

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



**Mémoire de Master II**  
en  
**RECHERCHE OPERATIONNELLE**

Thème

**Étude Stochastique et déterministe du modèle de Black-Scholes  
Application à l'étude d'une option européenne**

Présenté par  
KHELOUFI Houria

Devant le jury d'examen composé de :

Mr Aidene Mohammed	Professeur	UMMTO	Président
Mme Khellas Fazia	Maître de conférences A	UMMTO	Rapporteur
Mr Hamadouche Djamel	Professeur	UMMTO	Examineur
Mr Berkoun Youcef	Maître de conférences A	UMMTO	Examineur
Mr Mellah Omar	Maître Assistant A	UMMTO	Examineur

Soutenu le \*\* / 10 / 2011

## *Remerciements*

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce mémoire.

Je voudrais remercier profondément ma chère promotrice Mme Khellas pour le temps qu'elle m'a consacré, pour la confiance et les encouragements qu'elle m'a manifesté, et pour sa grande disponibilité. Son enthousiasme scientifique et sa vision sur la modélisation mathématique et son exigence sur la rédaction ont laissé sur moi beaucoup d'influence. Je lui adresse de chaleureux remerciements.

Je remercie aussi les autres membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de lire et juger ce travail.

Mes remerciements vont également à ma chère famille et ma très chère amie Fetta qui m'ont toujours soutenus et aidé et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## *Dédicaces*

Je dédie ce mémoire à:

- Ma très chère soeur Linda, et ma très chère amie Fetta.
- Mes chères parents et ma chère promotrice .
- Mes chères frères Karim et Mustapha.
- Mes cousines et mes proches.
- Mes oncles et mes tantes en particulier tante Djamila.
- Tout mes amis, en particuliers, Nadjiba, Nachida, Abdenour, Nabil, Kamel, Ghania, Imen, et tout mes camarades.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités financières</b>	<b>7</b>
1.1	Termes financiers . . . . .	7
1.2	Problèmes d'option . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Éléments d'analyse stochastique</b>	<b>13</b>
2.1	Mouvement brownien . . . . .	14
2.2	Martingales à temps continu . . . . .	17
2.2.1	Inégalité maximale et théorème limite de martingales . . . . .	18
2.2.2	Exemples de martingales Browniennes . . . . .	18
2.3	Intégrale stochastique . . . . .	19
2.3.1	Processus élémentaire . . . . .	19
2.3.2	Propriétés de l'intégrale stochastique sur $\xi$ . . . . .	20
2.3.3	Processus d'Itô . . . . .	22
2.3.4	Formule d'Itô . . . . .	22
2.3.5	Formule d'intégration par parties . . . . .	26
2.3.6	Liens mouvement Brownien-martingales . . . . .	27
2.4	Équations Différentielles Stochastiques . . . . .	28
2.4.1	Le résultat classique d'Itô . . . . .	29
2.4.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	30
2.4.3	Résolution de l'équation de Black-Scholes . . . . .	32
<b>3</b>	<b>La méthode des différences finies appliquée aux EDP paraboliques</b>	<b>34</b>
3.1	Généralités sur les EDP . . . . .	34
3.2	Principe de la méthode des différences finies . . . . .	36
3.2.1	Algorithme de la méthode . . . . .	38
3.3	Application à la résolution d'une EDP de chaleur . . . . .	38
3.4	Étude de la convergence de la méthode des différences finies . . . . .	41

---

3.5	Lien entre les EDS et les EDP . . . . .	44
3.5.1	La nature probabiliste des solutions des EDP . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Application du modèle de Black Scholes à l'étude d'une option européenne</b>	<b>46</b>
4.1	Modélisation du marché . . . . .	47
4.1.1	L'évolution des cours . . . . .	47
4.1.2	Les stratégies autofinancées . . . . .	48
4.1.3	Existence d'une probabilité risque neutre . . . . .	50
4.1.4	Modélisation d'une option . . . . .	50
4.1.5	Lien entre le prix de l'option et le payoff . . . . .	50
4.2	Résolution du problème de pricing par l'approche stochastique . . . . .	52
4.3	Résolution du problème de pricing par l'approche déterministe . . . . .	54
4.3.1	Lien entre l'EDS de Black Scholes et les EDP paraboliques . . . . .	54
4.3.2	Application des différences finies et résolution numérique de l'EDP de Black Scholes . . . . .	55
4.4	Simulation du prix de l'option par la méthode de Monte Carlo . . . . .	60
4.5	Couverture des calls et puts . . . . .	62
	<b>Annexe</b>	<b>69</b>

## Table des figures

2.1	Propriétés des trajectoires d'un mouvement brownien . . . . .	16
2.2	Solution de l'EDS de Black Scholes . . . . .	33
3.1	Solution de l'équation de la chaleur . . . . .	42
4.1	Prix d'option pour différents cours initiaux . . . . .	58
4.2	Call européen par Monte Carlo . . . . .	61
4.3	Valeurs théoriques de l'option pour des instants et des cours différents . . .	64
4.4	Processus de couverture . . . . .	65

# Introduction générale

Dans le monde d'aujourd'hui, la finance joue un rôle des plus importants. Elle est parfois à l'origine des crises mondiales. Il apparaît alors important que la finance soit basée sur des modèles solides permettant d'évaluer les risques et les prix. De cette nécessité, le modèle de Black Scholes s'est imposé comme référence depuis 1973, dans le calcul d'option. Malgré ses défauts, ce modèle connaît ce succès car il possède de nombreux avantages: sa simplicité d'application et de formule et son importante utilisation par les opérateurs du marché.

En 1900, Louis Bachelier propose dans sa "théorie de spéculation" l'utilisation, sans le nommer, du mouvement Brownien pour décrire les cours boursiers. 70 ans après Black Scholes et Merton introduisent un nouveau modèle de pricing d'option qui vaudra à leur auteur le prix Nobel d'économie en 1997.

Aujourd'hui, de nouveaux produits financiers peuvent être valorisés grâce aux outils théoriques: les probabilités (mouvement Brownien, calcul stochastique, méthodes de simulation de Monte Carlo...), les statistiques (estimation de paramètres ...) et l'analyse numérique (équations aux dérivées partielles linéaires et leur résolution numérique ...), parmi ces produits: les options.

Une option est un contrat qui donne à son détenteur le droit (mais pas l'obligation) d'acheter une action à une date  $N$  au prix d'exercice  $K$ , fixé à l'avance. Ce contrat a un prix  $C$  (prime).

Pour mieux expliquer le principe de pricing d'option examinons le cas suivant: Une entreprise française tient sa comptabilité en euros et signe un contrat avec une entreprise américaine qu'elle devra payer en dollar à la livraison. Entre aujourd'hui et le jour

de la livraison le taux de change euro/dollar va fluctuer.

L'entreprise est donc soumise à un risque de change: si l'euro s'effondre, le prix de la commande peut devenir exorbitant. L'entreprise souhaite se garantir contre ce risque. Elle va pour cela payer une option dite d'achat lui permettant le jour de livraison d'obtenir des dollars à un prix  $K$  en (euros) fixé.

Le problème est le suivant: quelle somme demander le jour de la signature du contrat assurera au banquier d'être en mesure le jour de la commande de fournir des dollars au prix  $K$  (dans le cas où le dollar vaut plus)?

Au temps  $t = 0$ , l'acheteur paie  $C$  au vendeur de l'option. Au temps  $T$ , il reçoit le maximum de  $(S_T - K)$  et 0 c'est à dire  $(S_T - K)_+$ . Pour le vendeur de l'option, il s'agit d'être en mesure de fournir une action au prix  $K$ , et par conséquent de pouvoir produire à l'échéance une richesse égale à  $(S_T - K)_+$ . Au moment de la vente de l'option, le cours futur de l'action est inconnu et deux questions se posent au vendeur de l'option:

1. Quel est le juste prix de l'option, c'est à dire, quelle somme demander à l'acheteur pour être en mesure de produire une richesse  $(S_T - K)_+$  à la date  $T$ ? c'est le problème de pricing.
2. Comment faire judicieusement fructifier la prime touchée à l'instant initial pour produire une richesse  $(S_T - K)_+$  à la date  $T$ ? c'est le problème de couverture.

L'objectif de ce mémoire est d'essayer de répondre à ces deux questions en étudiant une équation différentielle stochastique (EDS) particulière, équation de Black-Scholes.

La résolution d'une telle EDS peut se faire de deux approches différentes :

La première repose sur la théorie de l'intégration d'Itô. La seconde, dite approche déterministe, fait appel au théorème de Feynman-Kac qui consiste à ramener le problème de la recherche d'une solution de l'EDS au problème de la résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre du type parabolique. Souvent, on ne dispose pas de l'expression analytique des solutions d'une équation différentielle stochastique comme pour une équation aux dérivées partielles, d'où la nécessité d'utiliser des méthodes numériques telles que la méthode d'Euler et celle des différences finies pour approcher ses solutions.

Ce présent travail est réparti comme suit:

Dans le premier chapitre, nous introduisons les termes financiers et présentons brièvement quelques activités dans un marché boursier.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons les processus stochastiques, une attention

particulière sera accordée au mouvement Brownien, fascinante construction mathématique, qui entretient des relations privilégiées avec la nature et les modèles financiers. Nous présenterons également les outils de l'intégration stochastique, des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle stochastique seront aussi présentées. Nous terminerons ce chapitre par la résolution analytique de l'équation de Black Scholes.

Le troisième chapitre sera dédié aux équations aux dérivées partielles parabolique d'ordre 2, on présentera à ce niveau la méthode des différences finies permettant de simuler numériquement la solution de ces équations. Des théorèmes montrant le lien entre la solution d'une équation différentielle stochastique et une équation aux dérivées partielles parabolique seront exposés. On présentera également la nature probabiliste de la solution d'une équation aux dérivées partielles qui nous permettra de la lier au calcul d'espérance, et au calcul du pricing d'option.

Le quatrième chapitre constitue une application: étude d'une option européenne. Ce chapitre offre une analyse probabiliste du modèle de Black Scholes puis une analyse déterministe par un passage du stochastique au déterministe via les équation aux dérivées partielles, nous verrons comment retrouver l'équation du prix d'option de Black Scholes par un passage de l'EDS à une EDP de Black Scholes.

Nous terminerons cette application par le calcul du prix de l'option par une simulation de Monte Carlo.

# Chapitre 1

## Généralités financières

Ce chapitre est une brève introduction au vocabulaire utilisé dans le monde de la finance, nous définirons les marchés financiers, les produits que l'on peut y échanger, et les intervenants .

Nous ne développerons les explications que pour les termes largement manipulés dans ce mémoire.

### 1.1 Termes financiers

**Définition 1.1.1.** 1. **Marché financier** : c'est un marché destiné à l'échange de capital et de crédit, plus exactement , c'est un lieu où les personnes qui ont des moyens financiers rencontrent ceux qui ont des besoins financiers.

Ses principales caractéristiques sont :

- La rencontre de deux contreparties.
- La cotation continue des produits financiers.
- L'élaboration de bonnes conditions pour les transactions.

Les intermédiaires entre acheteurs et vendeurs s'appellent "courtiers", ils peuvent être des banques ou des institutions privées.

2. **Bourse**: est un marché financier institutionnel avec un règlement spécifique choisi de manière à améliorer les conditions des transactions.

La première bourse fut la bourse de "Bruges" qui a été institutionnalisée en 1903, puis d'autres bourses ouvrirent.

Au 17ème siècle c'était le début des bourses modernes, la première bourse moderne fut la bourse d'Amsterdam où beaucoup d'instruments d'investissement y furent introduits, puis à la moitié du 20ème siècle, c'était l'explosion des marchés financiers

(marché de crédit, de monnaie, d'actions, matières premières, . . .).

3. **Les produits**: il existe deux types de produits: produits primaires et produits dérivés.

(a) **Produit primaire**: c'est un titre avec rémunération indépendante de tout autre titre, il comprend les actions et les obligations.

i. **Les actions**: une action est un titre de propriété d'une entreprise qui n'est pas remboursable, son prix est défini par sa cotation en bourse, elle peut être achetée ou vendue à n'importe quel moment, le détenteur d'une action devient un associé proportionnellement au nombre de titres qu'il détient. De plus, il a des droits sur le management, les bénéfices et l'actif social. Une action est un produit très volatil, liée à la fois aux performances de l'entreprise et la situation du marché, sa cotation est constamment réévaluée en fonction de l'offre et de la demande.

ii. **Les obligations**: une obligation est un emprunt, elle est déterminée par :

- Une durée
- Un taux d'intérêt qui est choisi en fonction du risque de faillite, les obligations sont cotées et leurs cotations dépendent de l'évolution du taux d'intérêt et du risque de faillite de l'emprunteur.

iii. **Le billet de trésorerie**: est un emprunt qui peut être émis par une société à action où qui a un capital important, il a comme avantage de réduire le coût de financement et le taux d'intérêt qui sont plus faibles que ceux qui sont exigés par les banques. En plus, le bon de trésorerie a généralement une durée de 10 jours à 1 an, alors que les crédits bancaires ont des durées de plus de 3 ans.

(b) **Produits dérivés**: les produits dérivés sont des contrats à terme avec une rémunération dépendante d'un titre, appelé l'actif sous-jacent.

Un contrat à terme est un contrat sur une transaction future dans des conditions déterminées aujourd'hui.

Il existe une multitude de produits dérivés, les principaux exemples sont les futurs, les forwards et les options.

- Un **futur** est un contrat qui donne à l'investisseur l'obligation d'acheter ou de vendre un titre à un prix défini à l'avance pendant une période fixée.

Une alternative est un forward pour lequel toutes les transactions sont effectuées à la fin de la période.

- Une **option** est un contrat qui donne à l'utilisateur le droit, mais pas l'obligation d'acheter ou de vendre un titre comme une action ou un indice, à un prix déterminé à l'avance pendant une période spécifiée.

Si la transaction peut avoir lieu n'importe quand, l'option est dite américaine.

Si elle a lieu uniquement à la fin de la période, on parle d'option européenne.

On dit **call** pour une option d'achat et **put** pour une vente.

Les principales caractéristiques d'une option sont :

- Le **strike**, noté  $K$  : prix de l'option qui est fixé à l'instant initial.
- Le **prix d'option** : prime de risque plus marge de l'intermédiaire.
- La **date d'expiration**, notée  $T$  : fin de la période fixée à l'instant initial.
- La fonction **payoff** : détermine la transaction finale.
- Des contraintes annexes : par exemple si le sous-jacent passe un certain niveau, le contrat s'annule.

Le rôle d'un produit dérivé est d'échanger différents types de risques, car investir son argent dans différents titres est moins risqué que tout investissement dans le même titre.

4. **Contrats d'options** : un contrat d'option est un contrat par le lequel on peut acheter ou vendre une option d'achat (call) ou une option de vente (put) d'une quantité donnée d'une marchandise quelconque à un prix fixé aujourd'hui, la transaction ayant lieu à une date ultérieure.

Toutes les conditions sont fixées aujourd'hui, mais le contrat n'engage que le vendeur de l'option.

L'acheteur a la possibilité d'exercer (de lever) ou non son option.

Cette situation justifie le paiement d'une prime que l'acheteur doit payer au vendeur dès la signature du contrat.

Cette prime reste définitivement acquise au vendeur, que l'option soit levée ou non à l'échéance.

**Exemple 1.1.** Une entreprise achète le 1er janvier une option à un agriculteur : 1000 tonnes (quantité donnée) de sucre (marchandise quelconque) à 50 euros la tonne (prix fixé aujourd'hui), au 31 juillet (date de la transaction).

Au 1er janvier, la tonne coûte 55 euros.

Prix de la prime : 8 euros par tonne.

Étant acheteur d'option, il a la possibilité d'exercer ou non son option à l'échéance. L'agriculteur étant vendeur, son engagement de livrer 1000 tonnes de sucre au 31 juillet est ferme et définitif.

L'entreprise paye dès le 1er janvier la prime, soit 8000 euros, à l'agriculteur.

Au 31 juillet, si le prix du sucre sur le marché vaut 60 euros la tonne, l'entreprise exigera de l'agriculteur de livrer 1000 tonnes au prix convenu, soit 50 euros la tonne. Elle économisera  $1000 (60-50) = 10000$  euros. Compte tenu du paiement des 8000 euros de prime, son gain global n'aura été que de 2000 euros.

En revanche, si le sucre coûte 40 euros la tonne, l'entreprise n'a aucun intérêt à exercer son option : elle préférera acheter le sucre sur le marché. Son résultat global sera une perte de 8000 euros.

Si l'agriculteur encaisse définitivement la prime de 8000 euros, il est certain de perdre à l'échéance (au mieux 0 euros).

La seule incitation qui puisse le pousser à signer le contrat sera le montant de la prime qu'il va percevoir de l'entreprise.

En effet, si les prix du sucre baissent, sa récolte sera vendue moins chère, mais ses pertes seront en partie compensées par la prime reçue dans le cadre du contrat d'option.

Détermination du niveau des primes :

Quatre paramètres interviennent dans la fixation du montant de la prime :

- la volatilité de la marchandise négociée;
- le prix d'exercice fixé pour la marchandise à l'échéance;
- la durée de l'option (entre la signature du contrat et l'échéance);
- les taux d'intérêt pratiqués sur le marché.

La prime se divise en valeur intrinsèque et valeur temps :

- la valeur intrinsèque correspond à la différence entre le prix d'exercice et le prix du marché au comptant de la marchandise.
- la valeur temps (ou valeur spéculative) correspond à la différence entre le montant de la prime et sa valeur intrinsèque.

5. **Arbitrage** : un arbitrage est une stratégie d'investissement qui garantit un profit sans prise de risque.
6. **Le portefeuille** : un portefeuille est un ensemble de titre (actions, obligations, ...)

détenue par un investisseur. Les principales problématiques de la gestion d'un portefeuille sont :

- Minimiser le risque et maximiser le rendement.
- Calculer le rendement associé à un risque.
- Déterminer la performance d'un portefeuille.

## 1.2 Problèmes d'option

Contrairement aux produits primaires dont le rendement espéré est donné par la formule suivante:

$$E(R_i) = r + B_{i,M}(E(R_M) - r)$$

où :

- $R_i$  est le rendement futur d'une action ( $S_i$ ) et ( $R_M$ ) le rendement futur du marché
- $r$ : le taux sans risque
- $E(R_M)$  l'espérance du rendement du marché
- $B_{i,M} = cov(R_i, R_M) / var(R_M)$  corrélation entre le risque de l'action et le rendement du marché.

Les produits dérivés ont des prix des risques connus grâce aux mathématiques, lorsque l'option est cotée sur un marché, la prime est donnée par le marché en l'absence de cotation, le problème de calcul de la prime se pose, et même pour une option cotée, il peut être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modèle permettant de détecter d'éventuelles anomalies de marché.

Examinons, pour fixer les idées, le cas d'un call européen, d'échéance  $T$ , sur une action dont le cours à la date  $t$  est donné par  $S_t$ . Soit  $K$  le prix d'exercice.

Il est clair que si à l'échéance  $T$ , le prix  $K$  est supérieur à  $S_T$ , le détenteur de l'option n'a pas intérêt à exercer.

Par contre si  $S_T > K$ , l'exercice de l'option permet à son détenteur de réaliser un profit égal à  $S_T - K$ , en achetant l'action au prix  $K$ , et en la revendant sur le marché au cours  $S_T$ .

On voit qu'à l'échéance, la valeur du call est donnée par la quantité :

$$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0).$$

Pour le vendeur de l'option, il s'agit, en cas d'exercice, d'être en mesure de fournir une action au prix  $K$ , et par conséquent de pouvoir produire à l'échéance une richesse égale à

$(S_T - K)_+$ .

Au moment de la vente de l'option, qu'on prendra pour origine des temps, le cours  $S_T$  est inconnu et deux questions se posent :

- Combien faut-il payer à l'acheteur de l'option, autrement dit comment évaluer à l'instant  $t = 0$  une richesse  $(S_T - K)_+$  disponible à la date  $T$ ? c'est le problème du pricing.
- Comment le vendeur, qui touche la prime à l'instant 0, parviendra-t-il à produire la richesse  $(S_T - K)_+$  à la date  $T$ ? c'est le problème de la couverture.

# Chapitre 2

## Éléments d'analyse stochastique

On pense souvent que le hasard est responsable des phénomènes aléatoires, pour être plus précis, il nous faut parler de probabilités associées aux événements modifiant l'état d'un système et de variables aléatoires représentant cet état aux différents instants.

Cette optique consistant à décrire l'évolution temporelle de l'état d'un système à l'aide de variables aléatoires et de lois de probabilités est à la base de la théorie des processus stochastiques qu'on présentera dans le présent chapitre.

Rappelons quelques définitions qu'on utilisera par la suite.

**Définition 2.0.1 (Processus aléatoire).** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité,  $T$  un ensemble d'indices et  $(E, \varepsilon)$  un espace mesurable.

On appelle processus aléatoire une famille  $\{X_t, t \in T\}$  de variables aléatoires (v.a) à valeurs dans  $(E, \varepsilon)$  indexées par  $t \in T$ .

Le paramètre  $t$  représente le temps. Lorsque  $T \subset \mathbb{N}$ , nous dirons que le processus est à temps discret, lorsque  $T \subset \mathbb{R}^+$ , le processus est à temps continu.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux processus à temps continu. Quant à  $(E, \varepsilon)$ , nous considérons  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$  (où  $B(\mathbb{R})$  est la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ ) ou  $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$ .

Dans le premier cas, on dira que le processus est scalaire.

Dans le second, nous dirons que le processus est vectoriel.

Notons qu'en fait un processus est une application :

$$\begin{aligned} X : \Omega \times T &\rightarrow E \\ (\omega, t) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

telle que

- à chaque instant  $t \in T$ , l'application  $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$  est une variable aléatoire.

- pour chaque élément  $\omega \in \Omega$ , l'application  $t \mapsto X_t(\omega)$  est une fonction de  $T \rightarrow E$  qui s'appelle trajectoire associée à l'élément  $\omega$ .

Nous aurons également à définir les espaces de travail, il s'agit des espaces  $L^p$ .

**Définition 2.0.2.** espace  $L^p$  pour tout  $p \in \mathbb{R}^+$ , nous noterons:

$$L^p(\Omega, [0, T]) = \{(\theta_s)_{0 \leq s \leq t} \text{ processus tel que } E[\int_0^T |\theta_s|^p ds] < +\infty\}$$

## 2.1 Mouvement brownien

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le mouvement brownien, il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et du taux d'intérêt.

**Définition 2.1.1.** Un processus  $(B_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien si:

- Pour  $0 \leq s < t$ ,  $\{B_t - B_s\}$  est indépendant de la tribu  $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ , (on écrit  $(B_t - B_s) \perp \mathcal{F}_u, 0 \leq u \leq s < t$ ), de loi gaussienne centrée de variance  $(t - s)$  et de fonction de covariance:  $cov(B_t, B_s) = \inf(s, t) = s \wedge t$ ;
- Les trajectoires de  $B$ , c.à.d les applications  $t \mapsto B_t(\omega)$ , sont toutes continues.

**Définition 2.1.2 (Mouvement brownien standard).** Un mouvement brownien est dit standard si:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ E(X_t) = 0 \\ E(X_t^2) = t \end{cases} .$$

Dans la suite, lorsqu'on parlera de M.B (mouvement brownien), sans autre précision, il s'agira d'un M.B. standard, dans ce cas la loi de  $X_t$  prend la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} dx.$$

$dx$  étant la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

Il existe plusieurs manières de construire un M.B, citons deux d'entre elles:

**Exemple 2.1 (Construction d'un M.B par série de Fourier).** Soit  $t \in [0, \pi]$ , on pose:

$$B_t = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \xi_n,$$

où  $(\xi_n)$  est une suite de v.a.i.i.d de loi  $N(0,1)$

Alors  $(B_t)$  est une variable aléatoire gaussienne (car c'est une somme de variables aléatoires

gaussiennes indépendantes).

$$\begin{aligned} E(B_t) &= 0. \\ V(B_t) &= \mathbf{E}(B_t^2) \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \frac{\sin(mt)}{m} E(\xi_n \xi_m) \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(nt))^2}{n^2} E(\xi_n^2) = t. \end{aligned}$$

$B_t$  est un M.B.S.

Nous décrivons dans l'exemple suivant une démarche de l'approximation du mouvement brownien par une marche aléatoire.

**Exemple 2.2 (Marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ ).** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.i.i.d telle que

$$P(\{X_1 = +1\}) = P(\{X_1 = -1\}) = \frac{1}{2}.$$

Soient  $S_0 = 0$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Le processus  $(S_n, n \in \mathbb{N})$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  est appelé la marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ .

Nous avons  $E(X_i) = 0$ ,  $V(X_i) = 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

Par conséquent  $E(S_n) = 0$  et  $V(S_n) = n$ .

Le théorème central limite montre que la suite de variables aléatoires

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Z \sim N(0,1).$$

Soit  $Y_t = S_{[t]} + (t - [t])X_{[t]+1}$ , c'est à dire

$$\text{Si } t = n + \epsilon, \text{ alors } Y_t = S_n + \epsilon X_{n+1}.$$

On pose  $B_t^{(n)} = \frac{Y_{nt}}{\sqrt{n}}$ . Supposons pour simplifier que  $nt \in \mathbb{N}$ .

Alors, nous avons

$$B_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} = \sqrt{t} \frac{S_{nt}}{\sqrt{nt}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{t} Z \sim N(0,t)$$

Ce qui veut dire que

$$P(B_t^{(n)} \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(B_t \leq x)$$

où  $B_t = \sqrt{t}Z$ .

On peut montrer de manière similaire que  $\forall m \geq 1$ ,  $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ,  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$

$$P(B_{t_1}^{(n)} \leq x_1, \dots, B_{t_m}^{(n)} \leq x_m) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(B_{t_1} \leq x_1, \dots, B_{t_m} \leq x_m).$$

C'est à dire que la suite de processus  $(B_t^{(n)})$  converge en loi vers le mouvement brownien  $(B_t)$ .

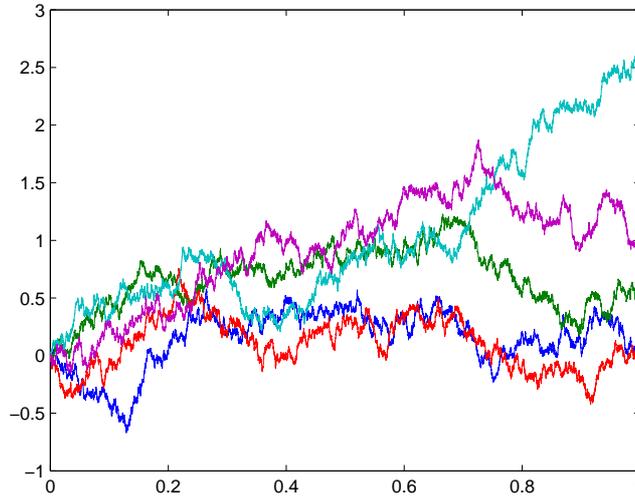


FIG. 2.1 – Propriétés des trajectoires d'un mouvement brownien

**Proposition 2.1.1** ([3]). *Si  $X_t$  est un M.B, alors pour toute suite  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ,  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  est un vecteur gaussien.*

**Preuve.**  $X_t$  est un M.B, alors le vecteur  $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$  est gaussien et à accroissement indépendant (d'après la définition 2.1.2), donc il en est de même pour le vecteur  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ .

**Définition 2.1.3.** On dit que  $X$  est un  $\{\mathcal{F}_t\}$  M.B, si  $X$  est adapté à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}$ ,  $X$  vérifiant:

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, E(\exp i\mu(X_t - X_s)) = \exp(-\mu^2(t-s)/2).$$

**Propriétés 2.1.1.** *Soit  $X_t$  un M.B alors:*

1.  $-X_t$  est aussi un M.B;
2. Pour tout  $c > 0$ ,  $\{\frac{1}{c}X_t, c^2\}$  est un M.B;
3. Le processus défini par  $Y_0 = 0$ , et  $Y_t = tX_{1/t}$  est un M.B.

**Propriétés 2.1.2.** (Propriétés des trajectoires): *Si  $X_t$  est un M.B alors:*

1.  $t \rightarrow X_t(w)$  n'est à variation totale finie sur aucun intervalle sur  $L^1$ , mais il est à variation quadratique finie sur  $L^2$  et vaut  $T$ .

2.  $t \rightarrow X_t(w)$  n'est dérivable à aucun point;
  3.  $t \rightarrow X_t(w)$  est localement hölderienne d'ordre  $\alpha$  pour tout  $\alpha < 1/2$
- c.à.d

$$\forall (t,s) \in [0,a]^2; |X(t) - X(s)| \leq c|t - s|^\alpha.$$

**Remarque 2.1.** Le fait que le processus  $(X_t)$  n'est pas à variation bornée implique que ses trajectoires ne sont pas dérivable. La variation totale du M.B est simplement la longueur de son chemin. Le résultat obtenu est donc cohérent avec la propriété du M.B, un M.B oscille en permanence et donc la longueur de ses trajectoires est infinie, ceci est également lié au fait que les trajectoires du M.B, bien que continues ne sont pas régulières comme on peut le voir sur la figure 2.1.

Nous finissons cette section par une généralisation du processus étudié à d dimensions.

**Définition 2.1.4 (Mouvement brownien multidimensionnel).** On appelle M.B standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , un vecteur  $X = (X^1, \dots, X^d)$  où les  $X^i$  sont des M.B standards et indépendants, vérifiant toutes les propriétés citées dans cette section.

On passe à un autre processus qui n'est pas moins important que le précédent, il s'agit des martingales dont les propriétés constituent le chemin qui nous permet d'arriver à une solution explicite dans notre modèle.

## 2.2 Martingales à temps continu

On dit que  $X_t$  est une martingale si elle a les deux propriétés suivantes:

1.  $E[|X_t|] < \infty$  pour tout  $0 \leq t < \infty$ .
2.  $E[|X_t| | F_s] = X_s$  pour tout  $0 \leq s \leq t < \infty$ .

Pour nous, les martingales à temps continu les plus importantes sont les  $X_t$  pour lesquels il existe  $\Omega_0 \subset \Omega$  de probabilité 1 tel que pour tout  $\omega \in \Omega_0$  la fonction définie sur  $[0, \infty[$  par  $t \mapsto X_t(\omega)$  est continue. Ce sont les martingales continues.

**Définition 2.2.1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité et  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration de cet espace. Une famille adaptée  $(M_t)_{t \geq 0}$  de variables aléatoires intégrables, (c'est-à-dire vérifiant  $E(|M_t|) < +\infty$  pour tout  $t$ ) est une:

1. martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $E(M_t | F_s) = M_s$ .
2. sur-martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $E(M_t | F_s) \leq M_s$ .
3. sous-martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $E(M_t | F_s) \geq M_s$ .

### 2.2.1 Inégalité maximale et théorème limite de martingales

**Théorème 2.2.1 (Inégalité maximale de Doob).** *Si  $\{M_t\}$  est une sous-martingale positive et continue et  $\lambda > 0$ , alors  $\forall p \geq 1$ , on a :*

$$\lambda^p P\left(\sup_{t:0 \leq t \leq T} M_t > \lambda\right) \leq E[M_T^p]$$

et, si  $M_T \in L^p$  pour un  $p > 1$ , alors on a aussi :

$$\left\| \sup_{t:0 \leq t \leq T} M_t \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|M_T\|_p.$$

**Théorème 2.2.2 (Convergence des martingales en temps continu).** *Si une martingale continue  $\{M_t\}$  satisfait  $E[|M_t|^p] \leq B < \infty$  pour un  $p > 1$  et pour tout  $t \geq 0$ , alors il existe une variable aléatoire  $\{M_\infty\}$  avec  $E[|M_\infty|^p] \leq B$  telle que :*

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = M_\infty\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|M_t - M_\infty\|_p = 0.$$

Aussi, si  $\{M_t\}$  est une martingale continue satisfaisant  $E[|M_t|] \leq B < \infty$  pour tout  $t \geq 0$ , alors il existe une variable aléatoire  $\{M_\infty\}$  avec  $E[|M_\infty|] \leq B$  telle que :

$$P\left(\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = M_\infty\right) = 1.$$

### 2.2.2 Exemples de martingales Browniennes

Nous allons donner trois processus qui sont des martingales continues par rapport à la filtration Brownienne standard :

1.  $B_t$ ,
2.  $B_t^2 - t$ ,
3.  $\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2})$ .

Montrons l'identité martingale :

$$E[B_t | F_s] = E[(B_t - B_s) | F_s] + E[B_s | F_s] = B_s \quad \text{pour tout } s \leq t.$$

$$\begin{aligned} E[B_t^2 - t | F_s] &= E[(B_t - B_s)^2 + 2E[B_t B_s] | F_s] - B_s^2 - t. \\ &= t - s + 2B_s^2 - B_s^2 - t \\ &= B_s^2 - s. \quad \forall s \leq t \end{aligned}$$

$$E\left[\exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right) | F_s\right] = E\left[\exp\left(\alpha(B_t - B_s) - \frac{\alpha^2(t-s)}{2}\right) | F_s\right] \exp\left(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2}\right) \quad (2.1)$$

$$= \exp\left(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2}\right). \quad (2.2)$$

## 2.3 Intégrale stochastique

Il se trouve qu'en mathématiques financières, les processus d'évolution des prix sont mieux représentés par des mouvement Brownien (ou des processus plus compliqués encore). Or le mouvement Brownien a des trajectoires continues mais pas à variation bornée. L'objectif de cette section est de donner un sens à l'intégrale stochastique  $\int_0^t H_s dW_s$ , on présentera à cet effet la formule d'Itô. Cette formule donne, en particulier, la façon de différencier  $t \mapsto f(W_t)$ , si  $f$  est une fonction deux fois continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^d$ .

### 2.3.1 Processus élémentaire

**Définition 2.3.1.** On appelle processus élémentaire  $H = (H_t)_{0 \leq t < T}$  un processus de la forme:

$$H_t = \phi_0 \chi_{0(t)} + \sum_{i=1}^p \phi_i 1_{]t_{i-1}, t_i]}(t).$$

où  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p = T$ ,  $\phi_0$  est une v.a  $\mathcal{F}_0$ -mesurable bornée, et pour  $i = 1, \dots, p$ ,  $\phi_i$  est une v.a  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et bornée. Pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à  $W$  comme étant le processus continu  $\{I(H)_t\}$  défini par:

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^p \phi_i (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}).$$

Soit encore, si  $t \in ]t_k, t_{k+1}[$ :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^k \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1} (W_t - W_k).$$

On note  $\int_0^t H_s dW_s$  pour  $I(H)_t$ .

**Proposition 2.3.1** ([6]). *Si  $H$  est un processus élémentaire, alors  $\int_0^t H_s dW_s$  est une  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  martingale continue telle que :*

$$\forall t \in [0, T], E\left[\left|\int_0^t H_s dW_s\right|^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right].$$

On note  $\xi$  l'ensemble des processus élémentaires qui est un sous espace vectoriel de  $L^2(\Omega, [0, T])$ .

**Corollaire 2.1.** *Soit  $H \in \xi$ , alors l'intégrale d'Itô définie par:*

$$\int_s^T H(t, w) dB_t(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_s^T \phi_n(t, w) dB_t(w),$$

où  $\{\phi_n\}$  est une suite de fonctions élémentaires tel que:

$$E\left[\int_s^T (H(t,w) - \phi_n(t,w))^2 dt\right] \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

**Exemple 2.3.** On veut à présent démontrer que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

On pose  $\phi_n(s,w) = \sum_{j=1}^n B_j(w) 1_{[t_j, t_{j+1}]}(s)$ ,  $B_j = B_{t_j}$

On a alors:

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t (\phi_n - B_s)^2 ds\right] &= E\left[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds\right] \\ &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds \\ &= \sum_j \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } \Delta t_j \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_0^t \phi_n dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_j B_j \Delta B_j.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \Delta(B_j)^2 &= B_{j+1}^2 - B_j^2 \\ &= (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j) \\ &= (\Delta B_j)^2 + 2B_j \Delta(B_j) \\ B_t^2 &= \sum_j \Delta(B_j)^2 = \sum_j (\Delta B_j)^2 + 2 \sum_j B_j \Delta(B_j) \\ &\Rightarrow \sum_j B_j \Delta(B_j) = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_j (\Delta B_j)^2 \end{aligned}$$

Puisque  $\sum_j (\Delta B_j)^2 \rightarrow t$  dans  $L^2$  quand  $\Delta t_j \rightarrow 0$ .

Alors

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_0^t \phi_n dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

### 2.3.2 Propriétés de l'intégrale stochastique sur $\xi$

**Propriétés 2.3.1 ([7]).** Sur l'ensemble des processus élémentaires  $\xi$ , l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes:

1.  $h \rightarrow \int_0^t h_s dW_s$  est linéaire.

2.  $h \rightarrow \int_0^t h_s dW_s$  est continue.
3.  $(\int_0^t h_s dW_s)$  est un processus  $\mathcal{F}$ -adapté.
4. Propriété d'isométrie:

$$E[(\int_0^t h_s dW_s)^2] = E[\int_0^t h_s^2 ds].$$

5. Une conséquence de la propriété précédente est la suivante:

$$E[\int_0^t h_s dW_s] = 0, \text{ et } V[\int_0^t h_s dW_s] = E[\int_0^t h_s^2 ds].$$

6.  $(\int_0^t h_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale.
7. Le processus  $(\int_0^t h_s dW_s)^2 - \int_0^t h_s^2 ds$  est une martingale.
8. La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par:

$$\langle \int_0^t h_s dW_s \rangle = \int_0^t h_s^2 ds.$$

L'une des propriétés importante des intégrales stochastiques est l'isométrie, grâce à cette propriété, on peut calculer la variance de certains processus.

**Exemple 2.4.** On cherche à calculer la variance de processus  $X_t = \int_0^t B_s dB_s$ .

$$E(X_t) = E(\int_0^t B_s dB_s) = 0 \text{ (propriété d'intégrale stochastique).}$$

$$V(X_t) = E(X_t^2) = E[(\int_0^t B_s dB_s)^2] = E[\int_0^t B_s^2 ds] = \int_0^t E(B_s^2) ds = \int_0^t s ds = \frac{1}{2}t^2.$$

On veut à présent définir l'intégrale stochastique pour une classe plus vaste de processus  $H$ , on utilise la densité des processus élémentaires dans l'espace vectoriel suivant:

$$\mathcal{M}^2 = \{(H_t)_{0 \leq t < T} \text{ progressivement mesurable, } E[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty\}.$$

On désigne par  $H^2$  l'espace vectoriel des martingales bornées dans  $\mathbb{L}^2$ .

Le sous espace de  $H^2$  formé des martingales continues est noté  $H_c^2$ .

On munit  $H^2$  de la norme définie par

$$\|M\|_{H^2} = E[|M_T|^2]^{1/2}.$$

**Remarque 2.2.** L'intégrale stochastique est alors une isométrie de  $\mathcal{M}^2$  dans  $H_c^2$  et garde les mêmes propriétés sur  $\mathcal{M}^2$  que sur  $\xi$ .

**Théorème ([7]).** *Il existe une unique application linéaire  $I$  de  $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0, T])$  dans  $\mathcal{M}^2([0, T])$  qui coïncide avec l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires  $\xi$  et qui vérifie la propriété d'isométrie:*

$$\forall t \leq T, E[I(H)_t^2] = E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right].$$

**Proposition ([6]).** *Si  $H \in \mathcal{M}^2$ , on a:*

$$E\left[\sup_{0 \leq t < T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|\right] \leq 4E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right].$$

On introduit à présent une classe de processus qui sera très utile par la suite:

### 2.3.3 Processus d'Itô

**Définition 2.3.2.** On appelle processus d'Itô un processus  $X$  à valeurs réelles tel que:

$$\forall 0 \leq t \leq T, X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

où  $X_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $K$  et  $H$  sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions:

$$\begin{cases} \int_0^T K_s ds < \infty \\ \int_0^T H_s^2 ds < \infty \end{cases}$$

**Remarque 2.3.** La décomposition d'un processus d'Itô est unique au sens où si:

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$$

Alors

$$\begin{cases} X_0 = X'_0 \\ H'_t = H_t \\ K'_t = K_t \end{cases} .$$

### 2.3.4 Formule d'Itô

Soit  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  une fonction réelle deux fois différentiable en  $x$  et une fois différentiable en  $t$ , et  $X$  un processus d'Itô, on a:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \int_0^t \frac{1}{2} f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s. \quad (2.3)$$

Où:

$$\begin{aligned}\langle dt, dt \rangle &= \langle dt, dB_t \rangle = \langle dB_t, dt \rangle = 0 \\ \langle dB_t, dB_t \rangle &= dt.\end{aligned}$$

Cette formule est très importante et sera très utile dans la section suivante, un exemple de son application est le calcul de la variation quadratique d'un processus.

**Théorème 2.3.1 (Variation quadratique d'un processus d'Itô).** *Si  $X_t$  est un processus standard avec la représentation intégrale:*

$$X_t = \int_0^t a(w, s) ds + \int_0^t b(w, s) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors sa variation quadratique existe et est donnée par:

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t b^2(w, s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

**Exemple 2.5.** Soit  $(B_t)$  un M.B.S, le processus défini par:  $M_t = (B_t^2 - t)$  est une martingale.

Calculons la valeur de  $\langle M_t \rangle$  (variation quadratique)

Posons:  $f(t, x) = (x^2 - t)^2$ . alors

$$M_t^2 = (B_t^2 - t)^2 = f(t, B_t)$$

et nous avons:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= -2(x^2 - t) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) &= 4x(x^2 - t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) &= 4(x^2 - t) + 8x^2\end{aligned}$$

Donc par la formule d'Itô:

$$\begin{aligned}M_t^2 - 0 &= -2 \int_0^t (B_s^2 - s) ds + 4 \int_0^t B_s (B_s^2 - s) dB_s + \frac{1}{2} (4 \int_0^t (B_s^2 - s) ds + 8 \int_0^t B_s^2 ds) \\ &= 4 \int_0^t B_s (B_s^2 - s) dB_s + 4 \int_0^t (B_s^2 - s) ds.\end{aligned}$$

Donc  $\langle M_t \rangle = 4 \int_0^t (B_s^2 - s) ds$  (car le premier terme est une martingale).

Au début de cette section, nous avons cité l'exemple de  $\int_0^t B_s dB_s$ , si on reprend cet exemple en appliquant la formule d'Itô, nous allons voir que les calculs seront plus simples et plus légers.

**Exemple 2.6.** On cherche toujours à démontrer que  $\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t$ .  
On pose  $X_t = B_t$ ,  $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$  et  $Y_t = g(t,B_t) = \frac{1}{2}B_t^2$ . On a alors:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 1.$$

Par la formule d'Itô, on obtient:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2} dt.$$

C'est à dire:

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = B_t dB_t + \frac{1}{2} dt.$$

En d'autre termes:

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t.$$

Un autre exemple d'application de la formule d'Itô est le calcul des moments d'ordre  $k$  d'un M.B.

**Exemple 2.7.** Soit  $B_k(t) = E[B_t^k]$ ,  $k > 3$ ,  $t \geq 0$ .

En utilisant la formule d'Itô, on prouve que:

$$B_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1) \int_0^t B_{k-2}(s) ds.$$

En effet, par la formule d'Itô appliquée à  $g(t,x) = x^k$

$$d(B_t^k) = \frac{1}{2}k(k-1)B_t^{k-2} dt + kB_t^{k-1} dB_t$$

d'où:

$$\begin{aligned} (B_t^k) &= \int_0^t \frac{1}{2}k(k-1)B_s^{k-2} ds + \int_0^t kB_s^{k-1} dB_s \\ E(B_t^k) &= E\left(\int_0^t \frac{1}{2}k(k-1)B_s^{k-2} ds\right) + E\left(\int_0^t kB_s^{k-1} dB_s\right) \\ E(B_t^k) &= \frac{1}{2} \int_0^t k(k-1)E(B_s^{k-2}) ds = \frac{1}{2}k(k-1) \int_0^t B_{k-2}(s) ds. \end{aligned}$$

Application numérique: Pour  $k = 4$ :

$$E(B_t^4) = \frac{1}{2} \int_0^t 4 \times 3E(B_s^2) = 2 \int_0^t 3s = 3t^2.$$

Nous finissons ce paragraphe en étendant la formule (2.3) au cas d'un M.B d-dimensionnelle et d'un processus d'Itô  $n$ -dimensionnelle.

**Théorème 2.3.2 ([6]).** *Soit  $X$  un processus d'Itô à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{i,k} dW_s^k.$$

Si  $f$  est deux fois différentiable en  $x$  et une fois différentiable en  $t$ , nous avons:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \partial_{x_i}(s, X_s) dX_s^i + \int_0^t \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i x_j}^2 f(s, X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

avec

$$dX_s^i = K_s^i + \sum_{k=1}^d H_s^{i,k} dW_s^k$$

et

$$d\langle X^i, X^j \rangle_s = \sum_{k=1}^d H_s^{i,k} H_s^{j,k} ds.$$

Sous forme matricielle, on aura :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s) ds + \int_0^t \nabla f(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \text{trace}(D^2 f(s, X_s) H_s H_s') ds.$$

L'exemple suivant montre l'application de cette formule multidimensionnelle.

**Exemple 2.8.** On veut écrire le processus  $Y_t = (B_1(t) + B_2(t) + B_3(t), B_2^2(t) - B_1(t)B_3(t))$  où  $(B_1, B_2, B_3)$  est un M.B de dimension de 3 sous la forme standard:

$$dY_t = \mu(t, w) dt + \nu(t, w) dB_t.$$

On pose alors  $X_1(t) = B_1(t)$ ,  $X_2(t) = B_2(t)$ ,  $X_3(t) = B_3(t)$ ,  $X = (X_1, X_2, X_3)$

$$f(t, X) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2^2 - x_1 x_3).$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la formule d'Itô:

$$dY_t = \begin{pmatrix} dY_1(t) \\ dY_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -B_3 & 2B_2 & -B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \\ dB_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt.$$

Un résultat de la formule d'Itô est celui de la formule d'intégration par parties qui est l'objet de la sous section quivante.

### 2.3.5 Formule d'intégration par parties

**Proposition 2.3.2** ([6]). *Soient  $X, Y$  deux processus d'Itô tel que:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \quad \text{et} \quad Y_t = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s.$$

On pose

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_t &= \int_0^t H_s H'_s ds \\ dX_t &= K_t dt + H_t dW_t. \end{aligned}$$

On a alors:

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

Voici un exemple d'application. En écrivant le processus  $X_t$  sous forme d'un produit de deux processus, on arrive à vérifier une certaine équation .

**Exemple 2.9.** Soit  $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$  un M.B.S,  $a \in \mathbb{R}_+$ .

On pose le processus  $X_t = \int_0^t \exp(-a(t-s)) dB_s$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$

Nous allons vérifier que  $X_t$  satisfait l'équation suivante:

$$X_t = -a \int_0^t X_s ds + B_t.$$

Soit  $Y_t = \int_0^t \exp(as) dB_s$ , on a alors  $X_t = \exp(-at) Y_t$ .

On applique la formule d'intégration par parties aux processus  $\exp(-at)$  et  $Y_t$  on obtient:

$$\begin{aligned} X_t &= \exp(-at) Y_t = 0 - a \int_0^t \exp(-as) Y_s ds + \int_0^t \exp(-as) dY_s \\ &= -a \int_0^t X_s ds + \int_0^t \exp(-as) \exp(as) dB_s. \end{aligned}$$

Finalement,

$$X_t = -a \int_0^t X_s ds + B_t.$$

### 2.3.6 Liens mouvement Brownien-martingales

Avant de quitter cette section, on va citer un résultat permettant de faire le lien entre deux processus déjà étudiés dans ce chapitre, il s'agit du mouvement Brownien et des martingales.

**Théorème 2.3.3 ([6]).** *Soit  $M$  une martingale de carré intégrable pour la filtration  $\mathcal{F}_t^W$ . Alors il existe un unique processus  $(H_t)$  appartenant à  $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$  tel que:*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s.$$

De ce résultat, on déduit que si  $X$  est une variable aléatoire de carré intégrable,  $\mathcal{F}_T^W$ -mesurable, il existe un unique processus  $(H_t)$  appartenant à  $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^k)$  tel que:

$$X = E(X) + \int_0^t H_s dW_s.$$

On introduit à présent la notion de probabilités équivalentes qu'on va utiliser dans le théorème qui suit.

**Définition 2.3.3.** Soit  $(\Omega, \mathbf{A}, P)$  un espace de probabilité. Une probabilité  $Q$  sur  $(\Omega, \mathbf{A})$  est dite absolument continue par rapport à  $P$  si:

$$\forall A \in \mathbf{A} \quad P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0.$$

**Théorème 2.3.4.**  *$Q$  est absolument continue par rapport à  $P$  si, et seulement si, il existe une variable aléatoire  $Z$  à valeurs positives ou nulles sur  $(\Omega, \mathbf{A})$  telle que:*

$$\forall A \in \mathbf{A} \quad Q(A) = \int_{\mathbf{A}} Z(\omega) dP(\omega),$$

$Z$  est appelée densité de  $Q$  par rapport à  $P$  et parfois notée  $\frac{dQ}{dP}$ .

Les probabilités  $P$  et  $Q$  sont dites équivalentes si chacune d'elle est absolument continue par rapport à l'autre.

Nous verrons l'application du théorème suivant dans la partie application dans le but de trouver ce qu'on appelle une probabilité *risque neutre*.

**Théorème 2.3.5 (Girsanov).** *Soit  $(H_t)$  un processus progressivement mesurable, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $(\int_0^T H_s^2 ds < \infty)$ , on suppose que le processus défini par:*

$$D = \exp\left(\int_0^t H_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds\right),$$

est une martingale. Soit  $P^*$  la mesure de densité  $D_T$  par rapport à  $P$  sur  $\mathcal{F}_t$ .

Soit

$$B_t = W_t - \int_0^t H_s ds,$$

alors sous la probabilité  $P^*$ ,  $B_t$  est un M.B.S.

## 2.4 Équations Différentielles Stochastiques

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle ordinaire de la forme:

$$X'(t) = b(X(t)).$$

Soit encore sous forme différentielle:

$$dX_t = b(X_t)dt.$$

Une telle équation est utilisée pour décrire l'évolution d'un système physique. Si l'on prend en compte les perturbations aléatoires, on ajoute un terme de bruit, qui sera de la forme  $\sigma dW_t$ , où  $W$  désigne un mouvement Brownien et  $\sigma$  est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit. On arrive à une équation différentielle "stochastique" de la forme:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dW_t;$$

ou encore sous forme intégrale, la seule qui ait un sens mathématique,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \sigma W_t.$$

On généralise cette équation en autorisant  $\sigma$  à dépendre de l'état à l'instant  $t$ :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t;$$

soit sous forme intégrale,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s.$$

Remarquons que le sens donné à cette équation dépend de la théorie de l'intégrale stochastique développée dans la partie précédente. On généralise encore un peu en autorisant

$\sigma$  et  $b$  à dépendre du temps  $t$ , et en se plaçant dans un cadre vectoriel.

Dans cette section, nous présenterons tout d'abord le théorème d'existence et d'unicité sur les équations différentielles stochastiques, finirons par quelques exemples et par la résolution de l'EDS de Black Scholes.

### 2.4.1 Le résultat classique d'Itô

#### Définitions et notations

On se place toujours sur un espace de probabilité complet, disons  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . On se donne  $W$  un MB  $d$ -dimensionnel sur un espace. On considère également une variable aléatoire  $Z$ , de carré intégrable, et indépendante du MB  $W$ . On considère la filtration définie, pour tout  $t$  positif, par  $F_t = \sigma\{\sigma\{Z, W_s; s \leq t\} \cup N\}$ . On considère deux fonctions  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  qui sont mesurables. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 &= Z. \end{cases} \quad (2.4)$$

Comme nous allons le voir par la suite, cette équation est à interpréter au sens d'une équation intégrale, à savoir:

$$X_t = Z + \int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dW_r, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.5)$$

Le coefficient  $b$  s'appelle **la dérive** tandis que la matrice  $\sigma\sigma^t$  s'appelle **la matrice de diffusion**. Précisons tout d'abord ce que nous entendons par une solution de l'EDS (2.4).

**Définition 2.4.1.** Une solution (forte)  $X$  de l'EDS (2.4) est un processus continu tel que:

1.  $X$  est progressivement mesurable;
2. P-p.s.  $\int_0^T \{|b(r, X_r)| + \|\sigma(r, X_r)\|^2\}dr < \infty$ , où  $\|\sigma\| = \text{trace}(\sigma\sigma^*)$ ;
3. P-p.s, on a:  $X_t = Z + \int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dW_r, 0 \leq t \leq T$ .

On notera  $S^2$  l'espace de Banach constitué des processus  $X$ , progressivement mesurables, tels que  $E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2] < \infty$  muni de la norme

$$\|X\| := E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2]^{1/2},$$

et  $S_c^2$  le sous espace de  $S^2$  formé de processus continus. Notons que deux processus indistinguables sont identifiés et par abus d'écriture l'espace quotient est noté de la même façon. Nous finissons ce paragraphe en rappelant un résultat élémentaire assez utile pour la suite.

### 2.4.2 Existence et unicité de la solution

**Théorème 2.4.1.** Soient  $b$  et  $\sigma$  deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante  $K$  telle que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

1. Condition de Lipshitz en espace, uniforme en temps:

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|;$$

2. croissance linéaire:  $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$ ;

3.  $E[|Z|^2] < \infty$ .

Alors l'EDS (2.4) possède une unique solution (à l'indistinguabilité près). Cette solution appartient à  $S_c^2$  et donc à  $S^2$ .

**Exemple 2.10.** Donnons nous deux exemples classiques d'EDS. Le premier est emprunté au monde de la finance. Le prix d'une action est généralement modélisé par l'EDS:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \quad (2.6)$$

$S_0$  donné.

Cette équation est appelée **équation de Black-Scholes**.

Le paramètre  $\sigma$  s'appelle la volatilité. On verra dans la sous section suivante qu'à l'aide de la formule d'Itô on montre que:

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}.$$

Considérons à présent l'équation de Langevin:

$$dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x.$$

L'unique solution  $X$  de cette l'EDS s'appelle le **processus d'Ornstein-Uhlenbeck**. Posons  $Y_t = X_t e^{ct}$ .

La formule d'intégration par parties donne

$$dY_t = e^{ct} dX_t + ce^{ct} X_t dt = e^{ct} \sigma dW_t.$$

On a alors

$$X_t = e^{-ct} x + \int_0^t e^{c(s-t)} \sigma dW_s.$$

Calculons sa moyenne et sa variance. On a

$$E[X_t] = e^{-ct} x, \text{ et, } \text{Var}(X_t) = E\left[\left(\int_0^t e^{c(s-t)} \sigma dW_s\right)^2\right] = \sigma^2 e^{-2ct} \int_0^t e^{2cs} ds = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2ct}}{2c}.$$

**Exemple 2.11.** Considérons l'équation différentielle suivante:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t. \quad (2.7)$$

Nous allons démontrer qu'il existe une solution unique de cette équation. On procédera de la façon suivante:

Si l'EDS satisfait les trois conditions suivantes, :

1.  $|b(x,t) - b(y,t)| + |a(x,t) - a(y,t)| \leq K|x - y|, \forall t \geq 0.$
2.  $|b(x,t)|^2 + |a(x,t)|^2 \leq K^2(1 + x^2), \forall t \geq 0.$
3.  $E[X_0^2] < \infty,$

alors, l'EDS (2.7) muni de la condition initial  $X_0 = Z$  possède une unique solution.

Vérification de a):

$$\begin{aligned} |b(x,t) - b(y,t)| + |a(x,t) - a(y,t)| &= |a(b - x) - a(b - y)| + |\sigma - \sigma| \\ &= |a||x - y|. \end{aligned}$$

Vérification de b): puisque:

$$|x| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1; \\ x^2 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases} \leq \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } |x| \leq 1; \\ 1 + x^2, & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

alors:

$$\begin{aligned} |b(x,t)|^2 + |a(x,t)|^2 &= |a(b - x)|^2 + |\sigma|^2 \\ &= a^2(b - x)^2 + \sigma^2 \\ &= a^2(b^2 - 2bx + x^2) + \sigma^2 \\ &\leq a^2(b^2 + 2|b||x| + x^2) + \sigma^2 \\ &\leq a^2(b^2 + 2|b|(1 + x^2) + x^2) + \sigma^2 \\ &= a^2(b^2 + 2|b|) + \sigma^2 + (2|b| + 1)x^2 \\ &\leq \max(a^2(b^2 + 2|b|) + \sigma^2, 2|b| + 1)(1 + x^2). \end{aligned}$$

Posons donc

$$K = \max(|a|, \sqrt{a^2(b^2 + 2|b|) + \sigma^2}, \sqrt{2|b| + 1}).$$

Vérification de c):

Il suffit de choisir  $X_0$  de carré intégrable.

### 2.4.3 Résolution de l'équation de Black-Scholes

Comme on l'a énoncé auparavant, l'équation de Black-Scholes s'écrit de la façon suivante:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (2.8)$$

ou de façon équivalente:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (2.9)$$

En intégrant (2.9) on trouve:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dS_t}{S_t} &= \int_0^t \mu dt + \int_0^t \sigma dW_t \\ &= \mu t + \sigma W_t. \end{aligned}$$

Car  $\mu$  et  $\sigma$  sont des constantes, et puisque  $(W_t)$  est un mouvement Brownien alors:  $\int_0^t dW_t = W_t$ .

On considère à présent la fonction  $g(t, x) = \log x$ , en utilisant la formule d'Itô:

$$d(\log S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2(S_t)^2} (dS_t)^2 \quad (2.10)$$

$$= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2(S_t)^2} (S_t^2 (\sigma^2 dt)). \quad (2.11)$$

En intégrant (2.10), on aura:

$$\int_0^t d(\log S_t) = \int_0^t \frac{dS_t}{S_t} - \int_0^t \frac{1}{2} \sigma^2 dt.$$

Enfin, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dS_t}{S_t} &= \int_0^t (\log S_t) dt + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 dt \\ &= \log S_t - \log S_0 + \frac{1}{2} \sigma^2 t. \end{aligned}$$

De la formule précédente, on a:

$$\begin{aligned} \mu t + \sigma W_t &= \log S_t - \log S_0 + \frac{1}{2} \sigma^2 t \\ \log \frac{S_t}{S_0} &= (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma W_t \\ \frac{S_t}{S_0} &= \exp((\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma W_t) \\ S_t &= S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma W_t). \end{aligned}$$

De là, on a la solution de l'équation de Black-Scholes qui est:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right).$$

L'utilisation de la méthode d'Euler présentée en annexe permet de simuler cette solution. Les trajectoires du processus  $(S_t)$  sont représentées dans la figure ( 2.2) obtenue par exécution du programme associé à la méthode d'Euler.

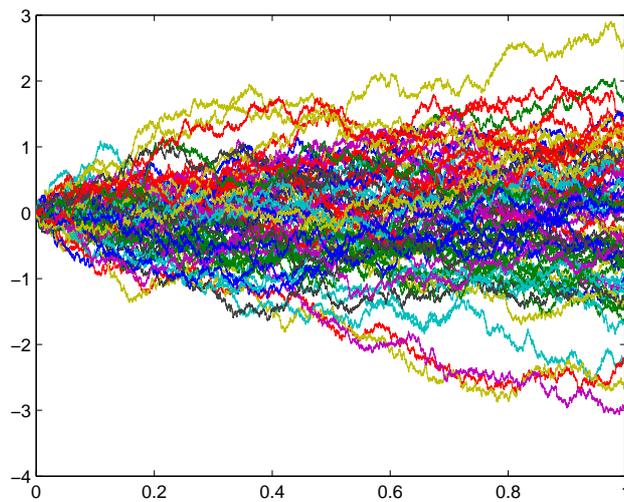


FIG. 2.2 – Solution de l'EDS de Black Scholes

# Chapitre 3

## La méthode des différences finies appliquée aux EDP paraboliques

### Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu'elle apparaissent aussi bien en dynamique de structure, mécanique de fluide que dans la théorie de la gravitation ou de l'électromagnétisme, elles sont primordiales dans des domaines tel que la simulation aéronautique, la synthèse d'image, les prévisions météorologiques, la démographie ou les finances.

Certaines *EDP* peuvent être résolues analytiquement et leurs solutions sont connues, toutefois un nombre important existent sans solutions analytique, d'où la nécessité de l'application des méthodes numériques, tel que la méthode des différences finies qu'on va expliciter dans ce chapitre afin d'arriver à approximer les solutions de ces équations.

Notons qu'il n'existent pas de méthodes universelles pour la résolution numérique des *EDP*. Ici, nous allons restreindre notre étude aux *EDP* linéaire parabolique d'ordre 2.

### 3.1 Généralités sur les EDP

**Définition 3.1.1 (EDP).** Soient  $d, m, n, s$  des entiers naturels non nuls,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .

On appelle système d'équations aux dérivées partielles (*EDP*) à coefficients réels dans  $\mathbb{R}^d$  de taille  $n$ , d'ordre  $m$  une relation de la forme:

$$\phi(x, u(x), \partial_i(u(x))_{i \in \{1, \dots, d\}}, \partial_{i,j}^2 u(x)_{i,j \in \{1, \dots, d\}^2}, \dots, \partial_{i_1, i_2, \dots, i_m}^m (u(x))_{(i_1, i_2, \dots, i_m) \in \{1, \dots, d\}^m}) = 0.$$

où

$$\begin{cases} u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est solution de l'EDP} \\ \phi : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s \end{cases}$$

On dit que l'EDP est linéaire si et seulement si  $\phi(x, \cdot)$  l'est pour tout  $x \in \Omega$ .

On dit que l'EDP est scalaire si  $s = n = 1$  (une seule équation et  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ).

## Classification des EDP scalaire linéaire d'ordre 2:

On considère une EDP scalaire linéaire d'ordre 2:

$$a(x)u(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x)\partial_i u(x) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d C_{i,j}(x)\partial_{i,j}^2 u(x) = f(x).$$

Notons  $C(x)$  la matrice  $(C_{i,j})$ , c'est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.

Notons les  $(\lambda_i(x))_{i=1}^d$  ses valeurs propres et notons  $d_+(x)$  le nombre de valeurs propres strictement positives (en tenant compte de leur multiplicité) et  $d_-(x)$  le nombre de valeurs propres strictement négatives et  $d_0$  la multiplicité de la valeur propre 0. posons  $d(x) = d_0(x) + d_+(x) + d_-(x)$ .

On dit que l'EDP est :

- elliptique si et seulement si  $d_+(x) = d$  ou  $d_-(x) = d$  (les valeurs propres sont toutes positives ou négatives).
- hyperbolique si et seulement si:  $d_+ = d - 1$  et  $d_- = 1$  ou  $d_+ = 1$  et  $d_- = d - 1$
- parabolique si et seulement si  $d_0(x) > 0$ .

Ou simplement par le calcul de  $\Delta$  de l'équation  $\Delta(x) = b^2(x) - 4a(x)c(x)$ .

- si  $\Delta < 0$ , on parle d'une équation elliptique.
- si  $\Delta = 0$ , l'EDP est dite parabolique.
- si  $\Delta > 0$ , l'EDP est dite hyperbolique.

## Conditions aux limites

En plus de la condition initiale, il existe deux type de conditions aux bords:

1. Conditions aux bords de Dirichlet: la condition de Dirichlet aux bords peut se définir comme la donnée d'une fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sur une partie  $\Gamma$  de la frontière  $\Omega$ , ce

qui peut se noter:

$$u(x) = f(x), \forall x \in \partial\Omega.$$

ou

$$u(t,x) = f(x), \forall x \in \partial\Omega(t).$$

La fonction  $f$  est une donnée du problème.

2. Conditions aux bords de Neuman: la condition de Neuman aux bords peut se définir comme la donnée de la dérivée de la fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  par rapport à une variable  $\theta$  sur une partie  $\Gamma$  de la frontière  $\Omega$ , ce qui peut se noter:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega,$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(x,t) = g(x), \forall x \in \partial\Omega(t).$$

## Exemple

Un exemple d'EDP parabolique du 2<sup>ème</sup> degré linéaire est l'équation suivante dite équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Un cas particulier de cette équation est l'équation suivante avec des conditions de Dirichlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{cp} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \begin{cases} 100x \text{ si } x \in [0,1] \\ 100(2-x) \text{ si } x \in [1,2] \end{cases} \\ u(0,t) = u(2,t) = 0. \end{cases}$$

Notons que les méthodes numériques passent par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques, les méthodes numériques s'intéressent à la recherche des valeurs de la fonction à des endroits particuliers, autrement dit, on ne cherche pas l'écriture d'une fonction qui vérifie l'équation mais par quelles valeurs passent la fonction en des abscisses particulières.

## 3.2 Principe de la méthode des différences finies

Cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor, ceci se traduit directement de la définition de la dérivée.

Soit  $f(x,y)$  une fonction de classe  $C^2$ , alors la dérivée partielle première de  $f$  par rapport à  $x$  est calculée par la formule:

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}.$$

Si  $h_x \ll 1$ , le développement de Taylor au voisinage de 0 de  $f(x + h_x, y)$  donne :

$$\begin{aligned} f(x + h_x, y) &= f(x, y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(h_x) \simeq f(x, y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &\simeq \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}. \end{aligned}$$

Ceci est appelé schéma avant. De la même manière nous pouvons aussi donner le schéma arrière qui est de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x}$$

Avec la formule de Taylor, ceci nous donne:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x - h_x, y) + h_x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \theta(h_x) \simeq f(x - h_x, y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x}. \end{aligned}$$

La somme de ces deux schémas nous donne le schéma centré suivant:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{f(x + h_x, y) - f(x - h_x, y)}{2h_x}$$

En résumé on a trois approximations suivantes pour la dérivée partielle première de  $f(x, y)$  par rapport à  $x$  avec la formule de Taylor:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \simeq \begin{cases} \frac{f(x+h_x, y) - f(x, y)}{h_x}, & \text{schéma avant;} \\ \frac{f(x, y) - f(x-h_x, y)}{h_x}, & \text{schéma arrière;} \\ \frac{f(x+h_x, y) - f(x-h_x, y)}{2h_x}, & \text{schéma centré.} \end{cases}$$

La dérivée seconde  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  de  $f(x, y)$  sera alors de la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\simeq \frac{\frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{h_x} - \frac{f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)}{h_x}}{h_x}. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\simeq \frac{f(x_{i+1}, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2}. \end{aligned}$$

### 3.2.1 Algorithme de la méthode

- Le domaine à étudier est maillé, on parle de discrétisation du domaine (le maillage peut être régulier ou non) c'est à dire que le pas de maillage peut être constant ou non. On appelle maillage l'ensemble des points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies.
- On discrétise également l'EDP c'est à dire qu'on va écrire, en chaque noeud, une approximation algébrique de l'équation d'origine.
- On écrit autant d'équations algébriques qu'il y'a de noeuds, et on cherche une solution, ce qui conduit à écrire un système d'équations.
- On résout ce système d'équations linéaires.

**Remarque 3.1.** L'avantage de cette méthode est qu'il y'a une simplicité d'écriture, elle est couramment pratique et facile d'accès, son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples et qu'il y'a des difficultés de prise en compte aux limites.

## 3.3 Application à la résolution d'une EDP de chaleur

Soit à résoudre l'équation de la chaleur suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{cp} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \begin{cases} 100x & \text{si } x \in [0,1] \\ 100(2-x) & \text{si } x \in [1,2] \end{cases} \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \end{cases}$$

Avec  $k = 0.13$ ,  $c = 0.11$ ,  $p = 7.8g/cm^3$ , et  $\Delta x = 0.25$ .

– Discrétisation de l'espace et du temps:

1. Discrétisation de l'espace: nous devons résoudre cette équation dans l'espace compris entre  $a = 0$  et  $b = 2$  avec un pas  $\Delta x$ . On pose alors le schéma suivant

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_i = x_{i-1} + \Delta x \\ = x_0 + i\Delta x, 1 \leq i \leq n_x = \frac{2}{\Delta x} \end{cases}$$

Or  $x_0$  n'est autre que le point  $a$  de l'intervalle  $[a,b]$ , finalement:  $x_i = a + i\Delta x, 1 < i < n_x$ , avec  $n_x = \frac{b-a}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta x}$ .

2. Dicrétisation du temps: On se donne  $\Delta t = \frac{T_{\max}}{n_t}$  le pas de la discrétisation de l'intervalle de temps  $[0, T_{\max}]$  ( $n_t$  étant le nombre de subdivision) et on pose :

$$t_0 = 0;$$

$$t_j = j\Delta t, j = 1, \dots, n_t.$$

- Dicrétisation de l'équation aux dérivées partielles

On note  $u(x_i, t_j) = u_i^j$ , nous pouvons approximer  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  au point  $(x_i, t_j)$  par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \simeq \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{(\Delta x)^2}.$$

Nous remplaçons aussi  $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)$  par  $\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}$

En remplaçant dans l'EDP donnée, on aura :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{k}{cp} \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{(\Delta x)^2}. \quad (3.1)$$

Posons  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{k}{cp}$ , l'équation (3.1) devient :

$$u_i^{j+1} = ru_{i+1}^j + (1 - 2r)u_i^j + ru_{i-1}^j.$$

- Discretisation des conditions initiales pour  $j = 0, t = 0$ , et  $u_i^1 = ru_{i+1}^0 + (1 - 2r)u_i^0 + ru_{i-1}^0$ , l'équation nécessite la connaissance de la condition initial pour démarrer le processus, la condition n'est autre que  $u(x, 0) = f(x_i)$  donnée par l'énoncée.
- Résolution numérique du système: quand on fixe  $j$  et on varie  $i$  de 1 à  $n_x - 1$ , on obtient le système linéaire de  $n_x - 1$  équations aux  $n_x - 1$  inconnus suivant :

$$\begin{cases} u_1^{j+1} = ru_2^j + (1 - 2r)u_1^j + ru_0^j \\ u_2^{j+1} = ru_3^j + (1 - 2r)u_2^j + ru_1^j \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n_x-1}^{j+1} = ru_{n_x}^j + (1 - 2r)u_{n_x-1}^j + ru_{n_x-2}^j \end{cases}$$

ou de façon équivalente

$$\begin{cases} U^{j+1} = M.U^j + N \\ 0 \leq j \leq n_t - 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 1-2r & r & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1-2r & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 1-2r & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} ru_0^j \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ru_{n_x} \end{pmatrix}$$

L'exécution du code matlab suivant nous donne la courbe représenté dans la figure (3.1). Dans ce programme, on notera  $u_0^j$  par *cla* et la condition aux limites  $u_{n_x}^j$  sur  $b = 2$  sera notée *clb*.

```

k=0.13;
c=0.11;
p=7.8;
dx=0.25;
r=1/4;
dt=dx*dx*c*p*r/k;
Tmax=100*dt;
a=0;b=2;
cla=0;clb=0;
nx=(b-a)/dx;nt=Tmax/dt;
x=0:dx:b;t=0:dt:Tmax;
for i=1:nx-1
N(i)=0;
end
N(1)=r*cla;
N(nx-1)=r*clb;
for i=1:nx-2
M(i,i)=1-2*r;
M(i,i+1)=r;
M(i+1,i)=r;
end
M(nx-1,nx-1)=1-2*r;
for i=1:nx+1
if x(i)<1
    
```

```
ci(i)=100*x(i);
else
  ci(i)=100*(2-x(i));
end
end
end
for i=1:nx-1
h(i)=ci(i+1);
end
j=1;
h=h';
while(j<nt+2)
for i=1:nx-1
w(i,j)=h(i);
end
h=M*h+N';
j=j+1;
end
for i=nx:-1:2
for j=nt+1:-1:1
w(i,j)=w(i-1,j);
end
end
for j=1:nt+1
w(1,j)=0;
w(nx+1,j)=0;
end
mesh(t,x,w);
```

### 3.4 Étude de la convergence de la méthode des différences finies

La notion de convergence signifie que la solution numérique approche la solution exacte quand  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta t \rightarrow 0$ , ce qui signifie que la maille devient très petite.

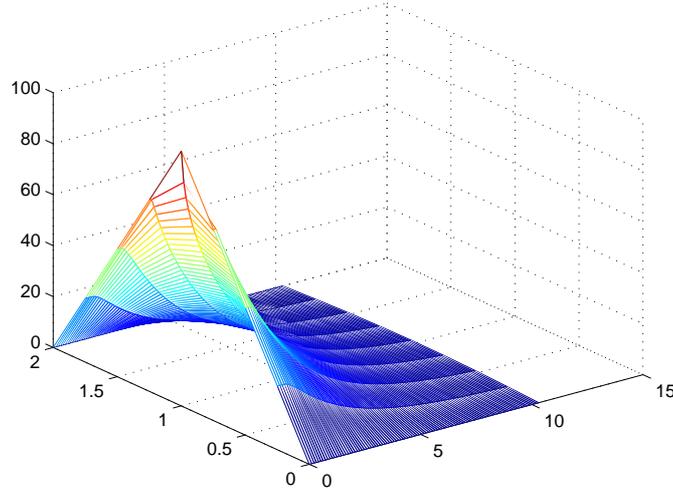


FIG. 3.1 – Solution de l'équation de la chaleur

Considérons  $u_i^j$  la solution numérique approchée et  $U_i^j$  la solution exacte de l'équation:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{cp} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

aux points  $x = x_i$  et  $t = t_j$ . Notons  $e_i^j = U_i^j - u_i^j$ . Pour  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{k}{cp}$ ,

$$u_i^{j+1} = r(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + (1 - 2r)u_i^j.$$

$e_i^j = U_i^j - u_i^j \Rightarrow u_i^j = U_i^j - e_i^j$  que l'on remplace dans le schéma numérique précédent:

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} - e_i^{j+1} &= r(U_{i+1}^j - e_{i+1}^j + U_{i-1}^j - e_{i-1}^j) + (1 - 2r)(U_i^j - e_i^j) \\ \Rightarrow e_i^{j+1} &= [r(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) + (1 - 2r)e_i^j] + U_i^{j+1} - r(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) - (1 - 2r)U_i^j \end{aligned}$$

Avec le développement de Taylor suivant:

$$\begin{cases} U_i^{j+1} = U_i^j + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t}(x_i, \xi), & t_j \leq \xi \leq t_{j+1} \\ U_{i+1}^j = U_i^j + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\eta_1, t_j), & x_i \leq \eta_1 \leq x_{i+1} \\ U_{i-1}^j = U_i^j - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\eta_2, t_j), & x_{i-1} \leq \eta_2 \leq x_i \end{cases}$$

On trouve:

$$e_i^{j+1} = [r(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) + (1 - 2r)e_i^j] + U_i^j + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t}(x_i, \xi) - r(U_{i+1}^j + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, t_j)) \quad (3.3)$$

$$+ \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\eta_1, t_j) - r(U_{i-1}^j - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, t_j) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\eta_2, t_j)) - (1 - 2r)U_i^j. \quad (3.4)$$

Après simplification, l'équation précédente devient:

$$e_i^{j+1} = [r(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) + (1 - 2r)e_i^j] + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t}(x_i, \xi) - r \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\eta_1, t_j) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\eta_2, t_j). \quad (3.5)$$

Dans un maillage très fin, les points de la discrétisation sont très proches les uns des autres. Nous avons donc  $x_i \approx \eta_1 \approx x_{i+1}$ ,  $x_{i-1} \approx \eta_2 \approx x_i$ , ainsi que  $t_j \approx \xi \approx t_{j+1}$ . Pour ce, nous allons remplacer  $\eta_1$  et  $\eta_2$  par  $x_i$  et  $\xi$  par  $t_j$  puis  $r$  par  $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{k}{cp}$  pour avoir l'équation (3.3) sous la forme:

$$e_i^{j+1} = [r(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) + (1 - 2r)e_i^j] + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t}(x_i, t_j) - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{k}{cp} \left( \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, t_j).$$

Après simplification de la quantité  $(\Delta x)^2$ , factorisation de  $\Delta t$ :

$$e_i^{j+1} = [r(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) + (1 - 2r)e_i^j] + \Delta t \left[ \frac{\partial U}{\partial t}(x_i, t_j) - \frac{k}{cp} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right].$$

Le deuxième crochet, qui n'est autre que l'équation de la chaleur initialement posée dans l'énoncée, est nul, ce qui nous donne l'égalité finale:

$$e_i^{j+1} = r(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) + (1 - 2r)e_i^j.$$

Si  $r < 1/2$ , on a:  $1 - 2r > 0$ , alors:

$$|e_i^{j+1}| \leq r|e_{i+1}^j| + r|e_{i-1}^j| + (1 - 2r)|e_i^j|.$$

Posons

$$\begin{aligned} E^j &= \max_{1 \leq i \leq n_x - 1} |e_i^j| \\ \Rightarrow |e_i^{j+1}| &\leq rE^j + rE^j + (1 - 2r)E^j. \\ \Rightarrow |e_i^{j+1}| &\leq E^j, \forall 1 \leq j \leq n_t - 1 \end{aligned}$$

Par récurrence,

$$|e_i^{j+1}| \leq E^j \leq \dots \leq E^1 \leq E^0$$

$E^0 = U^0 - u^0$  à  $t = 0$ , or, d'après les conditions initiales,  $U^0 - u^0 = 0$  donc  $E^0 = 0$ .

$$|e_i^{j+1}| \leq 0 \Rightarrow e^j = 0, \forall i = 1, \dots, n_x - 1, j = 1 \dots, n_t - 1 \text{ et } r < 1/2$$

Donc la méthode explicite converge vers zéro quand  $r < 1/2$ .

### 3.5 Lien entre les EDS et les EDP

La formule de Feynman-Kac, prouve qu'il y'a une connection entre les solutions des équations différentielles stochastiques et certaines équations aux dérivées partielles du second ordre linéaire.

**Théorème 3.5.1 ([5]).** Soient  $t_0 \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^+, (B_t, t \in \mathbb{R})$  un mouvement Brownien standard et  $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions conjointement continues en  $(t, x)$  et lipschitzienne en  $x$ . On pose  $(X_t, t \in [t_0, +\infty[)$  la solution de l'EDS

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t,$$

et  $X_{t_0} = x_0$ . On suppose de plus qu'il existe une constante  $K > 0$  telle que :

$$|g(t, x)| > K, \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

Soit  $h \in C(\mathbb{R})$  et  $T > 0$ , étant données les hypothèses ci dessus sur  $f$  et  $g$ , il existe une "unique" fonction  $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$  vérifiant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + f(t, x)\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}g^2(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (3.6)$$

**Remarque 3.2 ([5]).** Si  $u$  la solution de l'équation (3.6), le processus  $(u(t, X_t), t \in [t_0, T])$  est une martingale.

En effet, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} u(t, x) - u(t_0, x_0) &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X \rangle \\ &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s)g(s, X_s)dB_s \\ &\quad + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s)ds + \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s)f(s, X_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, X_s)g(s, X_s)^2}_{\text{(cette quantité est nulle car } u \text{ satisfait l'équation (3.6))}} \\ &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s)g(s, X_s)dB_s. \end{aligned}$$

Le processus  $u(t, X_t)$  est donc une martingale.

#### 3.5.1 La nature probabiliste des solutions des EDP

Nous allons maintenant établir le lien entre le calcul du prix d'une option européenne et une équation aux dérivées partielles de type parabolique qui donne la nature probabiliste à la solution d'une EDP.

Nous supposons  $b$  et  $\sigma$  ne dépendent pas du temps, on note  $X_t$  une solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t.$$

**Définition 3.5.1.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  à dérivées bornées. On appelle générateur infinitésimal du processus  $X_t$ , l'opérateur différentiel qui à une fonction  $f$  de classe  $C^2$  associe

$$Af(x) = \frac{\sigma^2(X_t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b(X_t) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

**Théorème 3.5.2 ([3]).** Soit  $u$  une fonction de classe  $C^{1,2}$  en  $(t,x)$  à dérivées bornées sur  $[0,T] \times \mathbb{R}^n$  vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, u(T,x) = f(x)$$

et

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru\right)(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

Alors:

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \quad u(t,x) = \mathbf{E}(e^{-\int_t^T r(s,X_s)ds} f(X_t)).$$

Cette dernière est l'écriture probabiliste de la solution de l'EDP.

Ainsi pour calculer l'espérance d'une fonction qui s'écrit comme fonction d'une solution d'une EDS, il suffit de résoudre l'EDP associée au problème.

## Chapitre 4

# Application du modèle de Black-Scholes à l'étude d'une option européenne

Le but de ce chapitre est d'appliquer l'équation différentielle stochastique de Black-Scholes à l'étude d'une option européenne.

Rappelons que la valeur de l'option à l'échéance vaut:

$$h_T = \max(S_T - K, 0),$$

où  $S_T$  est la solution de l'EDS de Black-Scholes à l'instant  $T$ .

On se pose la question suivante: quelle est la valeur initiale dont on doit disposer, et qu'elle est la stratégie qu'on doit suivre pour arriver à  $h_T = \max(S_T - K, 0)$  à la date  $T$  (l'échéance).

Cette valeur là dont on doit disposer à l'instant initial est le prix de l'option appelé la prime. Nous avons donc à chercher la relation entre le prix de l'option et la quantité  $h_T = \max(S_T - K, 0)$  appelé payoff.

Après avoir défini le lien entre le prix de l'option et le payoff, on verra comment faire le pricing par trois approches différentes:

- En utilisant le fait qu'on connaît l'expression de  $S_t$  qui est un mouvement Brownien géométrique, et comme la valeur de  $B_t$  ne peut être calculé en pratique, on simule plusieurs trajectoires du mouvement Brownien et prend la moyenne du payoff actualisé pour obtenir le prix de l'option. C'est l'approche par Monte Carlo, le code et le résultat de la méthode seront donnés par la suite.

- Une autre approche consiste à utiliser les lois de probabilités pour arriver à une formule explicite qui donne le prix de l'option, c'est l'approche stochastique.
- Une dernière méthode utilise une approche déterministe pour passer de l'EDS à l'EDP de Black Scholes et par la résolution de cette dernière on trouve le prix de l'option.

## 4.1 Modélisation du marché

### 4.1.1 L'évolution des cours

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix  $S_t$  à l'instant  $t$ ) et un actif sans risque (de prix  $S_t^0$  à l'instant  $t$ ). On suppose l'évolution de  $S_t^0$  régie par l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt.$$

Où  $r$  est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à  $r$ . On posera  $S_0^0 = 1$ , de sorte que  $S_t^0 = e^{rt}$ , pour  $t \geq 0$ .

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t). \quad (4.1)$$

Où  $\mu$  et  $\sigma$  sont deux constantes et  $B_t$  un mouvement Brownien standard.

Le modèle est étudié sur l'intervalle  $[0, T]$  où  $T$  est la date d'échéance de l'option à étudier. Comme nous l'avons vu, l'équation (4.1) se résout, explicitement:

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right).$$

Où  $S_0$  est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, selon ce modèle, la loi de  $S_t$  est une loi log-normale (c'est à dire que son logarithme suit une loi normale).

Plus précisément, on voit que le processus  $(S_t)$  vérifie une équation du type (4.1) si et seulement si le processus  $(\log(S_t))$  est un mouvement Brownien (non nécessairement standard).

Cela signifie que le processus vérifie les propriétés suivantes:

- Continuité des trajectoires,
- Indépendance des accroissements relatifs: si  $u \leq t$ , l'accroissement relatif  $(S_t - S_u)/S_u$  est indépendant de la tribu  $\sigma(S_\nu, \nu \leq u)$ ,

- Stationnarité des accroissement relatifs: si  $u \leq t$ , la loi de  $(S_t - S_u)/S_u$  est identique à celle de  $(S_{t-u} - S_0)/S_0$ .

Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

L'étude du modèle de Black Scholes ne peut se faire qu'à partir d'un minimum d'hypothèses sur le marché liées à la fois à la viabilité et la complétude du marché, nous traduirons ces hypothèses en termes mathématique après quelques définitions d'un marché viable et complet.

### 4.1.2 Les stratégies autofinancées

Une stratégie sera définie par un processus  $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T} = (H_t^0, H_t)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , adapté à la filtration naturelle  $(\mathcal{F}_t)$  du mouvement Brownien, les composantes  $H_t^0$  et  $H_t$  de  $\phi_t$  donnant, à l'instant  $t$ , les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué respectivement détenues en portefeuille. La valeur du portefeuille à l'instant  $t$  est alors donnée par:

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

Une stratégie **autofinancée** est une stratégie pour laquelle les variations de valeur du portefeuille viennent uniquement des gains dus à l'agitation des cours. La condition d'autofinancement est sous la forme suivante:

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t.$$

Pour que cette égalité ait un sens on imposera la condition:

$$\int_0^T |H_t^0| dt < +\infty \text{ p.s et } \int_0^T H_t^2 dt < +\infty \text{ p.s.}$$

Alors l'intégrale:

$$\int_0^T H_t^0 dS_t^0 = \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt$$

est bien définie, ainsi que l'intégrale stochastique:

$$\int_0^T H_t dS_t = \int_0^T (H_t S_t \mu) dt + \int_0^T \sigma H_t S_t dB_t.$$

**Définition 4.1.1.** Une stratégie autofinancée est définie par un couple  $\phi$  de processus adaptés  $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  vérifiant:

1.  $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty \text{ p.s.}$

2.  $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u$  p.s pour tout  $t \in [0, T]$ .

Nous noterons  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  le cours actualisé de l'actif risqué.

**Proposition 4.1.1.** *Soit  $\phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , vérifiant  $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty$  p.s,*

*On pose:*

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t \quad \text{et} \quad \tilde{V}_t = e^{-rt} V_t(\phi).$$

*Alors,  $\phi$  définit une stratégie autofinancée si et seulement si:*

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \quad \text{p.s pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.2)$$

**Preuve.** Supposons la stratégie  $\phi$  autofinancée. De l'égalité:

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -r\tilde{V}_t(\phi)dt + e^{-rt} dV_t(\phi)$$

obtenue en utilisant la formule d'intégration par parties à la formule  $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t(\phi)$ , on déduit :

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\phi) &= -re^{-rt}(H_t^0 e^{rt} + H_t S_t)dt + e^{-rt} H_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt} H_t dS_t \\ &= H_t(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= H_t d\tilde{S}_t. \end{aligned}$$

D'où l'égalité (4.2). La démonstration de la réciproque repose sur un raisonnement analogue.

**Définition 4.1.2 (Stratégie d'arbitrage).** Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.

**Définition 4.1.3 (Marché viable).** On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

**Définition 4.1.4 (Marché complet).** On dit que le marché est complet si tout actif est simulable.

L'hypothèse sur la viabilité et la complétude du marché se traduit par le théorème suivant:

**Théorème 4.1.1 ([3]).** *Un marché viable est complet si et seulement si, il existe une probabilité  $P^*$  équivalente à  $P$  sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

La probabilité  $P^*$  apparaîtra par la suite comme l'outil de calcul des formules des prix et de couverture.

### 4.1.3 Existence d'une probabilité risque neutre

Nous allons montrer qu'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale  $P$ , sous laquelle le prix actualisé  $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$  de l'action est une martingale. Utilisant l'équation différentielle stochastique vérifiée par  $(S_t)$  on a :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t) \end{aligned}$$

Et par conséquent, si on pose  $W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ ,

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t. \quad (4.3)$$

En prenant  $\theta_t = \frac{\mu-r}{\sigma}$ , d'après le théorème de Girsanov, il existe une probabilité  $P^*$  équivalente à  $P$  sous laquelle  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement Brownien standard. Alors si on se place sous la probabilité  $P^*$ , on déduit que l'égalité (5.3) que  $(\tilde{S}_t)$  est une martingale et que :

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2).$$

### 4.1.4 Modélisation d'une option

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons aux options européennes. Une option européenne sera définie par une variable aléatoire  $F$ -mesurable, positive  $h$ . Le plus souvent,  $h$  est de la forme  $f(S_T)$ , ( $f(x) = (x - K)_+$ , dans le cas d'un call,  $f(x) = (K - x)_+$  dans le cas d'un put). Nous allons définir la valeur de l'option en la simulant. Pour des raisons techniques nous limiterons la classe des stratégies admissibles de la façon suivante :

**Définition 4.1.5.** Une stratégie  $\Phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$  est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée  $\tilde{V}_t(\Phi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t$  du portefeuille correspondant est, pour tout  $t$ , positive et telle que  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  est de carré intégrable sous  $P^*$ .

On dira qu'une option est simulable si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible. Il est clair que pour que l'option définie par  $h$  soit simulable, il est nécessaire que  $h$  soit de carré intégrable sous  $P^*$ . Dans le cas du call ( $h = (S_T - K)_+$ ), cette propriété est bien vérifiée puisque  $E^*(S_T^2) < \infty$ .

### 4.1.5 Lien entre le prix de l'option et le payoff

**Théorème 4.1.2.** *Dans le modèle de Black-Scholes, toute option définie par une variable aléatoire  $h$ , positive,  $F_T$ -mesurable et de carré intégrable sous la probabilité  $P^*$  est simu-*

table et la valeur à l'instant  $t$  de tout portefeuille simulant est donnée par:

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)}h|F_t).$$

La valeur de l'option à l'instant  $t$  est donc définie de façon naturelle par l'expression  $E^*(e^{-r(T-t)}h|F_t)$ .

**Preuve.** Supposons tout d'abord qu'il existe une stratégie admissible  $(H^0, H)$  simulant l'option. La valeur à l'instant  $t$  du portefeuille  $(H_t^0, H_t)$  est donnée par:

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

et l'on a, par hypothèse,  $V_T = h$ . Soit  $\tilde{V}_t = V_t e^{-rt}$ , la valeur actualisée:

$$\tilde{V}_t = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t.$$

Puisque la stratégie est autofinancée, on a:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \\ &= V_0 + \int_0^t H_u \sigma \tilde{S}_u dW_u. \end{aligned}$$

Sous la probabilité  $P^*$ ,  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  est de carré intégrable, d'après la définition des stratégies admissibles, et l'égalité qui précède fait apparaître le processus  $(\tilde{V}_t)$  comme une intégrale stochastique par rapport à  $(W_t)$ . Il en résulte que  $(\tilde{V}_t)$  est sous  $P^*$ , une martingale de carré intégrable. D'où:

$$\tilde{V}_t = E^*(\tilde{V}_T | F_t),$$

et par conséquent:

$$V_t = e^{rt} \tilde{V}_t = e^{rt} E^*(\tilde{V}_T | F_t) = e^{rt} E^*(e^{-rT} h | F_t) = E^*(e^{-r(T-t)} h | F_t). \quad (4.4)$$

Nous avons ainsi montré que si le portefeuille  $(H^0, H)$  simule l'option définie par  $h$ , sa valeur est donnée par l'égalité (4.4). Pour achever la preuve du théorème, il reste à démontrer que l'option est bien simulable, c'est-à-dire à trouver des processus  $(H_t^0)$  et  $(H_t)$  définissant une stratégie admissible et tels que:

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = E^*(e^{-r(T-t)} h | F_t).$$

Or, sous la probabilité  $P^*$ , le processus défini par  $M_t = E^*(e^{-rT}h|F_t)$  est une martingale de carré intégrable. La filtration  $(F_t)$ , filtration naturelle de  $(B_t)$  est aussi la filtration naturelle de  $(W_t)$  et, d'après le théorème de représentation des martingales Browniennes, il existe un processus adapté  $(K)_{0 \leq t \leq T}$  tel que  $E^*(\int_0^T K_s^2 ds) < \infty$  et:

$$\forall t \in [0, T], M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s \text{ p.s.}$$

La stratégie  $\Phi = (H^0, H)$ , avec  $H_t = K_t/(\sigma\tilde{S}_t)$  et  $H_t^0 = M_t - H_t\tilde{S}_t$ , est alors, une stratégie autofinancée, dont la valeur à l'instant  $t$  est donnée par:

$$V_t(\Phi) = e^{rt}M_t = E^*(e^{-r(T-t)}h|F_t).$$

et il est clair sur cette expression que  $V_t(\Phi)$  est une variable aléatoire positive, que  $\sup_{t \in [0, T]} V_t(\Phi)$  est de carré intégrable sous  $P^*$  et que  $V_T(\Phi) = h$ . On a donc bien une stratégie admissible simulant  $h$ .

## 4.2 Résolution du problème de pricing par l'approche stochastique

Lorsque la variable aléatoire  $h$  est de la forme  $h = f(S_T)$ , on peut expliciter la valeur  $V_t$  à l'instant  $t$  comme une fonction de  $t$  et  $S_t$ . On a en effet:

$$\begin{aligned} V_t &= E^*(e^{-(T-t)}f(S_T)|F_t) \\ &= E^*(e^{-r(T-t)}f(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - (\sigma^2/2)(T-t)})|F_t). \end{aligned}$$

La variable aléatoire  $S_t$  est  $F_t$ -mesurable et, sous  $P^*$ ,  $W_T - W_t$  est indépendante de  $F_t$ . On a donc:

$$V_t = F(t, S_t),$$

avec:

$$F(t, x) = E^*(e^{-r(T-t)}f(xe^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - (\sigma^2/2)(T-t)})) \quad (4.5)$$

et comme, sous  $P^*$ ,  $W_T - W_t$  est une gaussienne centrée de variance  $T - t$ :

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}}) \frac{e^{-y^2/2} dy}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.6)$$

Le calcul de  $F$  peut être poussée plus loin dans le cas du call et du put. Si l'on prend l'exemple du call, avec  $f(x) = (x - K)_+$ , on a :

$$\begin{aligned} F(t,x) &= E^*(e^{-r(T-t)}(xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K)_+) \\ &= E(xe^{\sigma\sqrt{\theta}g-\sigma^2\theta/2} - Ke^{-r\theta})_+. \end{aligned}$$

où  $g$  est une gaussienne centrée réduite et  $\theta = T - t$ .

Afin d'enlever le signe  $(\ )_+$ , on cherche la région d'exercice de l'option sachant que l'exercice de l'option se fait dans le cas où :

$$xe^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K > 0$$

c.a.d

$$\frac{W_T - W_t}{\sqrt{T - t}} < \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$$

Introduisons les quantités :

$$d_1 = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\theta}{\sigma\sqrt{\theta}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}. \quad (4.7)$$

Avec ces notations, on a

$$\begin{aligned} F(t,x) &= E[(xe^{\sigma\sqrt{\theta}g-\sigma^2\theta/2} - Ke^{-r\theta}) 1_{\{g+d_2 \geq 0\}}] \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty} (xe^{\sigma\sqrt{\theta}y-\sigma^2\theta/2} - Ke^{-r\theta}) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{d_2} (xe^{-\sigma\sqrt{\theta}y-\sigma^2\theta/2} - Ke^{-r\theta}) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy. \end{aligned}$$

En écrivant cette expression comme la différence de deux intégrales et en faisant dans la première le changement de variable  $z = y + \sigma\sqrt{\theta}$ , on obtient :

$$F(t,x) = xN(d_1) - Ke^{-r\theta}N(d_2), \quad (4.8)$$

avec :

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-x^2/2} dx.$$

Pour le put, un calcul analogue donne, avec les mêmes notations :

$$F(t,x) = Ke^{-r\theta}N(-d_2) - xN(-d_1).$$

Le code suivant permet de calculer la valeur théorique du prix de l'option donnée par l'équation (4.8).

```
Programme Prix Simulé et prix théorique
clear all;
n=7000;
r=0.03;
sigma=0.2;
Szero=100;
K=Szero*1;
T=1;
d1=(log(Szero/K)+(r+(sigma^2)/2)*T)/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
PrixTheorique=Szero*normcdf(d1,0,1)-K*exp(-r*T)*normcdf(d2,0,1);
Z=normrnd(0,1,1,n);
ST=Szero*exp((r-(sigma^2)/2)*T+sigma*sqrt(T)*Z);
payoffact=exp(-r*T)*max(ST-K*ones(1,n),zeros(1,n));
prixsimule=mean(payoffact');
plot(ST,payoffact);
```

Le prix théorique donnée par la formule de Black Scholes est **9.41 euros** pour une unité d'actif risqué.

### 4.3 Résolution du problème de pricing par l'approche déterministe

Dans ce qui suit nous allons voir comment retrouver la formule de Black Scholes (4.8) pour le prix d'une option grâce aux *EDP* et au passage de l'EDS à l'EDP de Black Scholes.

#### 4.3.1 Lien entre l'EDS de Black Scholes et les EDP paraboliques

Le problème de la valorisation et de couverture dans ce cadre se ramène à la résolution d'une EDP. C'est originellement l'approche adoptée par Black Scholes qui, avec un changement de variables, transforme l'EDP en une EDP de chaleur, dont on connaît une solution explicite qu'on présentera au paragraphe suivant.

Nous rappelons que ce modèle est donné par une dynamique de sous jacent comme mouvement Brownien géométrique:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma dW_t. \quad (4.9)$$

D'après le théorème 3.5.2, pour calculer la valeur de l'option  $F(t,x) = \mathbf{E}(e^{-\int_t^T r(s,X_s)ds} f(X_T))$ ,  $f$  étant donnée  $f(S_T) = \max(S_T - K, 0)$ , il suffit de résoudre le problème

$$\begin{cases} (\frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru)(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ C(T,x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Sachant que l'opérateur  $A_t$  associé à l'équation (4.9) est:

$$A_s C = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S}.$$

On obtient l'équation suivante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0.$$

Cette EDP est appelée EDP de Black Scholes à laquelle il faut ajouter une condition finale en temps et des contraintes aux limites en espace.

### 4.3.2 Application des différences finies et résolution numérique de l'EDP de Black Scholes

Dans le programme suivant, nous avons une boucle pour  $1 \leq i \leq nn$  (le nombre de points ici 101).

$\Delta t = \min(\Delta t, \frac{\frac{1}{8}h^2}{\frac{1}{2}S^2\sigma^2 + hrs})$  avec  $h$  : pas d'espace,  $r$  : taux d'intérêt sans risque,  $\Delta t$  : pas de temps,  $S$  : sous jacent,  $\sigma$  : volatilité,  $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2$  : viscosité,  $rs$  vitesse.

La deuxième boucle du programme utilise les différences finies:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &\text{ est approximé par } \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial C}{\partial S} &\text{ est approximé par } \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2h} \\ \text{et } \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &\text{ est approximé par } \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{h^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$C_i^{n+1} = C_i^n + \Delta t \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rS \frac{\partial C}{\partial S} + rC \right).$$

Le programme suivant nous donne le prix de l'option pour des valeurs de  $S_0$  différentes, on prend comme intervalle de  $S$  :  $[0.5K, 2K]$ .

```
nn=101;%le nombre de point;
```

```
xk=100;%prix d'exercice
sigma=0.2;%volatilité
rate=0.003;%taux sans risue
time=1;%tempsd'exercice
xmin=0.5*xk;%domaine de calcul
xmax=2.*xk;%domaine de calcul
dx=(xmax-xmin)/(nn-1);%pas d'espace
dt=1e10;%pas de temps
x0=100;%sous jacent d'haujourd'hui
distan=100000.;
for i=1:nn
    x=xmin+(i-1)*dx;
    xx(i)=x;
    c(i)=max(x-xk,0);
    if (i>1)
        dt=min(dt,0.25*dx.^2/(0.5*sigma^2.*x^2+dx.*rate.*x));
    end
    if (distan>=abs(x-x0))
        distan=abs(x-x0);
        ix0=i;
    end
end
end
plot(xx,c);
hold on
ktmax=round(time/dt)-1;
ifre=round(ktmax/10);
dt=-dt;
t=time;
for kt=1:ktmax
    t=t+dt;
    irkmax=3;
    for irk=1:irkmax
        alp=1./(irkmax-irk+1);
        for i=2:nn-1
```

```

x=xmin+(i-1)*dx;
cxx=(c(i+1)-2.*c(i)+c(i-1))/dx.^2;
cx=(c(i+1)-c(i))/(2.*dx);
visco=0.5*sigma^2*x.^2;
vites=rate*x;
peclet=min(vites*dx/visco/3.,1.);
visnum=max(0.0125*dx*vites-visco-rate*dx.^2,0.)*peclet;
rhs=-(visco+visnum)*cxx-vites*cx+rate*c(i);
c(i)=c(i)+rhs*dt*alp;
end
c(nn)=xmax-xk*exp(-rate*(time-t));
c(1)=c(2);
end
if(rem(kt,ifre)==0)
    plot(xx,c)
end
end
plot(xx,c);
cix0=c(ix0);

```

Le prix de l'option correspond alors au prix en fonctions de  $S_0$ , pour les valeurs suivantes:  $K = 100$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.03$ , l'option vaut **10,85 euros** L'exécution de ce programme donne la figure 4.1.

En faisant un changement de variables adéquat à l'EDP de Black Scholes on se ramène à l'EDP de la chaleur dont on connaît l'expression analytique de sa solution. Ensuite en faisant le changement de variable inverse, on retrouve le même résultat que celui de l'approche stochastique pour le calcul du prix de l'option. Plus précisément:

On considère donc l'équation:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0.$$

Dans un premier temps on effectue un changement de variables pour supprimer les termes en  $S$  et  $S^2$  devant les opérateurs différentiels. On pose  $S = E.e^x$ ,  $t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ ,  $C = E\nu(x,\tau)$ . On obtient alors l'équation suivante:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial \nu}{\partial x} - k\nu \quad \text{où } k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}.$$

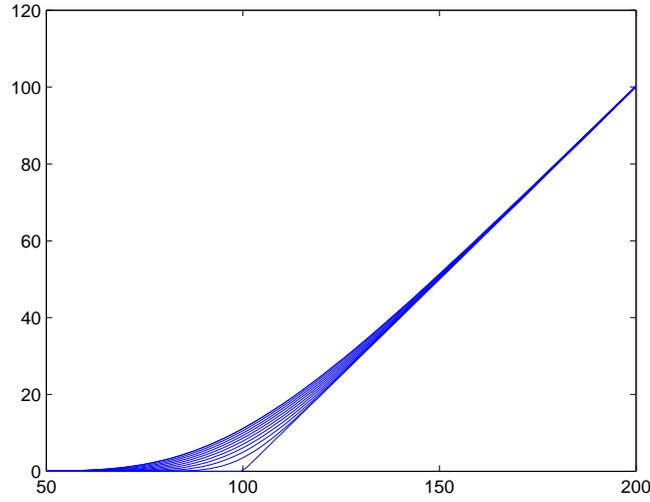


FIG. 4.1 – Prix d'option pour différents cours initiaux

La condition initial devient  $\nu(x,0) = \max(e^x - 1, 0)$ .

Pour arriver à une équation comme celle de la chaleur, on procède à un second changement de variables, on pose :

$$\nu(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} \mu(x,\tau).$$

On réinjecte dans l'équation :

$$e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \beta \mu + \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) = e^{\alpha x + \beta \tau} \left( \alpha^2 \mu + 2\alpha \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + (k-1) \left( \alpha \mu + \frac{\partial \mu}{\partial x} - k \mu \right) \right).$$

On regroupe les termes de même dérivées :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + (\alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta) \mu + (2\alpha + k - 1) \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Pour se ramener au cas de l'équation de la chaleur, il nous faut éliminer les termes en  $\mu$  et  $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ , on doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \\ 2\alpha + k - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-1}{2}(k-1) \\ \beta = \frac{-1}{4}(k+1)^2 \end{cases}$$

On a donc  $\nu(x,\tau) = \exp\left(\frac{-1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right) \mu(x,\tau)$  et  $\mu$  vérifie alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \tau > 0 \\ \mu(x,0) = \mu_0(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \max(e^x - 1, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \end{cases}$$

La solution de ce système est connue et de la forme:

$$\mu(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds. \quad (4.10)$$

Nous allons nous atteler à l'évaluation de l'intégral dans l'équation (4.10), on commence par poser  $x' = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$ :

$$\begin{aligned} \mu(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_0(x' \sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x' \sqrt{2\tau} + x)} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x' \sqrt{2\tau} + x)} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'. \end{aligned}$$

On pose:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\tau}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx' \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\tau}} \int_{-x/\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \text{ avec } \rho = x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{2\tau} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \end{aligned}$$

On note  $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$  qui est la fonction de répartition de la loi normal centrée réduite, donc finalement:

$$\begin{cases} I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \\ d_1 = x/\sqrt{2\tau} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

Par un calcul similaire on obtient:

$$\begin{cases} I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \\ d_2 = x/\sqrt{2\tau} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} \end{cases}$$

Maintenant que l'on a l'expression de  $\mu$  remontons à l'expression de  $C$ , on a:

$$\nu(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} \mu(x, \tau), \text{ et } C = E\nu(x, \tau), \quad x = \ln(S/E), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad k = 2r/\sigma^2.$$

$$\begin{aligned} C &= E\left( e^{\frac{-1}{2}(k-1)\ln(S/E) - \frac{1}{4}(k+1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \left( e^{\frac{1}{2}(k+1)\ln(S/E) + \frac{1}{4}(k+1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{\frac{1}{2}(k-1)\ln(S/E) + \frac{1}{4}(k-1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2) \right) \right) \end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en:

$$\begin{cases} C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}. \end{cases}$$

## 4.4 Simulation du prix de l'option par la méthode de Monte Carlo

Le code suivant permet de calculer la valeur de l'option a tout instant par la méthode de Monte Carlo son exécution nous donne la figure (4.2).

```
%Simulation de plusieurs trajectoires du mouvement Brownien (géométrique méthode)
clear all;
n = 100; %le nombre de trajectoires simulées
m = 1000; %le nombre de périodes de temps
Delta= 0.001; %la longueur d'une période de temps
mu = 0.03; %taux d'intérêt instantané annuel
r=0.03;%taux d'intert sans risque annuel
sigma = 0.2; %volatilité
Szero = 100;%valeur initiale
K=100;%pix d'exercice
Z = normrnd(0,1,m,n); %matrice composée de mxn variables aléatoires iid N(0,1)
%initialisation de la matrice contenant les trajectoires du mouvement Brownien
%chacune des colonnes de cette matrice contiendra une trajectoire du Brownien
W = zeros(m+1,n); %initialisation
%initialisation de la matrice contenant les trajectoires de S
%chacune des colonnes de cette matrice contiendra une trajectoire de S
S = zeros(m+1,n); %initialisation
S(1,:) = Szero * ones(1,n); %valeur initiale de S;
temps = zeros(m+1,1); %initialisation du vecteur temps
%Approximation du mouvement Brownien géométrique
for i = 1 : m
W(i+1,:)=W(i,:) + sqrt(Delta)*Z(i,:);
S(i+1,:)=S(i,:) + mu*S(i,:)*Delta +(sigma*S(i,:)).*(W(i+1,:)-W(i,:));
temps(i+1,1)=temps(i,1) + Delta;
```

```
call(i+1,:)=mean(exp(-r*Delta)*max(S(i+1,:)-K*ones(1,n),zeros(1,n)));  
end  
plot(temps,call);
```

La valeur du prix simulé par la méthode de Monte Carlo est **9.22 euros** pour une unité d'actif risqué .

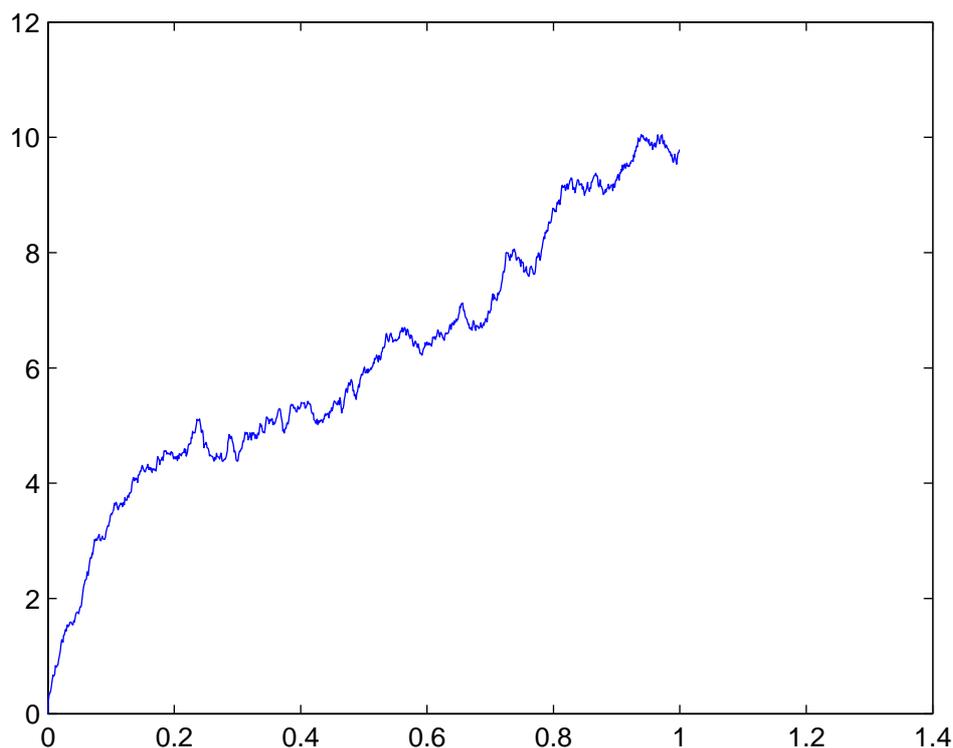


FIG. 4.2 – *Call européen par Monte Carlo*

**Remarque 4.1.** On voit bien que la valeur trouvée par la méthode de Monte Carlo est plus proche de la valeur théorique exacte que celle trouvée par la méthode des différences finies.

Après avoir déterminé la valeur de l'option par les différentes approches citées précédemment, nous répondrons à la deuxième question de la problématique posée qui consiste à déterminer la stratégie qu'on doit suivre pour aller de la valeur de la prime à l'instant initial à la valeur du payoff, c'est le but de cette dernière section.

## 4.5 Couverture des calls et puts

Nous allons voir comment, dans le cas où l'option est définie par une variable aléatoire de la forme  $h = f(S_T)$ , on peut expliciter le portefeuille de couverture. Un portefeuille simulant doit avoir, à chaque instant  $t$ , une valeur actualisée égale à :

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} F(t, S_t),$$

où  $F$  est la fonction définie par l'égalité. Si on pose :

$$\tilde{F}(t, x) = e^{-rt} F(t, x e^{rt}).$$

on a :  $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$  et, pour  $t < T$ , d'après la formule d'Itô :

$$\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) d\tilde{S}_u + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(u, \tilde{S}_u) du + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(u, \tilde{S}_u) d \langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle_u.$$

De l'égalité  $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t$ , on déduit :

$$d \langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle_u = \sigma^2 \tilde{S}_u^2 du,$$

ce qui fait apparaître  $\tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ , sous la forme suivante :

$$\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) \tilde{S}_u dW_u + \int_0^t K_u du$$

Comme on sait que  $\tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$  est une martingale sous  $P^*$ , le processus  $K_u$  est nécessairement nul. D'où :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) &= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) \tilde{S}_u dW_u \\ &= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) d\tilde{S}_u. \end{aligned}$$

Le candidat naturel pour le processus de couverture  $H_t$  est alors :

$$H_t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t, \tilde{S}_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t).$$

Si on pose  $H_t^0 = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) - H_t \tilde{S}_t$ , le portefeuille  $(H_t^0, H_t)$  est autofinancé et sa valeur actualisée est bien  $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ .

**Remarque 4.2.** Le raisonnement qui précède montre qu'on peut traiter les options de forme  $f(S_T)$  sans utiliser le théorème de représentation des martingales Browniennes.

**Remarque 4.3.** Dans le cas du call, on a:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = N(d_1).$$

et dans le cas du put:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -N(-d_1).$$

Cette quantité est souvent appelée le **"delta"** de l'option par les praticiens. Plus généralement, lorsque la valeur à l'instant  $t$  d'un portefeuille peut s'écrire  $\Psi(t, S_t)$ , la quantité  $(\partial\Psi/\partial x)(t, S_t)$ , qui mesure la sensibilité du portefeuille aux variations du cours à l'instant  $t$ , est appelée le **"delta"** du portefeuille. On parle de **"gamma"** pour la dérivée seconde  $(\partial^2\Psi/\partial x^2)(t, S_t)$ , de **"thêta"** pour la dérivée par rapport au temps et de **"véga"** pour la dérivée de  $\Psi$  par rapport à la volatilité  $\sigma$ .

Le code suivant permet de calculer la valeur théorique a des instants et des prix différents et donne le processus de couverture qui représente les valeurs des quantités d'actifs dont on doit disposer pour chaque instant  $t$  et pour chaque valeur de pris  $S_t$ .

```
%Simulation de plusieurs trajectoires du mouvement Brownien (géométrique méthode)
clear all;
n = 100; %le nombre de trajectoires simulées
m = 1000; %le nombre de périodes de temps
Delta= 0.001; %la longueur d'une période de temps
mu = 0.03; %taux d'intérêt instantané annuel
r=0.03;%taux d'intert sans risque annuel
sigma = 0.2; %volatilité
Szero = 100;%valeur initiale
K=100;%pix d'exercice
Z = normrnd(0,1,m,n); %matrice composée de mxn variables aléatoires iid N(0,1)
%initialisation de la matrice contenant les trajectoires du mouvement Brownien
%chacune des colonnes de cette matrice contiendra une trajectoire du Brownien
W = zeros(m+1,n); %initialisation
%initialisation de la matrice contenant les trajectoires de S
%chacune des colonnes de cette matrice contiendra une trajectoire de S
S = zeros(m+1,n); %initialisation
S(1,:) = Szero * ones(1,n); %valeur initiale de S;
temps = zeros(m+1,1); %initialisation du vecteur temps
```

```

%Approximation du mouvement Brownien géométrique
for i = 1 : m
W(i+1,:)=W(i,:) + sqrt(Delta)*Z(i,:);
S(i+1,:)=S(i,:) + mu*S(i,)*Delta +(sigma*S(i,)).*(W(i+1,)-W(i,));
temps(i+1,1)=temps(i,1) + Delta;
for j=1:n
    d(i,j)=(log(S(i,j))/K)+(r+(sigma^2/2))*(mu*Delta-temps(i,1))/sigma*(mu*Delta-temp
    Nd(i,j)=normcdf(d(i,j));
    d2(i,j)=d(i,j)-sigma*sqrt(1-temps(i,1));
    Nd2(i,j)=normcdf(d2(i,j));
    prime(i,j)=S(i,j)*Nd(i,j)-K*exp(-r*(1-temps(i,1)))*Nd2(i,j);
end
end

```

On obtient les graphes (4.3), (4.4):

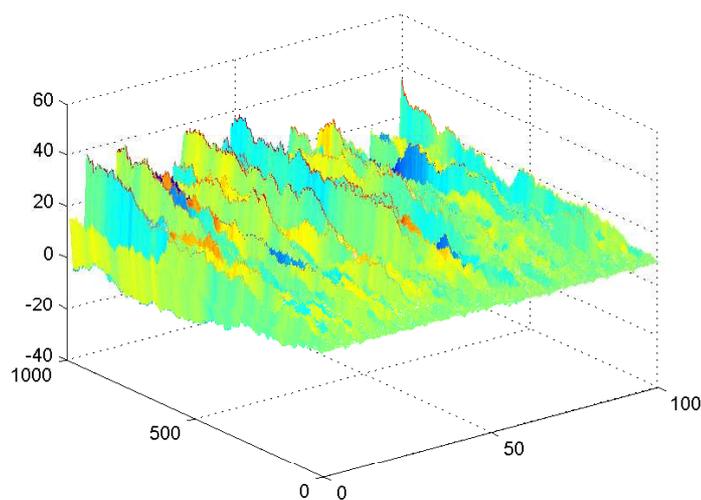
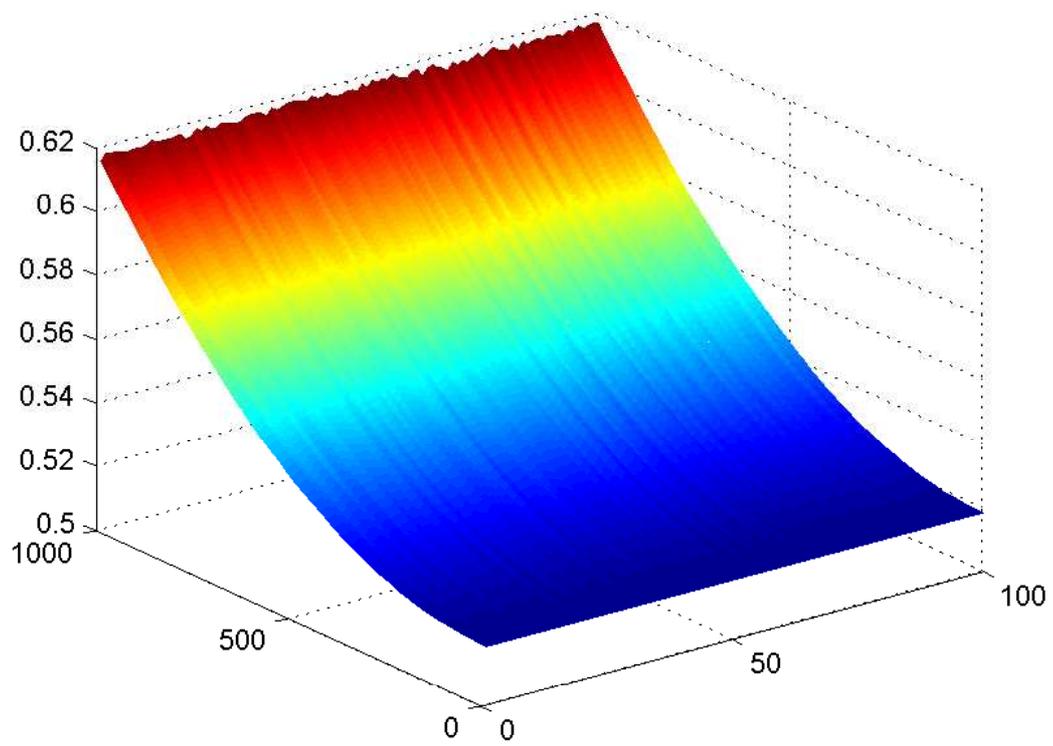


FIG. 4.3 – Valeurs théoriques de l'option pour des instants et des cours différents

La prime d'une option est déterminée comme le montant initial nécessaire pour obtenir exactement le payoff final d'une option, quelque soit l'évolution de l'actif. La prime est investie dans l'action risquée ou non risquée selon la stratégie de couverture. La prime est en fait une conséquence de la stratégie de couverture.

Dans le modèle de Black-Sholes, où le sous-jacent est modélisé par un mouvement Brownien

FIG. 4.4 – *Processus de couverture*

géométrique, nous avons vu le prix d'un call européen est donné par la formule suivante:

$$F(t,x) = xN(d_1) - Ke^{-r\theta}N(d_2).$$

Que fait alors la banque à partir de cette prime pour obtenir le payoff final? En fait, à chaque instant, elle achète une quantité  $N(d_1)$  de sous-jacent et investit le reste de la prime dans l'actif sans risque. La fonction  $d_1$  dépend de la valeur de l'action à chaque instant, i.e.  $S_t$ . Comme le cours de l'action est aléatoire, la quantité  $N(d_1)$  est différente à chaque instant. La banque doit alors rebalancer son portefeuille. Cette stratégie d'investissement s'appelle une stratégie de couverture dynamique. Couverture puisqu'elle permet de couvrir le risque et dynamique puisque l'on doit effectuer en continu un rebalancement du portefeuille en fonction de l'évolution du sous-jacent.

# Conclusion

Ce modeste travail nous a permis d'avoir une vision global du calcul stochastique et de son application à l'étude d'option européenne ainsi qu'une vision des EDP et leur nature probabiliste grâce à la formule de Feynman-Kac.

L'étude du modèle de Black Scholes est au coeur de ce mémoire où on a présenté une solution analytique explicite par un calcul stochastique directe puis par le passage à l'étude déterministe par les EDP pour retrouver la même formule.

Il existe des cas où l'évolution des prix est régit par une équation plus compliquée que celle ci.

Une simulation de Monte Carlo ou bien une application des différences finies se relève très utile dans ce cas et lorsque le problème a solutionner comporte plusieurs dimensions.

Actuellement, une des méthodes les plus utilisées reste celle de Monte Carlo appliquée à la formulation stochastique, c'est une méthode simple à utiliser, elle consiste a générer de nombreuses réalisations d'une variable aléatoire gaussienne, les utiliser pour calculer le prix de l'actif sous jacent, puis calculer les valeurs du payoff, prendre leur moyenne et l'actualiser. Son principe est basé sur le résultat de convergence de la loi forte des grands nombres.

La méthode des différence finies repose sur deux notions: la dicrétisation avec un maillage régulier et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu. Elle est facile à mettre en oeuvre sur des problèmes simples, et a un bon taux de convergence en dimension inférieur ou égale à trois. Au delà, les temps de calcul deviennent prohibitifs.

La formule de Black Scholes a permis de répondre à la question de l'évolution du prix d'une option européenne. Pourtant définie en 1973, elle reste très utilisée de nos jours, l'un de ses traits majeurs est que les formules de prix obtenues, de même que les formules de couverture, dépendent d'un seul paramètre non directement observable: le paramètre  $\sigma$  appelé volatilité est supposé constant dans ce modèle, mais en pratique, on se heurte vite aux imperfection du modèle de Black Scholes, du moment que  $\sigma$  ne peut être constant.

L'étude et la compréhension de l'évolution des prix des options constituent un enjeu toujours plus important sur les marchés financiers. De nos jours les mathématiciens cherchent à développer de nouveaux modèles toujours plus précis pour représenter les dynamiques aléatoires telles que les évolutions boursières.

Nous souhaitons enfin que ce modeste travail puissent susciter et donner lieu à d'autres études dans ce domaine.

# Annexe

## Variables et vecteur gaussien

**Définition 4.5.1 (v.a gaussienne réelle).** On dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle si sa loi de probabilité a pour fonction caractéristique :

$$\phi_x(u) = E\{e^{iuX}\} = \exp\{i\mu - \sigma^2 u^2/2\},$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ .

On en déduit que  $E(X) = \mu$  et que  $var(X) = \sigma^2$ . Si  $\sigma \neq 0$  sa loi possède une densité de probabilité qui a pour expression :

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

**Définition 4.5.2 (vecteur gaussien réel).** un vecteur aléatoire de dimension  $n$   $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  est une v.a gaussienne.

Notons  $\mu$  le vecteur moyenne de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  et  $\Gamma$  la matrice de covariance. Par définition d'un vecteur gaussien, pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ , la v.a  $Y = \sum_{k=1}^n u_k X_k + \langle U, X \rangle$  (produit scalaire de  $\mathbb{R}^n$ ) est une v.a réelle gaussienne, par conséquent sa loi est entièrement déterminée par sa moyenne et sa covariance qui ont pour expressions respectives :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^n u_k E(X_k) = \langle U, \mu \rangle \text{ et}$$

$$Var(Y) = \sum_{j,k=1}^n u_j u_k cov(X_j, X_k) = \langle \Gamma U, U \rangle.$$

On en déduit l'expression, en fonction de  $\mu$  et  $\Gamma$ , de la fonction caractéristique de la loi de probabilité d'un vecteur gaussien  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  :

$$\varphi_X(u) = E(\exp(i\langle U, X \rangle)) = E(\exp(iY)) = \exp(i\langle U, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle \Gamma u, u \rangle).$$

De plus, si  $\Gamma$  est de rang plein  $n$ , alors la loi de probabilité de  $X$  possède une densité dont l'expression est:

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Gamma^{-1}(x - \mu), (x - \mu) \rangle\right).$$

## Processus aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité,  $T$  une partie de  $\mathbb{R}_+$  et  $(E, \varepsilon)$  un espace mesurable.

### Loi d'un processus

**Définition 4.5.3.** Soit  $X$  un processus défini de  $\Omega \times T$  muni de la tribu  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$  dans  $(E, \mathcal{B}_E)$ .

La loi de  $X$ , notée par  $P_X$ , est définie par :

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{B}_E &\rightarrow [0,1] \\ B &\mapsto P \circ X^{-1}(B) \end{aligned}$$

Autrement dit:  $P_X(B) = \{X \in B\} = P\{\omega, X(\omega) \in B\} = P(X^{-1}(B))$ .

La loi d'un processus  $X$  est déterminée par les lois des projections de dimensions finies; nous avons dans le cas où  $E = \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 4.5.1 (Théorème de Kolmogorov).** : *La loi du processus  $X$  est entièrement déterminée par la loi des vecteurs aléatoires  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$  avec  $t_1, t_2, \dots, t_k \in T, \forall k \geq 1$ . Les lois de  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$  pour  $k \geq 1$  sont dites marges du processus ou lois finies dimensionnelles .*

### Stationnarité:

#### – Processus stationnaire au sens fort

Un processus  $X$  est dit stationnaire au sens fort si:

$$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) =^L (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), \forall h.$$

#### – Processus stationnaire au sens faible

Un processus  $X$  est faiblement stationnaire (ou stationnaire par covariance) si:

- $E(X_t) = C^{ts}$ , indépendante du temps,
- $V(X_t) = \sigma^2$  indépendante du temps,

- $cov(X_t, X_s)$  ne dépend que de la différence  $|t - s|, \forall (t, s) \in T$ .
- **Processus à accroissement stationnaire**  
Un processus  $X$  est à accroissement stationnaire si la loi de  $(X_{t+s} - X_t)$  ne dépend que de  $s, \forall t$ .
- **Processus à accroissement indépendant**  
Un processus  $X$  est dit à accroissement indépendant si pour toute suite finie  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables :

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}.$$

Sont indépendantes.

## Mesurabilité

**Définition 4.5.4 (Processus mesurable).** Un processus  $X$  est mesurable si l'application  $(t, w) \rightarrow X_t(w)$  de  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}^d$  est mesurable par rapport aux tribus  $B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$  et  $B(\mathbb{R}^d)$ .

**Définition 4.5.5 (Processus adapté).** Un processus  $X$  est adapté par rapport à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , si pour tout  $t$ , la variable aléatoire  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

La tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information dont on dispose à l'instant  $t$ .

Dans la suite, les filtrations que l'on considérera auront la propriété suivante:

$$\text{Si } A \in \mathcal{A} \text{ et si } P(A) = 0, \text{ alors pour tout } t, A \in \mathcal{F}_t.$$

Ceci exprime que  $\mathcal{F}_t$  contient tous les ensembles de mesure nulle de  $\mathcal{A}$ . Le but de cette hypothèse technique est de permettre d'affirmer que si  $X = Y$  P.p.s et que  $Y$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable alors  $X$  est aussi  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

On peut construire une filtration à partir d'un processus  $X$  en posant  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ . Cette filtration ne vérifie pas, en générale, l'hypothèse précédente. Cependant si on remplace la tribu  $\mathcal{F}_t$  par la tribu  $\overline{\mathcal{F}}_t$  engendrée par  $\mathcal{F}_t$  et  $N$ , l'ensemble des ensembles de probabilité nulle (on dit aussi négligeables) de  $\mathcal{A}$ , on obtient une filtration vérifiant la condition souhaitée. On appelle cette filtration la *filtration naturelle* du processus  $X$ .

Quand on parle de filtration pour un processus sans autres précisions, il s'agit de sa filtration naturelle. Un processus est bien sûr adapté à sa filtration naturelle.

**Définition 4.5.6 (processus progressivement mesurable).** Un processus  $X$  est pro-

gressivement mesurable par rapport à  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  si pour tout  $t \geq 0$ , l'application  $(s, w) \mapsto X_s(w)$  de  $[0, t] \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}^d$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

**Définition 4.5.7 (Processus indistinguables).** Soient  $X$  et  $Y$  deux processus,  $X$  et  $Y$  sont indistinguables si les trajectoires de  $X$  et  $Y$  sont les mêmes c'est à dire:

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

**Définition 4.5.8 (Processus gaussien).** Un processus est dit gaussien si toutes ses lois fini dimensionnelles  $L(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  sont gaussiennes  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ .

Il en résulte que  $X = (X_t)_t$  est gaussien si toute combinaison linéaire  $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$  suit une loi gaussienne (pour tout  $n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ).

## La variation d'un processus

**Définition 4.5.9.** On définit la variation d'ordre  $p$  d'un processus  $X$  sur  $[0, T]$  associée à une subdivision  $\Pi_n = (t_1^n, \dots, t_n^n)$  de  $[0, T]$  par :

$$V_T^P(\Pi_n) = \sum_{i=1}^n |X_{t_i^n}^n - X_{t_{i-1}^n}^n|^P.$$

- Si  $P = 1$  on parle de variation totale de  $X$  sur  $[0, T]$ .
- Si  $P = 2$  il s'agit la variation quadratique de  $X$  sur  $[0, T]$  notée  $\langle X \rangle_T$

**Définition 4.5.10 (Processus à variation bornée).** Un processus  $X$  est dit à variation bornée sur  $[0, T]$ , s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire c.à.d:

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| < +\infty \text{ p.s.}$$

**Définition 4.5.11 (Processus de Markov).** C'est un processus tel que;

$$E(f(X_t) | \mathcal{F}_s^X) = E(f(X_t) | X_s) \quad \text{pour tout } t > s \geq 0,$$

et pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne et bornée (NB:  $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, r \leq s)$ ).

En particulier, si  $f(x) = \chi_B(X)$  avec  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , alors  $P(X_t \in B | \mathcal{F}_s^X) = P(X_t \in B | X_s)$ .

**Définition 4.5.12 (Processus de diffusion).** Un processus de Markov pour lequel toutes les réalisations  $\{X_t, t \geq 0\}$  sont des fonctions continues est appelé "processus de diffusion".

L'un des outils les plus utilisés dans ce mémoire est la notion d'espérance conditionnelle dont les principales propriétés sont présentées dans ce qui suit.

## Espérance conditionnelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité et soit  $\mathcal{B}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ . La définition de l'espérance conditionnelle repose sur le théorème suivant

**Théorème 4.5.2 (Définition de l'espérance conditionnelle, [[3]]).** *Pour toute variable aléatoire réelle intégrable  $X$ , il existe une variable aléatoire, intégrable  $\mathcal{B}$ -mesurable,  $Y$ , unique aux ensembles négligeables près, telle que:*

$$\forall B \in \mathcal{B}; \mathbf{E}(X \mathbb{1}_B) = \mathbf{E}(Y \mathbb{1}_B).$$

$Y$  est appelée espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{B}$  et notée  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ .

Si  $\mathcal{B}$  est une sous-tribu finie, d'atomes  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , on a  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \sum_i \frac{\mathbf{E}(X \mathbb{1}_{B_i})}{P(B_i)} \mathbb{1}_{B_i}$ , la somme étant limitée aux atomes de probabilité non nulle. Ainsi, sur chaque atome  $B_i$ , la valeur de  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  est la valeur moyenne de  $X$  sur  $B_i$ . Dans le cas de la tribu grossière ( $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ ), on a  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(X)$ .

## Propriétés de l'espérance conditionnelle

Le maniement des espérances conditionnelles repose sur les propriétés suivantes:

1. Si  $X$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable,  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = X$ , p.s.
2.  $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbf{E}(X)$ .
3. Pour toute variable aléatoire  $Z$   $\mathcal{B}$ -mesurable et bornée,  $\mathbf{E}(Z\mathbf{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbf{E}(ZX)$ .
4. Linéarité:

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y|\mathcal{B}) = \lambda \mathbf{E}(X|\mathcal{B}) + \mu \mathbf{E}(Y|\mathcal{B}) \text{ p.s.}$$

5. Positivité:  $X \geq 0$ , alors  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$  p.s. et, plus généralement,  $X \geq Y \Rightarrow \mathbf{E}(X|\mathcal{B}) \geq \mathbf{E}(Y|\mathcal{B})$  p.s. De cette propriété, on déduit que

$$|\mathbf{E}(X|\mathcal{B})| \leq \mathbf{E}(|X||\mathcal{B}) \text{ p.s.}$$

et donc que  $\|\mathbf{E}(X|\mathcal{B})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|X\|_{L^1(\Omega)}$ .

6. Si  $\mathcal{C}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{B}$ , alors:

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{C}) \text{ p.s.}$$

7. Si  $Z$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable et bornée,  $\mathbf{E}(ZX|\mathcal{B}) = Z\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  p.s.

8. Si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{B}$  alors,  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(X)$  p.s.

La réciproque de cette propriété est fautive, mais on a le résultat suivant.

**Proposition 4.5.1.** *Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.  $X$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{B}$  si et seulement si:*

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \mathbf{E}(e^{iuX}|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(e^{iuX}) \text{ p.s.}$$

**Remarque 4.4.** On peut aussi définir  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  pour toute variable aléatoire  $X$  positive (sans condition d'intégrabilité). On a alors  $\mathbf{E}(XZ) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})Z)$ , pour toute variable aléatoire  $Z$ ,  $\mathcal{B}$ -mesurable positive et les règles de calcul sont essentiellement les mêmes que dans le cas intégrable.

## Méthodes de Monte Carlo

Le problème de la simulation se pose de la façon suivante. On se donne une variable aléatoire  $Y$  et l'on cherche à réaliser sur un ordinateur une suite de tirages  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  à priori infinie telle que les  $Y_n$  suivent la loi de  $Y$  et  $(Y_n)_{n \geq 1}$  soit une suite de variables aléatoires indépendantes.

Les méthodes de Monte Carlo sont basées sur la loi des grands nombres: on simule un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et de même loi,  $(Y_n)_{n \geq 1}$  de même loi que  $Y$ , en prend ensuite la moyenne des valeurs prises,  $N^{-1} \sum_{n=1}^N Y_n$ , et on obtient une approximation de  $E[Y]$ . La convergence est assurée par le théorème central limite.

**Théorème (Théorème central limite).** *Soit  $(X_n)_{n=1}^\infty$  une suite de v.a.i.i.d telle que  $E(X) = \mu \in \mathbb{R}$  et  $var(X_i) = \sigma^2 > 0$ , Soit  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , alors:*

$$\frac{S_n - \mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{L}_{n \rightarrow \infty} N(0,1)$$

i.e

$$P\left(\frac{S_n - \mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq t\right) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-x^2/2} dx = \phi(t)$$

## Simulation de la loi uniforme

La simulation de la loi uniforme sur l'intervalle  $[0,1]$  se fait par appel à un générateur de nombres pseudo-aléatoires.

La plupart des langages disponibles sur ordinateur possèdent une fonction aléatoire, déjà

programmé, qui retourne un nombre pseudo-aléatoire compris entre 0 et 1, (cette fonction porte le nom de `rand()` en langage "C", `random` en langage turbo pascal).

**Remarque 4.5.** Si  $U \sim \mathbf{U}_{[0,1]}$  alors  $(b-a)U + a \sim \mathbf{U}_{[a,b]}$ . On passe ainsi d'un générateur de  $\mathbf{U}_{[0,1]}$  à un générateur de  $\mathbf{U}_{[a,b]}$ .

Si  $U_1, \dots, U_d$  sont indépendantes et de même loi  $\mathbf{U}_{[0,1]}$  alors  $(U_1, \dots, U_d) \sim \mathbf{U}_{[0,1]^d}$ .

## Simulation de la loi gaussienne

Une méthode classique pour simuler la loi gaussienne repose sur la constatation que, si  $(U_1, U_2)$  sont deux variables aléatoires uniformes sur  $[0,1]$  indépendantes, alors la variable aléatoire:

$$\sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

suit une loi gaussienne centrée et réduite.

Pour simuler des gaussiennes de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma$ , il suffit de poser  $X = m + \sigma g$ , où  $g$  est une gaussienne centrée réduite. ([3])

## Simulation d'un vecteur gaussien

Lorsque l'on construit des modèles où interviennent plusieurs actifs, on est amené à considérer des processus gaussiens à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ . Le problème de la simulation des vecteurs gaussiens est alors essentiel.

Nous allons donner une méthode de simulation de ce type de variables aléatoires.

Nous supposons que l'on cherche à simuler un vecteur gaussien  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  dont la loi est caractérisée par le vecteur des moyennes  $m = (m_1, \dots, m_n) = (E(X_1), \dots, E(X_n))$  et la matrice de covariance  $\Gamma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  où  $\sigma_{ij} = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$ .

La matrice  $\Gamma$  est définie positive et nous supposons de plus qu'elle est inversible. On peut trouver une racine carrée de  $\Gamma$ , c'est à dire une matrice  $A$ , telle que  $A \times^t A = \Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est inversible,  $A$  l'est également, et on peut considérer le vecteur gaussien  $Z = A^{-1}(X - m)$ .  $Z$  est alors un vecteur gaussien, centré. De plus sa matrice de covariance vaut la matrice identité  $I_d$ . La loi du vecteur  $Z$  est celle de  $n$  gaussiennes centrées réduites indépendantes. La loi du vecteur  $X$  peut donc être simulée de la façon suivante :

- On calcule une racine carrée de la matrice  $\Gamma, A$ .
- On simule  $n$  gaussiennes centrées réduites  $G = (g_1, \dots, g_n)$ .
- On calcule  $m + AG$ .

## Algorithmes de simulation des processus stochastiques

Les méthodes décrites précédemment permettent de simuler une variable aléatoire, en particulier, la valeur d'un processus stochastique à un instant donné. On a parfois besoin de simuler toute la trajectoire d'un processus (par exemple lorsqu'on étudie l'évolution au cours du temps de la valeur d'un portefeuille d'option), dans ce qui suit, on présente brièvement le principe de la méthode d'Euler qu'on va utiliser dans les algorithmes de simulation (pour plus d'information sur cette méthode voir ([1])

### Simulation d'un mouvement Brownien

Pour simuler le mouvement Brownien qui est un processus à temps continu, il faut d'abord discrétiser le temps. Soit  $\Delta t$  la longueur d'une période de temps. Nous simulerons le mouvement Brownien au temps  $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

D'après la définition d'un M.B  $\{W_{k\Delta t} - W_{(k-1)\Delta t} : j \in \mathbb{N}\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toute de loi  $N(0, \Delta t)$ .

Pour simuler une trajectoire du mouvement Brownien jusqu'à l'instant  $m\Delta t$ , il suffit de générer  $m$  variables aléatoires indépendantes

$$\{Z_k : k = 1, 2, \dots, m\}$$

de loi normale centrée et réduite. Puisque

$$W_0 = 0 \quad \text{et} \quad W_{k\Delta t} = W_{(k-1)\Delta t} + (\Delta t)^{\frac{1}{2}} Z_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Nous simulerons

$$W_0 = 0 \quad \text{et} \quad \widehat{W}_{k\Delta t} = \widehat{W}_{(k-1)\Delta t} + (\Delta t)^{1/2} Z_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Par induction, on obtient:

$$\widehat{W}_{k\Delta t} = (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^k Z_i, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Évidemment, plus la longueur de l'intervalle de temps  $\Delta t$  est petite, meilleure sera notre approximation.

Sous matlab on écrit le programme correspondant à l'algorithme précédent comme suit:

Programme matlab voir [6]

```
clear all;
n=5 % le nombre de trajectoire simulées
m=10000 % le nombre de périodes de temps
Delta t=.0001 % la longueur d'une période de temps
Z=normrnd(0.1,m,n); % vecteur colonne composée de m v.a.i.i.d N(0,1)
W=zeros(m + 1,n); % initialisation: trajectoire du M.B
temps=zeros(m + 1,1);
for i=1 : m
W(i + 1, :) = W(i, :)+sqrt(Delta t)*z(i, :);
temps(i + 1,1)=temps(i,1)+Delta t;
end
plot(temps,W);
```

Et on obtient la figure (2.1) donnée dans la section du mouvement Brownien.

### Le principe de la méthode d'Euler

On notera  $\Delta^m t = T/n$  et  $\Delta^m W_{i+1} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ . L'idée de la discrétisation d'Euler est la suivante. Pour tout  $i = 1, \dots, m$ , nous avons :

$$\begin{aligned} X_{t_i} &= X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s) ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(X_s) dW_s \\ &\simeq X_{t_{i-1}} + b(X_{t_{i-1}}) \Delta^m t + a(X_{t_{i-1}}) \Delta^m W_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Ce qui conduit à la construction du schéma

$$\begin{cases} \bar{X}_0^m &= X_0 \\ \bar{X}_i^m &= \bar{X}_{i-1}^m + b(\bar{X}_{i-1}^m) \Delta^m t + a(\bar{X}_{i-1}^m) \Delta^m W_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

La simulation de  $\bar{X}^m$  se ramène à la simulation des accroissement de  $W$ , où  $\Delta^m W_i \sim N(0, \Delta^m t I_d)$ .

### Simulation d'une équation différentielle stochastique

Considérons une équation différentielle stochastique de la forme

$$dX_t = b(t, X_t) dt + a(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0.$$

La première étape consiste à s'assurer qu'il existe bien une solution à cette équation différentielle stochastique. Nous appliquerons la méthode d'Euler:

$$\begin{aligned}\widehat{X}_0 &= X_0 \\ \widehat{X}_{(k+1)\Delta t} &= \widehat{X}_{(k)\Delta t} + b(k\Delta t, \widehat{X}_{k\Delta t})\Delta t + a((k\Delta t, \widehat{X}_{k\Delta t})(\widehat{W}_{(k+1)\Delta t} - \widehat{W}_{k\Delta t}).\end{aligned}$$

### Application à l'équation de Black-Scholes

Nous voulons simuler le mouvement Brownien géométrique ( qui régit le prix d'une action):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = s_0. \quad (4.11)$$

Dans ce cas, deux méthodes peuvent être utilisées.

- **Première méthode:** Si nous avons seulement besoin de  $S_T$ , alors nous allons exploiter le fait que nous disposons de la solution de cette équation différentielle stochastique:

$$\begin{aligned}S_T &= s_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right) \\ &= s_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma T^{1/2}Z\right).\end{aligned}$$

Nous nous simulerons donc que la valeur de  $S$  au temps  $T$  et non pas toute sa trajectoire.

- **Deuxième méthode:** Si nous devons connaître la trajectoire de  $S$  nous allons utiliser la méthode d'Euler classique:

$$\begin{aligned}\widehat{S}_0 &= s_0 \\ \widehat{S}_{(k+1)\Delta t} &= \widehat{S}_{k\Delta t} + \mu \widehat{S}_{k\Delta t} \Delta t + \sigma \widehat{S}_{k\Delta t} (\widehat{W}_{(k+1)\Delta t} - \widehat{W}_{k\Delta t}).\end{aligned}$$

Sous matlab, le code qui implémente la simulation d'un mouvement Brownien géométrique est le suivant:

```
%Simulation de plusieurs trajectoires du mouvement Brownien
clear all;
n = 100; %le nombre de trajectoires simulées
m = 10000; %le nombre de périodes de temps
```

```
Delta= 0.0001; %la longueur d'une période de temps
mu = 0.1; %taux d'intérêt instantané annuel
r=0.03;%taux d'intert sans risque annuel
sigma = 0.5; %volatilité
Szero = 100;%valeur initiale
K=100;%pix d'exercice
Z = normrnd(0,1,m,n); %matrice composée de mxn variables aléatoires iid N(0,1)
%initialisation de la matrice contenant les trajectoires du mouvement Brownien
%chacune des colonnes de cette matrice contiendra une trajectoire du Brownien
W = zeros(m+1,n); %initialisation
%initialisation de la matrice contenant les trajectoires de S
%chacune des colonnes de cette matrice contiendra une trajectoire de S
S = zeros(m+1,n); %initialisation
S(1,:) = Szero * ones(1,n); %valeur initiale de S
temps = zeros(m+1,1); %initialisation du vecteur temps
%Approximation du mouvement Brownien geometrique
for i = 1 : m
W(i+1,:)=W(i,:) + sqrt(Delta)*Z(i,:);
S(i+1,:)=S(i,:) + mu*S(i,)*Delta +(sigma*S(i,))*(W(i+1,)-W(i,));
temps(i+1,1)=temps(i,1) + Delta;
plot(temps,S);
```

# Bibliographie

- [1] Bruno Bouchard, "*Méthodes de Monté Carlo en Finance*", polycopié disponible sur <http://www.ceremade.dauphine.fr/~bouchard/pdf/polymc.pdf>.
- [2] Bernard Ycart, "*Modèles et Algorithmes Markoviens*", Springer, 2002.
- [3] Damien Lamberton, Bernard Lapeyre, "*Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*", Ellipses, 1997, (2<sup>ème</sup> édition) .
- [4] Jean François LE GALL, "*Mouvement Brownien et Calcul Stochastique*", polycopie disponible sur <http://www.math.ens.fr/~legall//DEA96.pdf>.
- [5] Olivier Lévêque, "*Cours de Probabilités et Calcul Stochastique*", polycopié disponible sur [http://infoscience.epfl.ch/record/96028/files/cours\\_proba.pdf](http://infoscience.epfl.ch/record/96028/files/cours_proba.pdf).
- [6] Philippe Briand, "*Équations Différentielles stochastiques*", polycopié disponible sur <http://www.lama.univ-savoie.fr/~briand/edsr/poly.pdf>.
- [7] Romuald ELIE, "*Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*", polycopié disponible sur <http://www.ceremade.dauphine.fr/~elie/elie>
- [8] A, Taik, "*Equations aux dérivées partielles*", polycopié disponible sur [http://www.fstm.ac.ma/labomac/Taik-cours1\\_AN3.pdf](http://www.fstm.ac.ma/labomac/Taik-cours1_AN3.pdf)
- [9] Trsitán Lorino, "textit"Processus stochastique", polycopié disponible sur [http://perso.lcpc.fr/tristan.lorino/tristan\\_fichiers/Probastat2.pdf](http://perso.lcpc.fr/tristan.lorino/tristan_fichiers/Probastat2.pdf).