

N° d'ordre:

RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI DE TIZI OUZOU
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE LMPA



MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

BAZIZ SADIA

PERTURBATION SINGULIÈRE ANISOTROPE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES LINÉAIRES

Soutenu le Décembre 2022 devant le jury :

Dr. LADJIMI FETIMA	UMMTO	Présidente du jury
Dr. CHEIKH MALIKA	UMMTO	Examinatrice
Dr. MOKTEFI LYDIA	UMMTO	Examinatrice
Dr. BENAOUZIA DJAMILA	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022

*A mes parents , leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout
au long de mes études. Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant
allégués, et le fruit de votre soutien infailible,
Merci d'être toujours là pour moi*

REMERCIEMENTS

IL m'est agréable d'adresser mes premiers remerciements au Dieu le tout puissant pour la persévérance, la santé, l'ouverture d'esprit et l'inspiration dont il m'a gratifié.

Mes remerciements vont également au Docteur BENAOUZIA Djamilia qui m'a proposé le sujet de mémoire et m'a encadré avec beaucoup de patience et de gentillesse.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements aux Docteurs Ladjimi Fetima, Cheikh Malika et Moktefi Lydia pour m'avoir honoré en acceptant de faire partie du jury.

Je dédie ce travail à ma famille particulièrement mes chers parents, mon époux pour le soutien qui m'ont apporté durant toute cette période.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements aux enseignants qui m'ont encadré tout au long de mon cursus, particulièrement ceux du Département de Mathématiques de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Un très grand merci pour mes camarades étudiants et amis du Master pour la collaboration et la discussion tout au long de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	v
NOTATIONS	1
INTRODUCTION	1
1 RAPPELS MATHÉMATIQUES	5
1.1 INTRODUCTION	5
1.2 LES ESPACES L^p	5
1.2.1 Définitions et propriétés élémentaires	5
1.2.2 Inégalités importantes	6
1.2.3 Les convergences dans $L^p(\Omega)$	7
1.3 THÉORIE DES DISTRIBUTIONS	8
1.3.1 Espaces des fonctions test	8
1.3.2 Distributions	9
1.4 ESPACE DE SOBOLEV	10
1.4.1 Espace $H^1(\Omega)$	12
1.4.2 Théorème de Lax- Milgram	13
2 PERTURBATION ANISOTROPE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES LINÉAIRES	15
2.1 INTRODUCTION	15
2.2 GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	15
2.2.1 Équation aux dérivées partielles du second ordre	16
2.3 THÉORIE GÉNÉRALE SUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES LINÉAIRES	19
2.3.1 Approche variationnelle :	19
2.4 PERTURBATION ANISOTROPE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES LINÉAIRES	21
2.4.1 Position du problème :	22
2.4.2 Existence et unicité de la solution	22
2.4.3 Problème limite	23
2.4.4 Comportement asymptotique dans le domaine cylindrique	25
CONCLUSION GÉNÉRALE	28
BIBLIOGRAPHIE	30

LISTE DES FIGURES

1	Siméon Denis Poisson	1
2	Potentiel électrique	2
3	Gravitation universelle	2
4	Écoulement incompressible	3
5	Diffusion thermique	3

LISTE DES TABLEAUX

NOTATIONS

- Ω : Un ouvert borné de \mathbb{R}^n .
- $\bar{\Omega}$: La fermeture de Ω .
- $\partial\Omega$: La frontière de Ω .
- dx : La mesure de Lebesgue.
- ds : La mesure surfacique.
- $\|\cdot\|_E$: La norme dans E.
- (\cdot, \cdot) : Produit scalaire.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit de dualité.
- \rightarrow : Convergence forte.
- \rightharpoonup : Convergence faible.
- ω_1 : Un ouvert de \mathbb{R}^n .
- ω_2 : Un ouvert de \mathbb{R}^m .
- X_1 : $= (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- X_2 : $= (x_{n+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.
- Supp : Support.
- V_{X_0} : Voisinage de X_0 .
- ϕ : Une fonction test.
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$: La dérivée partielle de u dans la direction x_i .
- $C^k(\Omega)$: Espace des fonctions k -fois continûment différentiables dans Ω .
- η : Vecteur extérieur unité de Ω .
- H : Un espace de Hilbert.
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: Laplacien de u .
- $\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u \\ \nabla_{X_2} u \end{pmatrix}$: Gradient de u .
- $\nabla_{X_1} u$: $= (\partial_{X_1} u \dots \partial_{X_m} u)^T$.
- $\nabla_{X_2} u$: $= (\partial_{X_{m+1}} u \dots \partial_{X_n} u)^T$.
- $D(\Omega)$: Espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω .
- $D'(\Omega)$: Espace des distributions dans Ω .
- T : Une distribution.
- E' : Dual topologique de E.
- A : Matrice.
- t : Le temps.
- $p.p$: Presque partout.
- $F.V$: Une formulation variationnelle.
- $E D P$: Équation aux dérivées partielles.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

LES équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP.

On peut affirmer alors que les équations aux dérivées partielles sont un outil essentiel de modélisation. Leur étude occupe les mathématiciens depuis le 18^{ème} siècle, avec les travaux d'Euler, de d'Alembert, de Lagrange et de Laplace etc...

La recherche dans ce domaine s'intéresse d'une part aux propriétés qualitatives des modèles, telles qu'à l'existence et l'unicité de la solution, sa régularité et sa stabilité et d'autre part, à la détermination de solutions approchées obtenues par résolution de modèles plus simples. Par exemple, pour un problème non linéaire, on peut approcher sa solution par celle d'un problème linéaire ou non linéaire mais plus simple.

La motivation de ce travail remonte à l'équation de Poisson (ainsi nommée en l'honneur du mathématicien et physicien français Siméon Denis Poisson) qui est une équation aux dérivées partielles elliptique du second ordre.



FIGURE 1 – *Siméon Denis Poisson*

Cette équation est importante en pratique :

- En électrostatique, Le potentiel électrique V associé à une distribution connue de charges ρ est donné par la relation suivante :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Où ϵ représente la permittivité diélectrique, qui décrit la réponse d'un milieu donné à un champ électrique appliqué.

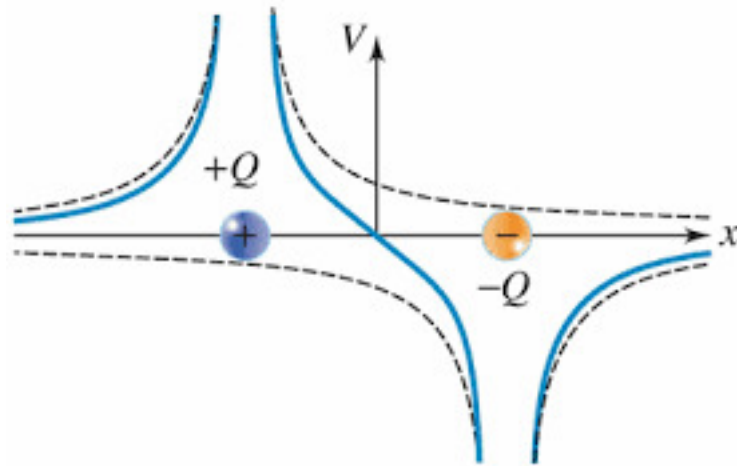


FIGURE 2 – Potentiel électrique

-En gravitation universelle, le potentiel gravitationnel Φ est relié à la masse volumique ρ par la relation :

$$\Delta \Phi = 4\pi G\rho$$

Avec G représente le tenseur d'Einstein.

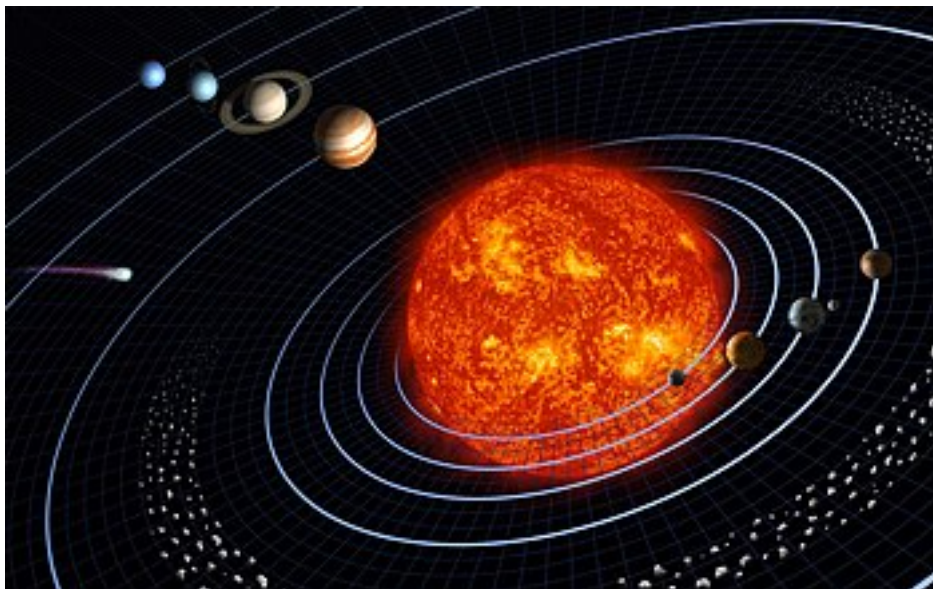


FIGURE 3 – Gravitation universelle

-En mécanique des fluides, pour des écoulements incompressibles, la pression est reliée au champ de vitesse u par une équation de Poisson. Par

exemple, en 2D, en notant les composantes du champ de vitesse $u = (u_x, u_y)$, la relation s'écrit :

$$\Delta p = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Où : ρ représente la densité du fluide.



FIGURE 4 – *Ecoulement incompressible*

-En thermodynamique : Le transfert d'énergie entre objets en contact physique qui dépend pas du temps (conduction thermique ou diffusion thermique) peut être traduit par l'équation de Poisson, qui prend la forme suivante :

$$D \Delta T = P.$$

Avec : D c'est Le coefficient de diffusivité thermique et P représente l'échauffement provenant de sources de chaleur.



FIGURE 5 – *Diffusion thermique*

Notre travail consiste à étudier un problème du type elliptique perturbé avec un petit paramètre ε . L'étude des problèmes de perturbations occupe une place importante parmi les problèmes mathématiques étudiés de nos jours et dans le passé. En effet, ce type de problèmes se présente souvent dans la nature, ils sont caractérisés par la présence d'un petit paramètre qui lorsqu'il tend vers zéro, donne lieu généralement à un phénomène physique appelé

"couche limite". Dans les études théoriques, ces problèmes apparaissent de deux façons différentes : soit physiquement, le petit paramètre étant une donnée du problème, par exemple un coefficient de diffusion, ou un coefficient de viscosité, etc.... Soit inversement, perturbations singulières peuvent apparaître indirectement comme un outil de démonstration ; ce sont les méthodes dites de "régularisation" ou de "viscosité artificielle" qui consistent à renforcer la régularité de l'équation en ajoutant un terme plus régulier affecté d'un petit coefficient.

Le travail présenté dans ce mémoire s'articule de la manière suivante :

Le premier chapitre est consacré aux rappels mathématiques comprenant l'ensemble des outils qui sont à la base de notre étude, notamment les espaces L^p , les distributions et les espaces de sobolev.

Dans le deuxième chapitre, nous commençons d'abord à donner un résumé des résultats principaux qui traitent l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des problèmes elliptiques linéaires. Par la suite, nous nous intéressons aux perturbations singulières anisotropes pour des problèmes aux limites elliptiques. Nous allons étudier le comportement asymptotique des solutions lorsque ε tend vers 0.

RAPPELS MATHÉMATIQUES



1.1 INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de rappeler les principaux outils mathématiques utilisés dans ce travail. Dans cette partie, nous allons présenter quelques notions d'analyse fonctionnelle qui sont des ingrédients essentiels à l'étude des équations aux dérivées partielles, notamment les espaces $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev et les distributions. Le contenu de ce chapitre est une synthèse des résultats présentés dans les références pionnières. [Brézis [1994]], [Evans [2010]], [Lacroix-Sonnier [1998]], [Wloka [1987]], [Chipot [2009]], [Matos [2014]].

1.2 LES ESPACES L^p

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue dx .

1.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.1 "Fonction mesurable"

Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable, si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble E_a défini par :

$$E_a = \{x \in \Omega / f(x) \geq a\},$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

Définition 1.2 "Fonction intégrable"

On dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue, si

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty.$$

Définition 1.3 "L'espace $L^1(\Omega)$ "

On appelle espace de Lebesgue $L^1(\Omega)$, l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} , défini par :

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ intégrable}\}.$$

On note :

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Définition 1.4 "L'espace $L^p(\Omega)$ "

Soit $p \in [1, +\infty[$. On appelle espace de Lebesgue, l'ensemble défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable} / |f|^p \in L^1(\Omega) \right\},$$

et on note :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f|^p dx \right]^{1/p}.$$

Pour $p = +\infty$, on a

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

et on note :

$$\|f\|_\infty = \inf \{C, f(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Nous définissons maintenant, les espaces de Hilbert qui apparaissent fréquemment en mathématiques et en physique, en tant qu'espaces fonctionnels de dimension infinie. Ces espaces sont indispensables dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.5 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u,v) et qui est complet pour la norme $(u,u)^{1/2}$.*

Exemple 1.1

1. Espace de fonctions de carré intégrable $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f.g) = \int_{\Omega} f(x).g(x) dx,$$

et la norme associée est donnée par :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

2. Les espaces de Sobolev sont également des espaces de Hilbert. (Nous allons parler sur ce type d'espaces dans la 3ème section).

1.2.2 Inégalités importantes

Dans cette partie, nous allons présenter quelques inégalités utilisées fréquemment dans ce mémoire, particulièrement dans l'étude des estimations a priori.

Proposition 1.1 "Inégalité de Young"

Soient $a; b \in \mathbb{R}^+$ et $p; q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors :

$$a.b < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proposition 1.2 *"Inégalité de Cauchy Schwarz "*
 soient $f, g \in L^2(\Omega)$, alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx < \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.2.3 Les convergences dans $L^p(\Omega)$

Nous définissons quelques convergences dans l'espace $L^p(\Omega)$ qui jouent un rôle fondamental dans notre étude.

Définition 1.6 *"Convergence forte"*
 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On dira que la suite (f_n) converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

et on note

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Définition 1.7 *"Convergence faible"*
 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On dira que la suite (f_n) converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ si

$$\langle f_n, \phi \rangle \rightarrow \langle f, \phi \rangle \quad \forall \phi \in (L^p)'$$
 avec $(L^p)'$ dual topologique de (L^p)

On note alors

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Théorème 1.1 *"Convergence dominée de Lebesgue" : [Brézis [1994]]*
 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction à valeurs réelles dans $L^p(\Omega)$ et f une fonction dans $L^p(\Omega)$, tel que pour tout n

$$f_n \rightarrow f \text{ p.p.}$$

Supposons qu'il existe une fonction g dans $L^p(\Omega)$ à valeurs réelles, positives telle que

$$|f_n| < g \text{ p.p.}$$

Alors, on a

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } L^p(\Omega).$$

C'est à dire :

$$\int_{\Omega} |f_n - f|^p dx = 0.$$

Théorème 1.2 *"Théorème réciproque de la convergence dominée de Lebesgue" : [Brézis [1994]]*
 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que :

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Alors, il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) et une fonction h dans $L^p(\Omega)$, tel que :

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \text{ p.p. dans } \Omega$$

et

$$f_{n_k}(x) < h(x), \text{ p.p. dans } \Omega \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Théorème 1.3 "Théorème de Fubini" [Brézis [1994]]

Soient $\omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts et soit $f : \omega_1 \times \omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Supposons que $f \in L^1(\omega_1 \times \omega_2)$. Alors, pour presque tout $X_1 \in \omega_1$

$$f(X_1, \cdot) \in L^1(\omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\omega_2} f(X_1, X_2) dX_2 \in L^1(\omega_1).$$

De même, pour presque tout $X_2 \in \omega_2$

$$f(\cdot, X_2) \in L^1(\omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\omega_1} f(X_1, X_2) dX_1 \in L^1(\omega_2).$$

De plus, on a

$$\int_{\omega_1} dX_1 \int_{\omega_2} f(X_1, X_2) dX_2 = \int_{\omega_2} dX_2 \int_{\omega_1} f(X_1, X_2) dX_1 = \iint_{\omega_1 \times \omega_2} f(X_1, X_2) dX_1 dX_2.$$

1.3 THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

La théorie des distributions a été introduite par Laurent Schwartz en 1945, posant les idées qui étaient déjà en germe chez Sobolev dans les années 30.

La représentation des phénomènes physiques étendus dans l'espace par des fonctions de plusieurs variables et l'expression des lois physiques en termes d'équations aux dérivées partielles ont été un grand progrès dans l'étude de ces phénomènes. Toutefois, cette représentation par une fonction assignant une valeur en chaque point pose au moins deux problèmes d'ordre physique :

1. Le premier est que les quantités physiques en un point n'ont pas de sens. Par exemple, la température est une conséquence du mouvement des molécules et parler de température en un point précis ne signifie donc rien.
2. Le second est qu'une valeur ponctuelle pour une quantité physique est impossible à mesurer avec un appareil de mesure.

L'un des buts de cette théorie est d'apporter un sens à des objets abstraits comme l'impulsion de Dirac, mais aussi de pouvoir dériver les fonctions qui ne sont pas dérivables au sens classique. Nous verrons comment cela peut nous aider à résoudre des problèmes des E D P qui n'ont pas a priori des solutions classiques. Notons que les définitions et les résultats donnés dans cette section se trouvent dans les références suivantes ([Lacroix-Sonnier [1998], [Boumaza [2015]]).

1.3.1 Espaces des fonctions test

Définition 1.8 Soit ϕ une fonction définie sur Ω à valeurs complexes. On appelle support de ϕ , noté $\text{supp}\phi$, l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels la fonction ne s'annule pas, ie.

$$\text{supp}\phi = \overline{\{x \in \Omega | \phi(x) \neq 0\}}.$$

Proposition 1.3 Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{supp}\phi = \overline{\{x \in \Omega | \phi(x) \neq 0\}}$.
2. $(\text{supp}\phi)^c$ c'est le plus grand ouvert, où la fonction ϕ est nulle.
3. $x_0 \notin \text{supp}\phi$, si et seulement si, il existe un voisinage de x_0 , noté V_{x_0} , tel que :

$$\forall x \in V_{x_0}, \phi(x) = 0$$

Définition 1.9 Une fonction à support compact est une fonction indéfiniment différentiable, dont le support est compact. On note l'ensemble de ces fonctions par C_c^∞ .

Définition 1.10 Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . On appelle espace des fonctions test, l'ensemble $D(\Omega)$ défini par :

$$D(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n / f \in C_c^\infty\}.$$

1.3.2 Distributions

Définition 1.11 On appelle distribution sur Ω une forme linéaire continue sur $D(\Omega)$, i.e. Une application

$$\begin{aligned} T : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longrightarrow T(\phi) = \langle T, \phi \rangle, \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\langle T, \lambda\phi + \Phi \rangle = \lambda \langle T, \phi \rangle + \langle T, \Phi \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. pour toute suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D(\Omega)$ qui converge vers ϕ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, \phi_n \rangle = \langle T, \phi \rangle.$$

On note $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

Dérivation d'une distribution

Dans ce paragraphe, nous allons voir qu'il est possible de donner un sens à la dérivée d'une fonction qui n'est pas dérivable au sens classique. L'un des concepts les plus étonnants de la théorie des distributions, que l'on peut dériver à importe quel ordre une distribution quelconque et que cette dérivation est une opération continue. La situation est donc totalement différente du cadre des fonctions dérivables classiques. Il faut se dire que si une fonction classique n'est pas dérivable, cela signifie simplement que sa dérivée est une distribution qui n'est pas une fonction.

Définition 1.12 Soit T un élément de $D'(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on appelle ordre de α et on note $|\alpha|$ l'entier $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. La dérivée d'ordre $|\alpha|$ de T est l'application suivante notée $D^\alpha T$:

$$D^\alpha T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, u \rightarrow D^\alpha T(u) = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha u \rangle.$$

Remarque 1.1 Si une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on note D^α la dérivée d'ordre α de u

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Définition 1.13 On dit qu'une suite $(T_n)_{n \geq 0}$ de distribution sur Ω converge vers $T \in D'(\Omega)$, si pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle .$$

Proposition 1.4 Soit $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $D'(\Omega)$ qui converge vers $T \in D'(\Omega)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $(D^\alpha T_n)_{n \geq 0}$ converge vers $D^\alpha T$ dans $D'(\Omega)$.

Théorème 1.4 [Lesfari [2012]]

Soit (f_n) une suite de fonctions de carré intégrable sur Ω . Si (f_n) converge vers f dans $L^2(\Omega)$ alors (f_n) converge au sens de distribution vers f .

Preuve 1.1 L'inégalité de Cauchy Shwartz montre que, pour toute fonction test $\phi \in D'(\Omega)$, on a :

$$| \langle T f_n, \phi \rangle - \langle T f, \phi \rangle | \leq \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| |\phi(x)| dx \leq \|\phi\|_2 \|f - f_n\|_2.$$

Comme f_n converge vers f dans $L^2(\Omega)$, alors pour n tend vers l'infini, le second membre converge vers 0. D'où la convergence de (f_n) vers (f) au sens de distribution.

Théorème 1.5 [Lesfari [2012]]

$D'(\Omega)$ dense dans $L^2(\Omega)$. i.e, pour tout élément $f \in L^2(\Omega)$, il existe une suite f_n de $D'(\Omega)$ converge vers f .

1.4 ESPACE DE SOBOLEV

Les espaces de Sobolev sont un outil omniprésent dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Leur compréhension est donc une étape nécessaire avant d'aborder l'équation en question. Considérons l'équation aux dérivées partielles suivantes, définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \nabla u(x) + c(x) u(x) = f(x); x \in \Omega, \\ u(x) = 0 \quad ; x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ sont deux fonctions données, et u est une fonction inconnue.

Résoudre ce problème, revient à déterminer une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solution de (1.1). Il est souvent difficile dans la théorie des équations aux dérivées partielles de prouver qu'il existe effectivement une telle solution.

L'idée des espaces de Sobolev est d'introduire les espaces de fonction u tels que $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in [L^2(\Omega)]^n$, qui est un espace de Hilbert, et de chercher non les solutions au problème initial, mais les fonctions u qui vérifient l'identité suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in D(\Omega).$$

De telles fonctions sont appelées solutions faibles de l'équation aux dérivées partielles. L'intérêt est que cette fois ci, on dispose de toute l'artillerie des espaces de Hilbert (théorème de Lax-Milgram...etc) pour prouver l'existence de solutions faibles. On ne résout donc pas le problème initial, mais une variante.

On peut dire alors que les espaces de Sobolev se sont imposés comme l'outil moderne fournissant le cadre adéquat pour la recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles. Le contenu de cette section est une synthèse des résultats présentés dans les références suivantes ([Brézis [1994]], [Evans [2010]], [Wloka [1987]], [Chipot [2009]]).

Définition 1.14 "Espace $W^{1,p}(\Omega)$ "

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $1 \leq p < +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de u dans la direction x_i au sens des distributions. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\| u \|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{du}{dx_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Pour $p = +\infty$, on a :

$$\| u \|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \| u \|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{du}{dx_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposition 1.5 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace :

1. De Banach pour $1 \leq p < +\infty$.
2. Séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

Nous définissons maintenant l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme sous espace de $W^{1,p}(\Omega)$, qui tient une place importante dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.15 "Espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ "

On définit l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ par l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, ie.

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}.$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$.

Le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle des fonctions de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.6 Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Lemme 1.1 Soit (u_n) une suite de $W^{1,p}(\Omega)$, telle que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega),$$

et

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ dans } (L^p(\Omega))^n.$$

Alors,

$$u \in W^{1,p}(\Omega),$$

et

$$\| u_n - u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

1.4.1 Espace $H^1(\Omega)$

Parmi les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ les plus utilisés dans notre travail, l'espace noté par $H^1(\Omega)$, défini pour $p = 2$, ie.

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Définition 1.16 On définit l'espace $H^1(\Omega)$ par l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$, dont les dérivées partielles au sens de distribution sont dans $L^2(\Omega)$, ie.

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Autrement dit, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$, s'il existe $v_1, \dots, v_n \in L^2(\Omega)$ tel que :

$$\left\{ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

avec $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Proposition 1.7 L'espace $H^1(\Omega)$ muni de produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert, c'est à dire un espace vectoriel complet pour la norme suivante :

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Définition 1.17 On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ par l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ie.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.18 "Espace $H^{-1}(\Omega)$ "

L'espace dual de $H_0^1(\Omega)$ est noté par $H^{-1}(\Omega)$, ie

$$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))',$$

et la norme dual est donnée par :

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}.$$

De plus, l'injection de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ est continue, ie

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 1.6 Formule d'intégration par partie [Evans [2010]]

Si $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \cdot v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \cdot v(x) \eta_i(x) ds \quad \text{pour } (i = 1, \dots, n).$$

Théorème 1.7 "Formule de Green" [Evans [2010]]

Soit $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Alors

$$\int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) + \int_{\Omega} \frac{\partial v(x) u(x)}{\partial \eta(x)} ds.$$

Avec η représente la normale extérieure au bord de Ω .

Théorème 1.8 "Inégalité de Poincaré" [Dautray et Lions [1999]]

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Alors, il existe une constante positive C_{Ω} , telle que : pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} < C_{\Omega} \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.8 Soit Ω un ouvert borné. Alors, pour tout élément $u \in H_0^1(\Omega)$, les deux normes $\| u \|_{H_0^1(\Omega)}$ et $\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}$ sont équivalentes.

Théorème 1.9 [Wloka [1987]]

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n . Alors

$$H_0^1(\Omega) \underset{\text{Compact}}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

C'est à dire : pour toute suite convergente faiblement dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$.

1.4.2 Théorème de Lax- Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques. Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert [Brézis [1994]].

Définition 1.19 Soit H un espace Hilbert . On appelle forme bilinéaire sur H toute application

$$\begin{aligned} a : H \times H &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow a(u, v) \end{aligned}$$

telle que pour tous u_1, u_2 et v appartenant à H , pour tout réel λ nous ayons

$$a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v)$$

et pour tous u, v_1 et v_2 appartenant à H , pour tout réel λ nous ayons

$$a(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda a(u, v_1) + a(u, v_2).$$

Définition 1.20 On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est

i) **Continue** : s'il existe une constante C , telle que :

$$|a(u, v)| \leq C |u| |v|, \quad \forall u, v \in H.$$

ii) **Coercive** : s'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que :

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2, \quad \forall v \in H.$$

Corollaire 1.1 (*Lax-Milgram*)

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\phi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que :

$$a(u, v) = \langle \phi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété suivante :

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \phi, u \rangle = \underset{v \in H}{\text{Min}} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \phi, v \rangle \right\}. \quad (1.1)$$

PERTURBATION ANISOTROPE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES LINÉAIRES

2

2.1 INTRODUCTION

Dans la première section, nous allons donner quelques définitions et propriétés élémentaires concernant les équations aux dérivées partielles. La deuxième section a pour objet de présenter les résultats principaux qui traitent l'existence et l'unicité de la solution pour les problèmes elliptiques linéaires. Nous allons considérer dans la 3ème section un problème perturbé, où nous étudions le comportement asymptotique des solutions lorsque certains coefficients tendent vers zéro.

2.2 GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Beaucoup de phénomènes naturels sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Nous pouvons citer par exemple les prévisions météorologiques (où interviennent un grand nombre de paramètres), les secousses sismiques, les mouvements des océans, des disciplines scientifiques telles l'économie, la finance, les sciences médicales. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes : [David et Gosselet [2012]], [Munnier [2018]], [Allaire [2016]], [Bezard [1996]], [Rondepierre et Rouchon [2012]].

Définition 2.1 Une équation aux dérivées partielles d'ordre n (n entier positif) est une équation de la forme,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_n^n}) = 0. \quad (2.1)$$

C'est une expression qui met en relation la fonction inconnue u de la variable spatiale $x \in \mathbb{R}^n$ et ses dérivées d'ordre $\leq n$.

Remarque 2.1 L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation.

Définition 2.2 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Une solution $u = u(x)$ sur Ω est dite solution classique (ou au sens fort) de l'EDP (2.1), si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Les dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre n .
2. $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_n^n}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2.3 Un problème est dit bien posé pour une EDP, si :

1. Le problème possède une solution,

2. La solution est unique,
3. La solution dépend continûment des données.

Définition 2.4 L'EDP (2.1) est dite linéaire, si elle s'écrit sous la forme :

$$L(u) = f$$

où L : désigne l'opérateur aux dérivées partielles et f : une fonction donnée.

Autrement dit : Une EDP est linéaire, si sa dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire.

Exemple 2.1 Comme exemple, on peut prendre l'équation de Laplace définie par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.2)$$

On a :

$$\begin{aligned} L(au + bv) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(au + bv) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(au + bv); \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \\ &= \left(\frac{\partial^2(au)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(bv)}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial^2(au)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(bv)}{\partial y^2} \right); \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \\ &= \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \\ &= aL(u) + bL(v); \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc l'équation (2.2) est linéaire.

2.2.1 Équation aux dérivées partielles du second ordre

Définition 2.5 On appelle EDP linéaire d'ordre inférieure ou égale à 2 dans un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et d'inconnu $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, une équation du type

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + g(x)u(x) = h(x).$$

Par convention, on supposera que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Avec $A(x) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice $n \times n$ symétrique de coefficients devant les termes d'ordre 2.

Classification des équations aux dérivées partielles dans \mathbb{R}^n

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classées au sens physique en deux grandes classes :

-Les équations qui modélisent des problèmes d'état d'équilibre ou stationnaire appartiennent à la classe dite des problèmes elliptiques. L' équations de Laplace et celle de Poisson font partie de cette classe.

-La deuxième classe est celle des problèmes d'évolution dite comprend les équations dont les solutions dépendent du temps, c'est-à-dire les équations de type parabolique et de type hyperbolique

Équations aux dérivées partielles elliptiques

Définition 2.6 Une EDP linéaire du second ordre est dite elliptique en $x \in \Omega$, si la matrice $A(x)$ n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe.

Les équations de ce type interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires.

Exemple 2.2 On considère l'équation de Laplace suivante :

$$\Delta u = 0. \quad (2.3)$$

La matrice $A(x)$ correspondante est :

$$A(t, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Toutes les valeurs propres sont donc égales à 1. Alors, l'équation (2.3) est elliptique.

Équations aux dérivées partielles paraboliques

Définition 2.7 Une EDP est dite parabolique en $x \in \Omega$, si $A(x)$ admet $N - 1$ valeurs propres non nulles de même signe est une valeur propre nulle.

Si EDP est parabolique sur tout le domaine d'étude Ω , elle modélise en générale l'évolution transitoire des phénomènes irréversibles associés à des diffusions.

Exemple 2.3 Soit l'équation de la chaleur définie par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - K\Delta u(t, x) = f(t, x) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

La matrice $A(t, x)$ est donnée par :

$$A(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -K & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & -K & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -K \end{bmatrix}.$$

$A(t, x)$ admet $N - 1$ valeurs propres non nulles de même signe est une valeur propre nulle. Donc, l'équation (2.4) est parabolique.

Équations aux dérivées partielles hyperboliques

Définition 2.8 Une EDP est dite hyperbolique en $x \in \Omega$, si $A(x)$ n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe sauf une de signe opposé.

Les EDP hyperboliques modélisent des phénomènes de propagation.

Exemple 2.4 On considère l'équation des ondes, définie par :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t, x) - C^2 \Delta u(t, x) = 0. \quad (2.5)$$

Avec : $\Delta(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2(t, x)}$ est le Laplacien de $u(t, x)$ par rapport à x .

La matrice $A(x)$ vaut dans ce cas

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -C^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -C^2 \end{bmatrix}.$$

La matrice $A(x)$ admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe sauf une de signe opposé donc (2.5) est hyperbolique .

Problèmes aux limites :

Définition 2.9 Un problème aux limites est constitué d'une équation aux dérivées partielles dont on recherche une solution prenant de plus des valeurs imposées en des limites du domaine de résolution.

Définition 2.10 Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées partielles sur une frontière.

On distingue trois types de conditions aux limites :

- 1 **Condition de Dirichlet** : est une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord $\partial\Omega$. Le problème du premier type est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Dirichlet.
- 2 **Condition de Neumann** : est une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord $\partial\Omega$. Un problème du deuxième type est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Neumann.
- 3 **Condition de Fourier-Robin** : est une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord $\partial\Omega$.

2.3 THÉORIE GÉNÉRALE SUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES LINÉAIRES

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude d'une équation aux dérivées partielles du type elliptique. Nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème de Lax-Milgram.

L'équation type qui va nous intéresser est l'équation de Poisson dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, soumise à des conditions aux limites du type Dirichlet. Cette équation intervient dans plusieurs domaines (voir l'introduction générale).

Citons par exemple le domaine de thermodynamique, où l'équation de Poisson intervient pour décrire la température à l'équilibre dans un corps Ω .

Ce phénomène est modélisé par l'équation suivante : $-\Delta u = f$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Ici, u désigne la température, f les sources et u_0 les thermostats au bord.

Position du problème :

On considère l'équation de Poisson suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

Où, f est un second membre qui appartient à l'espace $L^2(\Omega)$.

La condition aux limites $u = 0$ imposée sur la frontière de Ω , est dite "condition de Dirichlet homogène".

En général dans l'étude des EDP, il est difficile de montrer l'existence et l'unicité des solutions classiques (fortes). C'est pour cette raison, nous utilisons une approche très importante dite : "**Approche variationnelle**".

2.3.1 Approche variationnelle :

L'intérêt de cette approche est de pouvoir disposer de concepts et de propriétés de l'analyse fonctionnelle, en particulier ceux des espaces de Hilbert et de Sobolev.

La formulation variationnelle (FV) d'un problème d'EDP, dite aussi formulation faible, est une forme équivalente à ce problème d'EDP sous sa forme classique dite aussi formulation forte.

Le principe est de remplacer l'EDP par une formulation équivalente (FV) obtenue en intégrant l'équation après l'avoir multiplié par une fonction test.

Plusieurs questions importantes se posent :

1. Dans quel espace fonctionnel les fonctions test v sont admissibles ?
2. Sous quelles conditions la FV possède-t-elle une solution unique ?

Définition 2.11 Une formulation variationnelle est la donnée :

1. D'un espace de Hilbert V ,
 2. D'une forme bilinéaire continue a ,
 3. D'une forme linéaire continue L ,
- et consiste à rechercher la solution $u \in V$, telle que :

$$\forall v \in V, a(u, v) = L(v).$$

Étape 1 : Formulation variationnelle

On multiplie l'équation (2.6) par une fonction test v et on intègre par parties, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.7)$$

En utilisant la formule de Green, on trouve :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot v ds = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.8)$$

Comme u doit satisfaire la condition aux limites de Dirichlet, il est nécessaire de choisir un espace de Hilbert V , tel que :

$$\forall v \in V, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Dans ce cas, l'égalité (2,8) devient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.9)$$

A partir de cette identité, on peut définir l'espace V , la forme bilinéaire $a(u, v)$ et la forme linéaire $l(v)$.

Par hypothèse, $f \in L^2(\Omega)$. Alors, pour que le terme de gauche de (2.9) ait un sens il suffit que $\nabla u \nabla v$ appartienne à $L^2(\Omega)$ (composante par composante), et pour le terme à droite de (2.9) il faut choisir v dans $L^2(\Omega)$.

On peut choisir alors :

$$V = H_0^1(\Omega).$$

L'étude du problème (2.6) par l'approche variationnelle consiste à introduire le problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.10)$$

Étape 2 : Existence et unicité de la solution faible

Dans cette étape nous montrons que la formulation variationnelle (2.10) admet une unique solution faible, en utilisant le théorème de Lax-Milgram.

Pour l'application de ce théorème, on pose :

$$* a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

$$* L(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

- La continuité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ sur l'espace $H_0^1(\Omega)$:

En utilisant l'inégalité de Cauchy-shwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| dx \\ &\leq \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Comme $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ sont équivalentes, alors

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'où la continuité de $a(u, v)$ sur $H_0^1(\Omega)$.

- La coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ sur $H_0^1(\Omega)$:
Il suffit de montrer qu'il existe une constante $c > 0$, tel que :

$$a(u, u) \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

On a :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (1 + C^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq (1 + C^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \frac{1}{(1 + C^2)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Donc
$$a(u, u) \geq \frac{1}{(1 + C^2)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

D'où la coercivité de $a(u, u)$ sur $H_0^1(\Omega)$.

- La continuité de L sur $H_0^1(\Omega)$:

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f v| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où la continuité de L sur $H_0^1(\Omega)$.

Conclusion 2.1 *Toutes les hypothèses du théorème de Laxe Milgram sont satisfaites, donc on peut conclure qu'il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de problème (2.10) .*

2.4 PERTURBATION ANISOTROPE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES LINÉAIRES

Les problèmes mathématiques modélisant des phénomènes physiques sont souvent difficiles sinon impossible à résoudre. Mais il peut apparaître des simplifications quand on se limite dans les domaines de calcul ou dans l'adimensionnalisation quand un ou plusieurs paramètres sont présents, signifiant que

des phénomènes peuvent être négligeables par rapport à d'autres. Limitons nous à un petit paramètre noté de façon symbolique par ε .

Cette théorie est développée pour étudier les problèmes dont les vitesses de diffusion sont très petites dans certaines directions. Elle s'intéresse principalement à l'étude du comportement asymptotique de la solution de tels problèmes quand ε se rapproche de 0. C'est ce que nous appelons un problème de perturbation anisotropes. Dans cette section, nous allons développer des résultats donnés dans les articles suivants : ([Chipot et Guesmia [2009]], [Guesmia [2008]]).

Nous considérons un problème elliptique linéaire sur un domaine cylindrique.

2.4.1 Position du problème :

Soit Ω un domaine cylindrique de \mathbb{R}^{m+n} défini par

$$\Omega = \omega_1 \times \omega_2,$$

où ω_1 et ω_2 sont deux ouverts bornés de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n respectivement, m et n deux entiers positifs avec $n > m \geq 1$.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$, on pose :

$$X_1 = (x_1, \dots, x_m), \quad \text{et} \quad X_2 = (x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Avec ces notations, on a

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u \\ \nabla_{X_2} u \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{cases} \nabla_{X_1} u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_m} u)^T, \\ \nabla_{X_2} u = (\partial_{x_{m+1}} u, \dots, \partial_{x_n} u)^T \end{cases}$$

et ∂_{x_i} désignant la dérivée partielle dans la direction x_i .

Dans cette section, on examine un problème de perturbation défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta_{X_1} u_\varepsilon - \Delta_{X_2} u_\varepsilon = f & \text{sur } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour le terme de source, nous supposons que

$$f \in L^2(\Omega). \quad (2.12)$$

Avec ε un nombre destiné à tendre vers 0. Dans ce cas, la vitesse de diffusion étant très petite seulement dans la direction de X_1 . Donc, le problème (2.11) est un problème de perturbation anisotrope, en contraste avec les perturbations isotropes par rapport à toutes les directions.

2.4.2 Existence et unicité de la solution

Le problème variationnel de (2.11) est donné par :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \\ \int_\Omega \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} v \, dx + \int_\Omega \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.13)$$

Pour $\varepsilon > 0$, fixé et Sous l'hypothèse (2. 12), l'existence d'une solution unique de(2. 13) est assurée par le théorème de L'Axe Milgram.

2.4.3 Problème limite

La question qui se pose alors : Comment se comportent les solutions u_ε quand ε tend vers 0? Formellement, si on dénote par u_0 la limite de u_ε , le problème limite peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.14)$$

La forme bilinéaire du côté gauche de (2.14) n'est pas coercive sur $H_0^1(\Omega)$, donc le problème (2.14) est mal posé.

On peut procéder de la manière suivante : Le problème limite ne contient pas les dérivées dans la direction X_1 et la limite de u_ε quand ε tend vers 0 est donnée par u_0 définie pour p.p. $X_1 \in \omega_1$ comme solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_{X_2} u_0(X_1, \cdot) = f(X_1, \cdot) & \text{dans } \omega_2 \\ u_0(X_1, \cdot) = 0 & \text{sur } \partial\omega_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

Notons que X_1 joue le rôle d'un paramètre dans ce problème. Nous donnons d'abord un lemme très important qui joue un rôle crucial dans cette partie.

Lemme 2.1 Soit u une fonction réelle définie sur Ω .

Alors on a :

- Si $u \in L^2(\Omega)$, alors $u(X_1, \cdot) \in L^2(\omega_2)$ p.p. $X_1 \in \omega_1$.

- Si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $u(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2)$ p.p. $X_1 \in \omega_1$.

Preuve 2.1 1. Supposons que $u \in L^2(\Omega)$. Soit \tilde{u} le prolongement de u par 0 en dehors de Ω . i.e.

$$\tilde{u}(X_1, X_2) = \begin{cases} u(X_1, X_2) & \text{si } (X_1, X_2) \in \Omega. \\ 0 & \text{si } (X_1, X_2) \in \omega_1 \times \omega_2 / \Omega. \end{cases}$$

Il est clair que $\tilde{u} \in L^2(\omega_1 \times \omega_2)$ et donc $\tilde{u}^2 \in L^1(\omega_1 \times \omega_2)$.
D'après le théorème de Fubini, on a $\tilde{u}^2(X_1, \cdot) \in L^1(\omega_2)$ p.p. $X_1 \in \omega_1$.
Et donc $u^2(X_1, \cdot) \in L^1(\omega_2)$, i.e.

$$u(X_1, \cdot) \in L^2(\omega_2)$$

2. Supposons à présent que $u \in H_0^1(\Omega)$.

Soit $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $D(\Omega)$ telle que

$$\|w_m - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty$$

i.e.

$$\int_{\Omega} (|w_m - u|^2 + |\nabla(w_m - u)|^2) dx \rightarrow 0$$

Ceci implique que

$$\int_{\Omega} (|w_m - u|^2 + |\nabla_{X_2}(w_m - u)|^2) dx \rightarrow 0$$

Ce qui s'écrit d'après le théorème de Fubini après avoir prolongé w_m et u par 0 en dehors de Ω

$$\int_{\omega_1} dX_1 \int_{\omega_2} |w_m - u|^2 + |\nabla_{X_2}(w_m - u)|^2 dX_2 \rightarrow 0$$

Mais alors, d'après le théorème réciproque de la convergence dominée de Lebesgue, il existe une sous-suite $(w_{m'})$ de (w_m) telle que. Pour p.p. $X_1 \in \omega_1$,

$$\int_{\omega_2} |w_{m'}(X_1, \cdot) - u(X_1, \cdot)|^2 + |\nabla_{X_2}(w_{m'}(X_1, \cdot)) - u(X_1, \cdot)|^2 dX_2 \rightarrow 0$$

Lorsque $m' \rightarrow +\infty$

$$\|w_{m'}(X_1, \cdot) - u(X_1, \cdot)\|_{H^1(\omega_2)} \rightarrow 0 \quad p.p. X_1 \in \omega_1. \quad (2.16)$$

Or étant une fonction régulière,

$$w_{m'}(X_1, \cdot) = w_{m'}|_{\omega_2} \in D(\omega_2) \quad \text{pour tout } X_1 \in \omega_1.$$

Ce qui permet de conclure grâce a (2.12) que

$$u(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2).$$

Maintenant, en vertu du lemme (2.1) et compte tenue de (2.12) on a :

$$f(X_1, \cdot) \in L^2(\omega_2), \quad p.p. X_1 \in \omega_1. \quad (2.17)$$

Le problème variationnel de (2.15) est donné par :

$$\begin{cases} \int_{\omega_2} \nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \nabla_{X_2} v(X_2) dX_2 = \int_{\omega_2} f(X_1, X_2) \cdot v(X_2) dX_2 \quad \forall v \in H_0^1(\omega_2) \\ u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2) \quad p.p. X_1 \in \omega_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

On introduit l'espace $V(\Omega)$ défini par :

$$V(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | \nabla_{X_2} u \in [L^2(\Omega)]^n, u(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2) p.p. X_1 \in \omega_1\}$$

muni de la norme suivante

$$|u|_V^2 = |\nabla_{X_2} u|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.19)$$

Il est clair que l'espace $V(\Omega)$ est un espace de Hilbert et l'application $u \rightarrow |\nabla_{X_2} u|_{L^2(\Omega)}^2$ est une norme équivalente à la norme définie par (2.19).

En fait, nous pouvons choisir une constante de Poincaré C telle que

$$\|u(X_1, \cdot)\|_{L^2(\omega_2)} < C \|\nabla u(X_1, \cdot)\|_{L^2(\omega_2)}, \quad \forall u \in H_0^1(\omega_2), \quad p.p. X_1 \in \omega_1$$

Sous l'hypothèse (2.17), l'existence d'une solution unique $u_0 = u_0(X_1, \cdot)$ de problème (2.18) est assurée par le théorème de L'axe Milgram.

Remarque 2.2

$$H_0^1(\Omega) \subset V(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset V'(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \quad (2.20)$$

avec injection continues. Notons que l'injection de $V(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ n'est pas compacte.

2.4.4 Comportement asymptotique dans le domaine cylindrique

On souhaite maintenant montrer la convergence de la suite (u_ε) dans un espace approprié.

Nous donnons alors, le résultat principal :

Théorème 2.1 *Sous l'hypothèse (2.12), on a*

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightarrow \nabla_{X_2} u_0, \quad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad (2.21)$$

où u_ε (resp. u_0) est la solution de (2.13) (resp. (2.18)).

(A noter que La convergence signifie composante par composante).

La preuve est donnée en plusieurs étapes.

Preuve 2.2 1. *Estimations a priori :*

Nous donnons d'abord quelques estimations a priori qui servent à obtenir des convergences faibles.

On pose $v = u_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle (2.13), et en appliquant l'inégalité de Cauchy Shwartz sur le seconde membre de (2.13), on obtient :

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq \int_{\Omega} |f \cdot u_\varepsilon| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.22)$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on aura

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq C_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla_{X_2} u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.23)$$

On peut écrire alors

$$\|\nabla_{X_2} u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla_{X_2} u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.24)$$

ce qui implique

$$\|\nabla_{X_2} u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.25)$$

Substituant (2.25) dans (2.23), on obtient

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 dx \leq C_{\Omega}^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.26)$$

Donc

$$|\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|, \quad |\nabla_{X_2} u_\varepsilon| \quad \text{sont bornées dans } L^2(\Omega). \quad (2.27)$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré, on déduit que :

$$u_\varepsilon \quad \text{est bornée dans } L^2(\Omega). \quad (2.28)$$

2. Convergences faibles

Dans cette étape, nous étudions les convergences faibles de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ dans l'espace $L^2(\Omega)$.

De (2.27) et (2.28), on peut extraire une sous suite de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ notée toujours $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, telle qu'on a les convergences suivantes :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup u_1 \quad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup u_2 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (2.29)$$

Où

$$u_0 \in L^2(\Omega), \quad u_1 \in [L^2(\Omega)]^p, \quad u_2 \in [L^2(\Omega)]^{n-p}. \quad (2.30)$$

Pour identifier les limites données dans (2.29), nous utilisons l'injection continue $L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$ avec la continuité de l'opérateur dérivé dans $D'(\Omega)$. Ce qui donne :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (2.31)$$

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (2.32)$$

$$\nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2} u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (2.33)$$

Revenons maintenant à l'équation (2.13) et passer à la limite. En utilisant les convergences faibles (2.31), (2.32) et (2.33) on déduit :

$$\int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.34)$$

A ce stade là, on ne sait pas encore si pour p.p. $X_1 \in \omega_1$, on a :

$$u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2). \quad (2.35)$$

Afin de montrer (2.35), nous aurons besoin que les convergences (2.31), (2.32) et (2.33) soient des convergences fortes.

3. Convergences fortes :

Dans cette étape nous allons montrer la convergence forte de u_ε . Pour établir cela, on prend d'abord $v = u_\varepsilon$ dans (2.34), et on passe à la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$. On tient compte de (2.31) et (2.33) on a :

$$\int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} u_0 dx = \int_{\Omega} f u_0 dx. \quad (2.36)$$

Ensuite nous définissons la quantité I_ε de la manière suivante :

$$I_\varepsilon = \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) \nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0) dx$$

Nous développons d'abord I_ε ,

$$I_\varepsilon = \int_{\Omega} \varepsilon^2 \nabla_{X_1} u_\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon dx + \left[\int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} u_0 dx \right]$$

par utilisation de (2.13), I_ε s'écrit

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon &= \int_{\Omega} f \cdot u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\
 &+ \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx \\
 &- \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} u_\varepsilon dx + \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} u_0 dx
 \end{aligned}$$

Passant à la limite en utilisant (2.31) et (2.33), on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_{\Omega} f u_0 dx - \int_{\Omega} \nabla_{X_2} u_0 \nabla_{X_2} u_0 dx.$$

D'après (2.36), on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0.$$

Ce qui donne les convergences fortes suivantes :

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_0 \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (2.37)$$

$$\nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow \nabla_{X_2} u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (2.38)$$

4. Condition au bord :

D'après (2.38), on a :

$$\int_{\Omega} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dx \rightarrow 0,$$

qui peut s'écrire aussi

$$\int_{\omega_1} \int_{\omega_2} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dX_2 dX_1 \rightarrow 0. \quad (2.39)$$

Il s'ensuit que pour p.p. $X_1 \in \omega_1$,

$$\int_{\omega_2} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dX_2 \rightarrow 0. \quad (2.40)$$

Comme $\|\nabla_{X_2} v\|_{L^2(\omega_2)}$ est une norme sur $H_0^1(\omega_2)$ et $u_\varepsilon(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2)$, par conséquent

$$u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\omega_2) \quad \text{p.p. } X_1 \in \omega_1. \quad (2.41)$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré dans la direction de X_2 , on obtient :

$$\int_{\omega_2} |u_\varepsilon(X_1, \cdot) - u_0(X_1, \cdot)|^2 dx_2 \leq C_{\omega_2} \int_{\omega_2} \nabla_{X_2} (u_\varepsilon(X_1, \cdot) - u_0(X_1, \cdot))^2 dX_2,$$

ce qui implique

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon - u_0|^2 dx \leq C_{\omega_2} \int_{\Omega} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 dx.$$

En utilisant la convergence (2.38) on déduit la convergence suivante :

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (2.42)$$

Remarque 2.3 Notons que les convergences montrées précédemment sont vraies pour une sous suite. Comme on peut identifier u_0 de manière unique alors toutes les convergences ci-dessus sont valables pour toute la suite. Voir [Chipot [2009]].

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail m'a permis de renforcer mes connaissances dans le domaine d'analyse fonctionnel, notamment les distributions et les espaces de Sobolev. Il m'a permis également de découvrir le domaine des perturbations singulières et particulièrement le cas anisotrope, ainsi que de maîtriser certaines techniques de calculs concernant les problèmes elliptiques.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un modèle mathématique perturbé avec un petit paramètre ε qui découle des problèmes de diffusion. Le problème que nous avons traité est une équation aux dérivées partielles linéaires du type elliptique.

Nous avons traité le cas stationnaire en utilisant la méthode de perturbations singulières anisotropes pour étudier le comportement asymptotique des solutions lorsque le coefficient de diffusion tend vers zéro dans certaines directions. L'étude est faite sur un domaine cylindrique dont on a montré quelques résultats de convergence.

PERSPECTIVES

Comme futures perspectives de recherches, j'envisage de :

- (a) Améliorer les résultats de convergence obtenus dans le deuxième chapitre.*
- (b) Traiter des problèmes non linéaires puisque la plupart des phénomènes sont modélisés par des équations non linéaires.*

=====

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié un modèle mathématique perturbé avec un petit paramètre ε qui dérive des problèmes de diffusion.

Le problème que nous avons traité est une équation aux dérivées partielles linéaires du type elliptique.

Nous avons traité le cas stationnaire en utilisant la méthode de perturbations anisotropes pour étudier le comportement asymptotique des solutions lorsque le coefficient de diffusion tend vers zéro dans certaines directions.

Abstract

In this work, we have studied a mathematical model perturbed with a small parameter ε which derives from diffusion problems.

The problem we have dealt with is a linear partial differential equation of the elliptic type.

We treated the stationary case of which we studied the asymptotic behavior of the solutions when the diffusion coefficient tends towards zero in certain directions.

BIBLIOGRAPHIE

- Gregoire Allaire.* Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles : promotion 2014, année 2, deuxième semestre, période 3, MAT431. *École polytechnique, 2016.*
- Jean-François Babadjian.* *Equations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires.*
- Djamila Benaoudia.* *On the asymptotic behaviour of some singular perturbations problems.* Université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, thèse de doctorat, 2022.
- Max Bezard.* *Equations aux dérivées partielles.* *Ecole nationale supérieure des techniques avancées, 1996.*
- H Boumaza.* *Theorie des distributions.* UPN# Sup Galilée, 2016, 2015.
- Haim Brézis.* *Functional analysis. theory and applications.(analyse fonctionnelle. théorie et applications.). collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, 1994.*
- Michel Chipot.* *Elliptic equations : an introductory course.* *Springer Science & Business Media, 2009.*
- Michel Chipot et Senoussi Guesmia.* *On the asymptotic behavior of elliptic, anisotropic singular perturbations problems.* *Communications on Pure & Applied Analysis, 8(1) :179, 2009.*
- Robert Dautray et Jacques-Louis Lions.* *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology : Volume 2 Functional and Variational Methods, volume 2.* *Springer Science & Business Media, 1999.*
- Claire David et Pierre Gosselet.* *Équations aux dérivées partielles.* Edition Dunod, 2012.
- Lawrence C Evans.* *Partial differential equations.* 19, 2010.
- Senoussi Guesmia.* *Asymptotic behavior of elliptic boundary-value problems with some small coefficients.* *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only], 2008 :Paper–No, 2008.*
- Bernard Helffer.* *Introduction aux équations aux dérivées partielles.* Université de Paris-sud, mémoire de master, Version de janvier-mai, 2007.
- Marie-Therese Lacroix-Sonrier.* *Distributions, espaces de Sobolev : applications.* *Ellipses Paris, 1998.*
- Ahmed Lesfari.* *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace : cours et exercices.* *Ellipses, 2012.*

Julia Matos. Analyse fonctionnelle, 2014.

A Munnier. Espaces de sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles. Institut Élie Cartan Université Henri Poincaré, Nancy, 1 :2007–2008, 2007.

Alexandre Munnier. Equations aux dérivées partielles. 2018.

Aude Rondepierre et Adeline Rouchon. Introduction aux equations aux dérivées partielles : Etude théorique. INSA de Toulouse, 2013, 2012.

Joseph Wloka. Partial differential equations. Cambridge university press, 1987.