

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

D'Ingénieur d'Etat en Automatique

Thème

Résolution d'un problème de commande optimale par programmation linéaire

Proposé par : M^r A.MAIDI
Copromettrice : M^{elle} A. Nait Abdesselam

Présenté par :

MEJDBER Karima

Dirigé par :

Soutenu le : 12 / 07 /2010

Promotion 2010

Ce travail a été préparé à : .. (nom et adresse de l'entreprise ou du laboratoire)

Remerciements

C'est avec humilité et gratitude que nous reconnaissons ce que nous devons :

Je commence par remercier et rendre grâce à Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté de mener à bon terme ce travail.

Mes remerciements vont en particulier à Mr A. Maidi mon promoteur, qui m'a dirigé afin de mener à bien ce travail.

Mes sincères remerciements à ma Co-promotrice Melle A. Nait Abdesselam qui a précieusement guidé dans l'élaboration de mon mémoire.

Je tiens aussi à remercier bien vivement les membres de jury qui me feront l'honneur d'évaluer ce travail.

Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, trouvent ici mes sincères reconnaissances.

Je voudrais remercier tous les amis, présent ou a distance mais qui ont été la pour me donner leur support. Impossible de citer tous les noms sur papier, il ya la place que dans le cœur ; merci beaucoup.

A tous, j'exprime mes vives gratitudes.

Dédicace

Pour que ma réussite soit complète je la partage avec toutes les personnes que j'aime, je dédie ce modeste travail à :

A la source de bonheur et d'amour qui est ma très chère mère qui m'a aidé à surmonter les problèmes, pour soins qu'elle a prêté à ma formation et à mon éducation, elle qui m'a encouragé dans mes études et pour le courage et la volonté qu'elle m'a inculqué.

A mes très chers frères : Aziz et Amine.

A mes très chères sœurs : Nadia et Kahina

A mon très cher grand frère : Nourdine, sa femme Lynda et leur fils Juba.

A toute ma famille.

ET surtout à mes deux chères tentes : Ouiza, Safia.

ET leurs enfants.

A ma grande mère.

A tous mes amies et mes amis.

ET à tous mes camarades de la promotion 'Automatique' 2009-2010.

KARIMA MEDJBER



Sommaire

Sommaire

Introduction générale 1

Chapitre I : Formulation d'un problème de commande optimale

I.1.Introduction.....3

I.2.Commande optimale.....3

I.3.Formulation du problème de commande optimale.....4

 I.3.1.Mise en équation.....4

 I.3.2.Condition terminal.....5

 I.3.3.Contraintes instantanées et intégrales.....5

 I.3.3.1. Contraintes instantanées.....5

 I.3.3.2. Contraintes intégrales.....5

 I.3.4. Choix de critère d'optimalité (critère de performances).....6

 I.3.5.Exemple illustratif.....6

I.4.Synthèse d'une loi de commande optimale.....10

I.5.Résolution d'un problème de commande optimale.....10

I.6.Conclusion.....11

Chapitre II : Programmation linéaire

II.1.Introduction.....	12
II.2. Problème de programmation linéaire.....	12
II.3.Résolution par la méthode graphique.....	13
II.3.1.Exemple.....	14
II.4.Utilisation des variables d'écart et des variables artificielles	16
II.4.1.Utilisation des variables d'écart.....	16
II.4.1.1Exemple.....	17
II.4.2.Utilisation des variables artificielles.....	18
II.4.2.1Exemple.....	19
II.5. Méthode de simplexe.....	20
II.5.1. Construction de table de simplexe.....	21
II.5.2. Recherche de l'optimum.....	21
II.5.2. 1.Détermination de la colonne clef(le vecteur rentrant dans la base).....	22
II.5.2.2.Détermination de la ligne clef (le vecteur sortant dans la base)	22
II.5.2.3.Détermination de l'élément pivot α	22
II.5.2.4.Détermination de la ligne correspondante au vecteur entrant (nouvelle ligne).....	22
II.5.2.5.Introduction du vecteur unitaire A_I	23
II.5.2.6.Détermination du vecteur unitaire.....	23

Sommaire

II.5.3.Examen de la ligne (q+1).....	23
II.5.4.Organigramme de l algorithme de simplexe.....	23
II.6.Conclusion.....	25

Chapitre III : Discrétisation de problème de commande optimale

III.1.Introduction.....	26
III.2.Discrétisation de problème de commande optimale	26
III.2.1.Discrétisation de modèle	27
III.2.2. Discrétisation du critère	28
III.2.3. Discrétisation des contraintes.....	28
III.3.Résolution du problème de commande optimale.....	29
III.4. Exemple	30
III.5.Conclusion.....	33

Chapitre VI : Application sur le bac du stockage

VI.1.Introduction.....	34
V I.2.Présentation du bac de stockage	34
VI.3.Modélisation du bac de stockage	35
VI.3.1.Système a modaliser.....	36

Sommaire

VI. 3 .2.Analyse des variables	36
VI.3.3.Écriture des équations du modèle.....	36
VI.3.3.1.Relation de la conservation de volume.....	36
VI.3.3.2.Conditions d'équilibre du système.....	36
VI.3.3.3.Loi de Bernoulli.....	37
VI.3.3.4.Stabilisation du niveau.....	37
IV.3.4.Forme générale du modèle.....	37
VI.3.5.Linéarisation	38
VI.4.Commande d'un bac de stockage	38
VI.5.La simulation	41
VI.6.Conclusion	45
La conclusion générale.....	46
La bibliographie	



Nomenclature

*« Le métier de témoin m'a toujours fais horreur.
Que suis-je si je ne participe pas. »*

Nomenclature

t : temps

t_0 : L'instant initial

t_f : L'instant final

u : la commande

$U(t)$: vecteurs de commande admissibles

J : fonction objectif

J^* : Critère optimale.

u^* : Commande optimale.

L : lagrangien

R : l'ensemble réel

$V_a(t)$: tension d'alimentations des circuits d'allumage

$V(t)$: tension aux bornes de l'induit

$I(t)$: intensité du courant d'induit

$E(t)$: force électromotrice du mouleur

$C_M(t)$: couple moteur

$W(t)$: vitesse angulaire

J : Inertie résultantes sur l'arbre moteur

T_i : constante de temps de l'inertie

R_i : résistance de l'induit

Φ : flux agnatique du moteur (suppose constante)

$K_e \cdot k_M$: Prémontrés caractéristique du moteur

$f(x)$: Fonction à minimise (maximise) linéaire

$h_j(x)$: Les contraintes linéaires

n : nombre des variables

m : nombre des équations

A : matrice carre

b : vecteur

c : vecteur

α : L'élément pivot

\bar{x}_B : désignes les variables de base.

\bar{x}_H : désigne les variables hors base.

Nomenclature

\mathbf{f} : fonction décrivant la dynamique de système

F_{∇} : Forme discrétisée de f

$G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$: contraintes du Type égalité

$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$: contraintes du Type inégalité

$G(\Psi_{\mathbf{x}(0)}(\mathbf{u}), \mathbf{u})$: forme discrétisée de $H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$

$H(\Psi_{\mathbf{x}(0)}(\mathbf{u}), \mathbf{u})$: forme discrétisée de $H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$

$\Psi_{\mathbf{x}(0)}$: Fonction de \mathbf{u} avec $\mathbf{x}(0)$ fixé

γ : une constante de Bernoulli

Δt : La période d'échantillonnage.

K : Numéro de l'itération.

N : Nombres d'itérations.

x_c et u_c : des poids de fonctions

V_e : est la vanne d'entrée du réservoir.

V_s : est la vanne de sortie du réservoir.

Q_s : est le débit sortant du bac.

h_a : est la hauteur du liquide dans le bac.

Q_e =: est le débit entrant.

S_e : est la section du bac.



L'introduction générale

« La connaissance de l'homme étant subjective et relative, rien dans son raisonnement n'est entièrement vrai ni entièrement faux. »

Introduction générale

Après la deuxième guerre mondiale et les progrès technologiques considérables qui ont suivi cette tragédie, l'automatique a connu un véritable essor. L'élaboration de lois de commande de systèmes a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. L'application de certaines de ces méthodes à des procédés réels a montré leur efficacité. Les systèmes à commander devenant de plus en plus complexes, les lois de commande deviennent elles-mêmes complexes et parfois difficiles à mettre en œuvre.

Actuellement, les applications industrielles sont plus que jamais au cœur des enjeux de l'automatique. Ce renouveau est lié à l'augmentation constatée des exigences de qualité et de performance des systèmes asservis et l'exigence de plus en plus forte du " meilleur compromis ". Les cahiers des charges d'asservissements industriels devenant de plus en plus complexes et serrés, l'automaticien est alors confronté à un problème de choix pour la construction d'une loi de commande. C'est là qu'intervient l'optimisation, notamment l'optimisation en présence de contraintes qui s'est fortement développée, à partir des années 90, avec de forts progrès au niveau de leur résolution et une puissance de calcul de plus en plus importante pour un coût de plus en plus faible. Ces progrès reposent aussi en grande partie, sur les travaux effectués dans les années 1960, notamment ceux de R. Bellman sur la programmation dynamique et ceux de L. Pontriaguine sur la commande optimale.

Les problèmes de commande optimale connaissent une importance accrue liée à l'introduction de nouvelles technologies dans les domaines suivants : trafic aérien, calcul de trajectoires aériennes optimales (entrées spatiales, manœuvres d'avions), la commande de réacteurs chimiques, pollution automobile, biodégradation des déchets. Ils sont toujours importants pour les applications « classiques » concernant les engins guidés, la conception et la commande de voitures automobiles et le génie processus.

L'objectif de ce travail, consiste à étudier la résolution des problèmes de commande optimale (optimisation dynamique), en présence de contraintes sur les états et les commandes, des

Introduction générale

systèmes non linéaires en les ramenant à un problème de programmation linéaire (optimisation statique) facilement solvable par la méthode du simplexe.

Le mémoire est organisé comme suit :

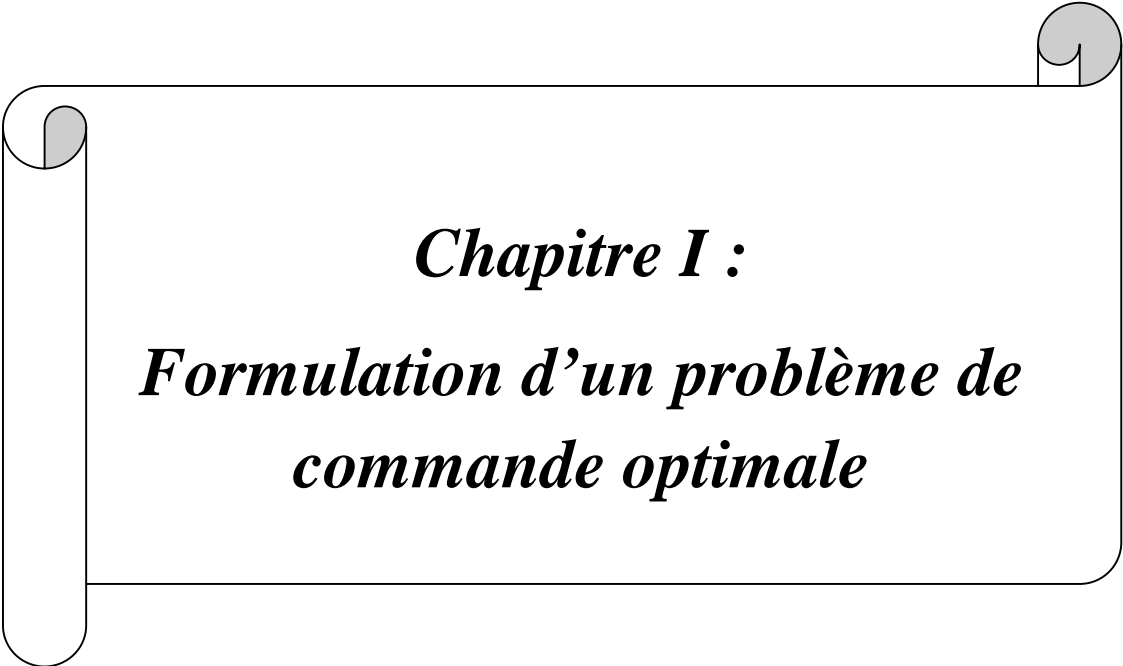
Dans le premier chapitre, on s'intéresse à la formulation d'un problème de commande optimale, suivant le cahier des charges imposé, ainsi que les différentes notions s'y référant.

Le second chapitre, présente les méthodes de résolution d'un problème d'optimisation statique, graphiques, analytiques et itératives. Dans ce chapitre, on aborde, en particulier, la méthode de simplexe utilisée pour la résolution d'un problème de programmation linéaire.

Le troisième chapitre est consacré à l'illustration de la démarche de transformation des problèmes de commande optimale en des problèmes de programmation linéaire, pour lesquels la méthode de simplexe, développées dans le deuxième chapitre, s'applique directement.

Dans le quatrième chapitre, une application a été détaillée et concerne la commande d'un bac de stockage.

Enfin, le mémoire se termine par une conclusion générale.



Chapitre I :
Formulation d'un problème de
commande optimale

*« Dans notre cours vers le savoir, notre ignorance
s'étend plus vite que notre science.
Chaque monde que nous découvrons, nous révèle
une multitude d'autres mondes qui restent à prospector. »*

Chapitre I : *Formulation d'un problème de commande optimale*

I.1. Introduction :

Ce chapitre est consacré à la définition et à la formulation mathématique d'un problème de commande optimale. Les différentes notions utilisées dans ce mémoire sont présentées.

I.2 .Commande optimale : [1]

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un processus peut se résumer comme suit :

Un processus étant donné et défini par son modèle, trouver parmi les commandes admissibles celle qui permet à la fois :

De vérifier des conditions initiales et finales données

De satisfaire diverses contraintes imposées

D'optimiser un critère choisi

Sous la forme mathématique, le problème de la commande optimale se résume comme suit :

Soit le système dynamique décrit par l'équation d'état

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{I.1}$$

Cette équation est en général non linéaire. Le vecteur de commande doit appartenir à un certain ensemble de vecteurs de commande admissibles

$$u(t) \in U(t) \tag{I.2}$$

Chapitre I : *Formulation d'un problème de commande optimale*

Une forme courante de ces contraintes est que les variables de commande ne peuvent dépasser des valeurs imposées.

Dans ces conditions, on désire conduire le système d'un état initial $x(t_0)$ à un état final $X(t_f)$, tout en optimisant la fonction de coût :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.3})$$

I.3. Formulation du problème de commande optimale :

I.3.1. Mise en équations :

Un système dynamique, ou processus, est caractérisé par trois ensembles de variables :

1. Les variables de sortie, en général directement accessibles et regroupées dans un vecteur y de dimension r .
2. Les variables de commande, regroupées dans un vecteur u de dimension p et dont le choix permet d'agir sur l'évolution du processus.
3. Les variables internes caractérisant l'état du processus à un instant donné regroupées dans un vecteur état $X(t)$ de dimension n . L'instant courant est noté $t > 0$.

Dans une modélisation de l'évolution du processus, ces diverses variables sont liées par une équation d'état le plus souvent explicitée sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.4})$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (\text{I.5})$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^r$ et $t \in \mathbb{R}^+$

Chapitre I :
Formulation d'un problème de commande optimale

I.3.2. Conditions terminales :

Les conditions terminales caractérisent à la fois l'état initial, c'est-à-dire l'instant où on commence à agir sur le processus, et l'état final, après action de la commande.

Par convention, l'instant initial est noté t_0 et l'état initial $x_0 = x(t_0)$. De même, l'instant final est noté t_f et l'état final $x_f = x(t_f)$.

Les conditions initiale et finale peuvent être fixées ou non. Le cas le plus simple correspond à un changement de consigne.

I.3.3. Contraintes instantanées et intégrales :

I.3.3.1. Contraintes instantanées :

Elles caractérisent en général les limitations physiques sur la commande ou sur l'état du processus.

Ce type de contraintes s'exprime par des inégalités de la forme :

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0, q \in \mathbb{R}^{nq}. \quad (\text{I.6})$$

I.3.3.2. Contraintes intégrales :

Elles sont le plus souvent liées à une limitation des ressources ou à une limitation des résultats de nos actions. Ces contraintes s'expriment sous la forme :

$$\int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) \leq 0, p \in \mathbb{R}^{np}. \quad (\text{I.7})$$

Chapitre I :
Formulation d'un problème de commande optimale

I.3.4. Choix du critère d'optimalité (critère de performances) :

Le critère d'optimalité peut prendre en compte les valeurs initiale et finale de l'état du processus, comme minimiser l'écart final par rapport à une consigne donnée, ou tenir compte de l'ensemble des valeurs de l'état ou de la commande à chaque instant. Ce dernier cas apparaît, par exemple, dans un problème de minimisation de l'écart par rapport à une trajectoire donnée ou de minimisation de l'énergie totale consommée.

La forme la plus générale du critère à optimiser correspond à l'expression :

$$J = r_0(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} r(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{I.8})$$

$r_0(x_0, t_0, x_f, t_f)$ est appelée partie terminale, permet la prise en compte dans le critère la prise en compte des états initial et final.

Suivant la forme du critère on distingue :

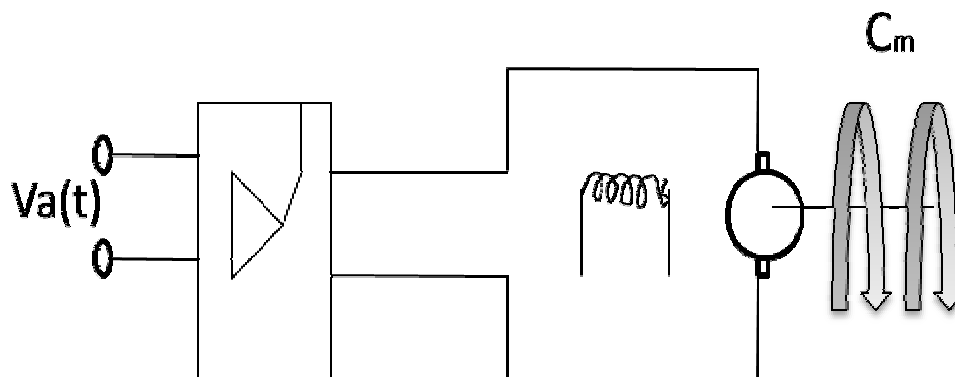
œ Problème de Mayer : $J = r_0(x_0, t_0, x_f, t_f)$. (I.9)

œ Problème de Lagrange : $J = \int_{t_0}^{t_f} r(x(t), u(t), t) dt$ (I.10)

œ Problème de Bolza : $J = r_0(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} r(x(t), u(t), t) dt$ (I.11)

I.3.5. Exemple illustratif: [6]

Considérons le système de la figure (I.1) de la commande d'un moteur électrique à courant continue alimenté par un redresseur RD



Figure(I.1)

NOTATION :

$V_a(t)$: tension d'alimentations des circuits d'allumage

$V(t)$: tension aux bornes de l'induit

$I(t)$: intensité du courant d'induit

$E(t)$: force électromotrice du moteur

$C_m(t)$: couple moteur

$W(t)$: vitesse angulaire

Le comportement du moteur est décrit par les équations savantes :

$$T_i \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{1}{R_i} (v_a(t) - e(t)) \quad (\text{I.12})$$

$$J \frac{dW(t)}{dt} = (C_m(t)) \quad (\text{I.13})$$

$$E(t) = K_e \Phi W(t) \quad (\text{I.14})$$

$$C_m = K_M \Phi i(t) \quad (\text{I.15})$$

Chapitre I : Formulation d'un problème de commande optimale

Dans lesquelles

J : Inertie résultantes sur l'arbre moteur

T_i : constante de temps de l'inertie

R_i : résistance de l'induit

Φ : flux magnétique du moteur (suppose constante)

$K_e \cdot K_M$: Prémontrés caractéristique du moteur

On suppose en premier opération que le redresseur peut être représenté par un élément linéaire proportionnelle dont le gain K_{RD}

$$V(t) = K_{RD} * v_a(t) \quad (I.16)$$

On choisit les variables d'état :

$$x_1(t) = W(t)$$

$$x_2(t) = i(t)$$

La commande :

$$u(t) = V_a(t)$$

Le modèle mathématique du système est :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{K_M \Phi}{J} x_1(t) \quad (I.17)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K_e \Phi}{R_i T_i} x_1(t) - \frac{1}{T_i} x_2(t) + \frac{K_{RD}}{T_i R_i} u(t) \quad (I.18)$$

Condition terminales :

Dans ce cas seul les conditions initiales sont imposées :

Chapitre I :
Formulation d'un problème de commande optimale

$$\begin{aligned} W(0) = 0 & \quad \Rightarrow \quad x_1(0) = 0 \\ I(0) = 0 & \quad \Rightarrow \quad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Contraintes :

Les contraintes sont instantanées

$$0 < u(t) < 1$$

Le critère imposé :

Le problème consiste à minimiser l'énergie :

$$V(t) = \int_0^{t_f} u^2 dt$$

En résumé le problème de commande optimale est

$$\min_{u \in U} \int_0^{t_f} u^2(t) dt$$

Sujet a

$$\dot{x}_1(t) = \frac{K_M \Phi}{J} x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K_e \Phi}{R_i T_i} x_1(t) - \frac{1}{T_i} x_2(t) + \frac{K_{RD}}{T_i R_i} u(t)$$

$$x_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 0$$

$$0 < u(t) < 1$$

Chapitre I :
Formulation d'un problème de commande optimale

I.4.Synthèse d'une loi de commande optimale :

En résumé la synthèse d'une loi de commande optimale passe par les étapes suivantes :

1. Modélisation du procédé à commander.
2. Détermination des diverses contraintes à satisfaire (liées à la réalisation de la commande : accélération limitée, débit borné, réservoir de capacité limitée; liées aux variables caractéristiques : saturation, la sécurité; liées aux conditions de départ et l'objectif à atteindre)
3. Choix étudié avec soin du critère à minimiser
4. Résolution du problème pour déterminer la loi de commande optimale $u^*(t)$.
5. Implémentation de la loi de commande.

I.5. Résolution d'un problème de commande optimale :

Pour la résolution d'un problème de commande optimale plusieurs méthodes ont été proposées :

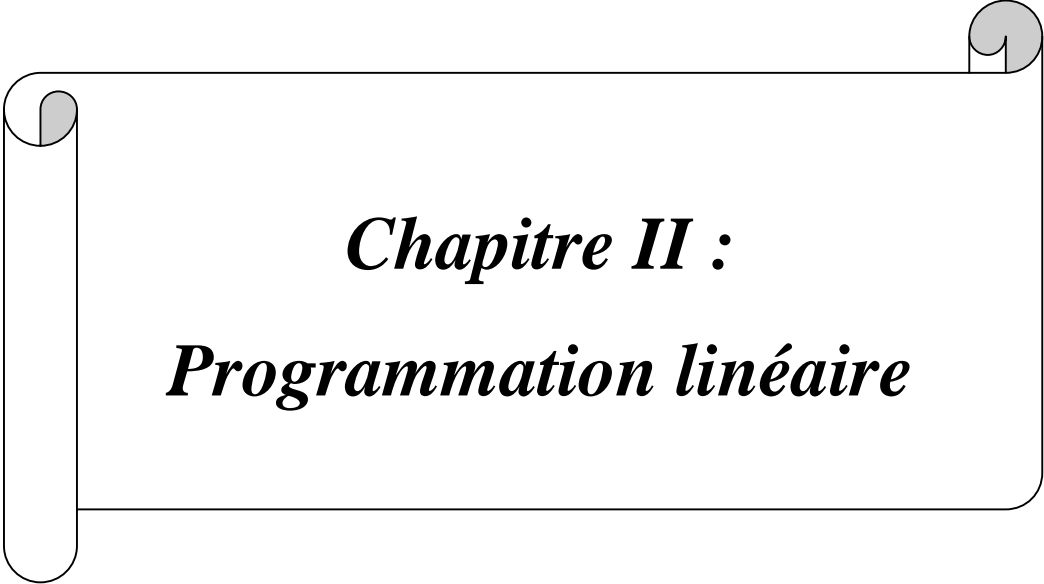
1. Les méthodes variationnelles
2. Le principe de maximum de Pontriaguine
3. La programmation dynamique de Bellman

Chapitre I :
Formulation d'un problème de commande optimale

I.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, la notion de commande optimale a été introduite et expliquée tout en présentant les différents aspects mathématiques de commande optimale.

La résolution d'un problème de commande optimale revient à résoudre un problème d'optimisation dynamique ou les variables de décision sont en fonction de temps. Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature, il est facile de montrer qu'un problème de commande optimale peut se ramener à un problème de programmation linéaire qui peut, facilement, résoudre par les méthodes de programmation linéaire.



Chapitre II : ***Programmation linéaire***

*« L'homme qui sait peu croit savoir beaucoup.
L'homme qui sait beaucoup croit ne rien savoir.
Tout dépend des dimensions que chacun attribue à
ce qu'il sait par rapport à ce qu'il ignore. »*

Chapitre II : *Programmation linéaire :*

II.1.Introduction :

Les premiers problèmes qui marquent le début de la recherche opérationnelle (programmation linéaire) ont été posés pendant la seconde guerre mondiale. À cette époque l'homme a été préoccupé par l'organisation des opérations militaires. Par la suite ces méthodes se sont de plus en plus appliquées aux problèmes économiques, industriels et autres.

La programmation linéaire est l'une des rares cas particuliers pour laquelle on a pu développer un algorithme itératif convergeant en un nombre fini d'itérations, et n'implique que des calculs assez élémentaires.

II.2.Problème de la programmation linéaire : [1]

Dans le cas où la fonction $f(x)$ à minimiser (ou à maximiser) est linéaire et que toutes les contraintes $h_j(x)$ sont linéaires, la méthode de résolution appropriée est la programmation linéaire.

Le problème se pose sous cette forme :

$$\begin{aligned} & \min c x \\ \text{Sujet à : } & Ax=b && \text{(II .1)} \\ & x \geq 0 \\ \text{Et } & x \text{ etc } \in \mathbb{R}^n \\ & b \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

A est une matrice de dimension $n \times m$.

Ceci constitue la forme canonique pour laquelle on cherche une solution optimale.

Chapitre II : Programmation linéaire :

II.3. Résolution par la méthode graphique :

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} & \min c x \\ \text{Sujet à : } & Ax=b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{II .2}$$

Si le nombre de variables est supérieur d'une unité ou deux unités par rapport au nombre d'équations, alors ce problème peut se faire simplement par la méthode géométrique, pour les deux cas :

n : nombre de variable.

m : nombre d'équation.

Cas1 : n-m=1

On fixe une variable par exemple x_1 et on calcule les autres (x_2, x_3, \dots, x_n) variables en fonction de x_1 dont $Ax-b=0$ on obtient :

$$x_2 = a_{21} x_1 + a_2$$

$$x_3 = a_{31} x_1 + a_3$$

·
·

$$x_n = a_{n1} x_1 + a_n$$

On remplace ces variables par leur valeurs dans la fonction objectif qui devient :

$$\min A_1 x_1 + B \tag{II.3}$$

Une fonction d'une seule variable dans le minimum sera trouvée en fonction du signe de A_1 et des bornes de x_1 .

Chapitre II : Programmation linéaire :

Cas2 : $n-m=2$

On fixe deux variables, par exemple x_1 et x_2 et on calcule (x_3, x_4, \dots, x_n) en fonction de x_1 et x_2

$$x_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_3$$

$$x_4 = a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_4$$

·
·

$$x_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_n$$

On remplace dans la fonction objectif qui devient

$$\min A_1 x_1 + A_2 x_2 + \gamma \quad (\text{II.4})$$

Ensuite dans un plan x_1 o x_2 on trace tout les demis plans $x_j \geq 0$ qui donneront le domaine des solutions admissibles, par la suite on tracera la droite

$$Z = \gamma = 0 \text{ qui correspond à } A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0$$

De la, suivant le signe de A_1 et A_2 on trouvera le point extrême qui correspond au minimum.

Remarque II.1 :

L'ensemble D est un ensemble convexe, c'est même un polyèdre. Comme $c x$ est une fonction convexe le minimum est l'un des point extrémums de D.

II.3.1. Exemple :

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$\min (2 x_1 + x_2)$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_5 = 3$$

$$x_j \geq 0$$

Chapitre II :
Programmation linéaire :

$$n=5$$

$$m=3$$

$$n-m=5-3=2$$

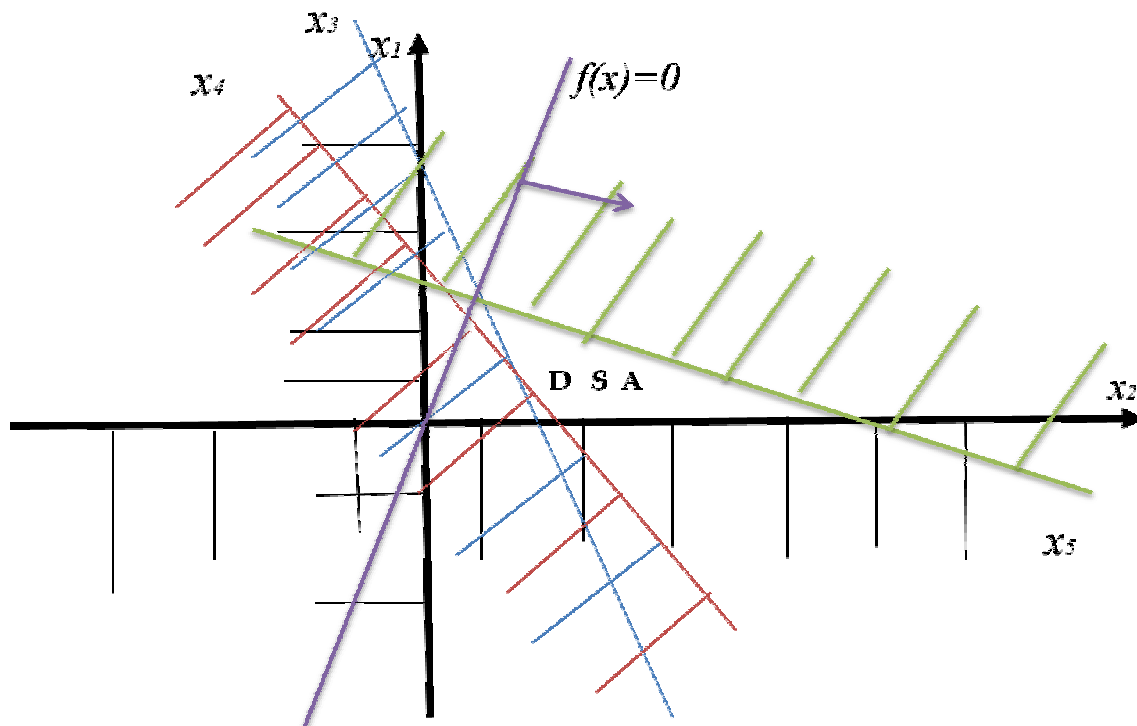
On fixe $3x_1$ et x_2 alors on obtient

$$x_3 = 3x_1 + x_2 - 3$$

$$x_4 = 4x_1 + 3x_2 - 6$$

$$x_5 = -x_1 - 2x_2 + 3$$

$$\min (2x_1 + x_2)$$



Figure(II.2) Domaine admissible.

Chapitre II : *Programmation linéaire :*

L'optimum est l'un des sommets du domaine des solutions admissibles. En remplaçant par leur valeur dans la fonction objectif on trouvera :

D'après la figure (II.2) on a :

$$A \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

$$B \left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5} \right)$$

$$C \left(0, \frac{3}{2} \right)$$

$$D (0,2)$$

On remplace dans $f(x)$ on obtient

$$f(A) = \frac{12}{5}$$

$$f(B) = 3$$

$$f(C) = \frac{3}{2}$$

$$f(D) = 2$$

Alors l'optimum (dans le cas de min) est $f(C) = \frac{3}{2}$ est le point optimal et C $(0, \frac{3}{2})$

II.4.Utilisation des variables d'écart et de variables artificielles :

II.4.1Utilisation des variables d'écart :

On peut mettre sous la forme (II.1) tout problème de la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c} \mathbf{x} \\ \text{Sujet a :} & \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{II .4}$$

Chapitre II : Programmation linéaire :

On pose alors : $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$

$$\bar{A} = [A \quad I]$$

$$\tilde{C} = [C \quad 0]$$

Et on a le problème équivalent

$$\min \tilde{C}\bar{x}$$

$$\text{Sujet a : } \bar{A}\bar{x} = b \tag{II .5}$$

$$\bar{x} \geq 0$$

$$\text{Et } \tilde{C} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \bar{x} \in \mathbb{R}^{n+q}$$

$$b \in \mathbb{R}^q$$

Les variables ($x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+q}$) s'appelle les variables d'écart.

II.4.1.1 Exemple :

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\min (x_1 + 2x_2 + x_3)$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3$$

La forme canonique est :

$$\min (x_1 + 2x_2 + x_3)$$

$$\text{Sujet a : } x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3, 4, 5$$

Chapitre II : *Programmation linéaire :*

Le problème est définitivement posé sous la forme

$$\begin{aligned} & \min \quad \tilde{C}\bar{x} \\ \text{Sujet a :} \quad & \bar{A}\bar{x}=\mathbf{b} \\ & \bar{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{II.6}$$

Remarque II.3 :

- Les n variables de x_i sont appelés les variables principales ou structurelles elles doivent être positives.
- Les q variables de x_{n+j} sont appelés les variables d'écart, elles doivent être positives. On a donc un problèmes à $(n+q)$ variables et q équations.

Tout ensemble de variables $\{ x_j, x_{n+j} \}$ vérifiant le système d'équations est une solution du problème.

- Lorsque de plus cet ensemble vérifie $\bar{x} \geq 0$, il s'agit d'une solution réalisable.
- Une base est constituée par un ensemble de q variables dont les coefficients dans les q équations forment une matrice carrée non singulière (de déterminant non nul) ces q variables sont appelées variables de base. Les n variables sont appelés les variables hors-base, fréquemment on choisira les variables hors-base égale à zéro, les variables de base parfaitement déterminées à l'aide des q équations.
- Si les variables de base sont toutes positives ou nulles on les appellera solution réalisable de base.
- Si toutes les variables de base sont strictement positives alors la solution est dite dégénérée.

Chapitre II : *Programmation linéaire :*

II.4.2 .Utilisation des variables artificielles :

En plus des variables d'écart il y a des cas où on doit ajouter des variables artificielles comme le montrera l'exemple suivant.

II.4.2.1Exemple

Considérons le problème suivant :

$$\min (6x_1 + 5x_2)$$

Sujet à $2x_1 + x_2 \leq 90$

$$3x_1 + x_2 \geq 60$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 180$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 140$$

On transforme les contraintes d'inégalité par ajout des variables d'écart en forme canonique :

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 90$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 = 60$$

$$3x_1 + 6x_2 - x_5 = 180$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_6 = 140$$

Le système comporte quatre équations et six variables inconnues, il faut d'abord trouver une solution acceptable, le premier essai consiste à prendre comme

Chapitre II : *Programmation linéaire :*

variables hors-base x_1 et x_2 (x_1 et $x_2 = 0$), à calculer les variables de base x_3 et x_6 , on remarque que la solution obtenue est inacceptable car les deux variables x_4 et x_5 prendraient des valeurs négatives. On utilise alors la méthode des variables artificielles. Dans les deux équations donnant des variables de base négatives. On rajoute une variable artificielle qui doit être positive ou nulle :

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 60$$

$$3x_1 + 6x_2 - x_5 + x_8 = 180$$

Tandis que les deux autres équations de contraintes restent identiques, le système comporte maintenant quatre équations et huit variables inconnues. On prendra toujours comme variables hors-base x_1 et x_2 auxquelles on rajoute x_4 et x_5 qui posent problème.

On pose toutes les variables hors base égales à zéro $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$

On déduit les valeurs des variables de base

$$x_3 = 90, \quad x_6 = 140, \quad x_7 = 60, \quad x_8 = 180$$

Pour retrouver la solution du problème principale, alors il suffit de résoudre le problème auxiliaire suivant :

$$\min (x_7 + x_8) \tag{II.7}$$

Si l'on trouve un minimum pour l'équation (II.7) nulle. Comme les variables artificielles du problème auxiliaire sont positives, chacune d'entre elles sera nulle.

Après cette phase de résolution du problème auxiliaire on connaît une solution du problème principale que l'on résout. Si l'on ne trouve pas un minimum de la fonction principale nulle les variables artificielles ne peuvent pas être nulles et la solution n'est pas acceptable pour le problème principale.

*Chapitre II :
Programmation linéaire :*

II.5 .Méthode de Simplexe :

L'algorithme de simplexe est une méthode itérative. Le principe de cette méthode consiste à démarrer d'une solution de base et de passer aux point extrêmes voisins ainsi de suite pour simplifier les calculs et les opérations on peut construire une table de simplexe qui résume et réduit tous les calculs et les itérations de l'algorithme de simplexe.

II.5.1 Construction de table de simplexe :

Une fois le problème est sous la forme canonique, on construit la table de simplexe comme suit :

Numéro de la ligne	Vecteur de base			C_1	C_2	C_n	C_{n+1}	...	C_{n+q}
		C_b^T	b	A_1	A_2	A_n	A_{n+1}	...	A_{n+q}
1	A_{n+1}	0	b	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	...	0
2	A_{n+2}	0	b	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0		0
·	·	·	·	·	·	·	·	...	·
·	·	·	·	·	·		·	·		·
q	A_{q+n}	0	b	a_{q1}	a_{q2}		a_{qn}	0	...	1
q+1	$C_b^T A_i - C_i$									

Table (II.1) : Table de simplexe

$$(q+1, b) = C_b^T \tag{II.8}$$

$$(q+1, A_i) = (q+1, C_i) = C_b^T A_i - C_i \tag{II.9}$$

Chapitre II : Programmation linéaire :

II.5.2. Recherche de l'optimum

Après la construction de la table de simplexe, on déroule l'algorithme pour déterminer l'optimum (solution de problème).

II.5.2.1. Détermination de la colonne clef (le vecteur rentant dans la base) :

- ✓ Problème de maximisation : la colonne clef est celle correspondante au minimum des éléments négatifs dans la ligne (q+1).

- ✓ Problème de minimisation : la colonne clef est celle correspondante au maximum des éléments positifs dans la ligne (q+1).

II.5.2.2. Détermination de la ligne clef (le vecteur sortant dans la base) :

Supposons que le vecteur rentrant dans la base est a_i , alors le vecteur sortant de base est celui correspondant à l'élément b_j déterminé comme suit :

$$\min \left(\frac{b_1}{a_{1i}}, \frac{b_2}{a_{2i}}, \dots, \frac{b_q}{a_{qi}} \right) \quad (\text{I.10})$$

Remarque II.4 :

On considère seulement les éléments positives de A_i ($a_{ij} \geq 0$).

II.5.2.3. Détermination de l'élément pivot α :

Il est l'élément correspond à l'intersection de la colonne clef avec la ligne clef :

$$\alpha = A(\text{ligne clef}, \text{colonne clef}).$$

Chapitre II : *Programmation linéaire :*

II.5.2.4. Détermination de la ligne correspondante au vecteur entrant (nouvelle ligne) :

Cette nouvelle ligne est déterminée en divisant la ligne clef par l'élément pivot α .

II.5.2.5 Introduction du vecteur unitaire A_I :

On cherche les combinaisons linéaires entre la nouvelle ligne trouvée et le reste des lignes d'une façon à rendre le vecteur entrant A_i correspondant à la colonne B_i , un vecteur de base.

II.5.2.6. Détermination du vecteur unitaire :

On détermine les éléments de la nouvelle ligne par la relation (II.8) et (II.9).

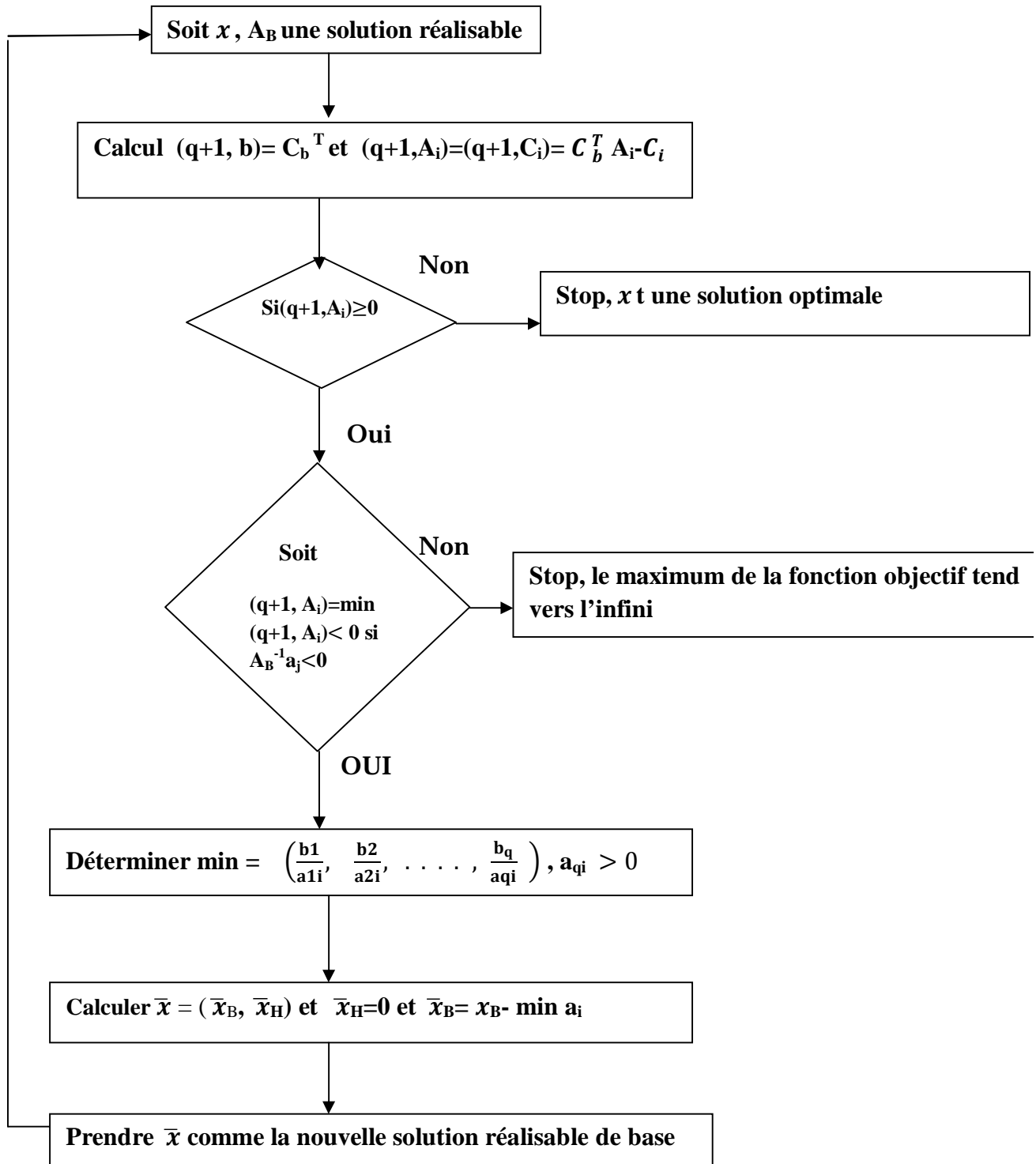
II.5.3.Examen de la ligne (q+1) :

Si la ligne (q+1) des éléments négatifs (dans le problème de minimisation il s'agit des éléments positifs) alors on refait les étapes (52.1) et (52.6) jusqu'à ce que tous les éléments de ligne (q+1) sont positifs. Dans ce cas l'optimum x^* est atteint et défini par les éléments de la colonne b. La valeur maximale prise par la fonction objectif est la valeur qui se trouve dans la case (q+1, b) à la dernière itération.

La solution optimale du problème x^* est donnée par les éléments du vecteur b avec les variables hors base nulle.

Chapitre II :
Programmation linéaire :

II.5.4. Organigramme de l'algorithme de simplexe : [5]



\bar{x}_B désignes les variables de base.

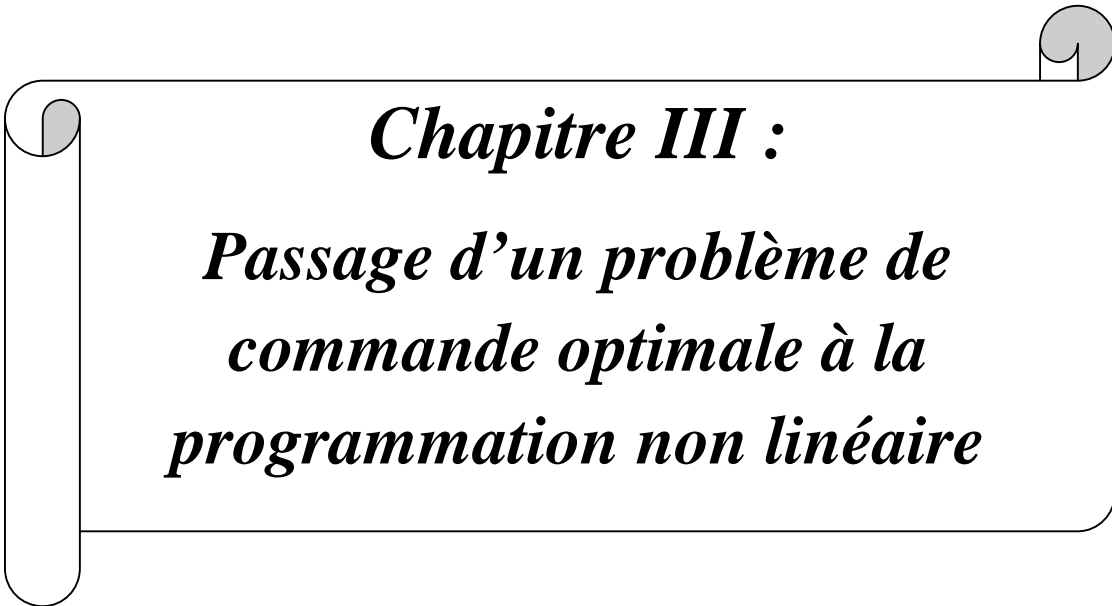
\bar{x}_H désigne les variables hors base.

Chapitre II : *Programmation linéaire :*

II.6.Conclusion :

Ce chapitre est consacré à la programmation linéaire et sa résolution par la méthode de simplexe qui est une méthode itérative et très utilisée. De plus il faut noter la simplicité et la facilité de la programmation de cette méthode.

Le chapitre suivant sera consacré pour la formulation d'un problème de commande optimal sous forme d'un problème d'optimisation statique dont la solution peut être calculée par la méthode présentée dans ce chapitre.

A decorative scroll graphic with a white background and a black border. The scroll is unrolled in the middle, with the top and bottom edges curled up. The text is centered within the unrolled portion.

Chapitre III :
***Passage d'un problème de
commande optimale à la
programmation non linéaire***

*« Quelle que soit l'étendue de notre connaissance de l'univers,
elle reste à l'échelle de l'homme. Il est commode de dire que
l'univers est infini, c'est le sens même de l'infini dans
l'espace et dans le temps, qui nous échappe et nous déconcerte. »*

III.1.Introduction :

Dans ce chapitre on présente une méthode de résolution d'un problème de commande optimale par programmation linéaire. L'idée consiste à ramener le problème de recherche de l'optimum de la fonction cout de sa forme dynamique à une forme statique cela dans le but d'appliquer l'algorithme de l'optimisation vus dans le chapitre précédent vue son efficacité, sa rapidité de convergence et surtout sa facilite de programmation.

III.2.Discrétisation de problème de commande optimale : [4]

Vu que la méthode d'optimisation étudiée précédemment (la méthode de simplexe) est une méthode itérative et peut être appliquée pour des problèmes de commande optimale. Ainsi, en discrétisant le modèle et le critère et en considérant comme variables de décisions les commandes à appliquer à des instants d'échantillonnage.

La forme continue d'un problème de commande optimale est donnée comme suit :

$$\min J(x(t), u(t), t) \quad (\text{III.1})$$

Avec $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ (III.2)

Et les contraintes qui peuvent être de type égalité ou inégalité :

Type égalité : $G(x(t), u(t), t)=0$ (III.3)

Type inégalité : $H(x(t), u(t), t)\leq 0$ (III.4)

Domaine admissible :

$$u(t) \in U(t)$$

Désignons par

Δt : La période d'échantillonnage.

K : Numéro de l'itération.

N : Nombres d'itérations.

J^* : Critère optimale.

u^* : Commande optimale.

III.2.1. Discrétisation de modèle :

Pour le modèle de système donné par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\text{III.5})$$

La discrétisation est comme suit

Pour le premier terme

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} \quad (\text{III.6})$$

Pour le deuxième terme il donne

$$f(x(t), u(t), t) = F_V(x(k), u_k, k) \quad (\text{III.7})$$

Ce qui donne le modèle sous la forme discrète comme suit

$$x(k+1) = \Delta t F_{\nabla}(x(k), u_k, k) + x(k) \quad (\text{III.8})$$

Cette forme est une forme récursive.

III.2.2. Discrétisation du critère :

On considère le problème de Bolza dont le critère a une forme générale contenant une partie terminale et une partie intégrale.

$$J = r_0(x_0, t_0, x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} r(x(t), u(t), t) dt \quad (\text{III.9})$$

Après discrétisation on obtient

$$J(x_0(k), u_k, k) = r_0(N\Delta t) + \sum_1^N r_k(x(k), u_k, k)\Delta t \quad (\text{III.10})$$

II.2.3. Discrétisation des contraintes :

La discrétisation des contraintes donne :

$$\text{Type égalité :} \quad G(x(k), u_k, k) = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$\text{Type inégalité :} \quad H(x(k), u_k, k) \leq 0 \quad (\text{III.12})$$

Domaine admissible :

$$u(k) \in U(k) \quad (\text{III.13})$$

En résumé, le problème de commande optimale discrétisé prend la forme :

$$\min r_0 (N\Delta t) + \sum_1^N r_k (x(k), u_k, k)\Delta t$$

Avec $x(k+1) = \Delta t F_{\nabla}(x(k), u_k, k) + x(k)$

$$G(x(k), u_k, k) = 0$$

$$H(x(k), u_k, k) \leq 0$$

III.3. Résolution du problème de commande optimale :

Connaissions la relation reliant l'état $x(k)$ à la commande u_k et connaissant les conditions initiales de l'état, c'est-à-dire les conditions initiales $x(0)$, on peut donc déterminer $x(k)$ en fonction de u_k et cela $\forall k = 1, \dots, N$

On a alors $x(k) = \Psi_{x(0)}(u)$ tel que $\Psi_{x(0)}(u) = \begin{bmatrix} \Psi_1(u) \\ \Psi_2(u) \\ \vdots \\ \Psi_N(u) \end{bmatrix}$ (III.14)

Pour obtenir ce dernier il suffit de fixer $x(0)$ et montrer qu'il existe une fonction $\Psi_{x(0)}$ telle que $x(k) = \Psi_{x(0)}(u)$ il suffit de considérer la suite de fonction suivante:

$$\Psi_0 = \Delta t F_{\nabla}(u_0, x(0), 0) = x(0)$$

$$\Psi_1 = \Delta t F_{\nabla}(u_1, F_{\nabla}(u_0, x(0), 0), 1) = x(1)$$

:

$$\Psi_N = \Delta t F_{\nabla}(u_{k-1}, F_{\nabla}(u_{0k-2}, F_{\nabla}(\dots, F_{\nabla}(u_0, x(0), 0) \dots)k-2), k-1) = x(N)$$

$$\text{Et de poser : } \Psi_{x(0)}(u) = \begin{bmatrix} \Psi_1(u) \\ \Psi_2(u) \\ \vdots \\ \Psi_N(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Ce qui permet d'exprimer le critère $J(x_0(k), u_k)$ comme une fonction de u_k seulement :

$$J(x_0(k), u) = J(\Psi_{x(0)}(u), u) = \hat{J}(u) \quad (\text{III.16})$$

De même pour les contraintes elles deviennent

$$G(\Psi_{x(0)}(u), u) = 0 \quad (\text{III.17})$$

$$H(\Psi_{x(0)}(u), u) \leq 0 \quad (\text{III.18})$$

Par conséquent le problème d'optimisation devient :

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{J}}(u) \\ \text{Sujet a } & \begin{bmatrix} G(\Psi_{x(0)}(u), u) = 0 \\ H(\Psi_{x(0)}(u), u) \leq 0 \\ x(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

D'une manière générale ce problème d'optimisation est non linéaire, ce qui nécessite des méthodes de programmation non linéaires. Dans le cas d'un système linéaire avec un critère linéaire, le problème se ramène à un problème de programmation linéaire qu'on peut résoudre facilement en nombre fini d'itérations par la méthode de simplexe.

III.4. Exemple :

On considère le problème de commande suivant

$$\min \int_0^T [x^2(t) + u^2(t)] dt$$

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + u(t)$$

$$-a \leq u < 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$

On discrétise ce système en considérant les conditions initiales suivantes :

$$x_0=0$$

$$u_0=0$$

Avec $N=5$ c'est-à-dire $k=0, 4$.

et : $T=10s$

Donc le critère devient

$$J = \min \sum_{k=1}^5 [x^2(k) + u^2(k)]$$

Et l'équation d'état de système :

$$x(k+1) = (2\Delta t + 1) x(k) + \Delta t u(k)$$

Après des calculs on obtient

$$\text{Pour } k=0 \Rightarrow x(1) = 0$$

$$\text{Pour } k=1 \Rightarrow x(2) = 2 u_1$$

$$\text{Pour } k=2 \Rightarrow x(3) = 10 u_1 + 2 u_2$$

Chapitre III :
Passage d'un problème de commande optimale à la programmation linéaire

Pour $k=3 \Rightarrow x(4) = 50 u_1 + 10 u_2 + 2 u_3$

Pour $k=1 \Rightarrow x(5) = 250 u_1 + 50 u_2 + 10 u_3 + 2 u_4$

Et le critère

$$\min(10500u_1^2 + 5400u_2^2 + 210u_3^2 + 10u_4^2 + 72042u_1u_2 + 10440u_1u_3 + 2000u_1u_4 + 1080u_2u_3 + 400u_2u_4 + 44u_3u_4)$$

Les contraintes :

$$-1 \leq u_1 \leq 1$$

$$-1 \leq u_2 \leq 1$$

$$-1 \leq u_3 \leq 1$$

$$-1 \leq u_4 \leq 1$$

$$-1 \leq u_5 \leq 1$$

$$0 \leq x(1) \leq 2 \quad \Rightarrow x(1) = 0$$

$$0 \leq x(2) \leq 2 \quad \Rightarrow 0 \leq 2 u_1 \leq 2$$

$$0 \leq x(3) \leq 2 \quad \Rightarrow 0 \leq 10 u_1 + 2 u_2 \leq 2$$

$$0 \leq x(4) \leq 2 \quad \Rightarrow 0 \leq 50 u_1 + 10 u_2 + 2 u_3 \leq 2$$

$$0 \leq x(5) \leq 2 \quad \Rightarrow 0 \leq 250 u_1 + 50 u_2 + 10 u_3 + 2 u_4 \leq 2$$

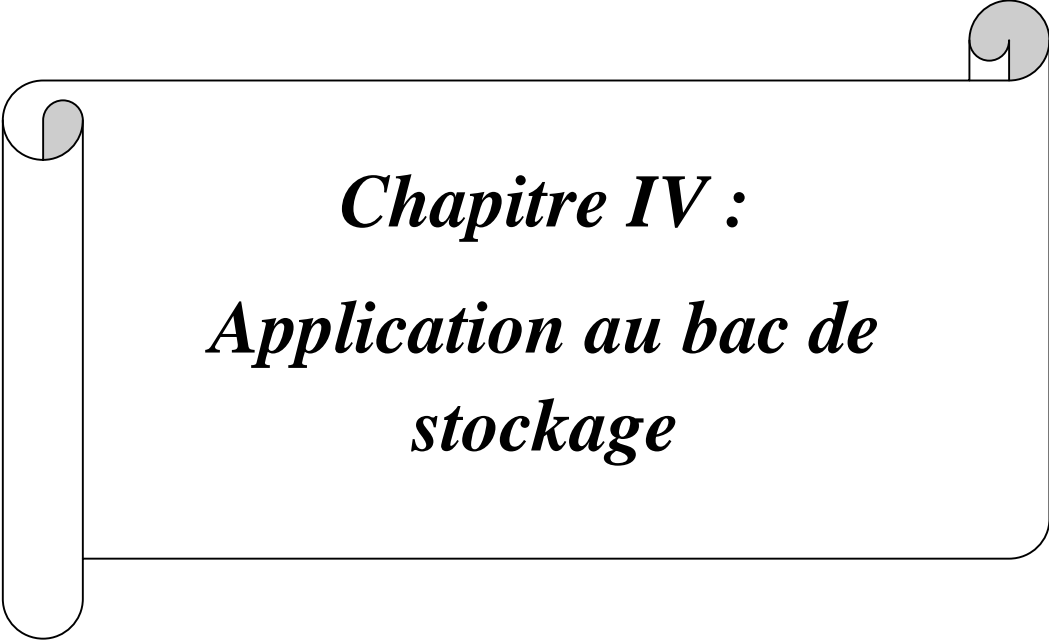
Remarque :

La nature du problème d'optimisation (linéaire ou non linéaire) dépend du système, des contraintes, et du critère. Mais pour certains applications, on peut se ramène facilement à un problème de programmation linéaire en linéarisant les composantes du problème de commande optimale autour d'un point de fonctionnement.

III.5.Conclusion :

Dans ce chapitre, une démarche de résolution d'un problème de commande optimal (optimisation dynamique) a été présentée. Il a été montré que la résolution d'un problème de commande optimal peut se ramener à un problème de programmation non linéaire. Puis une méthode de programmation linéaire peut être appliquée pour déterminer la séquence des commandes à appliquer qui représente le vecteur de variables de décision.

Cette démarche sera illustrée dans le chapitre suivant, par une application au remplissage optimale d'un bac de stockage sans débordement. On montrera que le problème de commande optimale se ramène facilement à un problème de programmation linéaire qu'on peut résoudre aisément par l'algorithme de simplexe.



Chapitre IV :
Application au bac de
stockage

*« Dans le courant alternatif de la vie, le bonheur est une
lumière éphémère dans la conjonction des événements.
On trouve plus facilement l'interrupteur qui l'éteint que
celui qui l'allume. »*

Chapitre VI : *Application au bac de stockage*

VI.1.Introduction :

Après avoir consacré les trois premiers chapitres aux outils et les théories mathématiques relatifs à l'optimisation en général et à la commande optimale en particulier. Ce dernier chapitre illustre la démarche d'optimisation d'une commande dynamique d'un système non linéaire basée sur la programmation linéaire.

Avant tout application de la théorie, il faut avoir le modèle de procédé. Pour cela deux approches complémentaires sont possibles pour développer un modèle pour le système.

La première méthode est l'identification qui consiste à exciter le système par une entrée connue et à développer un modèle à partir des mesures obtenues. La deuxième méthode, utilisée dans ce chapitre, consiste à écrire les équations physiques du système.

VI .2.Présentation du bac de stockage : [3]

Le bac de stockage est un procédé de transfert de matière, généralement utilisé dans les grandes installations industrielles chimiques et hydrauliques la plupart du temps, il est souvent placé dans les systèmes de transfert de liquide tel que les raffineries, les laboratoires médicaux.

Le bac de stockage ou réservoir, à commander est équipé de deux vannes placées d'une part dans la canalisation d'entrée et d'autre part à la sortie du réservoir. Le schéma synoptique du bac de stockage est illustré par la Figure VI.1.

Chapitre VI : *Application au bac de stockage*

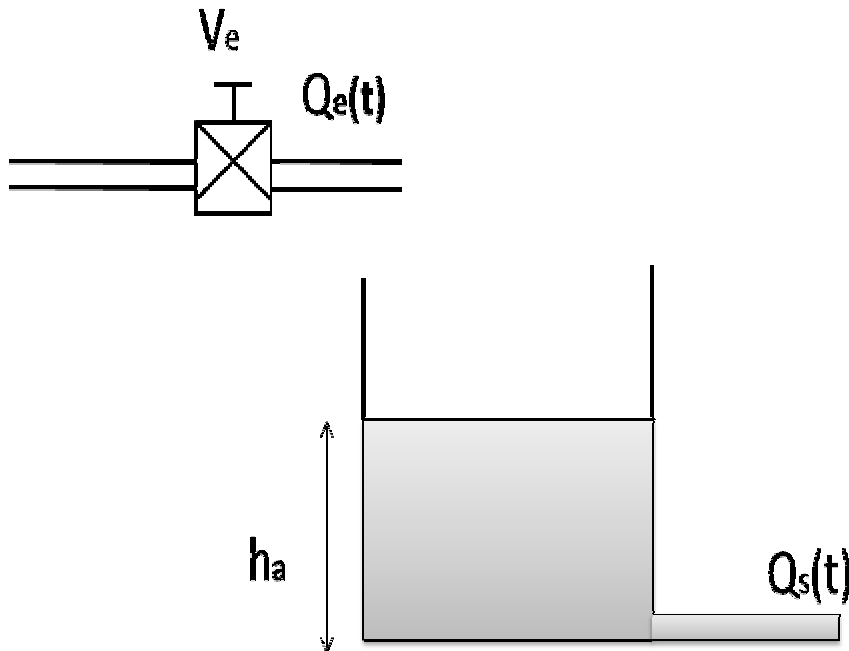


Figure VI.1. Bac de stockage

V_e : est la vanne d'entrée du réservoir.

$Q_s(t)$: est le débit sortant du bac.

h_a : est la hauteur du liquide dans le bac.

$Q_e(t)$: est le débit entrant.

S_e : est la section du bac.

VI.3.Modélisation du bac de stockage :

La phase de modélisation est essentielle dans l'analyse et la synthèse de la commande le modèle mathématique est défini comme un ensemble d'équation différentielle et algébrique qui représente le comportement dynamique du système.

La démarche de modélisation d'un procédé peut se faire de la manière suivante :

Chapitre VI : *Application au bac de stockage*

1. Définition du système à modaliser.
2. Description des variables (variables d'entrées et de sortie, variables d'états).
3. Ecriture des équations du modèle (écriture des équations reliant tout les variables).
4. Obtention du modèle.

VI.3.1. Système à modéliser :

Dans le cas du réservoir, on s'intéresse à modéliser le phénomène de remplissage et de vidange, donc la variation de la hauteur de liquide de bac.

VI. 3 .2. Analyse des variables :

- œ Variables d'état : la hauteur de liquide.
- œ Variables d'entrée : le débit de d'alimentation.
- œ Variable de sortie : la hauteur de liquide h_a .

VI.3.3. Écriture des équations du modèle :

1. Relation de la conservation de volume :

Pour cette relation. On considère que la variation de la hauteur du liquide dans le bac est égale à la différence entre le débit d'entrée (entrée principale Q_e) et le débit de sortie, ainsi, il est exprimé comme suit :

$$s_e \frac{dh_a}{dt} = (Q_e - Q_s) \quad (\text{VI.1})$$

2. Conditions d'équilibre du système :

A l'état d'équilibre, le débit de sortie est égal au débit d'état d'entre, c'est-à-dire

$$Q_e = Q_s \quad (\text{VI.2})$$

Chapitre VI : *Application au bac de stockage*

3. Loi de Bernoulli :

Pour un écoulement turbulent, on a le débit de sortie qui est lié à la hauteur du réservoir par la relation :

$$Q_s = \gamma \sqrt{h_a} \quad (\text{VI.3})$$

γ est une constante

4. Stabilisation du niveau :

D'après les équations (VI.1) et (VI.2), le niveau de liquide se stabilise à la hauteur

$$h_a = \frac{Q_e}{\gamma} \quad (\text{VI.4})$$

VI.3.4. Forme générale du modèle :

A partir de la relation (VI.1) et (VI.3) il vient

$$S_e \frac{dh_a}{dt} + \gamma \sqrt{h_a} = Q_e \quad (\text{VI.5})$$

On considère le changement de variables suivant :

$$u(t) = Q_e$$

$$x(t) = h_a$$

Alors

$$s_e \dot{x}(t) = -\gamma \sqrt{x(t)} + u(t) \quad (\text{VI.6})$$

$$\dot{x}(t) = \frac{-\gamma}{s_e} \sqrt{x(t)} + \frac{1}{s_e} u(t) \quad (\text{VI.7})$$

Le modèle est sous forme d'une équation différentielle du premier ordre non linéaire avec seconde membre.

Chapitre VI : *Application au bac de stockage*

VI.3.5. Linéarisation : [2]

On considère un point de fonctionnement x_c et u_c et soient les variables d'écart suivantes :

$$\tilde{x} = x - x_c$$

$$\tilde{u} = u - u_c$$

On linéarise autour des points de fonctionnement

$$\tilde{x}(t) = \left[\frac{\partial x(t)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial x(t)}{\partial u(t)} \right] \quad (\text{VI.8})$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{-\gamma}{2s_e \sqrt{x_c}} \tilde{x} + \frac{1}{s_e} \tilde{u} \quad (\text{VI.9})$$

En posant

$$\lambda_1 = \frac{\gamma}{2s_e \sqrt{x_c}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{s_e}$$

$$\text{Donc : } \tilde{\dot{x}} = -\lambda_1 \tilde{x} + \lambda_2 \tilde{u} \quad (\text{VI.10})$$

VI.4. Commande du bac de stockage :

Dans cette section, on formule le problème de remplissage du bac de stockage. Pour cela, on considère le modèle linéaire (VI.9). L'objectif est de remplir le bac de stockage de manière à atteindre un niveau de liquide désiré mais sans avoir des dépassements. Ainsi, le problème de commande optimale est formulé comme suit :

Soit le problème de cette forme

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t) \quad (\text{VI.11})$$

Condition initiale

$$x(0) = x_0$$

Chapitre VI :
Application au bac de stockage

Le critère à minimiser (sans dépassements) est :

$$J = \left[\int_0^T (x_d - x(t)) \right] dt \quad (\text{VI.12})$$

La première étape consiste à ramener ce problème de commande optimale à un problème de programmation linéaire :

Discrétisation du modèle :

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{dt} = -ax(k) + u(k) \quad (\text{VI.13})$$

$$x(k + 1) = (1 - adt)x(k) + dtu(k) \quad (\text{VI.14})$$

On pose $\beta = (1 - adt)$

Alors $x(k + 1) = \beta x(k) + dtu(k)$ (VI.15)

Donc pour

$$k=0 \Rightarrow x(1) = \beta x(0) + dt u(0)$$

$$k=1 \Rightarrow x(2) = \beta x(1) + dt u(1)$$

$$x(2) = \beta^2 x(0) + \beta dt u(0) + dt u(1)$$

$$k=2 \Rightarrow x(3) = \beta x(2) + dt u(2)$$

$$x(3) = \beta^3 x(0) + \beta^2 dt u(0) + \beta dt u(1) + dt u(2)$$

⋮

$$k=N \Rightarrow x(N+1) = \beta^{N+1} x(0) + \beta^N dt u(0) + \beta^{N-1} dt u(1) + \dots + dt u(N)$$

Chapitre VI :
Application au bac de stockage

Le critère à minimiser prend la forme suivante :

$$J = \sum_{i=1}^N (x_d - x_i) \quad (\text{VI.16})$$

Puisque x_{di} sont constants, le problème de minimisation de J revient à maximiser le nouveau critère

$$J' = \sum_{i=1}^N (x_i) \quad (\text{VI.17})$$

En exprimant ce critère en fonction des variables de décision, le critère est :

$$J' = x(1) + x(2) + x(3) + \dots + x(N). \quad (\text{VI.18})$$

$$J' = x(0) \sum_{i=1}^N \beta^i + dt u(0) \sum_{j=0}^{N-1} \beta^j + dt u(1) \sum_{j=0}^{N-2} \beta^j + \dots + dt u(N) \quad (\text{VI.19})$$

Comme le premier terme est constant, le problème d'optimisation prend la forme finale suivante :

Maximiser la fonction objective suivante :

$$J' = \sum_{i=0}^N c_i u_i \quad (\text{VI.20})$$

Avec $c_i = \sum_{j=1}^{N-1-i} \beta^j$

Soumise aux contraintes suivantes :

$$dt u(0) \leq x_{1d} - \beta x(0)$$

$$\beta dt u(0) + dt u(1) \leq x_{2d} - \beta^2 x(0)$$

⋮

$$\beta^N x(0) + \beta^{N-1} dt u(0) + \beta^{N-2} dt u(1) + \dots + dt u(N) \leq x_{(N+1)d} - \beta^N x(0)$$

Chapitre VI : *Application au bac de stockage*

Alors le problème s'écrit sous cette forme

$$\max \sum_{i=1}^N c_i u_i$$

$$dt u(0) \leq b_1$$

$$\beta dt u(0) + dt u(1) \leq b_2$$

⋮

$$\beta^{N-1} dt u(0) + \beta^{N-2} dt u(1) + \dots + dt u(N) \leq b_{N+1}$$

La résolution par la méthode de simplexe du problème de programmation linéaire donne la séquence de commande $u(0), u(1), u(2), \dots, u(N)$ à appliquer pour le système.

VI.5. Simulation :

Dans cette partie, on présente les résultats de simulation obtenus. L'objectif est de remplir le bac de stockage à niveau de $x_d = 2m$ bien sûr en évitant des dépassements.

Les figures VI.2.a et VI.2.b donne l'évolution de la commande et du niveau dans le bac de stockage respectivement. Le nombre de variables de décision N est égal à 25 (horizon de commande) et la période d'échantillonnage dt est égale à 0.1s. Les figures donnent les résultats obtenus pour $N=50$ et les figures VI.4.a et VI.4.b concerne le cas d'une période d'échantillonnage de 0.01s avec un horizon de commande $N=25$.

L'examen des résultats de la simulation obtenus montre que la sortie commandée atteint la valeur désirée après un certain nombre de période d'échantillonnages. La même remarque est faite même en changeant la période d'échantillonnages.

Chapitre VI : *Application au bac de stockage*

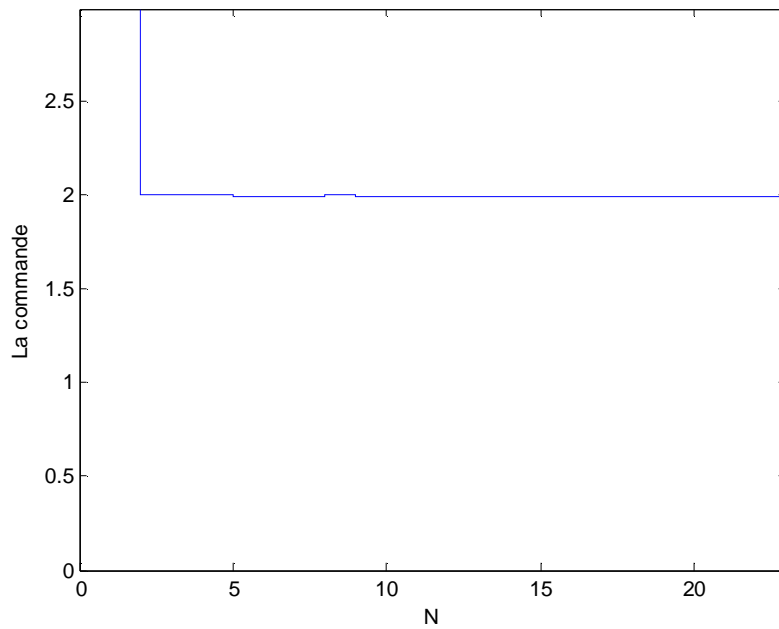


Figure VI. a. Evolution de La commande (pour N=25 et dt=0.1)

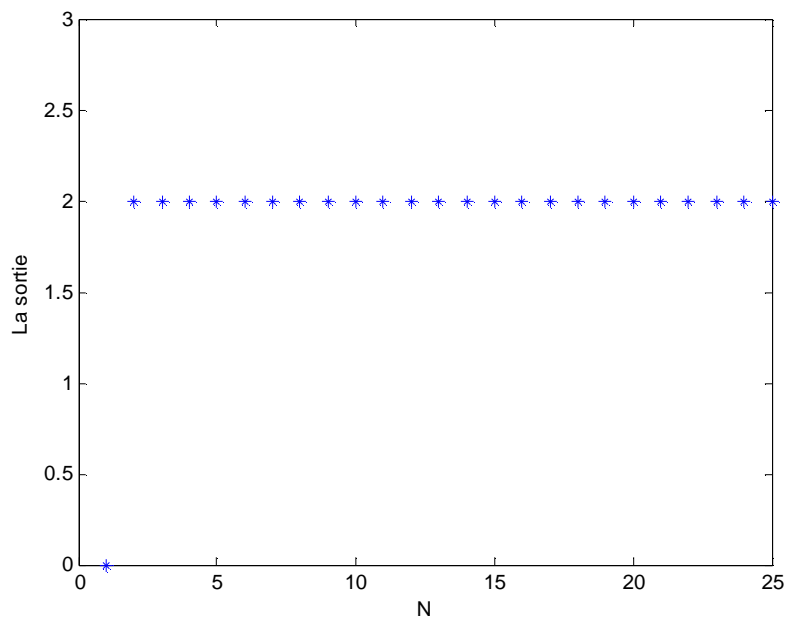


Figure VI.2.b. Evolution de La sortie (pour N=25 et dt=0.1)

Chapitre VI : Application au bac de stockage

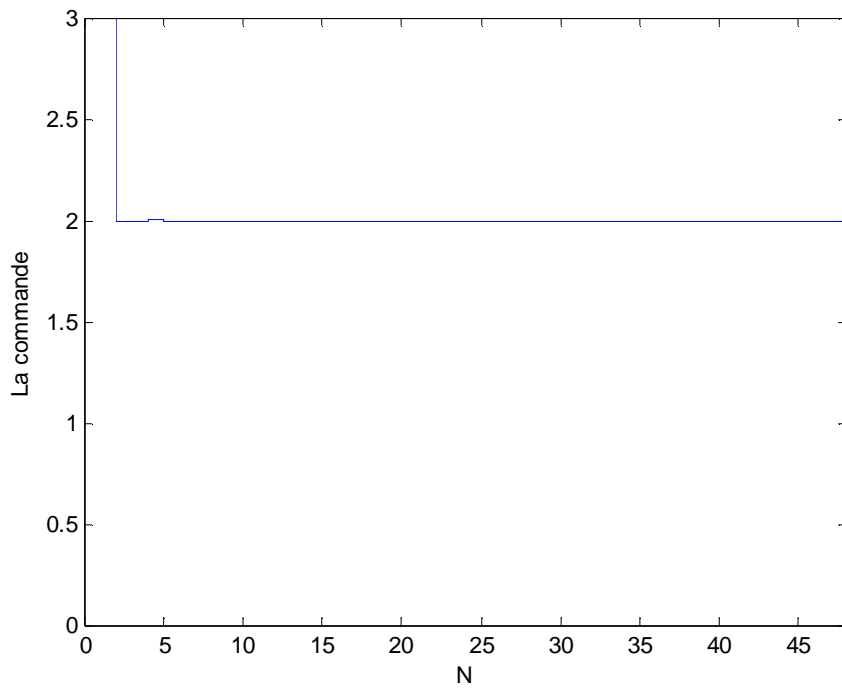


Figure VI.3.a. Evolution de La commande (pour N=50 et dt=0.1)

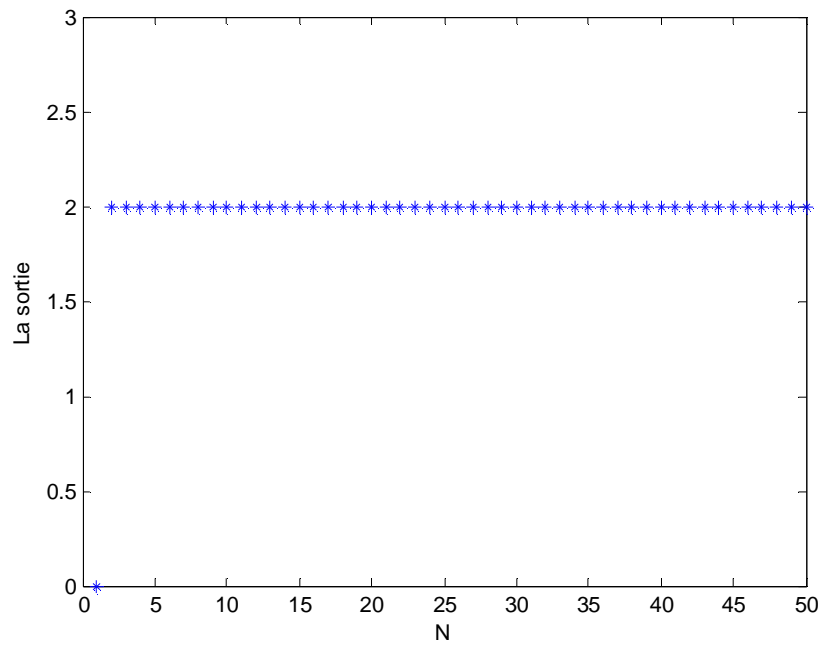


Figure.3.b. Evolution de La sortie (pour N=50 et dt=0.1)

Chapitre VI : *Application au bac de stockage*

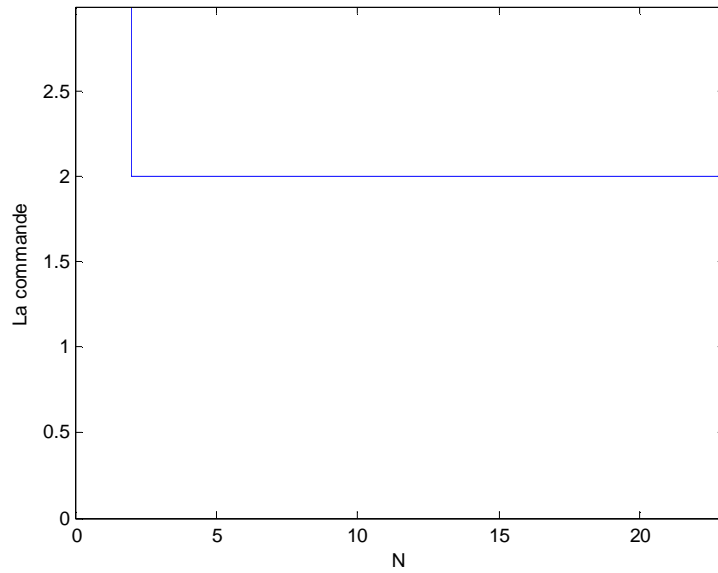


Figure VI.4.a. Evolution de La commande (pour N=25 et dt=0.01)

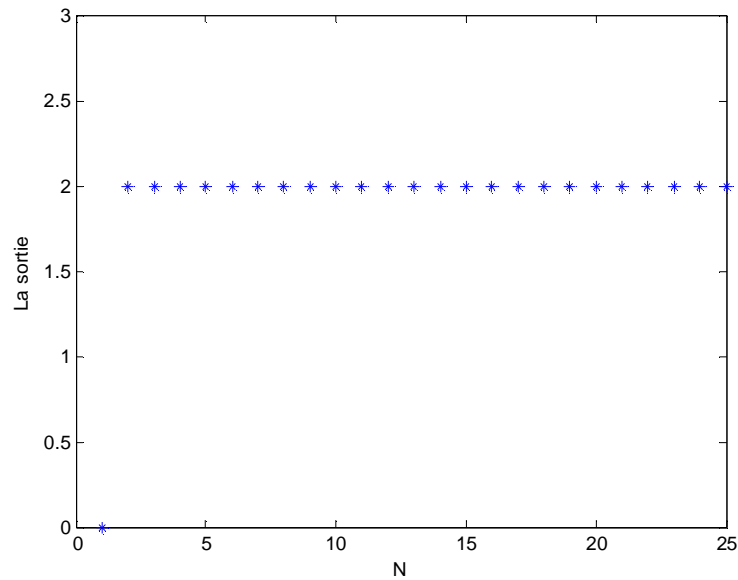


Figure.4.b. Evolution de La sortie (pour N=25 et dt=0.01)

Chapitre VI : *Application au bac de stockage*

VI.6.Conclusion :

Dans ce chapitre, on a étudié le problème de commande optimale de remplissage de bac de stockage. L'objectif est d'atteindre un niveau désiré sans dépassements. On a montré que ce problème se ramène simplement à un problème de programmation linéaire dont la solution est facile à obtenir, en un certain nombre d'itération, avec la méthode de simplexe. Le vecteur de variables de décision représente la séquence de la commande à appliquer.

Les résultats de simulation confirment la justesse de l'approche suivie, et la sortie du système atteint la consigne désirée en certain nombre de période d'échantillonnage.



La conclusion générale

*« Les guerres ont lieu quand elles sont nécessaire.
Puis les récoltes poussent, et les bavardages taisent
devant le sérieux de l'histoire. »*

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes dynamiques en présence de contraintes sur les variables d'états et de commande.

L'objectif du travail consiste à étudier la transformation des problèmes de commande optimale en des problèmes de programmation linéaire, dans le but de les solutionner en utilisant la méthode du simplexe de programmation linéaire.

Ainsi, après avoir revu les différentes notions relatives de formulation des problèmes de commande optimale, on a esquissé les différentes méthodes de résolution des problèmes d'optimisation. Par la suite, une démarche de transformation d'un problème de commande optimale en problème de programmation linéaire a été présentée. Pour illustrer la démarche une application portant sur le remplissage optimale, et sans dépassement, d'un bac de stockage a été présentée.

D'après les résultats obtenus dans l'application, on constate que la démarche suivie permet de répondre convenablement aux exigences imposées par cahier de charge. Ainsi, on peut confirmer que la transformation d'un problème de commande optimale en un problème de programmation linéaire constitue une intéressante alternative pour la résolution des problèmes de commande optimale, puisque la résolution du problème d'optimisation finale (programmation linéaire) se fait en nombre d'interactions fini.

Comme suite du travail, il est intéressant de penser à utiliser les méthodes stochastiques, comme les algorithmes génétiques, pour la résolution des problèmes de commande optimale.



La bibliographie

La bibliographie

[1] **.A .MAIDI.** Cours de la théorie d'optimisation et de la théorie de la commande optimale ; Département d'automatique, UMMTO, 2005.

[2]. **A. MAIDI.** Cours de modalisation et d'identification ; Département d'automatique, UMMTO, 2005.

[3] **.O . HABET, A. HACHEMI, S. YESLI.** *SYNTHESE D'UN CORRECTEUR PROPORTIONNEL INTEGRAL DERIVE OPTIMAL BASEE SUR LA COMMANDE LENEAIRE QUADRITIQUE (L Q R).* Mémoire de fin d'études, Département d'Automatique, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Promotion2006.

[4] **.IDIR AIT TAYEB.** *OPTIMIASATION DE LA COMMANDE DE SYSTEME NON LENEAIRE EN PRESENCE DE CONTRAINTE SUR LE VECTEUR DE COMMANDE ET LE VECTEUR D'ETAT.* Mémoire de fin d'études, Département d'Automatique, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Promotion2006.

[5]. **M. AIDEN, O.OUKACHA.** Recherche Opérationnelle 'Programmation linéaire', page bleu.

[6]. **J.P.Babary et W. Pelcczewski.** *Commande optimale des systèmes continue Déterministes,* Masson, Paris, 1985. (C95)



Résumée

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes dynamiques en présence de contraintes sur les variables d'états et de commande.

L'objectif du travail consiste à étudier la transformation des problèmes de commande optimale en des problèmes de programmation linéaire, dans le but de les solutionner en utilisant la méthode du simplexe de programmation linéaire.

Ainsi, après avoir revu les différentes notions relatives de formulation des problèmes de commande optimale, on a esquissé les différentes méthodes de résolution des problèmes d'optimisation. Par la suite, une démarche de transformation d'un problème de commande optimale en problème de programmation linéaire a été présentée. Pour illustrer la démarche une application portant sur le remplissage optimale, et sans dépassement, d'un bac de stockage a été présentée.