unité**
Diamètre intérieur de l'enroulement BT $(\emptyset_{int\_BT})$	198	mm
Diamètre extérieur de l'enroulement BT $(\emptyset_{ext\_BT})$	239	mm
Diamètre intérieur de l'enroulement HT $(\emptyset_{int\_HT})$	265	mm
Diamètre intérieur de l'enroulement HT $(\emptyset_{ext\_HT})$	356	mm
hauteur des enroulements (h_{enr})	436	mm
Epaisseur de l'enroulement BT $(e_{en_{BT}})$	20.5	mm
Epaisseur de l'enroulement HT (e_{en_HT})	43	mm
Diamètre du noyau $(\emptyset_n)$	180	mm
hauteur du noyau (h_n)	810	mm
Diamètre du fil nu $(\emptyset_{fil})$	15	mm
Diamètre du fil avec isolation $(\emptyset_{fil-iso})$	16	mm
Section de fil (S_{fil})	$\pi * (7.5)^2$	mm^2

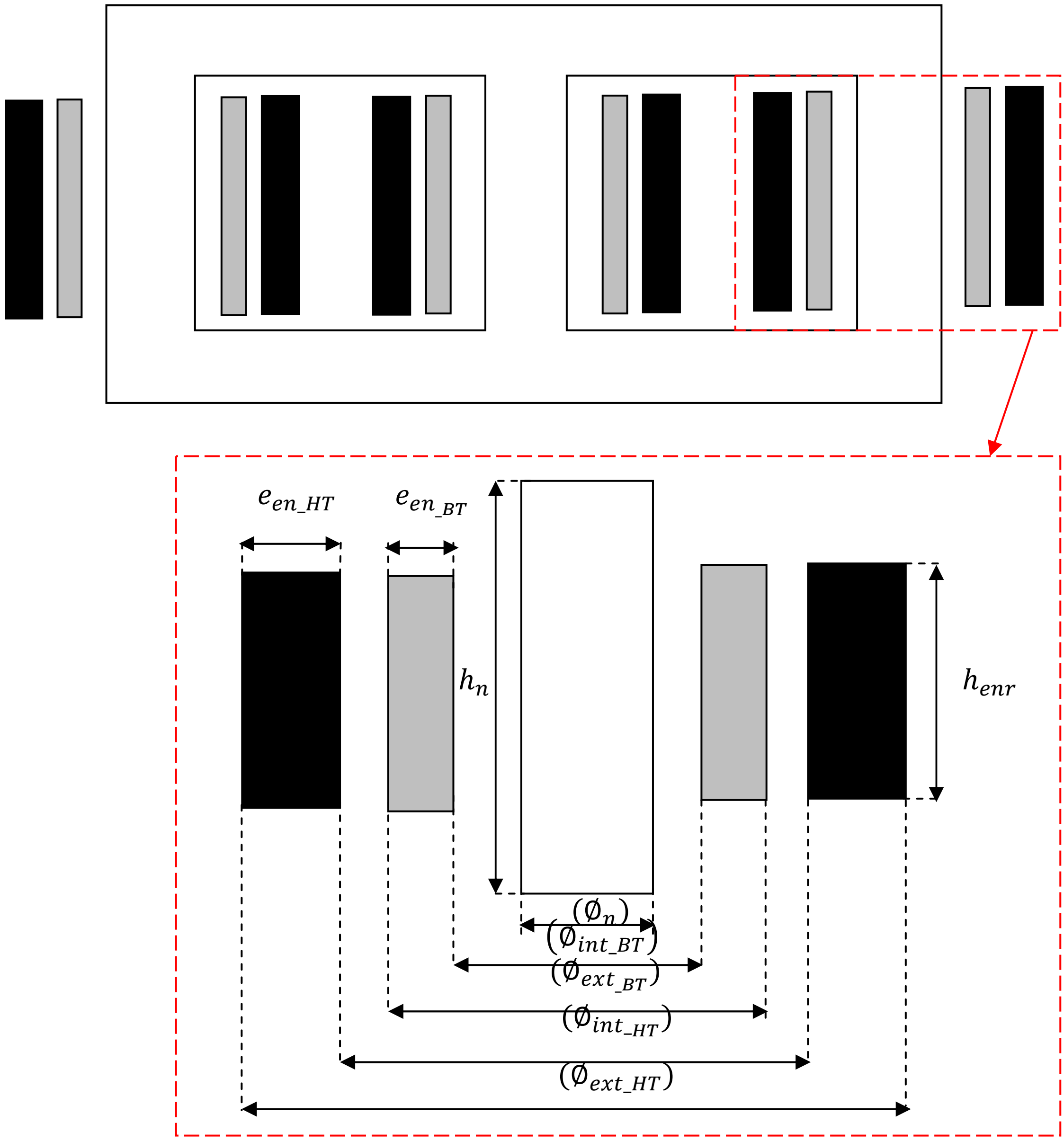

Fig. IV.1 : Dimensionnement du transformateur

IV.5 caractéristiques physiques

Caractéristiques Physiques / Milieu	Conductivité électrique	Perméabilité magnétique
Air	$\sigma = 0 \quad [S.m^{-1}]$	$\mu = \mu_0 = 4 \times 10^{-7}\ [H.m^{-1}]$
Enroulement	$\sigma_e = 5.9 * 10^7$	$\mu = \mu_0 = 4 \times 10^{-7}$, μ_r=1
Noyau	$\sigma_n = 0,\ \sigma_n = 10^6$	$\mu_r = 1,\ \ \mu_r > 1,\ \ \mu = \mu_0\, \mu_r$

IV.6 Discrétisation de la structure

Nous considérons le transformateur dans la condition équilibrée triphasée. Par conséquent nous pouvons seulement calculer une phase. Cependant, le calcul peut être prolongé pour couvrir les trois phases. [Liu-1996]

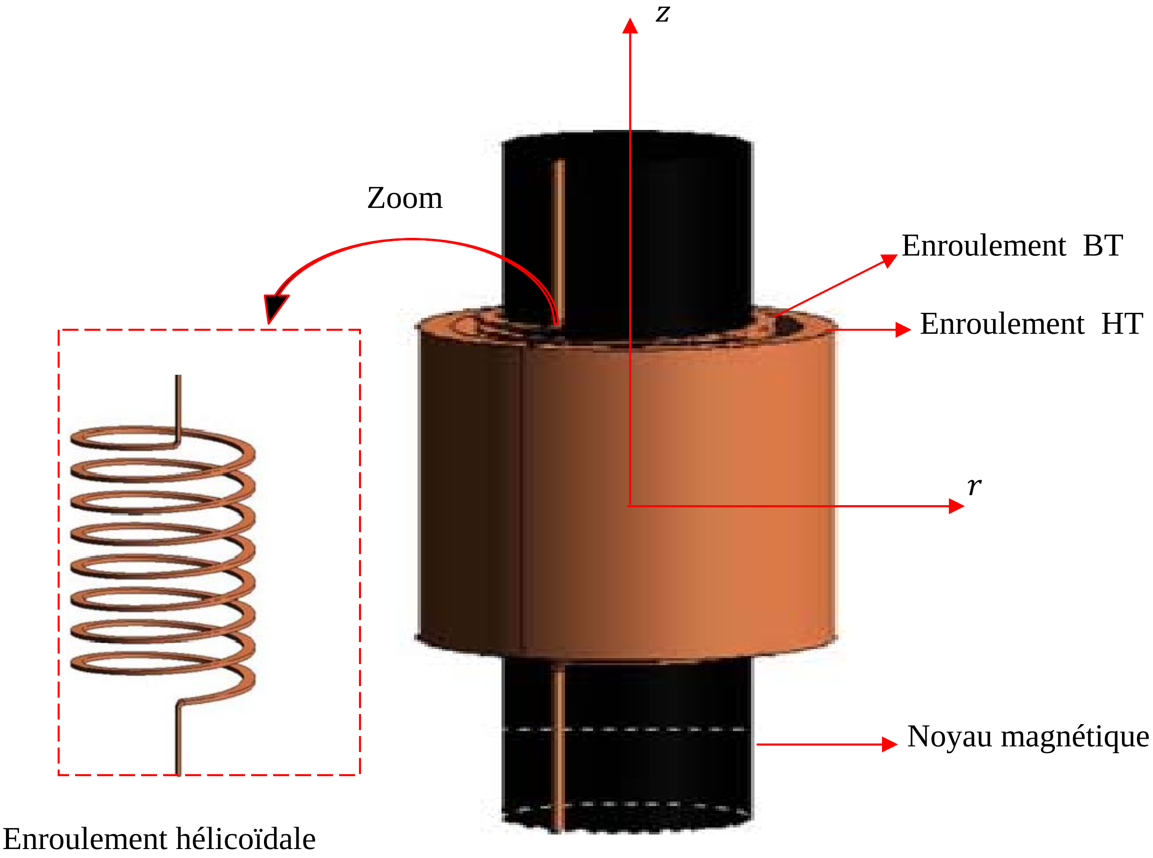

Fig. IV.2 : Modèle d'une phase utilisé en simulation [Jan-2009]

Lorsque la perméabilité magnétique relative est égale à l'unité ($\mu_r = 1$), toute la surface du circuit magnétique peut être discrétisée tel que donné par la figure (IV.3).

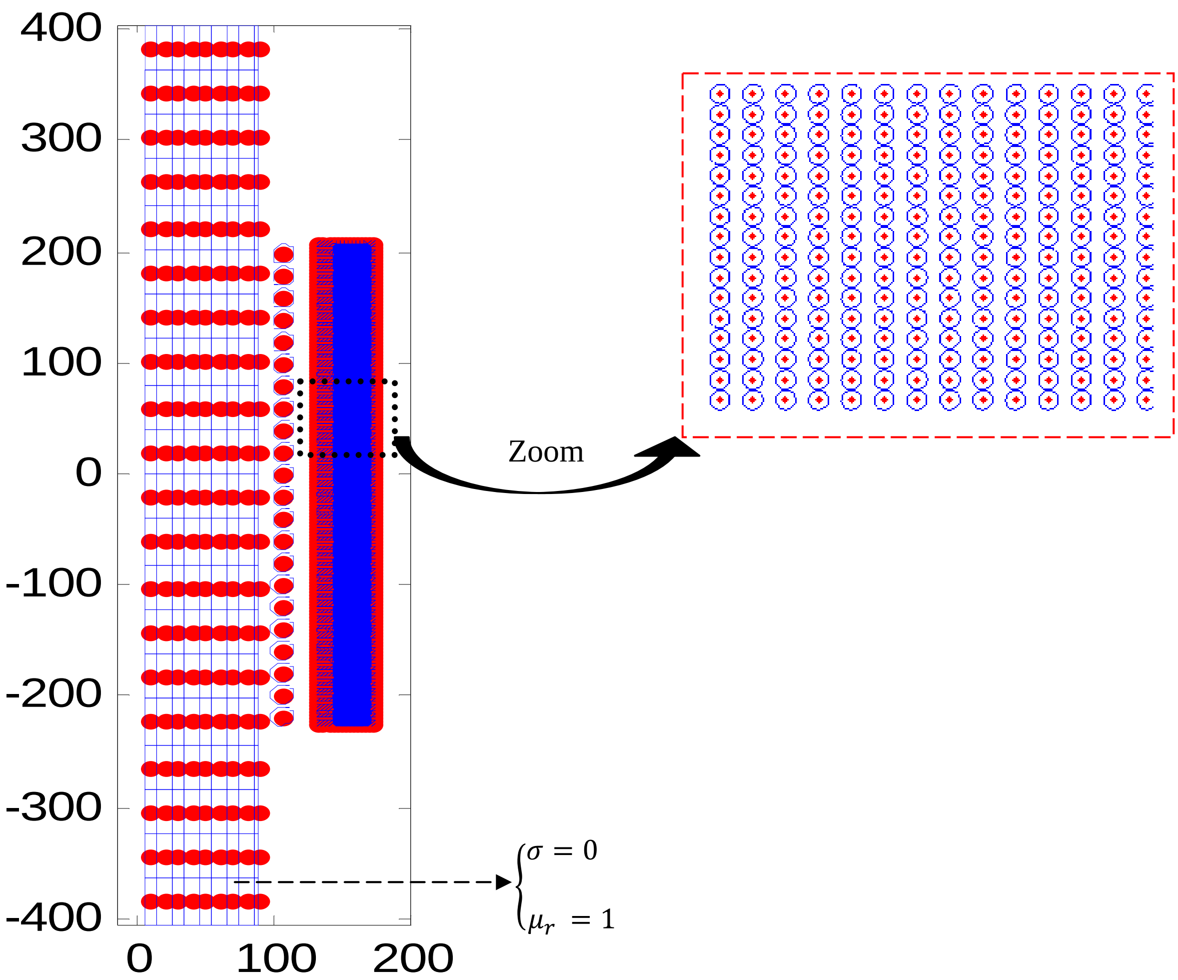

Fig. IV.3 : Discrétisation d'une colonne du transformateur

Lorsque la perméabilité magnétique est différente de l'unité, la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés est appliquée a travers la discrétisation des enroulements et de la frontière du noyau magnétique. Les enroulements sont discrétisés par des spires élémentaires circulaires, et la surface du noyau par 400 segments. La densité de courant est calculée au centre de chaque élément de discrétisation linéique du noyau ferromagnétique du transformateur.

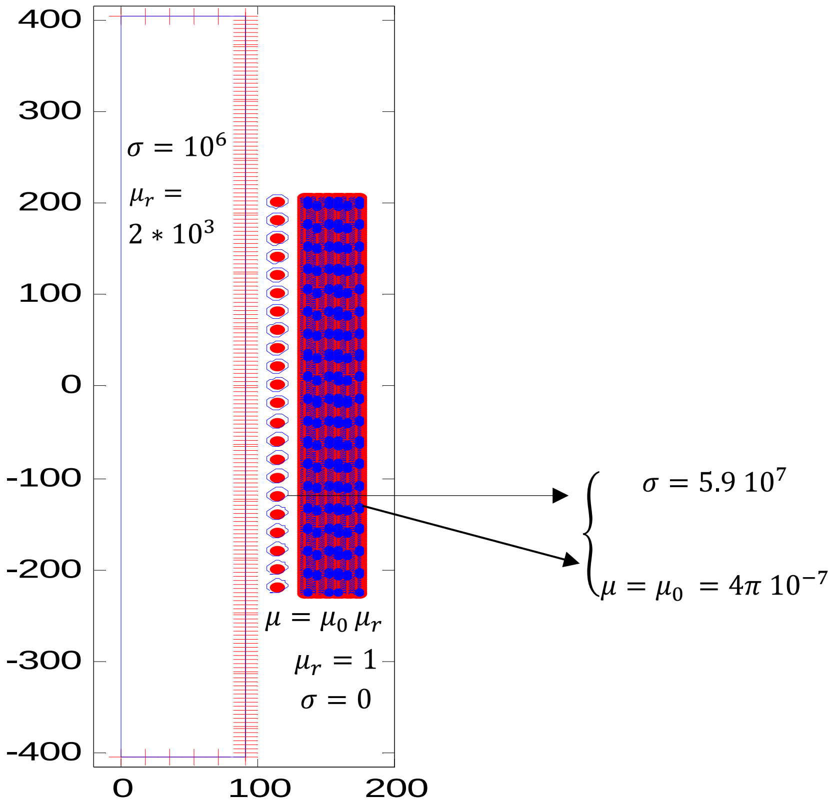

Fig. IV.4 : Discrétisation d'une colonne du transformateur par la CEMC

La seconde approche plus générale est issue du couplage circuits électriques magnétiquement couplés dans les enroulements et l'utilisation de la méthode des éléments finis dans le noyau.

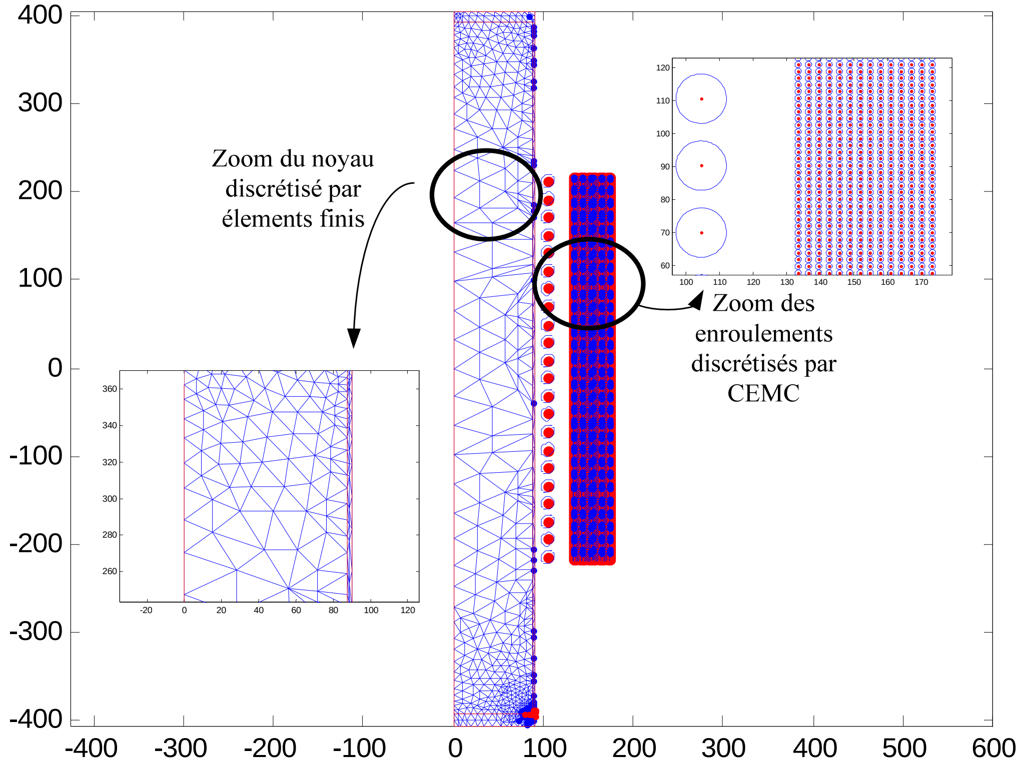

Fig. V.5 : Maillage mixte circuits électriques magnétiquement couplés et éléments finis (CEMC- EF)

IV.7 Calcul des pertes

Cette partie répertorie les pertes qui ont pour origines des phénomènes électromagnétiques dans le transformateur, et appliqué les modèles mis en œuvre en vue de calculer ces dernières. Notre intérêt portera sur la détermination des pertes joules générées dans les enroulements est des pertes fer dans le circuit magnétique.

Pour un régime magnétodynamique à une fréquence donnée du réseau, et des valeurs constantes des paramètres électriques des enroulements, les pertes joules dépendent principalement des courants eux-mêmes liés aux régimes de fonctionnement (à vide, en court-circuit, et en charge). Les pertes fer à fréquence et à perméabilité magnétique données sont fixées par les valeurs des inductions magnétiques dans le noyau. Les niveaux d'inductions magnétiques sont implicitement liés aux courants dans les enroulements.

IV.7 .1 Processus de calcul des pertes totales

Le calcul des pertes totales se fait selon les étapes suivantes :

1) Calcul des courants primaire et secondaire
2) Calcul de la résistance de chaque enroulement
3) Estimation des pertes Joule.
4) Calcul des selfs inductances L_{ii} des enroulements et des mutuelles M_{ij} entre les conducteurs.
5) Calcul de l'induction magnétique axiale B_z et radiale B_r de chaque conducteur des deux enroulements en utilisant les courants primaire et secondaire calculés.
6) Calcul des pertes par courant de Foucault.
7) Estimation des pertes totales.

IV.7.2 Pertes en court-circuit

Ucc c'est la tension réduite qu'il faut appliquer au primaire lorsque le secondaire est en court circuit pour que le courant nominal circule au primaire. Sa valeur est comprise entre 4 et 5% de la tension nominale.

- La puissance absorbée lors du test en court circuit correspond aux pertes Joule dues au courant de charge transitant dans les enroulements, donnée par l'expression suivante:

$$P_j = R_p I_p^2 + R_s I_s^2 \qquad (\mathrm{IV}.1)$$

R_p, R_s sont respectivement la résistance équivalente de l'enroulement primaire et l'enroulement secondaire, calculées comme suit :

$R_p = \sum_k diag|real(M_{pp})|$ et $R_s = \sum_k diag|real(M_{ss})|$

$diag$: est la partie diagonale des matrices M_{pp} et M_{ss}.

- Les pertes liées à la fréquence dans les conducteurs se produisent comme courants de Foucault dus aux champs magnétiques variables dans le temps. Les courants de Foucault causent une augmentation de pertes et une réduction de la quantité nette de flux magnétique.

Les pertes totales en court-circuit en (Watt) sont données par la formule suivante

$$P_{cc} = P_{CF} + P_j \quad \text{(IV. 2)}$$

Tension de court-circuit U_{cc} = 5 % de la tension nominale, et la tension au secondaire est nulle $U_s = 0\text{V}$; $\mu_r = 2000$.

Essai en court circuit					
Courant primaire			**Courant secondaire**		
Modèle CEMC	Modèle CEMC-EF	Mesures Electro-Industries	Modèle CEMC	Modèle CEMC-EF	Mesures Electro-Industries
I_p= 9.646 A	I_p= 9.299 A	I_p=10.15 A	I_s= 947.53 A	I_s=930.79A	I_s= 909 A

IV.7.2.1 Calcul des résistances et selfs

Les inductances L_p, L_s sont calculées comme suit :

$$L_p = \sum_k diag|imag\,(M_{pp})| \qquad et \qquad L_s = \sum_k diag|imag\,(M_{ss})|$$

$imag$: Partie imaginaire de la matrice.

résistance du primaire		résistance du secondaire	
Modèle CEMC	Mesures ENEL	Modèle CEMC	Mesures ENEL
$R_p = 17.22\ \Omega$	$R_p = 17.33\ \Omega$	$R_s = 1.35\ m\Omega$	$R_s = 1.42\ m\Omega$
self du primaire		self du secondaire	
$L_p = 0.5\ mH$	/	$L_s = 2.1\ \mu H$	/
Inductance mutuelle (primaire-secondaire)			
$M_{ps} = 4.49$ mH	/	/	/

IV.7.2.2 Calcul des mutuelles et selfs de chaque conducteur

Le calcul des mutuelles entres cinq points de l'enroulement primaire et secondaire est donné dans le tableau suivant :

Inductance pri/sec (μH)	M_{12} = 0.211	M_{13}=0.210	M_{14}=0.208	M_{15}=0.206	M_{16} =0.204
Inductance pri/pri (μH)	M_{11}=0.126	M_{12}=0.710	M_{13}=0.594	M_{14}=0.526	M_{15} =0.478
Inductance sec/sec (μH)	M_{11}= 0.097	M_{12}=0.221	M_{13}=0.139	M_{14}=0.961	M_{15} =0.693

IV.7.2.3 Calcul des inductions B_r et B_z

La formule pour les pertes par courant de Foucault peut être donnée par: [Shi-2002] [Lin-2009] [Jan-2009]:

- Pour un seul conducteur de rayon r_i

$$P_{CF} = 2\pi r_i \sigma \int_s J^2 ds \qquad \text{(IV. 3)}$$

- Les pertes pour N conducteurs sont données par : [Shi-2002]

$$P_{CF} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\pi^2 \sigma w^2 D_o^4 \, r_i}{32} (B_r^2 + B_z^2) \qquad \text{(IV. 4)}$$

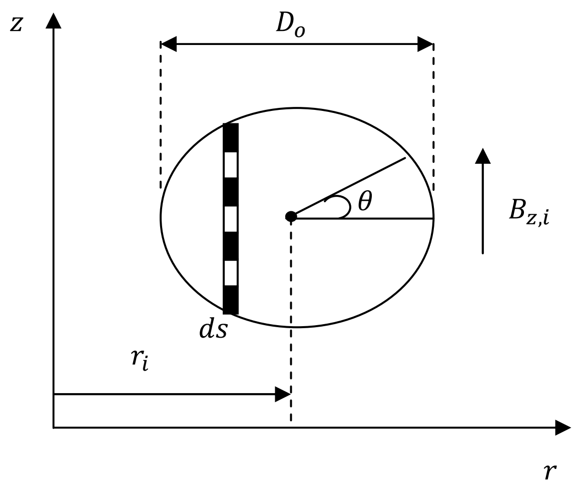

Fig. IV.6 : Effet de peau dans un conducteur rond [Shi-2002]

Point (m) / Enroulement	Enroulement primaire		Enroulement secondaire	
	B_r	B_z	B_r	B_z
A (1,2)	0 .952 mT	0.124 T	0.090 T	0.099 T
B (1,3)	0.475 mT	0.031 T	0.041 T	0.026 T
C (1,4)	0.316 mT	0.014 T	0.025 T	0.012 T

$$P_{CFp} = \left(\frac{\pi^2 * \sigma_p * (2 * \pi * f)^2 * D_{os}^4}{32}\right) * \sum_{i=1}^{Ns\_p} r_{pi} * (B_r^2 + B_z^2)_{primaire} \qquad \text{(IV.5)}$$

$$P_{CFs} = \left(\frac{\pi^2 * \sigma_s * (2 * \pi * f)^2 * D_{op}^4}{32}\right) * \sum_{i=1}^{Ns\_s} r_{si} * (B_r^2 + B_z^2)_{secondaire} \qquad \text{(IV.6)}$$

$$P_{CFT} = P_{CFp} + P_{CFs} \qquad \text{(IV.7)}$$

Les pertes totales en court circuit sont données par le tableau suivant :

Pertes Joule	Pertes par courant de Foucault	Pertes en court-circuit
$P_J = 8.441\ kW$	$P_{CFT} = 1.104\ kW$	$P_{cc} = 9.545\ kW$

Pertes Joule totales au primaire et au secondaire		
Modèle CEMC	Modèle CEMC-EF	Mesures Electro-Industries
$P_{cc} = 8.441\ kW$ Effet de peau négligé dans les conducteurs	$P_{cc} = 8.084\ kW$	$P_{cc} = 7.75\ kW$

IV.7.3 Calcul des pertes à vide

Dans ce cas on suppose que le matériau magnétique a un comportement linéaire caractérisé par une perméabilité magnétique relative constante calculée dans la partie linéaire de la courbe de première aimantation. Dans ces conditions la perméabilité relative vaut $\mu_r = 2000$.

Les pertes à vide « P_0 » se composent des pertes par courant de Foucault et les pertes par hystérésis. Comme le courant à vide « I_0 » est petit par rapport à sa valeur en pleine charge, les pertes Joule sont négligées dans les enroulements, ainsi :

$$P_0 = P_{CF} + P_h + P_d \qquad (\text{IV}.8)$$

Ces pertes à vide sont appelées aussi pertes fer qui sont conditionnées par la valeur de l'induction à la surface de la tôle magnétique et la gamme de fréquence utilisée.
L'expression $(\text{IV}.8)$ Peut s'écrire :

$$\oiint_{s}(E \wedge H)ds = \iiint_{V} J\,E\,dV + \iiint_{V} H.\frac{\partial B}{\partial t}dV + \iiint_{V} E.\frac{\partial D}{\partial t}dV \qquad (\text{IV}.9)$$

Les pertes diélectriques ($P_d = \iiint_V E.\frac{\partial D}{\partial t}dV$) sont pour la plupart du temps négligeables par rapport aux autres pertes.

$$P = \frac{1}{T}\left[\int_0^T \oiint_{s}(E \wedge H)ds\right]dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^T \iiint_{V} J\,E\,dV + \int_0^T \iiint_{V} H.dBdV\right]$$

L'expression $(\text{IV}.9)$ presente ce qu'on appelle une décomposition des pertes. La première intégrale représente les pertes Joule (pertes par courant de Foucault) et la seconde les pertes magnétiques.

Les pertes par courant de Foucault sont calculées au moyen de : [Liu-1996]

$$P_{CF} = \frac{1{,}6.\sigma.f^2.B_m^2\,.e^2}{d}.M \qquad (\text{IV}.10)$$

$B_m = 1.77\ tesla$ (Déterminée d'après Fig.IV.7)

M : La masse de la tôle magnétique$[kg]$.
B_m : Valeur Max de l'induction magnétique.
d **:** Densité de masse$[kg\ /\ m^3]$.
e **:** Épaisseur d'une feuille de la tôle magnétique$[mm]$.

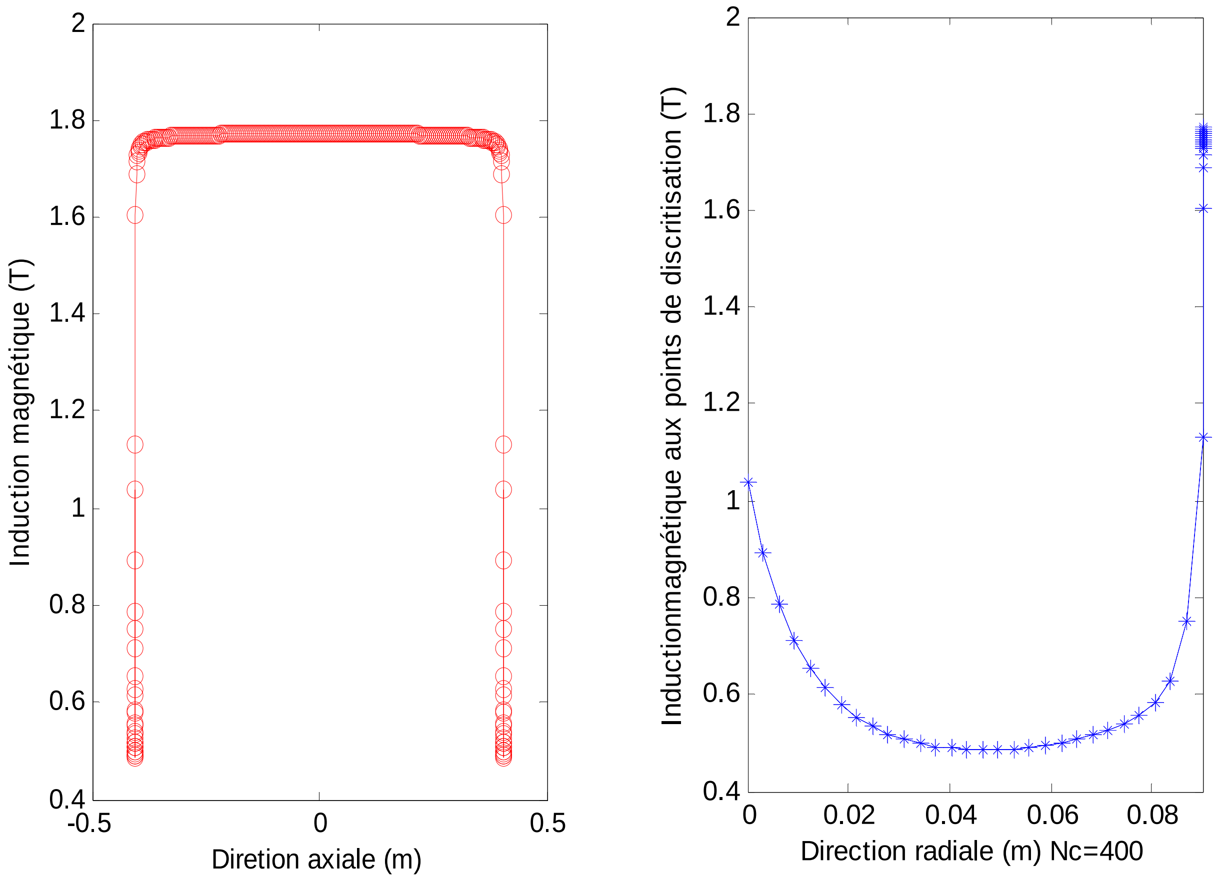

Fig. IV.7 : Induction dans le circuit magnétique à vide

- La résistance équivalente correspondant aux pertes par courant de Foucault dans le noyau est donnée par la formule suivante :

$$R_n = \frac{E^2}{P_{CF}} \qquad (IV.11)$$

$$E = 4.44\, f N_p \varphi_m \qquad (IV.12)$$

E est la fem induite et φ_m le flux magnétique maximal dans le noyau.

D'après les équations $(IV.10)$ et $(IV.11)$, $(IV.12)$ on peut écrire :

$$R_n = \frac{4.44\, f {N_p}^2 S_n^2 d}{1.6\, e^2 M\, \sigma_n} = 861.8 * 10^8\, \Omega \qquad (IV.13)$$

S_n : Section du noyau $[mm]$

- Les pertes dans le noyau magnétique sont proportionnelle au carrée de la fréquence (IV. 10) et au carrée de la tension induite au primaire. La résistance R_n qui présente ces pertes est constante. [Ell-2003]

- Les pertes totales dans le circuit magnétique peuvent êtres approchées par : [Ell-2003]

$$P_{tcf} = K_b \sum M_j\left(K_d f^2 B_{mj}^2 + C_h f B_{mj}^{\eta}\right) \qquad (j = n, c) \qquad \text{(IV. 14)}$$

n et c décrivent respectivement le noyau et la culasse

M_n , M_c sont la masse du noyau et de la culasse.

K_b : Facteur de construction.

K_d : $7.48 * 10^{-5}$ [$W\ kg^{-1}\ Hz^{-2}\ T^{-2}$].

$C_h = 5.2 * 10^{-3}$ [$W\ kg^{-1}\ Hz^{-1}\ T^{-\eta}$]

$\eta = 1.79$.

La tension au primaire $U_p = 400$.

Essai à vide		
Courants primaire à vide		
Modèle CEMC	Modèle CEMC-EF	Mesures Electro-Industries
$I_p = 11.91\ A$	$I_p = 12.15\ A$	$I_p = 12.85\ A$

Pertes à vide		
Modèle CEMC	Modèle CEMC-EF	Mesures Electro-Industries
$P_0 = 1.433\ kW$	$P_0 = 1.316\ kW$	$P_0 = 1.365\ kW$

- **Essai en court circuit**

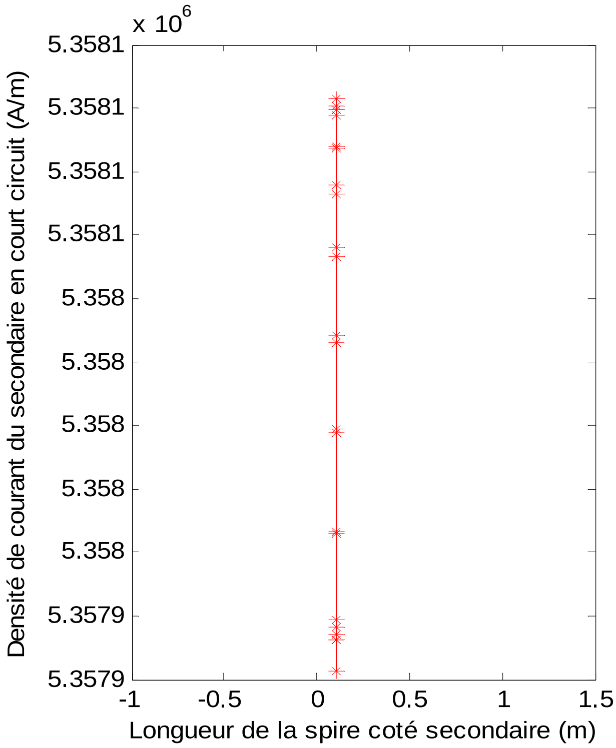

Fig. IV.8 : Evolution de la densité de courant au secondaire en court circuit

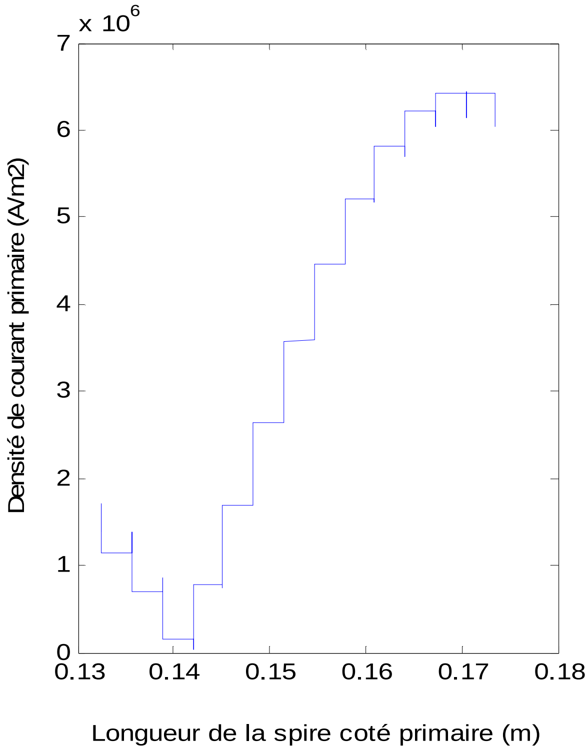

Fig. IV.9 : Evolution de la densité de courant au primaire en court circuit

- **Essai à vide**

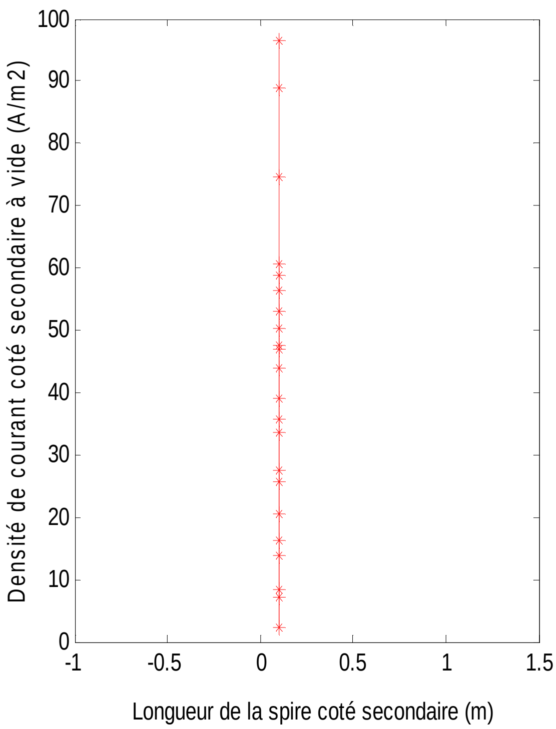

Fig. IV.10 : Evolution de la densité de courant au secondaire à vide

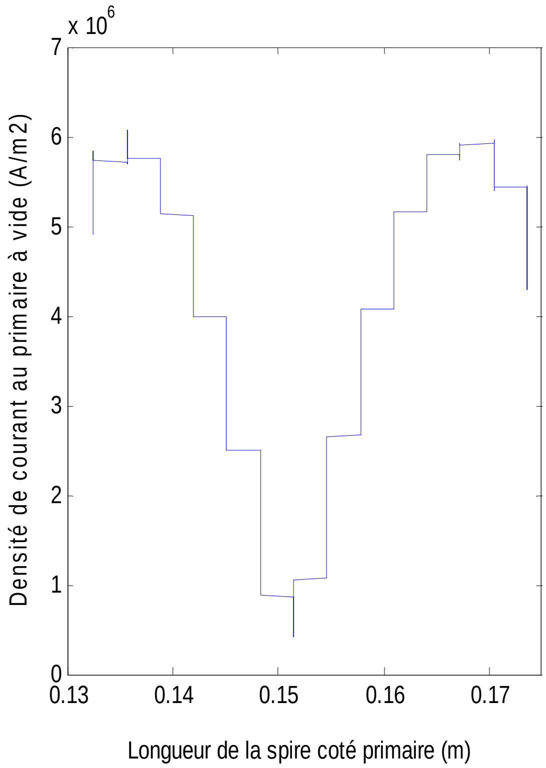

Fig. IV.11 : Evolution de la densité de courant au secondaire à vide

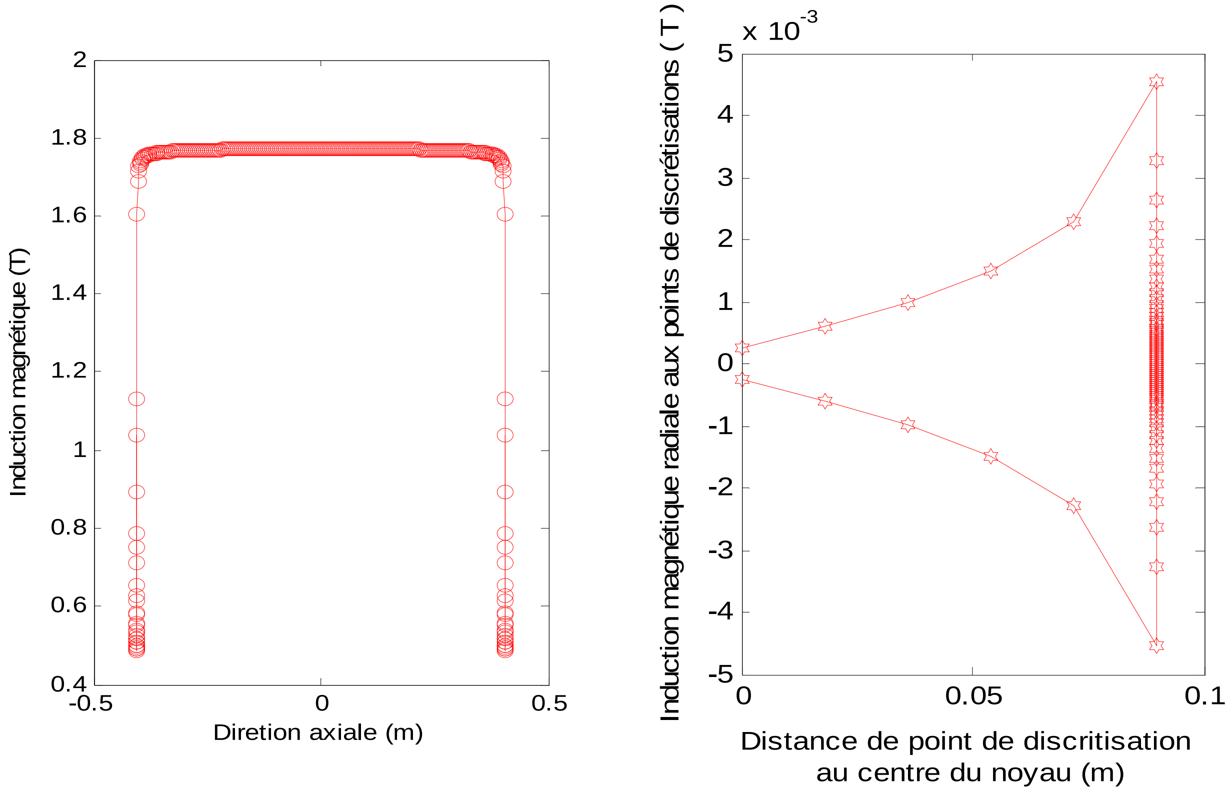

Fig. IV.12 : Allure de l'induction magnétique axiale et radiale sur la frontière à vide

La répartition du potentiel vecteur magnétique dans le noyau pour différentes hauteurs selon (oz) et suivant la frontière sont illustrées par les figures (IV.13), (IV.14), (IV.15), (IV.16).

- **Evolution du potentiel vecteur magnétique à vide**

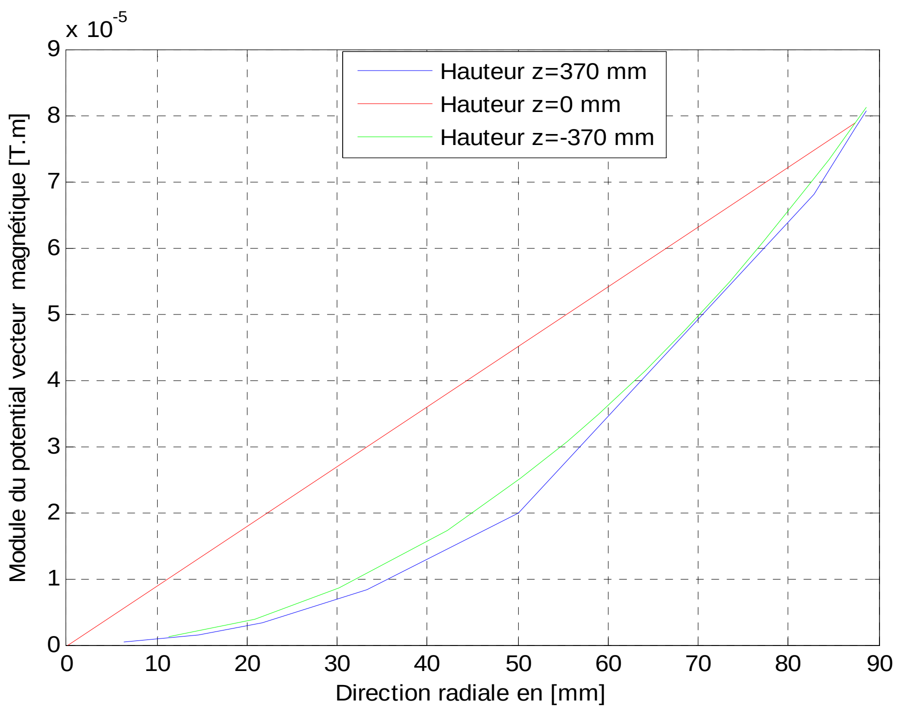

Fig. IV. 13 : Evolutions radiales du module du potentiel vecteur magnétique dans le noyau pour différentes hauteurs axiales

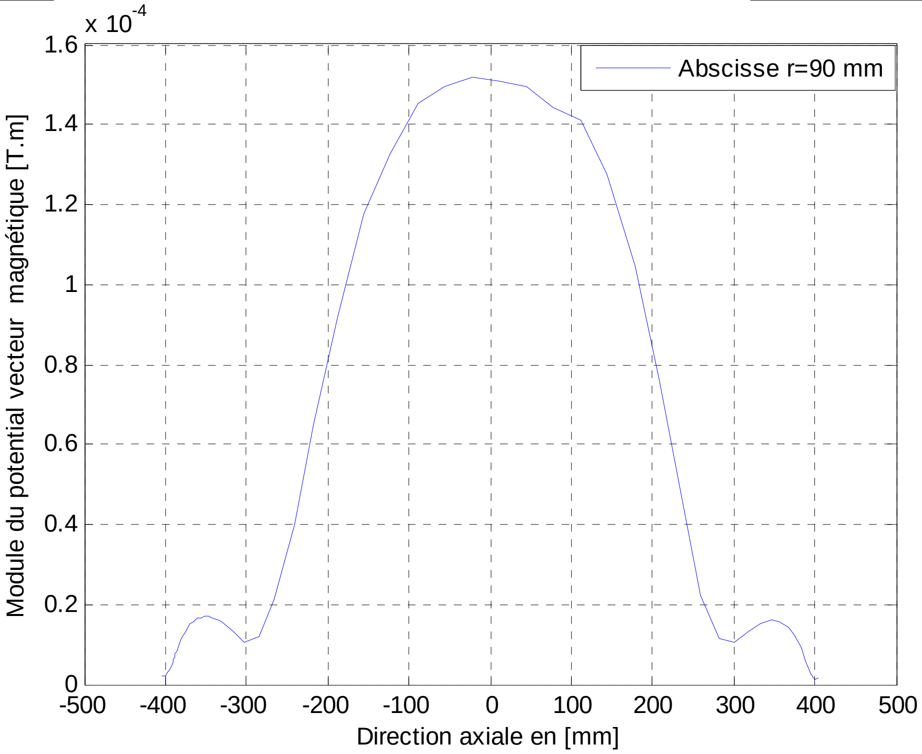

Fig. IV. 14 : Evolution axiale du module du potentiel vecteur magnétique sur la frontière du noyau

➢ **Evolution du potentiel vecteur magnétique en court circuit**

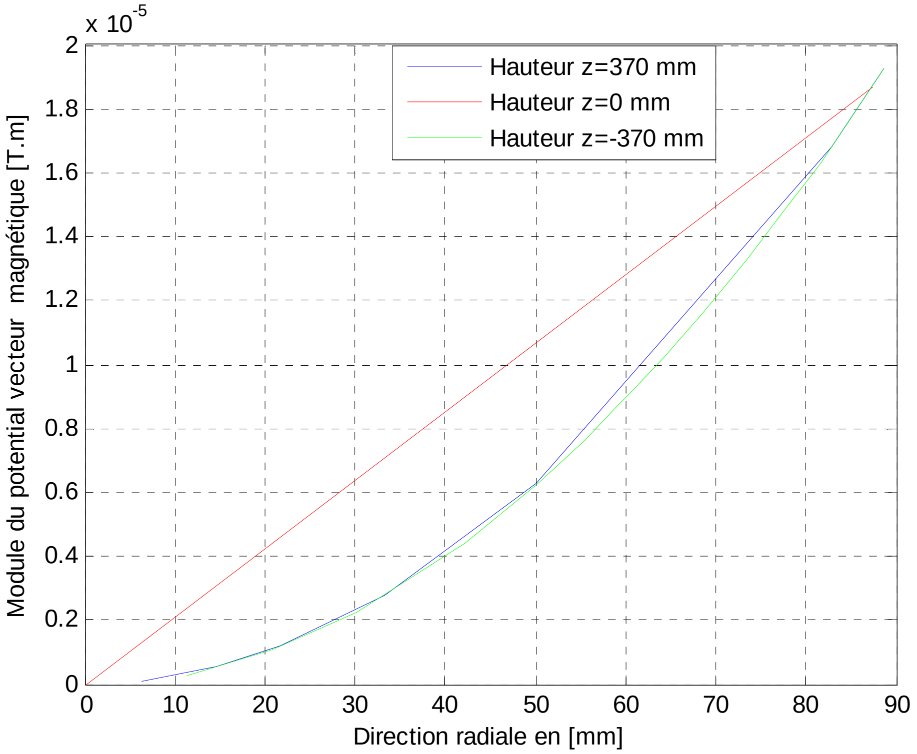

Fig. IV.15 : Evolutions radiales du module du potentiel vecteur magnétique dans le noyau pour différentes hauteurs axiales

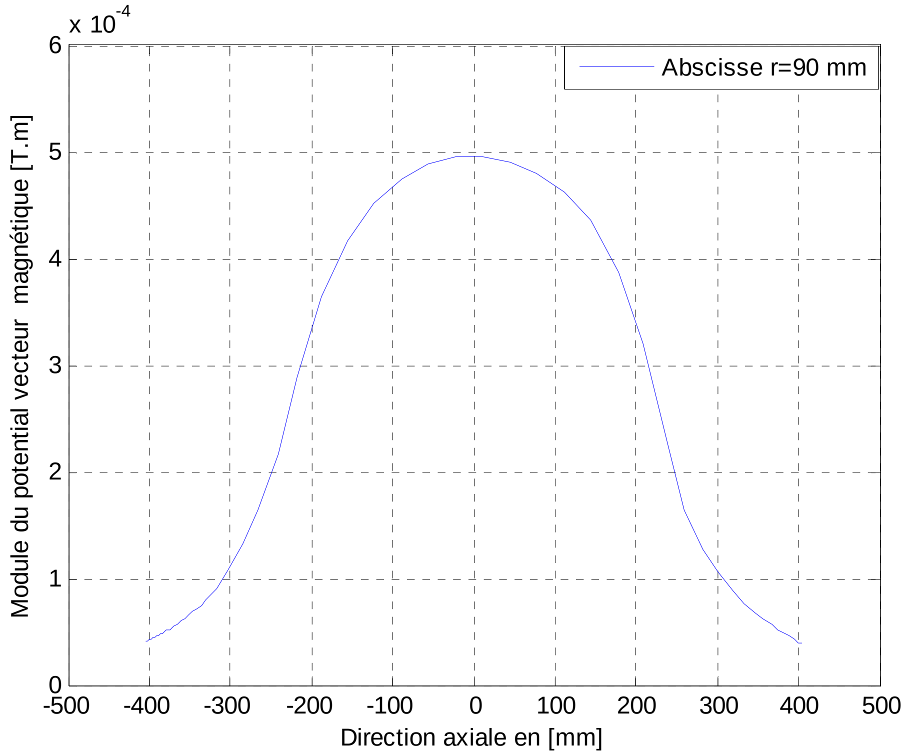

Fig. IV. 16 : Evolution axiale du module du potentiel vecteur magnétique sur la frontière du noyau

IV.8 Interprétation des résultats

Les résultats pour la première application qui concerne la discrétisation du noyau pour une perméabilité relative $(\mu_r = 1)$ correspond à une forte saturation du noyau, le circuit magnétique ne canalise pas le champ magnétique et le flux de fuite devient important ce qui engendre une augmentation des pertes dans le circuit magnétique.

Cela nous a conduis à choisir une autre valeur de perméabilité différente de l'unité pour le circuit magnétique.

L'étude des grandeurs globales que sont la résistance, et courant montre la similarité entre la méthode CEMC et le calcul expérimental.

Pour l'essai en court circuit l'inductance de fuite totale est très majoritairement associée à l'enroulement primaire (quelques mH contre quelques μH pour l'enroulement secondaire). Les flux de fuite se referment dans l'air et la prise en compte du noyau a alors tendance à faire diminuer l'inductance de l'enroulement extérieur tout en augmentant celle de l'enroulement intérieur. L'inductance totale diminue pour ce transformateur en présence du circuit ferromagnétique.

Pour juger la fiabilité des modèles axisymétriques une confrontation avec des mesures fournies par Electro-Industries, s'avère nécessaire afin d'arrivé à une évaluation précise des performances des modèles ainsi proposés.

L'écart entre les valeurs des courants obtenue par le calcul axisymétrique et celle données par Electro-Industries induit une erreur aux primaire de 5% avec la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés et 8.3 avec le couplage hybride, et une erreur au secondaire de 4% avec la CEMC et 2,3 avec le couplage hybride. Des erreurs relatives généralement acceptables.

Les pertes par courant de Foucault s'ajoutent aux pertes Joule donnant ainsi les pertes totales en court- circuit d'une valeur de 9.54 KW.

En se basant sur les valeurs de résistance et des courants calculés, nous aurons 8.441KW de pertes Joule avec la CEMC et de 8.084KW avec le couplage hybride. Comparant à la valeur donnée par Electro-industries des erreurs relatives associées sont respectivement de 8.2% et 4.1%. Le modèle hybride donne pratiquement de meilleurs résultats.

En essai à vide, L'écart entre les valeurs n'est que d'environ 5% avec le couplage hybride et 7% avec la CEMC cela entraîne une faible erreur dans le calcul. Par conséquent les pertes à vide sont légèrement déférentes de celles mesurées par Electro-industries. L'erreur relative commise est inferieure à la valeur admissible qui est de 15%.

- Les figures (IV.8, IV.9) donnent la répartition des densités de courant dans l'enroulement primaire et secondaire en court circuit.

La densité de courant est uniforme dans l'enroulement secondaire cela revient à la profondeur de pénétration des courants induit qui est grande par rapport au rayon du conducteur. Effet de peau négligé.

Par contre dans l'enroulement secondaire la densité du courant est non uniforme cela s'explique par l'effet de proximité entre spires et entre couches. L'effet de proximité caractérisant l'impact des effets induits est étroitement corrélé au nombre de spires conductrices et le nombre de couches d'enroulement composant le bobinage complet.

- Les figures (IV.10, IV.11) donnent la répartition des densités de courant dans l'enroulement primaire à vide. Pratiquement on trouve un courant nul dans le secondaire.

La présence du noyau ferromagnétique modifie cependant le trajet de la répartition des densités de courant et par conséquent vient d'ajouter un effet mutuel sur les conducteurs.

La figure (IV.12) donne la répartition des inductions magnétiques radiale et axiale sur le contour du noyau. La valeur maximale du module de cette dernière est de 1,77 Tesla.

La précision de la solution du modèle circuit couplé dépend grandement du nombre de découpage linéiques en segments du circuit magnétique.

- Les figures (IV.14-16) représentent la répartition du module de potentiel vecteur magnétique sur la frontière découlant du modèle couplé (EF-CEMC).

  Le potentiel vecteur magnétique prend la valeur max à la hauteur axiale z=0, de $4{,}9 * 10^{-4}$ Tm en court circuit et d'une valeur de $1.5 * 10^{-4}$ Tm à vide et diminue puis s'annule aux extrémités du noyau.
- A l'intérieur du noyau le potentiel vecteur magnétique diminue en augmentant la hauteur axiale (z) et en s'éloignant de l'intervalle entre noyau et enroulements. Cela revient à la haute attraction de flux de fuite dû à la perméabilité magnétique du circuit magnétique. et prend la valeur max $1.9 * 10^{-5}$ Tm en court circuit et de $8 * 10^{-5}$ Tm à vide, figures (IV.13-15).

IV.9 Description du second transformateur

Transformateur triphasé à trois colonnes de puissance de 315 kVA, 11.5/0.4 KV. Les enroulements (HT) comportent 1882 spires, les enroulements (BT) comportant 36 spires à une seule couche [Bah-1999].

IV.10 Caractéristiques du dispositif

Caractéristiques	Valeur	Unité
Puissance apparente (Sn)	315	kVA
Fréquence	50	Hz
Tension nominale de l'enroulement HT (Un)	11.5	kV
Tension nominale de l'enroulement BT (Un)	0.4	kV
Nombre de spires de l'enroulement BT	36 (une couche)	

IV.11 Dimensions géométriques du second transformateur

Composante	Valeur	Unité
Diamètre intérieur de l'enroulement BT $(\emptyset_{int\_BT})$	184	mm
Diamètre extérieur de l'enroulement BT $(\emptyset_{ext\_BT})$	220	mm
Diamètre intérieur de l'enroulement HT $(\emptyset_{int\_HT})$	242	mm

Diamètre intérieur de l'enroulement HT $(\emptyset_{ext\_HT})$	300	mm
hauteur des enroulements (h_{enr_HT})	580	mm
hauteur des enroulements (h_{enr_BT})	590	mm
Epaisseur de l'enroulement BT $(e_{en_{BT}})$	18	mm
Epaisseur de l'enroulement HT (e_{en_HT})	29	mm
Diamètre du noyau $(\emptyset_n)$	160	mm
hauteur du noyau (h_n)	630	mm
Section du conducteur (S_{BT})	227.5	mm^2
Section du conducteur (S_{HT})	$\pi * (1.2)^2$	mm^2
Poids du noyau	294	Kg
Poids de la culasse	280	Kg

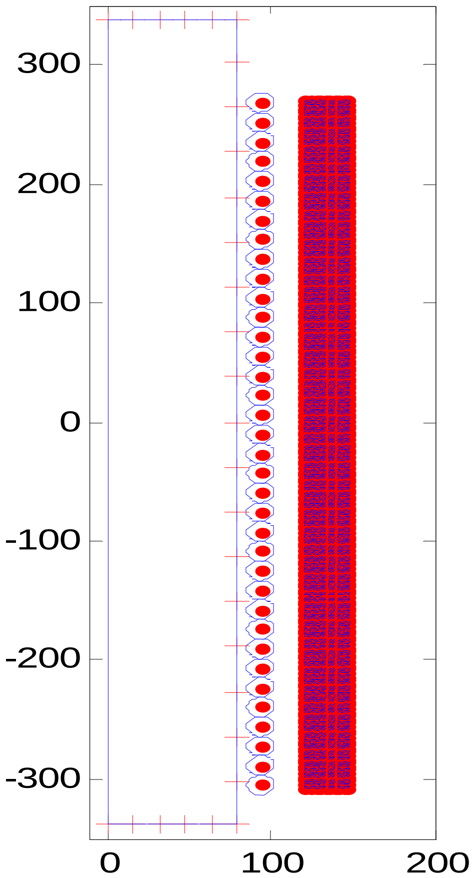

Fig. IV.18 : Discrétisation du dispositif

IV.12 Essai en court-circuit

Tension de court-circuit U_{cc} = 4 % de la tension nominal

Essai en court circuit					
Courant primaire			**Courant secondaire**		
Modèle CEMC	Modèle CEMC-EF	Calcul	Modèle CEMC	Modèle CEMC-EF	Calcul [Bah-1999]
I_p= 9.59 A	I_p=10.37 A	I_p= /	I_s= 492.38 A	I_s=443.37 A	I_s= 455 A
Pertes Joule totales au primaire et au secondaire					
Modèle CEMC		Modèle CEMC-EF		Calcul [Bah-1999]	
$P_{cc} = 3.30\ kW$		$P_{cc} = 3.176\ kW$		$P_{cc} = 3.45\ kW$	

Les selfs L_p, L_s et l'inductance mutuelle M_{ps} sont calculés comme suit :

résistance du primaire	**résistance du secondaire**
$R_p = 5.167\ \Omega$	$R_s = 1.7\ m\Omega$
self du primaire	**self du secondaire**
$L_p = 0.27mH$	$L_s = 3.2\ \mu H$
Inductance mutuelle primaire-secondaire	
$M_{ps} = 3.319mH$	

Le calcul des mutuelles est représenté par le tableau suivant :

Inductance pri/sec (μH)	M_{12}= 0. 197	M_{13}= 0.196	M_{14}= 0.193	M_{15}= 0.189	M_{16} = 0.184
Inductance pri/pri (μH)	M_{11}= 0.115	M_{12}= 0.573	M_{13}= 0.468	M_{14}= 0.407	M_{15} = 0.363
Inductance sec/sec (μH)	M_{11}= 0.097	M_{12}= 0.217	M_{13}= 0.140	M_{14}= 0.100	M_{15} =0.089

IV.13 Essai à vide

La tension au primaire $U_p = 11500$; la perméabilité magnétique $\mu_r = 250$; la tension au secondaire $U_s = 400\ \Omega$

Essai à vide		
Courants primaire à vide		
Modèle CEMC	Modèle CEMC-EF	Calcul [Bah-1999]
$I_p = 8.99\ A$	$I_p = 8.354\ A$	$I_p =/$

Pertes à vide		
Modèle CEMC	Modèle CEMC-EF	Calcul [Bah-1999]
$P_0 = 1.06\ kW$	$P_0 = 0.735\ kW$	$P_0 = 0.66\ kW$

IV.14 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons procédé aux validations de l'approche semi-analytique pour un circuit magnétique isotrope et linéaire, et une approche de couplage hybride pour un circuit non linéaire.

La résolution de l'algorithme de couplage implémenté sous environnement Matlab nous à conduit à l'estimation des différentes valeurs des densités de courant sources et induits dans les enroulements ainsi que le potentiel vecteur magnétique dans le circuit magnétique et sur la frontière de ce dernier.

Les différentes pertes à vide et les pertes en court circuit dans les parties actives du transformateur sont en concordance avec celles données par Electro-Industrie.

La méthode hybride de modélisation fournit pratiquement de meilleurs résultats pour l'analyse du comportement du transformateur et peut être effectivement utilisée pour prévoir les performances du transformateur .

La validation de deux méthodes développées est effectuée sur deux modèles de transformateurs de puissances 630 et 315 KVA.

Conclusion générale

Ce travail nous a permit de faire une étude sur le comportement électromagnétique d'un transformateur de puissance en régime statique, et d'évaluer les paramètres électriques de ce dernier aussi bien que l'estimation des pertes fer et les pertes dans le cuivre à travers un modèle semi-analytique (CEMC) et un modèle de couplage hybride (CEMC-EF).

Nous nous sommes intéressés en premier lieu à une approche semi-analytique (CEMC), La méthode des circuits électriques magnétiquement couplés a montré d'excellentes performances à modéliser les structures électromagnétiques. La raison en est sa bonne capacité à prendre en compte les géométries axisymétriques comprenant un grand nombre de conducteurs et systèmes de grande dimension, de plus sa facilité d'utilisation et l'estimation des pertes par courant de Foucault dans les enroulements. Le nombre de discrétisation n'est limité que par la capacité mémoire des micro-ordinateurs.

Une confrontation des résultats en terme de grandeurs globales (résistances, courant) obtenus par simulation et ceux issus des expérimentations fournis par l'entreprise Electro-Industrie vérifie la concordance des résultats obtenus. Ce qui nous permet de conclure la validité du code de calcul élaboré. Néanmoins, ces modélisations sont imparfaites et présentent des limitations.

La CEMC ne prend pas en compte la non linéarité du circuit magnétique ce qui veux dire elle traite mal les matériaux magnétiques et une partie des pertes totales est négligée. Les valeurs du champ magnétique sont obtenues à la surface du noyau exactement en chaque point de discrétisation. A cet effet nous avons élaboré un code de calcul hybride (CEMC-EF) permettant à partir des ces valeurs, d'étendre au circuit magnétique complet et réel (maillage), et un calcul précis des pertes dans le circuit ferromagnétique. Ce dernier est moins coûteux en temps de calcul et en place mémoire, tout en garantissant une meilleure précision. Ce travail ouvre des perspectives pour une modélisation fine du problème électromagnétique.

La validité de l'approche nous permettra de l'appliquer pour l'étude du régime transitoire et la variation des grandeurs électromagnétiques en fonction du temps suite à une surintensité interne ou externe, et également être prolongé aux fréquences supérieures

Bibliographie

Ouvrages

[Dur-1968] E. Durand « Magnétostatique » Masson -1968.

[Fou-1979] G. Fournet « Electromagnétisme à partir des équations locales » Masson-1979 ISBN 2-7462-0548-3.

[Sab-1986] G.Sabonnadière J.Louis « La méthode des éléments finis-du modèle à la CAO » Edition Hermes, Paris, 1986.

[Sho-2004] T.A. Short « Electric power distribution handbook » Schenectady, New York, 2004 by CRC Press LLC, ISBN 0-8493-1791-6.

[Dha-2005] G.Dhatt D.Touzot E.Lefrançois « Méthode des éléments finis » Edition Hermes, Lavoisier, Paris, 2005.

[May-2006] Pierre. Mayé « Aide mémoire- électrotechnique » Dunod,Paris, 2006, ISBN 210 049578 X.

Thèses de doctorat et mémoires de magister

[Ahm-1992] Ahmad Ahmad « Contribution a la modélisation des transformateurs de puissance et de leur comportement en haute fréquence » Ecole centrale de Lyon, Thèse de Doctorat en Génie Electrique 1992.

[Gue-1994] Christophe Guerin « Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves des transformateurs-modélisation des régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique » Thèse de doctorat Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994.

[Che-1994] Abdellah Chentouf « Contribution a la modélisation électrique, magnétique et thermique d'un applicateur de plasma inductif haute fréquence » Ecole Centrale de Nantes IUT de Saint-Nazaire, Thèse de doctorat en dynamique des fluides et des transferts, 1994.

[Mao-1996] Bachir Maouche « Etude de développement semi-analytique de l'équation de diffusion électromagnétique avec thermes de déplacement dans le cas de dispositifs axisymétrique excité en courant ou en tension » Mémoire de Magister en génie électrique Université de Bejaia, 1996.

[Liu-1996] Ye Liu « Finite element modeling of the frequency characteristics of transformers » thesis, for the Degree of Master of Applied Science, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Toronto,1996.

[Le-1999] Yvonnick Le Menach « Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques » Thèse de Doctorat de l'Université de Lille1, Année 1999.

[Rob-1999] Frederic Robert « Modélisation et simulation de transformateurs pour alimentations à découpage» Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées Université Libre de Bruxelles, Août 1999.

[Dix-2004] Brandon Dixon, B.S.E.E « Pulsed power conditioning with strongly coupled transformers » Thesis, Graduate Faculty of Texas Tech University, Master of Science in Electrical Engineering May, 2004.

[Joa-2004] Michaël Joan « Modélisation des paramètres R et L de matériels électriques bobinés par la méthode des éléments finis 3D » Institut National Polytechnique de Grenoble Thèse de Doctorat en Génie Electrique 2004.

[Hen-2004] T.Henneron « Contribution à la prise en compte des grandeurs globales dans les problèmes d'électromagnétisme résolus avec la méthode des éléments finis » Thèse de Doctorat de l'Université de Lille1, Année 2004.

[Bje-2005] Eilert Bjerkan « High frequency modeling of power transformers stresses and diagnostics » Doctoral Thesis for the degree of Doctor Ingenior, NTNU Norwegian University of Science and technology, Trondheim, May 2005.

[Lef-2006] Anthony Lefevre « Contribution a la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires » Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes Année 2006.

[Doi-2007] Vincent Doirat « Contribution à la modélisation de systèmes de contrôles non destructifs par courants de Foucault-application à la caractérisation physique et dimensionnelle de matériaux de l'aéronautique » Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes Année 2007.

Articles de revues

[Nak-1982] T. Nakata ; N. Takahashi ; Y**.** Kawase « magnetic performance of step-lap joints in distribution transformer cores » IEEE Transactions On Magnetics, Vol. Mag-18, No. 6, November 1982.

[Ern-1987] Roland.Ernst Annie.Gagnoud Isabelle.Leclercq « Etude du comportement d'un circuit magnétique dans un système de chauffage par induction » revue générale de l'électricité, N 9, (1987) 123-130.

[Pic-1989] L. Pichon M. Ayoub A.Razek « Comparaison de techniques mixtes pour le calcul de courants de Foucault en géométrie axisymétrique » Revue Phys Appl, 24 (1989) pp 1049 -1056.

[Ern-1990] Roland.Ernst Annie.Gagnoud Isabelle.Leclercq « Comportement d'un induit magnétique dans un système de chauffage par induction » revue générale de l'électricité, N 8, (1990).

[Leo-1992] Francisco de Leon Adam Semlyen « Efficient calculation of elementary parameters of transformers » Transaction on Power Delivery, Vol 7 No 1, pp 376-383 January 1992.

[Rez-1992] A.Rezzoug J.P.Caron F.M.Sargos « Analytical calculations of flux induction and forces of thick coils with finite length » IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 28, No. 5, pp 2250-2252, September 1992.

[Per-1995] J.F.Pern S.N.Yeh « Calculating the current distribution in power trasformer windings using finite element analysis with circuit constraints » IEE- Proc-Sci.Meas.Technol. Vol 14, No 3, pp 231-236, May 1995.

[Che-1995] A.Chentouf J.Fouladgar G.Develey « A simplified method for calculation of the impedance of an induction plasma » IEEE Transactions on Magnetic, Vol 31, No 3, pp 2100-2103, may 1995.

[Che-1996] A.Chentouf J.Fouladgar G.Develey « Calculation of the impedance of an induction plasma with a thick - walled cold crucible » IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 12, No. 3, pp 2030-2033, May 1996.

[Bon-1997] Ki.Bong.Kim Enrico.Levi Zivan.Zabar Leo.Birenbaum « Mutual Inductance of noncoaxial circular coils with constant current density » IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 33, No. 5, pp 4303-4309, September 1997.

[Ger-2001] Herbert.De.Gersem Kay.Hameyer « A Finite Element Model for Foil Winding Simulation » IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 37, No. 5, pp 3427-3432, September 2001.

[Shi-2002] Wang Shishan, JI ShengChang, II Yanming « The Study of Eddy Current Losses in Coaxially Insulated Windings of Power Transformer » International Conference on power system technology , Vol.3 , No. pp 1392- 1395, 2002.

[Bab-2002] Slobodan Babic, Slaven Kincic « New and fast procedures for calculating the mutual inductance of coaxial circular coils (circular coil–disk coil) » IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 38, No. 5, pp 2367-3-2369, September 2002.

[Bab-2003] Slobodan Babic Cevdet Akyel Sheppard J.Salon « New procedures for calculating the mutual inductance of the system: filamentary circular coil-massive Circular Solenoid » IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 39, No. 3, pp 1131-1134, May 2003.

[Cha-2003] H.L.Chan K.W.E.Cheng D.Sutanto « Calculation of inductances of high frequency air-core transformers with superconductor windings for DC-DC converters » IEE Proc.-Electr: Power Appl, Vol. 150, No. 4, pp 447-454, July 2003.

[Ell-2003] Mohammed Elleuch, Michel Poloujadoff, « Analytical Model of Iron Losses in Power Transformers » IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 39, No. 2, pp 973-980, Mar 2003.

[Rah-2003] Ebrahim.Rahimpour Jochen.Christian Kurt.Feser Hossein.Mohseni « Transfer Function method to diagnose axial displacement and radial deformation of transformer windings » IEEE Transactions On Power Delivery, Vol. 18, No. 2, pp 493-505, April 2003.

[Oli-2003] Juan Carlos Olivares; Yilu Liu; Jose M. Canedo; Rafael Escarela-Perez ; Johan Driesen; Pablo Moreno « Reducing Losses in Distribution Transformers » IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 18, No. 3, pp 821-826, July 2003.

[Bab-2004] Slobodan Babic Sheppard Salon Cevdet Akyel « The mutual inductance of two thin coaxial disk coils in air » IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 40, No 2, pp 822-825 March 2004.

[Shi-2004] Yoshikazu.Shibuya Shigeto.Fujita « High frequency model of transformer winding » Electrical Engineering in Japan, Vol.146, No, 3, 2004. Translate from Denki Gakkai Ronbunshi, Vol 123-B, No 2, pp 201-207, February 2003.

[Lef-2005] Anthony.Lefevre Laurence.Miégeville Java.Fouladgar Guy.Olivier «3D computation of transformers overheating under nonlinear loads » IEEE Transaction On Magnetics, vol.41, No.5, pp 1564-1567, May 2005.

[Li-2005] Xiaosong.Li Qiaofu.Chen Jianbo.Sun Yu.Zhang Guzong.Long « Analysis of magnetic field and circulating current for HTS transformer windings » IEEE Transactions On Applied Superconductivity, Vol-15, No 3, pp 3808-3813, September 2005.

[Mao-2006] B.Maouche, M.Feliachi, N.Khenfer « A half-analytical formulation for the impedance variation in axisymmetrical modeling of eddy current non destructive testing » Eur. Phys. J. Appl. Phys. 33, 59–67 (2006).

[Ras-2008] V. Rashtchi H. Shayeghi M. Mahdavi A. Kimiyaghalam E. Rahimpour « Using an improved PSO algorithm for parameter identification of transformer detailed model » International Journal of Electrical Power and Energy Systems Engineering - Summer 2008.

[Fre-2009] W. Frelin L. Berthet M. Petit J. C. Vannier « Transformer Winding Losses Evaluation when Supplying Non Linear Load » Author manuscript, published in "The 44th International Universities" Power Engineering Conference - UPEC 2009, Glasgow :United Kingdom (2009).

[Jan-2009] Žarko Janic · Zvonimir Valkovic · Željko Štih « Helical winding's magnetic field in power transformers » Electr Eng (2009) 91:161–166 published online: 9 October 2009 Springer-Verlag.

[Hoc-2009] Labar Hocine, Rekik Badri, Bounaya Kamel, Kelaiaia Mounia Samira «Transformer Diagnosis Based on Coupled Circuits Method Modeling » World Academy of Science, Engineering and Technology 54 2009.

[Lin-2009] A. Linsuo Zeng B. Liangxian Zhang C. Dexin Xie D. Shan Bai E. Yan Wu F. Yuanhai Xia « Separation Calculation of High-Voltage Dry type Smoothing Reactor under Harmonic Magnetic Fields » IEEE Transaction On Magnetics, International Conference On Electrical Machines and Systems (ICEMS), pp 1-4, 15-18 Nov, 2009.

[Mao-2009] Bachir.Maouche Rezak.Alkama Mouloud.Feliachi « Semi-analytical calculation of the impedance of a differential sensor for eddy current non-destructive testing » NDT&E International 42 (2009) 573– 580-Science Direct.

[Ven-2009] Vicente.Venegas Jose.L.Guardado Serguei.G.Maximov Enrique.Melgoza « A computer model for surge distribution studies in transformer windings » IEEE, 978-1-4244-3861-7/09, pp 451-457, 2009.

[Esl-2010] M. Eslamian B. Vahidi S.H. Hosseinian « Combined analytical and FEM methods for parameters calculation of detailed model for dry-type transformer Simulation Modelling » Practice and Theory 18 (2010) 390–403-ScienceDirect.

Références de transformateurs

[E.E.I-2008] Procès verbale de contrôle de transformateur, Entreprise Electro-industries (ex-ENEL Azzazga, Tizi-Ouzou).

[Bah-1999] Bahmane.Omar Chaouche.Reda Chami.Abdelhakim « Processus de réalisation et calcul d'un transformateur » mémoire de fin d'étude DEUA en électrotechnique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Contribution à la modélisation analytico-numérique des transformateurs de puissance

Résumé: *Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude et la mise en œuvre d'un modèle prédictif pour retranscrire le comportement électromagnétique du transformateur de puissance. Un modèle basé sur la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés permet la modélisation des enroulements primaire et secondaire, avec prise en compte de l'effet de peau et de proximité. Par contre la modélisation du noyau magnétique s'appuis sur des hypothèses simplificatrices, en considérant son matériau homogène, isotrope et linéaire qui est représenté par des densités fictives de courant surfacique. Pour remédier aux insuffisances de cette méthode semi-analytique et à la difficulté de modélisation du circuit ferromagnétique, nous avons adopté une méthode mixte dit un couplage hybride (CEMC-EF), la méthode des circuits électriques magnétiquement couplés est appliquée a travers la discrétisation des enroulements et le noyau magnétique sera pris en charge par la méthode des éléments finis. Ce couplage permet de prendre en compte les non linéarités et la variation des grandeurs physiques des matériaux ferromagnétiques cela nous offre l'avantage d'étudier notre transformateur aussi en régime statique qu'en régime transitoire.*

Mots clés : *Transformateur de puissance, Circuits Electriques Magnétiquement Couplés, Couplage CEMC-MEF, Eléments Finis.*