

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT : MATHEMATIQUES



**Mémoire de Master**

SPECIALITE: MATHEMATIQUES

*Option* : PROBABILITES ET STATISTIQUE

Présentée par:

**TIGHEDINE THANINA**

Thème

# **Evaluation des risques financiers à travers les valeurs à risque et les stress tests**

*Devant le jury d'examen composé de:*

M.	GRAICHE	Farid	MCB	U.M.M.T.O	Président.
Mme.	BOUALAM	Karima	MCB	U.M.M.T.O	Rapporteur.
Mme.	BOUZIANE	Houria	MAA	U.M.M.T.O	Examinatrice.

*Soutenue le 03/07/2025*

# Dédicaces

Je dédie ce travail :

À l'âme douce de mon père que la paix t'accompagne dans ton voyage vers la lumière. Ton souvenir demeure gravé en moi comme une empreinte d'amour indélébile. Chaque leçon de vie, chaque moment partagé, chaque silence complice résonne encore dans le creux de ma mémoire. Merci pour ta sagesse qui continue de me guider, pour ta force qui m'habite, pour cet héritage invisible qui fait de moi ce que je suis. Repose dans la sérénité éternelle, cher père. Tu vis à jamais dans l'âme que tu m'as donnée, je dédie ce travail avec tout mon respect et ma gratitude.

À ma famille bien-aimée, vous êtes ma première histoire et mon dernier refuge. Ma mère tu es la source première de mon être, le premier amour qui n'a jamais cessé de brûler. Chaque sacrifice silencieux, chaque nuit veillée, chaque sourire offert malgré la fatigue ont tissé l'invisible armure qui me protège. Merci pour tout, pour l'éternité, tu resteras ma lumière .

À Mes sœurs chéries Dihia et Amina vous êtes ces étoiles jumelles qui ont illuminé mon enfance et continuent d'éclairer ma vie. Nos rires partagés sont une mélodie qui résonne en moi, nos souvenirs tissent une toile indestructible. Merci d'être ces miroirs qui reflètent mes origines, ces racines communes qui nous tiennent debout ensemble.

À mes frères bien-aimés Ferhat, Toufik et Massinissa et bien sur mon petit ange Elyane pour les combats d'enfance, et cette main toujours tendue. Merci d'être mon sang, ma force et mon inspiration. Ayara merci d'illuminer mes jours par ta présence, ton soutien et ton sourire.

À mes chères amies Lamia, Yasmine et Katia vous êtes les fleurs de mon jardin secret. Merci pour vos rires qui chassent mes nuages, notre amitié est ce trésor rare qui ne craint pas les saisons.

À mes collègues de promotion Hanane, Ryma, Soumeya, Amel.K, Lila, Rachida, Amel.L, Lydia, Lisa et Karima, merci pour les fous rires et les soutiens inattendus les défis relevés ensemble.

Je vous souhaite tous un avenir rempli de bonheur et de réussite, je vous aime.

# Remerciements

Je souhaite adresser mes sincères remerciements à ma directrice de mémoire Mme Boualam Karima pour son accompagnement exceptionnel. Sa patience, sa pédagogie et ses précieux conseils m'ont permis de surmonter les difficultés rencontrées et d'approfondir ma réflexion. Son soutien constant a été une source de motivation inestimable.

Je remercie chaleureusement les membres du jury, M. Graiche Farid et Mme Bouziane Houria pour l'intérêt porté à mon travail et le temps consacré à son évaluation.

Un immense merci à toute l'équipe de formation du master Probabilités et Statistique, merci pour votre patience, votre disponibilité constante et votre capacité à transformer les savoirs complexes en apprentissages accessibles et stimulants. Vous avez été bien plus que des enseignants : des guides et des inspirations.

Enfin, mes sincères Remerciements à ma famille et tous mes proches que j'aime qui m'ont accompagné, aidé et encouragé, merci infiniment.

# Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction générale	iv
<b>1 Mesures de risque</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction	1
1.2 Mesure de risque	1
1.3 Propriétés classiques	2
1.4 Mesures de risque usuelles	5
1.4.1 Value at Risk	5
1.4.2 Tail Value at Risk	10
1.4.3 Expected Shortfall (ES)	12
1.4.4 Conditional Value at Risk	12
1.4.5 Comparaison entre les mesures de risques usuelles	12
1.5 Mesure de risque de Wang	13
1.5.1 Fonction de distorsion	14
1.5.2 Exemples de mesures de risque de Wang	15
<b>2 Estimation de la VaR</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction	17
2.2 Méthode de simulation historique	17
2.2.1 Principe de la méthode	17
2.2.2 Exemple	18
2.2.3 Avantages et inconvénients	21
2.3 Méthode de simulation Monte Carlo	21
2.3.1 Principe de la méthode	22
2.3.2 Exemple	24
2.3.3 Avantages et inconvénients	26
2.4 Méthode de la TVE pour calculer la VaR	26
2.4.1 Introduction à la méthode TVE	26
2.4.2 Estimation des paramètres	30
2.4.3 Estimation des quantiles extrêmes	32
2.4.4 Avantages et inconvénients	35
<b>3 Application sur des données réelles</b>	<b>37</b>
3.1 Méthode historique	38
3.2 Méthode Monte Carlo	40
3.3 Méthode des valeurs extrêmes	42

# Introduction générale

Dans un environnement financier mondialisé, complexe et en constante mutation, la gestion des risques s'impose comme une discipline incontournable pour les institutions financières, les entreprises et les investisseurs individuels. Les crises récentes, marquées par une volatilité accrue des marchés et l'apparition d'événements extrêmes imprévus, les fameux "cygnes noirs", notamment la crise financière de 2008, ont douloureusement mis en lumière la nécessité de comprendre, mesurer et maîtriser les différentes expositions au risque. Face à cette réalité, le recours à des outils fiables devient essentiel pour anticiper les pertes potentielles, assurer la stabilité financière, et orienter les décisions d'investissement et de stratégie.

Ce mémoire vise à analyser les méthodologies avancées d'évaluation des risques financiers, en mettant l'accent sur l'estimation de la Value at Risk (VaR), introduite par J.P. Morgan [10], pour un portefeuille, selon plusieurs approches d'estimation.

Le premier chapitre sera consacré à une présentation détaillée des principales mesures de risque utilisées en finance. Nous commencerons par la VaR, devenue un standard pour estimer la perte maximale potentielle d'un portefeuille sur un horizon donné et avec un niveau de confiance fixé. Malgré sa popularité, la VaR présente des limites, notamment son incapacité à évaluer les pertes au-delà d'un certain quantile. C'est pourquoi nous examinerons également des mesures dites cohérentes Artzner [2], telles que la Conditional VaR (CVaR), la Tail VaR (TVaR) et l'Expected Shortfall (ES), qui estiment la perte moyenne en cas de dépassement de la VaR. Ces approches offrent une vision plus complète du risque extrême. Nous présenterons également la mesure de Wang [17], qui prend en compte l'aversion au risque dans le calcul des primes d'assurance et du capital économique. L'objectif est de fournir une base théorique claire pour comparer les caractéristiques, les usages et les limites de ces différentes mesures face aux risques extrêmes.

Le deuxième chapitre portera sur la mise en œuvre pratique de l'estimation de la VaR, en explorant les principales méthodologies utilisées. Nous débiterons par la simulation historique (Chase Manhattan [4], Best P. [3]), appréciée pour sa simplicité et son approche non paramétrique, bien qu'elle puisse être inadaptée aux instruments financiers non linéaires. Ensuite, nous analyserons la méthode de Monte Carlo, une technique de simulation puissante capable de modéliser des portefeuilles complexes, mais exigeante en termes de calcul. Enfin, nous nous intéresserons à une approche plus sophistiquée fondée sur la théorie des valeurs extrêmes (TVE), notamment via la méthode POT (Peak Over Threshold) Pickands[13]. En nous appuyant sur le théorème de Balkema, de Haan et Pickands, nous justifierons l'usage de la distribution de Pareto généralisée (GPD) pour estimer les quantiles extrêmes. Cette approche se montre particulièrement pertinente lorsque les données sont rares et que les méthodes traditionnelles deviennent inefficaces face aux événements rares mais catastrophiques.

À la fin du chapitre 2, une application pratique sera réalisée à partir d'un portefeuille financier composé de trois actions américaines cotées en bourse : Apple Inc. (AAPL), Microsoft

Corporation (MSFT) et Alphabet Inc. (GOOG). Ce portefeuille, construit avec des pondérations définies, servira de base à l'estimation de la Value at Risk (VaR) selon trois approches distinctes : la méthode de simulation historique, la méthode de Monte Carlo et la théorie des valeurs extrêmes.

Une conclusion viendra synthétiser l'ensemble des travaux menés dans ce mémoire et proposera quelques perspectives d'approfondissement.

# Chapitre 1

## Mesures de risque

### 1.1 Introduction

La gestion du risque constitue un pilier fondamental dans de nombreux secteurs, notamment en finance, en assurance et en ingénierie. Plusieurs outils ont été développés pour analyser et comparer les risques dans des situations incertaines parmi lesquelles les mesures de risque occupent une place centrale.

Ce chapitre propose une présentation approfondie des principales notions associées aux mesures de risque. Nous commencerons par définir ce concept clé et en détaillerons les propriétés fondamentales Reich[15], Schmidt[16] et Olivier et al.[12], essentielles pour assurer une évaluation rigoureuse et cohérente du risque.

Nous explorerons ensuite les mesures de risque classiques, telles que la Value at Risk (VaR), la Tail Value at Risk (TVaR), l'Expected Shortfall (ES) et le Conditional Value at Risk (CVaR). Pour terminer, nous introduirons une approche plus récente et flexible : la mesure de risque de Wang, qui repose sur l'utilisation de fonctions de distorsion permettant de moduler la distribution des pertes selon la perception du risque extrême.

### 1.2 Mesure de risque

Soit  $\Omega$  un ensemble fini représentant tous les états de la nature possibles. Soit  $\mathcal{X}$  l'ensemble des risques, défini comme l'ensemble de toutes les fonctions réelles  $X \in \mathcal{X}$ . Chaque fonction  $X$  associe à un état de la nature  $\omega \in \Omega$  la valeur nette finale d'un instrument financier ou d'un portefeuille d'instruments.

**Définition 1.1 (*Risque*)** *Le risque se caractérise comme une perte potentielle, identifiable et mesurable, liée à une situation ou une activité spécifique, et associée à la probabilité qu'un événement ou une série d'événements se produise.*

**Exemple :** On considère un portefeuille d'actifs dont l'évolution entre les périodes 0 et  $T$  est modélisée par un processus stochastique  $P = (P(t))_{0 \leq t \leq T}$ . On note  $P_0 = P(0)$  la valeur du portefeuille à l'instant initial 0, et  $P_T = P(T)$  sa valeur à l'instant final  $T$ . Sur un horizon temporel de longueur  $T$ , le gain ou la perte du portefeuille est donné par la différence  $P_T - P_0$ . Si cette différence est positive, cela indique une valorisation du portefeuille, tandis qu'une valeur négative représente une dépréciation.

**Définition 1.2 (*Mesure de risque*)** *Une mesure de risque est définie comme une fonction qui associe à une variable aléatoire de perte  $X$  un nombre réel. Cette fonction quantifie le montant de capital nécessaire pour couvrir les pertes potentielles.*

**Définition 1.3** Une mesure de risque est une fonction  $\rho$  définie de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{aligned} \rho: \mathcal{X} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \rho(X) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{X}$  représente l'ensemble des variables aléatoires réelles  $X$  définies sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

En termes économiques,  $\rho(X)$  peut être interprété comme le montant de capital à ajouter à un portefeuille dont la perte est donnée par  $X$ , afin de rendre ce portefeuille acceptable pour un contrôleur de risque (interne ou externe). Cette mesure doit refléter les préférences du décideur en matière de risque.

### 1.3 Propriétés classiques

Nous considérons maintenant plusieurs propriétés possibles pour une mesure de risque  $\rho$  définie sur  $\mathcal{X}$ .

1. **Invariance par translation** :  $\rho$  est dite invariante par translation si pour toute  $X \in \mathcal{X}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha$$

2. **Sous-additivité** :  $\rho$  est dite sous-additive si  $\forall X, Y \in \mathcal{X}$ , on a :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

3. **Homogénéité** :  $\rho$  est dite homogène positive si  $\forall \lambda \geq 0, \forall X$ , on a :

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X).$$

Si  $\lambda < 0$ , on parle d'homogénéité négative.

4. **Monotonie** :  $\rho$  est dite monotone si on a :

$$X \leq Y \implies \rho(Y) \leq \rho(X).$$

L'écriture  $X \leq Y$  veut dire  $P(X \leq Y) = 1$ .

5. **Convexité** :  $\rho$  est dite convexe si  $\forall \lambda \in [0, 1]$  et  $\forall (X, Y) \in \mathcal{X}$ , on a :

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

**Remarque** : •  $\rho$  est dite inadditive si elle ne vérifie pas la propriété de sous-additivité, c'est à dire qu'il existe  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{X}$  telles que :

$$\rho(X + Y) > \rho(X) + \rho(Y).$$

- $\rho$  est dite concave si  $\forall \lambda \in [0, 1]$  et  $\forall (X, Y) \in \mathcal{X}$ , on a :

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

**Définition 1.4** Une mesure de risque  $\rho$  est dite **monétaire** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- Invariance par translation.

- *Monotonie.*

**Proposition 1** [2] Soit  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une mesure de risque **monétaire** et **homogène**. Alors on a :

1.  $\rho$  est convexe.
2.  $\rho$  est sous-additive.

**Preuve :**

Supposons que  $\rho$  soit homogène c'est à dire :

$$\forall \lambda \geq 0, \forall X \in \mathbb{R}, \quad \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X).$$

on a :

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

Par homogénéité de  $\rho$ , on peut écrire :

$$\lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) = \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y).$$

on obtient alors :

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y).$$

D'ou la sous-additivité.

Pour garantir la pertinence d'une mesure de risque, il est essentiel de recourir à une mesure dite cohérente. Cette notion fondamentale, introduite par Artzner et al.[2], définit un cadre rigoureux pour évaluer l'acceptabilité d'une mesure de risque dans les applications financières.

**Définition 1.5** Une mesure de risque  $\rho$  est dite **cohérente** si elle satisfait les quatre propriétés suivantes :

- *Monotonie.*
- *Sous-additivité.*
- *Homogénéité positive.*
- *Invariance par translation.*

**Définition 1.6** Une mesure de risque  $\rho$  contient un chargement de sécurité si pour tout risque  $X$ , on a :

$$\rho(X) \geq \mathbb{E}[X]$$

Le capital minimum requis doit être au moins égal à la perte moyenne attendue.

**Remarques :**

1. L'espérance n'est pas une mesure de risque.

Le risque est généralement associé à la dispersion des résultats : Plus les résultats possibles s'écartent de la moyenne, plus le risque est élevé. L'espérance ne donne aucune information sur cette dispersion.

Par exemple considérons deux investissements  $A$  et  $B$  :

- **A** : Gain fixe de 100 unités (espérance  $\mathbb{E}[A] = 100$  unités, risque nul).
- **B** : 50 % de chance de gagner 200 unités, 50 % de chance de ne rien gagner (espérance  $\mathbb{E}[B] = 100$  unités, mais risque élevé).

Les deux ont la même espérance :

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[B] = 100 \text{ unités,}$$

mais  $B$  est risqué car il y a une chance de ne rien gagner.

2. La variance et l'écart-type sont des mesures de risque.

Entre deux investissements, celui avec l'écart-type le plus élevé est considéré comme plus volatil (risqué).

Prenons par exemple, deux actifs :

- **Actif A** : sur trois années, les rendements annuels =  $\{5\%, 5\%, 5\%\}$  → Variance nulle (risque nul).

$$\sigma_A = 0\%$$

- **Actif B** : les rendements annuels =  $\{-10\%, 30\%, -5\%\}$  → Variance élevée (risque élevé).

$$\sigma_B = 18.45\%$$

L'écart-type de B ( $\sigma_B$ ) est bien supérieur à celui de A ( $\sigma_A$ ), ce qui reflète son risque plus important.

3. Le bêta (noté  $\beta$ ) est une mesure (un indicateur) de risque systématique d'un actif financier par rapport au marché dans son ensemble. Il mesure la sensibilité des rendements d'un actif aux rendements du marché. En d'autres termes, le bêta indique comment l'actif réagit aux fluctuations globales du marché. Le bêta est calculé à partir de la covariance entre les rendements de l'actif et ceux du marché, ainsi que de la variance des rendements du marché :

$$\beta = \frac{\text{Cov}(R_{\text{actif}}, R_{\text{marché}})}{\text{Var}(R_{\text{marché}})}$$

Où :

- $R_{\text{actif}}$  est le rendement de l'actif,
  - $R_{\text{marché}}$  est le rendement du marché,
  - Cov est la covariance entre les rendements de l'actif et du marché,
  - Var est la variance des rendements du marché.
- Si  $\beta = 1$  : L'actif suit de près les mouvements du marché. Si le marché monte de 1 %, l'actif devrait, en moyenne, également monter de 1 %.
  - Si  $\beta > 1$  : L'actif est plus volatil que le marché. Par exemple, si  $\beta = 1,5$ , cela signifie que si le marché augmente de 1 %, l'actif augmentera de 1,5 %. Cependant, si le marché baisse de 1 %, l'actif baissera de 1,5 % en moyenne.
  - Si  $\beta < 1$  : L'actif est moins volatile que le marché. Par exemple, si  $\beta = 0,5$ , cela signifie que si le marché augmente de 1 %, l'actif augmentera de 0,5 %. Inversement, si le marché baisse de 1 %, l'actif ne baissera que de 0,5 %.
  - Si  $\beta = 0$  : L'actif est non corrélé avec les rendements du marché, ce qui signifie que les mouvements du marché n'affectent pas du tout l'actif.
  - Si  $\beta < 0$  : L'actif est inversement corrélé au marché. Par exemple, si  $\beta = -1$ , l'actif bouge dans la direction opposée à celle du marché. Si le marché monte de 1 %, l'actif baissera de 1 %, et vice versa.

**Définition 1.7 (Comonotonie)** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, avec pour fonctions de répartition marginales respectives  $F_1$  et  $F_2$ . On dit que le couple  $(X_1, X_2)$  est **comonotone** s'il existe une variable aléatoire (v.a)  $U$  suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ , telle que :

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)),$$

où  $\stackrel{d}{=}$  désigne l'égalité en loi.

Autrement dit,  $X_1$  et  $X_2$  peuvent être vus comme des fonctions croissantes d'une même source d'incertitude  $U$ .

**Définition 1.8 (Mesure de risque comonotone additive)** Une mesure de risque  $\rho$  est dite *comonotone additive* si, pour toutes variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  comonotones, on a :

$$\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2).$$

Cette propriété reflète le fait qu'aucune diversification n'est possible lorsque les risques évoluent de manière parfaitement coordonnée. C'est une condition importante dans le cadre des mesures de risque cohérentes.

## 1.4 Mesures de risque usuelles

### 1.4.1 Value at Risk

La VaR représente la perte potentielle maximale qu'un investisseur peut subir sur un actif ou un portefeuille, avec une probabilité donnée sûr une période déterminée. Autrement dit, il s'agit de la perte la plus importante qui pourrait être anticipée dans des conditions normales de marché pour un niveau de confiance  $\alpha \in [0, 1]$  et un horizon  $T$  de détention donnés (durée de temps sur laquelle on calcule la VaR). Nous pouvons définir la VaR comme suit :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$$

Ainsi, la VaR correspond au **quantile de niveau  $\alpha$**  de la distribution de  $X$ .

**Remarques :**

- La fonction quantile généralisée associée à la fonction de répartition  $F_X$  de la variable  $X$ , notée  $F_X^{\leftarrow}$ , est définie par :

$$F_X^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\}$$

Il s'agit d'une définition usuelle du quantile, notamment adaptée aux cas où  $F_X$  n'est pas strictement croissante (distributions discrètes, etc). Par conséquent, on peut écrire :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{\leftarrow}(\alpha)$$

- La VaR d'un portefeuille est déterminée par deux paramètres essentiels :
  1. Le choix de l'horizon temporel est crucial, car plus il est long, plus les pertes potentielles augmentent. Par exemple, si les rendements suivent une distribution normale, la VaR sur  $t$  jours s'obtient en multipliant la VaR journalière par la racine carrée de  $t$ .
  2. Le niveau de confiance, tel que 95% ou 99% , définit la probabilité que la VaR ne soit pas dépassée par les pertes du portefeuille ou de l'actif.

**Exemple :** Supposons que la distribution des gains et pertes liés à la détention d'un actif sur une période donnée suive une loi normale centrée réduite.

La VaR au seuil de 95% sur 1 jour, notée  $\text{VaR}(95\%, 1 \text{ jour})$ , est égale à 1 million d'euros. Cela signifie qu'il y a une probabilité de 95% que la perte sur cet actif ne dépasse pas 1 million d'euros sur un jour.

Graphiquement, la VaR à 1 jour avec un niveau de confiance de 95% peut être représentée comme suit :

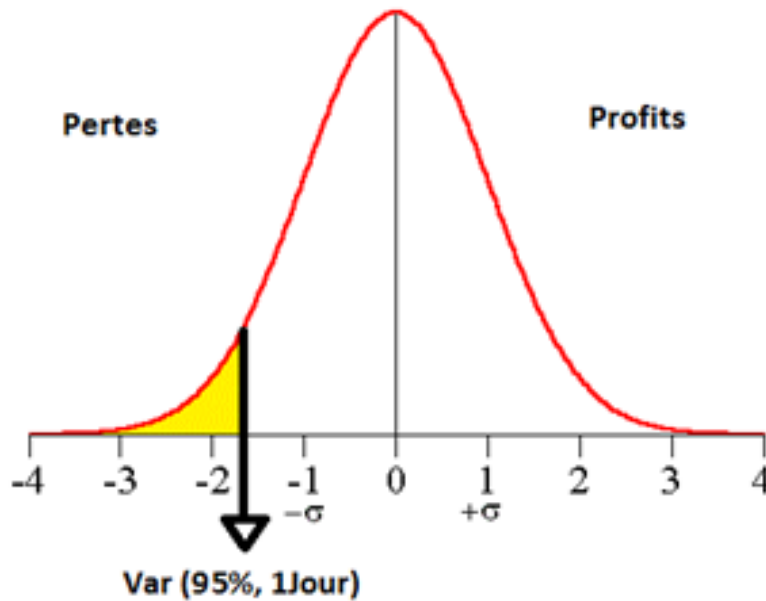


FIGURE 1.1 – Distribution des pertes simulées.

### Propriétés de la VaR

La Value-at-Risk vérifie les propriétés suivantes :

1. **Invariance par translation** :  $\forall X \in \mathcal{X}$  et  $\forall c \in \mathbb{R}$  on a :

$$\text{VaR}_\alpha(X + c) = \text{VaR}_\alpha(X) + c$$

En effet ;

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X + c) &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid P(X + c \leq t) \geq \alpha\} \\ &= \inf\{t' + c \mid P(X \leq t') \geq \alpha\} \quad (\text{par changement de variable } t = t' + c) \\ &= \inf\{t' \mid P(X \leq t') \geq \alpha\} + c \\ &= \text{VaR}_\alpha(X) + c \end{aligned}$$

2. **Homogénéité** :  $\forall X \in \mathcal{X}$  et  $\forall \lambda \geq 0$ , on a :

$$\text{VaR}_\alpha(\lambda X) = \lambda \text{VaR}_\alpha(X)$$

En effet ;

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(\lambda X) &= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\lambda X \leq t) \geq \alpha\} \\ &= \inf\{\lambda t' \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq t') \geq \alpha\} \quad (\text{en posant } t = \lambda t') \\ &= \lambda \inf\{t' \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(X \leq t') \geq \alpha\} \\ &= \lambda \text{VaR}_\alpha(X) \end{aligned}$$

3. **Monotonie** :  $\forall X, Y \in \mathcal{X}$ , on a :

$$X \leq Y \Rightarrow \text{VaR}_\alpha(X) \leq \text{VaR}_\alpha(Y)$$

En effet ;

$$\begin{aligned}
X \leq Y &\Rightarrow \forall t, P(X > t) \leq P(Y > t) \\
&\Rightarrow \{t \mid P(Y \leq t) \geq \alpha\} \subseteq \{t \mid P(X \leq t) \geq \alpha\} \\
&\Rightarrow \inf\{t \mid P(X \leq t) \geq \alpha\} \leq \inf\{t \mid P(Y \leq t) \geq \alpha\} \\
&\Rightarrow \text{VaR}_\alpha(X) \leq \text{VaR}_\alpha(Y)
\end{aligned}$$

**Proposition 2** *La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle n'est pas sous-additive.*

**Preuve.** Cette proposition peut être démontrée par un contre-exemple.

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de même distribution  $F$  telle que :

$$F_X(t) = F_Y(t) = \frac{1}{1+t}, \quad t \geq 0.$$

On doit montrer que :

$$\text{VaR}_\alpha(X + Y) > \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$$

On a :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \mid F_X(x) \geq \alpha\}$$

$$F_X(x) \geq \alpha \Rightarrow \frac{1}{1+x} \geq \alpha \Rightarrow 1+x \leq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow x \leq \frac{1}{\alpha} - 1.$$

Ainsi :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(Y) = \frac{1}{\alpha} - 1.$$

D'autre part, on a :

$$P(X + Y \leq t) = 1 - \frac{2}{t} - \frac{\log(1+t)}{(2+t)^2}, \quad t \geq 0.$$

Donc :

$$\text{VaR}_\alpha(X + Y) = F_{X+Y}^{-1}(\alpha).$$

On veut comparer  $\text{VaR}_\alpha(X + Y)$  à  $\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$ .

Puisque  $F$  est croissante, il suffit de comparer :

$$F_{X+Y}(\text{VaR}_\alpha(X + Y)) \quad \text{à} \quad F_{X+Y}(\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)).$$

On a :

$$F_{X+Y}(\text{VaR}_\alpha(X + Y)) = \alpha.$$

Et :

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)) &= F_{X+Y}(2\text{VaR}_\alpha(X)). \\
&= 1 - \frac{2}{2 + 2\text{VaR}_\alpha(X)} - \frac{2 \log(1 + 2\text{VaR}_\alpha(X))}{(2 + 2\text{VaR}_\alpha(X))^2} \\
&= 1 - \frac{1}{1 + \text{VaR}_\alpha(X)} - \frac{\log(1 + 2\text{VaR}_\alpha(X))}{2(1 + \text{VaR}_\alpha(X))^2} \\
&= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha} - 1} - \frac{\log\left(1 + 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\right)}{2\left(1 + \frac{1}{\alpha} - 1\right)^2} \\
&= \alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log\left(-1 + \frac{2}{1-\alpha}\right)}{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$= \alpha - \frac{(1 - \alpha)^2}{2} \cdot \frac{\log \frac{1+\alpha}{1-\alpha}}{1 - \alpha}.$$

Puisque cette expression est inférieure ou égale à  $\alpha$ , on obtient :

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(\text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)) &\leq F_{X+Y}(\text{VaR}_\alpha(X + Y)). \\ \Rightarrow \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y) &< \text{VaR}_\alpha(X + Y). \end{aligned}$$

Ainsi, la **VaR** n'est pas sous-additive.

**Proposition 3** *La VaR n'est pas une mesure de risque convexe.*

**Preuve.** En utilisant la proposition 1, on a la VaR est une mesure monétaire et homogène et comme elle n'est pas sous-additive donc elle n'est pas convexe.

**Proposition 4** : *Soit  $X$  une v.a à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Pour toute fonction  $g$  croissante et continue à gauche, on a :*

$$\text{VaR}_\alpha(g(X)) = g(\text{VaR}_\alpha(X)).$$

**Proposition 5** : *La VaR est comonotone additive.*

**Preuve.** Ce résultat est immédiat à l'aide de la proposition 3 donc pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , on a :

$$\text{VaR}_\alpha((F_1^{-1} + F_2^{-1})(U)) = (F_1^{-1} + F_2^{-1})(\text{VaR}_\alpha(U)).$$

**Exemple : Calcul de la VaR pour une variable gaussienne**

Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors on peut l'écrire sous forme suivante :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

La VaR au seuil  $\alpha$  est le seuil  $x_\alpha$  tel que :

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha$$

Cela revient à trouver le quantile d'ordre  $\alpha$  de la distribution de  $X$ .

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha, \quad \Phi \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\Rightarrow \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$\Rightarrow x_\alpha = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

Ainsi, la VaR est :

$$VaR_\alpha(X) = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

Supposons que les pertes  $X$  suivent une loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$ . La VaR au seuil  $\alpha$  est donnée par :

$$VaR_\alpha(X) = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha),$$

où  $\Phi^{-1}(\alpha)$  est le quantile  $\alpha$  de la loi normale centrée réduite.

- Si  $X \sim N(0, 1)$  et  $\alpha = 0.95$ , alors  $\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.645$ , donc :

$$VaR_{0.95}(X) = 0 + 1 \times 1.645 = 1.645.$$

Cela signifie qu'il y a 95% de chances que la perte ne dépasse pas 1.645.

- Si  $X \sim N(10, 4)$  (donc  $\mu = 10$ ,  $\sigma = 2$ ) et  $\alpha = 0.99$ , alors  $\Phi^{-1}(0.99) \approx 2.326$ , donc :

$$VaR_{0.99}(X) = 10 + 2 \times 2.326 = 14.652.$$

Ainsi, il y a 99% de chances que la perte ne dépasse pas 14.652.

## Avantages et inconvénients de la VaR

### Avantages :

La Value at Risk présente plusieurs avantages qui en font un outil de référence dans le domaine de la gestion des risques financiers :

1. **Quantification directe des pertes potentielles** : Contrairement aux mesures de risque traditionnelles comme la variance ou l'écart-type, qui évaluent la volatilité aux marchés, la VaR quantifie directement le montant des pertes potentielles sur un horizon défini. Elle offre ainsi une vision plus tangible du risque financier.
2. **Flexibilité méthodologique** : Contrairement à l'écart-type ou au bêta qui reposent strictement sur l'hypothèse de normalité des rendements, la VaR peut être estimée selon différentes méthodes (paramétrique, historique, simulation de Monte Carlo, théorie des valeurs extrêmes). Cette flexibilité permet d'adapter la mesure aux spécificités des actifs étudiés et de mieux capter les comportements extrêmes des marchés.
3. **Base pour d'autres mesures de risque** : La VaR constitue un point de départ pour d'autres indicateurs plus avancés, tels que l'Expected Shortfall (ou CVaR), qui pallient certaines limites de la VaR tout en s'inscrivant dans le même cadre conceptuel.

### Inconvénients :

La VaR présente plusieurs inconvénients qui limitent son efficacité dans certaines situations. Voici quelques-uns des principaux inconvénients de la VaR :

1. **Hypothèses simplificatrices** : La VaR repose souvent sur des hypothèses simplificatrices, comme la normalité des rendements des actifs financiers. Cela peut ne pas refléter les comportements réels des marchés, qui peuvent être plus complexes, avec des événements rares mais graves (queues de distribution lourdes).

2. **Pas d'information sur l'ampleur des pertes au-delà de la VaR** : La VaR donne une estimation du risque maximal dans un certain intervalle de confiance.
3. **Sensibilité aux événements extrêmes** : La VaR ne capture pas bien les événements extrêmes ou imprévus qui peuvent avoir un impact significatif sur les marchés financiers. Par exemple, des crises financières majeures peuvent dépasser les limites estimées par la VaR.
4. **Non-compréhension des corrélations entre actifs** : La VaR peut parfois sous-estimer le risque lorsque les corrélations entre les actifs financiers évoluent rapidement, comme c'est souvent le cas dans des situations de stress de marché. Pendant les crises, les actifs ont tendance à se corréliser fortement, ce qui augmente les risques de manière plus que proportionnelle par rapport aux estimations de la VaR.
5. **Sensibilité au choix de la période d'évaluation** : Le calcul de la VaR dépend de la période choisie pour les données historiques (par exemple, les rendements sur un an, un mois ou un jour). Le choix de cette période peut affecter considérablement les résultats, ce qui rend la VaR moins robuste.

En conclusion, bien que la VaR soit un outil utile dans la gestion des risques, elle présente une limite majeure : son manque de sous-additivité, ce qui signifie qu'elle ne garantit pas que la diversification réduit toujours le risque. De plus, elle ne fournit aucune information sur l'ampleur des pertes potentielles une fois son seuil dépassé.

Pour pallier à ces inconvénients, d'autres mesures de risque ont été développées, parmi ces mesures, les plus importantes sont la Conditional Value at Risk (CVaR) et la Tail Value at Risk (TVaR). Artzner et al.[1]

Pour remédier à ces défauts de la VaR, d'autres mesures ont été proposées. Nous en présentons trois très proches, dont l'idée commune est de quantifier la perte lorsque la VaR est dépassée.

### 1.4.2 Tail Value at Risk

La Tail Value at Risk (TVaR), se définit comme la moyenne intégrée des VaR pour tous les niveaux de confiance supérieurs à  $\alpha$ .

**Définition 1.9** *Pour une v.a  $X$  et un niveau de confiance  $\alpha \in ]0, 1[$ , la TVaR de niveau  $\alpha$  est donnée par :*

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du$$

Avec  $u = 1 - \epsilon$

Il est important de noter que la TVaR peut également être exprimée en fonction de la VaR de la manière suivante :

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E} [(X - VaR_\alpha(X))^+]$$

où  $(X - VaR_\alpha(X))^+ = \max(X - VaR_\alpha(X), 0)$  représente les excès de pertes.

En effet, Pour montrer cela, on effectue un changement de variable dans l'intégrale de la TVaR. En posant  $x = F_X^{-1}(p)$ , on obtient  $dp = f_X(x) dx$ . Cela permet de réécrire l'intégrale de la TVaR sous la forme suivante :

$$\int_\alpha^1 F_X^{-1}(p) dp = \int_{VaR_\alpha(X)}^\infty x f_X(x) dx.$$

Ici,  $F_X^{-1}(p)$  est la valeur  $x$  associée à  $p$ , et l'intégrale sur  $p$  de  $\alpha$  à 1 devient une intégrale sur  $x$ , allant de  $\text{VaR}_\alpha(X)$  à l'infini. On obtient ainsi :

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Cette expression peut être décomposée en deux parties : la première est simplement la VaR et la deuxième représente l'espérance conditionnelle des pertes au-delà de la VaR. Cela donne :

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} (x - \text{VaR}_\alpha(X)) f_X(x) dx.$$

Le second terme est l'espérance conditionnelle, et peut être réécrit ainsi :

$$\mathbb{E}[X \mid X > \text{VaR}_\alpha(X)] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\text{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} x f_X(x) dx - \text{VaR}_\alpha(X).$$

Finalement, en réarrangeant les termes, on obtient la relation suivante :

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X) + \mathbb{E}[X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X)].$$

### Propriétés de la TVaR

La TVaR vérifie les propriétés suivantes :

1. **Valeur en  $\alpha = 0$  :**

$$\text{TVaR}_0(X) = \mathbb{E}[X].$$

2. **Expression intégrale (pour  $\alpha \in [0, 1)$ ) :**

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \left( \mathbb{E}[X] - \int_0^\alpha \text{VaR}_\zeta(X) d\zeta \right). \quad (1.1)$$

Puisque  $\text{VaR}_\alpha(X)$  est croissante en  $\alpha$ , la TVaR l'est également. Ainsi :

$$\text{TVaR}_\alpha(X) \geq \text{TVaR}_0(X) = \mathbb{E}[X].$$

### Proposition 6 *La TVaR est cohérente*

Les propriétés d'invariance par translation et d'homogénéité positive découlent directement de celles de la VaR.

### Proposition 7 *La TVaR est la plus petite mesure de risque cohérente qui majore la VaR.*

Autrement dit, pour tout  $\alpha \in (0, 1)$  et toute v.a  $X$ , on a :

$$\text{TVaR}_\alpha(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X).$$

De plus, si  $\rho$  est une mesure de risque cohérente vérifiant  $\rho(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)$  pour tout  $X$ , alors :

$$\rho(X) \geq \text{TVaR}_\alpha(X).$$

### Proposition 8 *La TVaR est comonotone additive.*

**Preuve :** Ce résultat provient du fait que la TVaR est une somme de VaR, de plus la VaR est comonotone additive

### Proposition 9 *Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ , la TVaR au niveau $\alpha$ inclut un chargement de sécurité.*

**Preuve.** Pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , nous avons la relation suivante :

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X)] \geq \text{VaR}_\alpha(X).$$

### 1.4.3 Expected Shortfall (ES)

**Définition 1.10 ( Expected Shortfall (ES))** *L'Expected Shortfall (ES) de niveau  $\alpha$  est la perte moyenne au-delà de la VaR au niveau  $\alpha \in [0, 1]$ , soit :*

$$ES_\alpha(X) = E((X - VaR_\alpha(X))^+) = \mathbb{E}[X \mid X \geq VaR_\alpha(X)]$$

**Propriétés de  $ES_\alpha(X)$**

1.  $ES_\alpha(X + c) = ES_\alpha(X) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$
2.  $ES_\alpha(\lambda X) = \lambda ES_\alpha(X), \quad \forall \lambda > 0.$
3.  $\bar{E}(X) = (1 - \alpha)ES_\alpha(X) - \alpha ES_{(1-\alpha)}(-X).$

**Remarque :** La  $ES_\alpha$  est une mesure de risque cohérente.

### 1.4.4 Conditional Value at Risk

La valeur à risque conditionnelle (CVaR) représente la moyenne des pertes les plus extrêmes, celles qui dépassent le seuil de la VaR.

**Définition 1.11** *Soit une v.a intégrable  $X$  (représentant les pertes) sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et un niveau de confiance  $\alpha \in (0, 1)$ , la CVaR est donnée par :*

$$CVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}[X \mid X > VaR_\alpha(X)]$$

**Remarques :**

1. Pour les distributions continues :

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du = TVaR$$

(Moyenne intégrée des VaR aux niveaux  $u \geq \alpha$ ).

2. La CVaR est toujours supérieure ou égale à la VaR pour un même  $\alpha$  :

$$CVaR_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(X)$$

**Propriétés de la CVaR**

• **Sous-additivité :**

$$CVaR_\alpha(X + Y) \leq CVaR_\alpha(X) + CVaR_\alpha(Y)$$

**Remarque :** Encourage la diversification.

• **Cohérence :** Satisfait tous les axiomes des mesures de risque Artzner[2] (monotonie, homogénéité positive, invariance par translation, sous-additivité).

### 1.4.5 Comparaison entre les mesures de risques usuelles

**a. Propriétés mathématiques**

**Conclusion :** La CVaR et la TVaR sont des mesures cohérentes, contrairement à la VaR.

Propriété	CVaR/TVaR	VaR
Sous-additivité	✓ Oui	× Non (sauf cas particuliers)
Monotonie	✓ Oui	✓ Oui
Homogénéité positive	✓ Oui	✓ Oui
Invariance par translation	✓ Oui	✓ Oui
Mesure cohérente	✓ Oui	× Non

TABLE 1.1 – Comparaison des propriétés mathématiques entre CVaR/TVaR et VaR.

### b.Relation Entre CVaR, ES et TVaR

1. Si  $X$  est continu :

$$CVaR_\alpha(X) = TVaR_\alpha(X).$$

2. Si  $X$  est discret (ex : données empiriques) :

- La TVaR est définie comme l'espérance conditionnelle exacte.
- La CVaR peut nécessiter une interpolation autour de  $VaR_\alpha$ .

3.  $TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha}ES_\alpha$ .

### Exemple comparatif : VaR, CVaR et TVaR :

Nous considérons les pertes journalières d'un portefeuille (en millions €) sur 10 jours :

$$X = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5, 7, 10\}$$

pour un niveau de confiance :  $\alpha = 90\%$  (on s'intéresse aux 10% pires cas). On obtient :

Mesure	Formule	Valeur
<b>VaR</b> <sub>0.9</sub>	9ème valeur ordonnée	7 M€
<b>TVaR</b> <sub>0.9</sub>	$\mathbb{E}[X \mid X > 7]$	10 M€
<b>CVaR</b> <sub>0.9</sub>	$\mathbb{E}[X \mid X \geq 7]$	$\frac{7+10}{2} = 8.5$ M€

TABLE 1.2 – Les valeurs de mesures de risque

Interprétation des résultats :

- . **VaR** : 9ème valeur de la série ordonnée (car  $0.9 \times 10 = 9$ ).
- . **TVaR** : Moyenne des valeurs **strictement supérieures** à la VaR (ici uniquement 10).
- . **CVaR** : Moyenne des valeurs **supérieures ou égales** à la VaR (7 et 10).

## 1.5 Mesure de risque de Wang

La mesure de risque de Wang est une mesure de risque cohérente introduite par Shaun Wang (2000) qui repose sur l'utilisation d'une fonction de distorsion Wang[17] pour transformer les probabilités associées aux pertes financières. Elle généralise des mesures classiques comme la Value-at-Risk (VaR) et la Tail Value-at-Risk (TVaR).

### 1.5.1 Fonction de distorsion

**Définition 1.12** Une fonction de distorsion est une fonction croissante  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $g(0) = 0$  et  $g(1) = 1$ .

**Type et choix de fonction de distorsion :**

1. Fonction de distorsion affine :

Forme simple combinant transformation linéaire et non linéaire :

$$g(u) = \alpha u + (1 - \alpha)u^p, \quad \alpha \in (0, 1), \quad p > 0$$

- . Effet : Distorsion modérée des pertes.
- . Usage : Lorsque l'on veut équilibrer pertes normales et pertes importantes.

2. Fonction de distorsion exponentielle : Accentue ou atténué fortement selon la taille de la perte :

$$g(u) = 1 - e^{-\beta u}, \quad \beta > 0$$

- . Effet : Moins de poids aux événements extrêmes.
- . Usage : Pour valoriser les petits risques fréquents.

3. Fonction de distorsion Power Law (loi de puissance) : Accentuation très forte des événements rares :

$$g(u) = u^p, \quad p > 0$$

- . Effet : Amplification des pertes extrêmes.
- . Usage : Catastrophes, crises financières.

**Définition 1.13 (Mesure de Wang)** Soit  $X$  une v.a positive et  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction de distorsion. La **mesure de risque de Wang** associée à  $g$  est définie par :

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(1 - F_X(x)) dx.$$

où  $F_X$  est la fonction de répartition de  $X$ .

La mesure de Wang est une transforme les probabilités de survie  $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$  via  $g$  pour accentuer ou atténuer les risques extrêmes.

**Remarque :**

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(1 - F_X(x)) dx = \int_0^1 F_X^{-1}(1 - \alpha) dg(\alpha) = \int_0^1 \text{VaR}_{1-\alpha}(X) dg(\alpha).$$

**Remarques :**

1. **Cas de l'espérance** : Si  $g(q) = q$  (distorsion identité), alors

$$\rho_g(X) = \mathbb{E}[X].$$

2. **Comparaison avec l'espérance** : Si  $\forall q \in [0, 1], g(q) \geq q$ , alors

$$\rho_g(X) \geq \mathbb{E}[X].$$

3. **Monotonie en  $g$**  : Si  $\forall q \in [0, 1], g_1(q) \leq g_2(q)$ , alors

$$\rho_{g_1}(X) \leq \rho_{g_2}(X).$$

**Proposition 10 (Propriétés des mesures de Wang)** *Les mesures de risque de Wang  $\rho_g$  vérifient les propriétés suivantes pour toute fonction de distorsion  $g$  :*

1. **Homogénéité positive** :  $\forall \lambda \geq 0, \rho_g(\lambda X) = \lambda \rho_g(X)$
2. **Invariance par translation** :  $\forall c \in \mathbb{R}, \rho_g(X + c) = \rho_g(X) + c$
3. **Monotonie** :  $X \leq Y$  p.s.  $\Rightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y)$
4. **Sous-additivité** :  $\rho_g(X + Y) \leq \rho_g(X) + \rho_g(Y)$   
si et seulement si la fonction de distorsion  $g$  est concave sur  $[0, 1]$ .

### 1.5.2 Exemples de mesures de risque de Wang

Ci-dessous quelques mesures de risque de wang et les fonctions de distorsion associées :

**VaR au niveau  $\alpha$  :**

Si

$$g(x) = I_{\{x \geq 1-\alpha\}} \quad \text{où } 0 \leq \alpha < 1$$

Alors

$$\rho_{g_\alpha}(X) = VaR_\alpha(X)$$

En effet, Pour une valeur  $\alpha \in [0, 1]$  fixée, on obtient

$$g_\alpha(\bar{F}_X(x)) = I_{(\bar{F}_X(x) \geq 1-\alpha)}$$

On a :  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$F_X(x) < \alpha \iff F_X^{-1}(\alpha) > x$$

Donc

$$g_\alpha(\bar{F}_X(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < F_X^{-1}(\alpha), \\ 0, & \text{si } x \geq F_X^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

On obtient alors

$$\rho_{g_\alpha}(X) = \int_0^{F_X^{-1}(\alpha)} dx = F_X^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha(X).$$

**TVaR au-dessus du niveau  $\alpha$  :**

Si

$$g(x) = \min\left(\frac{x}{1-\alpha}, 1\right) \quad \text{où } 0 \leq \alpha < 1$$

Alors

$$\rho_{g_\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} VaR(X, 1-\epsilon) d\epsilon = TVaR(X, \alpha)$$

En effet, si on considère la fonction de distorsion

$$g_\alpha(x) = \min\left\{\frac{x}{1-\alpha}, 1\right\}, \quad \alpha \in [0, 1] \text{ fixé,}$$

on obtient

$$g_\alpha(\bar{F}_X(x)) = \min\left(\frac{1-F_X(x)}{1-\alpha}, 1\right),$$

ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$g_\alpha(\bar{F}_X(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < F_X^{-1}(\alpha), \\ \frac{1-F_X(x)}{1-\alpha}, & \text{si } x \geq F_X^{-1}(\alpha). \end{cases}$$

Donc, la mesure de risque de Wang est donnée par :

$$\rho_{g_\alpha}(X) = \int_0^{F_X^{-1}(\alpha)} dx + \frac{1}{1-\alpha} \int_{F_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} (1 - F_X(x)) dx.$$

Cela peut être simplifié en deux termes :

$$\rho_{g_\alpha}(X) = \int_0^{F_X^{-1}(\alpha)} dx + \frac{1}{1-\alpha} \int_{F_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} (1 - F_X(x)) dx.$$

$$\rho_{g_\alpha}(X) = F_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(X - F_X^{-1}(\alpha))^+],$$

ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$\rho_{g_\alpha}(X) = \text{TVaR}_\alpha(X).$$

Dans ce cas,  $g_\alpha$  est une fonction de répartition, correspondant à une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

**Proposition 11** *L'Expected Shortfall et la Conditional Tail Expectation ne sont pas des mesures de risque de Wang.*

**Remarque :** Comportement vis-à-vis des grandes pertes (distorsion des queues de distribution).

L'une des caractéristiques intéressantes de la mesure de risque de Wang est que la fonction de distorsion  $\varphi$  peut être choisie pour accentuer ou atténuer l'importance des pertes extrêmes (grandes pertes). Par exemple, une fonction de distorsion croissante de type exponentielle mettra davantage l'accent sur les grandes pertes. Cela permet à la mesure de risque de Wang de mieux capturer l'attitude de l'investisseur face aux événements extrêmes.

# Chapitre 2

## Estimation de la VaR

### 2.1 Introduction

Les stress tests sont des simulations qui permettent d'analyser l'impact de scénarios de crise extrême ou de conditions de marché particulièrement défavorables sur un portefeuille ou une institution financière. Leur objectif est d'évaluer la sensibilité aux chocs exceptionnels, en explorant des situations peu fréquentes mais potentiellement très dommageables.

Ce chapitre présente les principales méthodes de simulation utilisées pour estimer la Value at Risk (VaR). Trois approches sont développées : la simulation historique, qui s'appuie sur les rendements observés dans le passé; la simulation de Monte Carlo, qui génère des scénarios aléatoires à partir de modèles de probabilité; et enfin, la théorie des valeurs extrêmes, qui se concentre spécifiquement sur les pertes les plus rares et les plus sévères. Contrairement à la TVE, les simulations historique et de Monte Carlo offrent une plus grande souplesse dans la modélisation de portefeuilles complexes, notamment ceux intégrant des instruments dérivés comme les options.

### 2.2 Méthode de simulation historique

#### 2.2.1 Principe de la méthode

La méthode de simulation historique représente la méthode la plus simple des méthodes non-paramétriques. Elle a été introduite par Chase Manhattan[4] en 1995. Cette méthode se distingue par sa simplicité de mise en œuvre pour le calcul de la VaR. Contrairement aux méthodes paramétriques, elle ne nécessite aucune hypothèse sur la distribution ou l'indépendance des rendements.

Elle repose sur l'idée que les fluctuations passées des facteurs de risque sont un bon indicateur des fluctuations futures, en supposant une certaine stabilité de ces fluctuations. On dispose d'un historique de taille  $N$  (des données passées sur  $N$  périodes). On peut valoriser le portefeuille en utilisant les facteurs de risque observés à la date  $t_0$ , pour chaque date  $t = t_0 - i$ ,  $i = \overline{0, N}$ , en calculant une valeur potentielle du portefeuille. Ce qui permet d'obtenir  $N$  variations potentielles. Ainsi, à partir de l'historique, on construit implicitement une distribution empirique à partir de laquelle on peut extraire le quantile à  $\alpha$ . Pour cela, il faut : Ranger les  $N$  pertes(ou gains) potentielles par ordre croissant.

Prendre la valeur absolue de la  $[N(1 - \alpha)]$ -ième plus petite observation. Lorsque  $N(1 - \alpha)$  n'est pas un nombre entier, il faut alors calculer la VaR par interpolation linéaire.

Par exemple, si on dispose d'un échantillon de 1000 observations historiques de rendements et un niveau de confiance de 95%(donc  $\alpha = 0.05$ ), alors on calcule  $N(1 - \alpha) = 1000 \times (1 - 0.05) =$

$1000 \times 0.05 = 50$ , donc la VaR est donnée par la valeur du rendement qui correspond à la 50<sup>ème</sup> donnée observée. La simulation historique se distingue par sa simplicité (voir Best [3]). Pour la mettre en œuvre, il suffit de suivre les étapes suivantes :

1. **Collecte des données historiques** : On recueille les données historiques des valorisations des actifs du portefeuille pour calculer les fluctuations passées de son rendement.
2. **Simulation des rendements futurs** : On applique les rendements historiques à la valorisation actuelle du portefeuille pour simuler les gains et pertes potentiels.
3. **Classement et distribution des résultats** : On classe les gains et pertes simulés par ordre croissant et on construit un histogramme de la distribution.
4. **Détermination de la VaR** : On identifie le quantile correspondant au niveau de confiance souhaité, qui représente la VaR.

Les séries historiques des variations des prix représentent les séries des changements de valeurs des actifs. Considérons  $p$  actifs et notons  $X_j(t)$  la valeur de  $j^{me}$  actif à l'instant  $t$ . Soit  $\Delta$  la distribution des pertes ou des gains définie par la relation suivante :

$$\Delta(t) = \frac{X(t) - X(t-1)}{X(t-1)}, \quad t = t_0 - i, \quad i = \overline{0, N} \quad (2.1)$$

Les changements de valeurs du portefeuille sont calculés à partir de la relation suivante :

$$V(t) = \sum_{j=1}^p w_j \Delta_j(t)$$

Avec

$$\Delta_j(t) = \frac{X_j(t) - X_j(t-1)}{X_j(t-1)}, \quad t = t_0 - N, t_0, \quad i = \overline{0, N}$$

et  $w_j$  le poids de la  $j^{me}$  composante du portefeuille.

### 2.2.2 Exemple

Afin de mieux comprendre les étapes de cette méthode, considérons un portefeuille  $P$ , constitué de deux obligations  $O_1$  et  $O_2$  de poids respectifs  $w_1 = 5000$  et  $w_2 = 3000$ . Les cours historiques ainsi que les variations relatives des prix de ces deux obligations, pour une période de 20 jours, sont présentés dans le tableau suivant :

$t$	$O_1$	$O_2$	$\Delta_1(t)$ (%)	$\Delta_2(t)$ (%)	$V(t)$
-20	1120.12	2275.21			
-19	1118.54	2106.25	-0.0014	-0.0742	-2.296
-18	1115.80	1908.86	-0.0025	-0.0937	-2.936
-17	1118.86	2285.90	0.0027	0.1975	6.06
-16	1102.84	1956.14	-0.0143	-0.1442	-5.041
-15	1087.20	1845.11	-0.0142	-0.0567	-0.0042
-14	1084.10	1720.10	-0.0029	-0.0678	-2.179
-13	1059.78	1705.12	-0.0224	-0.0087	-1.381
-12	1059.79	2680.78	0.0000	0.5722	17.166
-11	1078.30	1927.96	0.0175	-0.2808	-7.549
-10	1104.61	2010.21	0.0244	0.0427	2.501
-9	1100.09	1487.56	-0.0041	-0.2601	-8.008
-8	1085.20	1396.41	-0.0135	-0.0613	-2.514
-7	1084.78	1275.21	0.0024	-0.0866	-2.478
-6	1089.90	1725.58	0.0047	0.3532	10.831
-5	1073.48	1575.45	-0.0151	-0.0870	-3.365
-4	1068.61	1210.25	-0.0045	-0.2318	-7.179
-3	1077.09	1195.23	0.0079	-0.0124	0.023
-2	1097.54	1320.36	0.0190	0.1047	4.091
-1	1089.98	1430.57	-0.0069	0.0835	2.16
0	1071.37	1480.35	-0.0171	0.0348	0.189

TABLE 2.1 – Tableau des données

Après calcul des  $\Delta_j$ , on peut appliquer les historiques des variations relatives aux prix de chaque actif. Alors la variation du portefeuille  $V(t)$  est calculée avec la formule suivante :

$$V(t) = w_1 \times \frac{\Delta O_1(t)}{100} + w_2 \times \frac{\Delta O_2(t)}{100}$$

Avec  $w_1 = 5000$  et  $w_2 = 3000$  :

$$V(t) = \frac{5000 \times \Delta O_1(t) + 3000 \times \Delta O_2(t)}{100}$$

Exemple pour  $t = -19$  :

$$V(-19) = \frac{5000 \times (-0.0014) + 3000 \times (-0.0742)}{100} = \frac{-7 - 222.6}{100} = -2.296$$

Maintenant puisque les séries des changements de valeur du portefeuille sont générées, la VaR peut être déterminée. En effet, il suffit de les classer suivant les quantiles adéquats.

$\alpha$ (en %)	V (t)
100	-8.008
95	-7.549
90	-7.179
85	-5.041
80	-3.365
75	-2.936
70	-2.514
65	-2.478
60	-2.296
55	-2.179
50	-1.381
45	-0.0042
40	0.023
35	0.166
30	0.189
25	2.16
20	2.501
15	4.091
10	6.06
5	17.166

TABLE 2.2 – Les pertes et les niveaux de confiance correspondant

- Pour les valeurs de  $V(t)$  sont triées par ordre croissant.
- La colonne de gauche ( $\alpha$ ) est ordonnée du niveau le plus sûr (100%) au plus risqué (5%)
- Les valeurs négatives représentent des pertes, les positives des gains.

Dans le cas du portefeuille  $P$ , la VaR pour un seuil de confiance de 95% est :

$$\text{VaR}_{95\%} = 7.549.$$

### Remarque

Une extension naturelle de la simulation historique consiste à calculer la CVaR (ou Expected Shortfall), qui mesure la perte moyenne au-delà du quantile de la VaR. Cette mesure est plus cohérente et sensible aux pertes extrêmes.

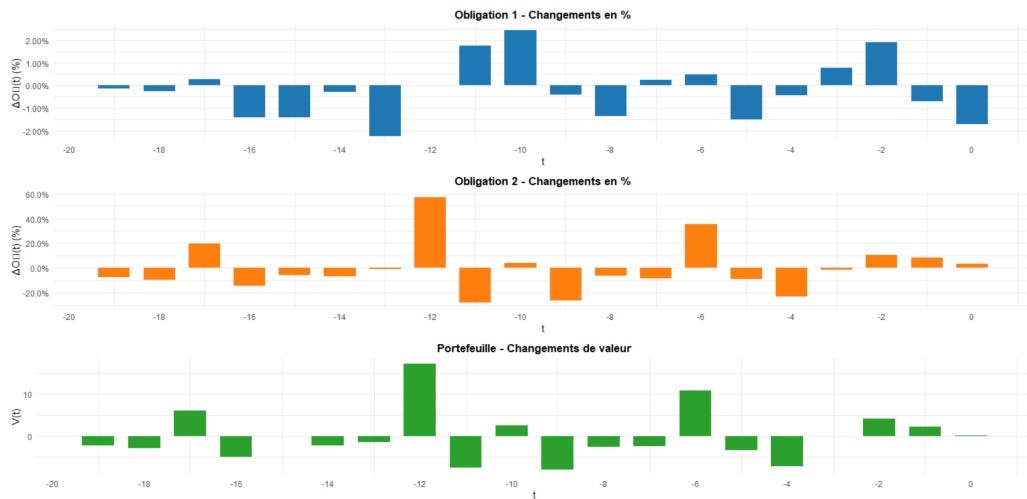


FIGURE 2.1 – Les séries historiques des variations des prix des obligations et  $V(t)$ .

À partir des graphiques précédents, nous pouvons remarquer la présence de l'effet de diversification. Cette méthode suppose alors que le futur peut être présenté à partir des historiques récents. Par conséquent, la taille des historiques a une grande importance dans cette approche. En pratique, la taille utilisée est souvent choisie par des gestionnaires praticiens.

### 2.2.3 Avantages et inconvénients

La méthode représente manifestement la plus intuitive des techniques de calcul de la VaR. La procédure est en effet simple et fournit des résultats faciles à interpréter. Elle n'exige aucune hypothèse sur la distribution des rendements du portefeuille. De plus, elle est capable de prendre en compte des instruments complexes comme les options. Cependant, cette méthode pose un problème au niveau du choix des historiques. Comme nous pouvons le remarquer, elle utilise souvent de courts historiques, ce qui n'est pas vraiment intéressant puisque l'estimation de la VaR manquerait de précision pour des historiques de grandes tailles. En effet, avec plus de données on aurait la possibilité d'observer les événements critiques, et spécialement les cas des pertes extrêmes qui peuvent parfois surgir durant la période qui va suivre. La théorie des valeurs extrêmes peut remédier à cette limitation, en modélisant spécifiquement les événements rares situés dans les queues de distribution.

## 2.3 Méthode de simulation Monte Carlo

La simulation Monte Carlo est une méthode numérique utilisée lorsqu'il est difficile de déterminer la distribution d'un échantillon par un raisonnement mathématique. Elle repose sur le tirage de nombres aléatoires, généralement des séries de nombres pseudo-aléatoires générées par des algorithmes spécialisés. Dans le contexte de la VaR, la méthode de simulation Monte-Carlo est une technique avancée qui combine les aspects des méthodes historique et paramétrique. Au lieu de se baser uniquement sur des données passées ou sur des hypothèses de distribution rigides, elle simule un grand nombre de scénarios futurs en utilisant des modèles statistiques pour les facteurs de risque. En d'autres termes, elle utilise des simulations informatiques pour générer des trajectoires de prix aléatoires, permettant d'approximer le comportement des prix financiers et d'évaluer la VaR à partir de la distribution des valeurs de portefeuille simulées. Les étapes clés de cette méthode sont les suivantes :

1. **Modélisation du portefeuille** : On définit un modèle mathématique qui décrit comment les gains et pertes du portefeuille sont affectés par les différents facteurs de risque.

2. **Choix des modèles de facteurs de risque** : On sélectionne des modèles statistiques (paramétriques) pour chaque facteur de risque, en tenant compte de leurs caractéristiques spécifiques.
3. **Estimation des paramètres** : On utilise les données historiques pour estimer les paramètres des modèles choisis.
4. **Simulation des scénarios** : On génère un grand nombre de scénarios de gains et pertes en simulant les valeurs des facteurs de risque à partir des modèles et des paramètres estimés.
5. **Classement et distribution des résultats** : On classe les gains et pertes simulés par ordre croissant et on construit un histogramme de la distribution.
6. **Détermination de la VaR** : On identifie le quantile correspondant au niveau de confiance souhaité, qui représente la VaR.

### 2.3.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode repose sur la génération de réalisations d'une variable aléatoire  $X$ , dont la fonction de répartition  $F_X$  est connue. Pour cela, on commence par produire des valeurs issues d'une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Il existe plusieurs méthodes pour générer de telles valeurs, notamment à l'aide de générateurs de nombres *pseudo-aléatoires*, disponibles dans tous les langages de programmation.

La simulation de Monte Carlo consiste ensuite à transformer ces valeurs uniformes en appliquant la fonction quantile associée à  $X$ , c'est-à-dire l'inverse de  $F_X$ , notée  $Q_X = F_X^{-1}$ . Ainsi, pour chaque valeur  $u$  générée selon une loi uniforme, on calcule  $Q_X(u)$ , qui représente une réalisation simulée de  $X$ .

Il est important de noter que la variable aléatoire transformée  $Q_X(U)$  suit la même loi que  $X$ . En effet :

$$\begin{aligned} \Pr[Q_X(U) \leq a] &= \Pr[F_X(Q_X(U)) \leq F_X(a)] \quad (\text{car } F_X \text{ est croissante}) \\ &= \Pr[U \leq F_X(a)] \quad (\text{par définition de } Q_X = F_X^{-1}) \\ &= F_X(a) \quad (\text{car } U \sim \mathcal{U}([0, 1])) \end{aligned}$$

Cela démontre que  $Q_X(U) \sim X$ , c'est-à-dire que la variable transformée suit bien la même distribution que  $X$ .

La méthode de simulation Monte Carlo a été adoptée par Bankers Trust dans le cadre de son système RAROC (*Risk Adjusted Return On Capital*), une approche introduite dans les années 1970. L'objectif principal du RAROC est de fournir un indicateur permettant de comparer la performance d'activités ou d'instruments financiers présentant des niveaux de risque différents. L'estimation de la VaR par la méthode de Monte Carlo repose sur la simulation des facteurs de risque, en supposant qu'ils suivent une loi de distribution admissible, généralement calibrée à partir de données historiques. Cette méthode consiste à valoriser le portefeuille en appliquant ces facteurs simulés, puis à extraire le quantile des pertes simulées, de manière analogue à la méthode de simulation historique. La différence majeure réside dans le fait que la simulation historique utilise les rendements effectivement observés dans le passé, tandis que la simulation Monte Carlo génère des rendements simulés à partir d'un modèle probabiliste.

#### 1. Cas d'un seul facteur (portefeuille uniactif)

##### Hypothèses :

- Portefeuille composé d'un seul actif (ex : action unique).
- Rendement suit une loi normale univariée :

$$\delta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

## 2. Cas de plusieurs facteurs (portefeuille multiactifs)

### Hypothèses :

- Le portefeuille contient  $n$  actifs.
- Rendements  $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(n)})$  suivent une loi normale multivariée :

$$\delta \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

où :

- .  $\delta$  est le vecteur des rendements simulés,
- .  $\boldsymbol{\mu}$  est le vecteur des moyennes des rendements historiques,
- .  $\boldsymbol{\Sigma}$  est la matrice de covariance des rendements.
- $w$  est le vecteur des poids du portefeuille, tel que :

$$\sum_{j=1}^p w_j = 1$$

- $V_0$  est la valeur initiale du portefeuille.

## Rendement du portefeuille

Le rendement simulé du portefeuille est donné par :

$$\Delta_p = \mathbf{w}^\top \delta$$

où  $w^T$  est le vecteur transposé de  $w$ .

## Valeur simulée et perte

La valeur simulée du portefeuille est :

$$V(t) = V_0 \cdot (1 + \Delta_p)$$

La perte simulée est :

$$L = V_0 - V = -V_0 \cdot \Delta_p$$

avec  $V_0 =$  valeur initiale du portefeuille.

## Simulation Monte Carlo

On effectue  $n$  simulations indépendantes :

$$(\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(n)}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

On calcule les pertes correspondantes de chaque  $\delta^i$  :

$$L^{(i)} = -V_0 \cdot (\mathbf{w}^\top \delta^{(i)})$$

avec  $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$  (vecteur des rendements moyens)

$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$  (matrice de covariance)

## Calcul de la VaR

La VaR au niveau de confiance  $\alpha$  (par exemple  $\alpha = 95\%$ ) est le quantile  $\alpha$  de la distribution empirique des pertes simulées :

$$\text{VaR}_\alpha = \text{Quantile}_\alpha \left( (L^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(n)}) \right)$$

### 2.3.2 Exemple

1. Le portefeuille est composé d'un seul actif.
2. Les rendements de l'actif sont supposés suivre une loi normale, avec une moyenne et une volatilité estimées à partir de données historiques.
3. On simule les rendements futurs sur un jour. Niveau de confiance :  $\alpha = 90\%$ .

Ce code implémente une simulation de Monte Carlo sous l'hypothèse de pour estimer la VaR d'un portefeuille financier. On considère Un portefeuille de valeur initiale  $V_0 = 1.000.000$  € est exposé à un actif dont les rendements journaliers suivent une loi normale  $\mu = 0.0005$  et  $\sigma = 0.02$  sur 252 jours. L'objectif est de quantifier le risque de perte extrême sur un jour en utilisant la VaR au seuil de 90%.

```

1  # Paramètres
2  set.seed(123) # Pour reproductibilité
3  n_simulations <- 10000 # Nombre de simulations
4  confidence_level <- 0.90
5  initial_value <- 1e6 # Valeur initiale du portefeuille (1 million)
6
7  # Données historiques (exemple fictif de rendements)
8  returns <- rnorm(252, mean = 0.0005, sd = 0.02) # 252 jours de bourse
9  # Estimation des paramètres
10 mu <- mean(returns)
11 sigma <- sd(returns)
12 # Simulation des rendements futurs
13 simulated_returns <- rnorm(n_simulations, mean = mu, sd = sigma)
14 # Affichage des paramètres estimés
15 cat("Paramètres estimés pour la distribution normale:\n")
16 cat(" Moyenne () =", round(mu, 6), "\n")
17 cat(" Écart-type () =", round(sigma, 6), "\n")
18 cat(" Variance (²) =", round(sigma^2, 6), "\n\n")
19 # Simulation des pertes
20 simulated_values <- initial_value * (1 + simulated_returns)
21 simulated_losses <- initial_value - simulated_values
22 # Calcul de la VaR
23 VaR_90 <- quantile(simulated_losses, probs = confidence_level)
24 # Résultat
25 cat("VaR Monte Carlo (90%) :", round(VaR_90, 2), "\n")

```

La VaR à 90% est égale à 23791.1 €, cela signifie que, sur la base des 10 000 simulations Monte Carlo et sous l'hypothèse de rendements normalement distribués, il y a 10% de chance que le

portefeuille subisse une perte supérieure ou égale à 23791.1 € sur une seule journée .  
Le résultat des paramètres estimés :  $\mu = 0.000256$  ,  $\sigma = 0.018785$  et  $\sigma^2 = 0.000353$ .

**Cas plusieurs facteurs** On peut généraliser cette approche à un portefeuille composé de plusieurs actifs et à simuler une distribution conjointe des rendements. Voici comment adapter la simulation de la Value at Risk (VaR) par la méthode de Monte Carlo pour un portefeuille composé de plusieurs actifs :

1. Utiliser une matrice de rendements historiques pour tous les actifs.
2. Estimer la moyenne vectorielle  $\mu$  et la matrice de covariance  $\sigma$  des rendements.
3. Simuler des rendements multivariés avec une distribution normale (fonction `mvrnorm` du package MASS).
4. Définir les poids du portefeuille.
5. Calculer la distribution simulée des pertes du portefeuille.

Le code correspondant permet de calculer la VaR à 95% pour un portefeuille financier composé des rendements journaliers de 3 actifs des poids respectifs  $w_1 = 40\%$ ,  $w_2 = 30\%$ ,  $w_3 = 30\%$  sur 252 jours, en utilisant une simulation Monte Carlo. Il estime la moyenne et la matrice de covariance des rendements d'actifs à partir de données historiques. Ensuite, un grand nombre de scénarios de rendements futurs sont simulés pour ces actifs en utilisant une distribution normale multivariée, puis calcule les rendements et les pertes du portefeuille pour chaque scénario.

```

1  # Chargement du package nécessaire
2  library(MASS)
3
4  # Paramètres
5  set.seed(123)
6  n_simulations <- 10000
7  confidence_level <- 0.95
8  initial_value <- 1e6
9  # Données fictives : rendements journaliers de 3 actifs sur 252 jours
10 n_assets <- 3
11 returns_matrix <- matrix(rnorm(252 * n_assets, mean = 0.0005, sd = 0.02), ncol = n_assets)
12 # Poids du portefeuille (doivent somme = 1)
13 weights <- c(0.4, 0.3, 0.3)
14 # Estimation des paramètres
15 mu <- colMeans(returns_matrix)
16 Sigma <- cov(returns_matrix)
17 # Simulation des rendements multivariés
18 simulated_returns <- mvrnorm(n = n_simulations, mu = mu, Sigma = Sigma)
19 # Calcul des rendements du portefeuille simulé
20 portfolio_returns <- simulated_returns %*% weights
21 # Simulation des pertes
22 simulated_values <- initial_value * (1 + portfolio_returns)
23 simulated_losses <- initial_value - simulated_values
24 # Calcul de la VaR
25 VaR_95 <- quantile(simulated_losses, probs = confidence_level)
26 # Résultat
27 cat("VaR Monte Carlo (95%) pour un portefeuille multi-actifs :", round(VaR_95, 2), "\n")

```

VaR Monte Carlo (95%) pour un portefeuille multi-actifs est estimée à 17381,72 €. Cela signifie que, selon les 10000 simulations effectuées et en supposant que les rendements des actifs suivent une distribution normale multivariée, il existe une probabilité de 5% que la perte quotidienne du portefeuille soit au moins égale à 17381,72 €.

### 2.3.3 Avantages et inconvénients

#### Avantages

1. **Flexibilité et Adaptabilité** : Elle permet une grande flexibilité dans le choix des modèles statistiques des facteurs de risque, pouvant aller de distributions normales à des modèles plus complexe.
2. **Précision Potentielle** : La précision des résultats s'améliore significativement en augmentant le nombre de scénarios simulés.
3. **Gestion des Non-Linearités** : Un atout majeur est sa capacité à gérer des instruments financiers non linéaires, comme les options, qui peuvent être incluses sans difficulté particulière dans le portefeuille, contrairement à d'autres méthodes (comme la simulation historique directe).

#### Inconvénients

1. **Exigences en Temps et Puissance de Calcul** : C'est la principale limitation. Pour un actif dépendant de  $n$  facteurs de risque avec  $M$  simulations, le nombre total de simulations nécessaires est de  $nM$ . Si, de plus, la réévaluation du portefeuille (en particulier pour des instruments complexes) implique elle-même des simulations (par exemple, pour valoriser des options à chaque pas), le volume de calcul devient immense, rendant la méthode potentiellement très lente.
2. **Complexité des distributions jointes multivariés** : La construction de distributions de probabilité conjointes pour un grand nombre de composantes de marché (au-delà de 4) est complexe. Cette difficulté s'accroît particulièrement lorsque les variables sont fortement corrélées.

## 2.4 Méthode de la TVE pour calculer la VaR

La **théorie des valeurs extrêmes(TVE)** est considérée comme l'approche la plus pertinente pour modéliser les événements rares où les risques sont assez importants, puisqu'elle fournit un fondement théorique à partir duquel on peut construire des modèles statistiques décrivant les événements extrêmes. Elle combine la **distribution généralisée des valeurs extrêmes(GEV :Generalized Extreme Value)** pour les maxima de blocs et la **distribution de Pareto généralisée(GPD :Generalized Pareto Distribution)** pour les excès au-dessus d'un seuil. Elle consiste à analyser les occurrences qui présentent en théorie, des fréquences très faibles. L'objectif final est le calcul de la **VaR** et son application en finance.

### 2.4.1 Introduction à la méthode TVE

#### La loi GEV

Le résultat de base de la TVE consiste à décrire la loi asymptotique du maximum de  $n$  variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). La forme de cette loi (notée GEV) dépend d'un seul paramètre qui permet de spécifier le comportement de la queue de la loi considérée. Ce paramètre est l'indice des valeurs extrêmes (noté  $\xi$ ).

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de fonction de répartition  $F$ . Pour étudier le comportement des évènements extrêmes, on adopte une approche simplifiée en considérant la variable aléatoire  $M_n$  définie par :

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$

Ainsi,

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = [F(x)]^n$$

Cependant, la fonction de répartition  $F$  n'est pas toujours connue, et parfois l'utilisation de la loi des statistiques d'ordre aboutissent à des calculs compliqués. C'est la raison pour laquelle nous nous intéresserons plus au comportement asymptotique (résultat de base de la TVE) de la variable aléatoire  $M_n$ , connu sous le nom du théorème de **Fisher-Tippett(1928)**. Le théorème des valeurs extrêmes permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes.

**Théorème 1 (Fisher-Tippett (1928), Gnedenko (1943)).** Soient  $X_1, \dots, X_i, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes et de même loi de probabilité  $F$ . S'il existe deux constantes de normalisation  $a_n > 0$  et  $b_n$  et  $H$  est une loi non dégénérée tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left[ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] = H(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

c'est à dire

$$[F(a_n x + b_n)]^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H(x)$$

Alors  $H$  est du même type que l'une des lois suivantes :

- **Fréchet :**

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0).$$

- **Weibull :**

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0).$$

- **Gumbel :**

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ces trois lois de probabilité sont appelées lois des valeurs extrêmes. Le paramètre  $\alpha$  détermine le comportement de la queue de distribution. Pour la preuve de ce théorème, nous renvoyons à Embrechts et al.[6] ou Resnick[14].

### Distribution généralisée des valeurs extrêmes

Grâce aux travaux de Von Mises [11] et Jenkinson [9], il est possible de rassembler les trois familles de lois Weibull, Gumbel et Fréchet en une seule famille paramétrique ( $H_\xi, \xi \in \mathbb{R}$ ) dite distribution généralisée des valeurs extrêmes (*Generalized Extreme Value* ou GEV).

**Définition 2.1** La fonction de répartition de  $H_\xi$  est :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(- (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{si } 1 + \xi x > 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Le paramètre  $\xi$  est appelé l'indice de queue.

Plus l'indice  $\xi$  est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important.

$\xi$  est l'inverse au signe près du paramètre  $\xi$  qui apparaît dans les lois de Fréchet et de Weibull ; le cas intermédiaire  $\xi = 0$  correspond à la loi de Gumbel qui peut être considérée comme une loi de transition entre les deux autres lois.

Nous retrouvons la distribution de :

- **Fréchet** :  $\xi = \alpha^{-1} > 0$
- **Weibull** :  $\xi = -\alpha^{-1} < 0$
- **Gumbel** :  $\xi = 0$

### Remarque 1.2.

1. La loi de Weibull peut s'écrire  $\Psi_\xi(x) = H_{\frac{1}{\xi}}(-\xi(x+1))$  ; si  $X$  suit une loi de Weibull de paramètre  $\xi < 0$ , alors  $-\xi(X+1)$  suit la loi des valeurs extrêmes généralisée de paramètre  $\alpha = -\frac{1}{\xi}$ .
2. La loi de Gumbel correspond à  $H_0$ , i.e., la loi GEV de paramètre  $\alpha = 0$ .
3. La loi de Fréchet peut s'écrire  $\Phi_\xi(x) = H_{\frac{1}{\xi}}(\xi(x-1))$  ; si  $X$  suit une loi de Fréchet de paramètre  $\xi > 0$ , alors  $\xi(X-1)$  suit la loi des valeurs extrêmes généralisée de paramètre  $\alpha = \frac{1}{\xi}$ .

Dans le cas générale on a :

$$H_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \exp \left( - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right) \quad (2.2)$$

La fonction est définie sur l'ensemble  $\left\{ x : 1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} > 0 \right\}$  avec  $\mu, \sigma$  et  $\xi$  sont respectivement les paramètres de position, d'échelle et de forme  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

### Lois GPD

En 1997, Artzner et al.[1] ont proposé une approche innovante pour la modélisation des risques, privilégiant l'utilisation d'un large volume de données excédant un seuil élevé  $u$ , tout en soulignant l'importance d'un choix de seuil qui assure la qualité des estimateurs. En parallèle, l'approche des dépassements de seuil (POT), introduite par Pickands en 1975[13], est devenue une méthode centrale en TVE. Contrairement à la méthode des maxima de blocs, POT utilise toutes les observations ("excès") qui dépassent un seuil très élevé. Cette approche, qui repose sur la Distribution de Pareto Généralisée (GPD), permet une analyse asymptotique plus complète des phénomènes extrêmes en exploitant davantage de données.

### Distribution des excès

La distribution des excès (peak over threshold) est un concept qui modélise le comportement d'une variable aléatoire  $X$  au-delà d'un seuil  $u$  fixé.

**Définition 2.2** *Distribution des excès* Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$ . La distribution des excès au-dessus du seuil  $u$  a pour fonction de répartition conditionnelle

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2.3)$$

pour  $0 \leq y < x_F - u$ , où  $y = x - u$  les valeurs qui dépassent le seuil  $u$  et  $x_F \leq \infty$  représente la borne supérieure du support de  $F$ .

La relation donnée pour la fonction  $F_u(y)$  est exprimée en fonction de  $F$  comme suit :

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2.4)$$

**Définition 2.3** La fonction moyenne des excès d'une variable aléatoire  $X$  d'espérance finie et  $u$  une variable positive est donnée par :

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u \mid X > u).$$

$e(\cdot)$  représente la fonction des excès moyens.

Ainsi, pour un seuil  $u$ ,  $e(u)$  désigne la moyenne des excès au delà de  $u$ . la fonction moyenne des excès empirique comme un estimateur empirique de la fonction moyenne des excès . L'estimateur est donné par

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u) I_{\{X_i > u\}}}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}}$$

où  $I_{\{X_i > u\}}$  est la fonction indicatrice valant 1 lorsque  $X_i > u$  et 0 sinon.

### Distribution de Pareto Généralisée

**Définition 2.4** La fonction de répartition de la GPD est donnée par :

$$G_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

pour  $0 \leq y \leq (x_F - u)$ . Par changement de variable  $x = u + y$ , on obtient l'expression directe de la GPD en fonction de  $x$  :

$$G_{\xi, \sigma}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi(x - u)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}.$$

où  $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$  est le point terminal de  $F$  et  $G_{\xi, \sigma(u)}(y)$  est la fonction de répartition de la loi de Pareto généralisée.

ou bien

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp(-x / \beta), & \xi = 0, \end{cases}$$

où  $\beta > 0$ , avec  $x \geq 0$  si  $\xi \geq 0$ , et  $0 \leq x \leq -\beta / \xi$  si  $\xi < 0$ .

Les paramètres  $\xi$  (forme) et  $\beta$  (échelle) caractérisent respectivement la forme et l'échelle de la distribution.

Le résultat principal est contenu dans le théorème suivant.

**Théorème 2** (Embrechts [6] et Pickands [13])

La fonction de distribution  $F$  de la variable aléatoire  $X$  appartient au domaine d'attraction de la distribution des valeurs extrêmes généralisée  $H_\xi$  ( $\xi \in \mathbb{R}$ ) si et seulement s'il existe une fonction strictement positive  $\delta$  telle que la fonction de distribution des excès  $F_u$  de  $X$  par rapport au seuil  $u < x_F$  converge uniformément vers une distribution de Pareto généralisée  $G_{\xi, \delta(u)}$  lorsque  $u$  tend vers  $x_F$ . Formellement :

$$F \in D(H_\xi) \iff \lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0 < y < x_F - u} |F_u(y) - G_{\xi, \delta(u)}(y)| = 0$$

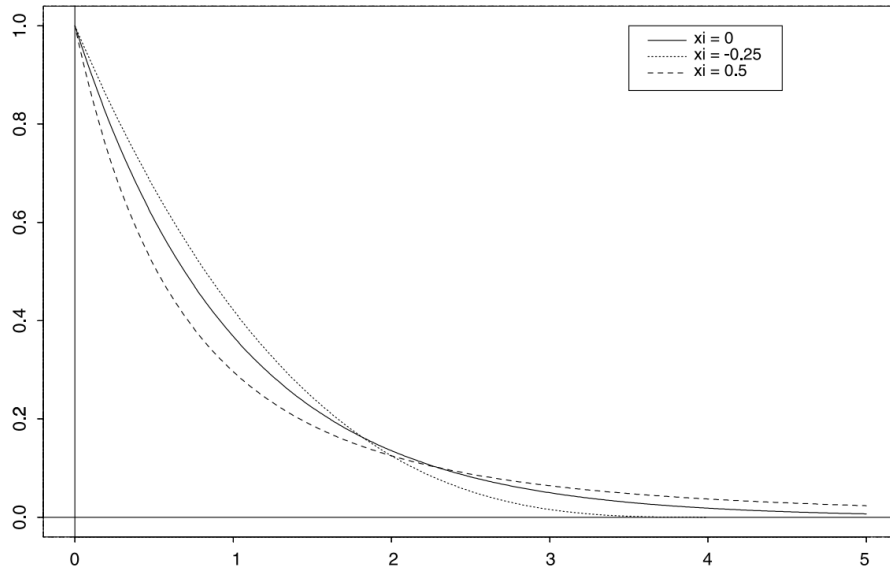


FIGURE 2.2 – Densités de la loi de Pareto généralisée (GPD) pour différents paramètres  $\xi$  et  $\beta = 1$ .

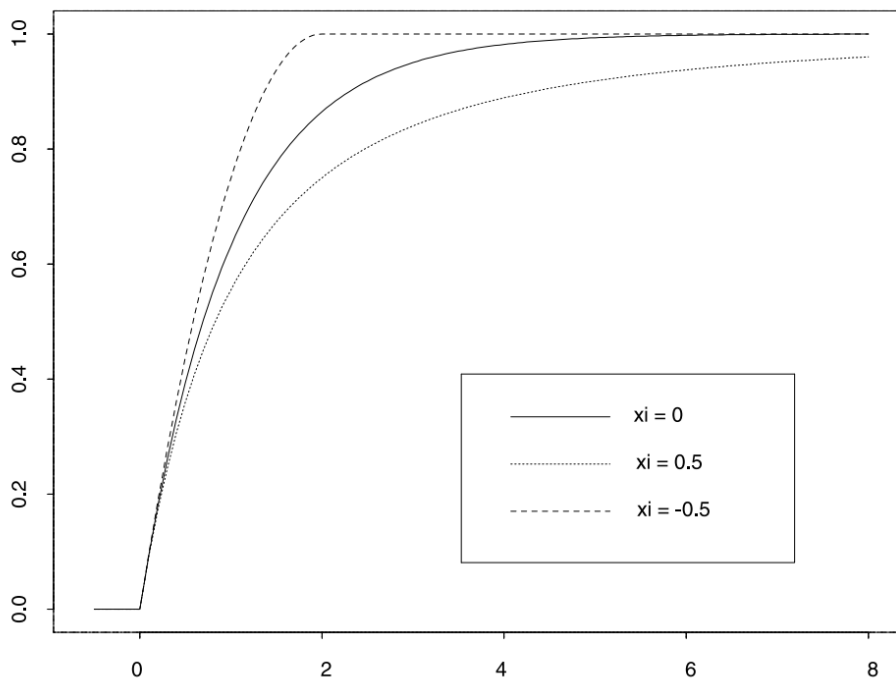


FIGURE 2.3 – GPD pour différents paramètres  $\xi$  avec  $\beta = 1$ .

### 2.4.2 Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres de la distribution des valeurs extrêmes peut être réalisée selon différentes approches méthodologiques. Parmi les plus notables, on distingue : l'estimation de l'indice de queue, la méthode des moments, la méthode du seuil, et la méthode du maximum de vraisemblance.

Une catégorie importante d'estimateurs a été spécifiquement développée pour estimer le paramètre  $\xi$ . Parmi ceux-ci, on peut citer les estimateurs de Pickands [13], Hill [8], et Dekkers-Einmahl-De Haan [5], qui constituent des exemples emblématiques d'estimateurs non paramé-

triques. Ces méthodes sont particulièrement précieuses car elles permettent d'estimer  $\xi$  sans recourir à des hypothèses strictes sur la distribution sous-jacente des données, ce qui est essentiel dans le cadre de l'analyse des valeurs extrêmes.

### Estimateur de Pickands

L'estimateur introduit par Pickands (1975)[13] repose sur le calcul de certains quantiles et permet l'estimation du paramètre  $\xi \in \mathbb{R}$  sans restriction à un domaine d'attraction particulier. Soit  $k = k_n$  une suite d'entier, elle est dite intermédiaire si elle vérifie :  $\lim_{n \rightarrow \infty} k = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0$

**Définition 2.5** L'estimateur de Pickands du paramètre  $\xi \in \mathbb{R}$ , noté  $\hat{\xi}_k^P$ , est défini par :

$$\hat{\xi}_k^P = \frac{1}{\log 2} \log \left( \frac{X_{(k)} - X_{(2k)}}{X_{(2k)} - X_{(4k)}} \right)$$

Il convient de noter que cet estimateur fait appel à la statistique d'ordre  $X_{(4k)}$ , ce qui implique que l'indice  $k$  doit satisfaire la condition  $k < \frac{n}{4}$  afin de garantir la validité du calcul.

#### Propriétés :

1. Convergence :  $\hat{\xi}_{k,n}^P$  sous certaines condition sur la suite  $K$  et la distribution  $F$  on a la convergence est convergent
2. Normalité asymptotique :

$$\left( \hat{\xi}_{k,n}^P - \xi \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, \sigma^2(\xi) \right)$$

avec variance asymptotique :

$$\sigma^2(\xi) = \frac{\xi^2(2^{2\xi+1} + 1)}{[2(2^\xi - 1) \ln 2]^2}$$

### Estimateur de Hill

L'estimateur de Hill (1975) [8] est l'un des estimateurs les plus dominant dans les applications de la TVE. Pour  $\xi > 0$ , l'estimateur de Hill est défini par :

$$\hat{\xi}_{k,n}^H = \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^n (\ln X_{(i,n)} - \ln X_{(n-k+1,n)}) \quad (2.5)$$

#### Propriétés

1. Si  $k \rightarrow \infty$  et  $k/n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\hat{\xi}_{k,n}^H \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$$

2. Si  $k/\ln(\ln n) \rightarrow \infty$  et  $k/n \rightarrow 0$ ,

$$\hat{\xi}_{k,n}^H \xrightarrow{\text{p.s.}} \xi$$

3. Sous les conditions de second ordre de la distribution  $F$ ,

$$\sqrt{k} \left( \hat{\xi}_{k,n}^H - \xi \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \xi^2)$$

### Estimateur des moments (Dekkers-Einmahl-De Haan)

L'estimateur des moments Dekkers-Einmahl-De Haan(1989)[5] étend l'estimateur de Hill à tout  $\xi \in \mathbb{R}$  :

$$\hat{\xi}_{k,n}^D = H_k^{(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(H_k^{(1)})^2}{H_k^{(2)}} \right)^{-1} \quad (2.6)$$

avec les moments empiriques :

$$H_k^{(1)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\ln X_{(n-i+1,n)} - \ln X_{(n-k,n)})$$

$$H_k^{(2)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\ln X_{(n-i+1,n)} - \ln X_{(n-k,n)})^2$$

### Propriétés

1. Valide pour  $\xi > 0$  (queues lourdes) et  $\xi < 0$  (queues légères)
2. **Convergence** : Sous des conditions appropriées sur  $k$ ,

$$\sqrt{k} \left( \hat{\xi}_{k,n}^D - \xi \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, v(\xi))$$

où  $v(\xi)$  est la variance asymptotique.

## 2.4.3 Estimation des quantiles extrêmes

### Avec la GPD

La méthode **POT** repose sur le théorème de **Balkema-de Haan-Pickands** pour estimer le quantile extrême  $q_{1-p}$ . L'estimateur de ce quantile est obtenu en inversant la fonction de répartition de la loi de Pareto généralisée (GPD) et en estimant ses paramètres à partir des observations supérieures au seuil  $u$ . Soit  $q_p$  le quantile de la distribution originale  $F$  correspondant à la probabilité  $p$  (c'est-à-dire  $F(q_p) = p$ ). Pour des valeurs de  $p$  très proches de 1, nous pouvons utiliser la GPD. Soit  $F$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ . On définit :

1. En termes de **fonction de survie**  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  :

$$\bar{F}_u(x - u) = P(X > x \mid X > u) = \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(u)}, \quad x \geq u \quad (2.7)$$

2. On en déduit la **décomposition fondamentale** de la fonction de survie :

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(u) \cdot \bar{F}_u(x - u), \quad x \geq u. \quad (2.8)$$

- La probabilité de dépassement du seuil  $u$  est estimée par :

$$\hat{\bar{F}}(u) = \frac{N_u}{N} \quad (2.9)$$

où :

- .  $N$  = nombre total d'observations
- .  $N_u$  = nombre d'observations  $> u$

- Sous l'hypothèse GPD, la fonction de survie des excès  $\bar{F}_u$  est modélisée par une loi de Pareto généralisée :

$$\bar{F}_u(z) = \left(1 + \xi \frac{z}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \quad \text{pour } \xi \neq 0 \quad (2.10)$$

Le quantile  $q_p$  peut être estimé par :

$$\begin{cases} \hat{q}_p = \hat{u} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[ \left(\frac{N_u}{N}(1-p)\right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] & \text{pour } \xi \neq 0 \\ \hat{q}_p = \hat{u} - \hat{\sigma} \ln \left(\frac{N_u}{N}(1-p)\right) & \text{pour } \xi = 0 \end{cases}$$

où :

- .  $\hat{u}$  : seuil estimé
- .  $\hat{\sigma}$  : paramètre d'échelle estimé
- .  $\hat{\xi}$  : paramètre de forme estimé
- .  $N$  : nombre total d'observations
- .  $N_u$  : nombre d'observations au-dessus du seuil  $u$
- .  $p$  : probabilité associée au quantile ( $p \rightarrow 1$ )

On déduit que :

$$\text{VaR}_\alpha = \begin{cases} \hat{u} - \hat{\sigma} \ln \left(\frac{N_u}{N}(1-\alpha)\right) & \text{pour } \xi = 0 \\ \hat{u} - \hat{\sigma} \ln \left(\frac{N_u}{N}(1-\alpha)\right) & \text{pour } \xi = 0 \end{cases}$$

### Avec la GEV

La théorie des valeurs extrêmes permet d'estimer des quantiles élevés. Pour un niveau de confiance  $\alpha$  nous avons :

$$H(q_p) = \alpha$$

où  $\text{VaR}_E$  représente l'estimateur extrême de la VaR. La fonction  $H$  pour la GPD s'écrit :

$$H(q_p) = \exp \left( - \left[ 1 + \xi \left( \frac{\text{VaR}_E - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right) \quad (2.11)$$

On résout  $H(q_p) = \alpha$  :

Si  $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} \exp \left( - \left[ 1 + \xi \left( \frac{\text{VaR}_E - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right) &= \alpha \\ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{\text{VaR}_E - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} &= \ln(\alpha) \\ \left[ 1 + \xi \left( \frac{\text{VaR}_E - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} &= -\ln(\alpha) \\ 1 + \xi \left( \frac{\text{VaR}_E - \mu}{\sigma} \right) &= [-\ln(\alpha)]^{-\xi} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\xi \left( \frac{\text{VaR}_E - \mu}{\sigma} \right) &= [-\ln(\alpha)]^{-\xi} - 1 \\ \text{VaR}_E - \mu &= \frac{\sigma}{\xi} \left( [-\ln(\alpha)]^{-\xi} - 1 \right) \\ \text{VaR}_E &= \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left( [-\ln(\alpha)]^{-\xi} - 1 \right)\end{aligned}$$

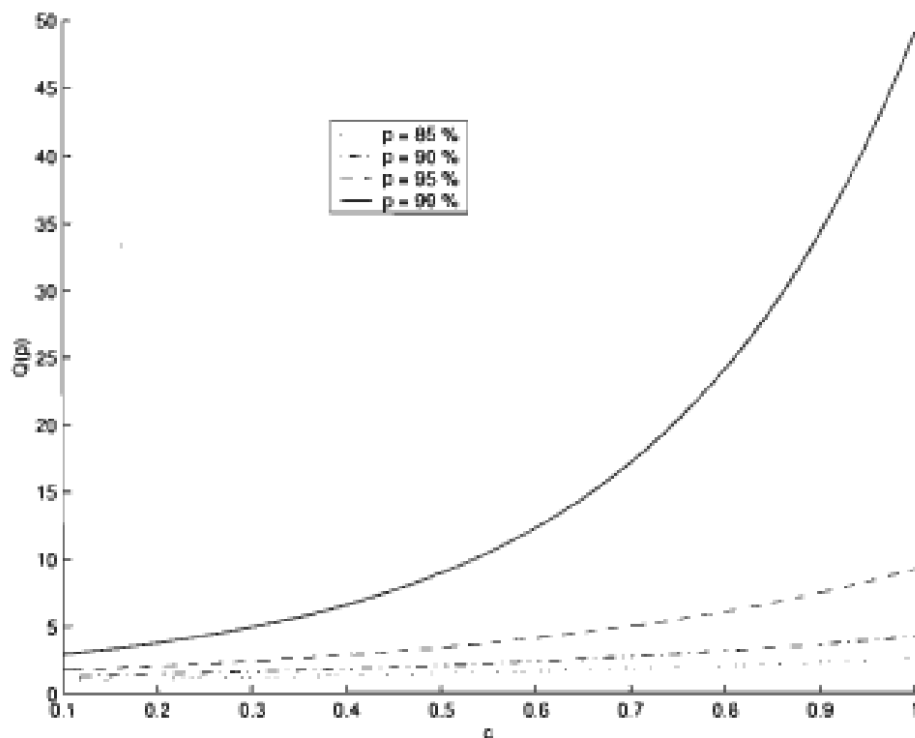
Si  $\xi = 0$

$$H(\text{VaR}_E) = \alpha \implies \text{VaR}_E = \mu - \sigma \log(-\log p)$$

Ainsi,

$$\text{VaR}_E = \begin{cases} \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left[ (-\ln \alpha)^{-\xi} - 1 \right] & , \xi \neq 0 \\ \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[ 1 - (-\ln \alpha)^{-\xi} \right] & , \xi = 0 \end{cases}$$

L'estimateur de la VaR extrême est sensible aux paramètres  $\xi$  et  $\sigma$ . Comme l'illustre la figure , qui présente l'évolution des quantiles extrêmes (VaR) en fonction de  $\xi$ . Une valeur élevée de  $\xi$  ( $\xi > 0$ ) signale une distribution leptocurtique(caractère d'une courbe de fréquences plus pointue qu'une courbe normale (qui est dite mésocurtique) de même écart type)(queues épaisses),cette leptokurticité se manifeste par une **variance plus importante** dans les queues de distribution. Ca veut dire que plus la fonction  $F$  possède de la variance , plus elle est leptocurtique et plus le quantile (VaR) va être élevé.



## 2.4.4 Avantages et inconvénients

### Avantages

1. **Modélisation Spécifique des Extrêmes** : C'est son atout majeur. La TVE est la seule théorie statistique spécifiquement conçue pour modéliser le comportement des queues de distribution. Elle ne s'intéresse qu'aux événements rares et extrêmes, là où les méthodes traditionnelles (historique, Monte Carlo paramétrique normale) échouent souvent.
2. **Robustesse aux Queues Lourdes** : Les marchés financiers sont connus pour avoir des distributions de rendements à "queues épaisses" (leptokurtiques), où les événements extrêmes sont plus fréquents que ne le prédit la distribution normale. La TVE (notamment avec le paramètre de forme  $\xi > 0$ ) capture naturellement cette propriété, fournissant des estimations de VaR et CVaR plus réalistes et souvent plus élevées pour les niveaux de confiance élevés.
3. **Extrapolation Fiable** : Elle permet d'extrapoler de manière fiable au-delà des observations disponibles dans l'échantillon. Si l'on souhaite calculer une VaR à 99.9% avec seulement quelques années de données, la TVE peut fournir une estimation statistiquement valide là où une méthode historique directe manquerait d'observations suffisantes.
4. **Fondement Théorique Solide** : Elle repose sur des théorèmes asymptotiques rigoureux (fisher-tippett-gnedenko pour les maxima de blocs, pickands-balkema-de haan pour les dépassements de seuil), ce qui lui confère une forte validité mathématique.
5. **Mesure de Risque Cohérente (CVaR)** : La CVaR (Expected Shortfall), souvent calculée conjointement avec la VaR par la TVE, est une mesure de risque cohérente, contrairement à la VaR qui ne l'est pas toujours (notamment en termes de sous-additivité).
6. **Indépendance des Observations Centrales** : La méthode POT se concentre uniquement sur les observations extrêmes, ce qui la rend moins sensible au comportement des données "normales" ou moins extrêmes.

### Inconvénients

1. **Choix du Seuil ( $u$ )** : C'est le défi le plus critique de la méthode POT.
  - Si le seuil est trop bas, il inclut des observations qui ne sont pas réellement extrêmes, ce qui peut biaiser l'estimation des paramètres de la GPD.
  - Si le seuil est trop élevé, le nombre d'excès est trop faible, ce qui augmente la variance des estimateurs et les rend instables (manque de données).
  - Le choix du seuil est souvent subjectif et peut nécessiter l'utilisation d'outils graphiques (comme les graphes de la moyenne des excès ou des paramètres) et de tests statistiques, ce qui complexifie la mise en œuvre.
2. **Dépendance à la Taille de l'Échantillon** : Bien que la TVE soit asymptotique (valable pour de grands échantillons), sa performance peut être limitée sur des échantillons de petite taille pour l'estimation des paramètres extrêmes.
3. **Complexité de Mise en Œuvre** : Comparée à la simulation historique simple ou à une VaR paramétrique normale, la TVE est conceptuellement et techniquement plus complexe, nécessitant une expertise statistique plus poussée pour choisir les estimateurs, valider le seuil et interpréter correctement les paramètres.
4. **Estimations Potentiellement Instables** : Les estimateurs des paramètres de queue peuvent être très sensibles aux observations individuelles dans les queues, ce qui peut entraîner une grande variance d'un échantillon à l'autre, surtout avec un seuil élevé.
5. **Borne Supérieure Infinie pour  $\xi_1$**  : Si le paramètre de forme  $\xi_1$  est estimé à être supérieur ou égal à 1 (ce qui peut arriver pour des données très extrêmes), la moyenne

de la distribution des excès (et donc la CVaR) devient infinie. Bien que cela reflète une réalité de risque extrême (des pertes potentiellement illimitées), cela rend la CVaR non interprétable comme une valeur finie.

6. **Gestion des Variables Multivariées** : Étendre la TVE à des portefeuilles multi-actifs de manière cohérente (pour capturer les dépendances extrêmes) est plus complexe que d'appliquer la TVE univariée à la série de pertes du portefeuille agrégé. Les copules extrêmes sont souvent utilisées, ajoutant une couche de complexité.

En conclusion, la TVE est une méthode indispensable pour une évaluation rigoureuse et réaliste des risques extrêmes en finance, offrant une capacité unique à modéliser les queues de distribution. Cependant, sa mise en œuvre requiert une attention particulière aux choix des paramètres (notamment le seuil) et une compréhension des hypothèses sous-jacentes pour éviter des estimations biaisées ou instables.

# Chapitre 3

## Application sur des données réelles

Les données utilisées dans cette simulation proviennent de séries boursières de trois grandes entreprises technologiques américaines :

- **AAPL** : Apple Inc.
- **MSFT** : Microsoft Corporation
- **GOOG** : Alphabet Inc. (Google)

Ces données sont téléchargées automatiquement à l'aide de la fonction `getSymbols()` du package `quantmod` dans le langage `R`, à partir de la plateforme `Yahoo Finance`. La période d'observation retenue s'étend du 1er janvier 2023 jusqu'à la date d'exécution du programme (`Sys.Date()`).

Pour chaque action, les prix ajustés de clôture sont extraits. Ces prix tiennent compte des éventuels versements de dividendes, fractionnements d'actions (splits) et autres ajustements techniques.

À partir de ces prix, les rendements journaliers logarithmiques sont calculés. Ces rendements servent à construire un portefeuille synthétique selon les pondérations suivantes :

<b>Actif</b>	<b>Poids dans le portefeuille</b>
AAPL( Apple Inc.)	40 %
MSFT( Microsoft Corp.)	30 %
GOOG(Alphabet Inc. (Google))	30 %

Les rendements du portefeuille sont ensuite transformés en **pertes financières**, en prenant l'opposé des rendements ( $\text{losses} = -\text{returns}$ ). Ces pertes constituent la base de l'analyse des risques.

### 3.1 Méthode historique

Dans cette partie, nous appliquons la méthode historique pour estimer la Value at Risk (VaR) et la Conditional Value at Risk (CVaR).

```

1  # Installer et charger les packages
2  if (!require("quantmod")) install.packages("quantmod")
3  library(quantmod)
4  # Paramètres
5  symbols <- c("AAPL", "MSFT", "GOOG")
6  weights <- c(0.4, 0.3, 0.3)
7  start_date <- as.Date("2023-01-01")
8  end_date <- Sys.Date()
9  initial_value <- 1e6
10 confidence_level <- 0.95
11 # Télécharger les données sans créer d'objets nommés
12 prices_list <- lapply(symbols, function(sym) {
13   getSymbols(sym, from = start_date, to = end_date, auto.assign = FALSE)
14 })
15 # Extraire les prix ajustés
16 prices <- do.call(merge, lapply(prices_list, Ad))
17 colnames(prices) <- symbols
18 # Calcul des rendements log
19 returns <- na.omit(diff(log(prices)))
20 # Calcul du rendement historique du portefeuille
21 portfolio_returns_hist <- as.numeric(returns %*% weights)
22 # Simulation des pertes historiques
23 simulated_values_hist <- initial_value * (1 + portfolio_returns_hist)
24 simulated_losses_hist <- initial_value - simulated_values_hist
25 # Calcul de la VaR et CVaR historiques
26 VaR_hist_95 <- quantile(simulated_losses_hist, probs = confidence_level)
27 CVaR_hist_95 <- mean(simulated_losses_hist[simulated_losses_hist > VaR_hist_95])
28 # Affichage des résultats
29 cat("VaR Simulation Historique (95%) :", round(VaR_hist_95, 2), "\n")
30 cat("CVaR Simulation Historique (95%) :", round(CVaR_hist_95, 2), "\n")

```

- La VaR à 95% est : 21463.66 €, c'est-à-dire il y a 5% de chance que le portefeuille subisse une perte égale ou supérieure à 21463.66 € sur une journée.
- La CVaR à 95% est : 30003.25 €, c'est à dire signifie que si une perte de plus de 21470.51 € survient, la perte moyenne attendue est 30003.25 € .

Pour insérer l'histogramme il suffit d'ajouter le code suivant dans le code précédent :

```

1  # Histogramme des pertes
2  hist_vals <- hist(simulated_lossess_hist,
3                   breaks = 50,
4                   main = "Histogramme des pertes simulées",
5                   xlab = "Pertes ()",
6                   col = "skyblue",
7                   border = "white")
8
9  # Ajout de la ligne verticale pour la VaR
10 abline(v = VaR_hist_95, col = "red", lwd = 2, lty = 2)
11 abline(v = CVaR_hist_95, col = "blue", lwd = 2, lty = 2)
12 # Ajout d'une annotation texte à côté de la ligne de VaR et la CVaR
13 text(x = VaR_hist_95,
14      y = max(hist_vals$counts),
15      labels = paste0("VaR 95% = ", round(VaR_hist_95, 2), " "),
16      pos = 4, col = "red", cex = 0.9)
17 text(x = CVaR_hist_95,
18      y = 0.85 * max(hist_vals$counts), # Décalage vertical de 15%
19      labels = paste0("CVaR 95% = ", round(CVaR_hist_95, 2), " €"),
20      pos = 4, col = "blue", cex = 0.9)
21

```

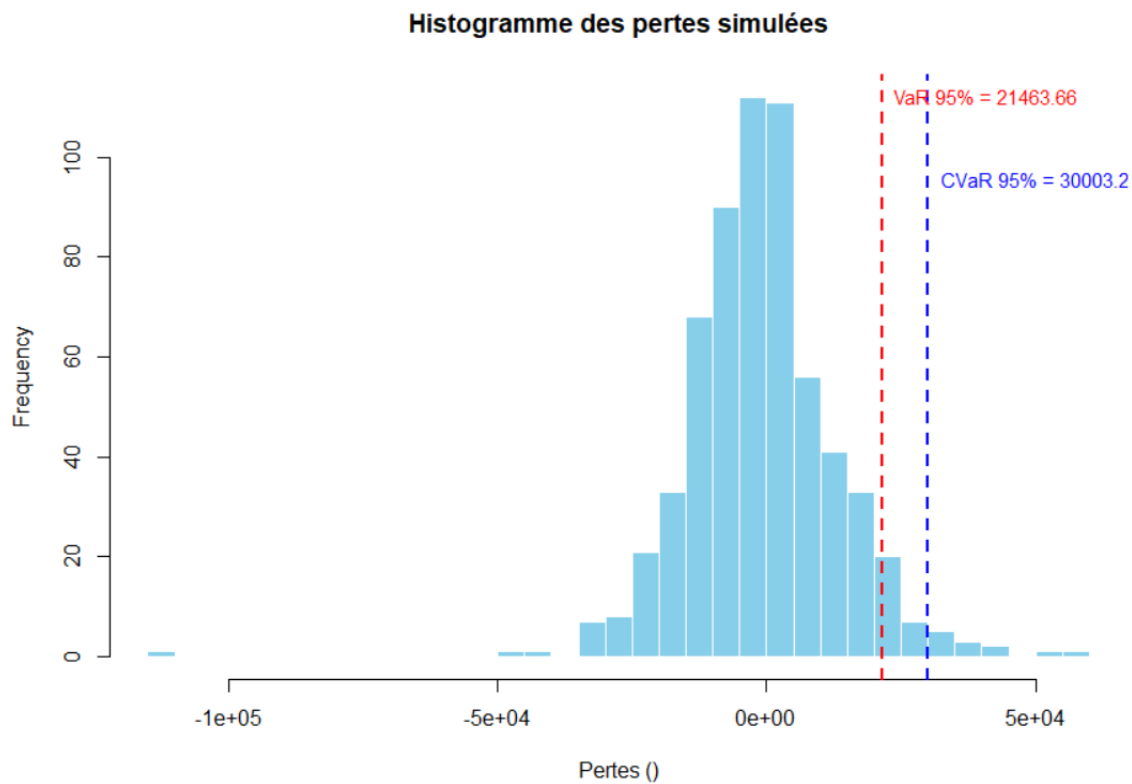


FIGURE 3.1 – L’histogramme des pertes simulées pour la méthode historique.

Maintenant on a pris différentes valeurs pour  $\alpha$ , les résultats obtenus sont dans le tableau sui-

vant :

Le seuil $\alpha$	VaR	CVaR
$\alpha = 0.95$	21470.53	30278.54
$\alpha = 0.96$	23068.62	32286.07
$\alpha = 0.97$	25096.05	34880.63
$\alpha = 0.98$	29000.22	38472.28
$\alpha = 0.99$	35182.51	44084.65

On observe que la VaR augmente avec le niveau de confiance. Par exemple, passer d'un niveau de confiance de 95% à 99% fait passer la VaR de 21 470.53 € à 35 182.51 €. Cela est intuitif : pour être plus confiant, par exemple, à 99%, que la perte ne dépassera pas un certain montant, ce dernier doit être plus élevé, car on cherche à se prémunir contre des scénarios plus extrêmes.

Comme la VaR, la CVaR augmente également avec le niveau de confiance, passant de 30 278.54 € à 44 084.65 € lorsque  $\alpha$  passe de 0.95 à 0.99. Ce comportement est attendu : à des niveaux de confiance plus élevés, la CVaR prend en compte une moyenne des pertes dans une zone encore plus extrême de la distribution.

Il est important de noter que, pour chaque niveau de confiance, la CVaR est systématiquement supérieure à la VaR. Cela est cohérent avec sa définition, car la CVaR représente la moyenne des pertes au-delà du seuil de la VaR. Un écart important entre la CVaR et la VaR indique que, une fois ce seuil franchi, les pertes peuvent devenir considérablement plus sévères.

## 3.2 Méthode Monte Carlo

Dans cette section, nous utilisons la méthode de simulation Monte Carlo pour estimer la VaR et la CVaR du portefeuille. Contrairement à la méthode historique qui repose uniquement sur les données observées, cette approche génère artificiellement des scénarios de rendements futurs en supposant que les rendements journaliers suivent une loi normale multivariée.

```

1  # Packages nécessaires
2  library(quantmod)
3  library(MASS)
4  # Paramètres
5  symbols <- c("AAPL", "MSFT", "GOOG") # Actifs choisis
6  weights <- c(0.4, 0.3, 0.3)          # Poids du portefeuille
7  start_date <- as.Date("2023-01-01")
8  end_date <- Sys.Date()
9  n_simulations <- 10000
10 initial_value <- 1e6
11 confidence_level <- 0.95
12 # Récupération des données
13 getSymbols(symbols, from = start_date, to = end_date)
14 # Extraction des prix de clôture ajustés
15 prices <- do.call(merge, lapply(symbols, function(sym) Ad(get(sym))))
16 # Calcul des rendements log

```

```

17 returns <- na.omit(diff(log(prices)))
18 # Estimation des paramètres
19 mu <- colMeans(returns)
20 Sigma <- cov(returns)
21 # Simulation de rendements multivariés
22 simulated_returns <- mvrnorm(n = n_simulations, mu = mu, Sigma = Sigma)
23 # Rendement simulé du portefeuille
24 portfolio_returns <- simulated_returns %*% weights
25 # Valeurs simulées et pertes
26 simulated_values <- initial_value * (1 + portfolio_returns)
27 simulated_losses <- initial_value - simulated_values
28 # Calcul de la VaR
29 VaR_95 <- quantile(simulated_losses, probs = confidence_level)
30 # Résultat
31 cat("VaR Monte Carlo (95%) sur données réelles :", round(VaR_95, 2), "\n")
32 #histogramme de la distribution des pertes
33 hist(simulated_losses, breaks = 50, col = "skyblue",
34       main = "Distribution des pertes simulées",
35       xlab = "Pertes ()")
36 abline(v = VaR_95, col = "red", lwd = 2, lty = 2)
37 text(VaR_95, max(table(cut(simulated_losses, 50))) * 0.9,
38       labels = paste0("VaR 95%: ", round(VaR_95, 0), " "), pos = 4, col = "red")
39
40 # --- Calcul de la CVaR (Expected Shortfall) ---
41 # Pertes dépassant la VaR
42 losses_exceeding_var <- simulated_losses[simulated_losses > VaR_95]
43 # Moyenne conditionnelle des pertes au-delà de la VaR
44 CVaR_95 <- mean(losses_exceeding_var)
45 # Affichage des résultats
46 cat("CVaR Monte Carlo (95%) :", round(CVaR_95, 2), "\n")
47 ##### histogramme de la CVaR
48 abline(v = CVaR_95, col = "darkred", lwd = 2, lty = 3)
49 text(CVaR_95, max(table(cut(simulated_losses, 50))) * 0.8,
50       labels = paste0("CVaR 95%: ", round(CVaR_95, 0), " "), pos = 4, col = "darkred")

```

La VaR Monte Carlo avec une probabilité de 95% signifie qu'on peut s'attendre, à ce que la perte maximale du portefeuille sur une journée ne dépasse pas 21814.22 € .

CVaR Monte Carlo (95%) est : 27583.38 € . Cela signifie que, dans les 5% des pires scénarios (c'est-à-dire les scénarios où la perte est égale ou supérieure à la VaR de 21814.22 €), la perte moyenne attendue est de 27583.38 € .

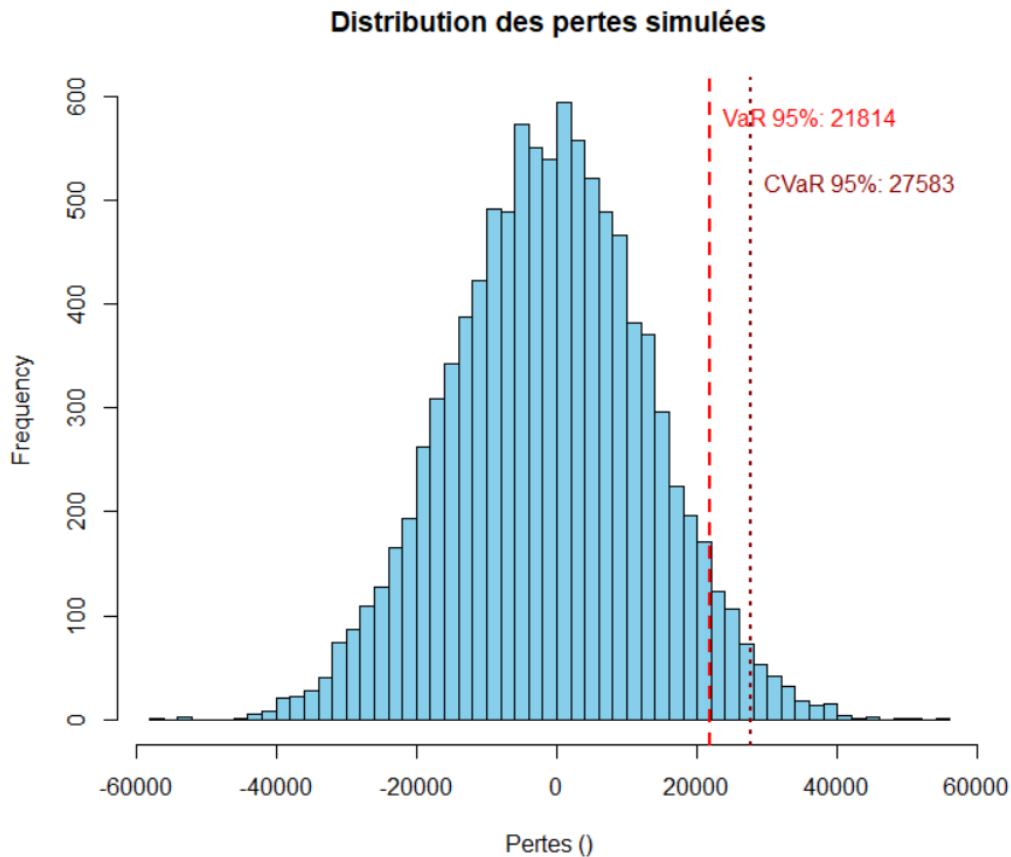


FIGURE 3.2 – Distribution des pertes simulées.

### 3.3 Méthode des valeurs extrêmes

Ce code R ci-dessus calcule la VaR et la CVaR d'un portefeuille d'investissement en utilisant la TVE, spécifiquement l'approche des Pics au-dessus d'un Seuil (POT). Nous appliquons la méthode POT au portefeuille (AAPL, MSFT, GOOG). Après avoir calculé les rendements journaliers les pertes correspondantes sont obtenues. Un seuil de 95% est déterminé à partir de ces pertes. Les observations qui dépassent ce seuil (les excès) sont ensuite utilisées pour ajuster une (GPD), pour estimer la VaR et la CVaR à 99%. Cette approche capture mieux les risques extrêmes que les méthodes traditionnelles. Les données sont alors exploitées pour :

- Estimer la **Value at Risk (VaR)** au seuil de 99 %,
- Estimer la **Conditional Value at Risk (CVaR)** au même seuil,
- Comparer plusieurs estimateurs de l'indice de queue : Hill, Pickands, et Moments,
- Ajuster une **loi de Pareto généralisée (GPD)** aux pertes extrêmes au-delà du 95<sup>e</sup> percentile.

Cette approche permet de simuler un portefeuille réaliste et d'appliquer la théorie des valeurs extrêmes sur des données de marché pour évaluer le comportement des pertes sévères.

#### La VaR et la CVaR avec GEV

Le code ci-dessous :

1. Télécharge les données boursières de AAPL, MSFT, GOOG et construit un portefeuille pondéré.
2. Agrège les pertes en prenant les maxima mensuels (bloc maxima).
3. Ajuste une loi GEV aux maxima mensuels pour estimer les paramètres  $\mu, \sigma, \xi$ .

4. Calcule la VaR à 99% à l'aide de la formule explicite de la loi GEV.
5. Simule un grand nombre de pertes selon la loi GEV et estime la CVaR comme la moyenne conditionnelle des pertes dépassant la VaR.
6. Multiplie la VaR et la CVaR par la valeur initiale du portefeuille (1000000 €) pour obtenir des montants en euros.
7. Affiche la VaR et la CVaR en pourcentage et en euros.

le code :

```

1  # Installer les packages nécessaires (exécuter une seule fois si besoin)
2  install.packages("quantmod")
3  install.packages("PerformanceAnalytics")
4  install.packages("extRemes")
5  install.packages("evd")
6
7  # Charger les bibliothèques
8  library(quantmod)
9  library(PerformanceAnalytics)
10 library(extRemes) # pour ajuster la GEV
11 library(evd)     # pour simuler avec rgev()
12
13 # -----
14 # PARAMÈTRES DE BASE
15 # -----
16 symbols <- c("AAPL", "MSFT", "GOOG")           # Actifs
17 weights <- c(0.4, 0.3, 0.3)                   # Pondérations du portefeuille
18 initial_value <- 1e6                          # Valeur initiale du portefeuille en euros (1 milliard)
19 start_date <- as.Date("2023-01-01")           # Date de début
20 end_date <- Sys.Date()                        # Date de fin
21
22 # -----
23 # DONNÉES ET RENDEMENTS
24 # -----
25 getSymbols(symbols, from = start_date, to = end_date)
26 prices <- do.call(merge, lapply(symbols, function(sym) Ad(get(sym)))) # prix ajustés
27 returns <- na.omit(Return.calculate(prices, method = "log"))         # rendements log
28 portfolio_returns <- Return.portfolio(returns, weights = weights, geometric = FALSE)
29 losses <- -as.numeric(portfolio_returns)      # pertes
30 dates <- index(portfolio_returns)
31
32 # -----
33 # BLOC MAXIMA MENSUELS
34 # -----
35 months <- format(dates, "%Y-%m")
36 monthly_max_losses <- tapply(losses, months, max)
37
38 # -----
39 # AJUSTEMENT GEV
40 # -----
41 gev_fit <- fevd(monthly_max_losses, type = "GEV", method = "MLE")

```

```

42  params <- gev_fit$results$par
43  mu <- params["location"]
44  sigma <- params["scale"]
45  xi <- params["shape"]
46
47  # -----
48  # CALCUL EXPLICITE DE LA VAR
49  # -----
50  p <- 0.99 # niveau de confiance
51
52  if (abs(xi) > 1e-6) {
53    VaR_GEV <- mu + (sigma / xi) * ((-log(p))^-xi - 1)
54  } else {
55    VaR_GEV <- mu - sigma * log(-log(p)) # cas xi 0 : loi de Gumbel
56  }
57
58  # -----
59  # ESTIMATION DE LA CVAR PAR SIMULATION
60  # -----
61  set.seed(123)
62  n_sim <- 100000
63  sim_gev <- rgev(n_sim, loc = mu, scale = sigma, shape = xi)
64  CVaR_GEV <- mean(sim_gev[sim_gev > VaR_GEV])
65
66  # -----
67  # CONVERSION EN EUROS
68  # -----
69  VaR_euros <- VaR_GEV * initial_value
70  CVaR_euros <- CVaR_GEV * initial_value
71
72  # -----
73  # AFFICHAGE DES RÉSULTATS
74  # -----
75  cat("----- Résultats EVT (GEV) à 99% ----- \n")
76  cat("VaR GEV (rendement) :", round(VaR_GEV, 4), "\n")
77  cat("CVaR GEV (rendement) :", round(CVaR_GEV, 4), "\n")
78  cat("VaR GEV (en euros) :", format(round(VaR_euros, 2), big.mark = " "), "\n")
79  cat("CVaR GEV (en euros) :", format(round(CVaR_euros, 2), big.mark = " "), "\n")

```

**Résultats :**

VaR GEV (rendement) : 0.0566  
 CVaR GEV (rendement) : 0.0618  
 VaR GEV (en euros) : 56 550.38 €  
 CVaR GEV (en euros) : 61 769.68 €

**Interprétation des résultats :**

- La **Value at Risk (VaR)** à 99%, estimée à 0.0566, indique que, dans un contexte de marché normal (hors crise), il y a seulement 1% de probabilité que la perte journalière

du portefeuille dépasse 5.66%.

- Exprimée en valeur monétaire, cela correspond à une perte potentielle maximale de 56550.38 € sur une journée, pour un portefeuille d'une valeur initiale de 1000000 €.
- La **Conditional Value at Risk (CVaR)**, également appelée *expected shortfall*, est estimée à 0.0618, soit 6.18%. Elle mesure la perte moyenne attendue dans le pire 1% des cas (c'est-à-dire lorsque la perte dépasse déjà la VaR).
- En euros, cela signifie que, si une perte extrême survient, elle s'élèverait en moyenne à 61769.68 €, soit un niveau de perte plus sévère que la VaR.

**Conclusion :** Ces résultats suggèrent que, bien que la probabilité d'un événement extrême soit faible (1%), l'impact financier d'un tel événement pourrait être très significatif, justifiant ainsi une gestion prudente des risques extrêmes via des méthodes comme la théorie des valeurs extrêmes (GEV). La différence entre la VaR et la CVaR met en évidence l'importance de ne pas se limiter à la VaR seule, car la CVaR fournit une information plus complète sur la queue de distribution des pertes.

### La VaR et la CVaR avec la GPD

Le code suivant :

1. Il récupère les prix d'AAPL, MSFT et GOOG et construit un portefeuille pondéré.
2. Il calcule les rendements log, puis les pertes journalières.
3. Il sélectionne les pertes au-dessus du 95e percentile (seuil), ajuste une loi GPD sur les excès.
4. Il calcule la VaR et la CVaR avec les formules théoriques de la GPD.
5. Il convertit les résultats en euros pour un portefeuille de 1 000 000 €.

**Le code :**

```

1  # Installer les packages nécessaires
2  install.packages("quantmod")
3  install.packages("PerformanceAnalytics")
4  install.packages("evir")
5
6  # Charger les bibliothèques
7  library(quantmod)
8  library(PerformanceAnalytics)
9  library(evir) # pour la fonction gpd()
10
11 # -----
12 # PARAMÈTRES DE BASE
13 # -----
14 symbols <- c("AAPL", "MSFT", "GOOG")           # Actifs
15 weights <- c(0.4, 0.3, 0.3)                     # Pondérations du portefeuille
16 initial_value <- 1e6                             # Valeur initiale en euros
17 start_date <- as.Date("2023-01-01")             # Date de début
18 end_date <- Sys.Date()                           # Date de fin
19 p <- 0.99                                         # Niveau de confiance
20
21 # -----
22 # DONNÉES ET RENDEMENTS
23 # -----
24 getSymbols(symbols, from = start_date, to = end_date)
25 prices <- do.call(merge, lapply(symbols, function(sym) Ad(get(sym)))) # prix ajustés

```

```

26 returns <- na.omit(Return.calculate(prices, method = "log"))           # rendements log
27 portfolio_returns <- Return.portfolio(returns, weights = weights, geometric = FALSE)
28 losses <- -as.numeric(portfolio_returns)                             # pertes (rendements négatifs)
29 N <- length(losses)                                                # taille de l'échantillon
30
31 # -----
32 # SÉLECTION DU SEUIL (POT)
33 # -----
34 threshold <- quantile(losses, 0.95)   # seuil = 95e percentile
35 excesses <- losses[losses > threshold] - threshold # excès au-dessus du seuil
36 nu <- length(excesses)                # nombre d'excès
37
38 # -----
39 # AJUSTEMENT GPD AUX EXCÈS
40 # -----
41 gpd_fit <- gpd(excesses, threshold = 0) # le seuil est 0 car on la soustrait
42 xi <- gpd_fit$par.ests["xi"]
43 beta <- gpd_fit$par.ests["beta"]
44
45 # -----
46 # CALCUL DE LA VAR ET DE LA CVAR (FORMULES THÉORIQUES)
47 # -----
48 if (xi != 0) {
49   VaR_GPD <- threshold + (beta / xi) * (((N / nu) * (1 - p))(-xi) - 1)
50   if (xi < 1) {
51     CVaR_GPD <- (VaR_GPD / (1 - xi)) + (beta - xi * threshold) / (1 - xi)
52   } else {
53     CVaR_GPD <- NA # CVaR infinie si xi >= 1
54   }
55 } else {
56   VaR_GPD <- threshold - beta * log((N / nu) * (1 - p))
57   CVaR_GPD <- VaR_GPD + beta
58 }
59
60 # -----
61 # CONVERSION EN EUROS
62 # -----
63 VaR_euros <- VaR_GPD * initial_value
64 CVaR_euros <- CVaR_GPD * initial_value
65
66 # -----
67 # AFFICHAGE DES RÉSULTATS
68 # -----
69 cat("----- Résultats EVT (GPD) à 99% ----- \n")
70 cat("VaR GPD (rendement) :", round(VaR_GPD, 4), "\n")
71 cat("CVaR GPD (rendement) :", round(CVaR_GPD, 4), "\n")
72 cat("VaR GPD (en euros) :", format(round(VaR_euros, 2), big.mark = " "), "\n")
73 cat("CVaR GPD (en euros) :", format(round(CVaR_euros, 2), big.mark = " "), "\n")

```

**Résultats :**

VaR GPD (rendement) : 0.0359

CVaR GPD (rendement) : 0.0451

VaR GPD (en euros) : 35 858.33 €

CVaR GPD (en euros) : 45 129.08 €

**Interprétation :**

- La **Value at Risk (VaR)** au niveau de confiance de 99%, estimée à 3.59%, signifie qu'il existe une probabilité de 1% que la perte journalière du portefeuille dépasse ce niveau.
- En valeur absolue, cela correspond à une perte potentielle maximale de 35858.33 pour un portefeuille de 1000000 €. Ainsi, 99% du temps, les pertes journalières resteront inférieures à ce montant.
- La **Conditional Value at Risk (CVaR)**, estimée à 4.51%, représente la perte moyenne attendue dans les 1% des cas les plus défavorables, c'est-à-dire lorsque la perte dépasse déjà la VaR.
- Cela signifie que, en cas de crise extrême, la perte moyenne du portefeuille pourrait atteindre 45129.08 €, ce qui est sensiblement plus élevé que la VaR. Cela reflète la queue épaisse de la distribution des pertes.
- Cette différence entre la VaR et la CVaR souligne l'intérêt d'utiliser la CVaR pour une évaluation plus réaliste du risque extrême, en particulier dans les contextes financiers où les pertes extrêmes sont rares mais potentiellement très coûteuses.

**Conclusion :**

La méthode POT-GPD, centrée sur l'analyse des pertes extrêmes au-delà d'un seuil, permet une modélisation rigoureuse du risque de queue. Les valeurs obtenues (35858.33 € pour la VaR et 45129.08 € pour la CVaR) montrent que, même si les événements extrêmes sont rares, leur impact peut être significatif. La CVaR fournit une mesure plus complète que la VaR en capturant la gravité moyenne des pertes lorsque celles-ci dépassent le niveau critique.

**Comparaison des méthodes GEV et GPD :**

Comparaison des résultats VaR / CVaR (niveau 99%)

Méthode	VaR (rendement)	CVaR (rendement)	VaR (€)	CVaR (€)
GEV	0,0566	0,0618	56550,38 €	61769,68 €
GPD	0,0359	0,0451	35858,33 €	45129,08 €

TABLE 3.1 – Comparaison des résultats VaR et CVaR à 99% selon les méthodes GEV et GPD

La méthode GEV fournit des estimations plus élevées pour la VaR et la CVaR que la méthode GPD. Cela s'explique par la différence d'approche :

1. GEV se base sur les maxima mensuels et capte les pires événements isolés, ce qui peut surestimer le risque si les blocs sont trop larges ou les données peu extrêmes.
2. GPD (POT) exploite plus d'observations extrêmes (tous les excès au-delà d'un seuil), ce qui permet une estimation plus stable et moins conservatrice.

Cela montre que la méthode GEV est plus prudente, tandis que la GPD fournit des estimations plus efficaces statistiquement si le seuil est bien choisi.

On déduit alors,

1. La méthode GPD est souvent préférée pour les applications pratiques, car elle utilise plus d'informations (tous les excès) et permet une meilleure flexibilité.
2. La méthode GEV reste utile pour valider ou encadrer les résultats, notamment en cas de séries

très longues ou absence de seuil naturel. Une approche rigoureuse peut consister à comparer les deux pour juger de la robustesse des estimations du risque extrême.

### L'utilisation des différents estimateurs pour calcul des quantiles extrêmes puis la VaR

Ce code R se concentre sur l'estimation des paramètres de queue (l'indice  $\xi$ ) et de la VaR) à un niveau de confiance élevé 99% en utilisant la TVE. Le code commence par préparer les données de pertes du portefeuille. Il sélectionne ensuite les  $k$  plus grandes pertes ici c'est 50 pour former un ensemble d'excès. Sur la base de ces excès, il calcule l'indice de queue  $\xi$  en utilisant trois estimateurs distincts :

1. L'estimateur de Hill, pertinent pour les queues lourdes ( $\xi > 0$ ).
2. L'estimateur de Pickands, qui peut être utilisé pour différents types de queues.
3. L'estimateur des moments, une autre approche pour l'estimation de  $\xi$ . Enfin, pour chaque estimateur de  $\xi$ , le code procède à l'estimation de la VaR au 99<sup>ème</sup> percentile.

```

1  # portfolio_returns <- Return.portfolio(returns, weights = weights, geometric = FALSE)
2  losses <- -as.numeric(portfolio_returns)
3  # Trier les pertes
4  sorted_losses <- sort(losses, decreasing = TRUE)
5  # Choix du seuil : on garde les k plus grandes pertes
6  k <- 50 # tu peux ajuster ce nombre
7  excesses <- sorted_losses[1:k]
8  # Estimateur de Hill
9  hill_xi <- mean(log(excesses) - log(excesses[k]))
10 # Estimateur de Pickands (sur 4 observations max)
11 pickands_xi <- (1 / log(2)) * log((excesses[1] - excesses[2]) / (excesses[2] - excesses[4]))
12 # Estimateur des moments
13 m1 <- mean(log(excesses) - log(excesses[k]))
14 m2 <- mean((log(excesses) - log(excesses[k]))^2)
15 moments_xi <- m1 + 1 - 0.5 / (1 - m1^2 / m2)
16 # Estimation de la VaR (niveau p)
17 p <- 0.99
18 n <- length(losses)
19 VaR_hill <- excesses[k] * ((n / k) * (1 - p))^(hill_xi)
20 VaR_pick <- excesses[k] * ((n / k) * (1 - p))^(pickands_xi)
21 VaR_mom <- excesses[k] * ((n / k) * (1 - p))^(moments_xi)
22 # Résultats
23 cat("==== Estimateurs EVT ==== \n")
24 cat("Indice de queue (xi): \n")
25 cat(" Hill      :", round(hill_xi, 4), " \n")
26 cat(" Pickands  :", round(pickands_xi, 4), " \n")
27 cat(" Moments    :", round(moments_xi, 4), " \n \n")
28
29 cat("==== VaR (niveau", p*100, "%) estimée par EVT ==== \n")
30 cat(" VaR Hill   :", round(VaR_hill, 2), " \n")
31 cat(" VaR Pickands :", round(VaR_pick, 2), " \n")
32 cat(" VaR Moments  :", round(VaR_mom, 2), " \n")

```

- VaR Hill égale : 40000 € .
- VaR Pickands égale : 30000 €.
- VaR Moments égale : 30000 €.

Ces résultats représentent la perte maximale du portefeuille sur une journée avec un niveau de confiance de 99%, selon les différentes estimations de l'indice de queue. Les VaR estimées sont généralement très proches.

# Conclusion

Ce mémoire s'est attaché à analyser les outils quantitatifs avancés d'évaluation du risque financier, en mettant l'accent sur l'estimation de la Value at Risk (VaR) selon différentes méthodologies. À travers une étude théorique approfondie et une mise en œuvre pratique sur un portefeuille composé de titres majeurs du marché américain, nous avons confronté les approches classiques, telles que la simulation historique et la méthode de Monte Carlo à des méthodes plus efficaces, notamment celles issues de la théorie des valeurs extrêmes.

L'analyse a permis de mettre en évidence les atouts et les limites de chaque méthode. Si les approches traditionnelles offrent une certaine simplicité de mise en œuvre, elles se révèlent parfois insuffisantes pour capter les risques liés aux événements rares. En revanche, la théorie des valeurs extrêmes, bien que plus exigeante sur le plan statistique, fournit un cadre rigoureux pour estimer les pertes en cas de conditions de marché extrêmes, là où les données sont rares et les incertitudes plus élevées.

Ces travaux soulignent ainsi l'importance de combiner plusieurs outils d'analyse pour obtenir une vision plus complète et réaliste du risque financier. L'intégration de mesures cohérentes comme l'Expected Shortfall et l'utilisation de techniques robustes d'estimation renforcent la capacité d'anticipation et de gestion des risques, particulièrement en contexte de stress.

Parmi les perspectives possibles, il serait pertinent d'étendre cette étude à des portefeuilles plus diversifiés ou intégrant des produits dérivés, afin d'évaluer la performance des méthodes sur des structures plus complexes. Par ailleurs, l'introduction de dépendances entre actifs via des copules, ou l'intégration de stress tests dynamiques, pourrait enrichir significativement les analyses menées dans ce travail.

# Bibliographie

- [1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D. (1997). Thinking Coherently. *Risk Magazine*, Vol. 10, PP. 68–71.
- [2] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. and Heath, D.(1999). Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, Vol. 9, PP. 203–228.
- [3] Best, P. (1999). *Implementing Value at Risk*. John Wiley & Sons Ltd, England.
- [4] Morgan, J.P. (1995). *RiskMetrics Technical Document*. Chase Manhattan Bank. Fourth Edition. New York.
- [5] Dekkers, A., Einmahl, J. and De Haan, L.(1989). A moment estimator for the index of an extreme-value loi, *Ann. Statist.* 17, p. 1833–1855.
- [6] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling extremal events*, Springer Verlag, Berlin.
- [7] Gilli, M., Këllezi, E. (2000). An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. *Computational Economics*, 27(2-3), 207–228.
- [8] Hill, B. M.(1975). A simple general approach to inference about the tail of a Loi, *Annals of Statistics* 5, p. 1163–1174.
- [9] Jenkinson, A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological events, *Journal of the Royal Meteorological Society*, 81, p. 158–272.
- [10] J.P. Morgan (1996). *RiskMetrics™ - Technical Document*, 4th ed., Morgan Guaranty Trust Company, New York.
- [11] Von Mises, R. (1954). La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs, *American Mathematical Society*, RI, USA, vol. II, pp. 271–294.
- [12] Olivier, D. and Gerber, H.U. (1985). On convex principles of premium calculation. *Insurance : Mathematics and Economics*, 4(3) : 179–189.
- [13] Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics, *Annals of Statistics* 3, p. 119–131.
- [14] Resnick, S.I.(1987). *Extreme Values, Regular variation and Point Processes*, Springer-Verlag, New York.
- [15] Reich, A.(1984). Premium principles and translation invariance. *Insurance : Mathematics and Economics*, 3(1) : 57–66.
- [16] Schmidt, K.S. (1989). Positive homogeneity and multiplicativity of premium principles on positive risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 8(4) : 315–319.
- [17] Wang, S.S. and Young, V.R.(1998). Risk-adjusted credibility premiums using distorted probabilities. *Scand. Actuar. J.*, (2) : 143–165.