

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou



Faculté du génie électrique et d'informatique
Département d'automatique

Mémoire de Fin d'Etudes
De MASTER PROFESSIONNEL
Domaine : **Sciences et Technologies**
Filière : **Automatique**
Spécialité : **Automatique industrielle**

Présenté par
Fatiha Boussouel
Mounir Ftenane

Thème
**Modélisation et commande des graphes
d'événements P-Temporels : application
sur un système de production.**

Mémoire soutenu publiquement le 30 / 09 / 2024. devant le jury composé de :

M Prénom NOM

NAIT ABDESSELAM Aldjia, Professeur, Président

M Prénom NOM

HAMRI Hakima, Professeur, Encadrant

M Prénom NOM

DORBANE Nadia, Examineur

M Prénom NOM

HAROUCHE, Examineur

Remerciements

Pour commencer, je veux adresser mes remerciements à Madame HAMRI

Hakima, pour son encadrement, sa grande disponibilité et ses précieux conseils

tout au long de la rédaction de ce mémoire. .

Je voudrais également remercier les membres du jury, de l'intérêt qu'ils ont

porté à mon mémoire en acceptant de l'examiner.

Je voudrais remercier aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de

loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire.

Enfin, Je remercie très chaleureusement mes parents et mes frères pour le

soutien considérable qu'ils m'ont apporté et la confiance dont ils m'ont toujours

témoigné.



Dédicace



Du Plus profond de mon cœur, je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chers

À mes très chers parents

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et mon admiration pour vous, une vie entière ne suffirait à vous rendre le centième de ce que vous avez fait pour moi. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis ma naissance, j'espère que votre bénédiction me sera toujours favorable. Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit tant attendu, je vous souhaite une longue vie, et j'aspire à être votre fierté.

Fatiha



Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ceux qui ont donné un sens à mon existence, en m'offrant une éducation digne de confiance, ceux qui ont attendu avec patience les fruits de leur bonne éducation à mes très chers parents.

Mounir

Notations

SED : Les systèmes à événements discrets.

RdP : réseau de Pétri.

GE : graphe d'événements.

P_i : Place numéro i d'un RdP.

T_i : Transition initial d'un RdP.

T_j, T_k : Transitions finals d'un RdP.

P : L'ensemble des places d'un réseau de Pétri.

T : L'ensemble des transitions d'un réseau de Pétri.

M ou M_k : Marquage d'un RdP.

M_i : Marquage initial d'un RdP.

M_j : Marquage final d'un RdP.

$M(P_i)$ ou m_i : Le nombre de marque contenant dans une place P_i .

M_0^* : Ensemble des marquages accessibles à partir du marquage M_0 .

S : Séquence de franchissement.

m : Nombre de places d'un réseau de Pétri.

n : Nombre de transitions d'un réseau de Pétri.

w_{ij}^- : Poids de l'arc qui relie P_i à T_j .

w_{ij}^+ : Poids de l'arc qui relie T_j à P_i .

\mathbb{N} : L'ensemble des nombres entiers.

G^- : contient les poids des arcs entrants et sortants relativement à chaque place P_i .

Q^+ : Ensembles des nombres rationnels.

\mathbb{R} : Ensembles des nombres réels.

$\theta(k)$: La date de $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition T_j .

E^L : L'inverse à gauche de la matrice E.

λ : Temps de cycle.

c : La cyclicité.

μ : Vecteur unité.

I_n : Matrice identité.

0_n : Matrice nulle.

Liste des figures

Figure I.1 : Un réseau de Pétri marqué.....	3
Figure I.2: Validations des transitions.....	5
Figure I.3 : Franchissement d'une transition.....	6
Figure 1.4 : Un graphe d'état.....	7
Figure I.5 : Un graphe d'événement.....	7
Figure I.6 : Un RdP a- sans conflit -b- avec conflit.	8
Figure I.7 : Un RdP -a- à choix libre -b- n'est pas à choix libre.	8
Figure I.8 : Un RdP -a- simple -b- n'est pas simple.....	9
Figure I.9 : Un RdP pur et un RdP impur.....	10
Figure I.10: Partie de réseau de pétri généralisé.	11
Figure I.11: Illustration d'un réseau de pétri à capacité.	12
Figure I.12: Réseau de pétri avec son marquage initial.	13
Figure I.13: Marquages accessibles d'un réseau de pétri.	15
Figure I.14 : RdP -a- borné -b- non borné.	16
Figure I.15 : RdP sauf.	17
Figure I.16 : Illustration de la vivacité.	18
Figure I.17 : Un RdP quasi-vivant -a- avec blocage -b- sans blocage.....	19
Figure II.1: Un graphe d'événements P-temporel.....	23
Figure II.2: Une partie d'un graphe d'événements P-temporel.....	25
Figure II.3: Décomposition d'une place d'un graphe d'événements P-temporel.....	26
Figure II.4: Un graphe d'événements P-temporel avec décomposition d'une.....	27
Figure II.5 : Un four électrique.	30
Figure III.1 : Système de production du pain.....	43
FIGURE III.2 : La variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissements des transitions.	50
FIGURE III.3 : Évolution des temps de séjour des marques dans les places en fonction de... 50	50

Table des matières

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I : Les réseaux de Pétri.

I.1 Introduction.....	2
I.2 Les éléments de base d'un réseau de Pétri :.....	2
I.2.1 Définition formelle :	2
I.2.2 Marquage	4
I.3 Evolution d'un RdP.....	4
I.3.1 Validation et Franchissement d'une Transition	4
I.4 Quelques classes de RdP.....	6
I.4.1 Graphe d'état.....	6
I.4.2 Graphe d'évènements.....	7
I.4.3 RdP sans conflit	7
I.4.4 RdP à choix libre.....	8
I.4.5 RdP simple	8
I.4.6 RdP pur	9
I.5 Quelques extensions de RdP.....	10
I.5.1 RdP généralisés	10
I.5.2 RdP à capacité.....	11
I.6. Propriétés des RdP	13
I.6.1 Notations et définitions	13
I.6.2 Borgnitude :	15
I.6.3 Vivacité :.....	16
I.6.4 Quasi-vivacité :	18
I.6.5 Blocage	18
I.7 Conclusion	19

Chapitre II : Modélisation des graphes d'évènements en utilisons le modèle implicite dans l'algèbre standard.

II.1 Introduction	20
II.2 Les graphes d'évènements temporels	20
II.3 Les graphes d'évènements P-temporels	20
II.3.1 Fonctionnement	21
II.4 Modélisation des graphes d'évènements P-temporels	21
II.4.1 Modèle des graphes d'évènements P-temporels dans l'algèbre standard.....	21
II.4.2 Modèle implicite des graphes d'évènements P-temporels dans l'algèbre standard	23
II.5 Application au four électrique	27
II.5.1 Modélisation de four électrique	27
II.5.2 Interprétation du graphe.....	28
II.6 Conclusion	33

Chapitre III : La commande prédictive.

III.1 Introduction	34
III.2 La commande prédictive	34
III.3 Principe de la commande prédictive	34
III.4 Commande prédictive en boucle ouverte à horizon fini des graphes d'évènements P-temporels	35
III.4.1 La construction du modèle	35
III.4.2 La trajectoire de référence	36
III.4.3 Calcul du temps du cycle λ	37
III.4.4 Formulation du problème de commande.....	38
III.4.5 Calcul des prédictions	39
III.4.6 Calcul de la séquence de commande.....	40
III.4.7 Prise en compte des contraintes.....	40
III.5 Application du four électrique.....	41

III.5.1 Interprétation du graphe	42
III.5.2 Commande prédictive à horizon fini	46
III .6 Conclusion.....	51
Conclusion générale	52
Bibliographie	53

Introduction générale

Les systèmes à événements discrets (SED) sont des systèmes où le changement d'état dépend du temps déterminé en réponse à certains événements. Ces événements sont des occurrences spécifiques qui provoquent des changements d'état dans le système. Ce dernier peut être caractérisé par une séquence d'états et de transitions. Les transitions ont lieu en réponse à des événements, et chacune d'elles entraîne un changement d'état dans le système. Cela recouvre un grand nombre de processus, comme les réseaux de transport, les systèmes informatiques, les systèmes multimédias, les chaînes de productions,

L'importance prise par ces systèmes dans notre société a conduit de nombreux chercheurs à proposer des modèles graphiques et mathématiques permettant de décrire leur comportement afin d'en évaluer les performances et d'optimiser leur conception ou leur pilotage. La diversité de ces systèmes conduit naturellement à différents modèles. Parmi ces modèles les Réseaux de Pétri (RdP) [8]. Ils proposent une représentation complète du comportement des systèmes à événements discrets, ces derniers peuvent se caractériser par des contraintes de temps avec des phénomènes de synchronisation et de retard.

Une modélisation décrivant tous les paramètres d'un SED est nécessaire, qui servira à l'élaboration des stratégies de contrôles efficaces qui garantissent la stabilité des processus des SED. L'une des stratégies de contrôle est la commande prédictive à horizon fini. L'objectif est d'appliquer des commandes pour que les états futurs du système dynamique suivent une trajectoire désirée prédéfinie.

L'organisation de ce mémoire est la suivante

- Dans le premier chapitre, nous présentons les rappels nécessaires qui concernent l'outil réseaux de Pétri ainsi que leurs propriétés et leur principe de fonctionnement.
- Dans le deuxième chapitre, nous appliquons la modélisation des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard en utilisant le modèle implicite. Nous avons appliqué ça sur un four électrique et puis obtenu le modèle.
- Dans le troisième chapitre, nous avons consacré cette partie à la commande des systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'événements P-temporels en utilisant l'approche commande prédictive. Une commande prédictive en boucle ouverte est calculée sur un horizon fini.

I.1 Introduction

C'est en 1964 que CARL ADAM PETRI définissait les réseaux qui portent depuis son nom. Vingt ans ont passé sans que cet outil très général permettant de décrire des relations existantes entre des conditions et des événements, et de modéliser le comportement du système à événements discrets. Ces réseaux présentent des caractéristiques intéressantes telles que la modélisation et la visualisation de comportements parallèle, de synchronisation et de partage de ressources.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions essentielles des réseaux de Pétri.

I.2 Les éléments de base d'un réseau de Pétri

I.2.1 Définition formelle

Un réseau de Pétri (RdP) est un graphe orienté composé de deux types de nœuds (sommets) : les places et les transitions.

- Les places (P_i) : représenté par des cercles et permettent de décrire les états du système modélisé, l'ensemble des places noté $P = \{P_1, P_2 \dots\}$.
- Les transitions (T_i) : représenté par des traits (certains auteurs représentent une transition par un rectangle), l'ensemble de ces transitions noté $T = \{T_1, T_2 \dots\}$.

Les places et les transitions sont reliées par des arcs orientés. A chaque arc, on attribue un poids (nombre entier) s'il est mentionné, dans le cas contraire ce nombre est égal à 1. Lorsqu'une place P_i reliée à une transition T_j par un arc, on parle de la place d'entrée de T_j (place amont). Lorsqu'une transition T_j reliée à une place P_i [7], on parle de place de sortie de T_j (place aval), voire la Figure I.1.

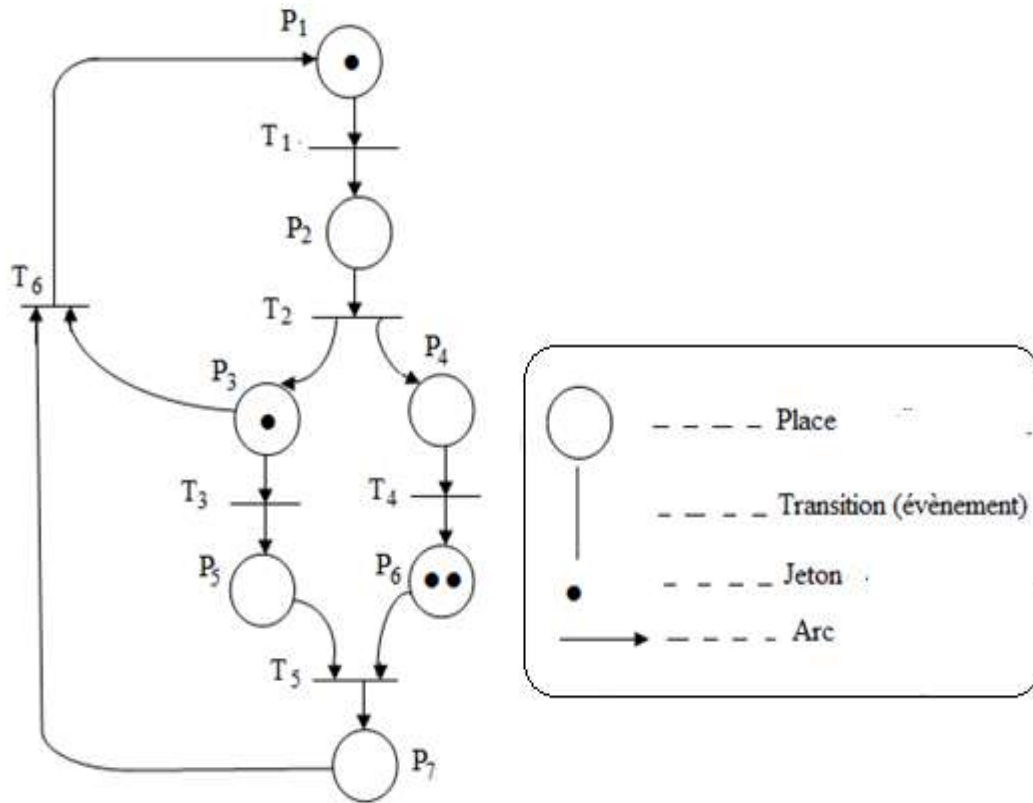


Figure I.1 : Un réseau de Pétri marqué.

La figure I.1 représente un RdP comportant 7 places, 6 transitions et 15 arcs orientés.

L'ensemble des places d'un RdP noté P . Pour l'exemple considéré, on a donc $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$. L'ensemble des transitions est noté $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\}$.

On dira que la place P_3 est en amont ou est une entrée de la transition T_3 parce qu'il y a un arc orienté de P_3 vers T_3 . On dira que la place P_5 est en aval ou est une sortie de la transition T_3 parce qu'il y a un arc orienté de T_3 vers P_5 .

Remarque I.1

Si tous les arcs d'un RdP ont un poids égal à 1, on dit que le RdP est ordinaire, sinon si les poids sont supérieurs à 1 on dit que le RdP est généralisé.

I.2.2 Marquage

Chaque place contient un nombre entier (positif ou nul) des marques ou jetons[7]. Le nombre de marque contenant dans une place P_i sera noté soit $M(P_i)$ ou m_i .

On appelle marquage M d'un réseau de Pétri, le vecteur du nombre de marques dans chaque place : La $i^{\text{ème}}$ composante correspond au nombre de marques dans la $i^{\text{ème}}$ place [7]. Il indique à un instant donné l'état du RdP.

Voir la figure I.1, nous avons $m_1 = m_3 = 1$, $m_6 = 2$, $m_2 = m_4 = m_5 = m_7 = 0$. Le marquage du réseau, M , est défini par le vecteur de ces marquages, c'est-à-dire $M = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$.

I.3 Evolution d'un RdP

Pour rendre compte de l'évolution du système modélisé, les RdP intègrent un formalisme permettant de passer d'un marquage à un autre : c'est le franchissement des transitions.

1.3.1 Validation et Franchissement d'une Transition

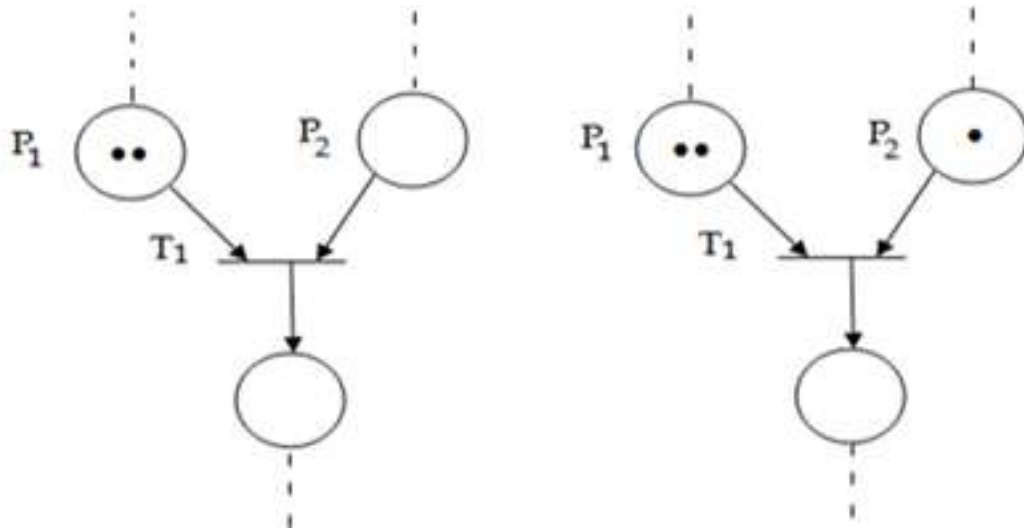
Le passage d'un marquage à un autre se fait par le franchissement des transitions[7]. Une transition ne peut être franchie (ou tirée) que si elle est validée.

Définition I.1 Une transition T_i est dite validé (ou franchissable ou étirable) si et seulement si toutes les places d'entrée (en amont) possèdent suffisamment de jetons (\geq au poids de l'arc correspondant)[1]. La Figure I.2 illustre différents cas de validation d'une transition.

Une transition peut être franchie (tirée) si et seulement si elle est validée. Les conséquences du franchissement (toujours supposé instantané) de la transition sont les suivantes :

- Nous prélevons dans chacune des places d'entrée un nombre de jetons égal au poids respectif de l'arc reliant la place à la transition.
- Nous déposons dans chacune des places de sortie un nombre de jetons égal au poids respectif de l'arc reliant la transition à la place.

Nous passons ainsi de M_i à M_j par le tir de la transition T_j . On note $M_i[T_j > M_j$.



-a- La transition T_1 n'est pas validé car P_2 ne contient pas de jetons.

-b- La transition T_1 est validé car P_1 et P_2 possèdent des jetons.

Figure I.2 : La validation des transitions.

Remarque I.2 :

1. Concernant la production et la consommation des jetons :
 - Le nombre de jetons produits et celui des jetons consommés sont indépendants.
 - Le poids de l'arc entrant à une transition représente le nombre de jetons à consommer par cette transition après franchissement.
 - Le poids de l'arc sortant d'une transition représente le nombre de jetons à produire par cette transition après franchissement.
2. Concernant le franchissement des transitions :
 - Lorsqu'une transition est validée cela n'implique pas qu'elle sera franchie immédiatement.
 - Il y a un seul franchissement à la fois.
 - Le franchissement d'une transition est indivisible.
 - Le franchissement d'une transition a une durée nulle.

La Figure I.3 montre un exemple de franchissement de transitions.

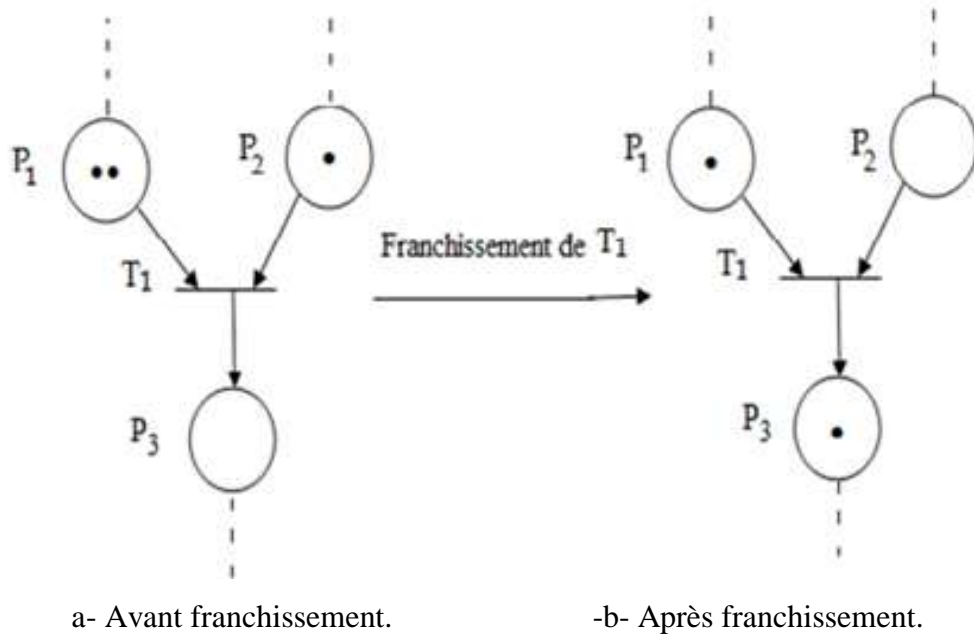


Figure I.3 : Franchissement d'une transition.

I.4 Quelques classes de RdP

I.4.1 Graphe d'état

Un RdP est un graphe d'état si et seulement si toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie [7], voir la figure I.4.

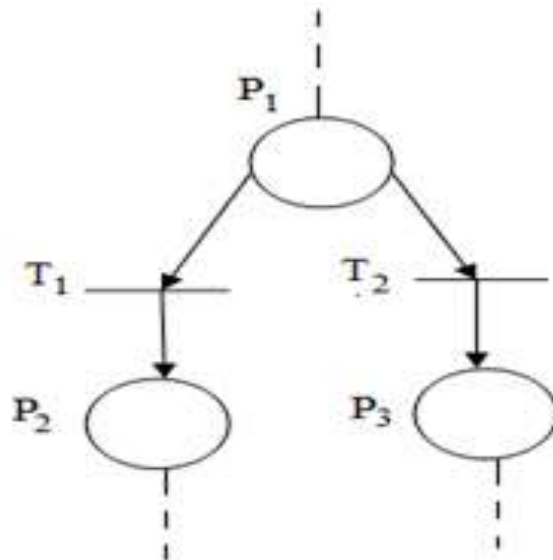


Figure I.4 : Un graphe d'état.

I.4.2 Graphe d'évènements

Un RdP est un graphe d'évènements si et seulement si toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie, voire la figure I.5. Un graphe d'évènement est parfois appelé graphe de transitions ou graphe marqué. Le graphe d'évènement est donc dual d'un graphe d'état.

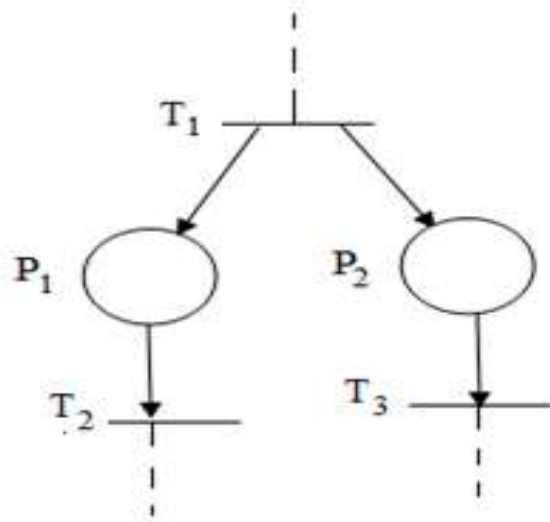


Figure I.5 : Un graphe d'évènement.

I.4.3 RdP sans conflit

C'est un RdP dans lequel toute place a au plus une transition de sortie. Un conflit (ou conflit structurel) correspond à l'existence d'une place P_i qui a au moins deux transitions de sortie T_j, T_k, \dots . On notera ce conflit par le doublet formé d'une place et d'un ensemble de transition: $\langle P_i, \{T_j, T_k, \dots\} \rangle$ [8]. Voir la figure I.6.

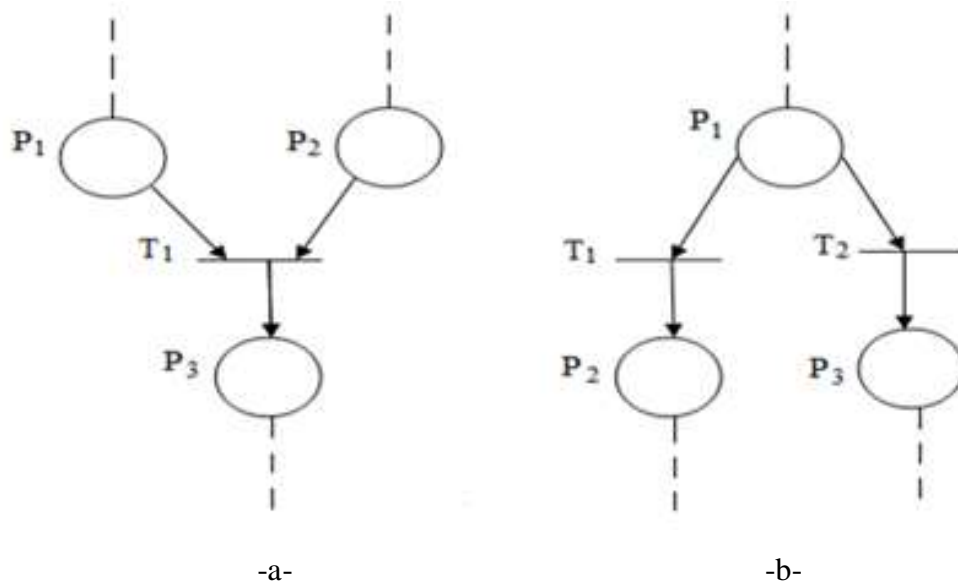


Figure I.6 : Un RdP a- sans conflit -b- avec conflit.

I.4.4 RdP à choix libre

Un RdP à choix libre est un RdP dans lequel pour tout conflit $\langle P_i, \{T_j, T_k, \dots\} \rangle$ aucune des transitions T_j, T_k, \dots ne possède une autre place d'entrée que P_i [7], nous avons illustré ça dans la figure I.7.

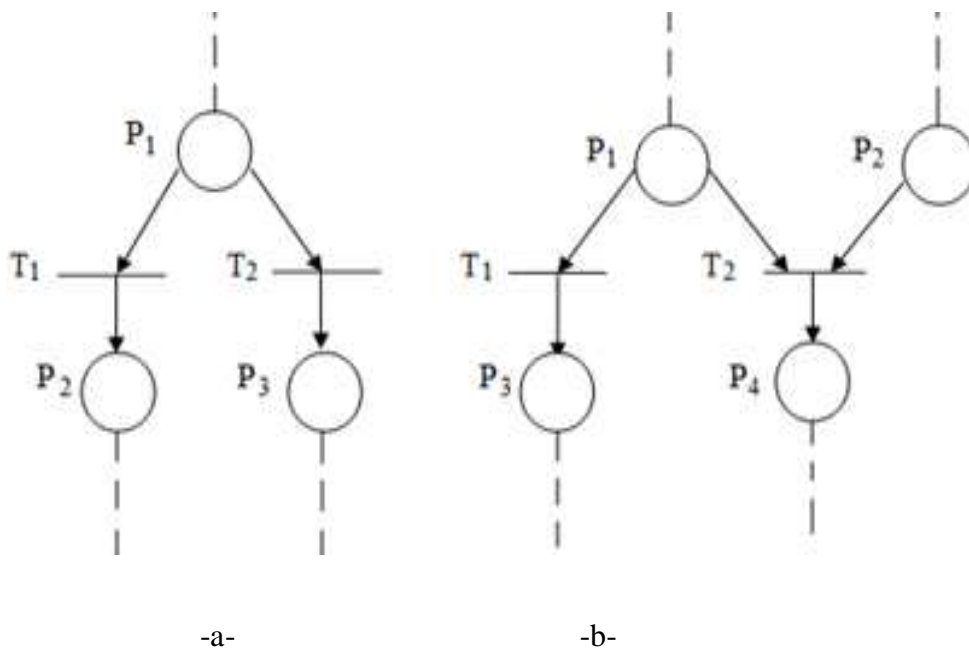


Figure I.7 : Un RdP -a- à choix libre -b- n'est pas à choix libre.

I.4.5 RdP simple

Un RdP est dit simple si et seulement si toutes ses transitions ne peuvent concernées que par un conflit au plus. Autrement dit, s'il existe une transition T_1 et deux conflits $\langle P_1, \{T_1, T_2, \dots\} \rangle$ et $\langle P_2, \{T_1, T_3, \dots\} \rangle$ alors le RdP n'est pas simple [7] [8], voir la figure I.8.

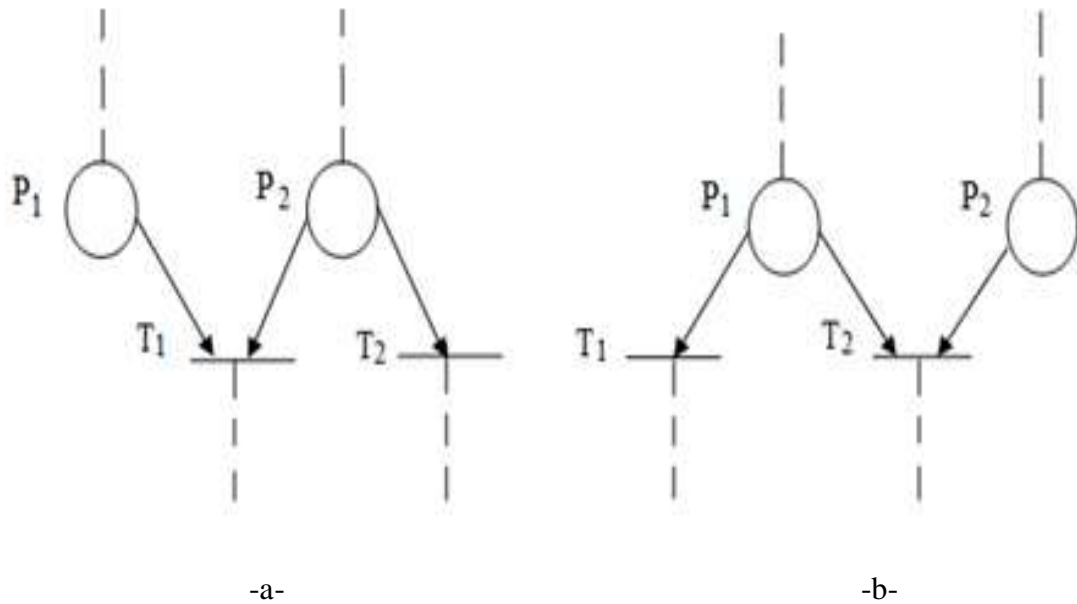


Figure I.8 : Un RdP -a- simple -b- n'est pas simple.

Remarque I.3 :

- L'ensemble des RdP simples inclut l'ensemble des RdP à choix libre, qui inclut l'ensemble des RdP sans conflit, qui inclut lui-même l'ensemble des graphes d'événements.
- L'ensemble des graphes d'états est inclus dans l'ensemble des RdP à choix libre.

I.4.6 RdP pur

Un RdP pur c'est un RdP dans lequel il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui soit également place de sortie de cette transition [8], voir la figure I.9.

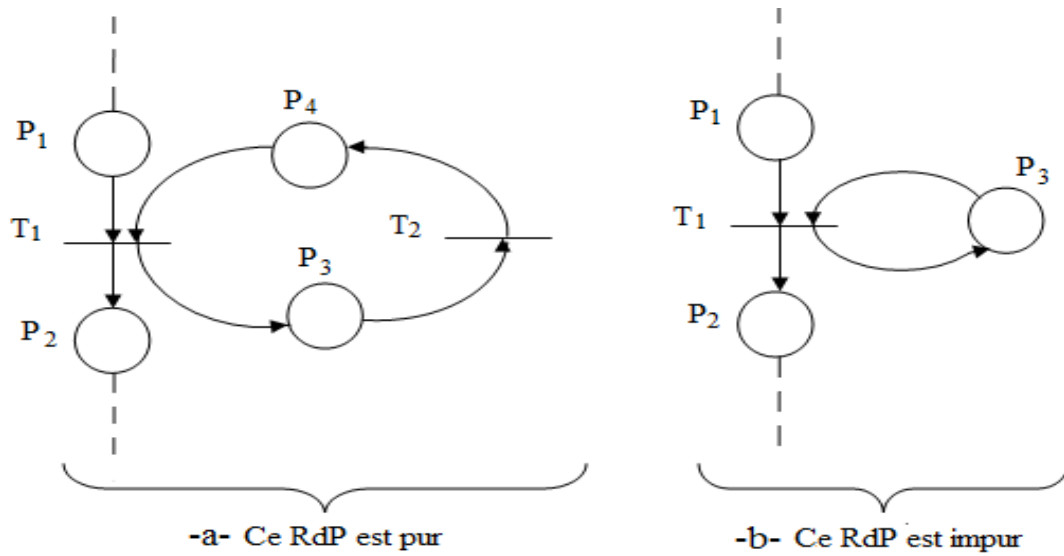


Figure I.9 : Un RdP pur et un RdP impur.

La figure I.9 montre deux type de réseaux un pur et l'autre impur. Dans la figure I.9.b, la place P_3 est à la fois place d'entrée et de sortie de T_1 , donc nous allons dire que la transition T_1 est une transition impur et la place P_3 est une place impur.

Remarque I.4

Si une place P est à la fois place d'entrée et de sortie d'une même transition T , alors elle est dite impure, sinon elle est pure. Un RdP pur est un RdP qui ne contient aucune place impure, sinon il est impur.

I.5 Quelques extensions de RdP

I.5.1 RdP généralisés

Un RdP généralisé est un RdP dans lequel des poids (nombre entier positif) sont associés aux arcs [7], voire la figure I.10.

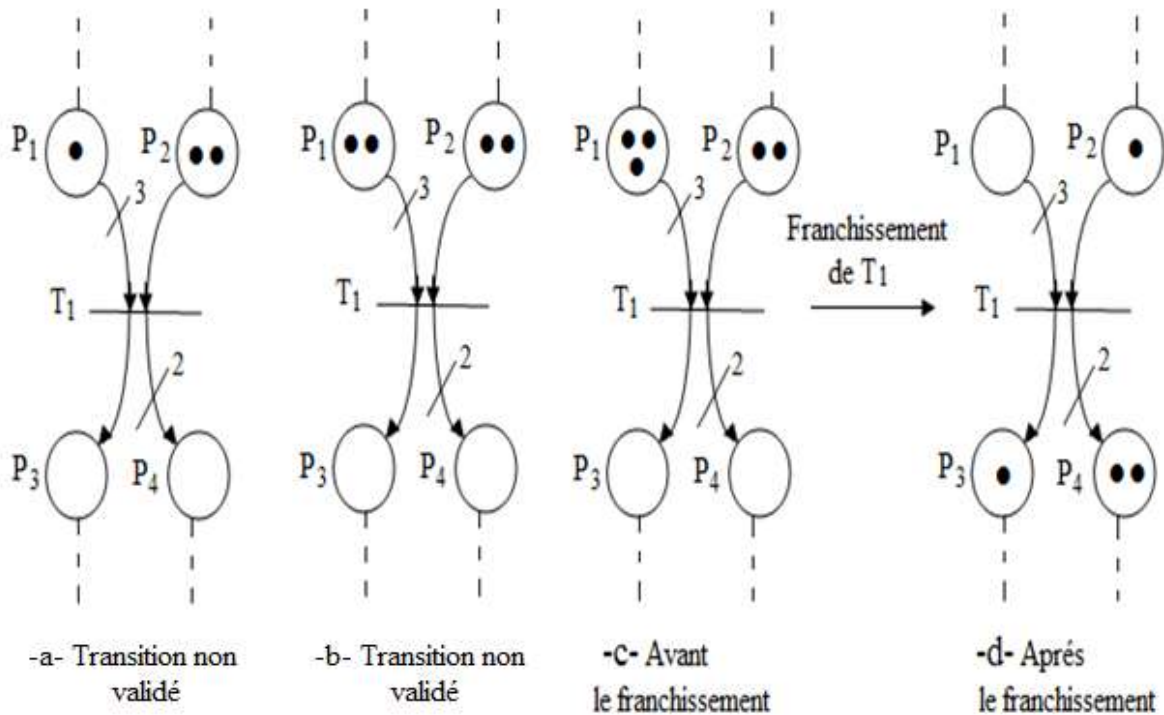


Figure I.10: Partie de réseau de pétri généralisé.

La figure I.10 représente un RdP généralisé tel que l'arc $P_1 \rightarrow T_1$ a le poids 3, et l'arc $T_1 \rightarrow P_4$ a le poids 2. Tous les autres arcs, dont le poids n'est pas explicitement spécifié, ont un poids 1.

Sur chacune des figures I.10.a et b la transition T_1 n'est pas validé car la place P_1 contient moins de 3 marques. Sur la figure I.10.c, la transition T_1 est validée puisque P_1 contient 3 marquages et P_2 contient plus d'un marquage. Le franchissement consiste à retirer trois marquages de P_1 et une marque P_2 , et à ajouter une marque à P_3 et deux marques à P_4 . Nous obtenons le marquage de la figure I.10-d-

Propriété I.1 Tout réseau de Pétri généralisé [8], peut être transformé en RdP ordinaire.

I.5.2 RdP à capacité

Un RdP à capacité est un RdP où des capacités (nombre entier positif) sont associées aux places, voir la figure I.11. Le franchissement d'une transition d'entrée d'une place P_i dont la capacité est $Cap(P_i)$ n'est possible que si le franchissement de cette transition ne conduit pas à un nombre de marques dans P_i qui dépasse cette capacité [8] (cette définition s'applique à

n'importe quel RdP ; cependant, certains auteurs utilisent une définition légèrement différente pour les RdP impur).

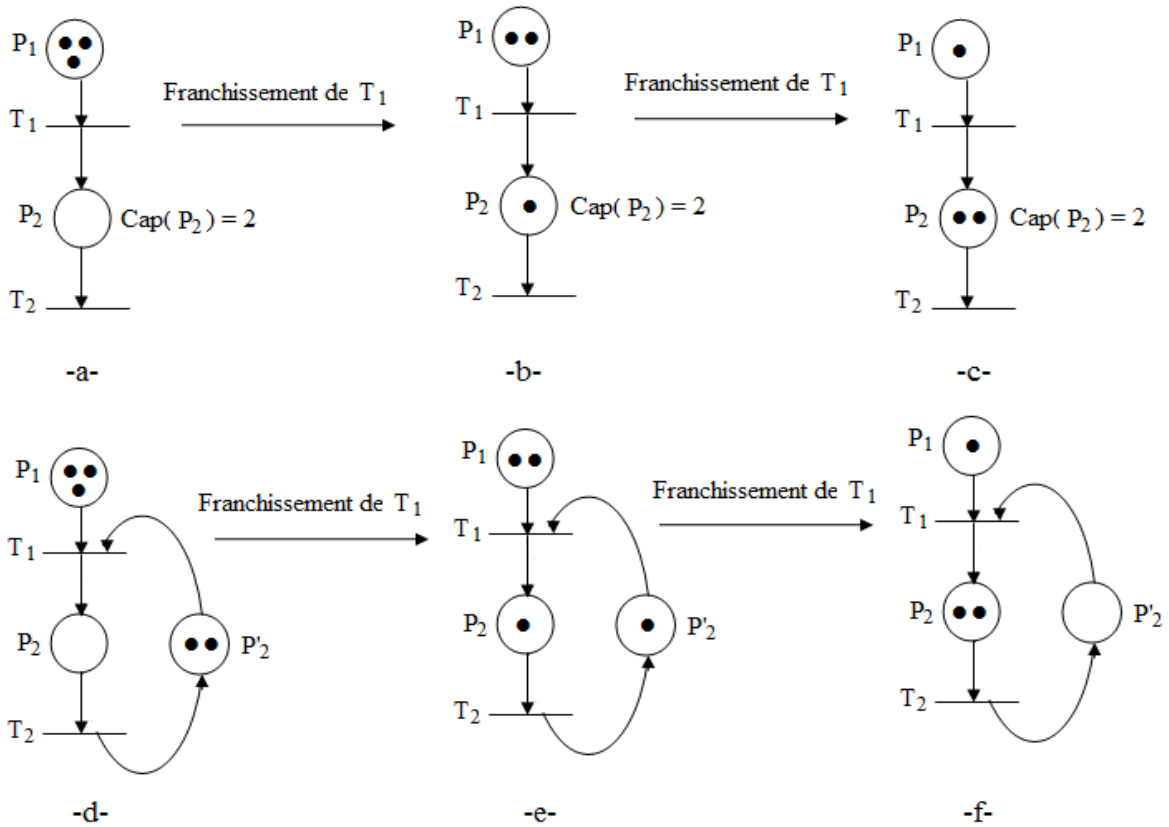


Figure I.11: Illustration d'un réseau de pétri à capacité.

La figure I.11 illustre cette notion. La figure I.11.a est un RdP dont la place P_2 a la capacité 2. La transition T_1 est validée et son franchissement conduit au marquage de la figure I.10.b. Sur cette figure, les transitions T_1 et T_2 sont validées. Le franchissement de la transition T_1 conduit à la figure I.11.c. Sur cette figure, nous pouvons plus franchir la transition T_1 , bien qu'il y ait une marque dans P_1 , parce que le marquage de P_2 a atteint sa capacité maximum.

La transformation est assez simple. Elle est illustrée sur la figure I.11.d à f. Nous ajoutons une place complémentaire à P_2 , c'est la place P'_2 , dont le marquage est également complémentaire à la capacité de P_2 . C'est-à-dire $M(P'_2) = cap(P_2) - M(P_2)$. Ainsi, lorsque $M(P_2) = cap(P_2)$, on a $M(P'_2) = 0$ et la transition T_1 n'est plus validée. Dans le cas général, à une place P_i dont la capacité $Cap(P_i)$ est finie, nous associons une place P'_i dont le marquage est complémentaire à cette capacité. Toutes les transitions d'entrée de P_i sont de transition de sortie de P'_i et réciproquement.

Propriété I.2 ToutRdP à capacité peut être transformé en un RdP ordinaire [8].

I.6. Propriétés des RdP

I.6.1 Notations et définitions

Soit le réseau de Pétri de la figure suivante :

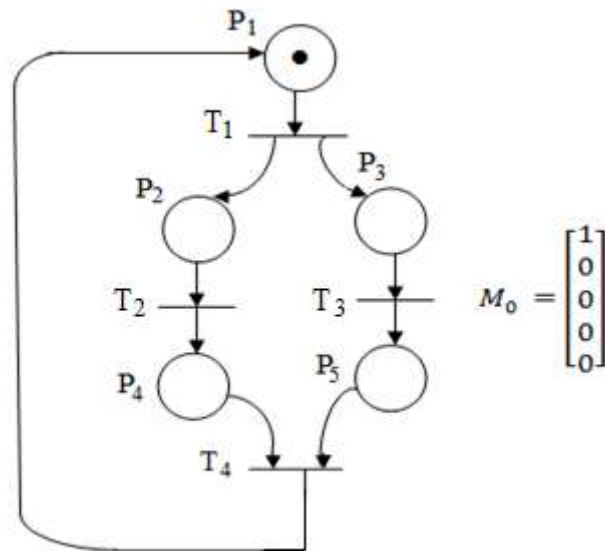


Figure I.12: Réseau de pétri avec son marquage initial.

Nous allons d'abord introduire quelques notations et notions utiles. La figure I.12 représente un RdP avec son marquage initial M_0 . Le marquage d'un RdP à un certain instant est un vecteur colonne dont la $i^{ème}$ composante est le marquage de la place P_i à cet instant (voir la figure I.12). Pour faciliter l'écriture, dans le texte nous écrivons les marques sous la forme transposée. Nous utiliserons des crochets pour représenter une matrice et des parenthèses pour représenter la forme transposée. Par exemple

$$M_0 = (1, 0, 0, 0, 0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour le marquage M_0 , il y a une transition validée qui est T_1 . Le franchissement de la transition T_1 à partir de M_0 conduit au marquage $M_1 = (0, 1, 1, 0, 0)$. On notera ceci :

$$M_0[T_1 > M_1.$$

Pour le marquage M_1 , il y a deux transitions validées, T_2 et T_3 . Si l'on appelle M_2 et M_3 les marquages atteints par franchissements de ces transitions, respectivement (voir la figure I.12), on aura donc :

$$M_1[T_2 > M_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

$$M_1[T_3 > M_3 = (0, 1, 0, 0, 1)$$

Pour le marquage M_2 , seule la transition T_3 est validée. Son franchissement conduit à M_4 .

$$M_2[T_3 > M_4 = (0, 0, 0, 1, 1)$$

Pour le marquage M_3 , seule la transition T_2 est validée. Son franchissement conduit aussi à M_4 . Pour le marquage M_4 , seule la transition T_4 est validée. Son franchissement ramène au marquage initial M_0 . On a vu toutes les évolutions possibles à partir du marquage initial.

On notera M_0^* l'ensemble des marquages accessibles à partir du marquage M_0 . Pour notre exemple, $M_0^* = \{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\}$. Ces marquages accessibles sont illustrés sur la figure I.13.

A partir de marquage M_0 , on peut franchir successivement T_1 puis T_2 . Après ces franchissements le marquage est M_2 . On pourra noter cela :

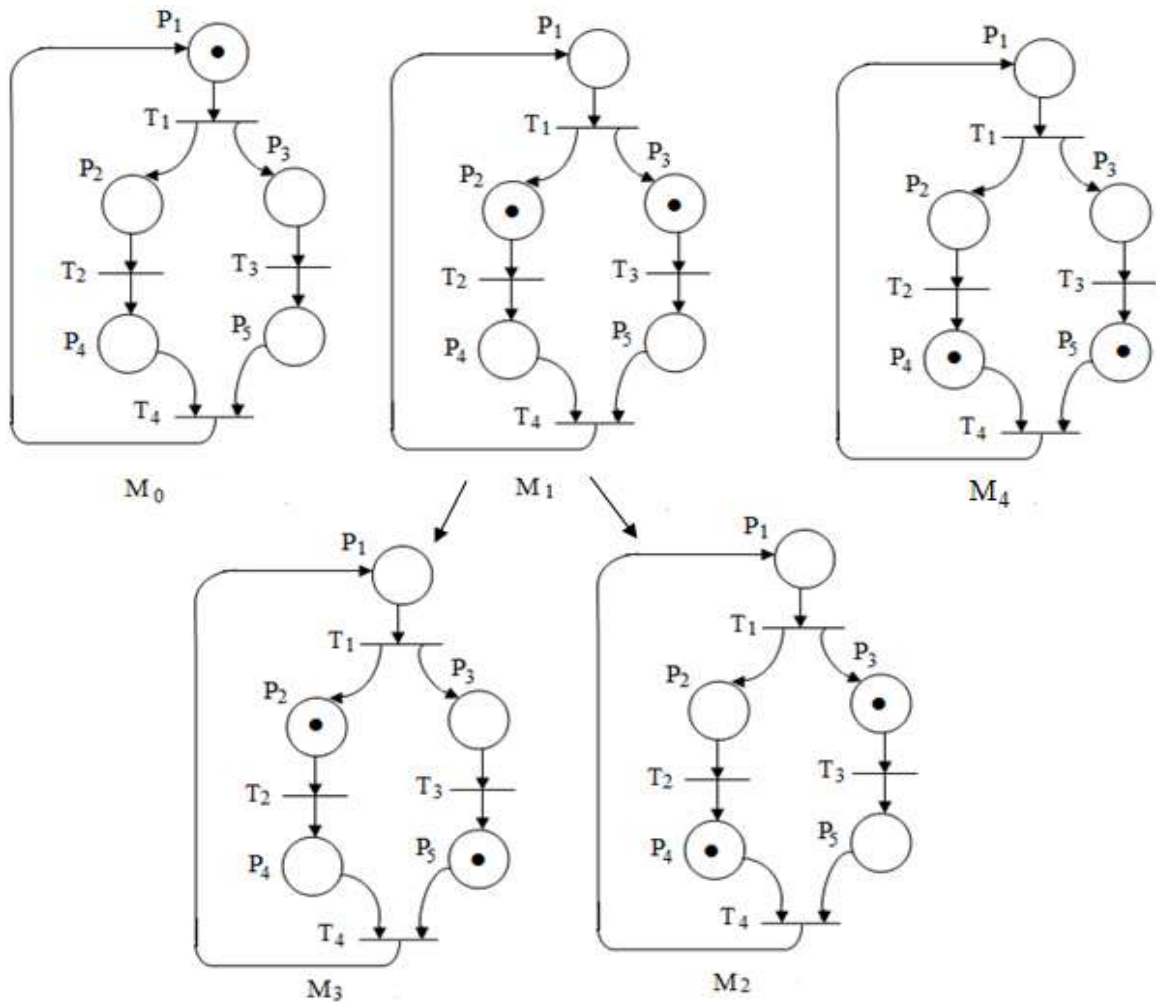


Figure I.13: Marquages accessibles d'un réseau de Pétri.

On appelle T_1T_2 une séquence de franchissements. On peut écrire :

$$S = T_1T_2$$

$$M_0[S > M_2$$

Une séquence de franchissements est définie à partir d'un marquage donné. C'est une suite de transitions qui sont franchissables successivement (sans autres franchissements de transitions). Par exemple, la séquence T_1T_4 n'est pas une séquence de franchissements à partir du marquage M_0 . En effet, après franchissement de T_1 , la transition T_4 n'est pas validée, et elle ne peut donc pas être la première transition franchie après T_1 .

I.6.2 Borgnitude

Cette propriété définit et caractérise la possibilité pour une place d'accumuler une quantité bornée ou non de jetons au cours de l'évolution d'un réseau. L'absence d'une borne limite pour le nombre de jetons dans une place est généralement une source de problème. Un RdP borné a toujours un nombre fini de marquages.

Définition I.2 Une place P_i est dite bornée pour un marquage initial M_0 s'il existe un entier naturel k tel que pour tout marquage accessible à partir de M_0 , le nombre de marques dans P_i est inférieur ou égal à k (on dit que P_i est k -bornée)[8], voire la figure I.14.

Un RdP est bornée pour un marquage initial M_0 si toutes les places sont bornées pour M_0 [8] (le réseau est k bornée si toutes les places sont k -bornées).

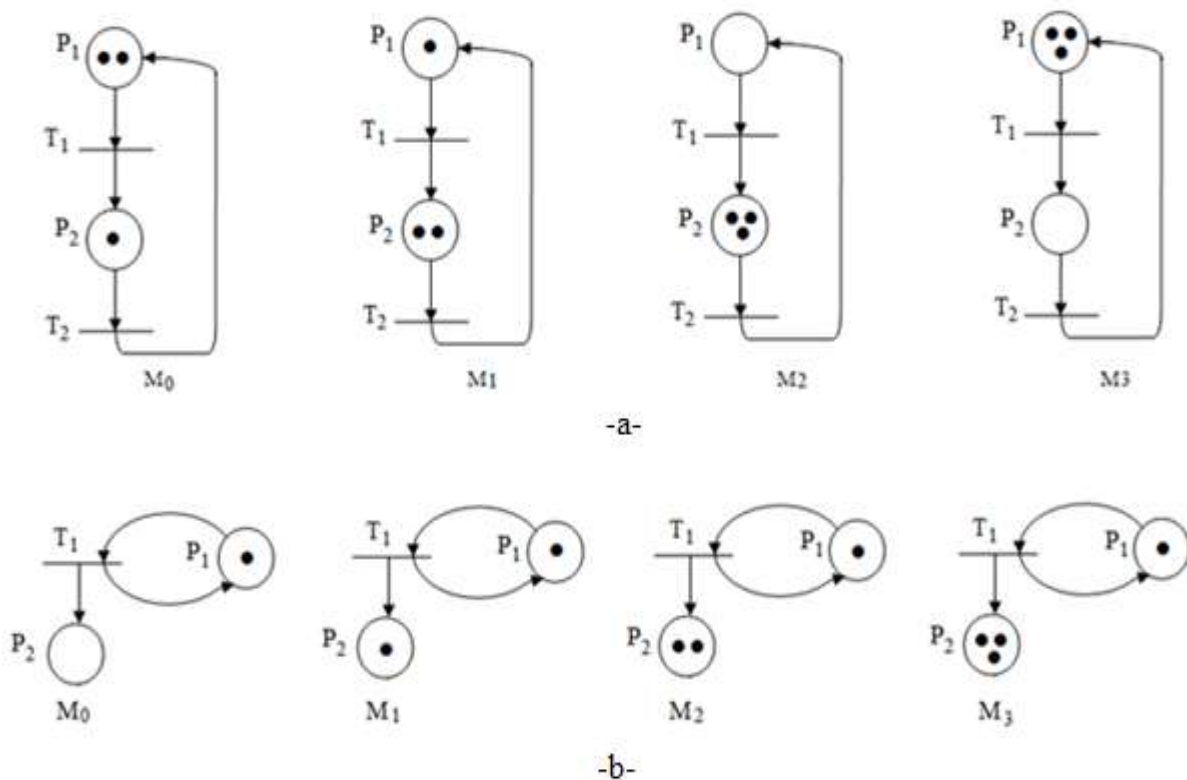


Figure I.14 : RdP -a- borné -b- non borné.

La figure I.14 représente un RdP borné. Nous avons $M_0 [T_1 T_2 > M_0$ etc. L'ensemble des marquages accessibles est $M_0^* = \{M_0, M_1, M_2, M_3\}$, et nous observons que les marquages de P_1 et P_2 sont bornés. Donc le RdP est borné. Il est 3-borné.

La figure I.14.b représente un RdP non borné à partir de M_0 . En effet, $M_0 [T_1 > M_1, M_1 [T_1 > M_2, M_2 [T_1 > M_3$ etc. A chaque franchissement de la transition T_1 , nous ajoutons une marque

dans la place P_2 . Les marquages accessibles sont en nombre infini, $M_0^* = \{M_0, M_1, M_2, M_3 \dots\}$ et la place P_2 n'est pas bornée.

Définition I.3 Un RdP est dit sauf (ou binaire) pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible, chaque place contient au plus une marque [8] voire la figure I.15.

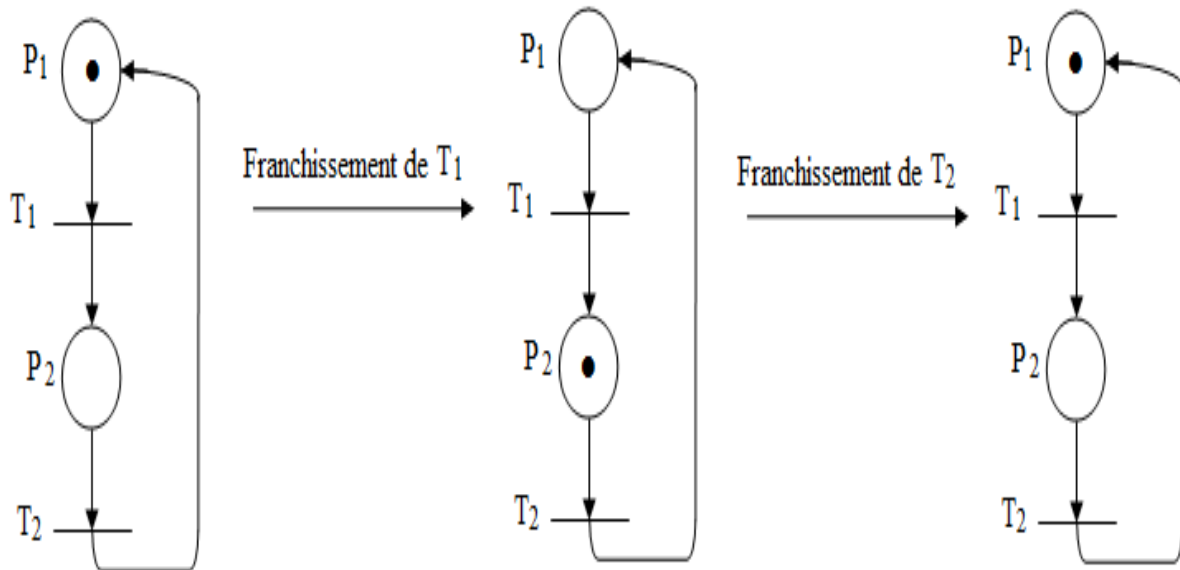


Figure I.15 : RdP sauf.

I.6.3 Vivacité

Le marquage d'un RdP évolue par franchissement de transitions. Lorsqu'au cours de l'évolution du RdP, certaines transitions ne sont jamais franchies, cela signifie que les événements associés à ces transitions ne se produisent pas et que le marquage d'une partie du RdP n'évolue pas. Nous déduisons alors que le sous-système modélisé par cette partie ne fonctionne pas. La propriété de vivacité porte sur les transitions et permet d'examiner si une partie ou l'ensemble du réseau peut ou non évoluer.

Définition I.4 Une transition T_j est vivante pour un marquage initial M_0 si pour tous marquage accessible $M_i \in M_0^*$, il existe une séquence de franchissement S qui contient T_j à partir de M_i [7] (\forall l'évolution, il y a toujours une possibilité de franchir T_j).

Définition I.5 Un RdP est vivant pour un marquage initial M_0 si toutes ses transitions sont vivantes pour M_0 [7], on a montré ça dans la figure I.16. Quelle que soit l'évolution aucune transition ne deviendra définitivement infranchissable.

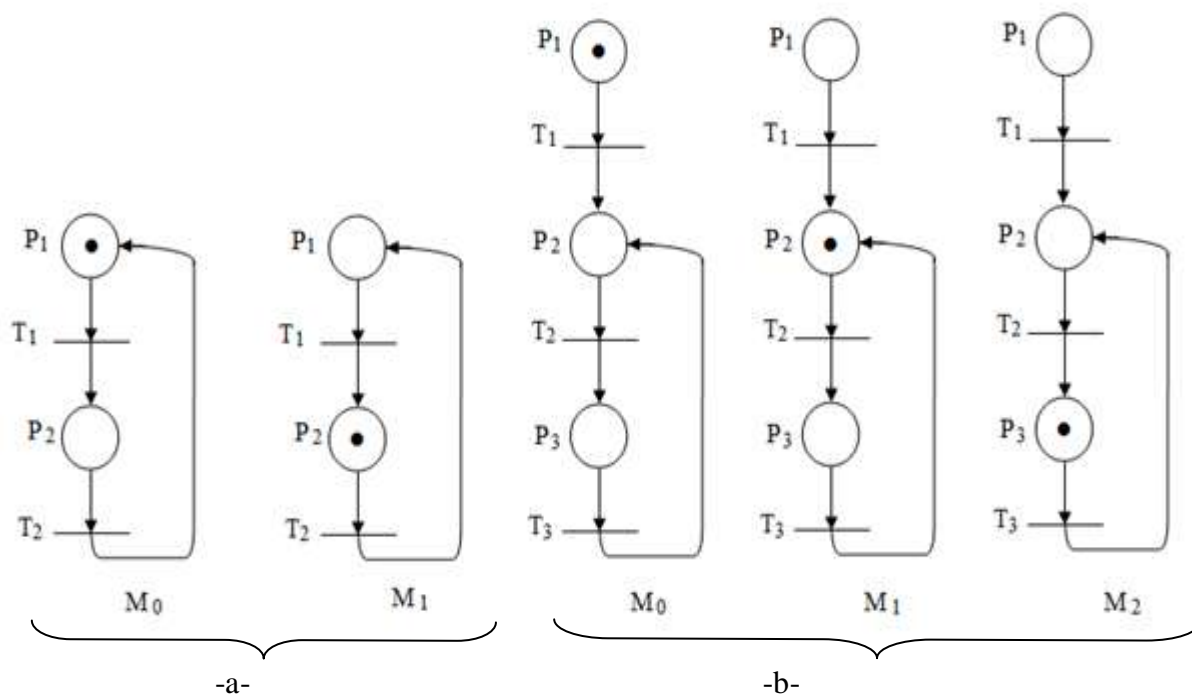


Figure I.16 : Illustration de la vivacité.

La figure I.16.a représenté un RdP qui comporte 2 marquages accessibles. Pour chacun des marquages, il existe une séquence de franchissement qui contient T_1 . En effet $M_0 [T_1 > M_1$ et $M_1 [T_1 T_2 > M_1$. La transition T_1 est donc vivante.

Le RdP de la figure I.16.b a 3 marquages accessibles à partir de M_0 : $M_0^* = \{M_0, M_1, M_2\}$. On peut observer qu'il n'existe pas de séquence de franchissements qui contient T_1 à partir de M_1 (ni à partir de M_2). C'est-à-dire que si l'on atteint le marquage M_1 , la transition T_1 ne sera plus jamais validée. Cette transition n'est pas vivante.

Définition I.6 On dit qu'un réseau de Pétri est conforme [1], s'il est sauf et vivant.

I.6.4 Quasi-vivacité

Définition I.7

- Une transition T_j est quasi-vivante pour un marquage initial M_0 [8], s'il existe une séquence de franchissement qui contient T_j à partir de M_0 .
- Un réseau de Pétri est quasi- vivant si toutes ses transitions sont quasi-vivante. Autrement dit [8], une transition est quasi-vivante s'il existe une chance que cette transition soit franchie.

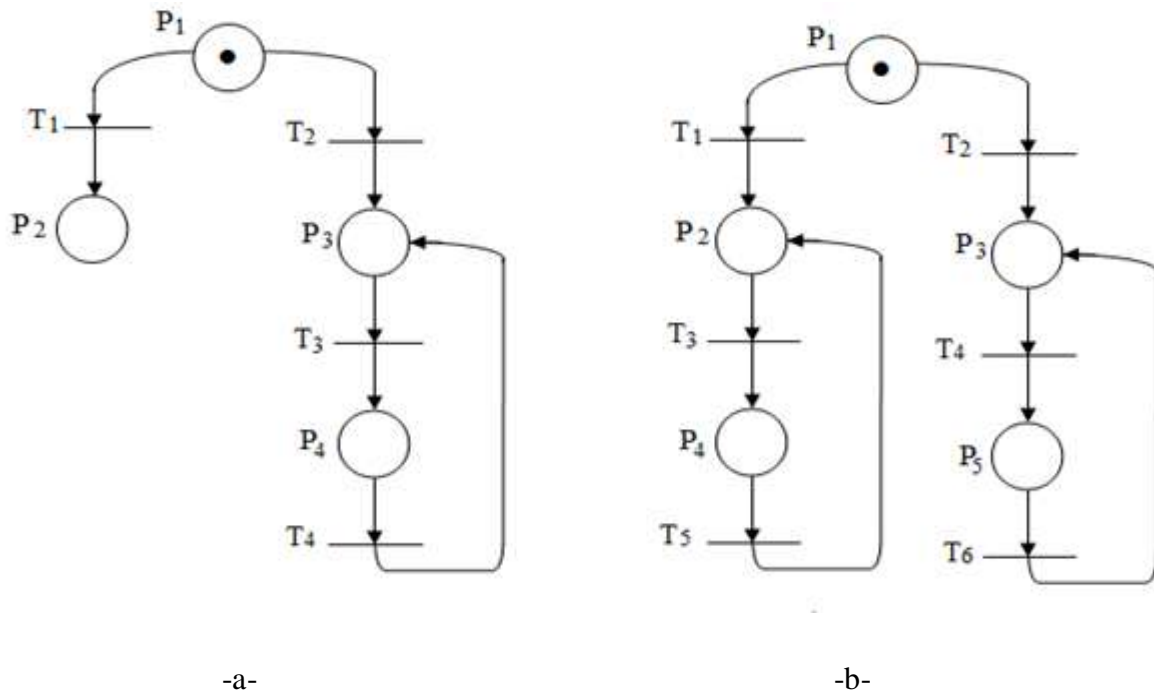


Figure I.17 : Un RdP quasi-vivant –a- avec blocage –b- sans blocage.

Autrement dit, une transition est quasi-vivante s'il existe une chance que cette transition soit franchie. C'est le cas de la transition T_1 de la figure I.17.b. Sur cet exemple, la transition T_1 sera franchie une fois avant de devenir définitivement non franchissable. Mais ce n'est pas toujours le cas. La figure I.17.a représente un RdP quasi-vivant. En effet, pour chaque transition, il existe une séquence de franchissement qui la contient, à partir du marquage initial. $M_0[T_1] > (0, 1, 0, 0)$ et $M_0[T_2T_3T_4] > (0, 0, 1, 0)$. Cependant, il y a un conflit $\langle P_1, \{T_1, T_2\} \rangle$. Si la première transition franchie est T_1 , alors les autres transitions ne seront plus jamais validées, et si la première transition franchie est T_2 , alors T_1 ne sera plus jamais validée.

I.6.5 Blocage

Définition I.8

Un blocage (ou un état puits) est un marquage [8] tel qu'aucune transition n'est validée. Sur figure I.17.a, le franchissement de la transition T_1 conduit au marquage $M_1 = (0, 1, 0, 0)$. C'est un blocage. Aucune évolution du marquage n'est désormais plus possible.

Définition I.9

Un RdP est dit sans blocage pour un marquage initial M_0 [8], si aucun marquage accessible $M_i \in M_0^*$ n'est un blocage.

La figure I.17.b est un RdP sans blocage (certains auteurs disent pseudo-vivant). Si le premier franchissement est celui de T_1 , alors on atteint le marquage $M_0 = (0, 1, 0, 0, 0)$ et les transitions T_3 et T_5 sont vivantes à partir de ce marquage. Si le premier franchissement est celui de T_2 , on a un comportement symétrique. Autrement dit, un RdP sans blocage est tel qu'il y aura toujours une partie "qui fonctionne".

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les concepts de base des réseaux de Pétri. Par la suite, nous avons montré comment fonctionne un RdP en expliquant les différentes règles de franchissement des transitions et les principes de circulation des jetons dans le modèle.

Le chapitre suivant sera consacré à la modélisation des graphes d'évènements P- temporels par le modèle implicite dans l'algèbre standard.

II.1 Introduction

Les réseaux de Pétri (RdP) sont des modèles de représentation souvent utilisés dans le domaine des SED, car ils permettent de modéliser, d'évaluer, d'analyser et de piloter des systèmes dynamiques.

Afin de prendre en compte les aspects P-temporels de ces derniers, plusieurs extensions du modèle des réseaux de Pétri ont été proposées. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons notamment au cas des systèmes P- temporels. Les réseaux que nous étudions sont constitués d'une partie statique, donnée par la topologie du réseau, et d'une partie dynamique, donnée par les règles de tir des transitions.

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer le modèle implicite dans l'algèbre standard qui reflète le comportement dynamique des graphes considérés, à savoir, les graphes d'évènements P-temporels.

II.2 Les graphes d'évènements temporels

Les graphes d'évènements temporels sont une sous-classe des réseaux de Pétri temporels, introduits dans cette [4]. Pour les GE temporels, l'extension temporelle s'exprime sous la forme d'un intervalle associé principalement aux transitions (t-temporel), ou aux places (P-temporel). En ce qui concerne l'expressivité des graphes d'évènements P-temporels et t-temporels, Khansa a montré [6] que ces deux modèles sont distincts et dans notre cas nous intéressons sur les graphes d'évènements P-temporels.

II.3 Les graphes d'évènements P-temporels

Les graphes d'évènements P-temporels sont une classe des réseaux de Pétri temporels introduite par Khansa[6] pour modéliser des systèmes à événements discrets dont la contrainte de temps associée aux places appartient à un intervalle de temps bien déterminé.

Définition II.1 Un graphe d'évènements P-temporel est représenté [6] par le doublet (\mathcal{R}, IS)

• \mathcal{R} : est un graphe d'évènements marqué.

• $IS: P \rightarrow (\mathbb{R}^+) \times (\mathbb{R}^+ \cup [0, +\infty])$,

$IS_i = [a_i, b_i]$

Avec,

$$0 \leq a_i \leq b_i$$

IS_i est l'intervalle du temps de séjour d'une marque dans une place P_i ,

Le jeton qui arrive dans une place P_i ne peut participer au franchissement de ses transitions de sortie qu'après avoir séjourné un temps a_i qui correspond à la borne minimale de l'intervalle de temps. Le jeton reste disponible durant $b_i - a_i$ unité de temps. Après un séjour b_i correspond à la borne maximale de l'intervalle de temps, le jeton doit quitter la place P_i .

Si non, le jeton se retrouve dans un état de mort, ce qui peut entraîner le blocage du réseau.

II.3.1 Fonctionnement

Le franchissement d'une transition dans un graphe d'évènements P-temporel suit les règles suivantes :

- Toutes les places d'entrées de la transition à franchir doivent contenir au moins un jeton disponible ayant séjourné au minimum a_i unités de temps.
- Le jeton dans la place d'entrée de la transition ne doit pas avoir séjourné plus de b_i unités de temps.

Dans le fonctionnement au plus tôt d'un graphe d'évènements P-temporel, une transition est franchie dès que les jetons dans les places en amont sont disponibles.

II.4 Modélisation des graphes d'évènements P-temporels

Pour modéliser le comportement dynamique d'un graphe d'évènements P-temporel [3] [5], différents modèles existent mais nous nous intéressons sur le modèle implicite dans algèbre standard.

II.4.1 Modèle des graphes d'évènements P-temporels dans l'algèbre standard

La forme générale d'une représentation de l'inégalité d'un graphe d'évènements P-temporel dans l'algèbre standard [3] est la suivante :

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta(k-M) \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta(k-1) \\ \theta(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}. \quad (II.1)$$

Où :

- $\theta_j(k)$ est la date de $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition T_j .
- M est la plus grande composante du vecteur de marquage initial M_0 .
- a est le vecteur des bornes minimales, b est le vecteur des bornes maximales.
- $G^- = G_M^- G_{M-1}^- \dots G_1^- G_0^-$ contient les poids des arcs entrants.
- $G^+ = G_M^+ G_{M-1}^+ \dots G_1^+ G_0^+$ sortants relativement à chaque place P_i .

Cette représentation est illustrée sur l'exemple de la Figure II.1 :

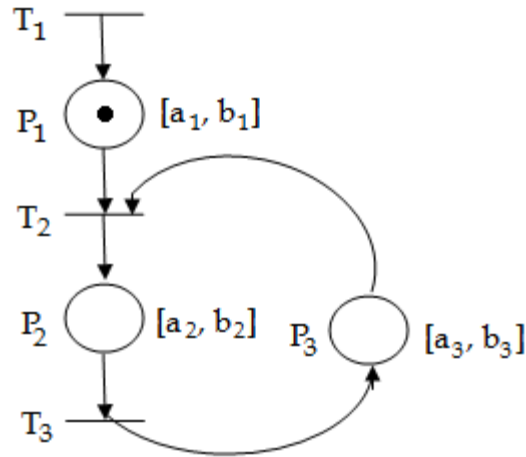


Figure II.1: Un graphe d'événements P-temporel.

Sous l'hypothèse d'un fonctionnement admissible, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta_2(k) - \theta_1(k-1) \geq a_1, \\ \theta_2(k) - \theta_1(k-1) \leq b_1, \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) \geq a_2, \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) \leq b_2, \\ \theta_2(k) - \theta_3(k) \geq a_3, \\ \theta_2(k) - \theta_3(k) \leq b_3, \end{cases}$$

Ces équations sont équivalentes au système d'inégalités suivant :

$$\begin{cases} \theta_1(k-1) - \theta_2(k) \leq -a_1, \\ \theta_2(k) - \theta_3(k) \leq -a_2, \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) \leq -a_3, \\ \theta_2(k) - \theta_1(k-1) \leq b_1, \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) \leq b_2, \\ \theta_2(k) - \theta_3(k) \leq b_3, \end{cases}$$

Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1(k-1) \\ \theta_2(k-1) \\ \theta_3(k-1) \\ \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \\ \theta_3(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Avec,

$$G_1^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_0^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, G_1^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_0^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

II.4.2 Modèle implicite des graphes d'évènements P-temporels dans l'algèbre standard

Le comportement dynamique des graphes d'évènements P-temporels peut être décrit sous forme d'une représentation implicite dans l'algèbre standard tel qu'il est proposé par Kara [5] dans le théorème suivant :

Théorème Le comportement dynamique des graphes d'évènements P-temporels correspond au vecteur $\theta(k)$ [5] qui satisfait l'équation suivante :

$$E \cdot \theta(k) = \sum_{\tau=1}^{\tau=l} A_{\tau} \cdot \theta(k - \tau) + q(k), \quad (II.2)$$

$$a \leq q(k) \leq b,$$

avec : $E \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $A_{\tau} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$,

$q \in \mathbb{R}_+^m$, $l = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} M_0$ et $\theta_j(k) = \theta_j(0) \forall k \geq 0$,

$\theta_j(k)$ est la date de $K^{ième}$ franchissement de la transition T_j ,

M_{0i} est le vecteur de marquage initial de la place P_i

$q_i(k)$ est le temps de séjour d'une marque dans la place P_i pour le $K^{ième}$ franchissement.

Démonstration

Nous considérons une partie d'un graphe d'évènements P-temporel [5] donnée par la Figure II.2.

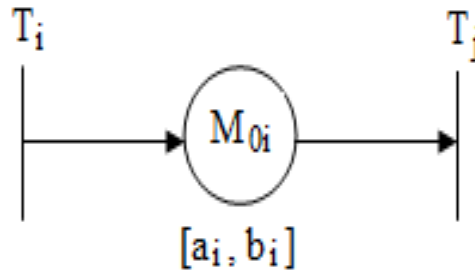


Figure II.2: Une partie d'un graphe d'évènements P-temporel.

Soit $\theta_j(k)$ la date de $k^{ième}$ franchissement de la transition T_j . L'activation de la transition T_j dépend du nombre de jetons initialement présents dans la place P_i . Le franchissement numéro K de la transition T_j est engendré par le numéro $K - M_{0i}$ de la transition T_i qui dépend aussi de l'intervalle du temps de séjour de la place P_i . Selon le fonctionnement au plus tôt, la transition doit être franchie dès qu'elle est franchissable, les inégalités suivantes seront obtenues :

$$\begin{cases} \theta_j(k) \geq \theta_i(K - M_{0i}) + a_i, \\ \theta_j(k) \leq \theta_i(K - M_{0i}) + b_i, \end{cases} \quad (II.3)$$

avec a_i et b_i sont les bornes minimales et maximales respectivement de l'intervalle de temps de séjour des marques dans la place P_i . Les équations données par l'équation (II.3), peuvent être réécrites comme suit :

$$\theta_j(k) = \theta_i(K - M_{0i}) + q_i, \quad (II.4)$$

avec q_i est le temps de séjour d'une marque dans la place P_i ,

$$a_i \leq q_i \leq b_i,$$

Pour obtenir une représentation d'état implicite, nous mettons dans chaque place au maximum une seule marque. Pour ce faire les places comportant plus d'une marque doivent être décomposées aux places ayant une seule marque. Chaque place contenant M_0 jeton, la Décomposition se fera M_0 fois pour avoir M_0 places dans le modèle équivalent du graphe d'évènement. Cette transformation est illustrée sur la Figure II.3.

Le franchissement des transitions d'un graphe d'évènements P-temporel dépend de l'intervalle du temps associé aux places, pour que le modèle équivalent préserve les performances du système original, des intervalles de temps nuls sont associés aux places supplémentaires du graphe considéré.

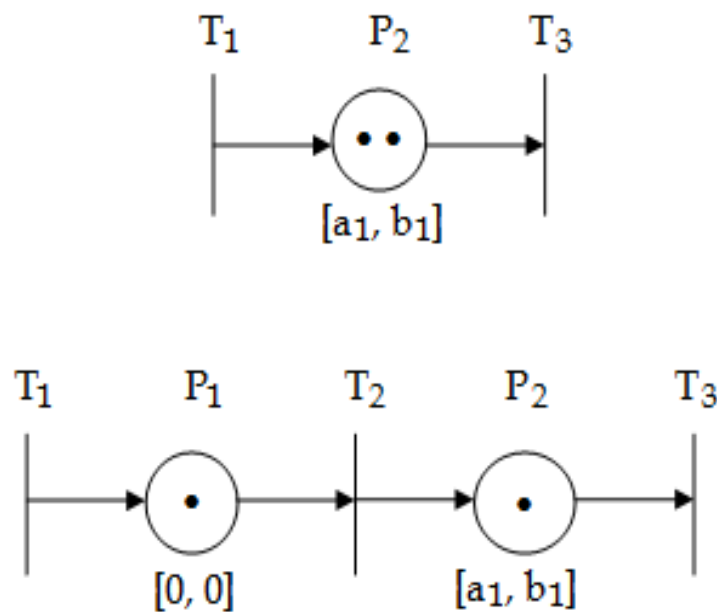


Figure II.3: Décomposition d'une place d'un graphe d'évènements P-temporel.

Nous considérons le graphe d'événements P-temporel donné par la Figure II.4.

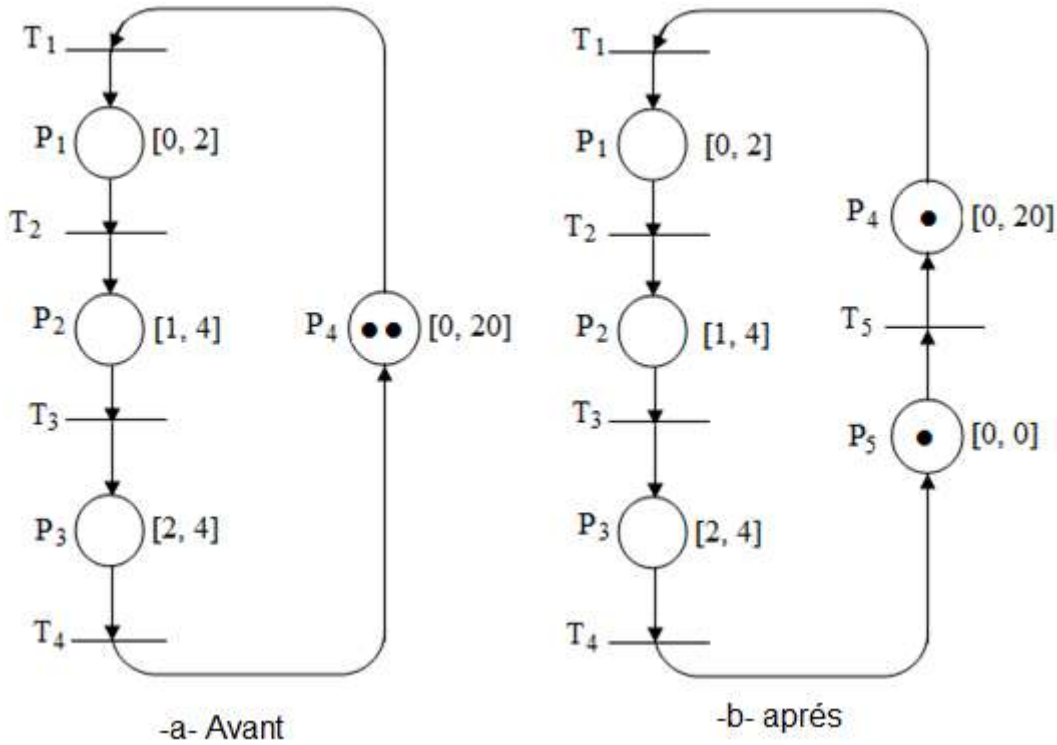


Figure II.4: Un graphe d'événements P-temporel avec décomposition d'une Place.

La mise en équations dans l'algèbre standard est faite sur le modèle équivalent donné par la Figure II.4 dont les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} \theta_2(k) - \theta_1(k) = q_1(k), \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) = q_2(k), \\ \theta_4(k) - \theta_3(k) = q_3(k), \\ \theta_1(k) - \theta_5(k-1) = q_4(k), \\ \theta_5(k) - \theta_4(k-1) = q_5(k), \end{cases} \text{ soumi à } \begin{cases} 0 \leq q_1(k) \leq 2, \\ 1 \leq q_2(k) \leq 4, \\ 2 \leq q_3(k) \leq 4, \\ 0 \leq q_4(k) \leq 20, \\ 0 \leq q_5(k) \leq 0, \end{cases}$$

Le modèle implicite est obtenu comme suit :

$$E \cdot \theta(k) = A \cdot \theta(k-1) + q(k),$$

Avec,

$$a \leq q(k) \leq b,$$

Avec,

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II.5 Application au four électrique

Dans cette partie, nous présentons une application relative à un processus de panification. Pour avoir plus de détails sur le fonctionnement de ce processus [3], le lecteur pourra consulter les documents.

II.5.1 Modélisation du four électrique

Le procédé de fabrication de four est modélisé par un graphe d'évènements P-temporel donné par la Figure II.5

a. Processus

Nous considérons une boulangerie semi-industrielle qui fabrique deux types de pains, Pain 1 (qualité supérieure) et Pain 2 (qualité ordinaire). Le procédé de fabrication est représenté par le graphe d'évènements P-temporel de la Figure II.5. Les deux types de pains doivent suivre la même séquence de fabrication sur les quatre machines disponibles : le pétrin (N_1), la diviseuse (N_2), la façonneuse (N_3) et le four (N_4).

$$\text{Pains 1 et 2 : } N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow N_4.$$

Les durées différentes entre les deux gammes, ainsi qu'une opération de pointage supplémentaire (place P_{13}) pour la gamme 2, sont à l'origine d'une qualité différente. Les opérations sont les suivantes :

Pétrissage. Le pétrissage commence par un mélange de tous les ingrédients dans un pétrin, cette opération durant de 15 à 27 minutes. Cette étape est représentée par les places P_5 et P_{12} .

Pointage. C'est la première fermentation. La pâte est laissée au repos de 10 à 30 minutes pour permettre à la levure, ou le levain, d'assurer une fermentation suffisante. Cette étape ne concerne que le Pain 2 et elle est représentée par P_{13} dans le graphe.

Division. Il s'agit de découper la pâte, en pâtons plus petits avec la diviseuse. Dans le graphe, cela est représenté par P_6 pour le Pain1 et P_{14} pour le Pain2. Deux diviseuses sont disponibles, cette opération durant de 10 à 15 minutes.

Détente. Les pâtons sont laissés au repos une nouvelle fois. Cette étape dure 180 minutes pour le Pain 1 (P_7) et de 15 à 20 minutes pour le Pain 2 (P_{15}).

Façonnage. Chaque pâton est retravaillé pour lui donner la forme voulue. On utilise pour cela une façonneuse. Dans le graphe, cela est représenté par P_8 pour le Pain 1 et P_{16} pour le Pain 2. Deux façonneuses sont disponibles. Cette opération durant de 15 à 20 minutes.

Apprêt. Les pâtons sont disposés sur une toile de lin pour la deuxième fermentation. L'apprêt (repos) dépend du type de Pain, cette étape dure de 180 à 240 minutes pour le Pain 1 (P_9) et de 120 à 150 minutes pour le Pain 2 (P_{17}).

Cuisson. Les pains sont enfournés à 250–280°C dans le four (supposé suffisamment grand). La cuisson dure de 20 à 25 minutes et est identique pour les deux gammes. Cette opération est représentée par P_{10} pour le Pain 1 et P_{18} pour le Pain 2.

Sortie des chariots. Elle est représentée par P_{19} et P_{18} .

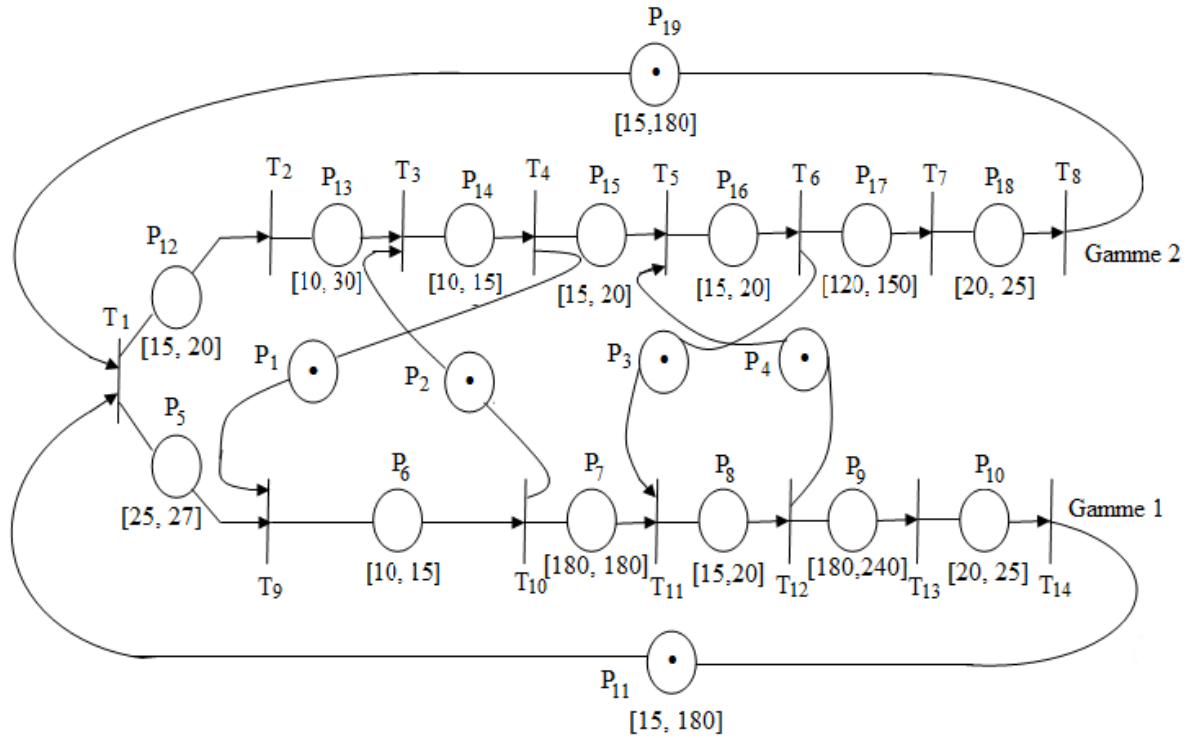


Figure II.5 : Un four électrique.

II.5.2 Interprétation du graphe

La modélisation du système de four est faite de la manière suivante :

- $T_1, P_5, T_9, P_6, T_{10}, P_7, T_{11}, P_8, T_{12}, P_9, T_{13}, P_{10}$ et T_{14} : se sont les éléments de la gamme 1.
- $T_1, P_{11}, T_2, P_{12}, T_3, P_{13}, T_4, P_{14}, T_5, P_{15}, T_6, P_{16}$ et T_7, P_{17} et T_8 : se sont les éléments de gamme 2.
- T_1 : représente le démarrage du fonctionnement des deux gamme.
- P_5 (respectivement P_{12}) : représente l'étape de pétrissage.
- T_2 : représente l'arrivée de la pâte à l'opération de pointage.
- P_{13} : représente l'étape de pointage.
- T_3 (respectivement T_9) : représente l'arrivée de la pâte à l'opération de division.
- P_6 (respectivement P_{14}) : représente l'étape de division.
- T_4 (respectivement T_{10}) : représente l'arrivée de la pâte à l'opération de détente.
- P_7 (respectivement P_{15}) : représente l'étape de détente
- T_5 (respectivement T_{11}) : représente l'arrivée de la pâte à l'opération de façonnage.
- P_8 (respectivement P_{16}) : représente l'étape de façonnage

- T_6 (respectivement T_{12}) : représente l'arrivée de la pâte à l'opération d'apprêt (repos ou bien pousse).
- P_9 (respectivement P_{17}) : représente l'étape d'apprêt.
- T_7 (respectivement T_{13}) : représente l'arrivée de la pâte à l'opération de cuisson.
- P_{10} (respectivement P_{18}) : représente l'étape de cuisson.
- T_8 (respectivement T_{14}) : représente la libération (sortie) du pain des deux gammes.
- P_{19} (respectivement P_{11}) : représente l'étape des sorties du pain dans les chariots.
- P_1 et P_2 : représente la disponibilité de division.
- P_3 et P_4 : représente la disponibilité de façonnage.
- Les jetons dans les places signifient soit un ordre de démarrage en attente d'exécution, ou la disponibilité de division ou de façonnage.
- les intervalles de temps signifient la durée minimale et maximale de l'opération.

Initialement les ingrédients et les chariots sont disponibles comme il est indiqué par les deux jetons dans les deux places P_{11} et P_{19} , les jetons disponibles dans P_1 , P_2 , P_3 et P_4 signifient la disponibilités des machines (diviseuse et façonneuse). T_1 est une transition validée, donc les deux jetons placés dans P_{11} et P_{19} seront déplacées vers P_{12} et P_5 , ces jetons sont associés à l'ordre de départ, donc le système de fabrication débute avec l'opération de pétrissage en mélangeant tous les ingrédients de 15 à 27 minutes. Une fois le temps s'est écoulé, les transitions T_2 et T_9 sont franchissables, donc les deux jetons qui ont été placés dans P_{12} et P_5 seront placés dans les deux places P_{13} et P_6 , ce qui représente l'étape de pointage pour la deuxième gamme du pain, d'où la pâte est laissée au repos de 10 à 30 minutes et l'étape de division ou la pâte du pain de la première gamme se découpe sur l'une des diviseuse, par la suite nous franchissons la transition T_3 après avoir pointer le pain de la deuxième gamme cela sera représenté par un jeton dans la place P_{14} . Une fois les pâtons sont prêts, nous déplaçons les jetons vers P_1 et P_2 pour indiquer que les diviseuses sont de nouveaux disponibles et libérées, et vers aussi P_{15} et P_7 pour effectuer l'opération de détente pour les deux gammes de pains, dont la première gamme est laissée se repose durant 180 minutes, la seconde gamme est laissée se reposer de 15 à 20 minutes seulement. Une fois la durée de chaque gamme est terminée, nous déplaçons les jetons vers P_{16} et P_8 en franchissant T_5 et T_{11} afin d'effectuer le façonnage des pâtons a l'aide des deux machines (façonneuses). Une fois cet opération est terminée, nous franchissons les deux transitions T_6 et T_{12} , donc nous déplaçons les jetons de P_{16} et P_8 vers P_{17} et P_9 dans le but de faire l'apprêt, c'est-à-dire la fermentation pour les deux

types de pains en respectant la durée de chaque. Par la suite, une fois l'intervalle de temps est terminé, nous franchissons les deux transitions T_7 et T_{13} en déplaçant les derniers jetons utilisés vers P_{18} et P_{10} pour effectuer l'opération de cuisson où les deux types de pains seront dans le four dans une température qui varie de 250° à 280° durant 20 à 25 minutes pour les deux types. Enfin ces derniers seront libérés dans des chariots en franchissant $T_8 T_{14}$ donc en déplaçant les jetons de P_{18} et P_{10} vers P_{19} et P_{11} , la fabrication est terminée, les des modèles de pains sont prêts.

En modélisant le graphe d'évènements par le modèle implicite donné dans l'algèbre standard, nous obtenons les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_9(k) = \theta_4(k-1) + q_1 \\ \theta_3(k) = \theta_{10}(k-1) + q_2 \\ \theta_{11}(k) = \theta_6(k-1) + q_3 \\ \theta_5(k) = \theta_{12}(k-1) + q_4 \\ \theta_9(k) - \theta_1(k) = q_5 \\ \theta_{10} - \theta_9(k) = q_6 \\ \theta_{11}(k) - \theta_{10}(k) = q_7 \\ \theta_{12}(k) - \theta_{11}(k) = q_8 \\ \theta_{13}(k) - \theta_{12}(k) = q_9 \\ \theta_{14}(k) - \theta_{13}(k) = q_{10} \\ \theta_1(k) = \theta_{14}(k-1) + q_{11} \\ \theta_2(k) - \theta_1(k) = q_{12} \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) = q_{13} \\ \theta_4(k) - \theta_3(k) = q_{14} \\ \theta_5(k) - \theta_4(k) = q_{15} \\ \theta_6(k) - \theta_5(k) = q_{16} \\ \theta_7(k) - \theta_6(k) = q_{17} \\ \theta_8(k) - \theta_7(k) = q_{18} \\ \theta_1(k) = \theta_8(k-1) + q_{19} \end{array} \right. \text{ soumis à } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq q_1(k) \leq \infty \\ 0 \leq q_2(k) \leq \infty \\ 0 \leq q_3(k) \leq \infty \\ 0 \leq q_4(k) \leq \infty \\ 25 \leq q_5(k) \leq 27 \\ 10 \leq q_6(k) \leq 15 \\ 180 \leq q_7(k) \leq 180 \\ 15 \leq q_8(k) \leq 20 \\ 180 \leq q_9(k) \leq 240 \\ 20 \leq q_{10}(k) \leq 25 \\ 15 \leq q_{11}(k) \leq 180 \\ 15 \leq q_{12}(k) \leq 20 \\ 10 \leq q_{13}(k) \leq 30 \\ 10 \leq q_{14}(k) \leq 15 \\ 15 \leq q_{15}(k) \leq 20 \\ 15 \leq q_{16}(k) \leq 20 \\ 120 \leq q_{17}(k) \leq 150 \\ 20 \leq q_{18}(k) \leq 25 \\ 15 \leq q_{19}(k) \leq 180 \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, nous obtenons le modèle implicite suivant :

$$E \cdot \theta(k+1) = A \cdot \theta(k) + q(k+1),$$

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une classe importante des réseaux de Pétri qui est le graphe d'événement P-temporels et nous avons montré comment nous obtenons la représentation linéaire du système dans l'algèbre standard et nous avons par la fin appliqué le modèle implicite.

Le chapitre suivant sera consacré à la commande prédictive des systèmes à événements discrets.

III.1 Introduction

De façon classique, la commande d'un système à événements discrets est le pilotage de ses entrées (contrôle des tirs des transitions) en vue d'obtenir un comportement souhaité pour le système. Parmi toutes les stratégies de commande existantes, l'approche prédictive est souvent employée dans le milieu industriel. Cette approche est une méthode de commande bien établie et populaire [9]. La loi de commande est obtenue à partir d'un problème d'optimisation en ligne résolu à chaque instant sur un intervalle futur, connu sous le nom d'horizon de prédiction.

III.2 La commande prédictive

La commande prédictive ou commande prédictive à base de modèle "Model Predictive Control" (MPC) est une technique de commande avancée très utilisée dans l'industrie en raison de ses avantages, en particulier sa capacité à traiter les systèmes multi-variables en tenant compte des contraintes sur les variables de commande et/ou les variables d'état. Dans le cas où le modèle utilisé est linéaire [4], cette stratégie de commande est dite commande Prédictive linéaire.

III.3 Principe de la commande prédictive

Le principe de la commande prédictive consiste à créer pour le système à commander un effet anticipatif par rapport à une trajectoire à suivre connue à l'avance, en se basant sur la prédiction du comportement futur du système et en minimisant l'écart de ces prédictions par rapport à la trajectoire au sens d'une certaine fonction coût, tout en respectant des contraintes de fonctionnement. Cette idée est simple et pratiquée de façon assez systématique dans la vie quotidienne. Par exemple, le conducteur d'un véhicule connaît la trajectoire de référence désirée à l'avance (la route) sur un horizon de commande fini (son champ visuel), et en prenant en compte les caractéristiques de la voiture (modèle mental du comportement du véhicule), il décide quelles actions (accélérer, freiner ou tourner le volant) qu'il faut réaliser afin de suivre la trajectoire désirée. Seule la première action de conduite est exécutée à chaque instant [10], et la procédure est répétée à nouveau pour les prochaines actions.

La commande MPC (Model Predictive Control) présente un certain nombre d'avantages par rapport aux autres méthodes, parmi lesquels on trouve :

- Empêcher tout mouvement excessif des variables d'entrée.

- Elle peut être utilisée pour commander une grande variété de processus, ceux qui sont avec des dynamiques simples à ceux plus complexes, par exemple, les systèmes à retard, ou instable.
- Le réglage de ses paramètres relativement faciles la rend accessible aux personnes avec des connaissances limitées en automatique.
- Le cas multi-variable se traite facilement.
- Son caractère prédictif permet de compenser les retards et les temps morts.
- Le traitement de contraintes imposées sur le système à commander peut-être inclus dans l'obtention de la loi de commande.
- Elle est très performante lorsque les consignes ou trajectoires à suivre sont connues à l'avance (ce qui est le cas dans plusieurs processus industriels comme les machines numériques et les robots).

La technique de commande prédictive consiste à utiliser un modèle pour prédire le comportement dynamique du système à commander. En effet, à chaque pas de calcul un retour de l'information est appliqué au système, ce retour est la première commande parmi une séquence de commandes calculées par la résolution d'un problème de commande optimale en boucle ouverte sur un horizon fini. La structure d'une commande prédictive est basée sur les étapes suivantes :

1. Utilisation d'un modèle pour construire les prédictions des états futurs.
2. Connaissance de la trajectoire à suivre sur un horizon déterminé.
3. Minimisation d'un critère de performance.
4. Application du premier élément de la séquence de la commande calculée.

III.4 Commande prédictive en boucle ouverte à horizon fini des graphes d'évènements P-temporels

III.4.1 La construction du modèle

La synthèse d'une loi de commande prédictive se base sur l'existence de modèle du système à commander. Plusieurs structures du modèle existent dans la littérature selon le type du système à contrôler. Dans ce travail, nous nous limitons au modèle algébrique proposé par Kara [5] décrit dans le chapitre précédent, pour les systèmes à événements discrets modélisés par des graphes d'évènements P-temporels dans l'algèbre standard. La forme implicite du modèle est donnée par l'équation suivante :

$$E \cdot \theta(k) = A \cdot \theta(k - 1) + q(k), \quad (III.1)$$

Avec,

$$a \leq q(k) \leq b,$$

$$\theta(k) = \theta(0) \quad \forall k \leq 0.$$

- $\theta(k)$: est le vecteur associé aux dates du $K^{\text{ième}}$ franchissement des transitions.
- $q(k)$: est le vecteur des temps de séjour des marques dans les places pour le $K^{\text{ième}}$ franchissement.
- a et b : sont respectivement les vecteurs des valeurs minimales et maximales des temps de séjour des marques dans les places.

Le modèle donné par l'équation (III.1) est appelé modèle linéaire implicite à événements discret.

Si la matrice E est inversible à gauche, le système admet une solution unique et devient explicite comme suit :

$$\theta(k + 1) = E^L A \cdot \theta(k) + E^L \cdot q(k + 1), \quad (III.2)$$

Avec E^L est une inverse à gauche de la matrice E .

Le modèle de l'équation (III.2) est appelé modèle linéaire explicite à événements discret.

Où : $\theta(k)$ est la variable d'état, $q(k)$ est la variable de commande.

III.4.2 La trajectoire de référence

La sortie désirée représente la trajectoire de référence, également appelée consigne. Le problème de commander la sortie d'un système par rapport à une référence donnée, peut être traité des différentes manières. Dans ce travail, nous désirons suivre une trajectoire décrite par un comportement 1. Périodique. Selon les travaux de [2] [4], tout graphe d'évènements fortement connexe en fonctionnement au plus tôt possède un comportement périodique donné par l'équation suivante :

$$\theta(k + c) = \theta(k) + \lambda \cdot c, \quad (III.3)$$

Où :

- c : est la cyclicité.
- λ : est le temps du cycle.

Pour chaque transition du graphe d'évènements considéré, les événements successifs sont séparés de même intervalle du temps λ .

Pour $c = 1$ et pour une condition initiale $\theta(0)$ connue, le comportement est appelé 1-périodique donné par l'équation suivante :

$$\theta_z(k + 1) = \theta_z(k) + \lambda \cdot \mu, \quad (III.4)$$

- λ est le temps de cycle. C'est le temps séparant deux franchissements successifs d'une transition.

Remarque 1 Dans tout ce travail [4], la notation $\theta_z(k)$ est assignée à la variable d'état du modèle décrivant la trajectoire désirée.

III.4.3 Calcul du temps de cycle λ

La trajectoire désirée peut être représentée sous forme de modèle implicite [6], décrivant le comportement du système donné par l'équation (III.2) comme suit :

$$E \cdot \theta_z(k + 1) = A \cdot \theta_z(k) + q_z(k + 1), \quad (III.5)$$

Avec :

- $\theta_z(k)$ est le vecteur des dates désirées de $k^{ième}$ franchissement de toute transition associée à θ_z à l'événement k .
- q_z est le vecteur associé au temps de séjour désiré des marques dans les places P_i .

La forme implicite donnée par l'équation (III.5) est réécrite du façon à remplacer le terme $\theta_z(k + 1)$ par son équivalent, tel qui est donnée par l'équation (III.4). L'équation suivante est obtenue :

$$(E - A) \cdot \theta_z(k) + E \cdot \lambda \cdot \mu - q_z(k) = 0, \quad (III.6)$$

En utilisant l'approche de la programmation linéaire, nous déterminons les inconnues de l'équation (III.6) qui sont : le temps du cycle λ , les dates de franchissement des transitions $\theta_j(k)$ et les temps de séjour des marques dans les places $q_i(k)$. Le programme linéaire est formulé comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser (maximiser) } \lambda \\ \text{soumis à } \left\{ \begin{array}{l} ((E - A) - \mathbb{I}_n + E \cdot \mu) \cdot \begin{pmatrix} \theta_z \\ q_z \\ \lambda \end{pmatrix} = 0, \\ \theta_z \geq 0, \\ a \leq q_z \leq b, \\ \lambda \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \quad (III.7)$$

III.4.4 Formulation du problème de commande

Le modèle explicite décrivant le comportement du système est donné par l'équation suivante :

$$\theta(k+1) = E^L A \cdot \theta(k) + E^L \cdot q(k+1), \quad (III.8)$$

La trajectoire désirée qui satisfait l'équation (III.8) est donnée sous la forme suivante :

$$\theta_Z(k+1) = E^L A \cdot \theta_Z(k) + E^L \cdot q_Z(k+1), \quad (III.9)$$

Par la soustraction des équations (III.8) et (III.9), le modèle d'erreur entre le modèle du système et celui de la trajectoire désirée est obtenu comme suit :

$$e(k+1) = E^L A \cdot e(k) + E^L \cdot (q(k+1) - q_Z(k+1)), \quad (III.10)$$

L'équation (III.10) est réécrite comme suit :

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B} \cdot (q(k+1) - q_Z(k+1)), \quad (III.11)$$

avec :

$$\{a - q_Z \leq q(k+1) - q_Z(k+1) \leq b - q_Z, \quad (III.12)$$

- $e(k) = \theta(k) - \theta_Z(k)$ est la variable d'état du système d'erreur entre la trajectoire décrivant le comportement réel du système et celui de la trajectoire de désiré.
- $(q(k+1) - q_Z(k+1))$ est la variable de commande.
- $\mathbb{A} = A \cdot E^L$.
- $\mathbb{B} = E^L$.

La forme explicite linéaire de modèle de l'équation (III.11) est la suivante :

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B} \cdot u(k+1), \quad (III.13)$$

Soumis aux contraintes sur la variable de commande données par l'équation suivante :

$$U_{min} \leq u(k+1) \leq U_{max}, \quad (III.14)$$

Avec :

$$u(k+1) = (q(k+1) - q_Z), \quad U_{min} = (a - q_Z), \quad U_{max} = (b - q_Z)$$

III.4.5 Calcul des prédictions :

La prédiction de l'évolution future du système d'erreur entre la trajectoire réelle et celle désirée est calculée en développant les équations du modèle d'état de l'équation (III.13) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B} \cdot u(k+1), \\ e(k+2) = \mathbb{A} \cdot e(k+1) + \mathbb{B} \cdot u(k+1), \\ e(k+2) = \mathbb{A}^2 \cdot e(k) + \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot u(k+1) + \mathbb{B} \cdot u(k+2), \\ \vdots \\ e(k+N_p) = \mathbb{A}^{N_p} \cdot e(k) + (\mathbb{A}^{N_p-1} \cdot \mathbb{B} + \dots + \mathbb{B}) \cdot u(k+N_c), \end{array} \right.$$

N_p et N_c sont les horizons de prédiction et de commande respectivement.

Sous forme matricielle, nous obtenons l'équation suivante :

$$e(N_p) = \mathbb{A}^{N_p} \cdot e(0) + \sum_{i=1}^{N_p} \mathbb{A}^{N_p-i} \cdot \mathbb{B} \cdot u(i), \quad (III.15)$$

Pour k allant de 0 à N_p , l'équation (III.15) est équivalente à :

$$\mathbf{E} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot e(0), \quad (III.16)$$

Avec :

$$\mathbf{E} = ((e(1), e(2), \dots, e(N_p)))^T,$$

$$\mathbf{U} = ((u(1), u(2), \dots, u(N_p - 1)))^T,$$

$$\mathbf{A} = (\mathbb{A}, \mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^{N_p})^T$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbb{B} & \mathbf{0}_{(m \times n)} & \dots & \dots & \mathbf{0}_{(m \times n)} \\ \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & \mathbf{0}_{(m \times n)} & \dots & \mathbf{0}_{(m \times n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{A}^{N_p-1} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{A}^{N_p-2} \cdot \mathbb{B} & \dots & \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} \end{pmatrix}.$$

Où $\mathbf{0}_{(m \times n)}$ est la matrice nulle de taille $m \times n$, m est le nombre de transitions, n est le nombre de places.

III.4.6 Calcul de la séquence de commande

La commande prédictive peut être vue comme un problème d'optimisation générale où l'on cherche la minimisation du critère de performance sur un horizon de prédiction fini [4][9].

$$\min_{u(k+i), i=1,0 \dots N_c} J_{N_p}(k) \quad (III.17)$$

Vu la diversité d'algorithmes de commande prédictive, différentes fonctions de coût ont été proposées pour obtenir une loi de commande. L'objectif principal consiste à faire en sorte que la trajectoire future pour l'horizon de prédiction considéré s'approche de la meilleure façon possible de celle de référence. Dans ce travail, le critère de performance considéré $J_{N_p}(k)$ est une fonction quadratique donnée sous la forme suivante :

$$J_{N_p}(k) = \sum_{i=1}^{N_p} e(k+i)^T Q_c e(k+i) + \sum_{i=1}^{N_c} u(k+i)^T R u(k+i), \quad (III.18)$$

Avec $Q > 0$ et $R \geq 0$ sont des matrices de pondération symétriques et définies positives.

Les horizons de prédiction N_p et N_c définissent l'intervalle de temps où l'on désire que la trajectoire se rapproche de la référence.

Sous forme matricielle, en remplaçant l'équation (III.17) dans le critère donné par l'équation (III.18), nous obtenons un critère qui dépend seulement de la séquence de commande donnée par l'équation suivante :

$$J = \frac{1}{2} U^T H U + f^T U, \quad (III.19)$$

avec,

$$\begin{cases} H = S^T Q_m S + R_m, \\ f^T = e(0)^T \cdot A^T \cdot Q_m \cdot S, \\ Q_m = \text{diag}(Q_C, Q_C, \dots, Q_C), \\ R_m = \text{diag}(R, R, \dots, R). \end{cases}$$

III.4.7 Prise en compte des contraintes

La commande prédictive cherche à déterminer une séquence de commande future qui permet de minimiser le critère de performance tout en assurant la vérification des contraintes. Différents types de contraintes sont couramment rencontrés dans l'industrie. Dans ce travail, il s'agit de respecter les temps de séjour minimal et maximal des jetons dans les places de graphe d'évènements P-temporel [4]. Les temps de séjour des marques sont inclus dans des intervalles de temps bien déterminés. Mathématiquement, ce type de contraintes sont des contraintes inégalité.

Les contraintes données par l'équation (III.14) sont réécrites sous la forme des contraintes inégalités suivante,

$$\mathcal{P}(G, g) = \{u(k) \in \mathbb{R}^n, G \cdot u(k) \leq g\}, \quad (III.20)$$

avec, $G = \begin{pmatrix} I_n \\ -I_n \end{pmatrix}$ et $g = \begin{pmatrix} U_{max} \\ -U_{min} \end{pmatrix}$. I_n est une matrice diagonale unitaire.

Le problème de commande prédictive est formulé en terme de programmation linéaire quadratique donnée par l'équation suivante :

$$\text{minimiser } J_{N_p}(k) \quad (III.21)$$

$$\text{soumis à } \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}(k) \leq \mathbf{g},$$

Les contraintes à respecter sont formulées en fonction de la séquence de commande sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{U} \leq \mathbf{g}, \quad (III.22)$$

Avec $U = u(1), u(2), \dots, u(N_p - 1)^T$ est la séquence de commande, $G = \text{diag}(G, G, \dots, G)$ et $g = (g, g, \dots, g)^T$.

La séquence de commande est obtenue en minimisant le critère donné par l'équation (III.19) soumis aux contraintes inégalités données par l'équation (III.22). Le problème de commande optimale est reformulé comme suit :

$$\begin{aligned} \text{minimiser } J &= \frac{1}{2} U^T H U + f^T U, & (III.23) \\ \text{soumis à } G \cdot U &\leq g, \end{aligned}$$

La structure du problème (III.23) est une programmation quadratique linéaire pour laquelle de nombreux outils de résolution existent. Dans ce travail, nous avons utilisé l'outil MATLAB.

III.5 Application du four électrique

Dans cette section, nous appliquons les résultats précédents de four composé de deux gammes. L'objectif est de minimiser le cycle. Le réseau est modélisé par un graphe d'évènements P-temporel [4] donné par la figure III.1.

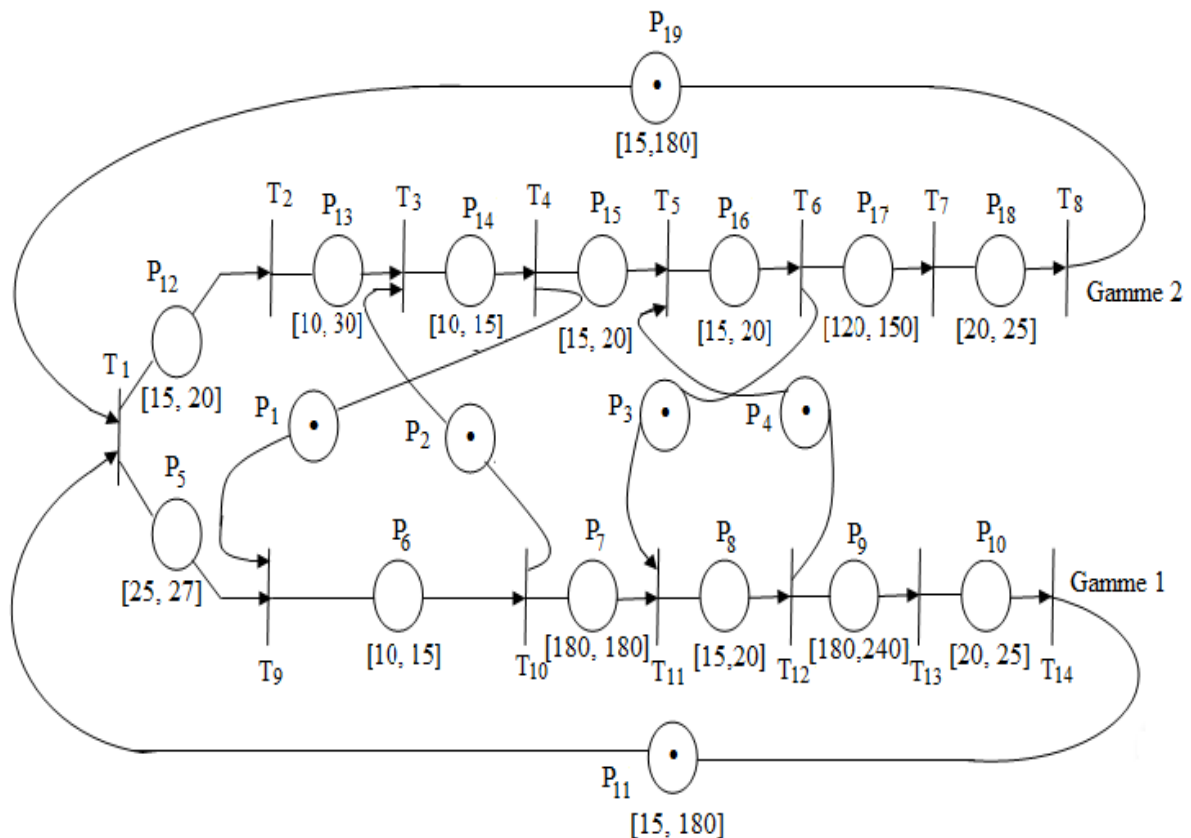


Figure III.1 : Système de production du pain.

En modélisant le graphe d'évènements par le modèle implicite donné dans l'algèbre standard, nous obtenons les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_9(k) = \theta_4(k-1) + q_1 \\ \theta_3(k) = \theta_{10}(k-1) + q_2 \\ \theta_{11}(k) = \theta_6(k-1) + q_3 \\ \theta_5(k) = \theta_{12}(k-1) + q_4 \\ \theta_9(k) - \theta_1(k) = q_5 \\ \theta_{10} - \theta_9(k) = q_6 \\ \theta_{11}(k) - \theta_{10}(k) = q_7 \\ \theta_{12}(k) - \theta_{11}(k) = q_8 \\ \theta_{13}(k) - \theta_{12}(k) = q_9 \\ \theta_{14}(k) - \theta_{13}(k) = q_{10} \\ \theta_1(k) = \theta_{14}(k-1) + q_{11} \\ \theta_2(k) - \theta_1(k) = q_{12} \\ \theta_3(k) - \theta_2(k) = q_{13} \\ \theta_4(k) - \theta_3(k) = q_{14} \\ \theta_5(k) - \theta_4(k) = q_{15} \\ \theta_6(k) - \theta_5(k) = q_{16} \\ \theta_7(k) - \theta_6(k) = q_{17} \\ \theta_8(k) - \theta_7(k) = q_{18} \\ \theta_1(k) = \theta_8(k-1) + q_{19} \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, nous obtenons le modèle implicite suivant :

$$E \cdot \theta(k+1) = A \cdot \theta(k) + q(k+1) \text{ avec,}$$

$$\text{avec, } q_z = \begin{pmatrix} 409.2036 \\ 462.0890 \\ 553.2665 \\ 295.1168 \\ 26.8290 \\ 10.9876 \\ 180 \\ 17.9286 \\ 221.4316 \\ 21.9158 \\ 21.8280 \\ 16.4246 \\ 12.3433 \\ 14.1832 \\ 18.6763 \\ 17.6382 \\ 129.8271 \\ 23.5680 \\ 172.2829 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ 10 \\ 180 \\ 15 \\ 180 \\ 20 \\ 15 \\ 15 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \\ 15 \\ 120 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 27 \\ 15 \\ 180 \\ 20 \\ 240 \\ 25 \\ 180 \\ 20 \\ 30 \\ 15 \\ 20 \\ 20 \\ 150 \\ 25 \\ 180 \end{pmatrix} \text{ et } \theta_z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 23.4889 \\ 55.8321 \\ 57.9472 \\ 79.6234 \\ 101.0550 \\ 245.2709 \\ 270.0388 \\ 24.8290 \\ 35.8166 \\ 211.9998 \\ 226.8284 \\ 405.6666 \\ 425.4937 \end{pmatrix}$$

On a obtenu le temps de cycle $\lambda = 442.3217$

Le modèle d'erreur est donné par $e(k) = \theta(k) - \theta_z(k)$,

$$e(k+1) = \mathbb{A} \cdot e(k) + \mathbb{B} \cdot u(k+1),$$

Avec

$$\begin{cases} \mathbb{A} = A \cdot E^L, \\ \mathbb{B} = E^L, \\ u(k+1) = (q(k+1) - q_z), \end{cases}$$

III.5.2 Commande prédictive à horizon fini

La séquence de commande optimale qui permet de stabiliser le système en boucle ouverte avec respect de contraintes est calculée en minimisant le critère quadratique donné par :

$$\text{minimiser } \frac{1}{2} e(k+1)^T Q_c e(k+1) + u(k+1)^T R u(k+1),$$

$$\text{soumis à } G \cdot u(k+1) \leq g$$

Tout d'abord, nous fixons l'horizon de prédiction $N_p = 6$ et l'horizon de commande (contrôle) $N_c = 4$.

$Q_c = I_{14}$ et $R = I_{38}$ sont les matrices de pondérations. $G = \begin{pmatrix} I_{19} \\ -I_{19} \end{pmatrix}$ et $g = \begin{pmatrix} b - q_z \\ q_z - a \end{pmatrix}$ sont les matrices des contraintes.

Le résultat de l'optimisation nous donne la commande u qu'on va remplacer dans l'équation (III.13), l'évolution du système d'erreur est montrée dans les courbes suivantes :

Sous forme matricielle le problème d'optimisation est reformulé comme suit,

$$\text{minimiser } J = \frac{1}{2} U^T H U + f^T U ,$$

$$\text{soumis à } \mathbf{G} \cdot U \leq \mathbf{g} ,$$

avec,

$$H = S^T Q_m S + R_m ,$$

$$Q_m = I_{84} , R_m = I_{76} , f^T = e(0)^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot Q_m \cdot S , U = (u(1), u(2), u(3), u(4))^T$$

$$e(0) = (-Z_0) , \mathbf{A} = (\mathbb{A}, \mathbb{A}^2, \dots , \mathbb{A}^6)^T ,$$

$$S = \begin{pmatrix} \mathbb{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} & \mathbb{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{A}^5 \cdot \mathbb{B} & \mathbb{A}^4 \cdot \mathbb{B} & \mathbb{A}^3 \cdot \mathbb{B} & \mathbb{A}^2 \cdot \mathbb{B} + \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{B} \end{pmatrix} , \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} ,$$

$$\text{et } \mathbf{g} = (g, g, g, g)^T .$$

Les résultats de simulation sont illustrés dans les Figures III.2 et III.3,

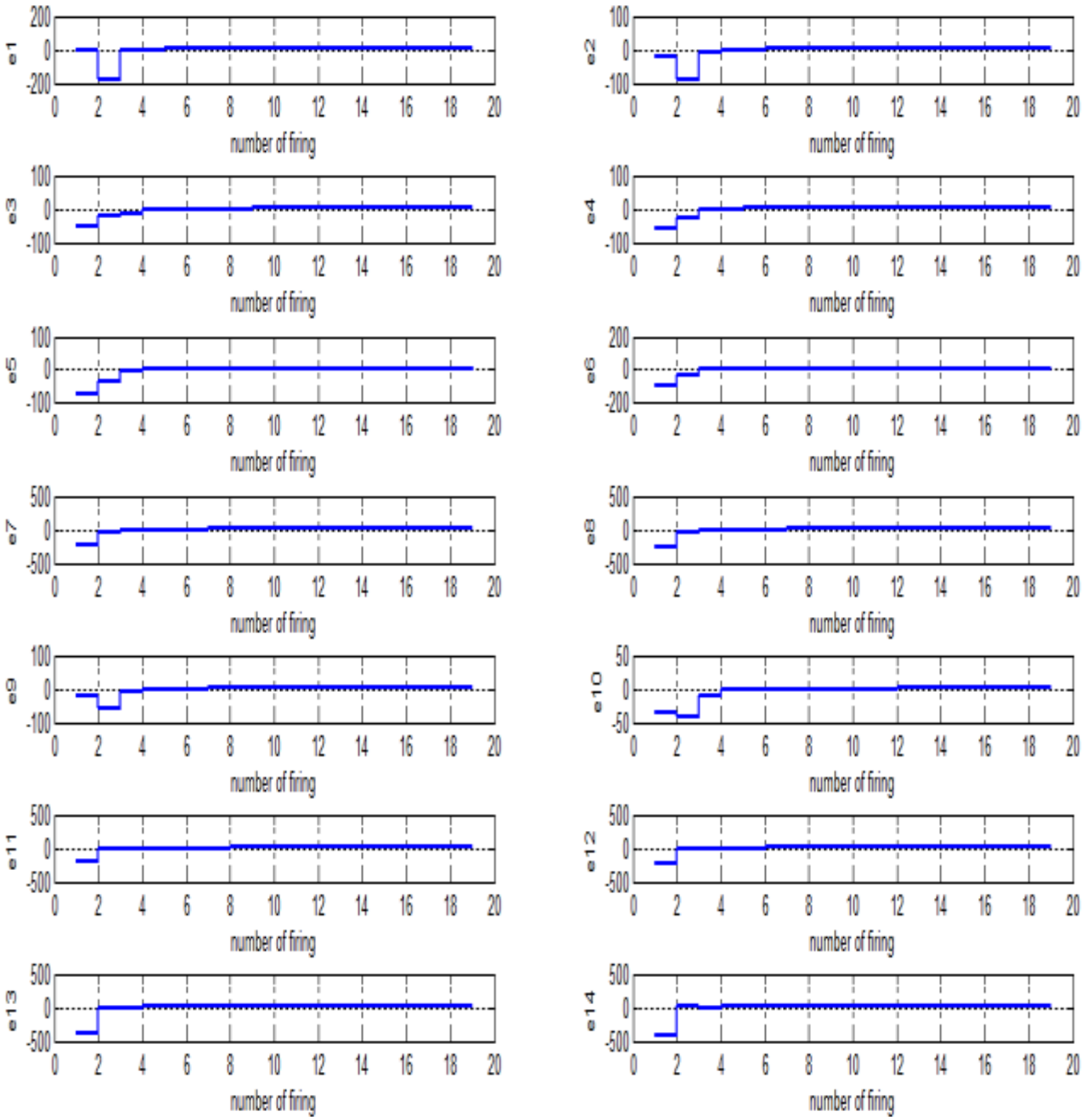


FIGURE III.2 : La variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissements des transitions.

La Figure III.2 représente la variation de l'erreur en fonction de nombre de franchissement des transitions, nous remarquons que chaque erreur de date de franchissement tend vers zéro, ce qui veut dire que les dates de franchissement des transitions du système sont celles qui sont désirées. Cette figure montre que la séquence de commande calculée assure le suivi de trajectoire du système considéré.

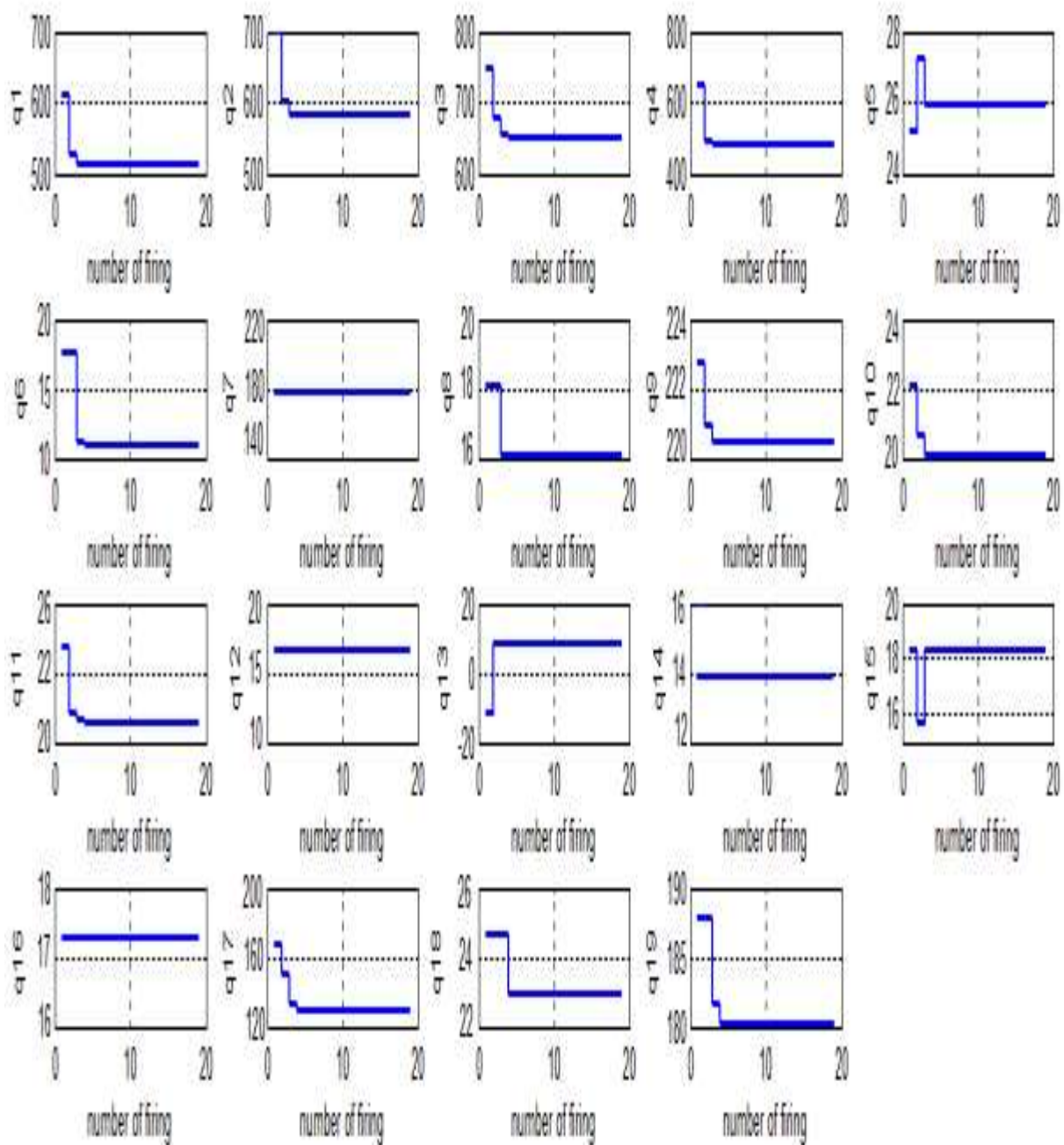


FIGURE III.3 : Évolution des temps de séjour des marques dans les places en fonction de Nombre de franchissement.

La Figure III.3 : représente l'évolution des temps de séjour des marques dans les places en fonction de nombre de franchissements des transitions, nous remarquons que pour chaque place le temps de séjour de la marque reste dans l'intervalle de temps associé à cette place et se stabilise à la valeur de temps de séjour désirée. Cette figure montre que la séquence de commande calculée assure le respect des contraintes sur les entrées de commande.

III .6 Conclusion

Dans ce chapitre, une commande prédictive a été appliquée pour le calcul des lois de commande stabilisantes pour un système à événement discret modélisé par des graphes d'évènement P-temporels dans l'algèbre standard en garantissant le respect des contraintes sur les entrées de commande. Une séquence de commande optimale sur un horizon de prédiction fini est calculée, cette loi de commande assure le suivi d'une trajectoire désirée avec respect de contraintes sur les temps de séjour des marques dans les places du graphes d'évènement P-temporel.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la commande prédictive pour une classe des systèmes à événement discrets, modélisés par des graphes d'évènement P-temporel dans l'algèbre standard tout en garantissant le respect de contrainte du temps de séjour des marques dans les places des graphes étudiés.

La commande prédictive est indispensable dans le cadre de la commande des systèmes à événements discrets modélisés par le modèle implicite dans l'algèbre standard. L'objectif principal de ce mémoire est d'appliquer la commande prédictive pour les systèmes dynamiques discrets modélisés dans l'algèbre standard. En premier lieu nous avons présenté les systèmes dynamique à événements discrets, ensuite nous avons proposé les réseaux de Pétri comme outil graphique afin de modéliser et analyser le comportement des systèmes à événements discrets grâce aux graphes d'évènements, nous avons aussi appliqué la modélisation des graphes d'évènements P-temporels dans l'algèbre standard en utilisant le modèle implicite, qui permet d'évaluer des critères tels que les temps de cycle, les temps d'attente, ou encore la latence dans un système, offrant ainsi une meilleure compréhension du comportement temporel du système. Par la fin une approche de commande prédictive est appliqué en calculant une séquence de commande en boucle ouverte sur un horizon fini. La commande calculée nous a permis d'atteindre un fonctionnement 1-périodique en garantissant le respect des contraintes sur les temps de séjour des marques dans les places du graphe d'évènements P-temporel. Cette approche assure non seulement la stabilité du système, mais elle permet également de respecter strictement les contraintes temporelles imposées en garantissant que les réponses du système restent prévisibles et stables.

Les résultats sont illustrés sur un système de production de pain dans un four électrique vu comme une classe de système à événement discrets, l'objectif principal est de minimiser le temps de chaque étape durant la production en effectuant toutes opérations convenablement.

Bibliographie

- [1] Boukredara .D épouse Boulahrouz, “Les Réseaux de Pétri, un outil de Modélisation et d’Analyse des Systèmes Dynamiques à Evènements Discrets”. Université A/Mira de Bejaia (2019,2020).
- [2] Collart .D, "Commande Robuste D’ateliers a contraintes de temps de séjour : Application à la galvanoplastie". PHD Thesis.(1997)
- [3] Guezzi. A : " Modélisation, analyse de performances et commandes des systèmes à événementsdiscrets". Phd Thesis. Angers University. (2010)
- [4] Hamri. H Kara. R and Amari. S:”Model predictive control of P-time event graphs”. International Journal of Systems Science. 47(16), pp, 3792-3802,(2016).
- [5] Kara. R, Becha. T, CollartDutilleul. S and Loiseau. J.J : "An implicit System for Modelling and Control of Discrete Event System". 5th Symposium on System on Structure and Control Part of 2013 IFAC Joint Conference SSSC, Grenoble, France, February 4-6,pp.84-89. (2013).
- [6] Khansa. W : "Réseaux de Petri P-temporel, Contribution à l’Étude des Systèmes à Événements Discrets". PhdThesis. Savoie University.(1997).
- [7] Nait Abdesselam .A, “Les Réseaux de Pétri”. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (7 février 2021).
- [8] René .D et Hassane .A, “Du Grafcet aux réseaux de Pétri”. Série Automatique, HERMES, Paris (1992,1997).
- [9] Sellah .S, “Analyse et commande d’un système de transport public, Application à un système Métro”. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou. (13/07/2017)
- [10] Patrick B, Didier D, “La commande prédictive”, Technip, (1996)