

*Université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou*



*Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et  
des Sciences de Gestion*



*Département des Sciences de Gestion*

*Filière: Sciences Financières Et Comptabilité*

**Polycopié de cours et exercices**

*Intitulé*

# **Mathématiques Financières**

**Elaboré par:**

**Dr. ALLAG FATMA**  
*Cours destiné aux étudiants du licence*

**Année universitaire : 2024 / 2025**



## Table des matières.

Titre	Numéro
<b>Table des matières.</b>	1
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	3
<b>CHAPITRE I . Les intérêts simples</b>	
<b>1. Intérêt produit en une période</b>	7
<b>2. Intérêts simples</b>	10
<b>3. Taux proportionnels</b>	11
<b>4. Intérêts simples précomptés</b>	12
<b>Exercices pratiques</b>	17
<b>CHAPITRE II . L'escompte</b>	
<b>1. Escompte commercial</b>	21
<b>2. L'escompte rationnel</b>	22
<b>3. L'agio</b>	23
<b>4. Comptes courants et d'intérêts</b>	24
<b>Récapitulatif de quelques formules</b>	30
<b>Exercices pratiques</b>	32
<b>CHAPITRE III . Les intérêts composés</b>	
<b>1. Notations</b>	35
<b>2. Taux proportionnel, taux équivalent 34</b>	38
<b>3. Calcul de la valeur acquise dans le cas où la durée de placement n'est pas un nombre entier de période</b>	39
<b>4. Taux d'intérêt moyen d'une série de financement</b>	40
<b>5. Valeur actuelle d'un capital-formule d'actualisation</b>	42
<b>Entraînement</b>	45
<b>Récapitulatif de quelques formules</b>	46
<b>Exercice pratique</b>	48

<b>CHAPITRE IV .</b>	
<b>Les equivalences</b>	
<b>1. Effet de commerce</b>	<b>53</b>
<b>2. Equivalence de 2 effets (ou 2 capitaux) à intérêts simples</b>	<b>53</b>
<b>3. Cas de remplacement de plusieurs effets par un effet unique</b>	<b>57</b>
<b>4. Equivalence a intérêts composes</b>	<b>58</b>
<b>Exercice pratique</b>	<b>60</b>
<b>CHAPITRE V .</b>	
<b>Les annuités</b>	
<b>1. Les annuités constantes</b>	<b>63</b>
<b>2. Les annuités en progression arithmétique</b>	<b>66</b>
<b>3. Les annuités en progression géométrique</b>	<b>69</b>
<b>4. La rente perpétuelle</b>	<b>71</b>
<b>Exercice pratique</b>	<b>75</b>
<b>Références Bibliographique</b>	<b>77</b>

# **INTRODUCTION GENERALE**

Dans notre cours de Mathématiques financières, destinée aux étudiants de deuxième année de licence, aborde l'outil le plus important pour la gestion des prêts et des investissements : les mathématiques financières. Cela permet de déterminer la solution optimale pour sélectionner les meilleures offres financières et les meilleurs modes de paiement et d'achat à court, moyen et long terme.

L'objectif principal de ce cours est de présenter les bases des mathématiques financières de manière moderne et précise. Il comprend un cours concis et de nombreux problèmes résolus pour chaque chapitre.

Les concepts essentiels sont expliqués de manière claire, souvent à travers des exemples concrets. Ce manuel contient environ 50 exercices résolus, ce qui en fait un excellent outil pour réviser et s'entraîner.

Ce cours a été conçu pour les étudiants en finance et les professionnels en quête d'excellence dans leur domaine. Vous découvrirez comment les mathématiques financières sont appliquées dans des contextes professionnels et comment elles peuvent améliorer vos compétences en finance.

Sur cette base, il aborde les concepts théoriques et appliqués des mathématiques financières et la manière de calculer diverses opérations financières pour les actifs financiers et les actifs d'investissement.

Nous souhaitons, à travers ce cours, réduire voire vaincre les incertitudes liées à l'utilisation des "maths fi" par nos entreprises. Les réticences constatées tiennent moins d'une inutilité de la discipline que d'un vrai déficit informationnel et communicationnel. L'ambition de ce livre est de transcender ces préjugés et de montrer l'opportunité des maths fi dans nos organisations. Ceci passe par une vulgarisation de la discipline que n'autorisent pas souvent des récits ésotériques et élitistes

A notre avis, il est anormal et frustrant que les mathématiques financières semblent encore, à l'heure actuelle, effrayer ou rebuter bon nombre de personnes (étudiants, cadres de tous niveaux, gestionnaires, décideurs...) qui les considèrent comme un domaine réservé à un microcosme féru des mathématiques. Pourtant la globalisation de l'économie, l'exacerbation de la concurrence et l'extrême difficulté à se singulariser rendent davantage indispensables la connaissance et la maîtrise des méthodes de calcul de la rentabilité. La création de la valeur est devenue un enjeu emblématique, gage de crédibilité et vecteur de croissance.

**Les exercices et nombreuses illustrations contenus dans ce cours ne sont-ils pas ces impressions exactes qui sont nécessaires pour rendre compte les idées et les faits ?**

Cet ouvrage qui s'adresse essentiellement à des non-initiés, se propose de conduire, aussi agréablement que possible et sans trop de difficultés, le lecteur jusqu'à un niveau de connaissance honorable, susceptible de l'aider dans l'utilisation quotidienne des "maths fi". L'accession à un niveau de connaissances supérieur exige la lecture d'ouvrages spécialisés et plus approfondis. Notre souci dans cet ouvrage, est de ne pas mettre le lecteur en état d'infériorité par l'utilisation d'un vocabulaire complexe. Notre ambition est de faire comprendre et pourquoi pas, de faire aimer les maths fi», de faire en sorte que le lecteur puisse valablement les utiliser sans peur ni panique de n'avoir pas fait des études approfondies de mathématiques.

La simplicité n'exclut pas une certaine rigueur et il est certainement plus difficile d'expliquer avec des mots triviaux une discipline réputée ardue que de rédiger un ouvrage réservé aux seuls initiés. Nous avons donc à tout au long de cet ouvrage le souci permanent de conduire le lecteur à des progrès, en lui proposant un outil démonstratif essentiellement pédagogique. Les nombreux exemples, loin d'avoir une vocation explétive, sont le fondement même de la compréhension du raisonnement.

### **Organisation des chapitres**

Chaque chapitre comprend un rappel des concepts, des exercices en nombre variable, de difficultés progressives. À chaque fin de chapitre, un rappel des principales formules est fait pour favoriser les aspects mnémotechniques. Les chapitres peuvent se lire indépendamment les uns les autres. Le profane gagnerait toutefois à adopter une lecture progressive. Les corrigés proposés sont étroitement en phase avec les éléments développés dans les chapitres.

La méthode de calcul de ces intérêts n'est pas neutre et peut avoir une incidence non négligeable sur leur montant. On distingue traditionnellement deux catégories principales d'intérêts: les **intérêts simples** et les **intérêts composés**.

Pour les intérêts simples, seul le capital initial procure des revenus. Avec les intérêts composés, les intérêts dus en fin de période sur le capital initial génèrent d'autres intérêts au cours des périodes suivantes.

L'objectif de cette partie est de:

- Maîtriser le coût de l'argent,
- Maîtriser la valeur du temps,
- Estimer la valeur d'un capital quelle que soit la date à laquelle il est disponible,

- Savoir quand et comment utiliser les formules d'intérêts simples et d'intérêts composés et en comprendre les mécanismes de calcul,
- Connaître les particularités des taux proportionnels et des taux équivalents ainsi que leurs conditions d'utilisation

Pour:

- Pouvoir discuter avec son banquier,
- Négocier un plan de règlement,
- Se procurer des capitaux pour une période relativement courte (moins d'un an) ou plus longue,
- Choisir les conditions de placement ou de prêt les plus avantageuses,
- Comparer deux créances disponibles, ou deux dettes exigibles, à des dates différentes,
- Comparer des conditions d'escompte et des offres de financement,
- Comparer les modalités de financement de trésorerie.

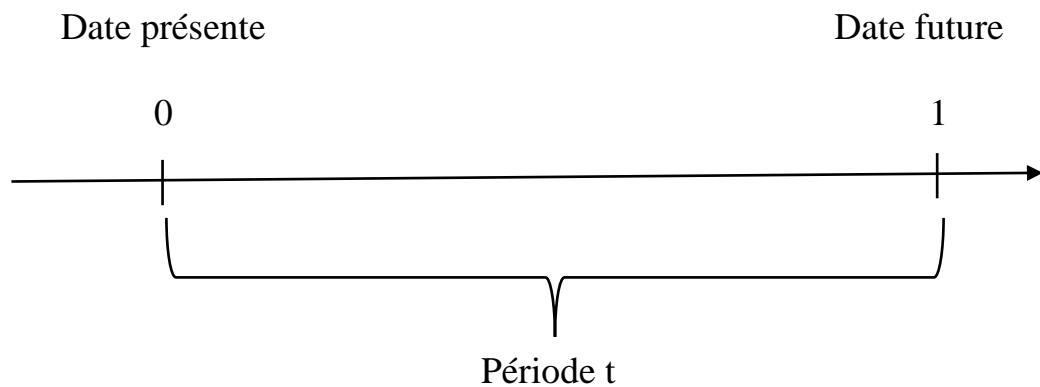
J'ose croire que ce cours éveillera la curiosité de nos étudiants, envie d'adopter définitivement les mathématiques financières, bonne chance et réussite aux étudiants .

**CHAPITRE I.**  
**Les intérêts simples**

### 1.Intérêt produit en une période

En finance, une période peut se référer à une unité de temps spécifique utilisée pour calculer les taux d'intérêt, les rendements et d'autres aspects financiers. Dans le contexte des prêts bancaires, les prêts peuvent être calculés sur 1 jour, 1 mois, 1 trimestre, 1 semestre, 1 année.

**Figure 1: La période t**

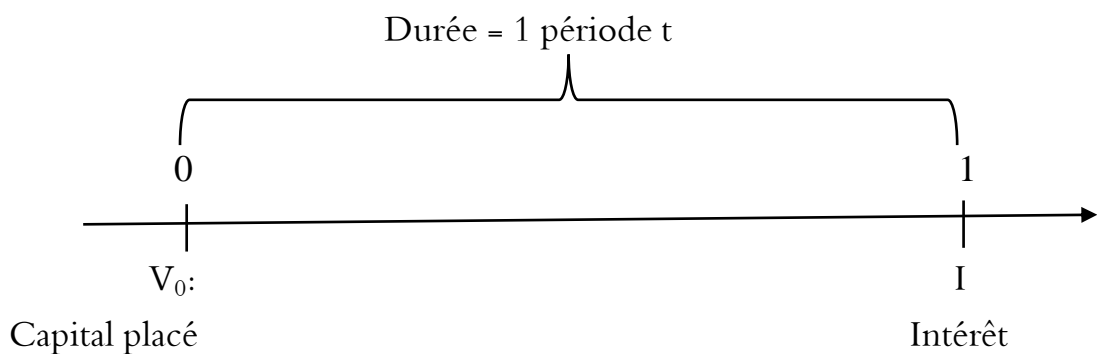


#### 1.1. L'intérêt dans une période

**Définition:**

si un capital  $V_0$  est placé à la date 0 pendant 1 période  $p$  alors l'intérêt  $I$  procuré à la fin de la période  $t$  est le profil que perçoit le prêteur à la date 1.

**Figure 2: La période t**



L'intérêt est dit simple lorsqu'il est versé en une seule fois et lorsqu'il est proportionnel à la durée du placement.

Les intérêts simples concernent essentiellement les opérations dont la durée est quelconque, mais ne dépassant pas généralement un an :

- emprunts et placements sur le marché monétaire,
- comptes courants bancaires,
- escompte commercial.

Le versement de ces intérêts peut s'effectuer soit:

- à l'issue du contrat ou du placement (intérêts post-comptés). Par convention, le taux utilisé est le taux nominal et il est noté  $i$ . Il est aussi appelé taux effectif d'intérêt simple.
- au moment du versement du capital (intérêts précomptés). Le placement est alors effectué à un taux effectif noté  $i$  différent du taux nominal annoncé. Ce taux est le taux réel ou encore le taux actuariel.

**Remarque:** il faut toujours exprimer  $i$  et  $n$  en unités de temps comparables:

- $V_0$ : valeur nominale d'un capital au temps  $t_0$ ;
- $V_n$ : valeur acquise au temps  $t_n$ ;
- $I_n$ : intérêts produits pendant la durée  $n$  (nombre de périodes);
- $t$ : taux d'intérêt par période (ou unité de temps) exprimé en %;
- $n$ : nombre de périodes pendant lesquelles est placé le capital initial  $V_0$ .
- $t_a$  annuel,  $n$  en années
- $t_{p/q}$  mensuel,  $n$  en mois,

Le prêteur perçoit à la date 1 le capital final  $V_1$

$$V_1 = V_0 + I$$

## 1.2. Le taux d'intérêt par période

**Définition:** le taux d'intérêt  $t$  par période  $t$  est le taux de rendement du placement défini par:

$$t = \frac{\text{Capital final} - \text{Capital initial}}{\text{Capital initial}} = \frac{(V_0 + I) - V_0}{V_0}$$

$$t = I / V_0$$

En mathématiques financières la première relation fondamentale :

$$I = V_0 \times t$$

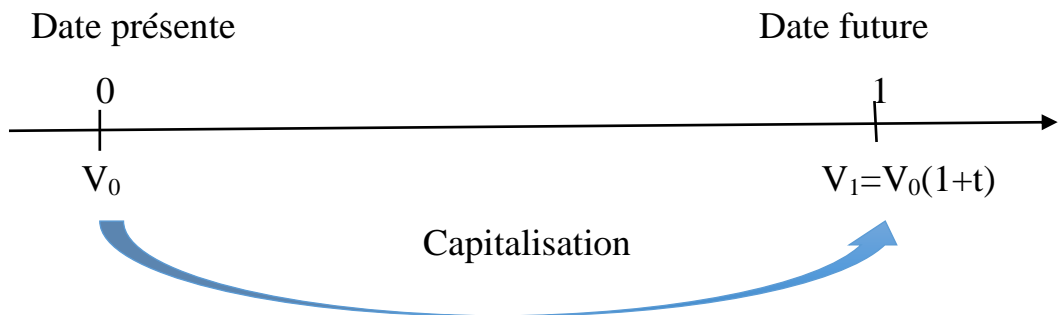
L'intérêt d'une période  $t =$   
le capital placé pendant la période  $\times$  le taux d'intérêt par période  $t$

**1.3. Capitalisation: Valeur acquise**

**Définition:** la valeur acquise (valeur définitive ou valeur capitalisée) est le capital final  $V_1 = V_0 + I$  perçu par le prêteur à la date 1.

$$V_1 = V_0 + V_0 t = V_0(1+t)$$

**La capitalisation:** opération qui consiste à passer du capital  $V_0$  placé en 0 au capital  $V_1$  perçu en 1.



**1.4. Actualisation: Valeur actuelle**

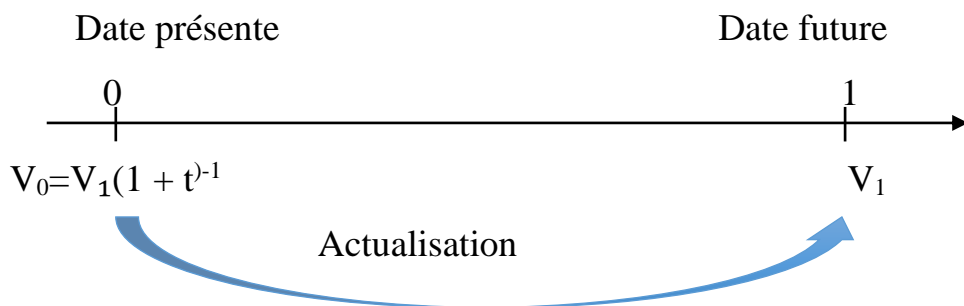
**Définition:**

la valeur actuelle est le capital initial  $V_0$  placé par le prêteur à la date 0.

$$V_0 = V_1 / (1+t) = V_1(1+t)^{-1}$$

**L'actualisation:**

opération de passage de la valeur acquise  $V_1$  au capital  $V_0$  initial.



## 2. Intérêts simples

### Définition:

soit  $V_0$  un capital placé en 0 pendant  $n$  périodes  $t$  au taux d'intérêt  $t$  par période  $t$ . L'intérêt simple produit à la date  $n$  est la somme des intérêts  $V_0 \times t$  produits par le placement capital  $V_0$  au début de chaque période :

$$\text{Intérêt simple} = I_n = V_0 t n$$

On utilise l'intérêt simple pour des emprunts ou des placements à court terme, c'est à dire sur une durée inférieure à un an.

L'intérêt est proportionnel à la durée de l'opération, et il est versé en une seule fois, au début ou à la fin de l'opération'

### 2.1. Capitalisation : Valeur acquise

#### Définition:

la valeur acquise (valeur définitive ou valeur capitalisée) est le capital total  $V_n = V_0 + I_n$  perçu par le prêteur à la date  $n$ .

**La capitalisation** : opération de passage du capital  $V_0$  au capital  $V_n$

$$V_n = V_0(1 + tn)$$

### 2.2. Actualisation: Valeur actuelle

#### Définition:

la valeur actuelle est le capital initial  $C_0$  placé par le prêteur à la date 0.

#### L'actualisation:

opération qui consiste à passer de la valeur acquise  $C_n$  perçu en 1 au capital  $C_0$  placé en 0.

$$V_0 = V_1 / (1 + tn) = V_1 (1 + tn)^{-1}$$

### 3. Taux proportionnels

**Définition:**

$t_a$ : taux d'intérêt annuel

$t_s$ : taux semestriel ou trimestriel ou mensuel ou journalier.

$t_a$  et  $t_s$  sont proportionnels si, lorsqu'ils sont appliqués à intérêts simples au même capital  $V_0$ , ils procurent la même valeur acquise.

$t_a$ : taux d'intérêt annuel;  $t_s$ : taux d'intérêt semestriel

Capitalisation annuelle:  $m = 1$

Capitalisation mensuelle:  $m = 12$

Capitalisation trimestrielle:  $m = 4$

$$VD_a = VD_s \Rightarrow V_0(1+t_a) = V_0(1+2t_s)$$

$t_s = t_a/2$
---------------

#### 3.1. Relations de proportionnalité des taux d'intérêt

$t_a$ : taux annuel    $t_s$ : taux semestriel    $t_t$ : taux trimestriel    $t_m$ : taux mensuel    $t_j$ : taux journalier

$t_s, t_t, t_m, t_j$  sont proportionnels à  $t_a$  si :

$t_s = t_a/2$	$t_t = t_a/4$	$t_m = t_a/12$	$t_j = t_a/360$
---------------	---------------	----------------	-----------------

#### 3.2. Formules des intérêts simples

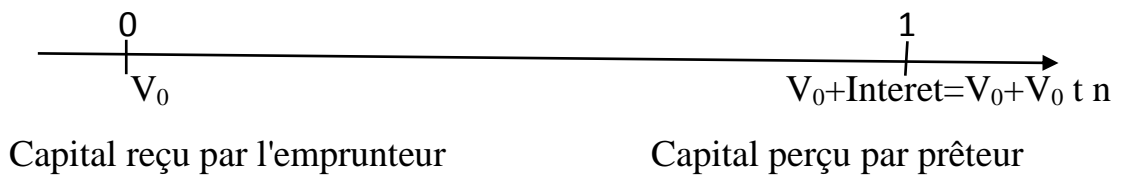
$I = V_0 t_a n_a$	$I = \frac{V_0 t_a n_s}{2}$	$I = \frac{V_0 t_a n_t}{4}$
$I = \frac{V_0 t_a n_m}{12}$	$I = \frac{V_0 t_a n_j}{360}$ ←	L'année commerciale 360 jours

### 4. Intérêts simples précomptés

Les intérêts simples peuvent être calculés de deux manières : post comptés ou précomptés.

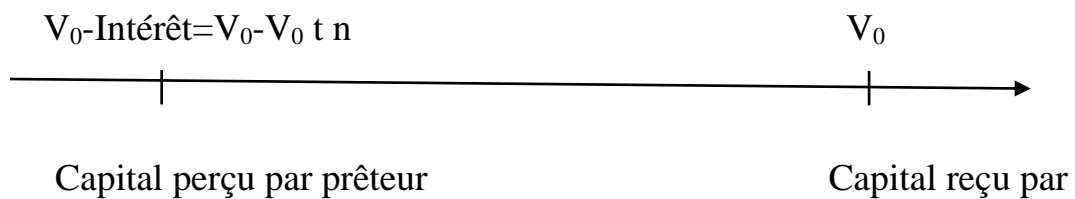
**Définition:**

intérêts post comptés ou à terme échu: l'intérêt versé à la date finale n.



**Définition:**

intérêts précomptés où à terme à échoir : l'intérêt est déduit du capital emprunté à la date 0.



#### 4.1. Le taux effectif

**Définition:**

le taux d'intérêt effectif  $t_e$  par période p est le taux d'intérêt qui égalise l'intérêt post compté du capital  $(V_0 - I)$  et l'intérêt précompté I

$$(V_0 - I) t_e n = I \Rightarrow t_e = t / (1 - t n) = t(1 - t n)^{-1}$$

**Remarque**

$t_e > t$

## 4.2. Comparaison entre les intérêts précomptés et post comptés

Lorsqu'une entreprise examine diverses options de financement, elle peut se retrouver dans la situation à comparer un taux d'intérêt précompté à un taux d'intérêt post compté.

Cependant, il n'est pas possible de faire une comparaison directe entre un intérêt post compté et un intérêt précompté, car ils ne correspondent pas à des versements à la même échéance.

### Exercice n°1:

100 000 DA placés deux ans à un taux annuel de 20% donnent quel montant d'intérêts? De combien disposera-t-on au bout de deux ans ?

#### **Solution:**

- Le montant des intérêts:  $I_n = V_0 nt$

AN:  $I_n = 100\ 000 \times 20\% \times 2 = 40\ 000$  DA

Combien a-t-on au bout de deux ans:  $V_n = V_0 + I_n$

AN:  $V_n = 100\ 000 + 40\ 000 = 140\ 000$  DA

### Exercice n°2:

Une personne emprunte 100 000 DA le 20/11/N-1 à intérêts simples et doit rembourser sa dette le 15/02/N. Les intérêts sont payables à terme échu et sont calculés au taux annuel de 12%. Quel montant aura-t-elle à déboursier le 14 février N?

#### **Solution:**

- Le montant à déboursier le 14 février N:  $V_n = V_0 + V_0 ni / 360$

AN:  $V = 100\ 000 + 100\ 000 \times 87 \times 0,12 / 360 = 102\ 900$  DA

On remarque que le montant des intérêts est proportionnel au capital placé, à la durée du placement et au taux d'intérêt pratiqué.

### Remarque:

Dans la plupart des exercices concernant le montant à placer, le taux ou la durée du placement, il suffit d'utiliser la formule en fonction de l'inconnue, comme le montrent les exercices qui suivent.

**Exercice n°3:**

Un capital placé à 9% pendant une certaine durée a acquis une valeur de 435 000 DA. Placé à 10% pendant un an de moins, ce même capital aurait produit des intérêts = 120 000 DA.

- a) Déterminez ce capital ?
- b) Calculez la première durée de placement ?

**Solution:**

- a) Détermination du capital

Soit C le montant du capital placé et n sa durée exprimée en années.

On peut écrire:  $V_n = V_o + V_o n i / 100 = 435\ 000$

Ou:  $V_n = V_o (1 + n i) = 435\ 000 \times 100 \dots\dots\dots(1)$

$V_o \times 10(n-1) = 120\ 000 \times 100 \dots\dots\dots(2)$

En divisant (1) par (2), membre à membre, on obtient:

$$(100+9n)/10(n-1)=435/120$$

$$(100+9n)/10(n-1)=3.625$$

$$100+9n=36.25n-36.25$$

$$27.25n=136.25$$

$$N=5\text{ans}$$

- b) La valeur de n reportée dans l'équation (2) nous donne

$$V_o = (120000 \times 100) / 10 \times 4 = 300\ 000$$

$$V_o = 300\ 000\ \text{DA}$$

**Exercice n°4:**

Une personne souhaite disposer dans deux ans d'une somme de 300 000 DA en effectuant dans une banque, un placement à intérêts simples au taux de 10% par an. Quelle somme doit-elle placer dès aujourd'hui pour atteindre son objectif ?

**Solution:**

- La somme à placer aujourd'hui :

$$V_n = V_0 (1+ni) \Rightarrow V_0 = V_n / (1+ni)$$

$$\text{AN: } V_0 = 300\,000 / (1+2 \times 0;1) = 250\,000 \text{ DA}$$

**Exercice n°5:**

Une personne dispose aujourd'hui de 8 000 DA et veut obtenir à intérêts simples 10 000 DA dans deux ans. À quel taux doit-elle effectuer le placement ?

**Solution:**

- Le taux de placement:  $V_n = V_0 (1+ni)$

$$t = ((V_n/V_0)-1)/n$$

$$\text{AN: } t = ((10\,000/8\,000)-1)/2 = 12,5\%$$

**Exercice n°6:**

On dispose de 8 000 DA que l'on place à intérêts simples pour obtenir 10 000 DA. Le taux annuel est de 10%. Combien de temps doit durer le placement ?

**Solution:**

- La durée du placement:  $V_n = V_0(1+nt) \Rightarrow n = ((V_n/V_0)-1)/t$

$$\text{AN: } n = ((10\,000/8\,000)-1)/0,1 = 2,5 \text{ ans}$$

**Exercice n°7:**

Un commerçant a reçu un crédit de 1 250 DA du 20 juin au 15 août N, au taux nominal de 12%. En raisonnant en intérêts précomptés,

1) calculer l'intérêt dû à la banque

2) calculer le taux réel  $t'$

**Solution:**

1) l'intérêt dû à la banque:  $I_n = V_0 n t / 360$

$$\text{AN: } I_n = 1250 \times 57 \times 0,12 / 360 = 4,75 \text{ DA}$$

2) Le taux d'intérêt réel:  $t' = t / (1 - nt)$

$$AN: t' = 0.12 / (1 - 57 \times 0.12 / 360) = 12.23\%$$

### Exercice n°8:

Hugo souhaite emprunter 7 800 DA à son ami Alice. Il est convenu qu'elle remboursera ce prêt dans 6 mois et demi à hauteur de 8 100 DA. À quel taux d'intérêt est convenu ce prêt ?

### **Solution:**

On dispose des données suivantes :

$$V_0 = 7\,800 \text{ €} \quad V_n = 8\,100 \text{ €} \quad n = 6.5 \text{ mois}$$

On sait que  $I_n = V_n - V_0$ .

Ce prêt est convenu au taux d'intérêt de  $8100 - 7800 = 300$  DA

Donc on:  $I_n = V_0 nt / 360$

$$t = I_n \times 12 / V_0 n \Rightarrow t = 300 \times 12 / 7\,800 \times 6.5 = 7.1\%$$

### Exercice n°9:

Quelle est la valeur que je dois Investir aujourd'hui si je veux récupérer 12 500 DA dans 3 mois au taux annuel de 3,6% ?

### **Solution:**

On dispose des données suivantes:

$$V_n = 12\,500 \text{ €} \quad n = 3 \text{ mois} \quad t = 3.6\% \quad V_0 = ?$$

$$t = 3.6\% \quad 3 \quad 12 \quad \text{On sait que } V_0 = V_n \times 12 / (1 + tn)$$

$$\text{Donc on a } V_0 = 12\,500 / (1 + 0.036 \times 3 / 12) = 12\,388.5.$$

Ainsi, si je veux récupérer 12 500 DA dans 3 mois au taux annuel de 3,6%, je dois placer environ 12 389 DA aujourd'hui.

**Exercices pratiques**

**Exercice n°1** : Effectuer selon les conditions suivantes :

- 1) Au 1/1/2000, une personne a emprunté à la banque une somme d'un montant de 50 000 DA, à rembourser le 31/12/2000 au taux d'intérêt de 8%.
  - Calculer le montant des intérêts et ce que la personne paie au 31/12/2000 ?
- 2) Le 8 avril, un capital s'élevant à 8 500 DA a été déposé à un taux d'intérêt de 7%.
  - Calculer la valeur des intérêts le 18 août ?
- 3) Une personne a déposé 60 000 DA à la banque et, à la fin de l'année, elle a retiré la totalité du montant, soit 62 500 DA.
  - Calculer le montant des intérêts et le taux d'intérêt ?
- 4) La Fondation a proposé à la vente 1.000 obligations au taux d'intérêt annuel de 5,5%, et la valeur de l'obligation était de 10.000 DA.
  - Calculer les intérêts annuels de 100 obligations ?

**Exercice n°2** : Effectuer selon les conditions suivantes :

- 1) Un capital de 6.500 DA. et placé du 20 mai au 15 septembre au taux de 5%.
  - Calculer la valeur gagnée ?
- 2) Les intérêts sur une somme d'argent à la fin du premier semestre s'élevaient à 850 DA, et le montant total à la fin de la deuxième année était de 18 000 DA.
  - Calculer le taux d'intérêt et le capital ?
- 3) Un capital de 1380 DA, pendant 80 jours produit 27,60 DA d'intérêts.  
Calculer le taux d'intérêt et les intérêts annuels ?

**Exercice n°3:**

1) Le 25/02/2010, une personne a investi une somme d'argent dans une institution financière, avec un taux d'intérêt annuel de 5%, et le 05/09/2010, elle a retiré un montant de 10 268,05 DA.

- Calculer le montant principal ?

2) Le 01/01/2016, une personne a acheté des biens en acompte d'un montant de 2 590 000 DA , à payer le 13/03/2016.

- Calculer le prix de la marchandise le jour de la conclusion du contrat si vous savez que le taux d'intérêt est de 7,5 % par an ?

**Exercice n°4:**

La société "A" a une dette pour des achats de biens arrivant à échéance le 01/03/2017, sachant que le délai de paiement est de 129 jours à compter de la date du contrat de vente, car sa valeur a été estimée au 01/02/2017 à 500 996 DA .

- Calculer la valeur nominale de la dette si vous savez que le taux d'intérêt est de 4,5 % ?

**Exercice n°5 :**

Un montant de 6.400 DA est placé pour 6 mois au taux de 6,2%.

- Quel intérêt produit-il au bout de six mois ?

- Calculer les intérêts réels ?

**Exercice n°6 :**

Les intérêts sur une somme d'argent pendant trois mois sont de 500 DA, et le montant total à la fin de la quatrième année est de 48 000 DA.

- Calculer le montant principal et le taux d'intérêt ?

**Exercice n°7:**

La valeur nominale d'un papier commercial pour marchandises en compte est de 172 500 DA et le taux d'intérêt est de 5 %

- Calculer les avantages résultant du report du paiement des marchandises jusqu'à la fin de la troisième année à compter de la date du contrat ?

# **CHAPITRE II.**

## **L'escompte**

L'escompte est souvent défini comme une opération de financement à court terme qui consiste à céder des effets de commerce à une banque. Autrement dit, le terme d'escompte permet de désigner l'opération par laquelle le banquier avance à un commerçant ou à une entreprise, en échange d'un effet de commerce (reconnaissance de dettes reçues par l'entreprise en règlement de transactions commerciales tels que les billets à ordre ou les lettres de change) que lui remet cette dernière, une somme égale au montant de l'effet (appelé encore valeur nominale de l'effet) diminuée d'une rémunération calculée selon le laps de temps restant à courir jusqu'au recouvrement de l'échéance.

### 1. Escompte commerciale

L'escompte commercial, noté E, est le montant de l'intérêt calculé sur la valeur nominale V, de l'effet pour la durée n qui sépare la date de remise à l'escompte de l'effet de la date d'échéance. Le taux i est fixé par le banquier lui-même en fonction du taux de base bancaire (TBB), de la solvabilité du remettant et de la qualité du papier escompté. L'escompte est donc l'intérêt retenu sur la valeur nominale.

Le principe de comptage des jours est identique à celui utilisé précédemment mais le nombre de jours est parfois différent du fait de la pratique des jours de valeur par les banques.

$$E = V_n n t / 360$$

La valeur actuelle commerciale d'un effet A, est la différence entre sa valeur nominale V. et l'escompte commercial E.

$$V_0 = V_n - E$$

$$V_0 = V_n - V_n n t / 360$$

$$V_0 = V_n (1 - n t / 360)$$

### Exercice n°10:

Supposons un effet de commerce de nominal 12 000 DA, à échoir le 25 juin N, remis à l'escompte le 10 mai N. Déterminer le montant versé par le banquier sachant que le taux de l'escompte est de 12%.

### **Solution:**

- Le montant versé par le banquier:  $V_0 = V_n(1-nt/360)$

AN:  $A = 12000 (1-47 \times 0,12/360) = 11\ 812$  DA

## 2. L'escompte rationnel

Outre l'escompte commercial, on peut aussi utiliser l'escompte rationnel, noté  $E'$  qui est égal au montant calculé sur la valeur actuelle rationnelle notée  $A'$ , de l'effet sur la somme effectivement avancée par le banquier.

$$A'_0 = V_0 - E' \Rightarrow E' = V_0 - A'_0$$

$$E' = A'_0(nt/360)$$

### 1) Détermination de $A'$ , à partir de $V_0$

On sait que:

$$A'_0 = V_0 - A_0 nt / 360$$

Par ailleurs,  $V_0 = A'_0 + A'_0 ni / 360$

Alors,  $V_0 = A'_0(1 + nt / 360)$

Donc,

$$A'_0 = V_0 / (1 + nt / 360)$$

### 2) Détermination de $E'$ à partir de $V_0$

On sait que:  $E' = A'_0 nt / 360$

Par ailleurs,  $A'_0 = V_0 / (1 + nt / 360)$

Alors,  $E' = (V_0 / (1 + nt / 360))(nt / 360)$

Donc,

$$E' = V_0(nt/360)/(1+(nt/360))$$

### Exercice n°11:

Reprendre l'exercice précédent et calculer la valeur actuelle rationnelle et l'escompte rationné correspondants. Calculer ensuite le taux réel d'escompte rationnel  $t$  ?

### **Solution:**

- Le montant versé par le banquier:

$$A'_0 = V_0 / (1 + nt/360)$$

$$\text{AN: } A = 12000 / (1 + 47 \times 0,12/360) = 11\,815 \text{ DA}$$

$$\text{L'escompte est égal: } 12000 - 11\,815 = 185 \text{ DA}$$

- Le taux d'intérêt réel :  $t' = t / (1 + nt/360)$

$$\text{AN: } 12\% / (1 + 47 \times 12\% / 360) = 11,815\%$$

### **3. L'agio**

En règle générale, l'agio se définit comme le total des intérêts et des commissions prélevés par les banques sur les opérations de crédit. En fait, le banquier ne prélève pas que l'escompte mais aussi d'autres commissions que l'on peut ranger en trois catégories:

- celles qui dépendent à la fois du nominal et du nombre de jours (comme l'es compte). Par exemple, la commission d'endos ou d'endossement (validation de la traite). Pour la calculer, on applique une formule analogue à celle de l'escompte.
- celles qui ne dépendent que du nominal ; par exemple celle de bordereau:  $2/1000$  du nominal soit  $V_0 \times 2/1000$ .
- les commissions fixes; par exemple celles d'acceptation,  $x$  € par effet.

La somme de toutes ces commissions s'appelle l'agio. La terminologie usuelle voudrait néanmoins qu'on parle d'agios.

Le client reçoit alors :

$$V_n - \text{Agio} = \text{Valeur nette}$$

Pour calculer le poids total des commissions, on cherche le taux réel de l'escompte:

$$\text{Agio} = V_n t'n / 360$$

$$t' = \text{Agio} \times 360 / V_n n$$

### **Exercice n°12:**

Un bistrotier négocie une traite payable à 90 jours d'un montant de 4 400 DA auprès de sa banque aux conditions suivantes:

Taux d'escompte: 10%; Commission fixe: 4 par effet: Commission d'endos: 0,5%.

- Calculer le montant de l'agio, la valeur nette et le taux réel d'escompte de cet effet ?

### **Solution :**

- Le montant de l'Agio:  $\text{Agio} = \text{Commissions fixes} + \text{commission d'endos} + \text{frais de bordereau}$

$$\text{AN: Agio} = 4 + (4400 \times 0,5\% \times 90/360) + 4400 \times 2/1000 = 18,30 \text{ DA}$$

-La valeur nette =  $V_n - \text{Agio} = \text{Valeur nette}$

$$\text{AN: Valeur nette} = 4400 - 18,30 = 4\,381,70 \text{ DA}$$

- Le taux réel d'escompte:  $t' = 360 \times \text{Agio} / V_n n$

$$\text{AN: } t' = 360 \times 18,30 / 4\,400 \times 90 = 1,66\%$$

## **4. Comptes courants et d'intérêts**

### **4.1. Généralités**

Si les opérations consignées dans un compte bancaire (ou entre deux commerçants dont les relations d'affaires sont constantes) sont productives d'intérêts, il s'agit d'un compte courant d'intérêts.

Si le taux d'intérêt appliqué au solde est le même quel que soit le sens, débiteur ou créditeur, ce compte est dit à taux réciproques (entre commerçants). Dans le cas contraire, il s'agit de taux non réciproques ou différentiels (entre banque et commerçants). Ces taux, uniformes ou différenciés, peuvent demeurer constants au cours de la période de référence ou bien varier.

Les banquiers minorent ou majorent en leur faveur ces dates d'un ou de deux jours, appelés jours de banque ou jours de valeur. Le compte tenu par la banque comprend des agios (intérêts, commissions de tenue de compte ou de plus fort découvert) et la taxe sur les activités financières (TAF).

#### 4.2. La méthode hambourgeoise

La méthode hambourgeoise est unanimement utilisée dans les relations d'affaires. L'application de cette méthode implique que le solde soit déterminé après chaque opération. Ce solde porte intérêt jusqu'à la date de valeur de l'opération suivante ou la date de clôture du compte, s'il s'agit de la dernière opération. Le solde des intérêts est ajouté aux capitaux au terme de la période de référence. La méthode hambourgeoise comporte deux variantes:

- la méthode hambourgeoise chronologique où la tenue du compte se fait à partir des dates d'inscription des opérations;
- la méthode hambourgeoise ordonnée où la tenue du compte est fondée sur l'ordre d'inscription des dates de valeur.

Exclusivement utilisée actuellement, seule la méthode hambourgeoise ordonnée sera présentée.

#### Exercice n°13:

Un client a réalisé auprès de sa banque les opérations suivantes résumées dans le tableau ci-après, au cours du mois de mars. Présenter le compte courant et d'intérêts par la méthode hambourgeoise chronologique ordonnée en utilisant un taux de 1,5% sur les soldes créditeurs et de 7% sur les soldes débiteurs.

1/03:	Solde	65 000 DA	valeur	26/02
3/03:	retrait en espèces	5.000 DA	valeur	6/03
5/03:	retrait en espèces	15 000 DA	valeur	8/03

9/03:	retrait par chèque	23 000 DA	valeur	15/03
11/03:	remise effet	12 000 DA	valeur	31/05
15/03:	retour effet impayé	38 000 DA	valeur	10/03
18/03:	coupons détachés	40 000 DA	valeur	21/03
25/03:	dépôt chèque	50 000 DA	valeur	30/03
30/03:	intérêt reçu	7000 DA	valeur	05/04

Par ailleurs, on vous donne les informations suivantes: la commission fixe de découvert est de 0,05% du plus fort découvert mensuel; les frais fixes de gestion s'élèvent à 37 DA ; le taux de TAF est de 20,6%.

**Solution:**

Date	Libellés	Sommes		soldes		Dates	Jours	Intérêts	
		Débit	Credit	Débit	Credit			valeur	Débit
1/3/N	Solde		65 000		65 000	26/2/N	8		21.67
3/3/N	Retrait	5 000			60 000	6/3/N	2		5.00
5/3/N	Retrait	15 000			45 000	8/3/N	2		3.75
15/3/N	effet retour	38 000			7 000	10/3/N	5		1.46
9/3/N	Retrait	23 000		16 000		15/3/N	6		
18/3/N	Coupons		40 000		24 000	21/3/N	9		9.00
25/3/N	Chèque		50 000		74 000	30/3/N	6		18.50
30/3/N	Intérêts		7 000		81 000	5/4/N	56		189.00
11/3/N	effet remis		12 000		93 000	31/5/N	0		
31/5/N	solde créditeur int							229.71	
Totaux		81 000	174 000					248.38	248.38

	<b>Sommes</b>
--	---------------

	Débit	Crédit
	81 000	174 000
Intérêts		229.71
Commission de découvert	8	
Frais fixes	37	
TAF	7.62	
Solde créditeur	93 177	
Total	174 230	174 230
Solde à Nouveau		93 177

**Exercice n°14:**

Nous disposons de données suivantes relatives au compte courant et d'intérêts de la société DARBY à la banque X,

1/05	solde à nouveau	10 000 DA	valeur	30/04
5/05	versement d'espèces	25 000 DA	valeur	7/05
10/05	retrait par chèque	5 000 DA	valeur	8/05
20/05	retour effet impayé	40 000 DA	valeur	5/05
8/06	remise d'effets	18 000 DA	valeur	8/07
15/06	remise de chèques	8 000 DA	valeur	16/06
18/06	chèque n° 122	34 000 DA	valeur	23/06
22/06	remise d'effets	60 000 DA	valeur	22/07
24/06	Virement fournisseur	33 000 DA	valeur	23/06
14/07	intérêts versés	4 200 DA	valeur	16/07

Conditions:

- La commission de découvert est de 0.10% du plus fort découvert mensuel.

Cette commission ne peut excéder la moitié des intérêts du débit;

- Les frais fixes de gestion s'élèvent à 10.5 DA;
- Le taux d'intérêt sur les soldes créditeurs est de 1.25% et de 6.75% sur les découverts;
- La TAF est de 20.6%.

a) Présenter le compte courant et d'intérêts par la méthode hambourgeoise chronologique ordonnée.

A compter du 17/06 le taux d'intérêt sur les soldes créditeurs passe de 1.25% à 1% et de 6.75% à 7.25% sur les découverts.

b) Présenter le compte courant et d'intérêts par la méthode hambourgeoise chronologique ordonnée avec ces nouvelles conditions.

**Solution:**

a) Le compte courant et d'intérêts par la méthode hambourgeoise chronologique ordonnée se présente comme suit:

Date	Libellés	Sommes		soldes		Dates	Jours	Intérêts	
		Débit	Credit	Débit	Credit			valeur	Débit
1/05/N	Solde		10 000		10 000	30/04/N	5		1.73
20/05/N	Retour effet	40 000		30 000		5/05/N	2	11.25	
5/05/N	Versement espèces		25 000	5 000		7/05/N	1	0.9375	
10/05/N	Retrait chèque	5 000		10 000		8/05/N	39	73.125	
15/06/N	Remise chèque		8 000	2 000		16/06/N	7	2.625	
18/06/N	Chèque No 122		34 000		32 000	23/06/N	0		0
24/06/N	Virement fournisseur	33 000		1 000		23/06/N	15	2.8125	
8/06/N	Remise d'effet		18 000		17 000	8/07/N	8		4.722
14/07/N	Intérêts versés	4 200			12 800	16/07/N	6		2.666
22/07/N	Remise d'effet		60 000		72 800	22/07/N	0	solde	81.63
Totaux		82 200	155000					90.75	90.75

	Sommes	
	Débit	Crédit
	82 200	155 000
Intérêts	81.63	
Commission de découvert	30	
Frais fixes	10.5	
TAF	2.163	
Solde créditeur	72 675.7	
Total	155 000	155 000
Solde à Nouveau		72 675.7

b) Méthode hambourgeoise chronologique ordonnée avec les nouvelles conditions

Date	Libellés	Sommes		soldes		Dates	Jours	Intérêts	
		Débit	Credit	Débit	Credit			valeur	Débit
1/05/N	Solde		10 000		10 000	30/04/N	5		1.73
20/05/N	Retour effet	40 000		30 000		5/05/N	2	11.25	
5/05/N	Versement espèces		25 000	5 000		7/05/N	1	0.9375	
10/05/N	Retrait chèque	5 000		10 000		8/05/N	39	73.125	
15/06/N	Remise chèque		8 000	2 000		16/06/N	7	2.625	
18/06/N	Chèque No 122		34 000		32 000	23/06/N	0		0
24/06/N	Virement fournisseur	33 000		1 000		23/06/N	15	3.0208	
8/06/N	Remise d'effet		18 000		17 000	8/07/N	8		3.777
14/07/N	Intérêts versés	4 200			12 800	16/07/N	6		2.133
22/07/N	Remise d'effet		60 000		72 800	22/07/N	0	solde	0
	Solde d'intérêts								83.82
Totaux		82 200	155000					90.75	90.75

	Sommes	
	Débit	Crédit
	82 200	155 000
Intérêts	83.817	
Commission de découvert	30	
Frais fixes	10.5	
TAF	2.163	
Solde créditeur	72 673.5	
Total	155 000	155 000
Solde à Nouveau		72 673.5

### Récapitulatif de quelques formules

- ✓ Formule générale de la valeur acquise à intérêts simples:  $V_n = V_0 (1 + nt)$
- ✓ Formule de calcul de l'intérêt simple:  $I_n = V_0 ni / 360$
- ✓ Formule de calcul du taux réel d'intérêt simple:  $t' = t (1 - nt)$
- ✓ Formule de calcul de l'escompte commercial:  $E = V_a nt / 360$
- ✓ Formule de calcul de la valeur actuelle commerciale:  $A = V (1 - nt / 360)$
- ✓ Formule de calcul de l'escompte rationnel:  $E' = A nt / 360$
- ✓ Formule de calcul de la valeur actuelle rationnelle:  $A = V (1 + nt / 360)$

### A retenir:

- L'intérêt est dit simple lorsqu'il est versé en une seule fois et lorsqu'il est proportionnel à la durée du placement.
- Les intérêts simples concernent essentiellement les opérations dont le terme est au plus égal à un an.
- Il faut toujours exprimer  $i$  et  $n$  en unités de temps comparables.

- Le principe de comptage des jours consiste à exclure la date initiale et à inclure la date finale.
- Les conventions usuelles fixent l'année financière à 360 jours et chaque mois à son nombre exact de jours.

**Exercices pratiques**

**Exercice 1 :** Répondez selon les cas suivants :

1- La valeur nominale d'un papier commercial pour un acompte de marchandises à 170 000 DA à un taux d'intérêt de 5%.

- Calculer les avantages résultant du report du paiement des marchandises jusqu'à la fin de la troisième année à compter de la date du contrat ?

2- Le 24 mai, un papier commercial d'une valeur de 62 000 DA a été escompté à un taux d'intérêt de 8 %, de sorte que sa valeur actuelle a atteint 60 000 DA.

- Calculer la date d'échéance du papier commercial ?

3- Quelle est la date d'échéance d'un papier commercial d'une valeur de 150 000 DA, escompté le 10/05/2024 au taux de 7%, dont le détenteur recevra 148 425 DA ?

4- Quel est le taux d'actualisation d'une dette de 59 840 DA, arrivant à échéance le 27 décembre, qui donnait une valeur actuelle au 1er octobre de 58 104,64 DA?

**Exercice 2 :** La Banque A et la Banque B escomptent les effets de commerce selon les conditions suivantes :

	Banque A	Banque B
Taux d'escompte	10%	9.8%
Commission d`endos	0.6%	%0.7
Traitement	%0.5	%0.6
Commission fixe	5	4
TVA	%17	%17

Si un papier commercial d'une valeur de 5 000 unités monétaires arrive à échéance après 90 jours.

1- Calculer la valeur de l'Agio et la valeur actuelle dans les deux banques ?

2- Le taux d'escompte réel des deux banques ?

**Exercice 3** : La valeur actuelle d'une dette escomptée 72 jours avant son échéance est de 95 250 DA, au taux d'intérêt de 5 %. Si la différence entre l'escompte commercial et réel est égale à 550 DA.

- calculez la valeur nominale de la dette ? Calculer le principal et la durée de la dette ?

**Exercice 4** : Le 01/03/2022, la société A a vendu des fournitures de bureau pour 440 000 DA. Elle a convenu avec le client de payer des intérêts tous les trois mois pendant un an au taux d'intérêt de 7,5 % trois mois avant la fin de l'année. Cette année-là, elle a décidé d'escompter sa dette.

- Calculer le montant de la remise et le taux de remise réel ?

**CHAPITRE III .**  
**Les intérêts Composés**

Lorsque la durée du prêt excède l'année, le créancier demande en général que les intérêts lui soient versés périodiquement, au moins une fois par an, soit à terme échu soit dans certains cas à l'avance. Il peut, dans ce dernier cas, replacer les montants perçus pendant la durée restante du prêt. Si les taux de remplacement restent identiques au taux initial de l'opération, tout se passe comme si les intérêts étaient ajoutés au capital pour produire eux-mêmes des intérêts; on dit qu'ils sont capitalisés.

L'intérêt est donc dit composé lorsque les intérêts sont replacés avec le capital et portent intérêt à leur tour.

## 1. Notations

Considérons une opération de prêt avec intérêts payables périodiquement à terme échu. Si on note:

$V_0$ : valeur d'un capital initialement placé au temps  $t$ . (origine du temps);

$V_n$ : valeur acquise par le capital au bout de  $n$  périodes (au temps  $t_n$ ) au taux d'intérêt identique  $i$  avec capitalisation des intérêts à la fin de chaque période, c'est-à-dire le total de ce capital et des intérêts composés calculés sur les  $n$  périodes;

$t$ : taux d'intérêt pour un curio de capital par période (ou par unité de temps) exprimé en %;

$n$ : nombre de périodes pendant lesquelles est placé le capital initial  $V_0$

Alors, nous aurons:

$$V_n = V_0 (1+t)^n$$

Le facteur  $(1+t)^n$  est appelé facteur d'accumulation ou de capitalisation et repéré sente la valeur acquise par 1DA placé à intérêts composés pendant  $n$  périodes au taux d'intérêt périodique  $t$

On appelle donc capitalisation, l'opération qui consiste à rechercher la valeur acquise d'une somme après un certain nombre de périodes. Plus

simplement, il s'agit de calculer la valeur future d'un capital par la méthode des intérêts composés.

Année	Capital placé au début de la période	Intérêt produit pendant la période	Valeur acquise en fin de période après capitalisation des intérêts
1	$V_0$	$V_{0i}$	$V_0 + V_{0i} = V_0(1+i) = V_1$
2	$V_1$	$V_{1i}$	$V_1 + V_{1i} = V_1(1+i) = V_0(1+i)^2 = V_2$
3	$V_2$	$V_{2i}$	$V_2 + V_{2i} = V_2(1+i) = V_0(1+i)^3 = V_3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
K	$V_{k-1}$	$V_{k-1i}$	$V_{k-1} + V_{k-1i} = V_{k-1}(1+i) = V_0(1+i)^k = V_k$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N	$V_{n-1}$	$V_{n-1i}$	$V_{n-1} + V_{n-1i} = V_{n-1}(1+i) = V_0(1+i)^n = V_n$

**Exercice n°15:**

Un capital de 100 DA est placé à intérêts composés au taux annuel  $i$  de 12% avec capitalisation annuelle des intérêts. Calculer la valeur acquise au bout de cinq ans?

**Solution:**

Calcul de la valeur acquise:  $V_n = V_0(1+i)^n$

AN:  $V_5 = V_0(1+i)^5 = 100 (1,12)^5 = 176,23$  DA

**Exercice n°16:**

Supposons un capital de 490 DA, placé à un taux annuel 12,5%.

- a) Quelle est sa valeur acquise au bout de 8 ans ?
- b) Quelle sera cette valeur au bout de 11 ans et 5 mois ?

**Solution:**

a)  $V_8 = V_0(1+i)^8 = 490 (1,125)^8 = 1257, 23$  DA.

b) En utilisant l'intérêt simple pendant la 12 année, on aura:

$V_{11+5/12} = V_{11} + (V_{11} \times t \times 5/12) =$

$$=1790,09 + (1790,09 \times 0,125 \times 5/12) = 1883,32 \text{ DA}$$

**Remarque:**

On peut calculer indifféremment la somme à placer, le taux ou la durée à partir de la même formule

**Exercice n°17:**

On veut disposer dans deux ans de 10 000 DA en plaçant une somme quelconque au taux de 10% et à intérêts composés.

- Quelle somme doit-on placer aujourd'hui ?

**Solution:**

La somme à placer aujourd'hui:  $V_n = V_0(1 + t)^n$

$$\text{AN: } V_0 = 10\,000 (1+10\%)^{-2} = 8\,264,46 \text{ DA}$$

**Exercice n°18:**

On dispose aujourd'hui de 8 000 DA et on veut obtenir, à intérêts composés, 10 000 DA dans 2 ans.

- A quel taux effectuer le placement ?

**Solution:**

Le taux de placement:  $V_n = V_0(1+i)^n$       donc:  $t = (V_n/V_0)^{1/n} - 1$

$$\text{AN: } (10000/8000)^{1/2} - 1 = 11,8034 \%$$

**Exercice n°19:**

On dispose aujourd'hui de 8 000 DA que l'on place à intérêts composés pour obtenir 10 000 € avec un taux annuel d'intérêt de 10%.

- Quelle doit être la durée du placement ?

**Solution:**

Calcul de la durée de placement:

$$V_n = V_0 (1+t)^n \quad \text{donc: } n = \left( \frac{\log\left(\frac{V_n}{V_0}\right)}{\log(1+t)} \right) \quad \text{AN: } n = \left( \frac{\log\left(\frac{10000}{8000}\right)}{\log(1+0.1)} \right) = 2.34 \text{ ans}$$

sout 2 ans, 4 mois et 3 jours.

## 2. Taux proportionnel, taux équivalent

Il arrive couramment d'avoir à travailler sur une période différente de celle sur la quelle est de fiou le rius d'intérêt Il faut alors provingly finir, sur la preste de place

### Exercice n°20:

Un investisseur institutionnel acquiert une obligation à la Douala Stock Exchange celle-ci portant intérêt au taus annuel de 9%.

1) Calculer le taus périodique (semestriel) équivalent de rendement de cette obligation?

Le coupon est maintenant payé semestriellement et réinvesti au taux proportionnel semestriel

2) Déterminer ce taux proportionnel semestriel ?

3) Calculer le taux annuel équivalent issu de la composition du coupon ?

### **Solution:**

1) Le taux périodique semestriel:

$$(1+E_s)^2=1+t$$

$$\text{AN: } E_s = (1,09)^{1/2} - 1 = 4,403\%$$

2) Calcul du taux proportionnel:

$$E_s = t/2$$

$$\text{AN: } E_s = 0,09/2 = 4,5\%$$

3)Le taux annuel équivalent:

$$(1+E)^2=1+t \quad \text{donc } (1+E_s)^2 - 1 = t$$

$$\text{AN: } t = (1,045)^2 - 1 = 9,2025\%$$

### Exercice n°21:

Une multinationale dispose sur une période d'un an de 100 millions DA d'euros d'excédents de trésorerie. Elle met en compétition ses deux banquiers habituels

-la banque X propose de rémunérer le placement à un taux de 2,9% trimestriel, les intérêts étant composés trimestriellement sur la durée du placement

-La banque Y propose de rémunérer le placement à un taux semestriel de 3,5% composé semestriellement sur l'année.

► Quel placement le trésorier doit-il retenir ?

**Solution**

- Cas 1 (banque X):

$$V_n = V_0(1+t)^k$$

AN:  $V_1 = 100\,000\,000(1+0.029)^4 = 112\,114\,426 \text{ €}$

- Cas 2 (banque Y):

$$V_n = V_0(1+t_s)^k$$

AN:  $V_1 = 100\,000\,000(1+0.035)^2 = 112\,148\,100 \text{ DA}$

La multinationale choisira de placer ses excédents de trésorerie à la banque Y dans la mesure où ce placement comparé à celui de la banque X, lui permet de gagner 33 673,70 DA en plus.

**3. Calcul de la valeur acquise dans le cas où la durée de placement n'est pas un nombre entier de période**

On peut mieux appréhender cette notion à travers un exercice

**Exercice n°22:**

Quelle est la valeur acquise par 1 DA au bout de 4 ans et trois mois placé à intérêts composés au taux annuel de 12% ?

**Solution:**

Trois solutions sont envisageables

**3.1. une solution rationnelle**

$$V_{k+p/q} = V_0(1+t)^k(1+tp/q)$$

$$V_{4+3/12} = 1(1+0.12)^4(1+0.12 \times 3/12)$$

$$V_{4+3/12} = 1.62 \text{ DA}$$

**3.2. une solution commerciale:**

$$V_{k+p/q} = V_0(1+t)^{k+p/q}$$

$$V_{4+3/12} = 1(1+0.12)^{4+3/12}$$

$$V_{4+3/12} = 1.61 \text{ DA}$$

**3.3. une solution limitation:**

$$V_{k+p/q} = V_k + (V_{k+1} - V_k) p/q$$

$$V_{4+3/12} = V_4 + (V_5 - V_4) 3/12$$

$$V_{4+3/12} = 1(1.12)^4 + (1(1.12)^5 - 1(1.12)^4) 3/12 = 1.62 \text{ DA}$$

**Exercice n°23:**

Quelle est la valeur acquise par 60 000 DA au bout de 5 ans et trois mois placé à intérêts composés au taux annuel de 8% ?

**Solution:**

Trois solutions sont envisageables

**Cas1: une solution rationnelle**

$$V_{k+p/q} = V_0(1+t)^k(1+tp/q)$$

$$V_{4+3/12} = 60\,000(1+0.08)^5(1+0.08 \times 3/12)$$

$$V_{4+3/12} = 89922.87 \text{ DA}$$

**Cas 1: une solution commerciales:**

$$V_{k+p/q} = V_0(1+t)^{k+p/q}$$

$$V_{4+3/12} = 60\,000(1+0.08)^{5+3/12}$$

$$V_{4+3/12} = 89\,872.32 \text{ DA}$$

**Cas 3: une solution limitation:**

$$V_{k+p/q} = V_k + (V_{k+1} - V_k) p/q$$

$$V_{4+3/12} = V_4 + (V_5 - V_4) 3/12$$

$$V_{4+3/12} = 60\,000(1.08)^4 + (60\,000(1.08)^5 - 60\,000(1.08)^4) 3/12 = 89\,922.87 \text{ DA}$$

**4. Taux d'intérêt moyen d'une série de financement**

Nous allons, comme nous l'avons fait précédemment, nous appuyer sur un exemple pour expliciter cette notion..

**Exercice n°24:**

Un capital de 100 000 DA est emprunte a intérêts composés pendant 36 mois à 10% les 18 premiers mois, à 12% les & suivants et enfin à 13% les 10 mois restants. Il est remboursé avec les intérêts en fin d'emprunt.

- Quel est le taux moyen annuel  $t$  de l'emprunt ?

**Solution**

Au bout de 18 mois, la somme due est de (intérêts composés):

$$V_1 = 100\ 000 (1,1)^{18/12} = 115.370 \text{ DA}$$

Puis, elle porte intérêts pendant 8 mois à 12%

$$V_2 = V_1 (1,12)^{8/12} = 124\ 4266 \text{ DA}$$

Enfin, elle porte intérêt pendant 10 mois à 13%.

$$V_3 = V_2 (1,12)^{10/12} = 137\ 765 \text{ DA}$$

On peut obtenir le même résultat en procédant différemment:

$$\begin{aligned} V_3 &= 100\ 000 \times (1,1)^{18/12} \times (1,12)^{8/12} \times (1,13)^{10/12} \\ &= 100\ 000 \times 1.1537 \times 1.0785 \times 1.1072 = 137\ 765 \text{ DA} \end{aligned}$$

Si on suppose qu'on veut régler la même somme en fin de troisième année mais avec un intérêt calculé sur 3 ans à un taux unique  $t$ , on aura:

$$100\ 000 (1+t)^3 = 137\ 765 \text{ DA}$$

$$(1+t)^3 = 137765 / 100000 = 1,37765 \text{ DA}$$

$$t = \sqrt[3]{1.37765} - 1 = 0,1127 = 11,27\%$$

$$\text{Vérification: } V_3 = 100\ 000 (1,1127)^3 = 137\ 765 \text{ DA}$$

Ainsi, l'emprunt de 100 000 DA aura coûté en moyenne 11,27% par an sur trois ans

**Remarque:**

On pourra directement déterminer  $t$

$$t = \sqrt[3]{1.1537 \times 1.0785 \times 1.1072} - 1$$

Formule générale pour in de 1 à k

$$t = \sqrt[n]{(1 + t_1)^{n1} \times (1 + t_2)^{n2} \times \dots \times (1 + t_k)^{nk}} - 1$$

**Exercice n°25:**

On place 8 250 DA à intérêts composés pendant cinq ans à un taux annuel variable (capitalisation annuelle).

Le taux annuel est de 7,5% pendant les deux premières années, 8% à la troisième année et 7% les deux dernières années.

- 1) Quelle est la valeur acquise au bout de cinq ans par ce capital ?
- 2) A quel taux annuel fixe aurait-il fallu effectuer ce placement pour obtenir au bout de cinq ans la même valeur acquise ?

**Solution:**

- 1) La valeur acquise:

$$V_a = 8250 (1,075)^2 \times (1,08)^1 \times (1,07)^2 = 11\,788,5988 \text{ DA}$$

- 2) Le taux moyen:

$$t_m = ((1,075)^2 \times (1,08)^1 \times (1,07)^2)^{1/5} - 1 = 7.3993\%$$

NB: Déterminer la racine cinquième d'un nombre revient à calculer le nombre à la puissance 1/5.

**5. Valeur actuelle d'un capital-formule d'actualisation**

Nous avons vu que la valeur acquise par un capital  $V$ , au bout de  $n$  périodes au taux d'intérêt identique  $i$  avec capitalisation des intérêts à la fin de chaque période est le montant total de ce capital et des intérêts composés produits sur les  $n$  périodes.

$$V_n = V_0(1+t)^n$$

Nous appellerons valeur actuelle, le capital  $V_0$  qu'il faudra placer à intérêts composés au taux  $t$  pendant  $n$  années pour produire le capital  $V_n$ :

$$V_0 = V_n (1+t)^{-n}$$

$(1+t)^{-n}$  est le facteur d'actualisation ou d'escompte et il représente la valeur actuelle d'un euro disponible l'année n (les valeurs de ce facteur sont données dans les tables financières en fonction de i et de n).

On appellera actualisation, l'opération qui consiste à rechercher la valeur actuelle d'une somme disponible dans le futur

**Exercice n°26:**

Une personne veut constituer un capital de 100 000 DA au 1/11/N. Quelle somme doit-elle placer a intérêts composés au taux de 10% le 1/11/N-3?

**Solution:**

$$V_0 = V_n (1+t)^{-n}$$

$$AN: V_0 = 100\,000 (1+0.1)^{-3} = 75\,131.48 \text{ DA}$$

**Exercice n°27:**

Quel est le taux d'intérêt annuel de capitalisation continu équivalent au taux de 12%?

**Solution:**

$$t = \log(1+t) = \log(1,12) = 11,33\%$$

**Exercice n°28:**

Un capital de 1 000 DA investi en t, rapporte au bout de cinq ans de placement un revenu de 610,5 DA.

- Quel est le taux continu équivalent au taux annuel nominal de rémunération de ce placement?

**Solution:**

$$\text{Le taux annuel: } t_a = (V_n/V_0)^{1/n} - 1 = (1610,5/1000)^{1/5} - 1 = 10\%$$

$$\text{Le taux continu équivalent: } t_c = \log(1+t) = \log(1,1) = 9,5\%$$

Récapitulatif de quelques formules:

Valeur acquise d'un capital forme de capitalisation:

$$V_n = V_0 (1+t)^n$$

**Exercice n°29:**

1 100 DA est placé pour une durée de 5 ans dans un compte Épargne au taux de 4,2 % par an capitalisé annuellement.

- Calculer la valeur future.
- Calculer le montant d'intérêt gagné.

**Solution:**

On dispose des données suivantes:

$$V_0 = 1100 \text{ DA}, n=5 \text{ ans}, t = 4,2\% , m=1 \text{ (capitalisé annuellement)}$$

$$\text{a. On sait que } V_n = V_0(1+t)^n$$

$$\text{Donc on a DA. } V_n = 1100(1+0,042)^5 = 1351 \text{ DA.}$$

La valeur future de ce placement vaut environ 1 351 DA.

$$\text{b./I= } V_n - V_0 = 1351 - 1100 = 251 \text{ DA.}$$

En ayant recours à ce placement, on gagne 251 DA.

**Exercice n°30:**

Déterminer le montant des intérêts reçus lors du dépôt de 2 339 DA pour 6,5 ans à un taux de 5,23% capitalisés trimestriellement.

**Solution:**

On dispose des données suivantes :

$$V_0 = 2339 \text{ DA}, t = 5,23\% , a = 6,5 \text{ ans}$$

$$m=4 \text{ (capitalisé trimestriellement)}$$

$$\text{Donc: } n=ma = 4 \times 6,5 = 26$$

$$\text{Donc: } V_n = V_0 (1+t)^n$$

$$\text{On sait que : } V_{26} = 2339(1+0,013075)^{26} = 8\,803.57 \text{ DA}$$

$$\text{Donc: } I_{26} = V_{26} - V_0 = 8\,803.57 - 2\,339 = 6\,464.57 \text{ DA}$$

La valeur future de ce placement vaut environ 6 464.57 DA

**Exercice n°31:**

Quelle est la valeur que je dois investir au jour d'hui si je veux récupérer 8 000 DA dans 7 ans au taux de 6,1% capitalisés annuellement ?

**Solution:**

On dispose des données suivantes:

$V_n = 8\,000$  DA ,  $m=1$  (capitalisé annuellement)  $n = 7$  ans,  $t=6,1\%$  On sait que  $V_0$

Donc on:  $V_n = V_0 (1+t)^n$

$V_0 = V_n / (1+t)^n = 8.000 / (1+0,061)^7 = 5\,285,45$  DA.

Ainsi, si je veux récupérer 8 000 DA dans 7 ans au taux de 6,1% capitalisé annuellement, je dois placer environ 5 285 DA aujourd'hui.

### **Exercice n°32:**

On suppose qu'on place 2 550 DA au taux de 5,2% de façon continue.

Quel est le montant de la somme capitalisée au bout de 6 ans ?

### **Solution:**

On dispose des données suivantes:

$V_0 = 2\,550$  DA ,  $t = 5,2\%$  ,  $n = 6$

On sait que:  $V_n = V_0(1+t)^n$

Donc on:  $V_n = 2\,550 (1 + 0,052)^6 = 3\,456.48$  DA

\*Ce placement rapportera environ 3 456.48 DA au bout de 6 années.

### **Entraînement**

Questions de réflexion et de mise en pratique: Notions Vrai/Faux

- 1) Si je place un capital à intérêt composé, l'intérêt obtenu sera supérieur celui obtenu avec un intérêt simple si la durée de placement est supérieure à 1 an.
- 2) Si je place un capital, il me faudra plus de temps pour le doubler si les intérêts sont composés et moins de temps si les intérêts sont simples.
- 3) Je dispose aujourd'hui d'un capital à placer et je souhaite le doubler en 10 ans. Le taux d'intérêt de ce placement doit être plus élevé si les intérêts sont calculés simplement, plutôt que de manière composée.
- 4) Si je place un capital sur une période de 6 mois, la somme obtenue à l'issue du placement sera plus importante avec un intérêt simple qu'avec un intérêt composé.
- 5) Si je place un capital sur 5 ans, la somme obtenue à l'échéance du placement

sera moins grande avec un intérêt simple qu'avec un intérêt composé

**Solutions:**

Notions Vrai/Faux:

1) Réponse: Vrai

**Commentaire:** le montant acquis à l'issue du placement est supérieur lorsque le calcul des intérêts est composé si le temps de placement est supérieur à l'unité. Le surplus provient de l'intérêt sur l'intérêt.

2) Réponse: Faux

**Commentaire:** lorsque le calcul des intérêts est composé, il y a un intérêt sur l'intérêt. On obtiendra donc, des lors, plus rapidement le double du capital placé,

3) Réponse: Vrai

**Commentaire:** lorsque le calcul des intérêts est composé, il y a un intérêt sur l'intérêt. Des lors, pour un horizon de placement fixé à 10 ans pour doubler un capital, le taux d'intérêt sera plus faible que dans le cas de l'intérêt simple. Autrement dit, pour une équivalence, il faudra un taux plus élevé en intérêt simple pour doubler un capital sur 10 ans.

4) Réponse: Vrai

**Commentaire:** sur une période inférieure à l'année, il n'y a pas de composition de l'intérêt et donc l'intérêt simple sera plus rentable.

5) Réponse: Vrai

**Commentaire:** sur une période supérieure à l'année, l'intérêt composé génère de l'intérêt sur les intérêts des années précédentes. On obtiendra donc plus qu'avec l'intérêt simple.

**Récapitulatif de quelques formules**

✓ Valeur actuelle d'un capital - formule d'actualisation:

$$V_0 = V_n (1+t)^{-n}$$

- ✓ Calcul d'un taux proportionnel :  $t_k = t/k$
- ✓ Calcul d'un taux équivalent  $t_k = (1+t)^{1/k} - 1$
- ✓ Cas ou n est fractionnaire solution rationnelle:

$$V_{k+p/q} = V_0(1+t)^k(1+tp/q)$$

- ✓ Cas ou a est fractionnaire solutions commerciales:

$$V_{k+p/q} = V_0(1+t)^{k+p/q}$$

- ✓ Cas ou a est fractionnaire solutions limitation:

$$V_{k+p/q} = V_k + (V_{k+1} - V_k) p/q$$

- ✓ Calcul d'un taux d'intérêt moyen d'une série de financement

$$t = \sqrt[n]{(1+t_1)^{n_1} \times (1+t_2)^{n_2} \times \dots \times (1+t_k)^{n_k}} - 1$$

- ✓ Taux de capitalisation continue

$$t = \log(1+t) / \log e = \log(1+t)$$

**A retenir:**

- L'intérêt est dit composé lorsque les intérêts sont replacés avec le capital et portent intérêt à leur tour.
- L'opération qui consiste à rechercher la valeur acquise d'une somme après un certain nombre de périodes s'appelle la capitalisation. Celle qui consiste à rechercher la valeur actuelle d'une somme disponible dans le futur s'appelle actualisation.
- Si les intérêts périodiques sont calculés de façon proportionnelle, la valeur acquise en fin d'année sera d'autant plus élevée que la capitalisation des intérêts est plus Fréquente.
- Deux taux correspondant à des périodes de capitalisation différentes sont dits équivalents lorsque pour une même durée de placement, ils conduisent à une même valeur acquise à intérêts composés.

**Exercice pratique****Exercice n°1:**

- 1) Dans 3 ans, vous recevrez une somme de 30 000 DA. Vous pensez pouvoir l'investir pendant 5 ans au taux annuel de 6,5 %. De quel montant disposerez-vous dans 8 ans à l'échéance de votre placement avec intérêt simple et intérêt composé?
- 2) Vous disposez d'un montant de 1 000 DA que vous placez pendant 10 ans. Vous comparez les taux de différents placements qui vous proposent un taux d'intérêt de 1,80%, de 1,90% ou de 2% capitalisé annuellement de manière composée. Il est logique qu'on privilégiera 2%. Comparez ce que ces trois formules vous rapportent après 10 ans.
- 3) Vous voulez être millionnaire. Vous pouvez investir un montant unique de 20 000 DA aujourd'hui et vous faites l'hypothèse de placer cette somme au taux de rendement annuel moyen de 12% (à intérêt composé). Dans ces circonstances, quand serez-vous millionnaire (sans inflation)?
- 4) Vous rêvez d'acheter un petit cabriolet. Vos économies, actuellement en banque, représentent la moitié du prix. Si vous placez cet argent au taux d'intérêt annuel de 7%, dans combien de temps pourrez-vous acheter ce véhicule sans autre apport financier?
- 5) Vaut-il mieux recevoir 1000 DA aujourd'hui ou 2000 DA dans 10 ans si le taux d'intérêt auquel je peux placer cette somme est de 8% et que les intérêts sont composés?
- 6) Vous avez gagné à un jeu télévisé et devez choisir de recevoir soit 25 000 DA aujourd'hui, soit 30 000 DA dans 2 ans.

À quelle condition ces deux options seraient-elles équivalentes ?

- 7) Votre banquier vous propose l'achat d'un bon de capitalisation. Il est vendu aujourd'hui à 75 DA et vous sera remboursé en une fois (capital et intérêts) au pris de 100 DA dans 6 ans.

Quel serait le bon de capitalisation de même durée mais vendu aujourd'hui au prix de 100 DA pour lequel vous seriez indifférent?

**Exercice n°2:**

- 1- Un capital de 100 DA est placé à intérêts composés au taux annuel  $i$  de 12% avec capitalisation annuelle des intérêts.
  - Calculer la valeur acquise au bout de cinq ans?
- 2- On veut disposer dans deux ans de 10 000 U.M en plaçant une somme quelconque au taux de 10% et à intérêts composés.
  - Quelle somme doit-on placer aujourd'hui ?
- 3- On dispose aujourd'hui de 8 000 DA et on veut obtenir, à intérêts composés, 10 000 DA dans 2 ans.
  - A quel taux effectuer le placement?
- 4- On dispose aujourd'hui de 8 000 DA que l'on place à intérêts composés pour obtenir 10.000 DA avec un taux annuel d'intérêt de 10%.
  - Quelle doit être la durée du placement ?
- 5- Quelle est la valeur acquise par 1 000 DA au bout de 4 ans et trois mois placé à intérêts composés au taux annuel de 12%?
- 6- Une personne veut constituer un capital de 100000 DA au  $1/11/N$ .
  - Quelle somme doit-elle placer a intérêts composés au taux de 10% le  $1/11/N-3$ ?

**Exercice n°3:**

Supposons un capital de 490 DA, placé à un taux annuel 12,5%.

- 1- Quelle est sa valeur acquise au bout de 8 ans ?
- 2- Quelle sera cette valeur au bout de 11 ans et 5 mois ?

**Exercice n°4:**

Un capital de 100 000 DA est emprunte a intérêts composés pendant 36 mois à 10% les 18 premiers mois, à 12% les & suivants et enfin à 13% les 10 mois restants. Il est remboursé avec les intérêts en fin d'emprunt.

- Quel est le taux moyen annuel  $t$  de l'emprunt?

**Exercice n°5:**

Un investisseur institutionnel acquiert une obligation à la Douala Stock Exchange celle-ci portant intérêt au taux annuel de 9%.

1- Calculer le tauxw périodique (semestriel) équivalent de rendement de cette obligation?

Le coupon est maintenant payé semestriellement et réinvesti au taux proportionnel semestriel

2- Déterminer os taux proportionnel semestriel ?

3- Calculer le taux annuel équivalent issu de la composition du coupon ?

**Exercice n°6:**

Une multinationale dispose sur une période d'un an de 100 DA d'euros d'excédents de trésorerie. Elle met en compétition ses deux banquiers habituels

- la banque X propose de rémunérer le placement à un taux de 2,9% trimestriel, les intérêts étant composés trimestriellement sur la durée du placement
- La banque Y propose de rémunérer le placement à un taux semestriel de 3,5% composé semestriellement sur l'année.

- Quel placement le trésorier doit-il retenir ?

**Exercice n°7:**

1) Calculer la valeur acquise d'un capital de 6.000 DA au taux de 6% annuellement pendant 3 ans dans les deux cas Les suivants :

A. Une capitalisation annuelle ?

B. Capitalisation mensuelle ?

2) Quelle est la capitalisation la plus avantageuse ?

**Exercice n°8:**

On place 8 250 DA à intérêts composés pendant cinq ans à un taux annuel variable (capitalisation annuelle).

Le taux annuel est de 7,5% pendant les deux premières années, 8% à la troisième année et 7% les deux dernières années.

- 1- Quelle est la valeur acquise au bout de cinq ans par ce capital ?
- 2- A quel taux annuel fixe aurait-il fallu effectuer ce placement pour obtenir au bout de cinq ans la même valeur acquise ?

# **CHAPITRE IV.**

## **Les Equivalences**

## 1. Effet de commerce

### 1.1. Définition:

Un effet de commerce constitue un instrument financier employé dans le contexte des échanges commerciaux pour assurer le règlement d'une dette. C'est un document écrit et transférable qui officialise l'engagement de paiement entre deux acteurs: le bénéficiaire (celui qui doit recevoir le paiement) et le souscripteur (celui qui doit effectuer le paiement).

### 1.2. Deux formes existent:

#### 1.2.1. Lettre de change ou traite:

C'est un document par lequel le créancier (vendeur: (acheteur: tiré) donne l'ordre à son débiteur valeur nominale à une date d'échéance donnée. Le bénéficiaire: le créancier lui-même ou une tierce personne.

#### 1.2.2. billet à ordre:

C'est un instrument financier polyvalent qui peut servir dans différentes transactions, telles que le financement de projets, l'octroi de prêts commerciaux ou la gestion d'opérations de crédit. L'une de ses caractéristiques clés est sa négociabilité, ce qui signifie qu'il peut être cédé à des tiers si les conditions du billet le permettent. Il est établi par le client. L'effet peut être remis à l'encaissement, remis à l'escompte ou endossé.

## 2. Equivalence de 2 effets (ou 2 capitaux) à intérêts simples

### Définition:

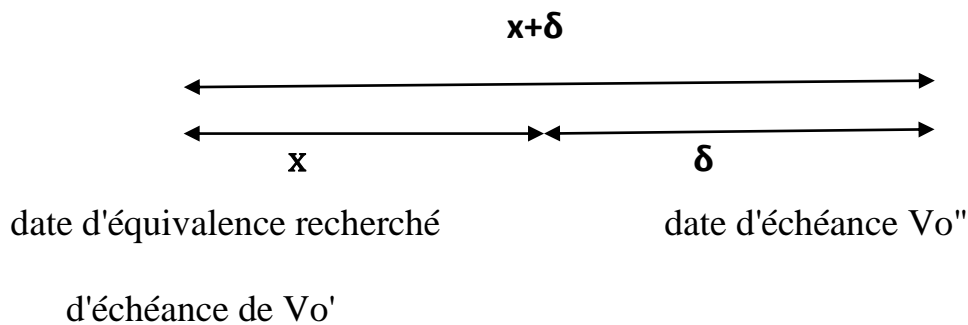
2 effets (ou 2 capitaux) sont dits équivalents à intérêts simples à une date d'équivalence  $T$  s'ils ont la même valeur actuelle à la date  $T$  au même taux  $t$ .  
Pour  $1 \leq N \leq 2$ .

Deux effets ou ensembles d'effets (ou de capitaux) de valeurs nominales et d'échéances différentes sont dits équivalents à une date donnée, si escomptés

au même taux, la somme des valeurs actuelles du premier ensemble est égale à la somme des valeurs actuelles du second ensemble.

Soit deux effets de valeurs nominales  $V_0'$  et  $V_0''$ . Quelle est leur date d'équivalence ?

Soit  $x$ , le nombre de jours séparant la date d'équivalence cherchée de la date d'échéance de l'effet dont l'échéance est la plus proche. Soit le nombre de jours séparant les deux dates d'échéance:



La condition d'équivalence, c'est-à-dire l'égalité à la date d'équivalence des valeurs actuelles commerciales des deux effets s'écrit ainsi :

$$V_0' - (V_0'x / (360/t)) = V_0'' - (V_0''(x + \delta) / (360/t))$$

On en déduit:

$$(V_0''(x + \delta) / (360/t)) - (V_0'x / (360/t)) = V_0'' - V_0'$$

$$(V_0''x + V_0'' \delta) / (360/t) - (V_0'x / (360/t)) = V_0'' - V_0'$$

$$x(V_0'' - V_0') / (360/t) + (V_0'' \delta / (360/t)) = V_0'' - V_0'$$

$$x(V_0'' - V_0') / (360/t) = V_0'' - V_0' - V_0'' (\delta / (360/t))$$

$$x = \frac{V_0'' - V_0' - V_0'' (\delta / (360/t))}{(V_0'' - V_0') / (360/t)}$$

$$x = \frac{(360/t)(V_0'' - V_0') - (360/t)V_0'' (\delta / (360/t))}{(V_0'' - V_0')}$$

$$x = (360/i) - \frac{V_0''}{(V_0'' - V_0')} \delta$$

En résumé, en escompte à intérêts simples, deux effets ou capitaux ne peuvent être équivalents qu'à une et une seule date; s'ils ne l'étaient pas avant, ils ne le seront plus après.

### Exercice n°29:

On dispose de deux effets de commerce de valeurs nominales  $V_0' = 9\,900$  DA et  $V_0'' = 10\,000$  DA et d'échéances respectives  $1/10/N$  et  $5/11/N$ . Déterminer leur date d'équivalence, sachant que le taux d'escompte est de 10%.

#### **Solution:**

Calcul de la date d'équivalence: x

$$x = (360/t) - \frac{V_0''}{(V_0'' - V_0')} \delta$$

$$AN: X = 360/0,1 - (10000/10000-9900) \times 35 = 100 \text{ jours}$$

La date recherchée est le 23 juin N.

### Exercice n°30:

La valeur actuelle au 25 mars d'un effet escompté commercialement à 9% s'élève à 1 967 DA. Si cet effet avait été escompté 30 jours avant son échéance, l'escompte aurait été inférieur de 18 DA à l'escompte supporté dans la première hypothèse.

- Retrouver la valeur nominale de l'effet et son échéance.

#### **Solution:**

- Si l'effet avait été escompté 30 jours avant son échéance, sa valeur actuelle aurait été supérieure de 18 DA à la valeur actuelle observée au 25 mars. Cette valeur actuelle serait donc égale à:

$$1967 + 18 = 1985 \text{ DA}$$

pour une durée d'escompte de 30 jours.

On peut donc écrire:

$$V - V(9)(30) / 36\,000 = 1985$$

$$36\,000 V - 270V = 1985 \times 36\,000$$

D'où  $V = 2000 \text{ DA}$

- En désignant par  $n$  le nombre initial de jours d'escompte, on peut écrire:

$$(2000)(9)n / 36000 = 2000 - 1967$$

$$n = 66$$

La date cherchée se situe 66 jours après le 25 mars; soit le 30 mai.

### **Exercice n°33:**

Déterminer au taux d'escompte de 9%, la date d'équivalence des deux effets suivants:

- 3 120 DA à échéance le 31 octobre;

- 3 152 DA à échéance le 10 décembre

#### **Solution:**

Situons la date qu'on recherche  $n$  jours avant le 31 octobre. Nous pourrions écrire :

$$3120 - 3\,120 \times 9 \times n / 36\,000 = 3152 - (3152 \times 9 \times (n+40)) / 36\,000$$

L'égalité ci-dessus conduit facilement à  $0,008n = 0,48n \rightarrow n = 60$  jours avant le 31 octobre; soit le 1<sup>er</sup> septembre.

### **Exercice n°34:**

Le premier mai, on remplace un effet à échéance le 31 mai par un autre à échéance le 15 juillet.

Sachant que le taux d'escompte est de 10% et que la valeur nominale du nouvel effet est de 16 065 DA, déterminez la valeur nominale de l'effet à échéance le 31 mai.

#### **Solution:**

Désignons par  $V$  la valeur nominale cherchée.

Ecrivons l'équivalence des deux effets à la date du premier mai.

$$V - V \times 10 \times 30 / 36.000 = 16\,065 - (16\,065 \times 10 \times 75) / 36.000$$

$$V=15\ 862,5\ \text{DA};$$

### 3. Cas de remplacement de plusieurs effets par un effet unique $V_0$

Le problème consiste à remplacer  $m$  effets de valeurs nominales respectives  $V_0', V_0'', \dots, V_0^m$  et à échéances respectives  $n', n'', \dots, n^m$  jours, comptés à partir de la date de substitution, par un effet unique de valeur nominale  $V_0$ , et ayant  $n$  jours à courir.

L'effet unique est caractérisé par deux paramètres: sa valeur nominale  $V_0$  et sa durée de vie  $n$ . On peut fixer arbitrairement l'une de ces deux variables et l'autre sera déduite par le calcul.

#### \* n est connu

L'inconnue  $V_0$  sera déterminée en écrivant la condition d'équivalence à la date de substitution envisagée, c'est-à-dire l'égalité entre la valeur actuelle commerciale de l'effet unique et la somme des valeurs actuelles commerciales des effets remplacés.

$$V_0 - (V_0 n / (360/t)) = V_0' - (V_0' n' / (360/t)) + V_0'' - (V_0'' n'' / (360/t)) + \dots + V_0^m - (V_0^m n^m / (360/t))$$

#### Exercice n°35:

Un débiteur demande à son créancier de remplacer à compter du premier septembre N les trois effets suivants:

- 5 000 DA à échéance le 1<sup>er</sup>/10/N,
- 7 200 DA à échéance le 21/10/N,
- 12 000 DA à échéance le 30/11/N, par un effet unique à échéance le 31/10/N

Quelle doit être la valeur nominale de cet effet sachant que le taux d'escompte est de 10% ?

#### **Solution:**

$$V_0 - (V_0 n / (360/t)) = V_1 - (V_1 n_1 / (360/t)) + V_2 - (V_2 n_2 / (360/t)) + V_3 - (V_3 n_3 / (360/t))$$

$$V_0(1-nt/360) = V_1 - V_1n_1 t/360 + V_2 - V_2n_2 t/360 + V_3 - V_3n_3 t/360$$

$$V_0 = \frac{V_1 - V_1n_1t/360 + V_2 - V_2n_2t/360 + V_3 - V_3n_3 t/360}{(1-nt/360)}$$

AN:  $V_0 = 24\ 162,4$  DA

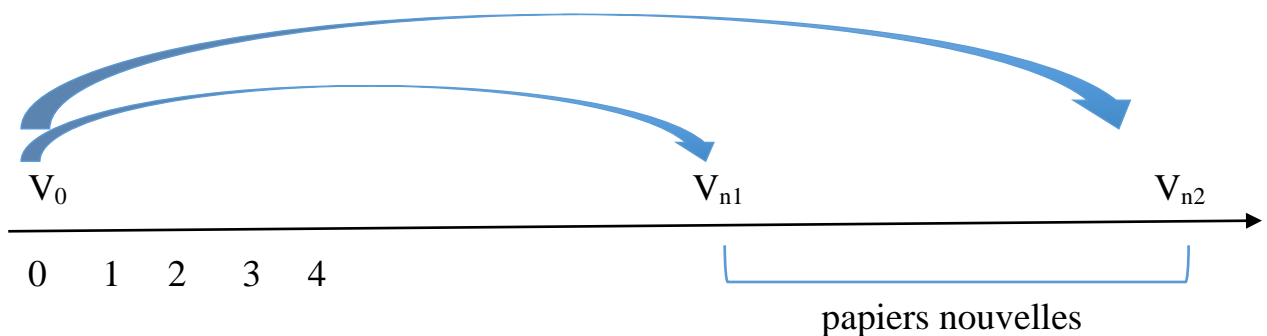
**4. Equivalence a intérêts composes**

**Définition:**

l'égalité des papiers commerciaux et Financiers: est le remplacement d'une au plusieurs nouvelles conditions à la demande du débiteur. C'est ce qu'on appelle la parité papier, ce que signifie que la valeur actuelle de la nouvelle dette est égale a la valeur actuelle de l'ancienne dette.

On a:

valeur actuelle de la nouvelle dette



$$V_{a1} = V_{a2} \Rightarrow V_{n1} (1 - tn_1) = V_{n2} (1 - tn_2)$$

$$V_a = V_{n1} + V_{n2} + V_{n3} \Rightarrow V_n(1 - tn) = V_{n1}(1 - tn_1) + V_{n2}(1 - tn_2) + V_{n3}(1 - tn_3)$$

**Exercice n°36:**

Une personne doit 40.000 DA euros à payer au bout de 3 mois, elle demande a son créancier de reporter la dette de 6 mois supplémentaires.

-Calculer la valeur nominale de la nouvelle dette si vous avez que la taux d'intérêt est de 5% ?

**Solution:**

$$V_{n1} = 40.000 , n_1 = 3 \text{ mois} , t = 5\% , n_2 = 6 \text{ mois} , V_{n2} = ?$$

$$V_{a1} = V_{a2} \Rightarrow V_{n1} (1 - tn_1) = V_{n2} (1 - tn_2)$$

$$40\ 000 (1 - 0.05 \times 3/12) = V_{n2} (1 - 0.05 \times 6/12)$$

$$V_{n2} = 40\ 512.82 \text{ DA}$$

**Exercice n°37:**

Une personne a décidé de remplacer trois dettes par une nouvelle dette exigible deux ans compte de la date du premier accord ou:

Première dette : 20 000 DA à 6 mois

La deuxième dette: 15 000 DA à exigible au bout d' 1 an

La troisième dette: 30 000 DA à un an et 6 mois.

- 1) Calculer la valeur nominale de la nouvelle dette si vous avez que le taux d'intérêt est de 0.05 ?
- 2) La personne bénéficie-t- elle ou non du changement de religion ?

**Solution:**

1)

$$V_a = V_{n1} + V_{n2} + V_{n3} \Rightarrow V_n(1 - tn) = V_{n1}(1 - tn_1) + V_{n2}(1 - tn_2) + V_{n3}(1 - tn_3)$$

$$V_n(1 - 0.05 \times 2) = 20\ 000(1 - 0.05 \times 1/2) + 15\ 000(1 - 0.05 \times 1) + 30\ 000(1 - 0.05 \times 3/2)$$

$$V_n = (19\ 500 + 14\ 250 + 27\ 750) / 0.9 = 61\ 500 / 0.9 = 68\ 333.33 \text{ DA}$$

- 2) Vous n'avez pas tiré profit de la transformation des trois dettes en une seule, car cela a entraîné de nouvelles dépenses, qui sont les intérêts.

**Exercice pratique****Exercice n°1:**

Trois billets de trésorerie, respectivement leur valeur nominale et leurs dates d'échéance :

- 1 000 DA sont dus le 31 mai
- 4 000 DA sont dus le 30 juin
- 3.200 DA sont dus le 30 juillet

Le propriétaire de ces billets souhaitait les échanger contre un seul billet, le 1er mai, avec une échéance le 20 juin.

- Quelle est la valeur nominale de ce seul billet si l'on sait que le taux est de 6% ?

**Exercice n°2 :**

Une personne possède des papiers commerciaux qui sont :

Le premier papier, est de 45 000 DA, dû après 60 jours

Le deuxième papier, 60 000 DA, arrive à échéance après 75 jours

Le troisième papier, 36 000 DA, arrive à échéance dans 100 jours

Cette personne a décidé, en accord avec le débiteur, de remplacer les papiers par un seul papier arrivant à échéance au bout de 150 jours.

- Calculer la valeur du nouveau billet, sachant que le taux d'intérêt est de 10 % ?

**Exercice n°3 :**

Au 1/1/ un débiteur s'est mis d'accord avec son créancier pour remplacer les effets de commerce suivants :

La première papier : sa valeur est de 23 400 DA, payable dans un mois.

Deuxième papier : sa valeur est de 15 000 DA, payable au bout de deux mois.

Troisième papier : sa valeur est de 22 100 DA, payable au bout d'un an.

Avec deux effets de commerce, la valeur de chacun est de 30 328 DA, où : le premier effet arrive à échéance après un an et le second après 6 mois.

- Quel est le taux de remise qui permet d'égaliser les cartes ?

**Exercice n°4:**

Une personne doit 60.000 U.M euros à payer au bout de 2 mois, elle demande a son créancier de reporter la dette de 10 mois supplémentaires.

-Calculer la valeur nominale de la nouvelle dette si vous avez que la taux d'intérêt est de 5% ?

**Exercice n°5:**

Une personne effectue les placements suivants pendant 4 ans :

- 10 000 U.M à 7% ;
- 25 000 U.M à 7,5% ;
- 55 000 U.M à 9%.

1. Calculer la valeur acquise globale ?
2. Donner le taux de rendement moyen de ces placements ?

# **CHAPITRE V .**

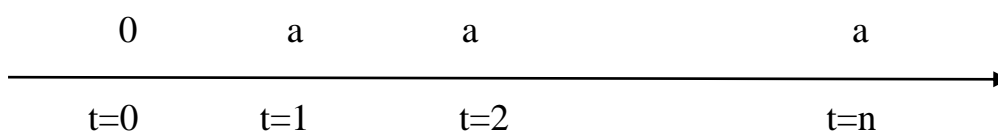
## **Les Annuités**

**1. Les annuités constantes**

L'annuité est la même chaque année et c'est sans aucun doute la modalité la plus usitée. Elle intervient dans la constitution des plans d'épargne logement, dans l'achat de véhicules, le financement de scolarités, les loyers de crédit-bail et dans l'investissement immobilier. Son avantage réside dans la nécessité de ne connaître qu'une valeur, l'annuité constante.

$$\text{Si } k \in \{1,2,3,\dots,n\} \quad a_k = a$$

On aura la configuration ci-dessous:

**1.1. Valeur acquise par une suite d'annuités constantes**

C'est la somme des valeurs acquises par les différentes annuités évaluée immédiatement après le versement de la dernière annuité.

Si  $k \in \{1,2,3,\dots,n\} \quad a_k = a$ , alors

$$V_n = \frac{a \left( (1+t)^n - 1 \right)}{t}$$

La valeur acquise par une suite de versements identiques donne exactement le capital disponible obtenu à l'échéance. Il s'agit du résultat de la capitalisation de tous les versements jusqu'à l'échéance.

Plusieurs problèmes courants peuvent être résolus avec cette proposition:

- \* la détermination du capital disponible connaissant le montant de l'annuité, le taux d'intérêt servi et la durée du placement;
- \* la détermination de l'annuité à verser étant donné le capital souhaité, le taux d'intérêt servi et la durée du placement;
- \* la détermination du taux d'intérêt à servir en fonction du capital souhaité, de l'annuité versée et de la durée du placement;
- \* la détermination de la durée du placement à retenir étant donné le montant du

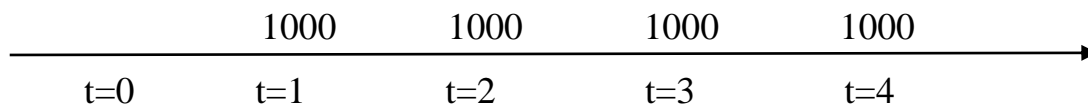
capital visé à l'échéance, le taux d'intérêt servi et l'annuité versée.

**Exercice n°38:**

Quelle somme obtient-on au bout de quatre ans si l'on place chaque année 1 000 DA à 5,5 % ?

**Solution**

Les flux sur l'axe temporel se présentent de la façon ci-après:



\* Situations-nous à l'échéance (t = 4):

Le premier flux devient:  $1000(1,055)^3 = 1174.24$  DA

Le second flux devient:  $1000(1,055)^2 = 1113.02$  DA

Le troisième flux devient:  $1000(1,055) = 1055$  DA

Le dernier flux reste inchangé: 1000 DA

La somme résultant au bout de la quatrième année est égale à:

$$1174.24 + 1113.02 - 1055 + 1000 = 4342.4 \text{ DA}$$

\* Résultat que nous retrouvons en appliquant la proposition ci-dessus:

$$n=4, a = 1000, t = 5,5\%$$

$$V_4 = (1000 (1,055)^4 - 1) / 0,055 = 4342,26 \text{ DA}$$

**Exercice n°39:**

Quel montant faut-il placer chaque année, et ce pendant 20 ans, pour pouvoir obtenir à l'échéance 100 000 DA ?

**Solution**

$$n=20, i 6\%, V_{20} = 100\ 000 \quad \mathbf{a=?}$$

$$V_{20} = a ((1,06)^{20} - 1) / 0,06 = 100\ 000$$

$$\text{d'où} \quad a = 100\ 000(0.06) / ((1,06)^{20} - 1)$$

$$a = 2\ 718,46 \text{ DA}$$

**1.2. Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes**

C'est la valeur à l'origine des annuités futures. Évaluation effectuée une période avant le versement de la première annuité.

Si  $k \in \{1,2,3,\dots,n\}$   $a_k = a$ , alors

$$V_0 = a \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t}$$

Contrairement à la proposition précédente qui se plaçait à l'échéance lors du dernier versement, ici l'on se situe à la date d'aujourd'hui et l'on considérera les versements futurs, Les flux monétaires seront tous exprimés en valeur d'aujourd'hui. Les quatre problèmes précédents de détermination de valeur, de taux, d'annuité ou de durée peuvent également être abordés et résolus par la même proposition.

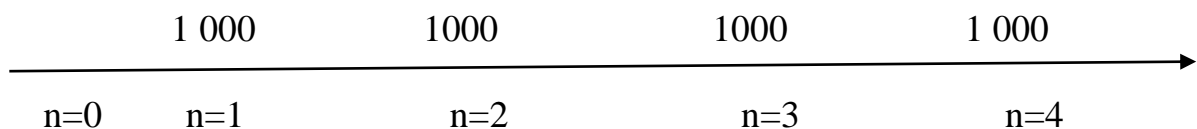
La formulation permet de mettre en évidence le fait que la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes soit plus sensible aux taux longs qu'aux taux courts mais également que cette valeur diminue lorsque le niveau des taux d'intérêt augmente.

**Exercice n°40:**

De combien doit-on disposer aujourd'hui si l'on désire retirer 1 000 DA chaque année pendant quatre ans sachant que le taux de placement est de 5,5% ?

**Solution**

Les flux représentés sur l'axe des temps donnent:



\* Ramenons tous les flux à l'origine ( $r = 0$ ):

Le premier flux correspond à:  $1000 / 1,055 = 947,86$

Le second flux correspond à:  $1000 / (1.055)^2 = 898,45$

Le troisième flux correspond à:  $1000 / (1.055)^3 = 851,61$

Le dernier flux correspond à:  $1000 / (1,055) = 807,21$

La somme correspondant aux quatre flux obtenus:

$$947,86 + 898,45 + 851,61 + 807,21 = 3\,505,15$$

\* Résultat que nous retrouvons en appliquant la proposition ci-dessus:

$$n = 4, \quad a = 1000, \quad t = 5,5\%$$

$$V_0 = 1000(1 - (1,055)^{-4}) / 0,055 = 3\,505,15$$

D'autre part la valeur actuelle et la valeur acquise d'une suite d'annuités constantes ou non sont reliées par la formule ci-contre :

La valeur acquise d'une suite d'annuités correspond à la capitalisation de sa valeur actuelle jusqu'à l'échéance:  $V_n = V_0(1+t)^n$

Relation qui traduit la dualité entre les concepts d'actualisation et de capitalisation. Ce résultat était prévisible comme nous l'avons constaté en analysant.

### **Exercice n°41:**

Que peut-on déduire des montants obtenus dans les exercices ?

### **Solution**

$$n=4, \quad a=1000, \quad t = 5,5\%$$

$$V_0 = 3\,505,15 \text{ DA} \quad \text{et} \quad V_4 = 4\,342,26 \text{ DA}$$

Calculons  $V_0(1+t)^4$ , on aura:

$$V_0(1+t)^4 = 3505,15 (1,055)^4 = 4\,342,26 \text{ DA, c'est-à-dire } V_4$$

## **2. Les annuités en progression arithmétique**

L'annuité augmente chaque année d'un montant fixe. Ce type d'annuité convient à la constitution d'un capital par un particulier lorsque son revenu augmente. On peut aussi la rencontrer dans le cas de projets d'investissement dont les résultats augmentent avec une certaine régularité. On aura:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = a \\ k \in \{2, 3, \dots, n\} \quad a_k = a_{k-1} + r \end{array} \right.$$

Ce qui revient à :  $k \in \{1, \dots, n\}$   $a_k = a + (k-1)r$

**2.1. Valeur acquise par une suite d'annuités en progression arithmétique**

La valeur acquise par une suite de versements augmentant de manière régulière indique le capital disponible à l'échéance. C'est le résultat de la capitalisation de l'ensemble des versements à l'échéance.

Si  $k \in \{1, \dots, n\}$   $a_k = a + (k-1)r$ , alors

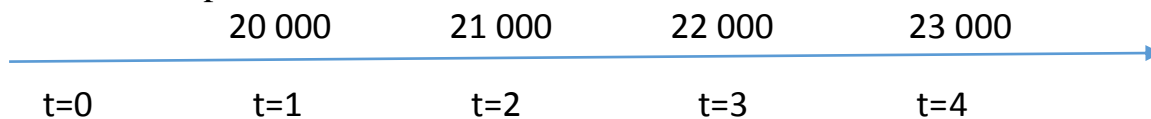
$$V_n = (a+r/t) \frac{(1+t)^n - 1}{t} - \frac{n r}{t}$$

**Exercice n°42:**

L'année prochaine vous déposerez 20 000 DA dans un compte rémunéré de 5,5% et chaque année vous augmenterez le montant de votre dépôt de 1000 DA. Combien obtiendrez-vous dans quatre ans ?

**Solution**

Les dépôts seront:



Déplaçons tous les flux à  $r = 4$ :

Le premier flux devient:  $20000(1,055)^3 = 23484,82$  DA

Le second flux devient:  $21000(1,055)^2 = 23373,52$  DA

Le troisième flux devient:  $22000(1,055) = 23210$  DA

Le dernier flux reste inchangé: 23000 DA

Ce qui au total aboutit à 93 068,35 DA

L'application de implique que:

$n=4, a = 20\ 000, r=1000, t=5,5\%$ .

$V_4 = (20000+(1000/0,055))((1,055)^4-1)/0,055 - 4 \times 1000 / 0,055 = 93\ 068,35$  DA

On retrouve le résultat précédent.

**2.2. Valeur actuelle d'une suite d'annuités en progression arithmétique**

La suite d'annuité en progression arithmétique peut aussi être évaluée aujourd'hui et donnera le résultat qui suit:

Si  $k \in \{1, \dots, n\}$   $a_k = a + (k-1)r$ , alors

$$V_0 = (a + r/t + nr) \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} - \frac{nr}{t}$$

**Exercice n°43:**

De combien doit-on disposer aujourd'hui si l'on envisage de retirer 200 000 DA dans un an, puis 210 000 DA, puis 220 000 DA et ainsi de suite sur une durée de quatre ans sachant que les dépôts sont rémunérés à 5,5% ?

**Solution**

La séquence de flux correspondant aux retraits successifs est donnée par :

200 000	210 000	220 000	230 000
t=1	t=2	t=3	t=4

Ramenons tous les flux à t=0:

Le premier flux vaut aujourd'hui:  $200000/1.055 = 189573,46$  DA

Le second flux vaut aujourd'hui  $210000 / (1.055)^2 = 188675$  DA

Le troisième flux vaut aujourd'hui:  $220000 / (1.055)^3 = 187355$  DA

Le dernier flux vaut aujourd'hui:  $230000 / (1.055)^4 = 185569,85$  DA

Soit un total de 751 263,31 DA.

Résultat que nous retrouvons en appliquant la proposition ci-dessus:

$a = 200\ 000$ ,  $r = 10\ 000$ ,  $n=4$ ,  $t= 5,5\%$

$$V_0 = (200\ 000 + 10000 + 4 \times 10000) (1 - (1,05)^{-4}) / 0,055 - 4 \times 10\ 000 / 0,055$$

$$= 751263,32$$

### 3. Les annuités en progression géométrique

Plusieurs cas de figure font appel aux annuités en progression géométrique. A l'exemple des obligations indexées sur l'inflation qui sont un produit financier permettant de garantir le capital contre l'évolution du coût de la vie. Dans cette hypothèse, l'annuité est annuellement ajustée en fonction de l'indice des prix. D'un point de vue pratique, un taux d'évolution de l'inflation est conjecturé et il sera utilisé tout le long de l'existence du produit. Les annuités successives forment une suite géométrique dont la raison découlera du taux d'inflation espéré augmenté de l'unité.

L'accroissement de l'annuité se fait chaque année selon un pourcentage fixe.

$$\begin{cases} a_1 = a \\ k \in \{2, 3, \dots, n\} \quad a_k = qa_{k-1} \end{cases}$$

Ce qui revient à :  $k \in \{1, \dots, n\} \quad a_k = q^{k-1} a$

La connaissance de la première annuité et du taux de progression caractérise totalement la séquence de flux.

#### 3.1. Valeur acquise par une suite d'annuités en progression géométrique

Il est question ici de valoriser la séquence de flux à l'échéance.

Si  $k \in \{1, \dots, n\} \quad a_k = q^{k-1} a$ , alors

$$V_n = \begin{cases} a \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} & \text{si } q \neq 1+i \\ na(1+i)^{n-1} & \text{si } q = 1+i \end{cases}$$

#### Exercice n°44:

De quel montant disposerez-vous dans quatre ans si vous augmentez votre placement initial égal à 1000 DA de 6% chaque année sachant que le taux de placement est égal à 5,5%?

**Solution**

Les flux sont les suivants:

	1 000	1 060	1 123.6	1 191.02	
t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	→

Plaçons-nous à l'échéance:

Le premier flux devient:  $1000(1,055)^3 = 1174,24$  DA

Le second flux devient:  $1060(1,055)^2 = 1179,80$  DA

Le troisième flux devient:  $1123,6(1,055) = 1185,39$  DA

Le dernier flux reste inchangé: 1191,02

Ce qui donne au total 4 730,45 DA.

Résultat que nous retrouvons en appliquant la proposition ci-dessus:

$$a=1000, q 1,06, n = 4, t = 5,5\%$$

$$V_1 = 1000 (1,06^4 - 1,055^4) / (1,06 - 1,055) = 4730,46 \text{ DA.}$$

**3.2 Valeur actuelle d'une suite d'annuités en progression géométrique**

Partant du lien entre la valeur acquise et la valeur actuelle, on obtient:

Si  $k \in \{1, \dots, n\}$   $a_k = q^{k-1} a$ , alors

$$V_0 = \begin{cases} \frac{a}{(1+i)^n} \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} & \text{si } q \neq 1+i \\ \frac{na}{(1+i)} & \text{si } q = 1+i \end{cases}$$

**Exercice n°45:**

Vous comptez procéder à 4 retraits qui chaque année augmenteront de 5.5%. Sachant que le premier d'être eux sera effectué dans un an et correspondra à 10 000 DA et que le taux de rémunération des placements est actuellement de 5,5%.

**Solution**

déterminez le montant que vous devez déposer à cet effet aujourd'hui. Les retraits seront:

	10 000	10 550	11 130.25	11 742.41
t=0	t=1	t=2	t=3	t=4

Evaluons l'ensemble des flux à  $t = 0$ :

Le premier flux devient:  $10000 / 1,055 = 9478,67$  DA

Le second flux devient:  $10550 / (1,055)^2 = 9478,67$  DA

Le troisième flux devient:  $11130,5 / (1,055)^3 = 9478,67$  DA

Le dernier flux devient:  $11742,41 / (1,055)^4 = 9478,67$  DA

Soit, un total de 37 914,69 DA à déposer dès aujourd'hui.

Le résultat précédent se retrouve également à l'aide ci-dessus:

$$a = 10\,000 \text{ DA} , n = 4 , t = 5,5\%$$

Comme  $q$  est égal à  $1+t$ , le montant cherché est donné par :

$$V_0 = \frac{na}{(1+t)} = \frac{4 \times 10\,000}{1,055} = 37\,914,69 \text{ DA}$$

#### 4. La rente perpétuelle

Lorsque le nombre d'annuités est infini ou extrêmement élevé, on parle de rente perpétuelle. C'est le cas lorsqu'un émetteur lance un emprunt et procède à son remboursement en versant exclusivement des intérêts. Les souscripteurs reçoivent alors après chaque période un flux constant et identique sur une durée infinie. La valeur de la rente perpétuelle est obtenue en faisant tendre  $a$  vers l'infini dans la formule fournissant la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes .

$$\text{Si } k \geq 1 \text{ } a_k = a, \quad \text{alors } V_0 = a/t$$

En définitive, la valeur de la rente perpétuelle s'obtient en divisant son cou-pon par son taux.

#### Exercice n°46:

Un rentier appelé à recevoir chaque année 10 000 DA désire déterminer la valeur de sa rente sachant que le taux du placement s'élève à 5%.

#### Solution

S'il recevait 10 000 DA pendant n années, la valeur actuelle de cette suite d'annuités serait de  $V_0 = 10000(1 - 1,05^{-n}) / 0,05$

En faisant tendre le nombre d'annuités vers l'infini, on obtient :

$$V_0 = 10\,000 / 0,05 = 200\,000 \text{ DA}$$

**Remarque**

Cette méthode permet en outre de déterminer la valeur actuelle d'une action à dividende prioritaire (ADP) car celle-ci distribue à son propriétaire un dividende fixe chaque année.

**Exercice n°47:**

On suppose que 1 300 DA sont versés au début de chaque an pour les 5 prochaines années sur un compte bancaire payant 7% d'intérêt annuel composé annuellement. A la fin des 5 années, à combien s'élèvera la somme présente sur le compte bancaire?

**Solution:**

On dispose des données suivantes :

$$a = 1300 \text{ DA} , n = 5 , t = 7\% = 0,07$$

$$\text{Alors on a: } S = 1300 \times (1 + 0,07)^5 - 1 = 7\,475,96.$$

A la fin des 5 années, il y aura environ 7 476,96 DA sur le compte bancaire.

**Exercice n°48:**

Jean est un chanteur et estime que sa carrière musicale durera 10 ans. Pour préparer son avenir, Jean décide de déposer 25 000 DA au à la fin de chaque année sur un compte bancaire lui rapportant 7% d'intérêt annuel composé annuellement. À la fin de sa carrière, combien s'élèvera la somme présente sur son compte bancaire ?

**Solution:**

On dispose des données suivantes:

$$a = 25\,000 \text{ DA}, n = 10 \text{ ans}, t = 5\% = 0,05$$

$$\text{Alors on a : } S = 25000 \times 10 / (1 + 0,05) = 314\,447,313 \text{ DA}$$

sur son compte bancaire. 314 447 DA. A la fin de sa carrière, Jean pourra récupérer

**Exercice n°49:**

On suppose que 1 300 DA sont versés au début de chaque an pour les 5 prochaines années sur un compte bancaire payant 7% d'intérêt annuel composé annuellement. À la fin des 5 années, à combien s'élèvera la somme présente sur le compte bancaire ?

**Solution:**

On dispose des données suivantes:

$$a=1300 \text{ DA} , n=5 , t=7\%=0,07$$

Alors on a  $S, 1300x$  sur le compte bancaire.  $(1+0.07)^5+1-1 0,07= 9299,278 \text{ DA}$ .

À la fin des 5 années, il y aura environ 9 300 DA

**Exercice n°50:**

Reprenons l'exercice précédent avec Jean. Au lieu de déposer de l'argent à la fin de chaque année, il dépose les 25 000 DA au début de chaque année.

A la fin de sa carrière, combien s'élèvera la somme présente sur son compte bancaire?

**Solution :**

On dispose des données suivantes:

$$a = 25\ 000 \text{ DA} , n = 10 , t=5\%=0.05$$

Paiements en mathématiques financières

Alors on a:  $S = 25\ 000 \times (1+0,05)^{10}+1-1 0,05$  récupérer 355 170 DA sur son compte bancaire. 355 169,679 DA. À la fin de sa carrière, Jean pourra

**Exercice n°51:**

On suppose que 500 DA sont versés à la fin de chaque année pour les 9 prochaines années sur un compte bancaire payant 7,5% d'intérêt annuel composé annuellement. Quelle est la somme à payer aujourd'hui afin de respecter ces caractéristiques?

**solution**

On dispose des données suivantes:

$a = 500 \text{ DA}$  ,  $n=9$  ,  $t=7,5\%= 0,075$

Alors on a:  $S = 500 \times \frac{1-(1+0,075)^{-9}}{0,075} = 3\,189,44 \text{ DA}$ .

La somme à payer aujourd'hui est 3 189,44 DA.

**Exercice pratique**

**Exercice n°1:**

- 1- Calculer la valeur gagnée de 15 remboursements, le montant du paiement est de 16 500 DA, et le taux d'intérêt 10% ?
- 2- La valeur gagnée pour 10 versements annuels fixes est de 500 000 DA, puisque le taux d'intérêt est de 6%. Déterminer la valeur du paiement?
- 3- quelle est la valeur du versement déposé dans une banque avec un taux de 5%, vous donnez un capital d'une valeur de 250 000 DA après 10 années ?
- 4- Une personne dépose 5 000 DA par mois à la banque pendant un certain temps. Banque pendant 10 ans, à un taux d'intérêt de 5%

Calculer ce qu'il obtient à la fin de la période?

**Exercice n° 2:**

Une personne place une somme d'argent de 1 500 DA à la fin de chaque année en banque. Calculez la valeur obtenue au bout de 10 ans si vous savez que le taux d'intérêt est de 2,75%.

- Calculer la valeur obtenue?
- Calculer la valeur actuelle des paiements?

**Exercice n°3:**

Afin d'obtenir un montant d'achat d'un investissement de 2 500 000 DA au 1/01/2020, il est nécessaire d'établir des flux financiers annuels fixes, où : le premier versement le 15 /03/ 2000 et le dernier versement le 15/03 2010, le taux d'intérêt 10%.

- Calculer le montant du paiement?

**Exercice n°4:**

Pour acquérir des terrains, l'institution compte emprunter en mars 2020 un montant de 250 000 DA à verser en échéances fixes sur une durée de 10 ans, et elle a le choix entre deux types de prêts.

Un prêt qui se rembourse en versements annuels au taux de 6.%

Un prêt remboursé en six mois au taux de 3%

- Quelle est la meilleure option pour l'organisation?

**Exercice n°5:**

Une personne place une somme d'argent de 1.500 DA à la fin de chaque année en banque. Calculez la valeur obtenue au bout de 10 ans si vous savez que le taux d'intérêt est de 2,75%.

.La valeur obtenue?

.Valeur actuelle des paiements?

**Exercice n°6:**

Dans une banque avec un taux de 5%, vous donnez un capital d'une valeur de 250 000 DA après 10 années, quelle est la valeur du versement déposé ?

**Exercice n°7:**

Si vous avez emprunté 325 000 DA aujourd'hui ? Quel est le montant du paiement que vous effectuerez à la banque à la fin de chaque...

Condamné par an pendant 10 ans, sachant que le taux d'intérêt annuel est de 8% ?

## Références Bibliographique

1. Pierre Devolder et Mathilde Fox et Francis Vaguener, Mathématiques Financières, éditions Pearson France, France, 2012.
2. Connaissances et Savoirs, Mathématiques Financières, éditions Connaissances et Savoirs, France, 2016.
3. Ayoub Katfi et Oumaima El Mnouer, Mathématiques Financières, éditions L'harmattan, Paris, France, 2024.
4. Octave Jokung Nguéna, Mathématiques et gestion financières, éditions de boeck and Larcier, Bruxelles, 2004.
5. جميلة ميدانية، دروس وتمارين في مقياس الرياضيات المالية، الجزائر ، 2018 .
6. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques\\_financi%C3%A8res](https://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques_financi%C3%A8res)
7. [http://www.cterrier.com/cours/menu\\_math\\_fi.html](http://www.cterrier.com/cours/menu_math_fi.html)
8. <http://mediatheque.accesmad.org/cni24/course/view.php?id=1029>.