

REMERCIEMENTS

Nous remercions en premier lieu le bon « Dieu » le tout puissant de nous avoir illuminé et ouvert les portes de savoir, de nous avoir donné la santé, le courage, la volonté et la patience afin de réaliser ce travail.

En second lieu nous tenons, à exprimer nos gratitudee et remerciements à notre promotrice Mme TICHERFATINE Samira, enseignante à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, d'avoir proposé et accepté de diriger ce travail, aussi pour sa patience, son soutien et sur tout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance durant toute la période suivi préparation de ce mémoire.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt à notre travail et de l'avoir examiné.

Un grand merci à tous nos enseignants pour leurs efforts fournis durant tout notre cursus universitaire.

Enfin, nos meilleurs remerciements vont à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin, encouragé tout au long de notre parcours universitaire en particulier nos chères familles et nos amis(es).

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents, mon père "Amar ", ma mère "Zahia"
Pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études. Que Dieu leur préserve et leur accorde la santé, la longue vie et le bonheur,

A l'âme de mes chers Grands-pères "Vava Mouni" et "Djeddi Rabah"
Je leur rends hommage par ce modeste travail en guise de ma reconnaissance éternelle et de mon infini amour,

A mes deux grands-mères "Djidda messaouda" et "Mamas el Djouher"
Les mots ne suffisent guère pour exprimer l'amour, la gratitude et l'affection que je porte pour eux. Que 'ALLAH' le tout puissant leur donnera la santé, le bonheur et une longue vie afin que je puisse leur combler à mon tour,

A mon cher frère "Lounes"
Je lui souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité. Je lui exprime à travers ce travail mes sentiments de fraternité et d'amour,

A mes chères sœurs "Lycia" et "Lamia"
Pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral, Je leurs dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite,

A "Lounes" une personne spécifique, et très spécial pour moi,

A ma chère Binôme "Djazia"
Pour son soutien, sa patience et sa compréhension durant la préparation de notre mémoire,

A mes amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables
Je leur souhaite de ma part la réussite,

A toute ma famille petit et grand
Pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Enfin mon plus profond respect va tout droit à mes aimables professeurs
dans tous les cycles de ma scolarité qui mon éclairé la voie du savoir.

« Nacera »

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents, mon père "Lounes ", ma mère "fatima"
Pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études. Que Dieu leur préserve et leur accorde la santé, la longue vie et le bonheur,

A mon mari "Salem" une personne spécifique, et très spécial pour moi
Qui ne cesse pas de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études universitaires,

A mes deux grands-parents," vava Ali", "yemma-Ha"
Les mots ne suffisent guère pour exprimer l'amour, la gratitude et l'affection que je porte pour eux. Que 'ALLAH' le tout puissant leur donnera la santé, le bonheur et une longue vie afin que je puisse leur combler à mon tour,

A mon cher frère "Belkacem" Je lui souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité. Je lui exprime à travers ce travail mes sentiments de fraternité et d'amour,

A mes chères sœurs "Sadia" et "Katia" Pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral, Je leur dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite,

A mes chères sœurs, leurs maris et leurs enfants Pour leur soutien moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études,

A ma belle-mère " Ouiza"
Que dieu lui donne une bonne santé,

A mon beau-frère "Nassim"

A ma chère Binôme "Nacera"
Pour son soutien, sa patience et sa compréhension durant la préparation de notre mémoire,

A mes amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables
Je leur souhaite de ma part la réussite,

A toute ma famille petit et grand Pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Enfin mon plus profond respect va tout droit à mes aimables professeurs dans tous les cycles de ma scolarité qui mon éclairé la voie du savoir.

« Djazia »

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	4
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES.	4
1.1 POSITION DU PROBLÈME ET DÉFINITIONS ESSENTIELLES	4
1.2 SUPPORT PLAN	5
1.3 FORMULE D'ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE	6
1.4 CRITÈRE D'OPTIMALITÉ	7
1.5 DÉCOMPOSITION DE LA VALEUR DE SUBOPTIMALITÉ	8
1.6 CRITÈRE DE SUBOPTIMALITÉ	9
1.7 LA RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE	10
1.7.1 Itérations de l'algorithme	10
1.7.2 Exemple d'application 1 :	14
1.7.3 Exemple d'application 2 :	16
1.8 LA RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE DUALE	16
1.8.1 Exemple d'application 3 :	18
2 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX EN CONTRÔLE OPTIMAL	19
2.1 INTRODUCTION À LA COMMANDE OPTIMALE	19
2.1.1 Définition d'un système de contrôle optimal :	19
2.1.2 Objet de la commande :	19
2.1.3 Position initiale :	20
2.1.4 Objectif de la commande :	20
2.1.5 Classe des commandes admissibles :	20
2.1.6 Critère de qualité :	20
2.1.7 Contrôlabilité :	20
2.2 PROBLÈME TERMINAL D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE LINÉAIRE	21
2.3 SUPPORT CONTRÔLE	23
2.4 FORMULE D'ACCROISSEMENT DU CRITÈRE DE QUALITÉ	24
2.5 CRITÈRE D'OPTIMALITÉ	26
2.6 PRINCIPE DU MAXIMUM	26
2.7 PRINCIPE ε -OPTIMALITÉ	27
2.8 DÉCOMPOSITION DE LA VALEUR DE SUBOPTIMALITÉ	27
2.9 MÉTHODE DE RÉOLUTION	29
2.9.1 Changement de commande :	29
2.9.2 Changement de support :	31
2.9.3 Procédure finale :	32
2.10 ALGORITHME DE LA MÉTHODE	34

2.11	EXEMPLE D'APPLICATION	37
3	RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX DE FONCTIONNELLE NON DIFFÉRENTIABLE EN CONTRÔLE OPTIMAL	44
3.1	PROBLÈME TERMINAL D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE LINÉAIRE	44
3.2	SUPPORT CONTRÔLE	46
3.3	FORMULE D'ACCROISSEMENT DU CRITÈRE DE QUALITÉ	47
3.4	CRITÈRE D'OPTIMALITÉ	49
3.5	PRINCIPE DU MAXIMUM	49
3.6	PRINCIPE ϵ -OPTIMALITÉ	50
3.7	MÉTHODE DE RÉOLUTION	51
3.7.1	Changement de commande :	51
3.7.2	Changement de support :	54
3.7.3	Procédure finale :	55
3.8	ALGORITHME DE LA MÉTHODE	57
3.9	EXEMPLE D'APPLICATION	59
	CONCLUSION GÉNÉRALE	65
	BIBLIOGRAPHIE	67

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dès, la révolution industrielle le monde a connu de prodigieux développement dans à peu près tous les domaines tels que les sciences, les mathématiques, l'ingénierie, l'économie, etc. En effet, cette croissance accompagnée et la complication des organisations ont engendré de nouveaux outils pour améliorer les performances des entreprises. C'est dans ce contexte de la volonté d'atteindre l'optimum qu'il y a eu l'apparition de la recherche opérationnelle, afin de continuer à croître et à gagner en efficacité.

La recherche opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et des techniques rationnelles orientées vers la recherche de la meilleure façon d'opérer des choix en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.

L'optimisation vient du latin optimum qui signifie le meilleur. C'est une branche des mathématiques, cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble.

Elle joue un rôle important en recherche opérationnelle dans le cadre de la théorie des jeux, la programmation linéaire, ou encore en théorie du contrôle.

La programmation linéaire est un domaine central de l'optimisation. C'est une méthode de résolution d'une fonction linéaire. Elle permet de déterminer l'optimum d'une fonction en tenant compte des contraintes.

La résolution d'un programme linéaire a pour objet de déterminer la valeur des variables qui rend optimale la fonction objective. Il s'agit dans un premier temps, d'identifier les variables, de définir les contraintes ainsi que la fonction objective, puis, dans un second temps, de les exprimer sous forme de fonctions linéaires.

La théorie du contrôle vise à étudier le comportement et les propriétés des systèmes contrôlés (ou commandés), c'est-à-dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable « t » qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle. Il existe deux classes de méthodes directes et indirectes de résolution de problèmes en commande optimale. Parmi les objectifs remarquables de la théorie du contrôle, on cite :

- La contrôlabilité du système : l'amener d'un état initial donné à un état final en un temps fixé et en respectant certains critères.
- Le contrôle optimal du système : le contrôler de manière à lui faire quelque chose de façon optimale.
- La stabilisation du système : le rendre insensible à certaines perturbations[3,11].

Le principe du maximum sur lequel toutes les méthodes d'optimisation sont fondées, est un inventaire non exhaustif des techniques de résolution de problèmes d'optimisation dynamique et leurs principales caractéristiques sont ainsi présentées. En intégrant au problème des contraintes physiques, ces méthodes fournissent des conditions optimales de fonctionnement réalistes.

Actuellement, la théorie des problèmes Min-Max est l'une des classes les plus développées en optimisation non différentiable, qui est un secteur très vif de nos jours. Les problèmes Min-Max sont connus entant qu'un des principes d'estimation de paramètre et d'approximation des problèmes de norme L_∞ , on les retrouve aussi comme matière de recherche dans diverses applications des Mathématiques.

Beaucoup d'efforts ont été consacrés à développer cette nouvelle direction de l'analyse. Parmi eux, les travaux du mathématicien J.F.Riccati (1676-1754) à qui l'on doit la célèbre équation de Riccati et des mathématiciens du dix-neuvième siècle comme W.R.Hamilton, K.G Jacobi, R.E.Kalman et L.S.Pontriaguine qui joue un rôle éminent dans le développement de la théorie du contrôle optimal en formulant le principe du maximum de Pontriaguine en 1956[4,5]. De plus la notion de contrôlabilité qui est apparus dans les années soixante avec les travaux de R.E.Kalman[6,7].

Ainsi en utilisant la métrique du simplexe, R.Gabassov et F.M.Kirrilova ont inventé durant les années 80 la méthode adaptée[2,10,14]. L'avantage de celle-ci est une méthode de points intérieurs, elle permet aussi l'obtention d'une solution approchée et résout des problèmes de contrôle optimal. Au début de son invention, elle a été appliqué à différents types de problèmes de programmation mathématiques, par la suite à des problèmes de contrôle optimal.

L'objet de ce mémoire est d'appliquer les principes de la méthode adaptée à un problème de la forme Min-Max de fonctionnelle non différentiable. Comme on a introduit une nouvelle structure dite "support coordinateur ". La particularité de cette méthode est le fait qu'elle permet le démarrage de l'itération à partir d'un point intérieur et permet l'obtention d'une solution ε -optimale avec une précision $\varepsilon \geq 0$ choisie à l'avance[2,10,15]. L'avantage réside aussi dans le fait qu'elle manipule les contraintes telles qu'elles se présentent sans chercher à les modifier, par conséquent on a un gain en temps de calcul et en espace mémoire, ce qui fait la comparaison avec la méthode de simplexe, la méthode duale, le principe de décomposition de Dantzig-Wolfe, les méthodes de point intérieur, etc [11].

Notre travail est constitué d'une introduction, de trois chapitres essentielles et d'une conclusion.

Le premier chapitre, se focalise sur la résolution du problème Min-Max avec des contraintes généralisées en programmation linéaire par la méthode adaptée.

Le deuxième chapitre comporte deux parties : La première partie, donne quelques notions de base sur la commande optimale. La deuxième partie, est consacrée à la résolution d'un problème Min-Max en contrôle optimal avec des commandes constantes par morceaux.

Le dernier chapitre, concerne la généralisation de la méthode adaptée sur la résolution d'un problème Min-Max de fonctionnelle non différentiable en contrôle optimal.

En se basant dans les trois chapitres sur le concept de la matrice support et le support coordinateur de la méthode adaptée. Nous avons calculé la formule d'accroissement de la fonctionnelle, ainsi que formuler les deux critères d'optimalité et de suboptimalité, puis nous avons construit les itérations de l'algorithme de résolution. Cette méthode est illustrée par des exemples numériques.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion générale et bibliographie.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX AVEC CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES.

1

INTRODUCTION :

Ce chapitre est consacré sur la résolution du problème min-max avec des contraintes généralisées en programmation linéaire par la méthode adaptée mise en avant par R. Gabasov et F.M. Kirillova [2,10,15], et ensuite nous avons représenté un exemple pour appliquer la méthode.

1.1 POSITION DU PROBLÈME ET DÉFINITIONS ESSENTIELLES

Considérons le problème Min Max suivant :

$$\begin{aligned} f(x) &= \max_{l \in L} |c_l^t x + d_l| \rightarrow \min , \\ Ax &= b , \\ d_* &\leq x \leq d^* , \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $A = A(I, J) = \begin{pmatrix} a_i^j \\ i \in I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^j, j \in J \\ i \in I \end{pmatrix}$ est une $m \times n$ -matrice ,

$b = b(I) = (b_i, i \in I)$ un m -vecteur, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

Définition 1 :

Un vecteur x est dit plan du problème (1.1) s'il vérifie les contraintes générales $Ax = b$ et les contraintes de borne $d_* \leq x \leq d^*$ du problème (1.1).

Le problème (1.1) peut être écrit sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow \min , \\ -x_0 &\leq c_l^t x + d_l \leq x_0 , \quad l \in L; \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} a_i^t x &= b_i , \quad i \in I ; \\ d_* &\leq x \leq d^* .; \end{aligned}$$

En utilisant cette forme, on construit le support du problème (1.1) :

1.2 SUPPORT PLAN

De l'ensemble J , on choisit le sous-ensemble J_{sup} et posons $\bar{J}_{sup} = \{J_{sup}\} \cup \{0\}$, $J_n = J \setminus J_{sup}$, et de l'ensemble L le sous-ensemble L_{sup} tel que $|L_{sup}| + |I| = |J_{sup}| + 1$.
 Subdivisions L_{sup} en deux sous-ensembles $L_{sup}^+ \subseteq L_{sup}$ et $L_{sup}^- = L_{sup} \setminus L_{sup}^+$.
 Notons $e(L) = (e_l = 1, l \in L)$; $L_n = L \setminus L_{sup}$.

Considérons la matrice $B_{sup} = B(L_{sup}, \bar{J}_{sup})$ définie par :

$$B_{sup} = \begin{bmatrix} e(L_{sup}^-) & c_l^t(J_{sup}), \\ -e(L_{sup}^+) & l \in L_{sup} \\ 0 & a_i^t(J_{sup}), \\ & i \in I \end{bmatrix}.$$

Calculons les vecteurs :

des potentiels $u(L) = (u(L_{sup}), u(L_n))$, $\pi(I)$; par :

$$(u(L_{sup}), \pi(I)) = c_0^t(\bar{J}_{sup}) B_{sup}^{-1}, \quad u(L_n) = 0, \quad c_0 = (c_{00} = -1, c_{0j} = 0, j \in J_{sup}),$$

et des estimation $E(J)$:

$$E_j = u^t(L_{sup}) c(L_{sup}, j) + \pi(I) A(I, j), \quad j \in J_n,$$

par construction, on a :

$$E_j = 0, \quad j \in J_{sup};$$

Définition 2 :

La paire $k_{sup} = \{L_{sup}, \bar{J}_{sup}\}$ est dite support du problème (1.1) si $\det(B_{sup}) \neq 0$ et les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$u(L_{sup}^-) \leq 0, \quad u(L_{sup}^+) \geq 0.$$

Définition 3 :

La paire $\{x, K_{sup}\}$ formée d'un plan x du problème (1.1) et d'un support K_{sup} est dite support plan du problème (1.1).

Définition 4 :

Un support plan $\{x, K_{sup}\}$ est dit non dégénéré si :

$$\begin{aligned} d_{*j} < x_j < d_j^* & , j \in J_{sup}; \\ |c_l^t x + d_l| < f(x) & , l \in L_n. \end{aligned}$$

Définition 5 :

Un support K_{sup} est dit support coordinateur associé au plan x si :

$$\begin{aligned} L_{sup}^+ \subseteq L^+(x) & = \{l \in L : c_l^t x + d_l = f(x)\}; \\ L_{sup}^- \subseteq L^-(x) & = \{l \in L : c_l^t x + d_l = -f(x)\}. \end{aligned}$$

1.3 FORMULE D'ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE

Soient $\{x, K_{sup}\}$ un support plan du problème (1.1) et $\bar{x} = x + \Delta x$ un autre plan du problème (1.1).

Le plan x vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} c_l^t x - x_0 = w_l - d_l, l \in L_{sup}^+ \\ c_l^t x + x_0 = w_l - d_l, l \in L_{sup}^- \\ a_i^t x = w_i + b_i, i \in I \end{cases}, \quad (1.3)$$

de même que le plan \bar{x} :

$$\begin{cases} c_l^t \bar{x} - \bar{x}_0 = \bar{w}_l - d_l, l \in L_{sup}^+ \\ c_l^t \bar{x} + \bar{x}_0 = \bar{w}_l - d_l, l \in L_{sup}^- \\ a_i^t \bar{x} = \bar{w}_i + b_i, i \in I \end{cases}, \quad (1.4)$$

où $w = (w(L_{sup}), w(I))$, $\bar{w} = (\bar{w}(L_{sup}), \bar{w}(I))$ sont des vecteurs d'écart tel que :

$$\begin{aligned} (\bar{w}(L_{sup}), \bar{w}(I)) &= (w(L_{sup}), w(I)) + (\Delta w(L_{sup}), \Delta w(I)), \\ \bar{w}(I) &= w(I) = \Delta w(I) = 0_I. \end{aligned} \quad (1.3)$$

En faisant la différence entre les formules (1.3) et (1.4), on obtient :

$$\begin{cases} c_l^t \Delta x - \Delta x_0 = \Delta w_l, l \in L_{sup}^+ \\ c_l^t \Delta x + \Delta x_0 = \Delta w_l, l \in L_{sup}^- \\ a_i^t \Delta x = \Delta w_i, i \in I \end{cases},$$

de là on a :

$$\begin{cases} \Delta x_0 + c[l, J_{sup}] \Delta x(J_{sup}) = -c[l, J_n] \Delta x(J_n) + \Delta w_l, l \in L_{sup}^- \\ -\Delta x_0 + c[l, J_{sup}] \Delta x(J_{sup}) = -c[l, J_n] \Delta x(J_n) + \Delta w_l, l \in L_{sup}^+ \\ A[i, J_{sup}] \Delta x(J_{sup}) = -A[i, J_n] \Delta x(J_n) + \Delta w_i, i \in I \end{cases},$$

en développant les dernières équations, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x(J_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} c[L_{sup}, J_n] \\ A[I, J_n] \end{pmatrix} \Delta x(J_n) - \begin{pmatrix} \Delta w(L_{sup}) \\ \Delta w(I) \end{pmatrix} \right],$$

c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x(J_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} c[L_{sup}, J_n] \\ A[I, J_n] \end{pmatrix} \Delta x(J_n) - \begin{pmatrix} \Delta w(L_{sup}) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (1.5)$$

pour tout $\Delta x(J_n)$ et $\Delta w(L_{sup})$.

De la formule (1.5), résulte la formule de décroissance de la fonctionnelle du problème (1.1) :

$$\Delta x_0 = \sum_{j \in J_n} E_j \Delta x_j - \sum_{l \in L_{sup}} u_l \Delta w_l. \quad (1.6)$$

Le maximum d'accroissement de la fonctionnelle :

$-\Delta f(x) = -[f(x + \Delta x) - f(x)] = -\Delta x_0$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} d_{*j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^* - x_j, j \in J_n; \\ \Delta w_l \leq -w_l, l \in L_{sup}^+; \\ \Delta w_l \geq -w_l, l \in L_{sup}^-, \end{cases} \quad (1.7)$$

est atteint pour :

$$\Delta x_j = \begin{cases} d_{*j} - x_j, & E_j > 0, \\ d_j^* - x_j, & E_j < 0, \\ 0, & E_j = 0, \end{cases} \quad ; \Delta w_l = \begin{cases} -w_l, & l \in L_{sup}^+ ; \\ -w_l, & l \in L_{sup}^-, \end{cases} \quad (1.8)$$

et est égal à :

$$\begin{aligned} \beta(x, K_{sup}) = & \sum_{E_j > 0, j \in J_n} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{E_j < 0, j \in J_n} E_j(x_j - d_j^*) + \\ & \sum_{l \in L_{sup}^+} u_l(f(x) - c_l^t x - d_l) + \sum_{l \in L_{sup}^-} u_l(-f(x) - c_l^t x - d_l) \end{aligned} \quad (1.9)$$

appelée valeur de suboptimalité du support plan $\{x, K_{sup}\}$.

De là, on a toujours l'inégalité :

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq B(x, K_{sup}), \forall \bar{x}. \quad (1.10)$$

De cette inégalité, on déduit le critère d'optimalité.

1.4 CRITÈRE D'OPTIMALITÉ

Théorème 1 [1,15] :

Soit x un plan du problème (1.1), K_{sup} un support coordinateur associé à x .

Les relations :

$$\begin{cases} x_j = d_{*j} & , \text{ si } E_j > 0 ; \\ x_j = d_j^* & , \text{ si } E_j < 0 ; \\ d_{*j} \leq x_j \leq d_j^* & , \text{ si } E_j = 0, j \in J_n, \end{cases} \quad (1.11)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, K_{sup}\}$.

Preuve :

i) Condition suffisante

Soient x un plan du problème (1.1), K_{sup} un support coordinateur associé à x et $\bar{x} = x + \Delta x$ un nouveau plan du problème (1.1) .

Si les relations (1.11) sont vérifiées alors de (1.9) on a $\beta(x, K_{sup}) = 0$.

Comme $-\Delta f(x) \leq \beta(x, K_{sup})$, alors : $-(f(\bar{x}) - f(x)) \leq 0$, pour tout \bar{x} .

D'ou $f(\bar{x}) \geq f(x)$, pour tout \bar{x} , ce qui implique que $\{x, K_{sup}\}$ est un support plan optimal .

ii) Condition nécessaire

On va procéder par absurde :

Soit $\{x, K_{sup}\}$ un support plan optimal non dégénéré et supposons que les relations (1.15) ne soient pas vérifiées, c'est à dire : $\exists j_0 \in J_n$ tel que :

$$\begin{cases} x_{j_0} \neq d_{*j_0} \text{ et } E_{j_0} < 0 ; \\ \text{ou} \\ x_{j_0} \neq d_{*j_0} \text{ et } E_{j_0} > 0 . \end{cases}$$

Construisons le nouveau plan $\bar{x} = x + \Delta x$.
 Pour cela posons :

$$\begin{cases} \Delta x_{j_0} = -\text{sign}E_{j_0} , \\ \Delta x_j = 0 & ; j \in J_n \setminus j_0 , \\ \Delta w_l = 0 & ; l \in L_{sup} . \end{cases} \quad (1.12)$$

Les composantes Δx_j , $j \in J_{sup}$ et le nombre Δx_0 sont définis par le système d'équation (1.8) .

Comme $\{x, K_{sup}\}$ est un support plan non dégénéré , alors : $\exists \theta > 0$ tel que $\bar{x} = x + \theta \Delta x$ soit aussi un plan pour le problème (1.1) .

Et par suite : $f(\bar{x}) = f(x) + \theta \Delta x_0$.

On remplace Δx par sa valeur trouvée dans (1.12) , on obtient :

$$f(x + \Delta x) = f(x) - \theta |E_{j_0}| .$$

Donc : $f(\bar{x}) < f(x)$, ceci contredit l'optimalité du support plan $\{x, K_{sup}\}$.

C.Q.F.D.

1.5 DÉCOMPOSITION DE LA VALEUR DE SUBOPTIMALITÉ

Construisons le problème dual du problème (1.1) :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= d^t \gamma - b^t y + d_*^t v - d^{*t} w \rightarrow \max , \\ c^t \gamma + A^t y - v + w &= 0 , \\ y &= y_1 - y_2 , y_1 \geq 0 , y_2 \geq 0 , \\ v \geq 0 , w \geq 0 , \sum_{l \in L} |\gamma_l| &= 1 , \end{aligned} \quad (1.13)$$

où $c = \begin{pmatrix} c_l^t(J) , \\ l \in L \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\lambda = (\gamma = u(L) , y = \pi(I) , y_1 , y_2 , v , w)$ construit avec le support K_{sup} du problème (1.1) et vérifiant les relations :

$$\begin{cases} \gamma(L) = u(L) ; \\ v_j = E_j , w_j = 0 , \text{ si } E_j \geq 0 , \\ v_j = 0 , w_j = -E_j , \text{ si } E_j < 0 , j \in J ; \\ y_{1i} = y_i , y_{2i} = 0 , \text{ si } y_i \geq 0 , \\ y_{1i} = 0 , y_{2i} = -y_i , \text{ si } y_i \leq 0 , i \in I . \end{cases} \quad (1.14)$$

est un plan dual de problème (1.13) .

Alors les relations (1.6) et (1.14) nous donnent :

$$\begin{aligned}
 \beta(x, K_{sup}) &= \sum_{E_j > 0, j \in J_n} E_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{E_j < 0, j \in J_n} E_j (x_j - d_j^*) + \\
 &\quad \sum_{l \in L_{sup}^+} u_l (f(x) - c_l^t x - d_l) + \sum_{l \in L_{sup}^-} u_l (-f(x) - c_l^t x - d_l) \\
 &= E^t x - v^t d_* + w^t d^* + f(x) - E^t x - u^t d \\
 &= f(x) - u^t d - v^t d_* + w^t d^* \\
 &= f(x) - \phi(\lambda) \\
 &= f(x) - f(x^0) + \phi(\lambda^0) - \phi(\lambda) \\
 \beta(x, K_{sup}) &= \beta(x) + \beta(K_{sup}) .
 \end{aligned}$$

où λ^0 : est le plan dual optimal et x^0 le plan primal optimal du problème (1.1) .

$\beta(x) = f(x) - f(x^0)$: est la mesure de non optimalité du plan x .

$\beta(K_{sup}) = \phi(\lambda^0) - \phi(\lambda)$: est la mesure de non optimalité du support K_{sup} .

1.6 CRITÈRE DE SUBOPTIMALITÉ

Théorème 2 [1] :

Soit $\varepsilon \geq 0$ donné . Le plan x du problème (2.1) est ε -optimal si et seulement s'il existe un support K_{sup} pour lequel : $\beta(x, K_{sup}) \leq \varepsilon$.

Preuve :

Condition suffisante :

Soient $\{x, K_{sup}\}$ un support plan du problème (1.1) pour lequel $\beta(x, K_{sup}) \leq \varepsilon$ et $\bar{x} = x + \Delta x$ un autre plan du problème (1.1) .

On a : $f(\bar{x}) - f(x) \geq -\beta(x, K_{sup}) \geq -\varepsilon$, pour tout \bar{x} .

Par conséquent , pour $\bar{x} = x^0$, on aura : $f(x^0) - f(x) \geq -\varepsilon$,
d'où : $f(x) - f(x^0) \leq \varepsilon$.

Donc x est ε -optimal.

Condition nécessaire :

Soit x un plan ε -optimal du problème (1.1) , c'est à dire : $f(x) - f(x^0) \leq \varepsilon$.
(x_0 plan optimal du problème (1.1))

Si on prend un support \tilde{K}_{sup}^0 correspondant au plan dual optimal $\tilde{\lambda}^0$, on aura :

$$\beta(\tilde{K}_{sup}^0) = \phi(\tilde{\lambda}^0) - \phi(\lambda) = 0 ,$$

et par conséquent de la décomposition de β , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \beta(x, \tilde{K}_{sup}^0) &= \beta(x) + \beta(\tilde{K}_{sup}^0) \\
 &= \beta(x) + 0 \\
 &= f(x) - f(x^0) \leq \varepsilon .
 \end{aligned}$$

Ce qui donne le plan x est ε -optimal.

Conséquence 1 :

Le plan x du problème (1.1) est optimal si et seulement s'il existe un support K_{sup} pour lequel :

$$\beta(x, K_{sup}) = 0 . \quad (1.15)$$

Remarque 1 :

L'équation (1.15) est vraie si et seulement si les relations (1.11) ont lieu et K_{sup} est le support coordinateur associé au plan optimal x .

Si le critère d'optimalité et de suboptimalité ne sont pas vérifiés alors on passe à l'itération de l'algorithme .

1.7 LA RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

1.7.1 Itérations de l'algorithme

L'itération de l'algorithme est constituée de deux procédures qui sont le changement du plan et du support .

Changement de plan($x \rightsquigarrow \bar{x}$)

Construisons tout d'abord le pseudo-plan κ associé au support K_{sup} par les relations suivantes :

$$\kappa_j = \begin{cases} d_{*j} & \text{si } E_j \geq 0 , \\ d_j^* & \text{si } E_j < 0 , \end{cases} \quad j \in J_n ;$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(J_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} c(L_{sup}, J_n) \\ A(I, J_n) \end{pmatrix} \kappa(J_n) + \begin{pmatrix} d(L_{sup}) \\ -b(I) \end{pmatrix} \right] \quad (1.16)$$

a/ Si les relations :

$$\begin{aligned} d_{*j} \leq \kappa_j \leq d_j^* , \quad j \in J_{sup} ; \\ |c_l^t \kappa + d_l| \leq \kappa_0 , \quad l \in L_n ; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\kappa_0 \geq 0 \quad \text{si } L_n = 0 ,$$

sont vérifiées alors κ est optimal et $f(\kappa) = \kappa_0$.

b/ Si les relations (1.17) ne sont pas vérifiées alors, on construit la direction $q \in \mathbb{R}^n$ (pour améliorer le plan x) comme suit :

$$q = \kappa - x , \quad (1.18)$$

et le nouveau plan \bar{x} sera défini par : $\bar{x} = x + \theta q$,

où $\theta = \min\{1, \theta_{j_0}, \theta_f\}$ le pas maximal selon la direction q , tel que Les différents pas θ_{j_0} , θ_f sont obtenus par les formules suivantes :

$$\theta_{j_0} = \min \theta_j, j \in J_{sup} ; \theta_j = \begin{cases} (d_{*j} - x_j)/q_j & \text{si } q_j < 0, \\ (d_j^* - x_j)/q_j & \text{si } q_j > 0, \\ \infty & \text{si } q_j = 0, j \in J_{sup}. \end{cases}$$

$$\theta_f = \min\{\theta_0, \theta_{l_0}\}; \theta_0 = f(x)/\beta(x, K_{sup}), \theta_{l_0} = \min\{\theta_l^+, \theta_l^-\}, l \in L_n; \quad (1.19)$$

$$\theta_l^+ = \begin{cases} (-c_l^t x - d_l + x_0)/(c_l^t q + \beta(x, K_{sup})) & \text{si } c_l^t q + \beta(x, K_{sup}) > 0 ; \\ \infty & \text{si non} \end{cases}, l \in L_n .$$

$$\theta_l^- = \begin{cases} (-c_l^t x - d_l - x_0)/(c_l^t q - \beta(x, K_{sup})) & \text{si } c_l^t q - \beta(x, K_{sup}) < 0 , \\ \infty & \text{si non} \end{cases}, l \in L_n .$$

En utilisant le nouveau plan $\bar{x} = x + \theta q$ du problème (1.1) et en remplaçant les q_j par leurs valeurs données par les formules (1.18), on obtient :

$$\beta(\bar{x}, K_{sup}) = (1 - \theta)\beta(x, K_{sup}).$$

Si le support plan $\{x, K_{sup}\}$ est non dégénéré, alors $\theta > 0$ et par conséquent :

$$\beta(\bar{x}, K_{sup}) < \beta(x, K_{sup}).$$

Du calcul de θ , on a les différents cas suivants :

- .1^{er} cas : $\theta = \theta_0$, alors $\bar{x} = x + \theta q$ est optimal et $f(\bar{x}) = 0$ ou bien $\bar{x} = x + \theta q$ est ε -optimal et $f(\bar{x}) \leq \varepsilon$.
- .2^{me} cas : $\theta = 1$, alors $\bar{x} = \kappa$ est optimal.
- .3^{me} cas : $(1 - \theta)\beta(x, K_{sup}) > \varepsilon$, alors on passe au changement du support.

Changement de support ($K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$)

Le changement de support $K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$; entraîne le changement de plan dual $\lambda \rightsquigarrow \bar{\lambda}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} \bar{u}(L) = u(L) + \sigma_0 t(L) ; \\ \bar{E}(J) = E(J) + \sigma_0 t(J) , \end{cases}$$

où le vecteur $t(J, L)$ est la direction d'augmentation de la fonction objectif duale et σ_0 est le pas dual maximal suivant cette direction.

Ce changement du support se fait en fonction de la valeur de θ , Pour cela on distingue les deux cas suivants :

a/ $\theta = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_{sup}$:

Introduisons la valeur suivante :

$$u_* = \begin{cases} d_{*j_0} - \kappa_{j_0} & \text{si } \kappa_{j_0} < d_{*j_0} ; \\ d_{j_0}^* - \kappa_{j_0} & \text{si } \kappa_{j_0} > d_{j_0}^* , \end{cases} \quad (1.20)$$

et calculons la direction t :

Posons :

$$\begin{cases} t_{j_0} = \text{sign}u_* ; \\ t(J_{sup} \setminus j_0) = 0 ; \\ t(L_n) = 0 , \end{cases} \quad (1.21.1)$$

et de l'admissibilité de \bar{u} , \bar{E} on obtient :

$$\begin{cases} (t(L_{sup}), t(I)) = (0, t(J_{sup}))^t B_{sup}^{-1} ; \\ t^t(J_n) = t^t(L_{sup})c(L_{sup}, J_n) + t^t(I)A(I, J_n) . \end{cases} \quad (1.21.2)$$

Calculons les pas σ_j , $j \in J_n$; σ_k , $k \in L_{sup}$:

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j & \text{si } E_j t_j < 0 ; \\ 0 & \text{si } E_j = 0, t_j > 0, \kappa_j \neq d_{*j}, \text{ où } E_j = 0, t_j < 0, \kappa_j \neq d_j^* ; \\ \infty & \text{dans les autres cas, } j \in J_n. \end{cases} \quad (1.22.1)$$

$$\sigma_k = \begin{cases} -u_k/t_k & \text{si } t_k < 0, k \in L_{sup}^+ ; \\ -u_k/t_k & \text{si } t_k > 0, k \in L_{sup}^- ; \\ \infty & \text{dans les autres cas, } k \in L_{sup}. \end{cases} \quad (1.22.2)$$

Mettons σ_j , $j \in J_n$; σ_k , $k \in L_{sup}$ dans l'ordre croissant :

$$\sigma_{j_1} \leq \sigma_{j_2} \leq \dots \leq \sigma_{j_p} , \quad j_k \in \{J_n \cup L_{sup}\} .$$

Pour chaque j_k , nous calculons le saut de la fonction objectif duale :

$$\Delta\mu_k = -|t_{j_k}|(d_{j_k}^* - d_{*j_k}) .$$

La fonction objectif duale se comporte selon la direction t comme une fonction concave, continue, linéaire par morceaux et leur pentes sur l'intervalle $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$ sont égales à :

$$\begin{cases} \mu_k = \mu_{k-1} - |t_{j_k}|(d_{j_k}^* - d_{*j_k}) , & k = 1, \dots, \bar{p} ; \\ \mu_0 = |\mu_*| , \end{cases} \quad (1.23)$$

où $\bar{p} \leq p$ tel que :

$$\begin{cases} \bar{p} = p & \text{si } j_k \in J_n , \quad \forall i = \overline{1, p} ; \\ \text{ou bien} \\ \bar{p} < p & \text{si } j_{\bar{p}+1} \in L_{sup} . \end{cases}$$

Remarque 2 : μ_0 est la vitesse initiale de changement de la fonction objectif duale.

On cherche le pas σ_0 et les indices s , s_0 pour les lesquels la fonction objectif du dual atteint son maximum .

1- Si $\mu_{\bar{p}} > 0$, alors $\bar{p} < p$. De là posons $\sigma_0 = \sigma_{j_{\bar{p}+1}}$, $s_0 = j_{\bar{p}+1}$, $s = \bar{p} + 1$.

2- Si $\mu_{\bar{p}} \leq 0$, alors on va trouver un indice ν , $0 < \nu \leq \bar{p}$ tel que $\mu_{\nu-1} \geq 0$ et $\mu_\nu < 0$. Posons $\sigma_0 = \sigma_{j_\nu}$, $s_0 = j_\nu$, $s = \nu$.

L'itération se termine par la construction des nouveaux vecteurs :

$$\begin{cases} \bar{E}(J) = E(J) + \sigma_0 t(J) & ; \\ \bar{u}(L) = u(L) + \sigma_0 t(L) & . \end{cases} \quad (1.24)$$

et le nouveau support $\bar{K}_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \bar{L}_{sup}\} : \bar{J}_{sup} = \{0\} \cup \bar{J}_{sup}$,

$$\begin{cases} \bar{J}_{sup} = J_{sup} \setminus j_0 , \\ \bar{L}_{sup} = L_{sup} \setminus s_0 , \end{cases} \text{ si } s_0 \in L_{sup} , \quad , \quad \begin{cases} \bar{J}_{sup} = (J_{sup} \setminus j_0) \cup s_0 , \\ \bar{L}_{sup} = L_{sup} , \end{cases} \text{ si } s_0 \in J_n .$$

b/ $\theta = \theta_{l_0}$, $l_0 \in L_n$:

Calculons :

$$\mu_* = \begin{cases} -\kappa_0 + c_{l_0}^t \kappa + d_{l_0} , & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^+ ; \\ \kappa_0 + c_{l_0}^t \kappa + d_{l_0} , & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^- , \end{cases} \quad (1.25)$$

et posons :

$$\begin{cases} t_{l_0} = \text{sign} \mu_* ; \\ t(L_n \setminus l_0) = 0 ; \\ t(J_{sup}) = 0 , \end{cases} \quad (1.26.1)$$

de l'admissibilité de \bar{u} et \bar{E} , on obtient :

$$\begin{cases} (t(L_{sup}), t(I)) = (1, -t_{l_0} c_{l_0}^t(J_{sup})) B_{sup}^{-1} , \\ t^t(J_n) = t^t(L_{sup}) c(L_{sup}, J_n) + t_{l_0} c_{l_0}^t(J_n) + t^t(I) A(I, J_n) . \end{cases} \quad (1.26.2)$$

On applique la même méthode utilisée en (a) pour trouver l'indice s_0 et le pas σ_0 .

L'itération se termine avec la construction des vecteurs $\bar{E}(J)$, $\bar{u}(L)$ définis par la formule (1.24) et le nouveau support $\bar{K}_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \bar{L}_{sup}\} : \bar{J}_{sup} = \bar{J}_{sup} \cup \{0\}$,

$$\begin{cases} \bar{J}_{sup} = J_{sup} , \\ \bar{L}_{sup} = (L_{sup} \setminus s_0) \cup l_0 , \end{cases} \text{ si } s_0 \in L_{sup} , \quad \begin{cases} \bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup s_0 , \\ \bar{L}_{sup} = L_{sup} \cup l_0 , \end{cases} \text{ si } s_0 \in J_n ,$$

tel que :

$$\begin{cases} l_0 \in \bar{L}_{sup}^+ & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^+ ; \\ l_0 \in \bar{L}_{sup}^- & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^- , \end{cases}$$

Par construction le nouveau support est un support coordonateur associé au plan \bar{x} et la valeur de la suboptimalité au support plan $\{\bar{x}, \bar{K}_{sup}\}$ est donnée par la formule :

$$\beta(\bar{x}, \bar{K}_{sup}) = (1 - \theta) \beta(x, K_{sup}) - \sum_{k=0}^{s-1} \mu_k (\sigma_{j_{k+1}} - \sigma_{j_k}) , \quad \sigma_{j_0} = 0 .$$

1.7.2 Exemple d'application 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\{|\frac{13}{16}x_1 + \frac{11}{16}x_2 - \frac{15}{16}x_3|, |\frac{21}{32}x_1 + \frac{19}{32}x_2 + \frac{23}{32}x_3 + 2|\} \rightarrow \min \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ -1 \leq x_1 \leq 1; \quad -2 \leq x_2 \leq 0; \quad 0 \leq x_3 \leq 1 \end{array} \right. \quad (I)$$

$$\text{On a : } J = \{1, 2, 3\}, \quad I = \{1\}, \quad L = \{1, 2\}$$

1-La première itération :

$x = (0, 0, 0)$ est un plan du problème (I) et $K_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, L_{sup}\}$ est le support coordinateur associé à x tel que $\bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\}$, $L_{sup} = L_{sup}^+ \cup L_{sup}^-$, $J_{sup} = \{1\}$, $L_{sup} = L_{sup}^+ = \{2\}$, $L_{sup}^- = \emptyset$.
 $\{x, K_{sup}\}$ est un primal support non dégénéré.

$$\beta_{sup} = \begin{bmatrix} e(L_{sup}^-) & c_l^t(J_{sup}), \\ -e(L_{sup}^+) & l \in L_{sup} \\ 0 & a_i^t(J_{sup}), \\ & i \in I \end{bmatrix}.$$

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} -e(2) & c_2(1), \\ 0 & a_1(1) \end{pmatrix}$$

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{21}{32} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\beta_{sup}^{-1} = \frac{1}{\det \beta_{sup}} (\text{com} \beta_{sup})^t = \begin{pmatrix} -1 & \frac{21}{8} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur des potentiels : $u(L) = (u(L_{sup}), u(L_n))$, $\pi(I)$ défini par :

$$\begin{aligned} (u(L_{sup}), \pi(I)) &= c_0^t(\bar{J}_{sup}) \beta_{sup}^{-1} \\ &= (-1 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 & \frac{21}{8} \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (1, \frac{-21}{8}) \end{aligned}$$

C.à.d : $u(2) = 1$ et $\pi(1) = \frac{-21}{8}$

Et le vecteur des estimations :

$$E_j = u^t(L_{sup}) c(L_{sup}, j) + \pi(I) \quad A(I, j); \quad j \in J_n$$

$$E(J_n) = (E_2, E_3) = (-\frac{1}{16}, -\frac{1}{16})$$

$$E(J_{sup}) = E_1 = 0. \quad (\text{par construction})$$

Alors :

$$\beta(x, K_{sup}) = \sum_{E_j > 0, j \in J_n} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{E_j < 0, j \in J_n} E_j(x_j - d_j^*) +$$

$$\sum_{l \in L_{sup}^+} u_l(J(x) - c_2^t x - d_2) + \sum_{l \in L_{sup}^-} u_l(J(x) - c_2^t x - d_2) = \frac{1}{16} > \varepsilon$$

D'où le support plan $\{x, K_{sup}\}$ n'est pas optimal.

Changement de plan : $x \rightarrow \bar{x} = x + \theta q$:

Construisons tout d'abord les pseudo-plan κ associé au support K_{sup} :
Par les relations (1.16) :

$$\kappa = (1, 0, 1),$$

Les relations (1.17) sont vérifiées alors :

$$\kappa_0 = \left| \frac{21}{32}(1) + \frac{19}{32}(0) - \frac{23}{32}(1) + 2 \right| = \frac{62}{32} = \frac{31}{16}$$

ou bien :

$$\kappa_2 = 0, \quad \kappa_3 = 1 \quad \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{62}{32} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc : κ est optimal et $f(\kappa) = \kappa_0 = \frac{31}{16}$

Conclusion :

$\{\kappa, K_{sup}\}$ est le support plan optimal du problème (I), avec :

$$\kappa = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad K_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, L_{sup}\}, \bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\}$$

$$J_{sup} = \{1\}, L_{sup} = \{2\}$$

Cas particulier :

Pour résoudre le problème Min-Max de la programmation linéaire suivante :

$$f(x) = \max_{l \in L} (c_l^t x + d_l) \rightarrow \min ,$$

$$Ax = b , \tag{1.1}$$

$$d_* \leq x \leq d^* ,$$

où $A = A(I, J) = \begin{pmatrix} a_i^t \\ i \in I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^t, j \in J \\ i \in I \end{pmatrix}$ est une $m \times n$ -matrice ,

$b = b(I) = (b_i, i \in I)$ un m -vecteur, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

Il suffit de prendre $L_{sup} = L_{sup}^+, L_{sup}^- = \emptyset$ dans tout les supports du problème(I) et suivre les même étapes de la méthode adaptée.

1.7.3 Exemple d'application 2 :

Résoudre le problème (II) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\{(\frac{13}{16}x_1 + \frac{11}{16}x_2 - \frac{15}{16}x_3), (\frac{21}{32}x_1 + \frac{19}{32}x_2 + \frac{23}{32}x_3 + 2)\} \rightarrow \min \\ \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ -1 \leq x_1 \leq 1; \quad -2 \leq x_2 \leq 0; \quad 0 \leq x_3 \leq 1 \end{array} \right. \quad (II)$$

$$\text{On a : } J = \{1, 2, 3\}, \quad I = \{1\}, \quad L = \{1, 2\}$$

On démarre la première itération par le plan $x = (0, 0, 0)$ de problème (II) et le support coordonateur $K_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, L_{sup}\}$ associé à x tel que

$$\bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\} \quad L_{sup} = L_{sup}^+ = 2. \quad (L_{sup}^- = \emptyset)$$

On suit les mêmes étapes que l'exemple (I) avec toujours

$$L_{sup} = L_{sup}^+ \text{ et } (L_{sup}^- = \emptyset). \quad (\text{on ne subdivise pas } L_{sup} \text{ en } L_{sup}^+ \text{ et } L_{sup}^-)$$

Et on termine notre résolution avec le support plan optimal x, K_{sup} avec :

$$x = (1, 0, 1), f(x) = \frac{31}{16} \text{ et } K_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, L_{sup}\} | \bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\}$$

$$\text{et } L_{sup} = L_{sup}^+ = 2.$$

1.8 LA RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE DUALE

Dans la théorie constructive des problèmes linéaires, la méthode duale joue un rôle important. Elle permet d'une part de résoudre des problèmes qui n'ayant pas d'information sur les solutions réalisables et d'autre part, elle nous donne l'estimation des solutions des problèmes avec des paramètres perturbés. Le but de la méthode est de construire une solution optimale par construction d'un support K_{sup} à chaque itération (le changement $K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$ est dit une itération de la méthode duale).

On prend comme support initial le support vide.

On construit la pseudo-solution κ et $\kappa_0 = f(\kappa)$ accompagnées.

- Si les relations (1.17) sont vérifiées, alors la méthode se termine et la pseudo-solution κ est optimale pour le problème (1.1).
- Le cas : $\kappa_0 < 0$, $L_n = \emptyset$, où le plan κ du problème (1.1) est considéré dégénéré. Il indique que la valeur optimale de la fonction objectif en (1.1) est probable d'être égale à zéro et n'est pas considérée dans notre travail.
- Si non, on calcule le nombre $\mu = \max_{j,l} \{|\mu_j|, |\mu_l|\}$ tel que :
 $|\mu_l| = \max_l \{|\mu_l^+|, |\mu_l^-|\},$

$$\mu_j = \begin{cases} d_{*j} - \kappa_j & \text{si } \kappa_j < d_{*j} ; \\ d_j^* - \kappa_j & \text{si } \kappa_j > d_j^* ; \\ 0 & \text{dans les autres cas, } j \in J_{sup} . \end{cases}$$

$$\mu_l^+ = \begin{cases} -\kappa_0 + c_l^t \kappa + d_l & \text{si } c_l^t \kappa + d_l > \kappa_0 ; \\ 0 & \text{dans les autres cas, } l \in L_n . \end{cases}$$

$$\mu_l^- = \begin{cases} \kappa_0 + c_l^t \kappa + d_l & \text{si } c_l^t \kappa + d_l < -\kappa_0 ; \\ 0 & \text{dans les autres cas, } l \in L_n . \end{cases}$$

Deux situations sont possibles :

1. $\mu = |\mu_{j_0}|$, $j_0 \in J_{sup}$;
2. $\mu = |\mu_{l_0}|$, $l_0 \in L_n$.

Dans le 1^{er} cas , on suit les règles de la situation : $\theta = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_{sup}$, dans la deuxième procédure de la méthode adaptée (changement de support).

Dans le 2^{eme} cas , on suit les règles de la situation : $\theta = \theta_{l_0}$, $l \in L_n$, toujours dans la deuxième procédure de la méthode adaptée .

Théorème 3 [1,15] :

Si à chaque itération , le support est non dégénéré alors la méthode décrite est finie.

Preuve :

Comme le support est non dégénéré c'est à dire :

$$\begin{cases} E_j \neq 0 , & j \in J_n ; \\ u_l \neq 0 , & l \in L_{sup} . \end{cases}$$

Alors les formules (1.22.1),(1.22.2) nous donnent le pas $\sigma_0 \neq 0$ et ceci entraîne :

$$\begin{aligned} \bar{E}(J) &= E(J) + \sigma_0 t(J) \neq E(J) ; \\ \bar{u}(L) &= u(L) + \sigma_0 t(L) \neq u(L). \end{aligned}$$

D'où $\bar{\lambda} \neq \lambda$, $\bar{K}_{sup} \neq K_{sup}$ et ceci pour chaque itération . Donc le nombre d'itérations pour construire le plan dual λ^0 ainsi le support K_{sup}^0 est fini . Par conséquent le nombre de support est fini . De plus le plan dual optimal λ^0 est basique , non dégénéré et unique . D'après la théorie de la dualité , K_{sup}^0 définit une solution basique κ^0 optimale et il ne reste qu'une seule itération d'un pas $\theta = 1$ pour l'algorithme . Comme ça , on a montré d'après le théorème qu'on a besoin d'un nombre fini d'itérations pour résoudre le problème (1.1).

Remarques 3 :

1-On peut commencer l'algorithme par le support vide, jusqu'à trouver $\mu = 0$.

2-Le but de la méthode duale est d'arriver à la solution optimale sans connaître la solution initiale (le premier plan du problème (1.1)) , en commençant par le pseudo-plan κ .

1.8.1 Exemple d'application 3 :

La résolution par la méthode dual du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\{|\frac{13}{16}x_1 + \frac{11}{16}x_2 - \frac{15}{16}x_3|, |\frac{21}{32}x_1 + \frac{19}{32}x_2 + \frac{23}{32}x_3 + 2|\} \rightarrow \min \\ \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ -1 \leq x_1 \leq 1; \quad -2 \leq x_2 \leq 0; \quad 0 \leq x_3 \leq 1 \end{array} \right. \quad (III)$$

1ère itération :

$K_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, L_{sup}\}$, $\bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\}$, $J_{sup} = \{1\}$, $L_{sup}^+ = \{2\}$, $L_{sup}^- = \emptyset$
est un support du problème (III)

Rq : $(|L_{sup} + |I| = |J_{sup}| + 1)$

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} e(L_{sup}^-) & c_i^t(J_{sup}) \\ -e(L_{sup}^+) & l \in L_{sup} \\ 0 & a_i^t(J_{sup}) \\ & i \in I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{21}{32} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\beta_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{21}{32} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur des potentiels :

$$\mu(L) = (\mu(L_{sup}), \mu(L_n)), \pi(I) \text{ avec } (\mu(L_{sup}), \pi(I)) = c_0^t(\bar{J}_{sup}) \cdot \beta_{sup}^{-1}$$

$$(\mu_2, \pi_1) = (-1 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 & \frac{21}{32} \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (1, \frac{-21}{32}) \implies \mu(2) = 1, \quad \pi(1) = \frac{-21}{32}$$

Le vecteur des estimations :

$$E_j = \mu^t(L_{sup}) \cdot c(L_{sup}, j) + \pi(I) \cdot A(I, j), \quad j \in J_n = \{2, 3\}$$

$$(E_2, E_3) = 1 \begin{pmatrix} \frac{19}{32} & -\frac{23}{32} \end{pmatrix} - \frac{21}{8} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$(E_2, E_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}, \quad E_{J_{sup}} = E_1 = 0. \quad (\text{par construction})$$

Construisons tout d'abord le pseudo-plan κ associé au support K_{sup} par les relations (1.16)

Les relations (1.17) sont vérifiées alors κ est optimal et $f(\kappa) = \kappa_0 = \frac{62}{32}$

$$\kappa_0 = \left| \frac{21}{32}(1) + \frac{19}{32}(0) - \frac{23}{32}(1) + 2 \right| = \frac{62}{32} = \frac{31}{16}$$

ou bien :

$$\kappa_2 = 0, \quad \kappa_3 = 1 \quad \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{16} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Dans le cas où : $L_{sup} = L_{sup}^+$ c. à. d. $L_{sup}^- = \emptyset$, on a un cas particulier d'une fonctionnelle sans valeur absolue. Et dans notre exemple on aura la même solution optimale : $\kappa = (1, 0, 1)$ avec $f(x) = \frac{63}{32}$.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX EN CONTRÔLE OPTIMAL

2

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre introductif nous rappelons quelques notions de base qui seront utiles dans la suite de notre travail. Puis on se propose à résoudre un problème Min-Max terminal d'un système dynamique linéaire en contrôle optimal avec des commandes constantes par morceaux. Pour cette résolution on a opté la méthode adaptée qui est une méthode de points intérieurs avec une nouvelle construction dite "Support coordinateur".

2.1 INTRODUCTION À LA COMMANDE OPTIMALE

Avant de passer à la résolution d'un problème Min-Max en contrôle optimal. On définit d'abord le système de la commande optimale, ses objets, ses éléments de base et on aborde les différents systèmes qui la caractérisent puis on étudie la contrôlabilité et on envisage aussi l'objectif de cette théorie.

2.1.1 Définition d'un système de contrôle optimal :

Un système de contrôle est la donnée d'un espace d'état X , d'un espace de contrôle U et une loi d'évolution du type :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = f(t, x, u) \dots (I)$$

(I) : Loi d'évolution.

$x(t) \in X$: L'état d'un système à l'instant $t \in T = [t_0, t_*]$.

$u(t) \in U$: La commande choisie.

2.1.2 Objet de la commande :

On suppose que l'état x est une solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}$: Position de l'objet à l'instant t .

$x(t_0)$: Position initiale.

$u(t)$: La commande.

2.1.3 Position initiale :

La position initiale $x_0 = x(t_0)$ du système est un vecteur donné dans un plan de phase $x(t)$ et $x(t_0)$ peuvent représenté physiquement la position initiale, la vitesse initiale, la température initiale ... etc.

2.1.4 Objectif de la commande :

Dans un problème de contrôle optimal, le but de la commande consiste à conduire un système dynamique contrôlé d'une position initiale $x_0 = x(t_0), (x_0 \in C_0)$ à une position finale $x_* = x(t_*) , x_* \in C$ où :

C_0 : L'ensemble de départ.

et

C : L'ensemble d'arrivée.

2.1.5 Classe des commandes admissibles :

La classe des commandes admissibles U est constituée de fonctions mesurables $u(t)$ sur l'intervalle de temps $T = [t_0, t_*]$.

$$U = [\mu(t), t \in T = [t_0, t_*]]$$

En outre chaque commande transfère l'objet du point de départ $x_0 = x(t_0)$ en un point donné de l'ensemble d'arrivée $C(t)$ [9].

2.1.6 Critère de qualité :

C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle $T = [t_0, t_*]$.

2.1.7 Contrôlabilité :

Considérons un problème dont le mouvement est régié par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad , \quad x_0 = x(t_0) \quad , \quad (I)$$

où

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la position de l'objet à l'instant t ,
 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la commande (force extérieure agissant sur le système ou entrée),
 $x_0 = x(t_0)$ la position initiale du système.

Définition 1 :

Le système (I) est dit contrôlable (commandable , maniable) sur l'intervalle $T = [t_0, t_*]$, si pour toute position initiale $x(t_0)$ et terminale $x(t_*)$ de \mathbb{R}^n , il existe une commande $u(t)$, $t \in T$ mesurable et bornée transférant le système du point $x(t_0)$ au point $x(t_*)$ en un temps fini.

Définition 2 :

Un système différentiel défini par :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u , \quad x_0 = x(t_0)$$

est dit autonome si les matrices $A(t) = A$,
 $B(t) = B$ sont constantes.

Théorème 1 [3] :

Un système différentiel de \mathbb{R}^n :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

est contrôlable si et seulement si

$$\text{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n$$

Démonstration :

L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme 2.2.2 (voir [13]).

2.2 PROBLÈME TERMINAL D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE LINÉAIRE

Considérons le problème terminal de commande optimale suivant :

$$J(u) = \max_{l \in L} (c_l^t x(t_*) + d_l) \rightarrow \min_{u \in U} ; \quad (1)$$

$$\dot{x} = Ax + bu , \quad x(0) = x_0 ; \quad (2)$$

$$Hx(t_*) = g ; \quad (3)$$

$$d_* \leq u(t) \leq d^* , \quad t \in T = [0, t_*] , \quad (4)$$

où

- . $U = \{u(t) , t \in T = [0, t_*]\}$,
- . $J(u)$ est le critère de qualité ,
- . $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la position du système au temps t ,
- . $A(J, J)$ est une $n \times n$ - matrice qui caractérise le système ,
- . $b(J)$ est un n - vecteur donné ,
- . $H(I, J)$ est une $m \times n$ - matrice telle que le rang de $H = m \leq n$,
- . g est un m - vecteur qui représente la sortie du signal à l'instant t_* ,
- . $u(t)$ est une commande constante par morceaux, bornée par $d_*, d^* \in \mathbb{R}$,
- . $c_l = c_l(J)$, $l \in L$ est le n - vecteur des coûts ,
- . $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$, $L = \{1, 2, \dots, l^*\}$ sont des ensembles d'indices.

Définition 3 :

Une commande (contrôle) $u(t)$, $t \in T$ est dite admissible si :
 $u(t)$, $t \in T$ et sa trajectoire correspondante $x(t)$, $t \in T$ solution de système différentiel (2) vérifient les contraintes (3)-(4).

Une commande admissible $u^0(t)$, $t \in T$ est dite optimale
 si $J(u^0) = \min_{u \in U} J(u)$.

Une commande admissible $u^\varepsilon(t)$, $t \in T$ ($\varepsilon > 0$, donné) est dite ε -optimale si $J(u^\varepsilon) - J(u^0) \leq \varepsilon$.

Notre problème consiste à trouver la commande admissible u^0 qui, avec sa trajectoire correspondante x^0 donnent le minimum du critère de qualité :

$$J(u^0) = \min_{u \in U} \max_{l \in L} (c_l^t x(t_*) + d_l) = \min_{u \in U} J(u)$$

La solution du système dynamique (2) donnée par la formule de cauchy est égale à :

$$x(t) = F(t) \cdot \left(x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau) b u(\tau) d\tau \right), t \in T; \quad (5)$$

où $F(t) = \exp(A.t)$, $t \in T = [0, t_*]$ est une matrice carrée d'ordre n (résolvante), solution du système homogène :

$$\dot{F}(t) = AF(t), F(0) = I_n.$$

I_n : désigne la matrice identité d'ordre n .

En utilisant la solution (5), le problème (1)-(4) devient un problème de la seule variable $u(t)$, $t \in T$:

$$J(u) = \max_{l \in L} \left(c_l^t F(t_*) x_0 + \int_0^{t_*} C_l(t) u(t) dt + d_l \right) \rightarrow \min_{u \in U}; \quad (6)$$

$$\int_0^{t_*} P(t) u(t) dt = g - HF(t_*) x_0; \quad (7)$$

$$d_* \leq u(t) \leq d^*, t \in T = [0, t_*]; \quad (8)$$

où :

$$C_l(t) = c_l^t F(t_*) F^{-1}(t) b \quad ; \quad P(t) = HF(t_*) F^{-1}(t) b, \quad t \in T.$$

2.3 SUPPORT CONTRÔLE

Le problème (6)-(8) peut être écrit sous la forme équivalente :

$$\tilde{\zeta} \rightarrow \min_u \quad (9)$$

$$c_l^t F(t_*) x_0 + \int_0^{t_*} C_l(t) u(t) dt + d_l \leq \tilde{\zeta}, \quad l \in L; \quad (10)$$

$$\int_0^{t_*} P(t) u(t) dt = \tilde{g}; \quad (11)$$

$$d_* \leq u(t) \leq d^*, \quad t \in T = [0, t_*]; \quad (12)$$

où $\tilde{g} = g - HF(t_*)x_0$

Dans l'intervalle T , choisissons le sous-ensemble $\tau_{sup} = \{\tau_j, j = 1, 2, \dots, s\}$ formé de moments isolés, et dans l'ensemble L , le sous-ensemble L_{sup} telle que $|L_{sup}| + |I| = |\tau_{sup}| + 1$.

Notons $e(L) = (e_l = 1, l \in L)$, $L_n = L \setminus L_{sup}$.

Posons $\bar{\tau}_{sup} = \tau_{sup} \cup \rho$.

Construisons la matrice $B_{sup} = B(L_{sup}, \bar{\tau}_{sup})$ définie par :

$$B_{sup} = \begin{pmatrix} -e(L_{sup}) & C_{L_{sup}}(t) \\ 0 & P_I(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \tau_{sup}.$$

Calculons les vecteurs des potentiels $y(L) = (y(L_{sup}), y(L_n))$, $\pi(I)$; par :

$$(y(L_{sup}), \pi(I)) = C_0^t(\bar{\tau}_{sup}) B_{sup}^{-1} y(L_n) = 0, \quad c_0 = (c_{00} = -1, c_{0t} = 0, t \in \tau_{sup}) \quad (13)$$

et la co-commande $E(T)$:

$$E(t) = y^t(L_{sup}) C_{L_{sup}}(t) + \pi(I) P_I(t), \quad t \in T. \quad (14)$$

Par construction, on a :

$$E(t) = 0, \quad t \in \tau_{sup}; \quad \sum_{l \in L_{sup}} y_l = 1.$$

Définition 4 :

La paire $k_{sup} = \{L_{sup}, \bar{\tau}_{sup}\}$ est dite support du problème (1)-(4) si $\det(B_{sup}) \neq 0$. $y(L_{sup}) \geq 0$.

Définition 5 :

La paire $\{u, K_{sup}\}$ formée d'une commande admissible $u(t)$ et d'un support K_{sup} est dite support contrôle (commande-appui) du problème (1)-(4).

Définition 6 :

Un support contrôle $\{u, K_{sup}\}$ est dit non dégénéré si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\tau \in \tau_{sup}$ est un point de discontinuité de la fonction $u(t)$, $t \in T$;
2. $J(u) > c_l^t x(t_*) + d_l$, $l \in L_n$;
3. Au voisinage de τ , on a : $d_* < u(t) < d^*$, $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$, $\delta > 0$, $\tau \in \tau_{sup}$.

Définition 7 :

Un support K_{sup} est dit support coordinateur associé à la commande u si :

$$L_{sup} \subseteq L(x) = \{l \in L : c_l^t x(t^*) + d_l = J(u)\} ;$$

Remarques 1 :

- L'existence du support est très liée à la notion de contrôlabilité du système.
- A chaque moment τ_j , on fait correspondre un intervalle $T_j = [\tau_j, \tau^j]$, et on prend la commande $u(t)$ constante dans les intervalles T_j , $j = \overline{1, s}$ (La commande est constante par morceaux) :

$$u(t) = u_j, t \in T_j = [\tau_j, \tau^j] ; d_* \leq u_j \leq d^*, j = \overline{1, s}$$

2.4 FORMULE D'ACCROISSEMENT DU CRITÈRE DE QUALITÉ

Soit $\{u, K_{sup}\}$ un support-contrôle non dégénéré du problème (1)-(4), $x(t)$, $t \in T$ sa trajectoire correspondante et considérons un autre contrôle $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$ et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$.

Le contrôle $u(t)$ vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} c_l^t F(t_*) x_0 + \int_0^{t_*} C_l^t(t) u(t) dt - J(u) = w_l - d_l, l \in L_{sup}; \\ \int_0^{t_*} P_i(t) u(t) dt = w_i + \tilde{g}_i, i \in I; \end{cases} \quad (15)$$

de même que le contrôle $\bar{u}(t)$:

$$\begin{cases} c_l^t F(t_*) x_0 + \int_0^{t_*} C_l^t(t) \bar{u}(t) dt - J(\bar{u}) = \bar{w}_l - d_l, l \in L_{sup}; \\ \int_0^{t_*} P_i(t) \bar{u}(t) dt = \bar{w}_i + \tilde{g}_i, i \in I; \end{cases} \quad (16)$$

En faisant la différence entre les formules (15) et (16), on obtient :

$$\begin{cases} \int_0^{t_*} C_l^t(t) \Delta u(t) dt - \Delta J(u) = \Delta w_l, l \in L_{sup}; \\ \int_0^{t_*} P_i(t) \Delta u(t) dt = \Delta w_i, i \in I. \end{cases}$$

De là on a :

$$\begin{cases} -e(L_{sup})\Delta J(u) + c[L_{sup}, \tau_{sup}] \Delta u(\tau_{sup}) = - \int_{T \setminus \tau_{sup}} C_{L_{sup}}^t(t) \Delta u(t) dt + \Delta w(L_{sup}) ; \\ P(I, \tau_{sup}) \Delta u(\tau_{sup}) = - \int_{T \setminus \tau_{sup}} P_I(t) dt \Delta u(\tau_n) + \Delta w(I) . \end{cases}$$

En développant les dernières équations , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \Delta J(u) \\ \Delta u(\tau_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \int_{T \setminus \tau_{sup}} C_{L_{sup}}^t(t) dt \\ \int_{T \setminus \tau_{sup}} P_I(t) dt \end{pmatrix} \Delta u(\tau_n) - \begin{pmatrix} \Delta w(L_{sup}) \\ \Delta w(I) \end{pmatrix} \right] , \quad \tau_n = T \setminus \tau_{sup} ,$$

c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} \Delta J(u) \\ \Delta u(\tau_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \int_{T \setminus \tau_{sup}} C_{L_{sup}}^t(t) dt \\ \int_{T \setminus \tau_{sup}} P_I(t) dt \end{pmatrix} \Delta u(\tau_n) - \begin{pmatrix} \Delta w(L_{sup}) \\ 0 \end{pmatrix} \right] , \quad (17)$$

pour tous $\Delta u(\tau_n)$ et $\Delta w(L_{sup})$.

De la formule (17) , résulte la formule de décroissance de la fonctionnelle du problème (1)-(4) :

$$\Delta J(u) = \int_0^{t_*} E(t) \Delta u(t) dt - \sum_{l \in L_{sup}} y_l \Delta w_l . \quad (18)$$

Le maximum d'accroissement de la fonctionnelle $-\Delta J(u) = -[J(\bar{u}) - J(u)]$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} d_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d^* - u(t) , t \in T ; \\ \Delta w_l \leq -w_l , l \in L_{sup} ; \end{cases} \quad (19)$$

est atteint pour :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d_* - u(t), E(t) > 0 , \\ d^* - u(t), E(t) < 0 , \\ 0 , E(t) = 0, t \in T, \end{cases} ; \Delta w_l = \begin{cases} -w_l, l \in L_{sup} ; \end{cases} \quad (20)$$

et est égal à :

$$\beta(u, K_{sup}) = \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_*) dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d^*) dt + \sum_{l \in L_{sup}} y_l (J(u) - c_l^t x(t_*) - d_l) \quad (21)$$

appelée valeur de suboptimalité du support contrôle $\{u, K_{sup}\}$.

Où $T^+ = \{t \in T, E(t) > 0\}$, $T^- = \{t \in T, E(t) < 0\}$.

De là, on a toujours l'inégalité :

$$J(u) - J(\bar{u}) \leq \beta(u, K_{sup}) , \quad \forall \bar{u}(t) , t \in T . \quad (22)$$

De cette inégalité, on déduit le critère d'optimalité suivant .

2.5 CRITÈRE D'OPTIMALITÉ

Théorème 2 :

Soit $u(t)$, $t \in T$ un contrôle admissible du problème (1)-(4),
 K_{sup} un support coordinateur associé à $u(t)$, $t \in T$.
 Les relations :

$$\begin{cases} u(t) = d_* & \text{si } E(t) > 0, \\ u(t) = d^* & \text{si } E(t) < 0, \\ d_* \leq u(t) \leq d^* & \text{si } E(t) = 0, t \in T, \end{cases} \quad (23)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité du support contrôle $\{u, K_{sup}\}$.

Preuve :

Condition suffisante

Si les relations (23) sont vérifiées alors de (21) on a $\beta(u, K_{sup}) = 0$.
 Comme

$$J(u) - J(\bar{u}) \leq \beta(u, K_{sup}) = 0 \quad \text{pour tout } \bar{u},$$

ce qui implique $J(u) \leq J(\bar{u})$, $\forall \bar{u}$ donc $\{u, K_{sup}\}$ est un support-contrôle optimal.

Condition nécessaire

Procédons par absurde.

Soit $\{u, K_{sup}\}$ un support-contrôle optimal non dégénéré et supposons que les relations (23) ne soient pas vérifiées, ie :

$$\exists t_0 \in T \text{ tel que } E(t_0) > 0, u(t_0) > d_* \text{ ou } E(t_0) < 0, u(t_0) < d^*.$$

Il est facile de construire des variations admissibles $\Delta u(t)$, $t \in T$ pour lesquelles :

$$-\Delta J(u) = J(u) - J(\bar{u}) = - \int_0^{t_*} E(t) \Delta u(t) dt > 0$$

ce qui implique que $J(\bar{u}) < J(u)$, et ceci contredit l'optimalité de u .

2.6 PRINCIPE DU MAXIMUM

Ecrivons le critère d'optimalité sous la forme traditionnelle du principe du maximum du pontryaguine.

Pour cela introduisons la fonction Hamiltonnienne :

$$\mathbf{H}(x(t), \psi(t), u(t)) = \psi^t(t) (Ax(t) + bu(t)), t \in T,$$

où $x(t)$, $t \in T$ est la solution du système direct (2) et $\psi(t)$, $t \in T$ du système conjugué :

$$\dot{\psi} = -A^t \psi, \quad \psi(t_*) = c - H^t \pi$$

Comme $\psi^t(t) = (c - H^t \pi) F(t_*) F^{-1}(t)$, $t \in T$, alors la co-commande $E(t)$ peut être écrite d'une autre manière :

$$\begin{aligned} E(t) &= y_{L_{sup}}^t C_{L_{sup}}(t) + \pi_I^t P_I(t) \\ &= \pi^t P(t) - C(t) \\ &= \pi^t H F(t_*) F^{-1}(t) b - c^t F(t_*) F^{-1}(t) b \\ &= -(c - H^t \pi)^t F(t_*) F^{-1}(t) b \\ E(t) &= -\psi^t(t) b \quad , \quad t \in T . \end{aligned}$$

Théorème 3 [4,5] :

La condition :

$$\mathbf{H}(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d_* \leq u \leq d^*} \mathbf{H}(x(t), \psi(t), u), t \in T$$

est suffisante, et dans le cas de la non dégénérescence, elle est nécessaire pour l'optimalité du support-contrôle $\{u, K_{sup}\}$.

Preuve : (voir [4]).

2.7 PRINCIPE ε -OPTIMALITÉ

Théorème 4 : (ε -maximum)

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la commande admissible $u(t)$, $t \in T$ est ε -optimale si et seulement s'il existe un tel support K_{sup} sur lequel le long de $u(t)$ et des solutions $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, des systèmes direct et conjugué, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x(t), \psi(t), u(t)) &= \max_{d_* \leq u \leq d^*} \mathbf{H}(x(t), \psi(t), u) - \varepsilon(t), \quad t \in T, \\ y^t w &= \max_{\tilde{w} \in \mathbb{R}^{L_I}} (y^t \tilde{w}) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\int_{t_0}^{t_*} \varepsilon(t) dt + \varepsilon_1 \leq \varepsilon .$$

2.8 DÉCOMPOSITION DE LA VALEUR DE SUBOPTIMALITÉ

Introduisons le problème dual du problème (1)-(4) :

$$\begin{aligned} J^*(\lambda) &= [c^t(L) F(t_*) x_0 + d^t(L)]^t \gamma(L) - \tilde{g}^t(I) v(I) + \int_{t_0}^{t_*} d_*^t v(t) dt - \\ &\quad \int_{t_0}^{t_*} d^{*t} w(t) dt \rightarrow \max; \\ c^t(t) \gamma + P^t(t) v - v(t) + w(t) &= 0; \\ v &= v_1 - v_2 ; \quad v_1 \geq 0 ; \quad v_2 \geq 0; \end{aligned} \quad (25)$$

$$v(t) \geq 0 ; \quad w(t) \geq 0 ; \quad \sum_{l \in L} \gamma_l = 1 ; \quad t \in T ,$$

$$\text{où } c = \begin{pmatrix} c_l^t(J), \\ l \in L \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\lambda(t) = (\gamma(L) = y(L), v(I) = \pi(I), v_1, v_2, v(t), w(t))$ construit avec le support K_{sup} du problème (1)-(4) et les relations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma(L) = y(L) ; \\ v(t) = E(t) , w(t) = 0 & \text{si } E(t) \geq 0 , \\ v(t) = 0 , w(t) = -E(t) & \text{si } E(t) < 0 , t \in T ; \\ v_{1i} = v_i , v_{2i} = 0 & \text{si } v_i \geq 0 , \\ v_{1i} = 0 , v_{2i} = -v_i & \text{si } v_i \leq 0 , i \in I , \end{cases} \quad (26)$$

est un plan dual (solution admissible).

Désignons par $\lambda^0(t) = (\gamma^0, v^0, v^0(t), w^0(t))$, $t \in T$ la solution optimale du problème dual (25) et u^0 le contrôle optimal du problème (1)-(4) .

De la valeur de suboptimalité et en vertu des relations (14), (25) et (26) on obtient :

$$\begin{aligned} \beta(u, K_{sup}) &= \int_{T^+} E(t) (u(t) - d_*) dt + \int_{T^-} E(t) (u(t) - d^*) dt - \sum_{l \in L_{sup}} y_l w_l \\ \beta(u, K_{sup}) &= \int_T E(t) u(t) dt - \int_{T^+} v(t) d_* dt + \int_{T^-} w(t) d^* dt - \sum_{l \in L_{sup}} y_l w_l \\ &= \int_T [\pi^t(I) P_l(t) + y_{L_{sup}} c_{L_{sup}}(t)] u(t) dt - \int_{T^+} v(t) d_* dt + \int_{T^-} w(t) d^* dt + \\ &\quad J(u) - \sum_{l \in L} y_l (c_l^t x(t^*) + d_l) \\ &= \int_T \pi^t P(t) u(t) dt + \sum_{l \in L_{sup}} y_l \int_T C_l(t) u(t) dt - \int_{T^+} v(t) d_* dt + \int_{T^-} w(t) d^* dt + \\ &\quad J(u) - \sum_{l \in L_{sup}} y_l (C_l^t (F(t^*) x_0 + \int_T C_l(t) u(t) dt) + d_l) \\ &= \pi^t \tilde{g} + \sum_{l \in L_{sup}} y_l \int_T C_l(t) u(t) dt - \int_{T^+} v(t) d_* dt + \int_{T^-} w(t) d^* dt + J(u) - \\ &\quad [c^t(L) F(t_*) x_0 + d^t(L)]^t \gamma(L) - \sum_{l \in L_{sup}} y_l \int_T C_l(t) u(t) dt \\ &= -[c^t(L) F(t_*) x_0 + d^t(L)]^t \gamma(L) + v^t \tilde{g} - \int_{T^+} v(t) d_* dt + \int_{T^-} w(t) d^* dt + J(u) \\ &= -J^*(\lambda) + J(u) - J(u^0) + J^*(\lambda^0) \\ &= [J(u) - J(u^0)] + [J^*(\lambda^0) - J^*(\lambda)] \\ &= \beta_u + \beta_{sup} , \end{aligned}$$

où $\beta_u = J(u) - J(u^0)$ est la mesure de la non optimalité du contrôle $u(t)$, $t \in T$.

$\beta_{sup} = J^*(\lambda^0) - J^*(\lambda)$ est la mesure de la non optimalité du support K_{sup} .

Conclusion :

- Pour $-\Delta J(u) = J(u) - J(u^0) \leq \beta(u, K_{sup}) \leq \varepsilon$, u est ε -optimal.
- Pour $\varepsilon = 0$ le principe ε -maximum devient le principe traditionnel du maximum.

2.9 MÉTHODE DE RÉOLUTION

Soit $\{u, K_{sup}\}$ un support-contrôle admissible de départ pour lequel $\beta(u, K_{sup}) > \varepsilon$, où : $u(t)$, $t \in T$, est le contrôle vérifiant :

$$\begin{aligned} d_* \leq u(t) \leq d^* , t \in T ; \\ H x(t_*) = g \quad ; \end{aligned}$$

avec sa trajectoire correspondante $x(t)$, $t \in T$, solution du système :

$$\dot{x} = A x + b u , x(0) = x_0 ,$$

$\tau_{sup} = \{\tau_i, i = \overline{1, s}\}$, le support qu'on choisit de manière à avoir $\det(B_{sup}) \neq 0$. Si on ne peut pas déterminer un tel support, on démarre l'algorithme à partir d'un support vide ($\tau_{sup} = \emptyset$) et par convention $\det(B_{sup}(\emptyset)) \neq 0$.

Une itération de l'algorithme $\{u, \tau_{sup}\} \rightarrow \{\bar{u}, \bar{\tau}_{sup}\}$ se fait en trois étapes :

1. Changement de commande : $u \rightarrow \bar{u}$.
2. Changement de support : $\tau_{sup} \rightarrow \bar{\tau}_{sup}$.
3. Procédure finale.

2.9.1 Changement de commande :

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre donné et supposons que le support-contrôle $\{u, K_{sup}\}$ ne vérifie pas le principe ε -maximum .

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t)$, $t \in T$, une autre commande admissible où $\Delta u(t)$, $t \in T$ est la direction et θ le pas maximal le long de cette direction, qui seront cherchés comme solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \max_{l \in L} \left(\int_0^{t_*} \theta C_l(t) \Delta u(t) dt + w_l \right) \rightarrow \min_{\theta, \Delta u(t)} ; \\ \int_0^{t_*} \theta P(t) \Delta u(t) dt = 0 ; \end{aligned} \tag{30}$$

$$d_* - u(t) \leq \theta \Delta u(t) \leq d^* - u(t) , t \in T ;$$

Choisissons les nombres $\alpha > 0$, $h > 0$ (paramètres de l'algorithme), où h est un nombre suffisamment petit .

Construisons les ensembles suivants :

$$T_0 = \{t \in T : |\psi^t(t) b| \leq \alpha\} ; T_* = \{t \in T : |\psi^t(t) b| > \alpha\} , T_* = T \setminus T_0 .$$

On a :

$$E(t) = -\psi^t(t) b = 0, t \in \tau_{sup} \Rightarrow \tau_{sup} \subset T_0.$$

Subdivisons l'ensemble T_0 en intervalles $[\tau_j, \tau^j]$, $j = 1, \dots, N$ tels que :

$$T_0 = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j[, [\tau_j, \tau^j[\cap [\tau_i, \tau^i[= \emptyset, \forall i \neq j \text{ et } \tau^j - \tau_j \leq h, j = 1, \dots, N;$$

et posons :

$$u(t) = u_j = c^{ste}, t \in [\tau_j, \tau^j[, j = 1, \dots, N.$$

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d^* - u(t) & \text{si } E(t) < -\alpha, \\ d_* - u(t) & \text{si } E(t) > \alpha, t \in T_*; \end{cases}$$

Faisons un changement de variables :

$$\mathbf{l}_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t), & t \in [\tau_j, \tau^j[, j = 1, \dots, N, \\ \theta, & \text{si } j = N + 1; \end{cases}$$

où $j = N + 1$ est un indice supplémentaire correspondant à l'ensemble T_* .

Calculons les quantités suivantes :

$$\mathbf{g}_l(j) = \int_{\tau_j}^{\tau^j} C_l(t) dt, j = 1, \dots, N; \mathbf{g}_l(N + 1) = \int_{T_*} C_l(t) \Delta u(t) dt;$$

$$q_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} P(t) dt, j = 1, \dots, N; q_{N+1} = \int_{T_*} P(t) \Delta u(t) dt;$$

$$d_{*j} = d_* - u_j, d_j^* = d^* - u_j, j = 1, \dots, N; d_{*N+1} = 0, d_{N+1}^* = 1;$$

$$G = (q_j, j = 1, \dots, N + 1); \bar{d}_* = (d_{*j}, j = 1, \dots, N + 1), \bar{d}^* = (d_j^*, j = 1, \dots, N + 1);$$

$$\mathbf{l} = (\mathbf{l}_j, j = 1, \dots, N + 1), 0 \leq \theta \leq 1.$$

De ce qui précède, le problème (30) devient le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{l} \in L} (\mathbf{g}_l^t \mathbf{l} + w_l) &\rightarrow \min; \\ G \mathbf{l} &= 0; \end{aligned} \tag{31}$$

$$\bar{d}_* \leq \mathbf{l} \leq \bar{d}^*.$$

Ce problème peut être facilement formulé sous forme du programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \zeta &\rightarrow \min_{\mathbf{1}, \zeta \in \mathbb{R}} ; \\ \mathbf{g}_l^t \mathbf{1} + w_l &\leq \zeta, \quad l \in L ; \\ G \mathbf{1} &= 0 ; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\bar{d}_* \leq \mathbf{1} \leq \bar{d}^* .$$

Par la méthode adaptée, en prenant comme support de départ $\{\mathbf{1} = 0, S_{sup}\}$, on construit la solution ε -optimale $\{\mathbf{1}^\varepsilon, \bar{S}_{sup}\}$ du problème (32), où \bar{S}_{sup} est le support du problème (32) et $\mathbf{1}^\varepsilon = (\mathbf{1}_j^\varepsilon, j = 1, \dots, N+1)$.

-Si l'indice $(N+1) \notin \bar{S}_{sup}$, alors on pose $\tilde{S}_{sup} = \bar{S}_{sup}$.

-Si non, on l'exclut par la méthode duale et on obtient :

$$\tilde{S}_{sup} = (\bar{S}_{sup} \setminus (N+1)) \cup j_* .$$

La nouvelle commande sera égale à :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \mathbf{1}_{N+1}^\varepsilon \Delta u(t), & t \in T_* ; \\ u(t) + \mathbf{1}_j^\varepsilon & , t \in [\tau_j, \tau^j[, j = 1, \dots, N . \end{cases} \quad (33)$$

La commande \bar{u} ainsi construite vérifie l'inégalité : $J(\bar{u}) \leq J(u)$.

Le support \tilde{S}_{sup} du problème (32) est utilisé pour construire le support \tilde{K}_{sup} du problème (1)-(4).

En utilisant le support $\tilde{K}_{sup} = \{\tilde{L}_{sup}, \tilde{\tau}_{sup}\}$, on calcule les fonctions $\tilde{E}_l(t)$, $t \in T$.

- Si la nouvelle commande-apui $\{\bar{u}, \tilde{K}_{sup}\}$ satisfait le principe du ε -maximum, alors le processus de résolution du problème original s'arrête.
- Si non, nous continuons la résolution du problème, en passant au changement du support.

2.9.2 Changement de support :

En utilisant le support \tilde{K}_{sup} .

Construisons la quasi-commande $\omega = (\omega(t), t \in T)$:

$$\omega(t) = \begin{cases} d_* & \text{si } \tilde{E}(t) > 0 ; \\ d^* & \text{si } \tilde{E}(t) < 0 ; \\ \in [d_*, d^*] & \text{si } \tilde{E}(t) = 0, t \in T ; \end{cases} \quad (34)$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (\chi(t), t \in T)$ solution de l'équation suivante :

$$\dot{\chi} = A \chi + b \omega, \quad \chi(0) = x_0.$$

i) Si les relations

$$\begin{aligned} H\chi(t_*) &= g ; \\ (c_l^t \chi(t_*) + d_l) &\leq J(\omega) , l \in L_n ; \end{aligned} \quad (35)$$

sont vérifiées alors la quasi-commande $\omega(t)$ est optimale pour le problème (1)-(4) et le processus de résolution s'arrête, où $J(\omega) = \min_{u \in U} \max_{l \in L} (c_l^t \chi(t_*) + d_l)$.

ii) Si non, calculons le vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma(s+1) \\ \gamma(\tilde{\tau}_{sup}) \end{pmatrix} = B_{sup}^{-1} \begin{pmatrix} c_{\tilde{L}_{sup}}^t \chi(t_*) + d_{\tilde{L}_{sup}} - e(\tilde{L}_{sup}) J(\omega) \\ H(I, J) \chi(t_*) - g(I) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

et la quantité suivante :

$$\gamma(\tilde{L}_n) = -\gamma(s+1) + J(\omega) - c_{\tilde{L}_n}^t \chi(t_*) - d_{\tilde{L}_n} + c_{\tilde{L}_n}^t (\tilde{\tau}_{sup}) \gamma(\tilde{\tau}_{sup}),$$

où

$$B_{sup} = \begin{pmatrix} -e(\tilde{L}_{sup}) & C_{\tilde{L}_{sup}}(\tilde{\tau}_{sup}) \\ 0 & P(I, \tilde{\tau}_{sup}) \end{pmatrix}.$$

Deux cas peuvent se présenter :

- Si les relations suivantes

$$\text{i) } \|\gamma(\tilde{\tau}_{sup})\| \leq \mu , \quad (\mu \text{ paramètre de la méthode }) ;$$

(37)

$$\text{ii) } \gamma(\tilde{L}_n) \geq 0 ;$$

sont satisfaites, alors on passe à la procédure finale .

- Si non, on change le support $\tilde{K}_{sup} \rightsquigarrow \tilde{\tilde{K}}_{sup}$ par la méthode duale,

et on refait une nouvelle itération avec $\{\bar{u}, \tilde{\tilde{K}}_{sup}\}$ et les paramètres $\bar{\alpha}, \bar{h} / \bar{\alpha} < \alpha, \bar{h} < h$.

2.9.3 Procédure finale :

Supposons que pour la quasi-commande $\omega(t), t \in T$ et sa quasi-trajectoire $\chi(t), t \in T$ construites par le support \tilde{K}_{sup} , les conditions (37) sont vérifiées. Désignons par :

$$T_0 = \{t \in T : \tilde{E}(t) = 0\}$$

l'ensemble des points isolés $\tilde{\tau}_j, j = \overline{1, s}$; $\tilde{\tau}_j < \tilde{\tau}_{j+1}, j = \overline{0, s}$; $\tilde{\tau}_0 = 0$; $\tilde{\tau}_{s+1} = t_*$ et supposons :

$$\tilde{E}(\tilde{\tau}_j) \neq 0, j = \overline{1, s}.$$

La procédure finale consiste à déterminer le support optimal

$\tau_{sup}^* = \{\tau_j, j = \overline{1, s}\}$; τ_{s+1}^* à partir du vecteur (36) de telle sorte à avoir :

$$\begin{cases} g - H\chi(t_*) = 0, \\ c^t(L_{sup}) \chi(t_*) + d(L_{sup}) - e(L_{sup}) J(\omega) = 0, \end{cases}$$

On a la contrainte :

$$\begin{aligned} g - H\chi(t_*) &= g - H F(t_*)\chi_0 - \int_T P(t)\omega(t)dt \\ &= g - H F(t_*)\chi_0 - \int_{T^0} P(t)\omega(t)dt - \int_{T \setminus T^0} P(t)\omega(t)dt , \end{aligned}$$

vu que $\|\gamma(\tilde{\tau}_{sup})\| \leq \mu$, on peut poser :

$$g - H F(t_*)\chi_0 - \int_{T \setminus T^0} P(t)\omega(t)dt = 0 ,$$

de là on a :

$$\begin{aligned} g - H\chi(t_*) &= - \int_{T^0} P(t)\omega(t)dt \\ &= - \int_{T^{0+}} P(t)\omega(t)dt - \int_{T^{0-}} P(t)\omega(t)dt \end{aligned}$$

où :

$$T^{0-} = \{t \in T : \dot{E}(t_j) < 0\} ; \quad T^{0+} = \{t \in T : \dot{E}(t_j) > 0\} .$$

En faisant hypothèse que $P(t)$ est constante au voisinage des points $\tilde{\tau}_j$, $j = \overline{1, s}$;

on aura ainsi :

$$\begin{aligned} g - H\chi(t_*) &= \begin{cases} \sum_{j=1}^s (d^* - d_*) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} P(t)dt , & \text{si } \dot{E}(\tilde{\tau}_j) > 0 ; \\ - \sum_{j=1}^s (d^* - d_*) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} P(t)dt , & \text{si } \dot{E}(\tilde{\tau}_j) < 0 . \end{cases} \\ &= (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign}\dot{E}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} P(t)dt . \end{aligned}$$

On procédera au même raisonnement, en utilisant le vecteur (36) et les conditions (37), on obtient :

$$c^t(L_{sup}) \chi(t_*) + d(L_{sup}) - e(L_{sup}) J(\omega) = (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign}\dot{E}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} C_{L_{sup}}^t(t) dt ,$$

De ce qui précédé on aboutit au système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign}\dot{E}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} P(t)dt = g - H\chi(t_*) , \\ (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign}\dot{E}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} C_{L_{sup}}^t(t) dt = c^t(L_{sup}) \chi(t_*) + d(L_{sup}) - e(L_{sup}) J(\omega) , \end{cases}$$

dont la résolution va se faire à l'aide de la méthode de Newton en prenant comme approximation initiale : $\tau_{sup}^0 = \{\tau_j^0, j = 1, \dots, s\}$; τ_{s+1}^0 , avec $\tau_{sup}^0 = \{\tau_j, j = 1, \dots, s\}$; $\tau_{s+1}^0 = \gamma(s+1)$.

-La $(K + 1)^{ieme}$ approximation $\tau_{sup}^{(k+1)}$ et $\tau_{s+1}^{(k+1)}$ sera déterminée par la formule :

$$\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + \Delta\tau^{(k)} ;$$

$$\Delta\tau^{(k)} = -\frac{\partial\varphi^{-1}(\tau^{(k)})}{\partial\tau} \cdot \varphi(\tau^{(k)}) ;$$

où :

$$\varphi(\tau^{(k)}) = \left(\begin{array}{c} c^t(L_{sup}) \chi(t_*) + d(L_{sup}) - e(L_{sup}) J(\omega) \\ H\chi(t_*) - g(I) \end{array} \right) .$$

Pour μ suffisamment petit, la fonction ω^* ; $t \in T$ calculée par le support-optimal $K_{sup}^* = \{L_{sup}^*, \bar{\tau}_{sup}^*\}$ est une commande optimale .

2.10 ALGORITHME DE LA MÉTHODE

1. Test de commandabilité du système :
Calculer

$$rg[b, A b, \dots, A^{n-1}b]$$

— Si

$$rg[b, A b, \dots, A^{n-1}b] = n ,$$

alors le système est commandable aller en 2,

— Si non arrêter le processus de résolution et le problème (1)-(4) n'admet pas de solution optimale.

2. Prendre un support-contrôle de départ admissible $\{u, K_{sup}\}$, avec la trajectoire admissible correspondante $x(t)$, $t \in T$.
Calculer la valeur de la fonctionnelle en u :

$$J(u) = \min_{u \in U} \max_{l \in L} (c_l^t x(t_*) + d_l) .$$

Déterminer la co-commande :

$$E(t) = y^t(L_{sup})c_{L_{sup}}(t) + \pi(I)P_I(t) , t \in T .$$

3. Test d'optimalité du support-contrôle de départ :
Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(u, K_{sup}) = \beta$.
— Si $\beta = 0$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{u, K_{sup}\}$ un support-contrôle optimal du problème (1)-(4) .
— Si $\beta \leq \varepsilon$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{u, K_{sup}\}$ un support-contrôle ε -optimal du problème (1)-(4) .
— Si non aller en 4.
4. Changement de commande u en \bar{u} où :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta\Delta u(t) , t \in T :$$

4-1 Choisir $\alpha > 0$, $h > 0$, $N > 0$:

$$T_0 = \{t \in T : |E(t)| \leq \alpha\} = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j[;$$

$$T_* = \{t \in T : |E(t)| > \alpha\} ; \tau^j - \tau_j \leq h .$$

Poser

$$\mathbf{l}_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t), & t \in [\tau_j, \tau^j[, j = \overline{1, N} ; \\ \theta, & \text{pour } j = N+1 . \end{cases}$$

Calculer :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d^* - u(t), & \text{si } E(t) < -\alpha ; \\ d_* - u(t), & \text{si } E(t) > \alpha, t \in T_* . \end{cases}$$

4-2 Formalisation du problème de support :

$$\begin{cases} \max_{l \in L} (\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{g}_{lj} \mathbf{l}_j + w_l) \rightarrow \min_{\mathbf{l}_j}, \\ \sum_{j=1}^{N+1} q_j \mathbf{l}_j = 0, \\ d_{*j} \leq \mathbf{l}_j \leq d_j^*, j = \overline{1, N+1}, \end{cases}$$

Déterminer par la méthode adaptée sa solution optimale $\{\bar{\mathbf{l}}, \bar{J}_{sup}\}$.

4-3 Calculer la nouvelle commande \bar{u} :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \bar{\mathbf{l}}_{N+1} \Delta u(t), & t \in T_*, \\ u(t) + \bar{\mathbf{l}}_j, & t \in [\tau_j, \tau^j[, j = \overline{1, N}. \end{cases}$$

— Si l'indice $(N+1) \notin \bar{J}_{sup}$, alors on pose $\tilde{J}_{sup} = \bar{J}_{sup}$.

— Si l'indice $(N+1) \in \bar{J}_{sup}$, on l'exclut par la méthode duale et on obtient :

$$\tilde{J}_{sup} = (\bar{J}_{sup} \setminus N+1) \cup j^*.$$

4-4 Poser $\tilde{\tau} = \{\tau_j, j \in \tilde{J}_{sup}\}$.

5. Test d'optimalité du nouveau support-contrôle $\{\bar{u}, \tilde{K}_{sup}\}$.

Calculer la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, \tilde{K}_{sup}) = \bar{\beta}$.

— Si $\bar{\beta} = 0$, alors arrêter le processus de résolution avec $\{\bar{u}, \tilde{K}_{sup}\}$ un support-contrôle optimal du problème (1)-(4).

— Si $\bar{\beta} \leq \varepsilon$, alors arrêter le processus de résolution avec $\{\bar{u}, \tilde{K}_{sup}\}$ un support-contrôle ε -optimal du problème (1)-(4).

— Si non aller en 6 ou en 4 avec $\bar{\alpha} < \alpha$, $\bar{h} < h$.

6. Changement de support $\tilde{K}_{sup} \rightarrow \bar{K}_{sup}$:

Construire la quasi-commande $\tilde{\omega}(t)$, $t \in T$:

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} d^*, & \text{si } \tilde{E}(t) < 0 ; \\ d_*, & \text{si } \tilde{E}(t) > 0 ; \\ \in [d_*, d^*], & \text{si } \tilde{E}(t) = 0, t \in T, \end{cases}$$

et sa quasi trajectoire $\chi(t)$, $t \in T$:

$$\dot{\chi} = A\chi + b\tilde{\omega}, \chi(0) = x_0.$$

- Si $H\chi(t_*) = g$, alors arrêter le processus de résolution et la quasi-commande $\tilde{\omega}(t)$, $t \in T$, construite par le support \bar{K}_{sup} est optimale pour le problème (1)-(4).
- Si non aller en 6-1.

6-1 Calculer le vecteur

$$\begin{pmatrix} \gamma(s+1) \\ \gamma(\tilde{\tau}_{sup}) \end{pmatrix} = B_{sup}^{-1} \begin{pmatrix} c_{\tilde{L}_{sup}}^t \chi(t_*) + d_{\tilde{L}_{sup}} - e(\tilde{L}_{sup}) J(\omega) \\ H(I, J) \chi(t_*) - g(I) \end{pmatrix},$$

et la quantités suivante :

$$\gamma(\tilde{L}_n) = -\gamma(s+1) + J(\omega) - c_{\tilde{L}_n}^t \chi(t_*) - d_{\tilde{L}_n} + C_{\tilde{L}_n}^t(\tilde{\tau}_{sup}) \gamma(\tilde{\tau}_{sup}),$$

où

$$B_{sup} = \begin{pmatrix} -e(\tilde{L}_{sup}) & C_{\tilde{L}_{sup}}(\tilde{\tau}_{sup}) \\ 0 & P(I, \tilde{\tau}_{sup}) \end{pmatrix}.$$

- Si $\|\gamma(\tilde{\tau}_{sup})\| \leq \mu$ et $\gamma(\tilde{L}_n) \geq 0$ aller en 7.
- Si non aller en 6-2.

6-2 Déterminer τ_0 tel que :

$$\gamma(\tau_0) = \max \gamma(t), \quad t \in \tilde{\tau}_{sup}.$$

Calculer

$$\tilde{E}(t), \quad t \in T.$$

Déterminer $t_* \in T \setminus \tilde{\tau}_{sup}$ tel que

$$\tilde{E}(t_*) = 0, \quad \dot{\tilde{E}}(t_*) \neq 0.$$

Aller en 6-1.

7. Procédure finale :

Déterminer le support optimal K_{sup}^0 à partir de relation de récurrence :

$$\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + \Delta\tau^{(k)}, \quad \Delta\tau^{(k)} = -\frac{\partial\varphi^{-1}(\tau^{(k)})}{\partial\tau} \cdot \varphi(\tau^{(k)});$$

et :

$$\varphi(\tau^{(k)}) = \begin{pmatrix} c^{t(L_{sup})} \chi(t_*) + d(L_{sup}) - e(L_{sup}) J(\omega) \\ H\chi(t_*) - g(I) \end{pmatrix},$$

en prenant comme approximation initiale $\tau^{(0)} = \tilde{\tau}_{sup}$.

Arrêter le processus de résolution avec $\{\omega^0(t), t \in T; \tau_{sup}^0\}$ un support-contrôle optimal du problème (1)-(4).

2.11 EXEMPLE D'APPLICATION

$$J(u) = \max\{(2x_1(2) + 1); (x_1(2) + x_2(2) - 1)\} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ x(2) = 2 \quad x(0) = (0,0) \quad |u(t)| \leq 1 \quad t \in T = [0,2] \end{cases} \quad (I)$$

Où : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $H^t = (0,1)$; $x^t = (x_1, x_2)$; $g = 2$;

$c_1^t = (2,0)$; $c_2^t = (1,1)$; $d_1 = 1$; $d_2 = -1$; $|I| = \{1\}$;

$|J| = \{1,2\}$; $|L| = \{1,2\}$; $d^* = 1$; $d_* = -1$.

On a :

$$\text{rang}[b, Ab] = 2 = n$$

Donc le système est commandable.

La trajectoire correspondante à l'état initial $x(0) = x_0$ est :

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau) d\tau \quad , t \in T$$

Avec F la solution du système homogène :

$$\dot{F} = AF, \quad F(0) = I_n = I_2$$

$$F(t) = \exp(A.t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'où : } F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = HF(2)F^{-1}b$$

$$P(t) = 1$$

$$C_l(t) = c_l^t F(2).F^{-1}(t).b, \quad l \in L = \{1,2\}$$

$$C_l(t) = c_l^t F(2).F^{-1}(t).b = \begin{pmatrix} -2t + 4 \\ -t + 3 \end{pmatrix}$$

Soit la commande constante par morceaux suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 0; & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1; & t \in]\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

Vérifions que cette commande est admissible :

On a : $x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau) d\tau$

Sur : $[0, \frac{1}{2}]$; $u(t) = 0$

D'où : $x(t) = F(t).x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau) d\tau$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \quad (u = 0)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sur }]\frac{1}{2}, 2]; \quad u(t) = 1$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$x(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$u(t) = \begin{cases} 0; & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1; & t \in]\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

est admissible et pour cette commande la fonctionnelle :

$$J(u) = \max\{2x_1(2) + 1, (x_1(2) + x_2(2) - 1)\} \rightarrow \min$$

$$J(u) = \max\{5, 3\} \rightarrow \min = 5$$

$$J(u) = 5$$

Prenons comme appui de départ $\tau_{sup} = \frac{1}{2}$ et $L_{sup} = \{1\}$

Rq :

$$|L_{sup}| + |I| = |\tau_{sup}| + 1 \implies 1 + 1 = 1 + 1 \text{ est vérifiée.}$$

Construisons le vecteur des estimations :

$$E(t) = y^t(L_{sup}) C_{L_{sup}}(t) + \pi(I).P_I(t)$$

avec :

$$(y(L_{sup}), \pi(I)) = C_0^t(\bar{\tau}_{sup}) \cdot \beta_{sup}^{-1} \quad ; y(L_n) = 0$$

$$C_0 = (C_\infty = -1, C_{0t} = 0, t \in \tau_{sup}) \quad c_0^t = (-1, 0)$$

$$\text{A partir de } \beta_{sup} = \begin{pmatrix} -e(L_{sup}) & C_{L_{sup}}(t) \\ 0 & P_i(t), i \in I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e(1) & C_1(t) \\ 0 & P_1(t), 1 \in I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2t + 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} -1 & -2t + 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau_{sup} = t = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det \beta_{sup} = -1$$

$$\beta_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } (y(L_{sup}), \pi(I)) = (1 \quad -3)$$

$$y(L_n) = y_2 = 0$$

$$\text{Et : } E(t) = y^t(1)C_1(t) + \pi(I)P_I(t)$$

$$E(t) = -2t + 1 \quad t \in T$$

Alors la valeur de suboptimabilité correspondante à ce plan d'appui est égale à :

$$\beta(u, K_{sup}) = \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_*) dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d^*) dt + \sum_{L_{sup}} y_l(J(\mu) - c_l^t x(t_*) - d_l)$$

$$\text{On a : } E(t) \geq 0 \quad \text{si} \quad -2t + 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} E(t) \geq 0; \text{ Si } -2t + 1 \geq 0 \\ E(t) \leq 0; \text{ Si } -2t + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(t) \geq 0; \text{ Si } t \leq \frac{1}{2} \\ E(t) \leq 0; \text{ Si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} E(t) \geq 0; \text{ Si } t \in [0, \frac{1}{2}] & \text{D'où : } u(t) = 0 \\ E(t) \leq 0; \text{ Si } t \in]\frac{1}{2}, 2] & \text{D'où : } u(t) = 1 \end{cases}$$

$$\beta(u, K_{sup}) = \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_*) dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d^*) dt + \sum_{L_{sup}} y_l(J(u) - c_l^t x(t_*) - d_l)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-2t + 1)(0 - (-1)) dt + \int_{T^-} (-2t + 1)(1 - 1) dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-2t + 1) dt$$

$$= [-t^2 + t]_0^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\beta(\mu, K_{sup}) = \frac{1}{4} > \varepsilon \quad \implies \quad \{\mu, K_{sup}\} \text{ n'est pas une solution } \varepsilon\text{-optimale.}$$

Passons alors à la procédure :

1) Changement de commande :

On prend comme paramètres de la méthode $\alpha = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{4}$

$$u(t) \rightsquigarrow \bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t), t \in T$$

Construisons l'ensemble $T_0 = \{t \in T \mid |\psi^t(t).b| \leq \alpha\}$

$$\psi^t(t) = (C - H^t \pi)F(t_*) \cdot F^{-1}(t), \quad t \in T$$

et

$$E(t) = -\psi^t(t).b \quad \text{donc} \quad |\psi^t(t).b| = |E(t)| = |-2t + 1|$$

$$|\psi^t(t).b| = |-2t + 1| \leq \alpha$$

On a : $\alpha = \frac{1}{2}$ d'où : $|-2t + 1| \leq \alpha \implies |-2t + 1| \leq \frac{1}{2}$

$$-2t + 1 \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -2t + 1 \geq -\frac{1}{2}$$

$$-2t \leq \frac{1}{2} - 1 \quad \text{et} \quad -2t \geq -\frac{1}{2} - 1$$

$$t \geq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad t \leq \frac{3}{4}$$

Donc $T_0 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ | $T_* = T \setminus T_0 = [0, \frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{4}, 2]$

* Subdivisions l'ensemble T_0 en intervalles (Avec $h = \frac{1}{4}$)

$$[\tau_1, \tau^1] = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; [\tau_2, \tau^2] = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$$

* Calculons les quantités :

$$g_l(j) = \int_{\tau_j}^{\tau^j} C_l(t) dt; \quad j = \{1, 2\}, \quad g_l(v+1) = \int_{T_*} C_l(t) \Delta u(t) dt, \quad l \in L$$

$$g_1(1) = \int_{\tau_1}^{\tau^1} C_1(t) dt = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (-2t + 4) dt = \frac{13}{16}$$

$$g_1(2) = \int_{\tau_2}^{\tau^2} C_1(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (-2t + 4) dt = \frac{11}{16}$$

$$g_2(1) = \int_{\tau_1}^{\tau^1} C_2(t) dt = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (-t + 3) dt = \frac{21}{32}$$

$$g_2(2) = \int_{\tau_2}^{\tau^2} C_2(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (-t + 3) dt = \frac{19}{32}$$

et :

$j = N + 1 = 3$ est un indice supplémentaire correspondant à l'ensemble $T_* = [0, \frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{4}, 2]$

$$g_l(N+1) = \int_{T_*} C_l(t) \Delta u(t) dt$$

$$g_1(3) = \int_0^{\frac{1}{4}} C_1(t) \Delta u(t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} (-2t + 4)(-1) dt = \frac{-15}{16}$$

$$g_2(3) = \int_0^{\frac{1}{4}} C_2(t) \Delta u(t) dt = \int_0^{\frac{1}{4}} (-t + 3)(-1) dt = \frac{-23}{32}$$

Avec

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d^* - u(t) & \text{Si } E(t) < -\alpha \\ d_* - u(t) & \text{Si } E(t) > \alpha \end{cases}$$

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t > \frac{3}{4} \quad (t \in]\frac{3}{4}, 2]) \\ -1 & \text{Si } t < \frac{1}{4} \quad (t \in [0, \frac{1}{4}[) \end{cases}$$

Donc :

$$q_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} P(t) dt \quad : \quad j = \{1, 2\}$$

$$q_1 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} P(t) dt = \frac{1}{4}$$

$$q_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} P(t) dt = \frac{1}{4}$$

$$q_{N+1} = \int_{T_*} P(t) \cdot \Delta u(t) dt$$

$$q_3 = \int_0^{\frac{1}{4}} P(t) \Delta u(t) dt = -\frac{1}{4}$$

$$d_{*j} = d_* - u_j; \quad d_j^* = d^* - u_j; \quad j = \{1, 2\};$$

$$\text{alors : } d_{*1} = -1; \quad d_{*2} = -2; \quad d_1^* = 1; \quad d_2^* = 1$$

$$d_{*N+1} = 0 = d_{*3}; \quad d_{N+1}^* = 1 = d_{*3}$$

Le problème (I) devient un problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & \left\{ \left(\frac{13}{16} \mathbf{l}_1 + \frac{11}{16} \mathbf{l}_2 - \frac{15}{16} \mathbf{l}_3 \right); \quad \left(\frac{21}{32} \mathbf{l}_1 + \frac{19}{32} \mathbf{l}_2 - \frac{23}{32} \mathbf{l}_3 + 2 \right) \right\} \rightarrow \min_U \\ & \begin{cases} \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_3 \end{pmatrix} = 0, \\ -1 \leq \mathbf{l}_1 \leq 1, \quad -2 \leq \mathbf{l}_2 \leq 0, \quad 0 \leq \mathbf{l}_3 \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (I.1)$$

Avec : $w_2 = J(\mu) - (x_1(2) + x_2(2) - 1) = 2$

On posant :

$$\mathbf{l}_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t), & t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N} ; \\ \theta, & \text{pour } j=N+1. \end{cases}$$

Passant à la résolution de ce problème par la méthode adaptée, en prenant comme support de départ :

$$I = \{(0, 0, 0), S_{sup}\}, \quad S_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, L_{sup}\}.$$

$$\bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\}, \quad J_{sup} = \{1\}, \quad L_{sup} = \{2\}.$$

De premier chapitre on récupère la solution optimal de problème (II)

suisant : $\{\tilde{I}, S_{sup}\} / \tilde{I} = (1, 0, 1), \tilde{S}_{sup} = \{\tilde{J}_{sup}, L_{sup}\}, \tilde{J}_{sup} = \tilde{J}_{sup} \cup \{0\}, L_{sup} = 2.$

Remarque :

$N + 1 = 2 + 1 = 3 \notin J_{sup} = 1$, alors $\tilde{J}_{sup} = J_{sup} = \{1\}$, d'où $\tilde{S}_{sup} = S_{sup}$

Construisons alors la nouvelle commande $\bar{u}(t)$:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + I_{N+1}^\varepsilon \Delta u(t), & t \in T_* \quad T_* = [0, \frac{1}{4} \cup \frac{3}{4}, 2] \\ u(t) + I_j^\varepsilon, & t \in [\tau_j, \tau^j]; j = \{1, 2\} \end{cases}$$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ 1 & t \in [\frac{1}{4}, 2] \end{cases}$$

A cette nouvelle commande correspond le moment d'appui $\bar{\tau}_{sup} = \frac{1}{4}$ et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t), t \in T$ vérifie : $H.\bar{x}(2) = 2$

* $Sur[0, \frac{1}{4}] : \bar{u}(t) = -1$

$$\bar{x}(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)bu \, d\tau$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{pmatrix}; \quad \bar{x}(\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

* $Sur[\frac{1}{4}, 2] : \bar{u}(t) = 1$

$$\bar{x}(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_{\frac{1}{4}}^t F^{-1}(\tau)bu \, d\tau$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{32} \\ t - \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \quad \bar{x}(2) = \begin{pmatrix} \frac{47}{32} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Donc

$$J(\bar{u}) = \frac{63}{16} < J(u) = 5$$

Donc le nouveau support \bar{K}_{sup} du problème (I) construit à partir de \tilde{S}_{sup} est :
 $\bar{K}_{sup} = \{\bar{\tau}_{sup}, \bar{L}_{sup}\} \quad \bar{\tau}_{sup} = \{\frac{1}{4}\}; \quad \bar{L}_{sup} = L_{sup} = 2$

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} -e(L_{sup}) & C_{L_{sup}}(t) \\ 0 & P_i(t), i \in I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e(2) & C_2(t) \\ 0 & P_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } : t = \bar{\tau}_{sup} = \frac{1}{4}$$

$$\beta_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(y(L_{sup}), \pi(I)) = C_0^t(\bar{\tau}_{sup}).\beta_{sup}^{-1}$$

$$(y_2, \pi_1) = (1 \quad -\frac{11}{4})$$

$$y(L_n) = y_1 = 0$$

$$E(t) = y^t(L_{sup})C_{L_{sup}}(t) + \pi(I)P_I(t) = -t + \frac{1}{4}, \quad t \in T$$

$$E(\tau_{sup}) = E\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

Et

$$\beta(\bar{u}, K_{sup}) = 0$$

Donc $\{\bar{u}, K_{sup}\}$ est support contrôle optimal du problème(I)

avec :

$$\bar{u} = \begin{cases} -1, & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ 1, & t \in]\frac{1}{4}, 2] \end{cases}$$

et

$$K_{sup} = \{\bar{\tau}_{sup}, L_{sup}\}; \quad \bar{\tau}_{sup} = \frac{1}{4} \text{ et } L_{sup} = \{2\}; \quad J(\bar{u}) = \frac{63}{16}.$$

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX DE FONCTIONNELLE NON DIFFÉRENTIABLE EN CONTRÔLE OPTIMAL

3

Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution d'un problème Min-Max terminal d'un système dynamique linéaire, avec un critère de qualité en valeur absolue. Et pour cette résolution nous avons appliqué la méthode adaptée qui utilise certaines notions de la méthode simplexe.

3.1 PROBLÈME TERMINAL D'UN SYSTÈME DYNAMIQUE LINÉAIRE

Considérons le problème terminal de commande optimale suivant :

$$J(u) = \max_{l \in L} |c_l^t x(t_*) + d_l| \rightarrow \min_{u \in U} ; \quad (1)$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0 ; \quad (2)$$

$$Hx(t_*) = g ; \quad (3)$$

$$d_* \leq u(t) \leq d^*, \quad t \in T = [0, t_*], \quad (4)$$

où

- . $U = \{u(t), t \in T = [0, t_*]\}$,
- . $J(u)$ est le critère de qualité ,
- . $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la position du système au temps t ,
- . $A(J, J)$ est une $n \times n$ - matrice qui caractérise le système ,
- . $b(J)$ est un n - vecteur donné ,
- . $H(I, J)$ est une $m \times n$ - matrice telle que le rang de $H = m \leq n$,
- . g est un m - vecteur qui représente la sortie du signal à l'instant t_* ,
- . $u(t)$ est une commande constante par morceaux, bornée par $d_*, d^* \in \mathbb{R}$,
- . $c_l = c_l(J)$, $l \in L$ est le n - vecteur des coûts ,
- . $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$, $L = \{1, 2, \dots, l^*\}$ sont des ensembles d'indices.

Définition 1 :

Une commande (contrôle) $u(t)$, $t \in T$ est dite admissible si :
 $u(t)$, $t \in T$ et sa trajectoire correspondante $x(t)$, $t \in T$ solution de système
différentiel (2) vérifient les contraintes (3)-(4).

Une commande admissible $u^0(t)$, $t \in T$ est dite optimale si
 $J(u^0) = \min_{u \in U} J(u)$.

Une commande admissible $u^\varepsilon(t)$, $t \in T$ ($\varepsilon > 0$, donné) est dite
 ε -optimale si $J(u^\varepsilon) - J(u^0) \leq \varepsilon$.

Notre problème consiste à trouver la commande admissible u^0 qui, avec
sa trajectoire correspondante x^0 donnent le minimum du critère de qualité :

$$J(u^0) = \min_{u \in U} \max_{l \in L} |c_l^t x(t_*) + d_l| = \min_{u \in U} J(u)$$

La solution du système dynamique (2) donnée par la formule de cauchy est
égale à :

$$x(t) = F(t) \cdot \left(x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau) b u(\tau) d\tau \right), t \in T; \quad (5)$$

où :

$F(t) = \exp(A.t)$, $t \in T = [0, t_*]$ est une matrice carrée d'ordre n (résolvante),
solution du système homogène :

$$\dot{F}(t) = AF(t), F(0) = I_n.$$

I_n : désigne la matrice identité d'ordre n .

En utilisant la solution (5), le problème (1)-(4) devient un problème de
la seule variable $u(t)$, $t \in T$:

$$J(u) = \max_{l \in L} \left| c_l^t F(t_*) x_0 + \int_0^{t_*} c_l(t) u(t) dt + d_l \right| \rightarrow \min_{u \in U}; \quad (6)$$

$$\int_0^{t_*} P(t) u(t) dt = g - HF(t_*) x_0; \quad (7)$$

$$d_* \leq u(t) \leq d^*, t \in T = [0, t_*]; \quad (8)$$

où :

$$C_l(t) = c_l^t F(t_*) F^{-1}(t) b \quad ; \quad P(t) = HF(t_*) F^{-1}(t) b \quad , \quad t \in T.$$

3.2 SUPPORT CONTRÔLE

Le problème (6)-(8) peut être écrit sous la forme équivalente :

$$\tilde{\zeta} \rightarrow \min_u \quad (9)$$

$$-\tilde{\zeta} \leq c_l^t F(t_*)x_0 + \int_0^{t_*} c_l(t)u(t)dt + d_l \leq \tilde{\zeta}, \quad l \in L; \quad (10)$$

$$\int_0^{t_*} P(t)u(t)dt = \tilde{g}; \quad (11)$$

$$d_* \leq u(t) \leq d^*, \quad t \in T = [0, t_*]; \quad (12)$$

où $\tilde{g} = g - HF(t_*)x_0$

Dans l'intervalle T , choisissons le sous-ensemble $\tau_{sup} = \{\tau_j, j = 1, 2, \dots, s\}$ formé de moments isolés, et dans l'ensemble L , le sous-ensemble L_{sup} telle que $|L_{sup}| + |I| = |\tau_{sup}| + 1$.

Subdivisons L_{sup} en deux sous-ensembles L_{sup}^+ et L_{sup}^- telle que $L_{sup}^+ \cup L_{sup}^- = L_{sup}$, $L_{sup}^+ \cap L_{sup}^- = \emptyset$.

Notons $e(L) = (e_l = 1, l \in L)$, $L_n = L \setminus L_{sup}$.

Posons $\bar{\tau}_{sup} = \tau_{sup} \cup \rho$.

Construisons la matrice $B_{sup} = B(L_{sup}, \bar{\tau}_{sup})$ définie par :

$$B_{sup} = \begin{pmatrix} e(L_{sup}^-) & C_{L_{sup}^-}(t) \\ -e(L_{sup}^+) & C_{L_{sup}^+}(t) \\ 0 & P_i(t), i \in I \end{pmatrix}, \quad t \in \tau_{sup}.$$

Calculons les vecteurs des potentiels $y(L) = (y(L_{sup}), y(L_n))$, $\pi(I)$; par :

$$(y(L_{sup}), \pi(I)) = c_0^t (\bar{\tau}_{sup}) B_{sup}^{-1} y(L_n) = 0, \quad (13)$$

$$c_0 = (c_{00} = -1, c_{0t} = 0, t \in \tau_{sup})$$

et la co-commande $E(T)$:

$$E(t) = y^t(L_{sup}) C_{L_{sup}}(t) + \pi(I) P_I(t), \quad t \in T. \quad (14)$$

Par construction, on a :

$$E(t) = 0, \quad t \in \tau_{sup}; \quad \sum_{l \in L_{sup}} |y_l| = 1.$$

Définition 2 :

La paire $K_{sup} = \{L_{sup}, \bar{\tau}_{sup}\}$ est dite support du problème (1)-(4) si $\det(B_{sup}) \neq 0$ et les inégalités suivantes sont vérifiées : $y(L_{sup}^-) \leq 0$, $y(L_{sup}^+) \geq 0$.

Définition 3 :

La paire $\{u, K_{sup}\}$ formée d'une commande admissible $u(t)$ et d'un support K_{sup} est dite support contrôle (commande-appui) du problème (1)-(4) .

Définition 4 :

Un support contrôle $\{u, K_{sup}\}$ est dit non dégénéré si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\tau \in \tau_{sup}$ est un point de discontinuité de la fonction $u(t)$, $t \in T$;
2. $J(u) > |c_l^t x(t_*) + d_l|$, $l \in L_n$;
3. Au voisinage de τ , on a : $d_* < u(t) < d^*$, $t \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$, $\delta > 0$, $\tau \in \tau_{sup}$.

Définition 5 :

Un support K_{sup} est dit support coordinateur associé à la commande u si :

$$L_{sup}^+ \subseteq L^+(x) = \{l \in L : c_l^t x(t_*) + d_l = J(u)\} ;$$

$$L_{sup}^- \subseteq L^-(x) = \{l \in L : c_l^t x(t_*) + d_l = -J(u)\} .$$

Remarques 1

- L'existence du support est très liée à la notion de commandabilité du système.
- A chaque moment τ_j , on fait correspondre un intervalle $T_j = [\tau_j, \tau^j]$, et on prend la commande $u(t)$ constantes dans les intervalles T_j $j = \overline{1, s}$:

$$u(t) = u_j, t \in T_j = [\tau_j, \tau^j]; d_* \leq u_j \leq d^*, j = \overline{1, s} .$$

3.3 FORMULE D'ACCROISSEMENT DU CRITÈRE DE QUALITÉ

Soit $\{u, K_{sup}\}$ un support-contrôle non dégénéré du problème (1)-(4), $x(t)$, $t \in T$ sa trajectoire correspondante et considérons un autre contrôle $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$ et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$.

Le contrôle $u(t)$ vérifie les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_l^t F(t_*)x_0 + \int_0^{t_*} c_l^t(t)u(t)dt + J(u) = w_l - d_l, \quad l \in L_{sup}^- ; \\ c_l^t F(t_*)x_0 + \int_0^{t_*} c_l^t(t)u(t)dt - J(u) = w_l - d_l, \quad l \in L_{sup}^+ ; \\ \int_0^{t_*} P_i(t)u(t)dt = w_i + \tilde{g}_i, \quad i \in I ; \end{array} \right. \quad (15)$$

de même que le contrôle $\bar{u}(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_l^t F(t_*)x_0 + \int_0^{t_*} c_l^t(t)\bar{u}(t)dt + J(\bar{u}) = \bar{w}_l - d_l, \quad l \in L_{sup}^- ; \\ c_l^t F(t_*)x_0 + \int_0^{t_*} c_l^t(t)\bar{u}(t)dt - J(\bar{u}) = \bar{w}_l - d_l, \quad l \in L_{sup}^+ ; \\ \int_0^{t_*} P_i(t)\bar{u}(t)dt = \bar{w}_i + \tilde{g}_i, \quad i \in I ; \end{array} \right. \quad (16)$$

où $w = (w(L_{sup}), w(I))$, $\bar{w} = (\bar{w}(L_{sup}), \bar{w}(I))$ sont des vecteurs d'écarts

tel que :

$$\begin{aligned} (\bar{w}(L_{sup}), \bar{w}(I)) &= (w(L_{sup}), w(I)) + (\Delta w(L_{sup}), \Delta w(I)) , \\ \Delta w(I) &= w(I) = \Delta w(I) = 0_I. \end{aligned}$$

Par constuction

$$\begin{cases} \Delta w_l \geq -w_l , & l \in L_{sup}^- ; \\ \Delta w_l \leq -w_l , & l \in L_{sup}^+ . \end{cases}$$

En faisant la différence entre les formules (15) et (16) , on obtient :

$$\begin{cases} \int_0^{t_*} c_l^t(t) \Delta u(t) dt + \Delta J(u) = \Delta w_l , & l \in L_{sup}^- ; \\ \int_0^{t_*} c_l^t(t) \Delta u(t) dt - \Delta J(u) = \Delta w_l , & l \in L_{sup}^+ ; \\ \int_0^{t_*} P_i(t) \Delta u(t) dt = \Delta w_i , & i \in I . \end{cases}$$

De là on a :

$$\begin{cases} e(L_{sup}^-) \Delta J(u) + c[L_{sup}^-, \tau_{sup}] \Delta u(\tau_{sup}) = - \int_{T \setminus \tau_{sup}} c_{L_{sup}^-}^t(t) \Delta u(t) dt + \Delta w(L_{sup}^-) ; \\ -e(L_{sup}^+) \Delta J(u) + c[L_{sup}^+, \tau_{sup}] \Delta u(\tau_{sup}) = - \int_{T \setminus \tau_{sup}} c_{L_{sup}^+}^t(t) \Delta u(t) dt + \Delta w(L_{sup}^+) ; \\ P(I, \tau_{sup}) \Delta u(\tau_{sup}) = - \int_{T \setminus \tau_{sup}} P_I(t) dt \Delta u(\tau_n) + \Delta w(I) . \end{cases}$$

En développant les dernières équations , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \Delta J(u) \\ \Delta u(\tau_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \int_{T \setminus \tau_{sup}} c_{L_{sup}^-}^t(t) dt \\ \int_{T \setminus \tau_{sup}} P_I(t) dt \end{pmatrix} \Delta u(\tau_n) - \begin{pmatrix} \Delta w(L_{sup}) \\ \Delta w(I) \end{pmatrix} \right] , \quad \tau_n = T \setminus \tau_{sup} ,$$

c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} \Delta J(u) \\ \Delta u(\tau_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \int_{T \setminus \tau_{sup}} c_{L_{sup}^-}^t(t) dt \\ \int_{T \setminus \tau_{sup}} P_I(t) dt \end{pmatrix} \Delta u(\tau_n) - \begin{pmatrix} \Delta w(L_{sup}) \\ 0 \end{pmatrix} \right] , \quad (17)$$

pour tous $\Delta u(\tau_n)$ et $\Delta w(L_{sup})$.

De la formule (17) , résulte la formule de décroissance de la fonctionnelle du problème (1)-(4) :

$$\Delta J(u) = \int_0^{t_*} E(t) \Delta u(t) dt - \sum_{l \in L_{sup}} y_l \Delta w_l . \quad (18)$$

Le maximum d'accroissement de la fonctionnelle $-\Delta J(u) = -[J(\bar{u}) - J(u)]$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} d_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d^* - u(t) , & t \in T ; \\ \Delta w_l \leq -w_l , & l \in L_{sup}^+ ; \\ \Delta w_l \geq -w_l , & l \in L_{sup}^- , \end{cases} \quad (19)$$

est atteint pour :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d_* - u(t) , & E(t) > 0 , \\ d^* - u(t) , & E(t) < 0 , \\ 0 , & E(t) = 0 , t \in T , \end{cases} ; \quad \Delta w_l = \begin{cases} -w_l , & l \in L_{sup}^+ ; \\ -w_l , & l \in L_{sup}^- , \end{cases} \quad (20)$$

et est égal à :

$$\beta(u, K_{sup}) = \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_*)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d^*)dt + \sum_{l \in L_{sup}^+} y_l(J(u) - c_l^t x(t_*) - d_l) + \sum_{l \in L_{sup}^-} y_l(-J(u) - c_l^t x(t_*) - d_l) \quad (21)$$

appelée valeur de suboptimalité du support contrôle $\{u, K_{sup}\}$.

Où $T^+ = \{t \in T, E(t) > 0\}$, $T^- = \{t \in T, E(t) < 0\}$.

De là, on a toujours l'inégalité :

$$J(u) - J(\bar{u}) \leq \beta(u, K_{sup}) \quad , \quad \forall \bar{u}(t) , t \in T . \quad (22)$$

De cette inégalité, on déduit le critère d'optimalité suivant .

3.4 CRITÈRE D'OPTIMALITÉ

Théorème 1 [1,15] :

Soit $u(t)$, $t \in T$ un contrôle admissible du problème (1)-(4) , K_{sup} un support coordinateur associé à $u(t)$, $t \in T$.

Les relations :

$$\begin{cases} u(t) = d_* & \text{si } E(t) > 0 \quad , \\ u(t) = d^* & \text{si } E(t) < 0 \quad , \\ d_* \leq u(t) \leq d^* & \text{si } E(t) = 0 \quad , t \in T, \end{cases} \quad (23)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité du support contrôle $\{u, K_{sup}\}$.

Preuve :

Elle est analogue à celle du théorème 2 de deuxième chapitre .

3.5 PRINCIPE DU MAXIMUM

Théorème 2 [1,3,5] :

La condition :

$$\mathbf{H}(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d_* \leq u \leq d^*} \mathbf{H}(x(t), \psi(t), u) , t \in T$$

est suffisante, et dans le cas de la non dégénérescence, elle est nécessaire pour l'optimalité du support-contrôle $\{u, K_{sup}\}$.

3.6 PRINCIPE ε -OPTIMALITÉ

Théorème 3 : (ε -maximum)

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la commande admissible $u(t)$, $t \in T$ est ε -optimale si et seulement s'il existe un tel support K_{sup} sur lequel le long de $u(t)$ et des solutions $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, des systèmes direct et conjugué, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\mathbf{H}(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d_* \leq u \leq d^*} \mathbf{H}(x(t), \psi(t), u) - \varepsilon(t), \quad t \in T,$$

$$y^t w = \max_{\tilde{w} \in \mathbb{R}^{L_l}} (y^t \tilde{w}) - \varepsilon_1 \quad (24)$$

$$\int_{t_0}^{t_*} \varepsilon(t) dt + \varepsilon_1 \leq \varepsilon.$$

Preuve :

i) Condition suffisante

Supposons que les relations (24) sont vérifiées. Comme $E(t) = -\psi^t(t)b$, $t \in T$ alors :

$$\begin{aligned} \beta(u, K_{sup}) &= \int_{T^+} E(t) (u(t) - d_*) dt + \int_{T^-} E(t) (u(t) - d^*) dt - \sum_{l \in L_{sup}} y_l w_l \\ &= \int_{T^+} -\psi^t(t)b(u(t) - d_*) dt + \int_{T^-} -\psi^t(t)b(u(t) - d^*) dt + \int_T \psi^t(t)Ax(t) - \psi^t(t)Ax(t) dt - \sum_{l \in L} y_l w_l \\ &= \int_{T^+} [-\psi^t(t) (Ax(t) + bu(t)) + \psi^t(t) (Ax(t) + bd_*)] dt + \\ &\quad \int_{T^-} [-\psi^t(t) (Ax(t) + bu(t)) + \psi^t(t) (Ax(t) + bd^*)] dt - \sum_{l \in L} (y_l w_l - y_l \cdot 0) \\ &= \int_{T^+} [-\mathbf{H}(x(t), \psi(t), u(t)) + \max_{d_* \leq u \leq d^*} \mathbf{H}(x(t), \psi(t), u)] dt + \\ &\quad \int_{T^-} [-\mathbf{H}(x(t), \psi(t), u(t)) + \max_{d_* \leq u \leq d^*} \mathbf{H}(x(t), \psi(t), u)] dt - y(L)w(L) + \max_{\tilde{w} \in \mathbb{R}^{L_l}} (y^t \tilde{w}) \\ &= \int_T \varepsilon(t) dt + \varepsilon_1 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De l'inégalité (22), on a la relation suivante :

$$J(u) - J(\bar{u}) \leq \beta(u, K_{sup}) \leq \varepsilon, \quad \forall \bar{u};$$

qui nous indique que le contrôle $u(t)$, $t \in T$ est ε -optimal.

ii)Condition nécessaire

Soit $u(t)$, $t \in T$ un contrôle ε -optimal.

Introduisons le problème dual du problème (1)-(4) :

$$\begin{aligned}
 J^*(\lambda) &= [c^t(L) F(t_*) x_0 + d^t(L)]^t \gamma(L) - \tilde{g}^t(I) v(I) + \int_{t_0}^{t_*} d_*^t v(t) dt - \\
 &\quad \int_{t_0}^{t_*} d^{*t} w(t) dt \rightarrow \max; \\
 c^t(t) \gamma + P^t(t) v - v(t) + w(t) &= 0; \\
 v &= v_1 - v_2; \quad v_1 \geq 0; \quad v_2 \geq 0;
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$v(t) \geq 0; \quad w(t) \geq 0; \quad \sum_{l \in L} |\gamma_l| = 1; \quad t \in T,$$

Remarque : un tel support K_{sup} on peut toujours le construire[1].

Conclusion :

- Pour $-\Delta J(u) = J(u) - J(u^0) \leq \beta(u, K_{sup}) \leq \varepsilon$, u est ε -optimale.
- Pour $\varepsilon = 0$ le principe ε -maximum devient le principe traditionnel du maximum.

3.7 MÉTHODE DE RÉOLUTION

Soit $\{u, K_{sup}\}$ un support-contrôle admissible de départ pour lequel $\beta(u, K_{sup}) > \varepsilon$, où : $u(t)$, $t \in T$, est le contrôle vérifiant :

$$\begin{aligned}
 d_* \leq u(t) \leq d^*, \quad t \in T; \\
 H x(t_*) = g;
 \end{aligned}$$

avec sa trajectoire correspondante $x(t)$, $t \in T$, solution du système :

$$\dot{x} = A x + b u, \quad x(0) = x_0,$$

$\tau_{sup} = \{\tau_i, i = \overline{1, s}\}$, le support qu'on choisit de manière à avoir $\det(B_{sup}) \neq 0$. Si on ne peut pas déterminer un tel support, on démarre l'algorithme à partir d'un support vide ($\tau_{sup} = \emptyset$) et par convention $\det(B_{sup}(\emptyset)) \neq 0$.

Une itération de l'algorithme $\{u, \tau_{sup}\} \rightarrow \{\bar{u}, \bar{\tau}_{sup}\}$ se fait en trois étapes :

1. Changement de commande : $u \rightarrow \bar{u}$.
2. Changement de support : $\tau_{sup} \rightarrow \bar{\tau}_{sup}$.
3. Procédure finale.

3.7.1 Changement de commande :

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre donné et supposons que le support-contrôle $\{u, K_{sup}\}$ ne vérifie pas le principe ε -maximum.

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t)$, $t \in T$, une autre commande admissible.

où

$\Delta u(t)$, $t \in T$ est la direction et θ le pas maximal le long de cette direction, qui seront cherchés comme solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \max_{l \in L} \left| \int_0^{t^*} \theta c_l(t) \Delta u(t) dt + w_l \right| &\rightarrow \min_{\theta, \Delta u(t)} ; \\ \int_0^{t^*} \theta P(t) \Delta u(t) dt &= 0 ; \end{aligned} \quad (26)$$

$$d_* - u(t) \leq \theta \Delta u(t) \leq d^* - u(t), \quad t \in T ;$$

Choisissons les nombres $\alpha > 0$, $h > 0$ (paramètres de l'algorithme), où h est un nombre suffisamment petit .

Construisons les ensembles suivants :

$$T_0 = \{t \in T : |\psi^t(t) b| \leq \alpha\} ; \quad T_* = \{t \in T : |\psi^t(t) b| > \alpha\} , \quad T_* = T \setminus T_0 .$$

On a :

$$E(t) = -\psi^t(t) b = 0, \quad t \in \tau_{sup} \Rightarrow \tau_{sup} \subset T_0 .$$

Subdivisons l'ensemble T_0 en intervalles $[\tau_j, \tau^j]$, $j = 1, \dots, N$ tels que :

$$T_0 = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j[, \quad [\tau_j, \tau^j[\cap [\tau_i, \tau^i[= \emptyset, \quad \forall i \neq j \text{ et } \tau^j - \tau_j \leq h, \quad j = 1, \dots, N ;$$

et posons :

$$u(t) = u_j = c^{ste}, \quad t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = 1, \dots, N .$$

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d^* - u(t) & \text{si } E(t) < -\alpha , \\ d_* - u(t) & \text{si } E(t) > \alpha , \quad t \in T_* ; \end{cases}$$

Faisons un changement de variables :

$$l_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t) , & t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = 1, \dots, N , \\ \theta & , \quad \text{si } j = N + 1 ; \end{cases}$$

où $j = N + 1$ est un indice supplémentaire correspondant à l'ensemble T_* .

Calculons les quantités suivantes :

$$\mathbf{g}_l(j) = \int_{\tau_j}^{\tau^j} C_l(t) dt , j = 1, \dots, N ; \mathbf{g}_l(N+1) = \int_{T_*} C_l(t) \Delta u(t) dt ;$$

$$q_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} P(t) dt , j = 1, \dots, N ; q_{N+1} = \int_{T_*} P(t) \Delta u(t) dt ;$$

$$d_{*j} = d_* - u_j , d_j^* = d^* - u_j , j = 1, \dots, N ; d_{*(N+1)} = 0 , d_{N+1}^* = 1 ;$$

$$G = (q_j, j = 1, \dots, N+1) ; \bar{d}_* = (d_{*j}, j = 1, \dots, N+1) , \bar{d}^* = (d_j^*, j = 1, \dots, N+1) ;$$

$$\mathbf{1} = (\mathbf{1}_j, j = 1, \dots, N+1) , 0 \leq \theta \leq 1 .$$

De ce qui précède, le problème (26) devient le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max_{l \in L} | \mathbf{g}_l^t \mathbf{1} + w_l | &\rightarrow \min_{\mathbf{1}} ; \\ G \mathbf{1} &= 0 ; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\bar{d}_* \leq \mathbf{1} \leq \bar{d}^* .$$

Ce problème peut être facilement formulé sous forme du programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \zeta &\rightarrow \min_{\mathbf{1}, \zeta \in \mathbb{R}} ; \\ -\zeta &\leq \mathbf{g}_l^t \mathbf{1} + w_l \leq \zeta , l \in L ; \\ G \mathbf{1} &= 0 ; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\bar{d}_* \leq \mathbf{1} \leq \bar{d}^* .$$

Par la méthode adaptée, en prenant comme support de départ $\{\mathbf{1} = 0, S_{sup}\}$, on construit la solution ε -optimale $\{\mathbf{1}^\varepsilon, \bar{S}_{sup}\}$ du problème (28) ,

où \bar{S}_{sup} est le support du problème (28) et $\mathbf{1}^\varepsilon = (\mathbf{1}_j^\varepsilon, j = 1, \dots, N+1)$.

-Si l'indice $(N+1) \notin \bar{S}_{sup}$, alors on pose $\tilde{S}_{sup} = \bar{S}_{sup}$.

-Si non, on l'exclut par la méthode duale et on obtient

$$\tilde{S}_{sup} = (\bar{S}_{sup} \setminus (N+1)) \cup j_* .$$

La nouvelle commande sera égale à :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \mathbf{1}_{N+1}^\varepsilon \Delta u(t) , & t \in T_* ; \\ u(t) + \mathbf{1}_j^\varepsilon & , t \in [\tau_j, \tau^j[, j = 1, \dots, N . \end{cases} \quad (29)$$

La commande \bar{u} ainsi construite vérifie l'inégalité : $J(\bar{u}) \leq J(u)$.
Le support \tilde{S}_{sup} du problème (28) est utilisé pour construire le support \tilde{K}_{sup}
du problème (1)-(4) .
En utilisant le support $\tilde{K}_{sup} = \{\tilde{L}_{sup}, \tilde{\tau}_{sup}\}$, on calcule les fonctions $\tilde{E}_l(t)$,
 $t \in T$.

- Si la nouvelle commande-apui $\{\bar{u}, \tilde{K}_{sup}\}$ satisfait le principe du ε -maximum, alors le processus de résolution du problème original s'arrête .
- Si non, nous continuons la résolution du problème, en passant au changement de support.

3.7.2 Changement de support :

En utilisant le support \tilde{K}_{sup} .
Construisons la quasi-commande $\omega = (\omega(t), t \in T)$:

$$\omega(t) = \begin{cases} d_* & \text{si } \tilde{E}(t) > 0; \\ d^* & \text{si } \tilde{E}(t) < 0; \\ \in [d_*, d^*] & \text{si } \tilde{E}(t) = 0, t \in T ; \end{cases} \quad (30)$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (\chi(t), t \in T)$ solution de l'équation suivante :

$$\dot{\chi} = A \chi + b \omega, \quad \chi(0) = x_0.$$

i) Si les relations

$$\begin{aligned} H\chi(t_*) &= g ; \\ |c_l^t \chi(t_*) + d_l| &\leq J(\omega), \quad l \in L_n ; \end{aligned} \quad (31)$$

$$J(\omega) \geq 0 \quad \text{si } L_n = \emptyset ;$$

sont vérifiées alors la quasi-commande $\omega(t)$ est optimale pour le problème (1)-(4) et le processus de résolution s'arrête,
où $J(\omega) = \min_{u \in U} \max_{l \in L} |c_l^t \chi(t_*) + d_l|$.

ii) Si non, calculons le vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} \gamma(s+1) \\ \gamma(\tilde{\tau}_{sup}) \end{pmatrix} = B_{sup}^{-1} \begin{pmatrix} c_{\tilde{L}_{sup}^-}^t \chi(t_*) + d_{\tilde{L}_{sup}^-} + e(\tilde{L}_{sup}^-) J(\omega) \\ c_{\tilde{L}_{sup}^+}^t \chi(t_*) + d_{\tilde{L}_{sup}^+} - e(\tilde{L}_{sup}^+) J(\omega) \\ H(I, J) \chi(t_*) - g(I) \end{pmatrix}, \quad (32)$$

et les quantités suivantes :

$$\gamma_*(\tilde{L}_n) = \gamma(s+1) - J(\omega) - c_{\tilde{L}_n}^t \chi(t_*) - d_{\tilde{L}_n} + c_{\tilde{L}_n}^t(\tilde{\tau}_{sup}) \gamma(\tilde{\tau}_{sup}) ;$$

$$\gamma^*(\tilde{L}_n) = -\gamma(s+1) + J(\omega) - c_{\tilde{L}_n}^t \chi(t_*) - d_{\tilde{L}_n} + c_{\tilde{L}_n}^t(\tilde{\tau}_{sup}) \gamma(\tilde{\tau}_{sup}),$$

où

$$B_{sup} = \begin{pmatrix} e(\tilde{L}_{sup}^-) & c_{\tilde{L}_{sup}^-}(\tilde{\tau}_{sup}) \\ -e(\tilde{L}_{sup}^+) & c_{\tilde{L}_{sup}^+}(\tilde{\tau}_{sup}) \\ 0 & P(I, \tilde{\tau}_{sup}) \end{pmatrix}.$$

Deux cas peuvent se présenter :

- Si les relations suivantes

$$\text{i) } \|\gamma(\tilde{\tau}_{sup})\| \leq \mu, \quad (\mu \text{ paramètre de la méthode}) ;$$

(33)

$$\text{ii) } \gamma_*(\tilde{L}_n) \leq 0, \quad \gamma^*(\tilde{L}_n) \geq 0 ;$$

sont satisfaites, alors on passe à la procédure finale .

- Si non, on change le support $\tilde{K}_{sup} \rightsquigarrow \tilde{\tilde{K}}_{sup}$ par la méthode duale,

et on refait une nouvelle itération avec $\{\bar{u}, \tilde{\tilde{K}}_{sup}\}$ et les paramètres $\bar{\alpha}, \bar{h} / \bar{\alpha} < \alpha, \bar{h} < h$.

3.7.3 Procédure finale :

Supposons que pour la quasi-commande $\omega(t), t \in T$ et sa quasi -trajectoire $\chi(t), t \in T$ construites par le support \tilde{K}_{sup} , les conditions (37) sont vérifiées. Désignons par :

$$T_0 = \{t \in T : \tilde{E}(t) = 0\}$$

l'ensemble des points isolés $\tilde{\tau}_j, j = \overline{1, s}$; $\tilde{\tau}_j < \tilde{\tau}_{j+1}, j = \overline{0, s}$; $\tilde{\tau}_0 = 0$; $\tilde{\tau}_{s+1} = t_*$ et supposons :

$$\dot{\tilde{E}}(\tilde{\tau}_j) \neq 0, \quad j = \overline{1, s}.$$

La procédure finale consiste à déterminer le support optimal

$\tau_{sup}^* = \{\tau_j, j = 1, \dots, s\}$; τ_{s+1}^* à partir du vecteur (36) de telle sorte à avoir :

$$\begin{cases} g - H\chi(t_*) = 0, \\ c^t(L_{sup}^+) \chi(t_*) + d(L_{sup}^+) - e(L_{sup}^+) J(\omega) = 0, \\ c^t(L_{sup}^-) \chi(t_*) + d(L_{sup}^-) + e(L_{sup}^-) J(\omega) = 0, \end{cases}$$

On a la contrainte :

$$\begin{aligned} g - H\chi(t_*) &= g - H F(t_*)\chi_0 - \int_T P(t)\omega(t)dt \\ &= g - H F(t_*)\chi_0 - \int_{T^0} P(t)\omega(t)dt - \int_{T \setminus T^0} P(t)\omega(t)dt, \end{aligned}$$

vu que $\|\gamma(\tilde{\tau}_{sup})\| \leq \mu$, on peut poser :

$$g - H F(t_*)\chi_0 - \int_{T \setminus T^0} P(t)\omega(t)dt = 0,$$

de là on a :

$$\begin{aligned} g - H\chi(t_*) &= - \int_{T^0} P(t)\omega(t)dt \\ &= - \int_{T^0+} P(t)\omega(t)dt - \int_{T^0-} P(t)\omega(t)dt \end{aligned}$$

où :

$$T^{0-} = \{t \in T : \dot{\tilde{E}}(t_j) < 0\} ; \quad T^{0+} = \{t \in T : \dot{\tilde{E}}(t_j) > 0\} .$$

En faisant hypothèse que $P(t)$ est constante au voisinage des points $\tilde{\tau}_j, j = \overline{1, s}$;

on aura ainsi :

$$\begin{aligned} g - H\chi(t_*) &= \begin{cases} \sum_{j=1}^s (d^* - d_*) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} P(t) dt , & \text{si } \dot{\tilde{E}}(\tilde{\tau}_j) > 0 ; \\ -\sum_{j=1}^s (d^* - d_*) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} P(t) dt , & \text{si } \dot{\tilde{E}}(\tilde{\tau}_j) < 0 . \end{cases} \\ &= (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign} \dot{\tilde{E}}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} P(t) dt . \end{aligned}$$

On procédera au même raisonnement, en utilisant le vecteur (36) et les conditions (37), on obtient :

$$\begin{aligned} c^t(L_{sup}^+) \chi(t_*) + d(L_{sup}^+) - e(L_{sup}^+) J(\omega) &= (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign} \dot{\tilde{E}}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} c_{L_{sup}^+}^t(t) dt , \\ c^t(L_{sup}^-) \chi(t_*) + d(L_{sup}^-) + e(L_{sup}^-) J(\omega) &= (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign} \dot{\tilde{E}}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} c_{L_{sup}^-}^t(t) dt . \end{aligned}$$

De ce qui précède on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign} \dot{\tilde{E}}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} P(t) dt = g - H\chi(t_*) , \\ (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign} \dot{\tilde{E}}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} c_{L_{sup}^+}^t(t) dt = c^t(L_{sup}^+) \chi(t_*) + d(L_{sup}^+) - e(L_{sup}^+) J(\omega) , \\ (d^* - d_*) \sum_{j=1}^s \text{sign} \dot{\tilde{E}}(\tilde{\tau}_j) \int_{\tilde{\tau}_j}^{\tau_j} c_{L_{sup}^-}^t(t) dt = c^t(L_{sup}^-) \chi(t_*) + d(L_{sup}^-) + e(L_{sup}^-) J(\omega) , \end{cases}$$

dont la résolution va se faire à l'aide de la méthode de Newton en prenant comme approximation initiale : $\tau_{sup}^0 = \{\tau_j^0, j = 1, \dots, s\}$; τ_{s+1}^0 , avec $\tau_{sup}^0 = \{\tau_j, j = 1, \dots, s\}$; $\tau_{s+1}^0 = \gamma(s+1)$.

-La $(K+1)^{ieme}$ approximation $\tau_{sup}^{(k+1)}$ et $\tau_{s+1}^{(k+1)}$ sera déterminée par la formule :

$$\begin{aligned} \tau^{(k+1)} &= \tau^{(k)} + \Delta\tau^{(k)} ; \\ \Delta\tau^{(k)} &= -\frac{\partial\varphi^{-1}(\tau^{(k)})}{\partial\tau} \cdot \varphi(\tau^{(k)}) ; \end{aligned}$$

où :

$$\varphi(\tau^{(k)}) = \begin{pmatrix} c^t(L_{sup}^-) \chi(t_*) + d(L_{sup}^-) + e(L_{sup}^-) J(\omega) \\ c^t(L_{sup}^+) \chi(t_*) + d(L_{sup}^+) - e(L_{sup}^+) J(\omega) \\ H\chi(t_*) - g(I) \end{pmatrix} .$$

Pour μ suffisamment petit, la fonction ω^* ; $t \in T$ calculée par le support-optimal $K_{sup}^* = \{L_{sup}^*, \overline{\tau_{sup}^*}\}$, est une commande optimale .

3.8 ALGORITHME DE LA MÉTHODE

1. Test de commandabilité du système :
Calculer

$$rg[b, A b, \dots, A^{n-1}b]$$

— Si

$$rg[b, A b, \dots, A^{n-1}b] = n ,$$

alors le système est commandable aller en 2,

- Si non arrêter le processus de résolution et le problème (1)-(4) n'admet pas de solution optimale.
2. Prendre un support-contrôle de départ admissible $\{u, K_{sup}\}$, avec la trajectoire admissible correspondante $x(t)$, $t \in T$.
Calculer la valeur de la fonctionnelle en u :

$$J(u) = \min_{u \in U} \max_{l \in L} |c_l^t x(t_*) + d_l| .$$

Déterminer la co-commande :

$$E(t) = y^t(L_{sup})c_{L_{sup}}(t) + \pi(I)P_I(t) , t \in T .$$

3. Test d'optimalité du support-contrôle de départ :
Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(u, K_{sup}) = \beta$.
— Si $\beta = 0$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{u, K_{sup}\}$ un support-contrôle optimal du problème (1)-(4) .
— Si $\beta \leq \varepsilon$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{u, K_{sup}\}$ un support-contrôle ε -optimal du problème (1)-(4) .
— Si non aller en 4.
4. Changement de commande u en \bar{u} où :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t) , t \in T :$$

- 4-1 Choisir $\alpha > 0$, $h > 0$, $N > 0$:

$$T_0 = \{t \in T : |E(t)| \leq \alpha\} = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j] ;$$

$$T_* = \{t \in T : |E(t)| > \alpha\} ; \tau^j - \tau_j \leq h .$$

Poser

$$I_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t) , & t \in [\tau_j, \tau^j] , j = \overline{1, N} ; \\ \theta , & \text{pour } j = N+1 . \end{cases}$$

Calculer :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d^* - u(t) , & \text{si } E(t) < -\alpha ; \\ d_* - u(t) , & \text{si } E(t) > \alpha , t \in T_* . \end{cases}$$

4-2 Formalisation du problème de support :

$$\begin{cases} \max_{l \in L} |\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{g}_j \mathbf{l}_j + w_l| \rightarrow \min_{l_j}, \\ \sum_{j=1}^{N+1} q_j \mathbf{l}_j = 0, \\ d_{*j} \leq \mathbf{l}_j \leq d_j^*, j = \overline{1, N+1}, \end{cases}$$

Déterminer par la méthode adaptée sa solution optimale $\{\bar{\mathbf{I}}, \bar{J}_{sup}\}$.

4-3 Calculer la nouvelle commande \bar{u} :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \bar{\mathbf{I}}_{N+1} \Delta u(t), t \in T_*, \\ u(t) + \bar{\mathbf{I}}_j, t \in [\tau_j, \tau^j[, j = \overline{1, N}. \end{cases}$$

- Si l'indice $(N+1) \notin \bar{J}_{sup}$, alors on pose $\tilde{J}_{sup} = \bar{J}_{sup}$.
- Si l'indice $(N+1) \in \bar{J}_{sup}$, on l'exclut par la méthode duale et on obtient :

$$\tilde{J}_{sup} = (\bar{J}_{sup} \setminus N+1) \cup j^*.$$

4-4 Poser $\tilde{\tau} = \{\tau_j, j \in \tilde{J}_{sup}\}$.

5. Test d'optimalité du nouveau support-contrôle $\{\bar{u}, \tilde{K}_{sup}\}$.
Calculer la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, \tilde{K}_{sup}) = \bar{\beta}$.
 - Si $\bar{\beta} = 0$, alors arrêter le processus de résolution avec $\{\bar{u}, \tilde{K}_{sup}\}$ un support-contrôle optimal du problème (1)-(4).
 - Si $\bar{\beta} \leq \varepsilon$, alors arrêter le processus de résolution avec $\{\bar{u}, \tilde{K}_{sup}\}$ un support-contrôle ε -optimal du problème (1)-(4).
 - Si non aller en 6 ou en 4 avec $\bar{\alpha} < \alpha, \bar{h} < h$.
6. Changement de support $\tilde{K}_{sup} \rightarrow \bar{K}_{sup}$:
Construire la quasi-commande $\tilde{\omega}(t), t \in T$:

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} d^*, & \text{si } \tilde{E}(t) < 0; \\ d_*, & \text{si } \tilde{E}(t) > 0; \\ \in [d_*, d^*], & \text{si } \tilde{E}(t) = 0, t \in T, \end{cases}$$

et sa quasi trajectoire $\chi(t), t \in T$:

$$\dot{\chi} = A\chi + b\tilde{\omega}, \chi(0) = x_0.$$

- Si $H\chi(t_*) = g$, alors arrêter le processus de résolution et la quasi-commande $\tilde{\omega}(t), t \in T$, construite par le support $\tilde{\tau}_{sup}$ est optimale pour le problème (1)-(4).
- Si non aller en 6-1.

6-1 Calculer le vecteur

$$\begin{pmatrix} \gamma(s+1) \\ \gamma(\tilde{\tau}_{sup}) \end{pmatrix} = B_{sup}^{-1} \begin{pmatrix} c_{\tilde{L}_{sup}^-}^t \chi(t_*) + d_{\tilde{L}_{sup}^-} + e(\tilde{L}_{sup}^-) J(\omega) \\ c_{\tilde{L}_{sup}^+}^t \chi(t_*) + d_{\tilde{L}_{sup}^+} - e(\tilde{L}_{sup}^+) J(\omega) \\ H(I, J) \chi(t_*) - g(I) \end{pmatrix},$$

et les quantités suivantes :

$$\gamma_*(\tilde{L}_n) = \gamma(s+1) - J(\omega) - c_{\tilde{L}_n}^t \chi(t_*) - d_{\tilde{L}_n} + c_{\tilde{L}_n}^t(\tilde{\tau}_{sup}) \gamma(\tilde{\tau}_{sup}) ;$$

$$\gamma^*(\tilde{L}_n) = -\gamma(s+1) + J(\omega) - c_{\tilde{L}_n}^t \chi(t_*) - d_{\tilde{L}_n} + c_{\tilde{L}_n}^t(\tilde{\tau}_{sup}) \gamma(\tilde{\tau}_{sup}) ,$$

où

$$B_{sup} = \begin{pmatrix} e(\tilde{L}_{sup}^-) & c_{\tilde{L}_{sup}^-}(\tilde{\tau}_{sup}) \\ -e(\tilde{L}_{sup}^+) & c_{\tilde{L}_{sup}^+}(\tilde{\tau}_{sup}) \\ 0 & P(I, \tilde{\tau}_{sup}) \end{pmatrix} .$$

— Si $\|\gamma(\tilde{\tau}_{sup})\| \leq \mu$, $\gamma_*(\tilde{L}_n) \leq 0$ et $\gamma^*(\tilde{L}_n) \geq 0$ aller en 7 .

— Si non aller en 6-2 .

6-2 Déterminer τ_0 tel que :

$$|\gamma(\tau_0)| = \max |\gamma(t)| , t \in \tilde{\tau}_{sup} .$$

Calculer

$$\tilde{E}(t) , t \in T .$$

Déterminer $t_* \in T \setminus \tilde{\tau}_{sup}$ tel que

$$\tilde{E}(t_*) = 0 , \dot{\tilde{E}}(t_*) \neq 0 .$$

Aller en 6-1 .

7. Procédure finale :

Déterminer le support optimal τ_{sup}^0 à partir de relation de récurrence :

$$\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + \Delta\tau^{(k)} , \Delta\tau^{(k)} = -\frac{\partial\varphi^{-1}(\tau^{(k)})}{\partial\tau} \cdot \varphi(\tau^{(k)}) ;$$

et :

$$\varphi(\tau^{(k)}) = \begin{pmatrix} c^t(L_{sup}^-) \chi(t_*) + d(L_{sup}^-) + e(L_{sup}^-) J(\omega) \\ c^t(L_{sup}^+) \chi(t_*) + d(L_{sup}^+) - e(L_{sup}^+) J(\omega) \\ H\chi(t_*) - g(I) \end{pmatrix} ,$$

en prenant comme approximation initiale $\tau_{sup}^{(0)} = \tilde{\tau}_{sup}$.

Arrêter le processus de résolution avec $\{\omega^0(t), t \in T ; \tau_{sup}^0\}$
un support-contrôle optimal du problème (1)-(4) .

3.9 EXEMPLE D'APPLICATION

$$J(u) = \max\{|2x_1(2) + 1|; |x_1(2) + x_2(2) - 1|\} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ x(2) = 2, \quad x(0) = (0,0) \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0,2] \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{Où : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad H = (0,1); \quad g = 2;$$

$$c_1^t = (2, 0); \quad c_2^t = (1, 1); \quad d_1 = 1; \quad d_2 = -1; \quad d^* = 1; \quad d_* = -1;$$

$$I = \{1\}; \quad J = \{1, 2\}; \quad L = \{1, 2\}.$$

On a :

$$\text{rang}[b, Ab] = 2 = n$$

Donc le système est commandable.

La trajectoire correspondante à l'état initial $x(0) = x_0$ est :

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau) d\tau, \quad t \in T$$

Avec F la solution du système homogène :

$$\dot{F} = AF, \quad F(0) = I_n = I_2$$

$$F(t) = \exp(A.t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = HF(2)F^{-1}b = 1$$

$$C_l(t) = c_l^t F(2).F^{-1}(t).b, \quad l \in L = \{1, 2\}$$

$$C_1(t) = c_1^t F(2)F^{-1}(t)b = -2t + 4$$

$$C_2(t) = c_2^t F(2)F^{-1}(t)b = -t + 3$$

Soit la commande constante par morceaux suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & ; \quad t \in]\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

Vérifions que cette commande est admissible :

$$\text{On a : } x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau) d\tau$$

$$\text{Sur : } [0, \frac{1}{2}] ; \quad u(t) = 0 :$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sur }]\frac{1}{2}, 2] ; \quad u(t) = 1 :$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix} \quad x(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & ; \quad t \in]\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

est admissible et pour cette commande la fonctionnelle :

$$J(u) = \max\{|2x_1(2) + 1|, |x_1(2) + x_2(2) - 1|\} \rightarrow \min$$

$$J(u) = \max\{|5, 3|\} = 5$$

Prenons comme appui de départ $K_{sup} = \{\bar{\tau}_{sup}, L_{sup}\}, \bar{\tau}_{sup} \cup \{0\}$

$$\tau_{sup} = \frac{1}{2} \text{ et } L_{sup} = \{1\} = L_{sup}^+, L_{sup}^- = \emptyset$$

(Remarque : $|L_{sup}| + |I| = |\tau_{sup}| + 1 \implies 1 + 1 = 1 + 1$ est vérifiée.)

Alors :

$$\begin{aligned} \beta_{sup} &= \begin{pmatrix} e(L_{sup}^-) & C_{L_{sup}}(t) \\ -e(L_{sup}^+) & P_i(t), i \in I \\ 0 & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2t + 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad t = \tau_{sup} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\beta_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le vecteur des potentiels :

$$(y_1, \pi_1) = (1, -3) \text{ c.à.d : } y_1 = 1, y_2 = 0 \text{ et } \pi_1 = -3$$

Calculons le vecteur des estimations :

$$E(t) = -2t + 1 \quad t \in T$$

Alors la valeur de suboptimabilité correspondante à ce plan d'appui est égale à :

$$\beta(u, K_{sup}) = \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_*) dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d^*) dt +$$

$$\sum_{L_{sup}^+} y_l (J(u) - c_l^t x(t_*) - d_l) + \sum_{L_{sup}^-} y_l (-J(u) - c_l^t x(t_*) - d_l).$$

$$\beta(u, K_{sup}) = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2t + 1) dt = \frac{1}{4}.$$

$$\beta(u, K_{sup}) = \frac{1}{4} > \varepsilon \implies \{u, K_{sup}\} \text{ n'est pas une solution } \varepsilon\text{-optimale.}$$

Passons alors, au :

Changement de commande :

$$u(t) \rightsquigarrow \bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t), t \in T$$

On peut prendre comme paramètres de la méthode $\alpha = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{4}$
 Construisons l'ensemble $T_0 = \{t \in T \mid |\psi^t(t).b| \leq \alpha\}$

$$T_0 = \{t \in T \mid |E(t)| \leq \alpha\}$$

$$E(t) = -\psi^t(t).b$$

$$T_0 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \mid T_* = T \setminus T_0 = [0, \frac{1}{4} \cup]\frac{3}{4}, 2]$$

* Subdivisions l'ensemble T_0 en intervalles (avec $h = \frac{1}{4}$)

$$[\tau_1, \tau^1] =]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; [\tau_2, \tau^2] =]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \quad (\text{on a } :N = 2).$$

Donc notre

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 1 & , t \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \end{cases}$$

$J = N + 1 = 3$ est un indice supplémentaire correspondant à l'ensemble
 $T_* = [0, \frac{1}{4} \cup]\frac{3}{4}, 2]$

Avec :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d^* - u(t) & \text{Si } E(t) < -\alpha \\ d_* - u(t) & \text{Si } E(t) > \alpha \end{cases}$$

$$\Delta(u) = \begin{cases} 0 & , t \in]\frac{3}{4}, 2] \\ -1 & , t \in [0, \frac{1}{4}[\quad \text{c.à.d pour } t \in T_* \end{cases}$$

* Calculons les quantités :

$$g_l(j) = \int_{\tau_j}^{\tau^j} C_l(t) dt; \quad j = \overline{1, N} = 1, 2, \quad g_l(N+1) = \int_{T_*} C_l(t) \Delta u(t) dt, \quad l \in L$$

$$g_1(1) = \frac{13}{16}; \quad g_1(2) = \frac{11}{16}; \quad g_2(1) = \frac{21}{32}; \quad g_2(2) = \frac{19}{32};$$

$$g_1(3) = \frac{-15}{16}; \quad g_2(3) = \frac{-23}{32};$$

$$q_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} P(t) dt, \quad j = 1, 2 \quad \text{et} \quad q_{N+1} = \int_{T_*} P(t) \cdot \Delta u(t) dt$$

$$q_1 = \frac{1}{4}; \quad q_2 = \frac{1}{4}; \quad q_3 = \frac{-1}{4};$$

$$d_{*j} = d_* - u_j; \quad d_j^* = d^* - u_j; \quad j = 1, 2; \quad d_{*N+1} = 0; \quad d_{N+1}^* = 1.$$

On posant :

$$\mathbf{1}_j = \begin{cases} \theta \Delta \mu(t), & t \in [\tau_j, \tau^j], j = \overline{1, N} \\ \theta, & j = N+1 \quad / 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases} \quad (\text{Changement de variable})$$

Le problème (II) devient le problème (1) de programmation linéaire suivant :

$$\max\{|\frac{13}{16}\mathbf{l}_1 + \frac{11}{16}\mathbf{l}_2 - \frac{15}{16}\mathbf{l}_3|, |\frac{21}{32}\mathbf{l}_1 + \frac{19}{32}\mathbf{l}_2 - \frac{23}{32}\mathbf{l}_3 + 2|\} \rightarrow \min / w_2 = 2$$

$$s/c \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_3 \end{pmatrix} = 0 \dots \dots (1)$$

$$-1 \leq \mathbf{l}_1 \leq 1; \quad -2 \leq \mathbf{l}_2 \leq 0; \quad 0 \leq \mathbf{l}_3 \leq 1$$

Résolvons le problème (1) par la méthode adaptée, en prenant comme plan d'appui de départ $\{I = (0,0,0), S_{sup}\}$; $S_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$, $\bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\}$, $J_{sup} = \{1\}$, $L_{sup} = L_{sup}^+ = \{2\}$; $L_{sup}^- = \emptyset$

Du premier chapitre on récupère la solution optimale du problème (1) (Problème de programmation linéaire) suivante :

$$\tilde{S}_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \tilde{L}_{sup}\}, \bar{J}_{sup} = \tilde{J}_{sup} \cup \{0\}, \quad \tilde{L}_{sup} = \bar{L}_{sup} = \bar{L}_{sup}^+ = \{2\}, \quad \tilde{L}_{sup}^- = \bar{L}_{sup}^- = \emptyset.$$

Avec : $N + 1 = 2 + 1 = 3 \notin J_{sup}$, alors $\tilde{J}_{sup} = J_{sup}$ donc $\tilde{S}_{sup} = S_{sup}$

Construisons alors la nouvelle commande

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \tilde{\mathbf{I}}_{N+1} \Delta u(t), & t \in T_*, \\ u(t) + \tilde{\mathbf{I}}_j, & t \in [\tau_j, \tau^j[, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ 1 & t \in]\frac{1}{4}, 2] \end{cases}$$

A cette nouvelle commande correspond le moment d'appui $\bar{\tau}_{sup} = \frac{1}{4}$ et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t)$, $t \in T$ vérifie $H\bar{x}(2) = 2$

$$* \text{ Sur}[0, \frac{1}{4}] : \bar{u}(t) = -1$$

$$\bar{x}(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)bu \, d\tau$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{pmatrix}; \quad \bar{x}(\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$* \text{ Sur}]\frac{1}{4}, 2] : \bar{u}(t) = 1$$

$$\bar{x}(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_{\frac{1}{4}}^t F^{-1}(\tau)bu \, d\tau$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{32} \\ t - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(2) = \begin{pmatrix} \frac{47}{32} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

alors :

$$J(\bar{u}) = \frac{63}{16} < J(u) = 5$$

Donc le nouveau support \bar{K}_{sup} du problème (I) construit à partir de $\tilde{S}_{sup} = S_{sup}$ est : $\bar{K}_{sup} = \{\bar{\tau}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$, $\bar{\tau}_{sup} = \frac{1}{4}$; $\bar{L}_{sup} = \bar{L}_{sup}^+ = 2$, $\bar{L}_{sup}^- = \emptyset$.

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} -e^{(L_{sup})} & C_{L_{sup}}(t) \\ 0 & P_i(t), i \in I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -t+3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } : t = \bar{\tau}_{sup} = \frac{1}{4}$$

$$\beta_{sup} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(y_2, \pi_1) = (1, \frac{-11}{4})$$

$$y(L_n) = y_1 = 0$$

$$E(t) = -t + \frac{1}{4}, \quad t \in T$$

$$E(\tau_{sup}) = E(\frac{1}{4}) = 0$$

Et

$$\beta(\bar{u}, \bar{K}_{sup}) = \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_*) dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d^*) dt +$$

$$\sum_{l \in \bar{L}_{sup}} y_l (J(u) - C_l^t x(t_*) - d_l) + \sum_{l \in \bar{L}_{sup}^+} y_l (J(u) - C_l^t x(t_*) - d_l) = 0$$

Donc $\{\bar{u}, \bar{K}_{sup}\}$ est support contrôle optimal avec :

$$\bar{u} = \begin{cases} -1, & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ 1, & t \in]\frac{1}{4}, 2] \end{cases}$$

et

$$\bar{K}_{sup} = \{\bar{\tau}_{sup}, \bar{L}_{sup}\} \quad \bar{\tau}_{sup} = \frac{1}{4}; \quad \bar{L}_{sup} = \bar{L}_{sup}^+ = \{2\}, \quad \bar{L}_{sup}^- = \emptyset \quad \text{et} \quad J(\bar{u}) = \frac{63}{16}.$$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre but dans le cadre de ce mémoire était d'établir la méthode adaptée pour la résolution de deux types de problèmes Min-Max de fonctionnelle non différentiable sur un problème de programmation linéaire et sur le contrôle optimal.

En premier lieu, nous avons introduit la méthode adaptée pour la résolution d'un problème Min-Max avec contraintes généralisées en programmation linéaire.

En deuxième lieu, on a présenté quelques concepts importants de la théorie de contrôle optimal, quelques définitions de bases et les différents systèmes de la commande optimale.

Puis, notre travail a été axée sur la résolution d'un problème Min-Max en contrôle optimal d'un système dynamique dans le cas continu par l'application de la méthode adaptée (développée par R. Gabasov et F. M. Kirillova) qui est basée sur une nouvelle construction dite « support coordinateur ».

En se basant sur le concept de la matrice support et le support coordinateur nous avons calculé la formule d'accroissement de la fonctionnelle, puis nous avons formulé les deux critères d'optimalité Et de suboptimalité.

Ainsi les mettre en lien avec le fameux principe du maximum de " Pontriaguine " et introduire dans la résolution " la procédure finale " pour avoir rapidement la solution optimale.

Après discrétisation d'un problème de contrôle optimal, ce dernier est transformé vers un problème de programmation linéaire résolu en premier chapitre. Un algorithme de la méthode adaptée est donné et est illustré par un exemple numérique.

Finalement, une généralisation de la méthode adaptée sur un problème Min-Max d'un critère de qualité avec valeur absolue en contrôle optimal est donnée en dernier chapitre.

L'utilisation de cette méthode conduit à obtenir des résultats intéressants et efficaces dans le cas des systèmes continus, l'avantage réside dont le fait qu'elle traite les problèmes tels qu'ils se présentent, ce qui engendre un gain en espace mémoire et en temps de calcul sur machine. .

Un algorithme de résolution a été donné en se basant sur trois procédures : le changement de la commande, le changement de support et la procédure finale en utilisant encore un critère d'arrêt ε -optimal. Cet algorithme est illustré par un exemple numérique.

En guise de perspectives, nous proposons les directions de recherche suivantes :

- Résolution de problèmes d'optimisation multi-objectifs linéaire et non linéaire.
- Résolution d'un problème Min-Max en contrôle optimal avec des commandes vectorielles.
- Résolution d'un problème Min-Max en contrôle optimal avec des commandes polyédrales.
- Résolution d'un problème Min-Max en contrôle optimal avec bornes mobiles et libres.
- Comparaison de la méthode adaptée avec d'autres méthodes pour résoudre un problème Min-Max.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.Ticherfatine. "Optimisation de fonctionnelle non différentiable". Mémoire de Magister, en ,Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou,2009.

[2] al et R.Gabasov. "Optimal control of nonlinear systems". Comput. Maths, Maths.Phys, Vol.42.No7, 2002.

[3] B.Oukacha. "Résolution d'un problème min-max en contrôle optimal". Mémoire de Magister en recherche opérationnelle, Univesité Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou,2000.

[4] V.Boltiansky, L.Pontryagin, R.Gambrelidze et E.Mitchenko. "Théorie mathématique des processus optimaux". Edition : Mir-Moscou, 1974.

[5] R.V.Gamkrelidze."Discovery of the maximum principle." Journal of Dynamical and control systems, vol.5, no.4, 437-451, 1999.

[6] R.E.Kalman."Mathematical description of linear dynamical systems." SIAM Journal on control, 1 :152-192, 1963.

[7] R.E.Kalman."Canonical structure of linear dynamical systems." In proceedings of the National Academy of sciences, pages 596-600, 1961.

[8] A.Nait Abdessselam. "Résolution d'un problème de contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides". Mémoire de Magister en automatique des systèmes continus et productique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, 2009.

[9] S.Hakkoum. "contrôle optimal de la traversée d'un fleuve par une barque". Mémoire de Master en recherche opérationnelle, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2016.

[10] R.Gabasov. "Adaptive method of solving linear programming problems". Preprint series of university of Karlsruhe, institute for statistic and mathematics 1994.

[11] M. Chebbah. "Résolution et implantation d'un problème Min-max en contrôle optimal". Mémoire de Magister en mathématique appliquées. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2006.

[12] K. Khaldi. " Contrôle optimal des systèmes dynamiques". Mémoire de Master en recherche opérationnelle, Université Saad Dahlab-Blida 1, 2020.

[13] E.Trélat, Contrôle optimal : Théorie et applications, Vuibert, Collection "Mathématique Concrètes", 2005.

[14] B.Brahmi. "Méthodes primale et duale pour la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe".

[15] .Gabasov(a) , F.M.Kirillova(b) and E.A.Kostina(b) . "Adaptive methods for solving Mini-max problems".(a) Byelaorussian State University, Departement of Applied Mathematics and Informatics, F.Scorina.4, Minsk, 220050, Belarus.(b) Institute of mathematics of academy of sciences, Surganov Str.11,Minsk, 220072, Belarus.

