MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT LMD

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité: Analyse mathématique et Applications

Présentée par :

GHERDAOUI Rabah

Sujet :

Équations de transport-diffusion et applications

Devant le jury d'examen composé de

Mme. RAHMANI Leila	Professeur	UMMTO	Président(e)
Mr. FUJITA YASHIMA Hisao	Professeur	ENSC	Rapporteur
Mme. TALEB Lynda	MCB	UMMTO	Co- Rapporteur
Mr. MOULAY Mohamed Said	Professeur	USTHB	Examinateur
Mr. GUEDDA Lahcene	Professeur	Université de Tiaret	Examinateur
Mme. SMAALI Mannal	MCA	UMMTO	Examinateur

Année universitaire 2022/2023

A mes parents,

A ma femme,

A ma fille Loudjine.

A mon fils Youcef.

Remerciements

Ce travail représente l'aboutissement de plusieurs années de travail acharné, et je suis pleinement conscient que son accomplissement n'aurait pas été possible sans le soutien précieux de nombreuses personnes.

Mes vifs remerciements, empreints d'une reconnaissance ineffable, vont tout d'abord à mon directeur de thèse, le Professeur Hisao FUJITA YASHIMA de l'ENS Constantine, ainsi qu'à ma co-directrice de thèse, Dr Lynda TALEB de l'UMMTO pour leur encadrement et pour leur investissement dans ce travail. Leurs enseignements, leurs conseils avisés, leur disponibilité ont été essentiels tout au long de cette recherche. Qu'ils soient assurés de ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont aussi au Professeur Leïla RAHMANI, de l'UMMTO, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, ainsi qu'aux membres du jury Madame Mannal SMAALI, Maitre de Conférences à l'UMMTO, le Professeur Mohamed Said MOULAY, de l'USTHB et le Professeur Lahcen GUEDDA de l'université de Tiaret, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de juger ce travail.

Je souhaite, également, exprimer ma profonde gratitude envers mes parents. Leur amour, leur encouragement constant et leur soutien indéfectible ont été une source inépuisable de motivation tout au long de ce périple. Leur confiance en mes capacités et leur présence *réconfortante ont été un pilier essentiel dans la réalisation de cette thèse.*

À ma femme, je lui exprime ici toute ma gratitude pour son soutien inconditionnel, pour sa patience et pour sa compréhension pendant cette période exigeante de ma vie. Sa présence aimante et son soutien inébranlable ont été mon plus grand atout.

Je tiens, également, à exprimer toute ma reconnaissance envers tous les professeurs qui ont contribué à ma formation et à mon développement académique, sans oublier mes amis et collègues, leur présence, leurs discussions, leurs conseils et leur soutien ont été d'une importance capitale. Mes remerciements s'étendent également à tous mes collègues du Laboratoire des Mathématiques Pures et Appliquées, qui ont partagé ce parcours avec moi. Nos échanges enrichissants ont créé un environnement stimulant où j'ai pu développer mes compétences et avancer dans mes recherches.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à cette thèse, je leur adresse mes remerciements les plus sincères. Leur soutien, leurs encouragements ont été essentiels pour mener à bien ce projet. Cette thèse représente non seulement ma propre réussite, mais aussi la somme des efforts collectifs et des collaborations qui ont façonné ma formation doctorale. Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou (UMMTO).

Louanges à Allah ···

Résumé

L'objectif de ce travail est de construire une famille de solutions approchées pour l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$ avec une condition aux limites de Dirichlet homogène. Pour cela, nous utilisons le noyau de la chaleur et la translation pour décrire le transport à chaque pas de temps discrétisé. Nous démontrons la convergence uniforme de cette famille de solutions approchées ainsi que de leurs dérivées premières par rapport aux variables spatiales. De plus, nous démontrons la convergence ponctuelle de ses dérivées secondes par rapport aux variables spatiales. En outre, nous montrons que la fonction limite satisfait l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$ avec des conditions aux limites homogènes. Du point de vue technique, il est essentiel d'élaborer l'estimation des dérivées troisièmes des solutions approchées par rapport aux variables spatiales en tenant compte de l'influence des conditions aux limites.

Mots-clés : Équation de transport-diffusion, approximation par le noyau de la chaleur, discrétisation du temps, opérateur de prolongement impair, condition aux limites homogène.

Abstact

In this work, a family of approximate solutions to transport-diffusion equation in the half-space $\mathbb{R}^d_+$ is constructed by using the heat kernel and the translation representing transport on each step of time discretization. The uniform convergence of these approximate solutions and that of their first derivatives with respect to the space variables as well as the point-wise convergence of their second derivatives with respect to the space variables are proved. We also show that the limit function satisfies the transport-diffusion equation in the half-space with homogenous boundary conditions. From the technical point of view it is essential to obtain for the third derivatives of approximate solutions with respect to the space variables a necessary estimate for the passage to the limit, taking into account the influence of the boundary conditions.

Key words : Transport-diffusion equation, approximation by heat kernel, time discretization, odd extension operator, homogenous boudary condition.

Table des matières

Introduction générale

En modélisation, pour décrire le processus de transport et de diffusion d'une substance contenue dans un fluide ou d'une propriété d'un fluide (comme la température) dans le fluide en mouvement, nous utilisons par exemple l'équation

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) - \kappa \Delta u(t,x) = 0, \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,$$

ou

$$\partial_t u(t,x) + \nabla \cdot (u(t,x)v(t,x)) - \kappa \Delta u(t,x) = 0, \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,$$

ou encore, en considérant aussi une source ou un terme de réaction

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) - \kappa \Delta u(t,x) = f, \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,$$

ou

$$\partial_t u(t,x) + \nabla \cdot (u(t,x)v(t,x)) - \kappa \Delta u(t,x) = f, \quad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,$$

où u désigne la quantité de substance ou l'intensité de propriété qui est transportée et diffusée, v le vecteur vitesse de transport, κ le coéfficient de diffusion et f la source ou le terme de réaction. Ici et dans la suite

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2, \qquad v \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{d} v_i \partial_{x_i}, \qquad \nabla \cdot v = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} v_i.$$

Figure 1 – Émission de fumée

Par exemple dans la on peut voir l'épaisse fumée provenant des installations pétrolières qui brûlent des gaz excédentaires d'hydrocarbures. La fumée est transportée par le vent et subit une certaine diffusion. Pour modéliser ce phénomène on peut utiliser l'équation

$$\partial_t u(t,x) + \nabla \cdot (v(t,x)u(t,x)) - \kappa \Delta u(t,x) = f(t,x,u(t,x)),$$

où $u(t,x)$ est la concentration de la fumée, $v(t,x)$ est la vitesse de l'air et $f(t,x,u(t,x))$ est le terme dû à d'éventuelles réactions chimiques entre les molécules de la fumée et les molécules qui composent l'air.

Nous citons un autre exemple, celui de "l'émission" de la vapeur d'eau à partir de la surface de la mer et son transport et diffusion dans l'air. En négligeant le facteur $\nabla \cdot v(t,x)$ et en supposant absente la réaction chimique de la vapeur d'eau, on peut considérer l'équation

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot u(t,x) - \kappa \Delta u(t,x) = 0 \qquad \text{dans} \ \ \{x_3 > 0\},$$

avec la condition aux limites

$$u(t,x) = u_1,$$

où u_1 est la densité de la vapeur saturée déterminée par la température de l'eau à la surface (considérée comme constante). Ce modèle a été étudié dans [2], [3] dans le cadre théorique et aussi des calculs numériques, montrant la possibilité d'un début du processus de condensation de la vapeur d'eau dans l'atmosphère.

Dans la littérature on trouve nombreuses applications de l'équation de transport-diffusion à des cas concrets, en particulier à des problèmes de la polution atmosphérique ou problèmes analogues, comme on peut le voir par exemple dans [13], [14], [17], [32].

Du point de vue mathématique, vue la relation

$$\nabla \cdot (uv) = v \cdot \nabla u + u \nabla \cdot v,$$

on peut regrouper toutes les équations citées en haut sous une forme générale

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) - \kappa \Delta u(t,x) = f(t,x,u(t,x)), \quad \text{pour } (t,x,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}. \tag{1}$$

On peut considérer une forme encore plus générale

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) - \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(t,x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t,x) = f(t,x,u(t,x)), \qquad \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

En effet, selon la classification habituelle des équations aux dérivées partielles (voir par exemple [30], [24]), l'équation (2) est appelée équation de type parabolique (du second ordre), s'il existe une constante $\overline{a} > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x) \xi_i \xi_j \geq \overline{a} |\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

Comme il est bien connu, les équations aux dérivées partielles de type parabolique sont largement étudiées (voir par exemple [8], [24]) et ce par différentes méthodes. Nous citons entre autres la méthode utilisant les espace de Hölder (voir par exemple [20], [19]), la méthode de Levi (voir [21], voir aussi [20], Chap. IV, §§ 11-), qui s'applique aux équations avec un opérateur elliptique beaucoup plus général, et la représentation stochastique de la solution d'une équation du type parabolique, autrement dit, l'équation de Kolmogorov inverse (voir par exemple [16], chap. VIII, § 4, Th. 1).

Rappelons que les méthodes usuelles, soit dans les espaces de Sobolev soit dans les espaces de Hölder, considèrent le terme relatif à l'opérateur elliptique comme partie principale de l'équation, d'où on obtient une meilleure estimation de la régularité de la solution, et traitent les termes de transport comme des terme supplémentaires que ne contribuent pas à améliorer la solution. Mais si nous faisons l'attention à la réalité physique de processus de transport-diffusion, nous trouvons souvent que l'effet de la diffusion est relativement ou assez petit devant le processus de transport.

La méthode de la représentation stochastique, quant à elle, donne, de certaine manière, le possibilité de décrire les aspects soit du transport soit de la diffusion, en particulier la possibilité d'étudier le comportement de la solution dans le cas où le coefficient de diffusion tend vers 0, ce qui a été présenté avec des détails dans [10] (voir aussi [9], [37]). Mais cette description est faite dans le langage de probabilité et il n'est pas facile de la traduire dans les aspects de l'analyse mathématique. En autre, quand il y a des termes non-linéaires les traitements sont assez compliqués (voir [27], [28], [29], [23]).

Comme la densité du mouvement Brownien coïncide avec la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, en utilisant cette dernière et la translation qui décrit approximativement le transport, on pourrait construire des solutions approchées de l'équation de transport-diffusion. Cependant, à notre connaissance, cette possibilité n'a pas été suffisamment explorée précédemment. Récemment, dans [35], [33] et [3], les auteurs ont commencé à construire des approximations de la solution de l'équation de transport-diffusion en utilisant cette idée. En particulier, dans [35] les auteurs ont construit une famille de solutions approchées de l'équation de transport-diffusion dans tout l'espace $\mathbb{R}^d$. Ces solutions sont définies en utilisant le noyau de la chaleur et la translation représentant le transport à chaque pas de discrétisation du temps. Dans [33], les résultats de [35] sont étendus à certains cas avec des conditions plus générales. D'autre part, dans [3] (voir aussi [2]), un problème similaire est étudié sur le demi-plan $\mathbb{R}^2_+$ avec des conditions aux limites homogènes et un transport horizontal, c'est-à-dire parallèle à l'axe x_1. De plus, la construction de solutions approchées de ce type a permis de démontrer la convergence de la solution de l'équation de transport-diffusion vers celle de l'équation de transport dans le cas où le coefficient de diffusion tend vers 0 ([1],

[11]), ce qui montre, à notre avis, l'utilité significative de la méthode de l'approximation par la famille de solutions approchées construites par la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et la translation représentant le transport sur chaque pas du temps discrétisé.

Dans la présente thèse, en suivant l'idée de construction de solutions approchées introduite dans [35] et développée dans les travaux qui l'ont suivi, nous construisons une famille de solutions approchées pour l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$ avec une condition aux limites de Dirichlet homogène et démontrons la convergence uniforme de cette famille de solutions approchées ainsi que de leurs dérivées premières par rapport aux variables spatiales ; de plus, nous démontrons la convergence ponctuelle des ses dérivées secondes par rapport aux variables spatiales. En outre, nous montrons que la fonction limite satisfait à l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$ avec des conditions aux limites homogènes. Cela signifie que nous généralisons le résultat de [2], [3]. En effet dans ces travaux on considérait l'équation dans $\mathbb{R}^2_+$ avec le transport parallèle à l'axe x_1. La considération d'un transport pas nécessairement parallèle à l'hyperplan $\{x_d = 0\}$, même si sa composante normale est nulle sur l'hyperplan $\{x_d = 0\}$, crée des difficultés techniques considérables. En effet, l'estimation des dérivées troisièmes des solutions approchées par rapport aux variables spatiales en tenant compte de l'influence des conditions aux limites constitue le point qui exige la majeure élaboration technique dans cette thèse.

La présente thèse est structurée comme suit.

Dans les préliminaires, le premier paragraphe est dédié à la position du problème étudié ainsi qu'aux hypothèses nécessaires au traitement de notre problème. Les paragraphes suivants passent en revue quelques rappels sur l'équation de transport et sur l'équation de la chaleur.

Le deuxième chapitre est consacré à la construction d'une famille de solutions approchées pour l'équation de transport-diffusion dans $\mathbb{R}^d_+$ avec une condition aux limites homogène. Pour ce faire, nous utilisons l'opérateur de prolongement impair et la solution fondamentale de l'équation de chaleur, d'une part. D'autre part, nous procédons à la transformation du problème dans $\mathbb{R}^d_+$ en un problème dans $\mathbb{R}^d$. Des estimations des solutions approchées et de leurs dérivées premières, secondes et troisièmes sont obtenues grâce à cette transformation.

Enfin, le troisième chapitre est dédié à la présentation et à la démonstration du résultat principal de notre travail. Plus précisément, nous démontrons la convergence uniforme de la famille des solutions approchées, ainsi que la convergence uniforme de la dérivée première de cette famille vers la dérivée première de la fonction limite. En outre, nous démontrons la convergence ponctuelle de la dérivée deuxième de la famille des solutions approchées vers la dérivée deuxième de sa limite, tandis que la fonction limite admet une dérivée généralisée par rapport à la variable de temps. À la fin nous démontrons que la fonction limite satisfait à l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$ avec la condition initiale et la condition aux limites homogène.

CHAPITRE 1

Position du problème et Préliminaires

1.1 Position du problème

Comme mentionné dans l'introduction, on s'intéresse à l'étude de l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$. Étant donné le domaine

$$\Omega = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d > 0\}, \tag{1.1}$$

on considère l'équation

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = \kappa \Delta u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) \qquad \text{dans } \;]0,\infty[\, \times \Omega \tag{1.2}$$

avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{dans } \; \Omega \tag{1.3}$$

et la condition aux limites

$$u(t,x',0) = 0 \qquad \text{sur } \; \partial\Omega = \{x_d = 0\}, \tag{1.4}$$

où $x' = (x_1, \cdots, x_{d-1})$.

Dans (1.2), le terme $v(t,x)\cdot\nabla u(t,x)$ représente le transport avec la vitesse $v(t,x)$ de la quantité $u(t,x)$ et κ est le coefficient de diffusion. Le problème (1.2)–(1.4) est considéré avec les fonctions données $u_0 : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et nous supposons que les fonctions u_0, v et f satisfont les hypothèses précisées dans (1.5)–(1.13).

Pour définir précisément ces hypothèses, nous utiliserons les notations suivantes

$$D^\alpha_x = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}, \qquad D^\alpha_{x,u} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}\partial u^{\alpha_{d+1}}},$$

où

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{d}\alpha_j \quad \text{si} \;\; \alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d,$$

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{d+1}\alpha_j \quad \text{si} \;\; \alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_d,\alpha_{d+1})\in\mathbb{N}^{d+1}.$$

Nous désignons par $C_b(\mathbb{R}^d_+)$ (resp. $C_b(\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R})$) la classe des fonctions continues et bornées dans $\mathbb{R}^d_+$ (resp. $\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R}$) et par $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^d_+))$ (resp. $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R}))$) la classe des fonctions continues dans $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d_+$ (resp. $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R}$) et bornées dans $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d_+$ (resp. $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R}$) pour tout $\tau>0$. En conséquence, nous précisons

$$D^\alpha_x v(t,x)\in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^d_+)) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,\; |\alpha|\le 3, \tag{1.5}$$

$$\partial_t D^\alpha_x v(t,x)\in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^d_+)) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,\; |\alpha|\le 2, \tag{1.6}$$

$$\frac{f(t,x,u)}{1+|u|}\in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R})), \tag{1.7}$$

$$D^\alpha_{x,u} f(t,x,u)\in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R})) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,\; |\alpha|\le 3, \tag{1.8}$$

$$\partial_t D^\alpha_{x,u} f(t,x,u)\in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R})) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,\; |\alpha|\le 2, \tag{1.9}$$

$$f(t,x',0,0)=0 \quad \forall x'\in\mathbb{R}^{d-1}, \tag{1.10}$$

$$v_d(t,x',0)=0 \quad \forall x'\in\mathbb{R}^{d-1}, \tag{1.11}$$

$$D^\alpha_x u_0(x)\in C_b(\mathbb{R}^d_+) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,\; |\alpha|\le 3, \tag{1.12}$$

$$u_0(x',0)=0 \qquad \forall\, x'\in\mathbb{R}^{d-1}. \tag{1.13}$$

Sous ces hypothèses, nous allons construire une famille de solutions approchées pour l'équation de transport-diffusion (1.2) avec la condition aux limites homogène (1.4). Nous allons démontrer que cette famille converge vers une fonction qui satisfait l'équation de transport-diffusion (1.2) avec les conditions (1.3)-(1.4).

Avant de continuer, remarquons que lorsque $v \equiv 0$ nous obtenons l'équation de la chaleur et lorsque $\kappa \equiv 0$ nous obtenons l'équation de transport. Rappelons alors quelques propriétés de l'équation de transport et de l'équation de diffusion.

1.2 Équation de transport

L'équation de transport

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = f(t,x) \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^d; \tag{1.14}$$

est une équation classique bien connue et la méthode fondamentale pour cette équation, "méthode des caractéristiques", a été développée depuis longtemps, comme on peut la trouver dans le livre classique de Courant et Hilbert [5]. Rappelons rapidement la méthode des caractéristiques utilisée pour résoudre l'équation de transport (1.14) avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.15}$$

Nous commençons par l'explication des courbes caractéristiques. Pour cela, considérons la fonction $v(t,x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, continue en t et lipschitzienne en x, c'est-à-dire qu'il existe une constantes M telle que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ on ait :

$$|v(t,x) - v(t,y)| \leq M|x-y|. \tag{1.16}$$

Comme il est bien connu que, quel que soit $(t^*, x^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, nous pouvons résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = v(t, X(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+ \\ X(t^*) = x^* \end{cases}, \tag{1.17}$$

D'autre part, si l'on considère la courbe X^τ qui est l'ensemble des points $(t, X(t))$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, défini par

$$X^\tau = \{(t, X(t)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \,|\, X(t^*) = x^*\},$$

alors cette courbe touchera l'ensemble

$$S = \{0\} \times \mathbb{R}^d.$$

Notons $(0, x_0)$ le point d'intersection de la courbe X^τ et de S. Ayant trouvé le point $(0, x_0)$, en considérant ce point comme le point de départ de la courbe X^τ, nous pouvons réécrire le problème de Cauchy (1.17) comme suit

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = v(t, X(t)) \quad \forall t \geq 0 \\ X(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.18}$$

avec $(0, x_0) \in S$.

Il n'est pas difficile de voir que, par la construction des courbes X^τ, tous les points (t, x) se trouvent sur une des courbes X^τ. En outre, en vertu de la condition de Lipschitz, la solution de l'équation (1.17) passant par x^* à l'instant t^* est unique. Donc chaque point (t, x) se trouve sur une courbe X^τ et une seule. Nous appelons ces courbes les caractéristiques.

Les courbes caractéristiques étant définies, nous pouvons exprimer l'éventuelle solution $u(t, x)$ de l'équation de transport (1.14) sous la forme

$$u(t, X(t)).$$

En effet, si on utilise la règle de dérivation composée, on obtient

$$\frac{d}{dt}u(t, X(t)) = \frac{\partial}{\partial t}u(t, \xi)\Big|_{\xi = X(t)} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial \xi_i}u(t, \xi)\frac{d}{dt}\xi_i\Big|_{\xi = X(t)}.$$

Compte tenu de (1.18), on déduit de cette égalité que

$$\frac{d}{dt}u(t, X(t)) = \frac{\partial}{\partial t}u(t, \xi)\Big|_{\xi = X(t)} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial \xi_i}u(t, \xi)v_i(t, \xi)\Big|_{\xi = X(t)}.$$

Donc, en y substituant $\xi = X(t)$, on a

$$\frac{d}{dt}u(t, X(t)) = (\partial_t u(t, X(t)) + v(t, X(t)) \cdot \nabla u(t, X(t))) = 0. \tag{1.19}$$

De l'égalité (1.19) il résulte que la valeur de $u(t, X(t))$ est indépendante de t. Autrement dit, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, la fonction u est constante sur la courbe caractéristique $t \mapsto X(t)$ du problème (1.14) issue de $x_0 \in \mathbb{R}^d$ si $f \equiv 0$, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que

$$u(t, X(t)) = C \qquad \forall t \geq 0.$$

On a donc

$$u(t, X(t)) = u(0, X(0)) = u_0(X(0))$$

est une solution de (1.14) sans le terme source f.

Dans le cas où le problème (1.14)-(1.15) est donné avec un terme de source f, on considère de nouveau les caractéristiques associées à v. Posons

$$U(t) = u(t, X(t)).$$

Alors, on a

$$\frac{d}{dt}U(t) = f(t, X(t)).$$

En intégrant entre 0 et t les deux membres de cette équation, nous obtenons la solution $u(t, x)$ du problème (1.14)-(1.15) par la relation

$$u(t, x) = U(t) = U(0) + \int_0^t f(s, X(s))ds = u_0(X(0)) + \int_0^t f(s, X(s))ds.$$

1.3 Équation de la chaleur

L'équation de la chaleur

$$\partial_t u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x) \tag{1.20}$$

modélise plusieurs phénomènes physiques de type diffusion, en particulier la distribution de la température u dans un domaine de $\mathbb{R}^d$ avec une source de chaleur f qui est en général une fonction du temps t et de la position x. Cette équation est la plus typique des équations du type parabolique.

Nous rappelons ici dans la suite les propriétés de l'équation de la chaleur que nous allons utiliser dans la présente thèse.

Si nous considérons l'équation de la chaleur (1.20) dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ avec la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.21}$$

alors nous avons la relation suivante.

Remarque 1.3.1. Soient $f(t,x)$ et $u_0(x)$ deux fonctions continues et sommables (c'est-à-dire, de classe L^1), définies sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^d$ respectivement. Alors la fonction $u(t,x)$ donnée par

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t,x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t-s,x-y)f(s,y)dyds \quad \text{pour} \quad t>0, \tag{1.22}$$

$$u(0,x) = \lim_{t\to 0^+} u(t,x) \quad \text{pour} \quad t=0$$

où

$$\Theta(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{1.23}$$

satisfait à l'équation (1.20) et à la condition (1.21).

Cette propriété est bien connue et nous renvoyons sa démonstration aux livres classiques sur les équations aux dérivées partielles (voir par exemple [24], [20]).

Maintenant, nous rappelons la méthode de prolongement impair pour l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^d_+$. Cette technique transforme l'équation de la chaleur donnée sur $\mathbb{R}_+$ en un problème sur $\mathbb{R}$; on trouvera son illustration par exemple dans [36], chap. 3, § 3, n. 2.

On considère les deux problèmes suivants

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \kappa\Delta u(t,x) + f(t,x), & \text{pour } t>0,\ x\in\Omega \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{pour } x\in\Omega \\ u(t,x',0) = 0, & \text{pour } t>0,\ x'\in\mathbb{R}^{d-1} \end{cases}, \tag{1.24}$$

$$\begin{cases} \partial_t U(t,x) = \kappa\Delta U(t,x) + F(t,x), & \text{pour } t>0,\ x\in\mathbb{R}^d \\ U(0,x) = U_0(x), & \text{pour } x\in\mathbb{R}^d \end{cases}, \tag{1.25}$$

où Ω est le domaine défini dans (1.1) ($\Omega = \{\, x\in\mathbb{R}^d \,|\, x_d>0 \,\}$),

$$F(t,x',x_d) = \begin{cases} f(t,x',x_d), & \text{si } x_d>0 \\ 0, & \text{si } x_d=0 \\ -f(t,x',-x_d), & \text{si } x_d<0 \end{cases}, \ t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d, \tag{1.26}$$

et

$$U_0(x', x_d) = \begin{cases} u(x', x_d), & \text{si } x_d > 0 \\ 0, & \text{si } x_d = 0 \\ -u(x', -x_d), & \text{si } x_d < 0 \end{cases}, \ x' \in \mathbb{R}^{d-1} . \tag{1.27}$$

Alors, on a la relation suivante.

Remarque 1.3.2. On suppose que les fonctions $f(t, x)$ et $u_0(x)$ sont continues et sommables sur $]0, \infty[\, \times \mathbb{R}^d_+$ et $\mathbb{R}^d_+$ respectivement et que

$$f(t, x', 0) = 0 \quad \text{pour} \quad (t, x') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}, \qquad u_0(x', 0) = 0 \quad \text{pour} \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}. \tag{1.28}$$

Si $U(t, x)$ est une solution du problème (1.25), alors la restriction de la fonction $U(t, x)$ à Ω (le domaine défini dans (1.1)) est une solution du problème (1.24).

La démonstration de cette remarque que nous illustrons dans la suite est basée sur l'illustration donnée dans [36].

Démonstration. D'après la remarque 1.3.1, le problème (1.25) admet une solution $U(t, x)$ unique. Par conséquent, la restriction de $U(t, x)$ à Ω satisfait à l'équation

$$\partial_t U(t, x) = \kappa \Delta U(t, x) + F(t, x)$$

dans Ω, où $F(t, x) = f(t, x)$. De plus, selon la remarque 1.3.1 et la définition (1.27), nous avons

$$U(0, x) = u_0(x) \quad \text{pour} \quad x \in \Omega.$$

Il nous reste à démontrer que la restriction de $U(t, x)$ à Ω satisfait à la condition

$$\lim_{x_d \to 0} U(t, x', x_d) = 0 \qquad \text{pour} \quad t > 0, \ x' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Il est clair que pour cela il suffit de montrer que $U(t, x', x_d)$ est continue et que

$$U(t, x', 0) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \in \mathbb{R}_+, \ x' \in \mathbb{R}^{d-1}. \tag{1.29}$$

Pour la continuité de $U(t, x', x_d)$, rappelons que d'après la remarque 1.3.1, la solution $U(t, x)$ du problème (1.25) est définie par

$$U(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t, x - y) U_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t - s, x - y) F(s, y) dy ds \quad \text{pour} \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d.$$

Étant donné que $U_0(y)$ et $F(s,y)$ sont sommables selon l'hypothèse, et compte tenu de la régularité de la fonction Θ, de la définition (1.27) et de la condition (1.28) il résulte que la fonction $U(t,x)$ est continue pour $t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^d$.

Maintenant, nous allons démontrer l'égalité (1.29). Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t,x-y)U_0(y)\Big|_{x_d=0} dy = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty \Theta(t,x'-y',-y_d)U_0(y',y_d)dy_d dy' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{-\infty}^0 \Theta(t,x'-y',-y_d)U_0(y',y_d)dy_d dy'.$$

En utilisant la définition (1.27), on remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{-\infty}^0 \Theta(t,x'-y',-y_d)U_0(y',y_d)dy' dy_d = -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{-\infty}^0 \Theta(t,x'-y',-y_d)u_0(y',-y_d)dy_d dy' =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty \Theta(t,x'-y',y_d)u_0(y',y_d)dy_d dy'.$$

De plus, comme la fonction $\Theta(t,y)$ est paire par rapport à y_d, on a

$$-\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty \Theta(t,x'-y',y_d)u_0(y',y_d)dy_d dy' = -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty \Theta(t,x'-y',-y_d)u_0(y',y_d)dy_d dy',$$

d'où, compte tenu de la relation $u_0(y',y_d) = U_0(y',y_d)$ pour $y_d > 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t,x-y)U_0(y)\Big|_{x_d=0} dy = 0.$$

D'autre part, en utilisant la même technique pour $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t-s,x-y)F(s,y)dyds$, on obtient

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t-s,x-y)F(s,y)dyds\Big|_{x_d=0} = 0.$$

De ces relations il résulte que

$$U(t,x',0) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \in \mathbb{R}_+,\ x' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

L'affirmation de la remarque est démontrée. $\square$

CHAPITRE 2

Construction d'une famille de solutions approchées pour l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$

2.1 Introduction

Dans le présent chapitre, nous construisons une famille de solutions approchées de l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$ avec une condition aux limites homogène. Les solutions approchées sont construites d'une manière similaire à celle présentée dans [35] et [33]. Pour utiliser les techniques développées dans [35], [33] et [3] nous utilisons le prolongement impair des fonctions de $\mathbb{R}^d_+$ sur $\mathbb{R}^d$. Toutefois, pour le traitement de la condition aux limites, il est essentiel d'élaborer de nouvelles estimations des solutions approchées et de leurs dérivées partielles, en particulier de leurs dérivées troisièmes par rapport aux variables spatiales.

2.2 Définition de solutions approchées et résultat principal

Comme on l'a annoncé précédemment, nous commençons par construire une famille de solutions approchées $u^{[n]}(t,x)$ pour l'équation de transport-diffusion avec la condition aux limites de Dirichlet homogène. Nous utilisons une discrétisation du temps particulière. Nous posons

$$\delta_n = \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{2.1}$$

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \cdots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \cdots, \qquad t_k^{[n]} = k\delta_n. \tag{2.2}$$

Nous considérons une constante strictement positive κ et posons

$$\vartheta_n(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\delta_n\kappa}\right) \qquad \text{pour} \quad r \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

$$\Theta'_n(x') = \frac{1}{(4\pi\delta_n\kappa)^{\frac{d-1}{2}}} \exp\left(-\frac{|x'|^2}{4\delta_n\kappa}\right) \qquad \text{pour} \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \tag{2.4}$$

$$\Theta_n(x) = \Theta'_n(x')\vartheta_n(x_d) = \frac{1}{(4\pi\delta_n\kappa)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\delta_n\kappa}\right) \qquad \text{pour} \quad x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{2.5}$$

Nous posons aussi

$$\Omega = \{\, x = (x_1, ...x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d > 0 \,\}; \tag{2.6}$$

on rappelle que $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d \geq 0\,\}$. Pour construire les solutions approchées $u^{[n]}(t,x)$ qui satisfont à la condition aux limites, nous introduisons l'opérateur de prolongement impair $\Lambda(\cdot)$. Pour une fonction $w(\cdot)$ définie sur $r > 0$, on définit

$$\Lambda(w(\cdot))(r) = \begin{cases} w(r), & \text{si} \quad r > 0 \\ 0, & \text{si} \quad r = 0 \\ -w(-r), & \text{si} \quad r < 0 \end{cases}. \tag{2.7}$$

Pour une fonction $v(t,x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ nous introduisons la notation

$$v'(t,x) = (v_1(t,x), \cdots, v_{d-1}(t,x)), \tag{2.8}$$

de sorte que

$$v(t,x) = (v'(t,x), v_d(t,x)).$$

Nous définissons d'abord les solutions approchées de base $u^{[n]}(t,x)$ par

$$u^{[n]}(t_0^{[n]},x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.9}$$

$$u^{[n]}(t_k^{[n]},x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)\Lambda(u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x' - \delta_n v'(t_k^{[n]},x) - y',\cdot))(x_d - \delta_n v_d(t_k^{[n]},x) - y_d)dy'dy_d +$$

$$+\delta_n f(t_{k-1}^{[n]},x,u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)), \qquad x \in \Omega, \quad k = 1,2,\cdots, \tag{2.10}$$

$$u^{[n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[n]}(t_k^{[n]},x), \qquad t_{k-1}^{[n]} < t < t_k^{[n]}, \;\; x \in \Omega. \tag{2.11}$$

Ensuite, nous définissons

$$\tilde{u}^{[n]}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)\Lambda(u^{[n]}(t,x' - y',\cdot))(x_d - y_d)dy. \tag{2.12}$$

Nous allons démontrer que, sous les conditions (1.5)-(1.13), les fonctions $\tilde{u}^{[n]}(t,x)$ ainsi définies convergent vers une fonction $u(t,x)$ qui satisfait à l'équation de transport-diffusion (1.2) avec les conditions (1.3)-(1.4). Ici par la dérivée sur $\partial\Omega$ on entend le prolongement par continuité de la dérivée dans Ω.

2.3 Transformation du problème

Au lieu de considérer directement les solutions approchées $u^{[n]}(t,x)$ et $\tilde{u}^{[n]}(t,x)$ définies dans (2.9)–(2.12), pour démontrer la convergence de $\tilde{u}^{[n]}(t,x)$ vers une fonction $u(t,x)$ qui satisfait au problème (1.2)-(1.4), nous allons considérer des fonctions $U^{[n]}(t,x)$ et $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, qui seront le prolongement de $u^{[n]}(t,x)$ et de $\tilde{u}^{[n]}(t,x)$ dans $\mathbb{R}^d$, et démontrer la convergence de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ vers une fonction $U(t,x)$, qui satisfera à une équation dont la restriction à Ω coïncide avec l'équation (1.2).

Nous posons

$$U_0(x) = \Lambda(u_0(x',\cdot))(x_d), \qquad x = (x',x_d) \in \mathbb{R}^d, \tag{2.13}$$

$$V'(t,x',x_d) = V'(t,x',-x_d) = v'(t,x',x_d), \qquad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \;\; x_d \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{2.14}$$

$$V_d(t,x',x_d) = -V_d(t,x',-x_d) = v_d(t,x',x_d), \qquad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad x_d \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{2.15}$$

$$F(t,x',x_d,U) = \begin{cases} f(t,x',x_d,U), & \text{si} \quad x_d > 0 \\ 0, & \text{si} \quad x_d = 0 \\ -f(t,x',-x_d,-U), & \text{si} \quad x_d < 0 \end{cases}, \quad t \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^d, \; U \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

On rappelle que V' défini dans (2.14) est un vecteur appartenant à $\mathbb{R}^{d-1}$ et $V(t,x)$ sera

$$V(t,x) = (V'(t,x), V_d(t,x)) \in \mathbb{R}^d.$$

Maintenant nous définissons les fonctions $U^{[n]}(t,x)$, $n = 1,2,\cdots$. On pose

$$U^{[n]}(t_0^{[n]},x) = U_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} U^{[n]}(t_k^{[n]},x) = & \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]},x) - y)dy + \\ & + \delta_n F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \quad k = 1,2,\cdots, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$U^{[n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} U^{[n]}(t_k^{[n]},x) \qquad \text{pour} \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.19}$$

Enfin nous définissons

$$\widetilde{U}^{[n]}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) U^{[n]}(t, x - y)dy. \tag{2.20}$$

Il n'est pas difficile de voir que la restriction à Ω de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ définie dans (2.17)–(2.20) coïncide avec $\tilde{u}^{[n]}(t,x)$ définie dans (2.9)–(2.12). Comme cette propriété est essentielle pour notre travail, nous la présentons dans le lemme suivant

Lemme 2.1. *Quels que soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $U^{[n]}(t,x)$ définie dans (2.17)-(2.19) et la fonction $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ définie dans (2.20) sont continues dans $\mathbb{R}^d$ et impaires par rapport à x_d et on a*

$$U^{[n]}(t,x',0) = 0, \qquad \widetilde{U}^{[n]}(t,x',0) = 0, \tag{2.21}$$

$$U^{[n]}(t,\cdot)\Big|_{\Omega} = u^{[n]}(t,\cdot), \qquad \widetilde{U}^{[n]}(t,\cdot)\Big|_{\Omega} = \tilde{u}^{[n]}(t,\cdot), \tag{2.22}$$

où $u^{[n]}(t,x)$ et $\widetilde{u}^{[n]}(t,x)$ sont les fonctions définies dans (2.9)–(2.12).

Démonstration. Fixons un $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. D'après les définitions (2.13) et (2.17) la fonction $U^{[n]}(t_0^{[n]},x)$ est continue dans $\mathbb{R}^d$ et impaire par rapport à x_d et vérifie la relation

$$U^{[n]}(t_0^{[n]},\cdot)\Big|_{\Omega} = u^{[n]}(t_0^{[n]},\cdot).$$

Supposons maintenant que $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)$ $(k \geq 1)$ est continue dans $\mathbb{R}^d$ et impaire par rapport à x_d et vérifie la relation

$$U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},\cdot)\Big|_{\Omega} = u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},\cdot).$$

Si on rappelle les définitions (2.14)–(2.16), il n'est pas difficile de déduire de l'expression du second membre de (2.18) que $U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ est elle aussi continue dans $\mathbb{R}^d$ et impaire par rapport à x_d. En outre, comme la définition des termes du second membre de (2.10) coïncide avec la définition des termes du second membre de (2.18) dans Ω, de la coïncidance de $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)$ avec $u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)$ dans Ω il résulte que

$$U^{[n]}(t_k^{[n]},\cdot)\Big|_{\Omega} = u^{[n]}(t_k^{[n]},\cdot). \tag{2.23}$$

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ est continue dans $\mathbb{R}^d$ et impaire par rapport à x_d ; de plus l'égalité (2.23) est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$. De la continuité et de l'imparité résulte aussi la relation

$$U^{[n]}(t_k^{[n]},x',0) = 0, \qquad k = 0,1,\cdots.$$

Pour passer de $t_k^{[n]}$ à $t \in \mathbb{R}_+$ dans l'affirmation du lemme pour $U^{[n]}(t,\cdot)$, il suffit de rappeler les définitions (2.11) et (2.19). L'affirmation du lemme relative à $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ résulte immédiatement de l'affirmation pour $U^{[n]}(t,\cdot)$ démontrée ci-dessus et des définitions (2.12) et (2.20). Le lemme est démontré. $\square$

La définition (2.17)–(2.19) des fonctions $U^{[n]}(t,x)$ est formellement identique à celle des solutions approchées introduites dans [35], ce qui nous permet d'utiliser les techniques développées dans [35]. Mais la condition que $U^{[n]}(t,x)$ doit s'annuler sur $\{x_d = 0\}$ entraîne une perte de régularité de $U^{[n]}(t,x)$. Pour surmonter la difficulté due à cette perte de régularité, on a besoin d'élaborer de nouvelles estimations des dérivées de $U^{[n]}(t,x)$.

Avant de passer aux raisonnements sur les possibles inégalités pour les estimations des dérivées de $U^{[n]}(t,x)$, nous rappelons quelques points concernant la dérivabilité des fonctions données et de $U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$.

D'après les définitions (2.13)–(2.16), dans $\mathbb{R}^d\backslash\{x_d = 0\}$ les fonctions $U_0(x)$, $V(t,x)$, $F(t,x,U)$ ont la même dérivabilité que celle indiquée dans les conditions (1.5)–(1.12) et sont prolongeables par continuité sur $\{x_d = 0\}$ des deux côtés (sans exiger nécessairement l'égalité des deux limites). Donc les fonctions $U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ définies à partir de (2.17) et puis par les applications successives de (2.18) auront une régularité analogue, c'est-à-dire, $D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$, $|\alpha| \leq 3$, est continue et bornée dans $\mathbb{R}^d\backslash\{x_d = 0\}$ et prolongeable par continuité sur $\{x_d = 0\}$ des deux côtés (sans exiger nécessairement l'égalité des deux limites).

Il est clair que, dans le cas où $|\alpha| \leq 3$, $\alpha_d = 0$, les fonctions $D_x^\alpha V_j(t,x)$, $j = 1,\cdots,d-1$, $D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$, $D_x^\alpha F(t,x,U^{[n]}(t_k^{[n]},x))$ sont continues dans tout $\mathbb{R}^d$. En outre, en vertu de la continuité et de l'imparité par rapport à x_d, les fonctions $D_x^{\alpha'} V_d(t,x)$, $D_x^{\alpha'} U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$, $D_x^{\alpha'} F(t,x,U^{[n]}(t_k^{[n]},x))$ avec $|\alpha'| \leq 2$, $\alpha'_d = 0$, sont dérivables par rapport à x_d même sur $\{x_d = 0\}$ et $\partial_{x_d} D_x^{\alpha'} V_d(t,x)$, $\partial_{x_d} D_x^{\alpha'} U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$, $\partial_{x_d} D_x^{\alpha'} F(t,x,U^{[n]}(t_k^{[n]},x))$ sont continues dans $\mathbb{R}^d$.

D'autre part, pour $j = 1,\cdots,d-1$, même s'il existe les limites

$$\lim_{x_d\to 0^+} \partial_{x_d} V_j(t,x) \quad \text{et} \quad \lim_{x_d\to 0^-} \partial_{x_d} V_j(t,x),$$

en général la fonction $V_j(t,x)$ n'est pas dérivable par rapport à x_d sur $\{x_d = 0\}$. Toutefois, dans le calcul de la dérivée du second membre de (2.18), on trouvera $\partial_{x_d} V_j(t,x)$ dans le produit

$$\Upsilon_{j,n,k}(x) = \frac{\partial V_j(t_k^{[n]},x)}{\partial x_d} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w_{j,k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y))dy \qquad (j = 1,\cdots,d-1), \tag{2.24}$$

où

$$w_{j,k}^{[1,n]}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} U^{[n]}(t_k^{[n]},\xi), \tag{2.25}$$

$$\xi(x,y) = x - \delta_n V(t_k^{[n]},x) - y. \tag{2.26}$$

Pour $\Upsilon_{j,n,k}(x)$ on a le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Quels que soient* $j \in \{1, \cdots, d-1\}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *et* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, *la fonction* $\Upsilon_{j,n,k}(x)$ *satisfait à la relation*

$$\lim_{x_d \to 0^+} \Upsilon_{j,n,k}(x) = \lim_{x_d \to 0^-} \Upsilon_{j,n,k}(x) = 0 \qquad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1} \tag{2.27}$$

et la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_d}\Upsilon_{j,n,k}(x)$ *est continue dans* $\mathbb{R}^d\backslash\{x_d = 0\}$ *et admet les limites finies*

$$\lim_{x_d \to 0^+} \frac{\partial}{\partial x_d}\Upsilon_{j,n,k}(x), \qquad \lim_{x_d \to 0^-} \frac{\partial}{\partial x_d}\Upsilon_{j,n,k}(x);$$

on a en outre

$$\lim_{x_d \to 0^+} \frac{\partial}{\partial x_d}\Upsilon_{j,n,k}(x) = -\lim_{x_d \to 0^-} \frac{\partial}{\partial x_d}\Upsilon_{j,n,k}(x) \qquad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}. \tag{2.28}$$

Démonstration. Comme nous l'avons vu en haut, $w^{[1,n]}_{j,k-1}(x)$ est continue dans $\mathbb{R}^d$ et continûment dérivable au moins dans $\mathbb{R}^d\backslash\{x_d = 0\}$. Donc, compte tenu aussi de la régularité de $\xi(x, y)$ (voir (2.26)), la fonction

$$W(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w^{[1,n]}_{j,k-1}(\xi(x, y))dy \tag{2.29}$$

est elle aussi continue dans $\mathbb{R}^d$ et continûment dérivable au moins dans $\mathbb{R}^d\backslash\{x_d = 0\}$.

D'autre part, de (2.14), (2.15) et (2.26) il résulte que, pour $\xi(x, y) = (\xi'(x, y), \xi_d(x, y))$, on a

$$\xi(x', -x_d, y', -y_d) = (x', -x_d) - \delta_n(V'(t^{[n]}_k(x', -x_d)), V_d(t^{[n]}_k(x', -x_d))) - (y', -y_d) =$$
$$= ((x' - \delta_n V'(t^{[n]}_k(x', x_d)) - y'), -x_d + \delta_n V_d(t^{[n]}_k(x', x_d)) - y_d) =$$
$$= (\xi'(x', x_d, y', y_d), -\xi_d(x', x_d, y', y_d)),$$

ce qui, en vertu du lemme 2.1 et de (2.25), implique que

$$w^{[1,n]}_{j,k-1}(\xi(x', -x_d, y', -y_d)) = -w^{[1,n]}_{j,k-1}(\xi(x', x_d, y', y_d)).$$

Donc, compte tenu de la relation $\vartheta_n(y_d) = \vartheta_n(-y_d)$, pour la fonction $W(x)$ définie dans (2.29) on a

$$W(x', -x_d) = -W(x', x_d) \tag{2.30}$$

et, en particulier,

$$W(x',0) = 0. \tag{2.31}$$

Comme $V_j(t,x)$ est paire par rapport à x_d, $\partial_{x_d} V_j(t_k^{[n]},x)$ est impaire par rapport à x_d, ce qui, joint à (2.30), implique que la fonction $\Upsilon_{j,n,k}(x) = W(x)\partial_{x_d} V_j(t_k^{[n]},x)$, qui est définie dans $\mathbb{R}^d \backslash \{x_d = 0\}$, est paire par rapport à x_d. En outre, comme $\partial_{x_d} V_j(t_k^{[n]},x)$ y est bornée et que $W(x)$ est continue dans $\mathbb{R}^d$ et vérifie la relation (2.31), la fonction $\Upsilon_{j,n,k}(x)$ vérifie la relation (2.27).

En outre, la régularité de $\partial_{x_d} V_j(t_k^{[n]},x)$ et de $W(x)$ déjà remarquée implique que la dérivée $\partial_{x_d} \Upsilon_{j,n,k}(x)$ est continue dans $\mathbb{R}^d \backslash \{x_d = 0\}$ et qu'il existe ses limites finies pour $x_d \to 0^+$ et pour $x_d \to 0^-$. Comme $\Upsilon_{j,n,k}(x)$ est paire par rapport à x_d, $\partial_{x_d} \Upsilon_{j,n,k}(x)$ est impaire par rapport à x_d, ce qui entraîne (2.28). Le lemme est démontré. □

2.4 Estimation des solutions approchées et de leurs dérivées premières

Dans cette section nous allons établir l'estimation des fonctions $U^{[n]}(t,x)$ et $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ définies dans (2.17)–(2.20) et de leurs dérivées premières

Dans la suite, nous adoptons la notation

$$\tau_+ = \tau + \delta_1, \qquad \text{pour} \quad \tau > 0. \tag{2.32}$$

Lemme 2.3. *On suppose que les hypothèses (1.5)–(1.13) sont remplies. Soient $U^{[n]}(t,x)$ les fonctions définies dans (2.17)–(2.19) et $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ les fonctions définies dans (2.20). Alors il existe une fonction $\Phi_0(t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$, croissante et telle que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |U^{[n]}(t,x)| \leq \Phi_0(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \tag{2.33}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\widetilde{U}^{[n]}(t,x)| \leq \Phi_0(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}. \tag{2.34}$$

Démonstration. Soit $\tau > 0$. Si on pose

$$A_k^{[0,n]} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \qquad C_f = C_f(\tau) = \sup_{(t,x,U)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} \frac{|F(t,x,U)|}{1+|U|},$$

des relations

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y) dy \right| \leq A_{k-1}^{[0,n]},$$

$$\left| F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) \right| \leq C_f(1 + A_{k-1}^{[0,n]})$$

et de la définition (2.18) on obtient pour $k \leq \frac{\tau_+}{\delta_n}$

$$A_k^{[0,n]} \leq A_{k-1}^{[0,n]}(1 + \delta_n C_f) + \delta_n C_f,$$

donc

$$A_k^{[0,n]} \leq A_0^{[0,n]}(1+\delta_n C_f)^k + \delta_n C_f \sum_{j=1}^{k} (1+\delta_n C_f)^{k-j} \leq (1 + A_0^{[0,n]}) e^{t_k^{[n]} C_f} - 1.$$

En complétant cette inégalité par (2.19) pour $t_k^{[n]} < t < t_{k+1}^{[n]} \leq \tau_+$ et en choisissant $t = \tau$, on obtient (2.33) avec $\Phi_0(t) = (1 + A_0^{[0,n]}) e^{C_f(t)(t+\delta_1)} - 1$.

L'inégalité (2.34) résulte immédiatement de (2.33) et de (2.20). □

Lemme 2.4. *Supposons que les hypothèses (1.5)–(1.13) sont remplies. Soient $U^{[n]}(t,x)$ les fonctions définies dans (2.17)–(2.19) et $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ les fonctions définies dans (2.20). Alors il existe une fonction $\Phi_1(t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$, croissante et telle que*

$$\sum_{i=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t,x) \right| \leq \Phi_1(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \tag{2.35}$$

$$\sum_{i=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{U}^{[n]}(t,x) \right| \leq \Phi_1(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}. \tag{2.36}$$

Démonstration. Rappelons d'abord qu'on a

$$\sum_{i=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_{x_i} U^{[n]}(t_0^{[n]}, x)| = \sum_{i=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_{x_i} U_0(x)| \equiv A_0^{[1]} < \infty. \tag{2.37}$$

Pour estimer $|\partial_{x_i} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|$ pour $k \geq 1$, nous allons utiliser les notations $w_{i,k}^{[1,n]}(x)$ et $\xi(x, y)$ introduites dans (2.25), (2.26) et aussi les notations

$$F'_{i,k}(x, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)) = \frac{\partial F(t_k^{[n]}, x, U)}{\partial x_i}\Big|_{U=U^{[n]}(t_k^{[n]},x)}, \tag{2.38}$$

$$F'_{U,k}(x, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)) = \frac{\partial F(t_k^{[n]}, x, U)}{\partial U}\Big|_{U=U^{[n]}(t_k^{[n]},x)}. \tag{2.39}$$

En dérivant les deux membres de (2.18), avec ces notations on a

$$w_{i,k}^{[1,n]}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)\Big[w_{i,k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y)) - \delta_n \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_i} w_{j,k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y))\Big]dy+ \tag{2.40}$$

$$+\delta_n\Big[F'_{i,k-1}(x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + F'_{U,k-1}(x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))w_{i,k-1}^{[1,n]}(x)\Big].$$

Soit $\tau > 0$. Si on pose

$$A_k^{[1,n]} = \sum_{i=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |w_{i,k}^{[1,n]}(x)|, \tag{2.41}$$

et si on rappelle les hypothèses (1.5), (1.8) (et aussi les définitions (2.14)–(2.16)) et les remarques sur la dérivabilité des fonctions données et de $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$, on voit sans difficulté qu'il existe une constante C'_τ indépendante de n et telle que

$$A_k^{[1,n]} \leq (1 + \delta_n C'_\tau)A_{k-1}^{[1,n]} + \delta_n C'_\tau \tag{2.42}$$

et donc

$$A_k^{[1,n]} \leq (1 + \delta_n C'_\tau)^k A_0^{[1,n]} + \delta_n C'_\tau \sum_{j=1}^{k}(1 + \delta_n C'_\tau)^{k-j}, \tag{2.43}$$

pourvu que $0 \leq t_k^{[n]} \leq \tau_+$.

Compte tenu de la définition (2.19) et des relations (2.37) et (2.43) on déduit l'existence d'une fonction $\Phi_1(t)$ satisfaisant à l'inégalité (2.35) pour $U^{[n]}(t, x)$. L'inégalité (2.36) résulte immédiatement de (2.20) et de (2.35). Le lemme est démontré. $\square$

Maintenant nous allons établir une estimation des dérivées secondes et troisièmes de $\widetilde{U}^{[n]}(t, x)$.

2.5 Estimation des dérivées secondes et troisièmes des solutions approchées

Dans cette section, nous allons établir l'estimation des dérivées secondes et troisièmes des solutions approchées $U^{[n]}(t,x)$ et $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, en utilisant des outils de distribution.

Lemme 2.5. *Supposons que les hypothèses* (1.5)–(1.13) *sont remplies. Soient* $U^{[n]}(t,x)$ *les fonctions définies dans* (2.17)–(2.19) *et* $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ *les fonctions définies dans* (2.20). *Alors il existe une fonction* $\Phi_2(t)$ *continue sur* $\mathbb{R}_+$, *croissante et telle que*

$$\sum_{|\alpha|=2} \sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_d=0\}} \left| D_x^\alpha U^{[n]}(t,x) \right| \leq \Phi_2(t) \qquad \forall t\in\mathbb{R}_+, \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \tag{2.44}$$

$$\sum_{|\alpha|=2} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| D_x^\alpha \widetilde{U}^{[n]}(t,x) \right| \leq \Phi_2(t) \qquad \forall t\in\mathbb{R}_+, \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}. \tag{2.45}$$

Démonstration Introduisons la notation

$$w_{i_1 i_2,k}^{[2,n]}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \qquad n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.46}$$

On rappelle que de la définition (2.17)–(2.18) il résulte que les dérivées premières de $U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$, y compris $\partial_{x_d} U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$, sont bien définies et continues même sur $\{x_d=0\}$. Donc on voit aisément que, si $(i_1,i_2)\neq(d,d)$, alors $w_{i_1 i_2,k}^{[2,n]}(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^d$. D'autre part, $\partial_{x_d}^2 U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ n'est généralement pas définie sur $\{x_d=0\}$, mais, considérée comme distribution, n'a pas de partie ayant une mesure concentrée sur $\{x_d=0\}$.

Pour $k=0$, en vertu de (2.17) on a

$$\sum_{i_1,i_2=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_d=0\}} |w_{i_1 i_2,0}^{[2,n]}(x)| \equiv A_0^{[2]} < \infty \tag{2.47}$$

avec $A_0^{[2]}$ qui ne dépend pas de n.

Pour $k\geq 1$, en dérivant les deux membres de (2.18) par rapport à x_{i_1} et x_{i_2}, on a

$$w_{i_1 i_2,k}^{[2,n]}(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y)\Big(w^{[2,n]}_{i_1 i_2,k-1}(\xi(x,y)) - \delta_n \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial V_j}{\partial x_{i_2}} w^{[2,n]}_{i_1 j,k-1}(\xi(x,y))\Big) dy + \delta_n(B_1 + B_2), \tag{2.48}$$

$$B_1 = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \Big(\frac{\partial V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_1}} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w^{[1,n]}_{j,k-1}(\xi(x,y)) dy \Big), \tag{2.49}$$

$$B_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}} F(t^{[n]}_{k-1}, x, U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)), \tag{2.50}$$

où $\xi(x,y)$ est la notation introduite dans (2.26). Pour estimer $\sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_d=0\}} |w^{[2,n]}_{i_1 i_2,k}(x)|$, on examine chaque terme du second membre de (2.48) dans $\mathbb{R}^d\setminus\{x_d = 0\}$, en particulier, en développant B_1 et B_2 en

$$B_1 = -\sum_{j=1}^{d} \Big(\frac{\partial^2 V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w^{[1,n]}_{j,k-1}(\xi(x,y)) dy +$$

$$+ \frac{\partial V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_1}} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w^{[2,n]}_{i_2 j,k-1}(\xi(x,y)) dy \Big) +$$

$$+\delta_n \sum_{j,j'=1}^{d} \frac{\partial V_j(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial V_{j'}(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_{i_2}} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) w^{[2,n]}_{jj',k-1}(\xi(x,y)) dy,$$

$$B_2 = F''_{i_1 i_2,k-1}(x, U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)) + F''_{i_1 U,k-1}(x, U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)) w^{[1,n]}_{i_2,k-1}(x) +$$

$$+F''_{U i_2,k-1}(x, U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)) w^{[1,n]}_{i_1,k-1}(x) + F'_{U,k-1}(x, U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)) w^{[2,n]}_{i_1 i_2,k-1}(x) +$$

$$+F''_{UU,k-1}(x, U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)) w^{[1,n]}_{i_1,k-1}(x) w^{[1,n]}_{i_2,k-1}(x),$$

où

$$F''_{i_1 i_2,k-1}(x, U) = \frac{\partial^2}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}} F(t^{[n]}_{k-1}, x, U), \qquad \text{etc...}$$

(de manière similaire à (2.38)–(2.39)).

Ainsi, en rappelant les conditions sur la régularité de $V(t,x)$ et de $F(t,x,U)$ ainsi que le lemme 2.4, on obtient (pour quelconque $\tau > 0$ fixé)

$$A^{[2,n]}_k \leq (1 + \delta_n C''_\tau) A^{[2,n]}_{k-1} + \delta_n C''_\tau \qquad \text{pour } \ k \leq \frac{\tau_+}{\delta_n} \tag{2.51}$$

où

$$A^{[2,n]}_k = \sum_{i_1,i_2=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_d=0\}} |w^{[2,n]}_{i_1 i_2,k}(x)|,$$

tandis que C''_τ est une constante déterminée par τ et indépendante de n. En rappelant que (2.47) donne $A^{[2,n]}_0 = A^{[2]}_0 < \infty$, de manière analogue à la déduction de (2.35) à partir de

(2.42), de (2.51) et de (2.19) on déduit l'existence d'une fonction $\Phi_2(t)$ satisfaisant à (2.44). L'inégalité (2.45) résulte imméditatement de (2.44) et de (2.20). □

Maintenant nous allons établir une estimation des dérivées troisièmes de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$.

Lemme 2.6. *Supposons que les hypothèses (1.5)–(1.13) sont remplies. Soient $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ les fonctions définies dans (2.17)–(2.20). Alors pour chaque $\tau > 0$ il existe un nombre $\overline{n} \in \mathbb{N}$, une fonction $\Phi_{3,0}(t)$ décroissante définie sur $]0,\tau]$ et une fonction $\Phi_{3,1}(t)$ croissante définie sur $[0,\tau]$ tels que, si $n \geq \overline{n}$, alors on ait*

$$\sum_{|\alpha|=3} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| D_x^\alpha \widetilde{U}^{[n]}(t,x) \right| \leq \Phi_{3,0}(t) + \Phi_{3,1}(t) + 1 \qquad \forall t \in [0,\tau],\ \forall n \geq \overline{n}, \tag{2.52}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \Phi_{3,0}(t) = +\infty \tag{2.53}$$

(la forme de la fonction $\Phi_{3,0}(t)$ est donnée dans (2.88)).

Démonstration. Comme nous l'avons remarqué en haut, $D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ avec $|\alpha| = 3$ sont bien définies dans $\mathbb{R}^d \backslash \{x_d = 0\}$ et $D_x^{\alpha'} U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ avec $|\alpha'| = 2$, $\alpha' \neq (0,\cdots,0,2)$, sont bien définies et continues même sur $\{x_d = 0\}$, tandis que $\partial_{x_d}^2 U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ est en général discontinue sur $\{x_d = 0\}$. Pour cela nous considérons les dérivées troisièmes de $U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ dans le sens de distribution et posons

$$D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]},x) = \widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x) + \widetilde{\chi}_{\alpha,k}, \tag{2.54}$$

où $\widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x)$ est une fonction dans le sens usuel et on a

$$\widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x) = D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]},x) \qquad \text{dans } \ \mathbb{R}^d \backslash \{x_d = 0\},$$

tandis que $\widetilde{\chi}_{\alpha,k}$ est une distribution ayant le support sur $\{x_d = 0\}$, mais on peut considérer $\widetilde{\chi}_{\alpha,k} = 0$ pour $\alpha \neq (0,\cdots,0,3)$. Pour $D_x^\alpha = \frac{\partial^3}{\partial x_{i_3}\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}$ nous utilisons aussi les notations

$$\widetilde{w}_{i_1 i_2 i_3,k}^{[3,n]}(x) = \widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x), \qquad \widetilde{\chi}_{i_1 i_2 i_3,k} = \widetilde{\chi}_{\alpha,k}.$$

Pour $k = 0$, on a évidemment

$$\widetilde{w}_{\alpha,0}^{[3,n]}(x) = D_x^\alpha U_0(x) \qquad \text{dans } \ \mathbb{R}^d \backslash \{x_d = 0\}, \tag{2.55}$$

$$\widetilde{\chi}_{\alpha,0} = \begin{cases} 2\delta(x_d)\lim_{x_d\to 0^+}\frac{\partial^2}{\partial x_d^2}U_0(x) \equiv I_0^{\alpha^*} & \text{si } \alpha = (0,\cdots,0,3) \\ 0 & \text{si } \alpha \neq (0,\cdots,0,3) \end{cases} \tag{2.56}$$

où $\delta(x_d)$ désigne la δ de Dirac pour $x_d \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer $\widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x)$ et $\widetilde{\chi}_{\alpha,k}$ pour $k \geq 1$, nous rappelons l'expression de $D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$. En dérivant les deux membres de (2.48) par rapport à x_{i_3} ($i_3 \in \{1,\cdots,d\}$), pour $D_x^\alpha = \frac{\partial^3}{\partial x_{i_3}\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}$ on a

$$\widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x) + \widetilde{\chi}_{\alpha,k} = D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)\Gamma_0 dy + \delta_n\frac{\partial}{\partial x_{i_3}}(B_0 + B_1 + B_2), \tag{2.57}$$

$$\Gamma_0 = (\widetilde{w}_{\alpha,k-1}^{[3,n]} + \widetilde{\chi}_{\alpha,k-1})(\xi(x,y)) - \delta_n\sum_{j=1}^d\frac{\partial V_j}{\partial x_{i_3}}(\widetilde{w}_{i_1 i_2 j,k-1}^{[3,n]} + \widetilde{\chi}_{i_1 i_2 j,k-1})(\xi(x,y)), \tag{2.58}$$

$$B_0 = -\sum_{j=1}^d\frac{\partial V_j}{\partial x_{i_2}}\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)w_{i_1 j,k-1}^{[2,n]}(\xi(x,y))dy, \tag{2.59}$$

où $\xi(x,y)$, $w_{i_1 j,k-1}^{[2,n]}(\cdot)$, B_1, B_2 sont les notations introduites dans (2.26), (2.46), (2.49), (2.50).

Comme le terme $\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)\Gamma_0 dy$ est un type de convolution de Γ_0 avec une fonction régulière Θ_n, sa contribution à la partie singulière $\widetilde{\chi}_{\alpha,k-1}$ est nulle.

Examinons le terme $\delta_n\frac{\partial}{\partial x_{i_3}}(B_0 + B_1 + B_2)$. Comme $\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)w_{dj,k-1}^{[2,n]}(\xi(x,y))dy$, $j \neq d$, ne s'annule pas sur $\{x_d = 0\}$ et que $\frac{\partial V_j}{\partial x_d}$ pour $j \neq d$ aura une discontinuité sur $\{x_d = 0\}$, $\partial_{x_d}B_0$ pour $i_1 = i_2 = d$ contiendra une distribution avec une mesure concentrée sur $\{x_d = 0\}$. Analoguement, comme nous l'avons vu dans le lemme 2.2 (voir aussi (2.49)), $\partial_{x_d}B_1$ pour $i_1 = i_2 = d$ contiendra une distribution avec une mesure concentrée sur $\{x_d = 0\}$. En outre, des conditions sur la fonction F (voir (1.8), (1.10), (2.16)) il résulte que $\partial_{x_d}^3 F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) = \partial_{x_d}B_2$ (pour $i_1 = i_2 = d$ dans B_2) peut contenir une distribution avec une mesure concentrée sur $\{x_d = 0\}$. D'autre part, comme nous l'avons vu dans le lemme 2.5, $B_0 + B_1 + B_2$ ne contient pas de distribution ayant une mesure concentrée sur $\{x_d = 0\}$, de sorte que $\partial_{x_d}(B_0 + B_1 + B_2)$ ne contient pas de dérivée de la δ de Dirac. Donc, en résumant, on a pour $k \geq 1$

$$\widetilde{\chi}_{\alpha,k} = \begin{cases} \delta_n I_{1,k}^{\alpha^*[n]} & \text{si } \ \alpha = (0,\cdots,0,3) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \tag{2.60}$$

$$I_{1,k}^{\alpha^*[n]} = \delta(x_d)\Big(\lim_{x_d\to 0^+}[B_0 + B_1 + B_2] - \lim_{x_d\to 0^-}[B_0 + B_1 + B_2]\Big) \tag{2.61}$$

(dans (2.61) $B_0+B_1+B_2$ est pris pour $i_1=i_2=d$) ; on remarque aussi que $B_0+B_1+B_2$ ne contient pas de dérivée troisième de $U^{[n]}$ de sorte que $\lim_{x_d\to 0^\pm}[B_0+B_1+B_2]$ peut être estimé en fonction des lemmes 2.4 et 2.5.

D'autre part, $\widetilde{w}^{[3,n]}_{\alpha,k}(x)$ coïncide avec le dernier membre de (2.57) dans $\mathbb{R}^d\backslash\{x_d=0\}$, calculé selon la règle usuelle de la dérivation d'un produit de fonctions et d'une fonction composée.

Introduisons maintenant l'opérateur

$$G_n(\varphi)(x)=G_{n,k}(\varphi)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\Theta_n(y)\varphi(x-\delta_n V(t^{[n]}_k,x)-y)dy. \tag{2.62}$$

Il nous est commode de réécrire (2.56) et (2.60) sous la forme

$$\widetilde{I}_{0,\alpha}=\begin{cases} I_0^{\alpha^*} & \text{si} \quad \alpha=(0,\cdots,0,3)\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}, \tag{2.63}$$

$$\widetilde{I}_{1,\alpha,k}=\begin{cases} I_{1,k}^{\alpha^*[n]} & \text{si} \quad \alpha=(0,\cdots,0,3)\\ 0 & \text{autrement}\end{cases} \qquad \text{pour} \quad k\geq 1. \tag{2.64}$$

On a alors dans $\mathbb{R}^d\backslash\{x_d=0\}$

$$\begin{aligned}\widetilde{w}^{[3,n]}_{\alpha,1}&=G_n(\widetilde{w}^{[3,n]}_{\alpha,0}+\widetilde{I}_{0,\alpha})+\\ &+\sum_{|\beta|=3}\sum_{m'=1}^{3}(-\delta_n)^{m'}P_{\alpha,\beta,m'}(DV)G_n(\widetilde{w}^{[3,n]}_{\beta,0}+\widetilde{I}_{0,\alpha})+\\ &+\sum_{1\leq|\beta|\leq 2}\sum_{m'=1}^{2}(-\delta_n)^{m'}Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)G_n(w^{[|\beta|,n]}_{\beta,0})+\\ &+\delta_n F'_{U,0}w^{[3,n]}_{\alpha,0}(x)+\delta_n R_\alpha(DF,DU^{[n]}),\end{aligned} \tag{2.65}$$

et pour $k\geq 2$

$$\begin{aligned}\widetilde{w}^{[3,n]}_{\alpha,k}&=G_n(\widetilde{w}^{[3,n]}_{\alpha,k-1}+\delta_n\widetilde{I}_{1,\alpha,k-1})+\\ &+\sum_{|\beta|=3}\sum_{m'=1}^{3}(-\delta_n)^{m'}P_{\alpha,\beta,m'}(DV)G_n(\widetilde{w}^{[3,n]}_{\beta,k-1}+\delta_n\widetilde{I}_{1,\alpha,k-1})+\\ &+\sum_{1\leq|\beta|\leq 2}\sum_{m'=1}^{2}(-\delta_n)^{m'}Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)G_n(w^{[|\beta|,n]}_{\beta,k-1})+\\ &+\delta_n F'_{U,k-1}w^{[3,n]}_{\alpha,k-1}(x)+\delta_n R_\alpha(DF,DU^{[n]}),\end{aligned} \tag{2.66}$$

où $P_{\alpha,\beta,m'}(DV)$ est une somme de produits de m' dérivées premières de V par rapport à x, $Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)$ est une somme de produits de m' dérivées d'ordre inférieur ou égal à 3 de V par rapport à x, $R_\alpha(DF, DU^{[n]})$ est une somme de produits de dérivées de F d'ordre inférieur ou égal à 3 et de dérivées de $U^{[n]}$ d'ordre inférieur ou égal à 2 et $w_{\beta,k-1}^{[|\beta|,n]} = D_x^\beta U(t_{k-1}^{[n]}, x)$ pour $|\beta| = 1, 2$.

Maintenant nous posons

$$\widetilde{w}_k^{[3,n]} = (\widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]})_{\alpha\in\mathbb{N}^d,|\alpha|=3}, \qquad \widetilde{w}_0^{[3]} = \widetilde{w}_0^{[3,n]}, \tag{2.67}$$

$$\widetilde{I}_0 = (\widetilde{I}_{0,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}^d,|\alpha|=3}, \qquad \widetilde{I}_{1,k} = (\widetilde{I}_{1,\alpha,k})_{\alpha\in\mathbb{N}^d,|\alpha|=3}, \tag{2.68}$$

$$G_n^1(\varphi)(x) = G_n(\varphi)(x), \qquad G_n^{k+1}(\varphi)(x) = G_n(G_n^k(\varphi))(x). \tag{2.69}$$

Nous introduisons aussi l'opérateur

$$(\Pi\widetilde{w})_\alpha = -\sum_{|\beta|=3}\sum_{m'=1}^{3}(-\delta_n)^{m'-1}P_{\alpha,\beta,m'}(DV)G_n(\widetilde{w}_\beta), \tag{2.70}$$

qui agit sur $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\,|\alpha|=3}$, et la fonction

$$(\Psi_k)_\alpha = -\sum_{1\le|\beta|\le 2}\sum_{m'=1}^{2}(-\delta_n)^{m'-1}Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)G_n(w_{\beta,k}^{[|\beta|,n]}) + R_\alpha(DF, DU^{[n]}). \tag{2.71}$$

En réalité, les opérateurs $G_n = G_{n,k}$ et Π dépendent de $t_k^{[n]}$. Mais, comme leur dépendance de k n'influence pas sur leurs propriétés principales que nous allons utiliser, par abus de langage nous utiliserons les notations introduites dans (2.69) et (2.70) sans indication de k. Nous allons écrire aussi F'_U au lieu de $F'_{U,k-1}$. On rappelle également que $\widetilde{w}_0^{[3]}$ est indépendant de n.

Avec ces notations, de (2.65)–(2.66) on déduit que

$$\widetilde{w}_1^{[3,n]} = (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))\widetilde{w}_0^{[3]} + G_n\widetilde{I}_0 + \delta_n\Pi\widetilde{I}_0 + \delta_n\Psi_0, \tag{2.72}$$

$$\widetilde{w}_k^{[3,n]} = (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))\widetilde{w}_{k-1}^{[3,n]} + \delta_n(G_n + \delta_n\Pi)\widetilde{I}_{1,k-1} + \delta_n\Psi_{k-1}, \qquad k \ge 2. \tag{2.73}$$

Or, si on suppose que $\widetilde{w}_k^{[3,n]}$ satisfait à l'égalité

$$\widetilde{w}_k^{[3,n]} = (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^k\widetilde{w}_0^{[3]} + G_n^k\widetilde{I}_0 + \delta_n(G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^{k-1}\Pi\widetilde{I}_0 +$$

$$+\delta_n \sum_{k'=0}^{k-2} (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^{k'} (\Pi + F'_U) G_n^{k-1-k'} \widetilde{I}_0 + \delta_n \sum_{k'=0}^{k-1} (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^{k'} \Psi_{k-1-k'} +$$

$$+\delta_n \sum_{k'=1}^{k-1} G_n^{k-k'} \widetilde{I}_{1,k'} + \delta_n^2 \sum_{k'=0}^{k-3} (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^{k'} (\Pi + F'_U) \sum_{k''=1}^{k-2-k'} G_n^{k-1-k'-k''} \widetilde{I}_{1,k''} +$$

$$+\delta_n^2 \sum_{k'=0}^{k-2} (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^{k'} \Pi \widetilde{I}_{1,k-1-k'}, \tag{2.74}$$

et si $\widetilde{w}_{k+1}^{[3,n]}$ vérifie la relation (2.73) pour $k+1$, alors par des calculs directs on voit que $\widetilde{w}_{k+1}^{[3,n]}$ lui aussi satisfait à l'égalité (2.74) pour $k+1$. D'autre part, il n'est pas difficile de constater par des calculs directs que $\widetilde{w}_2^{[3,n]}$ satisfait à l'égalité (2.74) pour $k = 2$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, l'égalité (2.74) est vérifiée.

Nous allons estimer chaque terme du second membre de (2.74). Pour cela introduisons la notation

$$\|\widetilde{w}\|_A = \sum_{|\alpha|=3} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\widetilde{w}_\alpha(x)| \tag{2.75}$$

et fixons un nombre $\tau > 0$; nous allons considérer $\widetilde{w}_k^{[3,n]}$ (et son expression) pour $0 \leq k \leq \frac{\tau_+}{\delta_n}$ (voir (2.32) pour τ_+).

Remarquons d'abord que d'après (2.71) (voir aussi (1.5), (1.8) et le lemme 2.5) il existe une constante C_ψ telle que

$$\|\Psi_k\|_A \leq C_\psi \qquad \forall k \in \mathbb{N} \cap [0, \frac{\tau_+}{\delta_n}]. \tag{2.76}$$

D'autre part, d'après la définition (2.70) (voir aussi (2.39), (1.5), (1.8)) il existe une constante $C_{\pi f}$ telle que

$$\|(\Pi + F'_U)\widetilde{w}\|_A \leq C_{\pi f} \|\widetilde{w}\|_A \tag{2.77}$$

pour Π et F'_U définis dans l'intervalle $[0, \tau_+]$. L'inégalité (2.77) et la définition (2.62) de G_n impliquent que

$$\|(G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))\widetilde{w}\|_A \leq (1 + \delta_n C_{\pi f}) \|\widetilde{w}\|_A. \tag{2.78}$$

En utilisant (2.76) et (2.78), on obtient

$$\|(G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^k \widetilde{w}_0^{[3]}\|_A \leq (1 + \delta_n C_{\pi f})^k \|\widetilde{w}_0^{[3]}\|_A \leq e^{C_{\pi f} k \delta_n} \|\widetilde{w}_0^{[3]}\|_A, \tag{2.79}$$

$$\|\delta_n \sum_{k'=0}^{k-1} (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^{k'} \Psi_{k-1-k'}\|_A \leq \delta_n \sum_{k'=0}^{k-1} (1 + \delta_n C_{\pi f})^{k'} \|\Psi_{k-1-k'}\|_A \leq$$

$$\leq C_\psi \int_0^{k\delta_n} e^{C_{\pi f}t'}dt' = \frac{C_\psi}{C_{\pi f}}(e^{C_{\pi f}k\delta_n}-1). \tag{2.80}$$

Pour estimer les termes contenant $\widetilde{I}_0$ ou $\widetilde{I}_{1,k}$ nous utilisons le lemme 2.7 et son corollaire, que nous démontrerons dans la suite. En effet, si

$$\sup_{0\leq t\leq \tau_+,\, x\in\mathbb{R}^d,\, x_d\neq 0} \frac{V_d(t,x)}{x_d} \equiv M > 0,$$

en appliquant (2.98) à $G_n^k\widetilde{I}_0$, pour $n \geq n^*$ avec n^* donné dans (2.97) on a

$$\|G_n^k\widetilde{I}_0\|_A \leq \frac{C_{\iota 0}\overline{M}^{1/2}}{(1-e^{-\overline{M}k\delta_n})^{1/2}}, \qquad \overline{M} = M\log 16, \tag{2.81}$$

tandis que, si $M \leq 0$, alors d'après (2.96) on a

$$\|G_n^k\widetilde{I}_0\|_A \leq \frac{C_{\iota 0}}{(k\delta_n)^{1/2}}, \tag{2.82}$$

où $C_{\iota 0}$ est une constante déterminée par les fonctions données (voir en particulier (2.56), (2.63)). Analoguement on a

$$\|G_n^{k-k'}\widetilde{I}_{1,k'}\|_A \leq \frac{C_{\iota 1}\overline{M}^{1/2}}{(1-e^{-\overline{M}(k-k')\delta_n})^{1/2}} \qquad \text{ou} \qquad \leq \frac{C_{\iota 1}}{\sqrt{(k-k')\delta_n}}$$

selon le cas $M > 0$ ou $M \leq 0$ avec une constante $C_{\iota 1}$ déterminée par les fonctions données ou déjà estimées (voir en particulier (2.61), (2.64)). On en déduit que

$$\|\delta_n\sum_{k'=1}^{k-1} G_n^{k-k'}\widetilde{I}_{1,k'}\|_A \leq C_{\iota 1}\int_0^{k\delta_n}\frac{\overline{M}^{1/2}}{(1-e^{-\overline{M}t'})^{1/2}}dt' \qquad \text{ou} \qquad \leq 2C_{\iota 1}\sqrt{k\delta_n}. \tag{2.83}$$

On remarque que l'intégrale du second membre de (2.83) est finie. En outre, en utilisant des idées analogues et en tenant compte aussi de (2.77)–(2.78), on obtient

$$\|\delta_n\sum_{k'=0}^{k-2}(G_n+\delta_n(\Pi+F_U'))^{k'}(\Pi+F_U')G_n^{k-1-k'}\widetilde{I}_0\|_A \leq$$

$$\leq C_{\iota 0}C_{\pi f}\int_0^{k\delta_n} e^{C_{\pi f}t'}\frac{\overline{M}^{1/2}}{(1-e^{-\overline{M}(k\delta_n-t')})^{1/2}}dt' \qquad \text{ou} \qquad \leq C_{\iota 0}C_{\pi f}\int_0^{k\delta_n}\frac{e^{C_{\pi f}t'}}{\sqrt{k\delta_n-t'}}dt', \tag{2.84}$$

$$\|\delta_n^2\sum_{k'=0}^{k-3}(G_n+\delta_n(\Pi+F_U'))^{k'}(\Pi+F_U')\sum_{k''=1}^{k-2-k'} G_n^{k-1-k'-k''}\widetilde{I}_{1,k''}\|_A \leq$$

$$\leq C_{\iota 1}C_{\pi f}\int_0^{k\delta_n} e^{C_{\pi f}t'}\int_0^{k\delta_n-t'}\frac{\overline{M}^{1/2}}{(1-e^{-\overline{M}(k\delta_n-t'-t'')})^{1/2}}dt''dt'$$

$$\text{ou} \quad \leq C_{\iota 1} C_{\pi f} \int_0^{k\delta_n} e^{C_{\pi f} t'} \int_0^{k\delta_n - t'} \frac{1}{\sqrt{k\delta_n - t' - t''}} dt'' dt'. \tag{2.85}$$

En ce qui concerne les termes qui contiennent $\Pi \widetilde{I}_0$ ou $\Pi \widetilde{I}_{1,k-1-k'}$, on remarque que les définitions (2.62) et (2.70) impliquent qu'il existe une constante $C_{\pi\iota}$ telle que

$$\|\delta_n \Pi \widetilde{I}_0\|_A \leq \sqrt{\delta_n} C_{\pi\iota}, \qquad \|\delta_n \Pi \widetilde{I}_{1,k-1-k'}\|_A \leq \sqrt{\delta_n} C_{\pi\iota}.$$

On a donc

$$\|\delta_n (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^{k-1} \Pi \widetilde{I}_0\|_A \leq e^{C_{\pi f} k\delta_n} \sqrt{\delta_n} C_{\pi\iota}, \tag{2.86}$$

$$\|\delta_n^2 \sum_{k'=0}^{k-2} (G_n + \delta_n(\Pi + F'_U))^{k'} \Pi \widetilde{I}_{1,k-1-k'}\|_A \leq \int_0^{k\delta_n} e^{C_{\pi f} t'} dt' \sqrt{\delta_n} C_{\pi\iota}. \tag{2.87}$$

On remarque que, pourvu que $k\delta_n \leq \tau_+$, le second membre des inégalités (2.86)–(2.87) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Considérons le dernier membre des inégalités (2.79)–(2.85) comme fonction de $t = k\delta_n$, $0 \leq t \leq \tau_+$. On voit alors que ces fonctions de t ne dépend pas de n, pourvu que $n \geq n^*$ avec n^* donné dans (2.97) dans le cas $M > 0$.

Posons d'abord

$$\Phi_{3,0}(t) = \frac{C_{\iota 0} \overline{M}^{1/2}}{(1 - e^{-\overline{M} t})^{1/2}} \qquad \text{ou} \qquad = \frac{C_{\iota 0}}{\sqrt{t}}, \tag{2.88}$$

qui sont des fonctions décroissantes ayant la limite $+\infty$ pour $t \to 0^+$.

D'autre part, on voit que, si on considère les expressions du dernier membre des inégalités (2.79)–(2.80), (2.83)–(2.85) comme fonctions de t ($k\delta_n = t$), elles sont des fonctions croissantes en t. Nous désignons leur somme par

$$\Phi_{3,1}(t).$$

Enfin, comme nous l'avons remarqué en haut, le second membre des inégalités (2.86)–(2.87) tend vers 0 quand n tend vers l'infini, pourvu que $k\delta_n \leq \tau_+$.

Donc, de l'expression (2.74), des inégalités (2.79)–(2.87) et des considérations faites ci-dessus on déduit qu'il existe un nombre $n^{**} \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq n^{**}$, alors pour $k = \frac{t}{\delta_n}$, $0 \leq t \leq \tau_+$ on ait

$$\|\widetilde{w}_k^{[3,n]}\|_A \leq \Phi_{3,0}(t) + \Phi_{3,1}(t) + \frac{1}{2}. \tag{2.89}$$

Maintenant nous revenons à (2.54) et (2.60). En utilisant la notation introduite dans (2.64), on a

$$D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x) + \delta_n \widetilde{I}_{1,\alpha,k}, \qquad k \geq 1.$$

On a donc d'après la définition (2.20)

$$D_x^\alpha \widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \Theta_n * \widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]} + \delta_n \Theta_n * \widetilde{I}_{1,\alpha,k} \tag{2.90}$$

(ici $*$ désigne la convolution par rapport à $x \in \mathbb{R}^d$). Il est clair qu'on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\Theta_n * \widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{x_d=0\}} |\widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x)|. \tag{2.91}$$

D'autre part, le raisonnement analogue à celui de l'obtention de (2.86)–(2.87) nous donne

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\delta_n \Theta_n * \widetilde{I}_{1,\alpha,k}(x)| \leq \sqrt{\delta_n} C_{\iota 1}. \tag{2.92}$$

Compte tenu de la définition (2.19), de l'égalité (2.90) et des inégamités (2.89), (2.91)–(2.92) on déduit qu'il existe un $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq \overline{n}$, $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ vérifie la relation (2.52). $\square$

Il nous reste à démontrer le lemme suivant et son corollaire.

Lemme 2.7. *Soit $V(t,x)$ la fonction définie dans (2.14)–(2.15) avec la fonction $v(t,x)$ donnée dans l'énoncé du théorème 3.7. Soit $G_n(\cdot)$ l'opérateur défini dans (2.62). On pose*

$$M = \sup_{0\leq t\leq\tau_+,\, x\in\mathbb{R}^d,\, x_d\neq 0} \frac{V_d(t,x)}{x_d}. \tag{2.93}$$

Si $\varphi(x')$ est une fonction mesurable bornée dans $\mathbb{R}^{d-1}$ et si $\delta_n M < 1$, alors pour $k = 1, 2, \cdots$ on a

$$|G_n^k(I_\varphi)(x)| \leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{d-1}} |\varphi(x')|\, \overline{\psi}_{n,k}(x_d), \tag{2.94}$$

$$\overline{\psi}_{n,k}(x_d) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-1}(1-\delta_n M)^{2j}}} \exp\Big(-\frac{(1-\delta_n M)^{2k} x_d^2}{4\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-1}(1-\delta_n M)^{2j}}\Big),$$

où

$$I_\varphi = \delta(x_d)\varphi(x'), \tag{2.95}$$

$\delta(x_d)$ étant la δ de Dirac pour $x_d \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2.8. *Soit M le nombre défini dans (2.93).*

Si $M \leq 0$, alors on a

$$|G_n^k(I_\varphi)(x)| \leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{d-1}} |\varphi(x')| \frac{1}{2\sqrt{\pi k\delta_n\kappa}} \exp\Big(-\frac{(1-\delta_n M)^{2k}x_d^2}{4\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-1}(1-\delta_n M)^{2j}}\Big). \tag{2.96}$$

Si $M > 0$, alors pour

$$n \geq n^* = \min\{\, n\in\mathbb{N}\,|\, \delta_n M \leq \frac{1}{2}\,\} \tag{2.97}$$

on a

$$|G_n^k(I_\varphi)(x)| \leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{d-1}} |\varphi(x')| \frac{\overline{M}^{1/2}}{2\sqrt{\pi\kappa(1-e^{-\overline{M}k\delta_n})}} \exp\Big(-\frac{(1-\delta_n M)^{2k}x_d^2}{4\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-1}(1-\delta_n M)^{2j}}\Big). \tag{2.98}$$

où $\overline{M} = M\log 16$.

Démonstration. Dans le cas $M \leq 0$, l'inégalité (2.96) résulte immédiatement de (2.94). Dans le cas $M > 0$, comme $\delta_n M \leq \frac{1}{2}$, on a

$$(1-\delta_n M)^{2j} = e^{2j\log(1-\delta_n M)} \geq e^{-\overline{M}j\delta_n}$$

et donc

$$\delta_n\sum_{j=0}^{k-1}(1-\delta_n M)^{2j} \geq \delta_n\sum_{j=0}^{k-1} e^{-\overline{M}j\delta_n} \geq \int_0^{k\delta_n} e^{-\overline{M}t'}dt' = \frac{1}{\overline{M}}(1-e^{-\overline{M}k\delta_n}),$$

ce qui, joint à (2.94), nous donne (2.98). □

Pour démontrer le lemme 2.7 nous utilisons les lemmes suivants (lemmes 2.9 et 2.10). Pour le lemme 2.9 nous définissons l'opérateur

$$g_{M,n}(\varphi)(r) = \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(s)\varphi(r-\delta_n Mr - s)ds \tag{2.99}$$

pour les fonctions φ (y compris les distributions) pour lesquelles le deuxième membre de (2.99) est bien défini. Nous définissons aussi

$$g_{M,n}^1(\varphi)(r) = g_{M,n}(\varphi)(r), \qquad g_{M,n}^k(\varphi)(r) = g_{M,n}(g_{M,n}^{k-1}(\varphi))(r), \qquad k = 2,3,\cdots.$$

Lemme 2.9. *Soit $\delta(r)$ la distribution δ de Dirac pour $r \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$g^k_{M,n}(\delta(\cdot))(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-1}(1-\delta_n M)^{2j}}}\exp\Big(-\frac{(1-\delta_n M)^{2k}r^2}{4\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-1}(1-\delta_n M)^{2j}}\Big). \tag{2.100}$$

Démonstration. Pour $k=1$, de la définition (2.3) et de celle (2.99) il résulte immédiatement que

$$g^1_{M,n}(\delta(\cdot))(r) = \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(s)\delta(r-\delta_n Mr - s)ds =$$

$$= \vartheta_n(r-\delta_n Mr) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa}}\exp\Big(-\frac{(1-\delta_n M)^2 r^2}{4\delta_n\kappa}\Big), \tag{2.101}$$

c'est-à-dire $g^1_{M,n}(\delta(\cdot))(r)$ vérifie la relation (2.100).

Supposons maintenant que la relation (2.100) est vérifiée pour $k-1$. Alors, en utilisant la formule de la convolution entre des distributions gaussiennes

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\exp\Big(-\frac{s^2}{4a}\Big)\frac{1}{\sqrt{4\pi b}}\exp\Big(-\frac{(r-s)^2}{4b}\Big)ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi(a+b)}}\exp\Big(-\frac{r^2}{4(a+b)}\Big),$$

on a

$$g^k_{M,n}(\delta(\cdot))(r) = \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(s) g^{k-1}_{M,n}(\delta(\cdot))(r-\delta_n Mr - s)ds =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa}}\exp\Big(-\frac{s^2}{4\delta_n\kappa}\Big)\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-2}(1-\delta_n M)^{2j}}}\exp\Big(-\frac{(1-\delta_n M)^{2(k-1)}(r-\delta_n Mr-s)^2}{4\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-2}(1-\delta_n M)^{2j}}\Big)ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-1}(1-\delta_n M)^{2j}}}\exp\Big(-\frac{(1-\delta_n M)^{2k}r^2}{4\delta_n\kappa\sum_{j=0}^{k-1}(1-\delta_n M)^{2j}}\Big). \tag{2.102}$$

De (2.101) et de (2.102) on déduit (2.100). □

Lemme 2.10. *Soit $\psi_0(r)$ une fonction paire décroissante pour $r \geq 0$ (et donc croissante pour $r \leq 0$). Soit $\varphi_0(r)$ une fonction mesurable telle que*

$$\varphi_0(r) \leq \psi_0(r) \qquad \forall r \in \mathbb{R}. \tag{2.103}$$

Soit $W(r)$ une fonction mesurable telle que

$$W(r) \leq Mr \quad \textit{pour} \quad r \geq 0, \qquad W(r) \geq Mr \quad \textit{pour} \quad r \leq 0. \tag{2.104}$$

Si $\delta_n M < 1$, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(s)\varphi_0(r - \delta_n W(r) - s)ds \leq g_{M,n}(\psi_0)(r) \qquad \forall r \in \mathbb{R}. \tag{2.105}$$

DÉMONSTRATION. Définissons l'opérateur $g_{W,n}(\cdot)$ par

$$g_{W,n}(\varphi)(r) = \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(s)\varphi(r - \delta_n W(r) - s)ds.$$

Comme

$$\vartheta_n(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \qquad \psi_0(r - \delta_n W(r) - s) \geq \varphi_0(r - \delta_n W(r) - s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

on a

$$g_{W,n}(\varphi_0)(r) \leq g_{W,n}(\psi_0)(r) \qquad \forall r \in \mathbb{R}. \tag{2.106}$$

Nous allons maintenant démontrer que

$$g_{W,n}(\psi_0)(r) \leq g_{M,n}(\psi_0)(r) \qquad \forall r \in \mathbb{R}. \tag{2.107}$$

Pour ce faire, posons

$$s^* = r - \frac{\delta_n Mr + \delta_n W(r)}{2}, \qquad q = s - s^*.$$

Alors, en utilisant les relations

$$s = q + r - \frac{\delta_n Mr + \delta_n W(r)}{2}, \qquad r - \delta_n Mr - s = -q - \frac{\delta_n Mr}{2} + \frac{\delta_n W(r)}{2},$$
$$r - \delta_n W(r) - s = -q - \frac{\delta_n W(r)}{2} + \frac{\delta_n Mr}{2},$$

on a

$$g_{M,n}(\psi_0)(r) - g_{W,n}(\psi_0)(r) =$$
$$= \Big(\int_{-\infty}^{s^*} + \int_{s^*}^{\infty}\Big)\vartheta_n(s)\big[\psi_0(r - \delta_n Mr - s) - \psi_0(r - \delta_n W(r) - s)\big]ds =$$
$$= \Big(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\Big)\vartheta_n(q + r - \frac{\delta_n Mr + \delta_n W(r)}{2})\times$$

$$\times\Big[\psi_0(-q - \frac{\delta_n M r}{2} + \frac{\delta_n W(r)}{2}) - \psi_0(-q - \frac{\delta_n W(r)}{2} + \frac{\delta_n M r}{2})\Big]dq.$$

Considérons d'abord le cas $r \geq 0$. Dans ce cas en vertu de (2.104) on a

$$-\frac{\delta_n M r}{2} + \frac{\delta_n W(r)}{2} \leq 0.$$

Donc, compte tenu que $\psi_0(r')$ est une fonction paire et décroissante pour $r' \geq 0$ et croissante pour $r' \leq 0$, on a

$$\psi_0(-q - \frac{\delta_n M r}{2} + \frac{\delta_n W(r)}{2}) - \psi_0(-q - \frac{\delta_n W(r)}{2} + \frac{\delta_n M r}{2}) =$$

$$= -\Big[\psi_0(q - \frac{\delta_n M r}{2} + \frac{\delta_n W(r)}{2}) - \psi_0(q - \frac{\delta_n W(r)}{2} + \frac{\delta_n M r}{2})\Big] \leq 0 \qquad \text{pour} \quad q \geq 0.$$

D'autre part, compte tenu de la condition $\delta_n M < 1$, on a

$$\vartheta_n(q + r - \frac{\delta_n M r + \delta_n W(r)}{2}) \leq \vartheta_n(-q + r - \frac{\delta_n M r + \delta_n W(r)}{2}) \qquad \text{pour} \quad q \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{0} \vartheta_n(q+r-\frac{\delta_n M r + \delta_n W(r)}{2})\Big[\psi_0(-q-\frac{\delta_n M r}{2}+\frac{\delta_n W(r)}{2})-\psi_0(-q-\frac{\delta_n W(r)}{2}+\frac{\delta_n M r}{2})\Big]dq \geq$$

$$\geq -\int_{0}^{\infty} \vartheta_n(q+r-\frac{\delta_n M r + \delta_n W(r)}{2})\Big[\psi_0(-q-\frac{\delta_n M r}{2}+\frac{\delta_n W(r)}{2})-\psi_0(-q-\frac{\delta_n W(r)}{2}+\frac{\delta_n M r}{2})\Big]dq,$$

c'est-à-dire on a l'inégalité (2.107) pour $r \geq 0$.

Dans le cas $r \leq 0$, en vertu de (2.104) on a

$$-\frac{\delta_n M r}{2} + \frac{\delta_n W(r)}{2} \geq 0,$$

ce qui implique que le signe de

$$\psi_0(-q - \frac{\delta_n M r}{2} + \frac{\delta_n W(r)}{2}) - \psi_0(-q - \frac{\delta_n W(r)}{2} + \frac{\delta_n M r}{2})$$

et celui de

$$\vartheta_n(q + r - \frac{\delta_n M r + \delta_n W(r)}{2}) - \vartheta_n(-q + r - \frac{\delta_n M r + \delta_n W(r)}{2})$$

sont inversés et donc à la fin on aura la même inégalité (2.107) même pour $r \leq 0$.

De (2.106) et (2.107) on déduit (2.105). $\square$

Démonstration du lemme 2.7. Remarquons d'abord que $G_n^1(I_\varphi)(x)$ a la forme

$$G_n^1(I_\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi}(x')\vartheta_n(y_d)\delta(x_d - \delta_n V_d(t_1^{[n]}, x', x_d) - y_d)dy_d =$$

$$= \overline{\varphi}(x')\vartheta_n(x_d - \delta_n V_d(t_1^{[n]}, x', x_d)),$$

où

$$\overline{\varphi}(x') = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Theta_n'(y')\varphi(x' - \delta_n V'(t_1^{[n]}, x', 0) - y')dy'.$$

La condition (2.93) et la forme explicite de la fonction $\vartheta_n(\cdot)$ impliquent que

$$|G_n^1(I_\varphi)(x)| \leq |\overline{\varphi}(x')|\vartheta_n(x_d - \delta_n M x_d) \leq$$

$$\leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{d-1}} |\varphi(x')| \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa}} \exp\Big(-\frac{(1-\delta_n M)^2 r^2}{4\delta_n\kappa}\Big) = \sup_{x'\in\mathbb{R}^{d-1}} |\varphi(x')|\, \overline{\psi}_{n,1}(x_d),$$

ce qui n'est autre que (2.94) pour $k=1$.

Cela étant, pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer (2.94) pour $G_n^{k+1}(I_\varphi)(x)$ en supposant (2.94) pour $G_n^k(I_\varphi)(x)$. Supposons donc que $G_n^k(I_\varphi)(x)$ vérifie (2.94). Alors on a aussi

$$|\overline{\varphi}_k(x', x_d)| \leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{d-1}} |\varphi(x')|\, \overline{\psi}_{n,k}(x_d), \tag{2.108}$$

où

$$\overline{\varphi}_k(x', x_d) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Theta_n'(y') G_n^k(I_\varphi)(x' - \delta_n V'(t_{k+1}^{[n]}, x', x_d) - y', x_d)dy'.$$

Rappelons que la définition (2.93) de M implique que la condition (2.104) pour $W(x_d) = V_d(t_{k+1}^{[n]}, x', x_d)$ est vérifiée pour tout $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et que $\overline{\psi}_{n,k}(x_d)$ est une fonction paire par rapport à x_d et décroissante dans $0 \leq x_d < \infty$. Ainsi, en appliquant le lemme 2.10 à l'inégalité (2.108) et à $W(x_d) = V_d(t_{k+1}^{[n]}, x', x_d)$, on obtient

$$|G_n^{k+1}(I_\varphi)(x', x_d)| = \Big| \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_d)\overline{\varphi}_k(x', x_d - \delta_n V_d(t_{k+1}^{[n]}, x', x_d) - y_d)dy_d \Big| \leq$$

$$\leq \sup_{x'\in\mathbb{R}^{d-1}} |\varphi(x')|\, g_{M,n}(\overline{\psi}_{n,k})(x_d).$$

Comme d'après le lemme 2.9 on a $g_{M,n}(\overline{\psi}_{n,k})(x_d) = \overline{\psi}_{n,k+1}(x_d)$, il résulte que $G_n^{k+1}(I_\varphi)(x)$ vérifie (2.94) pour $k+1$, ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

CHAPITRE 3

Convergence des solutions approchées de l'équation de transport-diffusion avec la condition de Dirichlet homogène dans le demi-espace

Dans ce chapitre, nous démontrons que les solutions approchées $\widetilde{u}^{[n]}(t,x)$ que nous avons définies et leurs dérivées premières par rapport aux variables spatiales convergent uniformément, tandis que les dérivées secondes par rapport aux variables spatiales convergent ponctuellement et que la fonction limite $u(t,x)$ satisfait à l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$ avec la condition initiale et la condition de Dirichlet aux limites homogène. Cela constitue le résultat principal du travail présenté dans la présente thèse.

3.1 Convergence des solutions approchées et leurs dérivées premières

Nous démontrons d'abord la convergence uniforme de $U^{[n]}(t,x)$, de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ et de leurs dérivées premières par rapport à $x \in \mathbb{R}^d$ suivant le schéma des propositions 5.1 et 6.1 de [35].

Pour la démonstration de la convergence de $U^{[n]}(t,x)$, de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ et de leurs dérivées premières joue le rôle important la relation

$$t_{2k}^{[n+1]} = t_k^{[n]} \qquad \text{pour} \quad k \in \mathbb{N}$$

(voir (2.1)–(2.2)), qui nous permettra d'examiner la différence

$$U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x). \tag{3.1}$$

Nous rappelons aussi que pour la démonstration de la convergence de $U^{[n]}(t,x)$, de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ et de leurs dérivées premières on utilise la bornitude uniforme de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ et de ses dérivées premières et secondes par rapport à x_i.

En ce qui concerne la convergence de $U^{[n]}(t,x)$ et de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, on a le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Supposons que les hypothèses (1.5)–(1.13) sont remplies. Alors pour tout $\tau > 0$ les fonctions $U^{[n]}(t,x)$, $n = 1, 2, \cdots$, définies par (2.17)–(2.19) ainsi que les fonctions $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, $n = 1, 2, \cdots$, définies par (2.20) convergent uniformément vers une même fonction $U(t,x)$ dans $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ pour $n \to \infty$.*

Démonstration. On pose

$$\xi_{k'}^{[n']}(x,y) = x - \delta_{n'} V(t_{k'}^{[n']}, x) + y, \tag{3.2}$$

où $k' = k+1$ ou $= 2k+1$ ou $= 2k+2$ et $n' = n$ ou $= n+1$. Nous remarquons que, d'après la définition (2.18), $U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x)$ peut être exprimée sous la forme

$$U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) = I_{2k}^{[n+1]} + J_{a,2k}^{[n+1]} + J_{b,2k}^{[n+1]}, \tag{3.3}$$

où

$$I_{2k}^{[n+1]} = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1)\Theta_{n+1}(y_2) U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi^*(y_1,y_2)) dy_1 dy_2, \tag{3.4}$$

$$\xi^*(y_1,y_2) = \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1)) + y_2,$$

$$J_{a,2k}^{[n+1]} = \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y) F(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y), U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y))) dy \tag{3.5}$$

$$J_{b,2k}^{[n+1]} = \delta_{n+1} F(t_{2k+1}^{[n+1]}, x, U_1 + U_2), \tag{3.6}$$

$$U_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y) U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+1}^{[n+1]}(x,y))dy,$$
$$U_2 = \delta_{n+1} F(t_{2k}^{[n+1]}, x, U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x)).$$

Pour $I_{2k}^{[n+1]}$ on remarque que

$$\Theta_n(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(z-y)\Theta_{n+1}(y)dy$$

et que donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(z) U^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^{[n]}(x,z))dz =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1)\Theta_{n+1}(y_2) U^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^{[n]}(x, y_1+y_2))dy_1 dy_2. \tag{3.7}$$

En utilisant cette relation et l'inégalité

$$\left|\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1)) + y_2 - \xi_{k+1}^{[n]}(x, y_1+y_2)\right| =$$
$$= \delta_{n+1} |V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1)) - V(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq$$
$$\leq \delta_{n+1}^2 \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |\partial_t V(s,y)| + \delta_{n+1} \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |\nabla V(s,y)| (\delta_{n+1} \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |V(s,y)| + |y_1|)$$

(pour τ_+ voir (2.32)), on obtient

$$\left|U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi^*(y_1,y_2)) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^{[n]}(x, y_1+y_2))\right| \leq$$
$$\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, y)| +$$
$$+ \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |\nabla U^{[n+1]}(s,y)| (\delta_{n+1}^2 \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |\partial_t V(s,y)| +$$
$$+ \delta_{n+1} \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |\nabla V(s,y)| (\delta_{n+1} \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |V(s,y)| + |y_1|)), \tag{3.8}$$

où $\xi^*(y_1,y_2)$ est définie par (3.4). On rappelle que d'après le lemme 2.4 $|\nabla U^{[n+1]}(t,x)|$ est majoré par une constante indépendante de n. Donc, compte tenu aussi des relations

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y)dy = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1)|y_1|dy_1 = C\sqrt{\delta_{n+1}}$$

(C étant une constante indépendante de n), des expressions de (3.4) et de (3.7) on obtient

$$\left|I_{2k}^{[n+1]} - \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_k^{[n]}, x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) + y)dy\right| \leq$$
$$\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, y)| + K_1 \delta_n^{3/2} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|. \tag{3.9}$$

En particulier, on a

$$|U^{[n+1]}(t_2^{[n+1]},x) - U^{[n]}(t_1^{[n]},x)| \leq K_1 \delta_n^{3/2} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\nabla U_0(y)|, \tag{3.10}$$

où K_1 est une constante indépendante de n.

Maintenant on va estimer

$$J_{a,2k}^{[n+1]} + J_{b,2k}^{[n+1]} - \delta_n F(t_k^{[n]}, x, U^{[n]}(t_k^{[n]},x)) =$$

$$= J_{a,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1} F(t_k^{[n]}, x, U^{[n]}(t_k^{[n]},x)) + J_{b,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1} F(t_k^{[n]}, x, U^{[n]}(t_k^{[n]},x)).$$

Pour cela, en utilisant les hypothèses sur la régularité de $v(t,x)$ et de $f(t,x,u)$ (donc de $V(t,x)$ et de $F(t,x,U)$), on obtient

$$\left| J_{a,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1} F(t_k^{[n]}, x, U^{[n]}(t_k^{[n]},x)) \right| \leq$$

$$\leq K_2(\delta_{n+1}^2 + \delta_{n+1}^{3/2}) + K_2 \delta_{n+1} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]},x) - U^{[n]}(t_k^{[n]},x)|, \tag{3.11}$$

$$\left| J_{b,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1} F(t_k^{[n]}, x, U^{[n]}(t_k^{[n]},x)) \right| \leq$$

$$\leq K_3(\delta_{n+1}^2 + \delta_{n+1}^{3/2}) + K_3 |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]},x) - U^{[n]}(t_k^{[n]},x)|, \tag{3.12}$$

où K_2 et K_3 sont des constantes indépendantes de n.

À partir des relations (3.3), (3.9), (3.11), et (3.12), on déduit qu'il existe une constante K_4 indépendante de n telle que

$$|U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]},x) - U^{[n]}(t_{k+1}^{[n]},x)| \leq$$

$$\leq (1 + K_4\delta_{n+1}) \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]},y) - U^{[n]}(t_k^{[n]},y)| + K_4 \delta_{n+1}^{3/2}. \tag{3.13}$$

Donc, si on pose

$$Y_k = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]},x) - U^{[n]}(t_k^{[n]},x)|,$$

on a

$$Y_{k+1} \leq (1 + K_4\delta_{n+1}) Y_k + K_4 \delta_{n+1}^{3/2}.$$

Compte tenu de la relation $Y_0 = 0$, on en déduit que

$$Y_k \leq \delta_{n+1}^{3/2} K_4 \sum_{j=0}^{k} (1 + K_4\delta_{n+1})^{k-j} \leq \delta_{n+1}^{1/2} e^{tK_4},$$

d'où on obtient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |U^{[n+1]}(t,x) - U^{[n]}(t,x)| \leq \sqrt{\delta_{n+1}} e^{tK_4}. \tag{3.14}$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\delta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}} < \infty,$$

l'inégalité (3.14) et la définition (2.19) impliquent que la suite $U^{[n]}(t,x)$ converge uniformément vers une fonction $U(t,x)$ dans $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$. La convergence uniforme de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ vers $U(t,x)$ résulte immédiatement de la définition (2.20). Le lemme est démontré. □

Maintenant, nous allons démontrer la convergence des dérivées premières $\frac{\partial}{\partial x_j} U^{[n]}(t,x)$ et $\frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ pour $j = 1,\cdots,d$.

Lemme 3.2. *Supposons que les hypothèses (1.5)–(1.13) sont remplies. Soient $U^{[n]}(t,x)$ et $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, $n = 1,2,\cdots,$ les fonctions définies par (2.17)–(2.20). Alors pour tout $\tau > 0$ les dérivées premières $\frac{\partial}{\partial x_j} U^{[n]}(t,x)$ et $\frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ $(j = 1,\cdots,d)$ convergent uniformément dans $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$ quand $n\to\infty$.*

Démonstration. Pour démontrer que $\frac{\partial}{\partial x_j} U^{[n]}(t,x)$ $(j = 1,\cdots,d)$ converge uniformément dans $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$ pour $n\to\infty$, on dérive les deux membres de (3.1).

En utilisant les notations $w_{i,k}^{[1,n]}(x)$ et $\xi_{k+1}^{[n]}(x,y)$ introduite dans (2.25) et dans (3.2) respectivement, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) = w_{i,2k+2}^{[1,n+1]}(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1)\Theta_{n+1}(y_2)\Big[w_{i,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) - \delta_{n+1}\sum_{j=1}^{d} w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*)\Big(\partial_{x_i} V_j(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{d} \partial_{x_l} V_j(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1))\partial_{x_i}\xi_{2k+2,l}^{[n+1]}(x,y_1)\Big)\Big] dy_1 dy_2 +$$

$$+ \delta_{n+1}\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{n+1}(y_1)\sum_{j=1}^{d}\Big[F'_{j,2k}(\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1), U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1))) +$$

$$+ F'_{U,2k}(\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1), U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1)))w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1))\Big]\times$$

$$\times \partial_{x_i}\xi_{2k+2,j}^{[n+1]}(x,y_1) dy_1 + \delta_{n+1} F'_{i,2k+1}(x, U^{[n+1]}(t_{2k+1}^{[n+1]}, x)) +$$

$$+\delta_{n+1}F'_{U,2k+1}(x,U^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k+1},x))w^{[n+1]}_{i,2k+1}(x), \tag{3.15}$$

où

$$\xi^*=\xi^*(y_1,y_2)=\xi^{[n+1]}_{2k+2}(x,y_1)-\delta_{n+1}V(t^{[n+1]}_{2k+1},\xi^{[n+1]}_{2k+2}(x,y_1))+y_2. \tag{3.16}$$

De (3.15) et de (2.40) (avec le remplacement évident) on déduit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}U^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k+2},x)-\frac{\partial}{\partial x_i}U^{[n]}(t^{[n]}_{k+1},x)=\sum_{p=1}^{7}Z_p, \tag{3.17}$$

où

$$Z_1=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Theta_{n+1}(y_1)\Theta_{n+1}(y_2)\Big(w^{[1,n+1]}_{i,2k}(\xi^*)-w^{[1,n]}_{i,k}(\xi^{[n]}_{k+1}(x,y_1+y_2))\Big)dy_1dy_2, \tag{3.18}$$

$$Z_2=\delta_{n+1}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Theta_{n+1}(y_1)\Theta_{n+1}(y_2)\sum_{j=1}^{d}\Lambda_{2,j}(x,y_1,y_2)dy_1dy_2, \tag{3.19}$$

$$\Lambda_{2,j}(x,y_1,y_2)=-\partial_{x_i}V_j(t^{[n+1]}_{2k+2},x)w^{[1,n+1]}_{j,2k}(\xi^*)+\partial_{x_i}V_j(t^{[n]}_{k+1},x)w^{[1,n]}_{j,k}(\xi^{[n]}_{k+1}(x,y_1+y_2)),$$

$$Z_3=\delta_{n+1}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Theta_{n+1}(y_1)\Theta_{n+1}(y_2)\sum_{j=1}^{d}\Lambda_{3,j}(x,y_1,y_2)dy_1dy_2, \tag{3.20}$$

$$\Lambda_{3,j}(x,y_1,y_2)=-\sum_{l=1}^{d}\partial_{x_l}V_j(t^{[n+1]}_{2k+1},\xi^{[n+1]}_{2k+2}(x,y_1))\partial_{x_i}\xi^{[n+1]}_{2k+2,l}(x,y_1)w^{[1,n+1]}_{j,2k}(\xi^*)+$$

$$+\partial_{x_i}V_j(t^{[n]}_{k+1},x)w^{[1,n]}_{j,k}(\xi^{[n]}_{k+1}(x,y_1+y_2)),$$

$$Z_4=\delta_{n+1}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Theta_{n+1}(y_1)\sum_{j=1}^{d}F'_{j,2k}(\xi^{[n+1]}_{2k+2}(x,y_1),U^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k},\xi^{[n+1]}_{2k+2}(x,y_1)))\times$$

$$\times\partial_{x_i}\xi^{[n+1]}_{2k+2,j}(x,y_1)dy_1-\delta_{n+1}F'_{i,k}(x,U^{[n]}(t^{[n]}_{k},x)), \tag{3.21}$$

$$Z_5=\delta_{n+1}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Theta_{n+1}(y_1)\sum_{j=1}^{d}F'_{u,2k}(\xi^{[n+1]}_{2k+2}(x,y_1),U^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k},\xi^{[n+1]}_{2k+2}(x,y_1)))w^{[1,n+1]}_{j,2k}(\xi^{[n+1]}_{2k+2}(x,y_1))\times$$

$$\times\partial_{x_i}\xi^{[n+1]}_{2k+2,j}(x,y_1)dy_1-\delta_{n+1}F'_{U,k}(x,U^{[n]}(t^{[n]}_{k},x))w^{[1,n]}_{i,k}(x), \tag{3.22}$$

$$Z_6=\delta_{n+1}\Big(F'_{i,2k+1}(x,U^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k+1},x))-F'_{i,k}(x,U^{[n]}(t^{[n]}_{k},x))\Big), \tag{3.23}$$

$$Z_7=\delta_{n+1}\Big(F'_{U,2k+1}(x,u^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k+1},x))w^{[1,n+1]}_{i,2k+1}(x)-F'_{U,k}(x,U^{[n]}(t^{[n]}_{k},x))w^{[1,n]}_{i,k}(x)\Big). \tag{3.24}$$

Comme

$$\xi^*-\xi^{[n]}_{k+1}(x,y_1+y_2)=\delta_{n+1}(V(t^{[n]}_{k+1},x)-V(t^{[n+1]}_{2k+1},\xi^{[n+1]}_{2k+2}(x,y_1))),$$

on obtient

$$|w_{i,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) - w_{i,k}^{[1,n]}(\xi_{k+1}^{[n]}(x, y_1 + y_2))| \leq$$

$$\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y) - w_{i,k}^{[1,n]}(y)| + \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\nabla w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y)|(\delta_{n+1}^2 \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |\partial_t V(s,y)|+$$

$$+\delta_{n+1} \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |\nabla V(s,y)|(\delta_{n+1} \sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d} |V(s,y)| + |y_1|)). \tag{3.25}$$

Or, comme $D_x^\alpha U^{[n]}(t,x)$ avec $|\alpha| = 2$ dans le sens de distribution ne contient pas de partie avec une mesure concentrée sur $\{x_d = 0\}$, pour compléter l'estimation (2.44) il suffit de prolonger $D_x^\alpha U^{[n]}(t,x)$ ($|\alpha| = 2$) sur $\{x_d = 0\}$ par

$$\frac{1}{2}\Big[\lim_{x_d\to 0^+} D_x^\alpha U^{[n]}(t,x) + \lim_{x_d\to 0^-} D_x^\alpha U^{[n]}(t,x)\Big],$$

ce qui nous permet de considérer que $|\nabla w_{i,2k}^{[1,n+1]}|$ est majoré par une constante indépendante de n. Donc, de manière analogue à l'obtention de (3.9), de (3.25) on obtient

$$|Z_1| \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y) - w_{i,k}^{[1,n]}(y)| + C_0\delta_{n+1}^{3/2}, \tag{3.26}$$

où C_0 est une constante indépendante de n déterminée seulement par les données de la régularité de F et V et le lemme 2.5. Dans la suite, nous écrivons C_0 quand il s'agit d'une constante déterminée par les hypothèses du lemmme.

Introduisons la notation

$$Y_k^{[1]} = \sum_{i=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(x) - w_{i,k}^{[1,n]}(x)|. \tag{3.27}$$

En rappelant que $t_{2k+2}^{[n+1]} = t_{k+1}^{[n]}$ et en utilisant l'inégalité (3.25), qui, écrite avec j au lieu de i, est valable pour tout $j \in \{1, \cdots, d\}$, on obtient

$$|Z_2| \leq \delta_{n+1}C_0(Y_k^{[1]} + C_0\delta_{n+1}^{3/2}). \tag{3.28}$$

En ce qui concerne $\Lambda_j(y_1, y_2)$ qui se trouve sous le signe d'intégration de (3.20), compte tenu de la relation

$$\partial_{x_i}\xi_{2k+2,l}^{[n+1]}(x, y_1) = \delta_{il} - \delta_{n+1}\partial_{x_i}V_l(t_{2k+2}^{[n+1]}, x), \tag{3.29}$$

on a

$$\Lambda_{3,j}(x, y_1, y_2) = \delta_{n+1}\sum_{l=1}^{d} \partial_{x_l}V_j(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y_1))\partial_{x_i}V_l(t_{2k+2}^{[n+1]}, x)w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*)+ \tag{3.30}$$

$$+(\partial_{x_i}V_j(t_{k+1}^{[n]},\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1))-\partial_{x_i}V_j(t_{2k+1}^{[n+1]},\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1)))w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*)+$$

$$+(\partial_{x_i}V_j(t_{k+1}^{[n]},x)-\partial_{x_i}V_j(t_{k+1}^{[n]},\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y_1)))w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*)+$$

$$+\partial_{x_i}V_j(t_{k+1}^{[n]},x)(w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\xi_{k+1}^{[n]}(x,y_1+y_2))-w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*))+$$

$$+\partial_{x_i}V_j(t_{k+1}^{[n]},x)(w_{j,k}^{[1,n]}(\xi_{k+1}^{[n]}(x,y_1+y_2))-w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\xi_{k+1}^{[n]}(x,y_1+y_2))).$$

Comme

$$|\partial_{x_i}V_j(t_{k+1}^{[n]},\xi)-\partial_{x_i}V_j(t_{2k+1}^{[n+1]},\xi)|\leq\delta_{n+1}\sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d}|\partial_t\partial_{x_i}V_j(s,y)|\qquad(\xi\in\mathbb{R}^d),$$

$$|\partial_{x_i}V_j(t_{k+1}^{[n]},x-z)-\partial_{x_i}V_j(t_{k+1}^{[n]},\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x-z,y_1))|\leq$$

$$\leq\sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d}|\nabla\partial_{x_i}V_j(s,y)|(\delta_{n+1}\sup_{(s,y)\in[0,\tau_+]\times\mathbb{R}^d}|V(s,y)|+|y_1|),$$

compte tenu de (3.25) et des valeurs uniformément bornées par hypothèses et le lemme 2.5, on a

$$|Z_3|\leq C_0(\delta_{n+1}^2+\delta_{n+1}^{3/2})+\delta_{n+1}C_0Y_k^{[1]}.\tag{3.31}$$

En ce qui concerne Z_4, Z_5, Z_6 et Z_7, en rappelant la convention de notation $F'_{\cdot,2k}(x,u)=F'_{\cdot,k}(x,u)$ et en tenant compte de la relation

$$|F'_{\cdot,k}(x^{(1)},U^{(1)})-F'_{\cdot,k}(x^{(2)},U^{(2)})|\leq C_0(|x^{(1)}-x^{(2)}|+|U^{(1)}-U^{(2)}|),$$

et de la condition (1.9) et de la définition (2.16) ainsi que de (3.29), on a

$$|Z_4+Z_5+Z_6+Z_7|\leq C_0(\delta_{n+1}^2+\delta_{n+1}^{3/2})+\delta_{n+1}C_0(Y_k+Y_k^{[1]}),\tag{3.32}$$

où

$$Y_k=\sum_{i=1}^d\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|U_{i,2k}^{[1,n+1]}(x)-U_{i,k}^{[1,n]}(x)|.$$

En faisant la somme des inégalités (3.26), (3.28), (3.31), (3.32), et en rappelant la définition $w_{i,k}^{[1,n]}(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ et la relation (3.17), on a

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]},x)-\frac{\partial}{\partial x_i}U^{[n]}(t_{k+1}^{[n]},x)\right|\leq\sum_{p=1}^7|Z_p|\leq$$

$$\leq\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]},y)-\frac{\partial}{\partial x_i}U^{[n]}(t_k^{[n]},y)\right|+C_0(\delta_{n+1}^2+\delta_{n+1}^{3/2})+\delta_{n+1}C_0(Y_k+Y_k^{[1]}),$$

où C_0 désigne encore une constante générique indépendante de n. Comme cette inégalité est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, en faisant la somme de cette inégalité pour $i = 1, \cdots, d$ on obtient

$$Y_{k+1}^{[1]} \leq Y_k^{[1]} + C_0(\delta_{n+1}^2 + \delta_{n+1}^{3/2}) + \delta_{n+1} C_0 (Y_k + Y_k^{[1]}). \tag{3.33}$$

Si on pose

$$\widetilde{Y}_k^{[1]} = Y_k + Y_k^{[1]}, \tag{3.34}$$

alors, en adjoignant (3.33) et (3.13), on obtient

$$\widetilde{Y}_{k+1}^{[1]} \leq \widetilde{Y}_k^{[1]} + \widetilde{C}_0(\delta_{n+1}^2 + \delta_{n+1}^{3/2}) + \delta_{n+1} \widetilde{C}_0 \widetilde{Y}_k^{[1]} \tag{3.35}$$

avec une constante $\widetilde{C}_0$ indépendante de n. Donc, de manière analogue à la déduction de (3.14) on obtient

$$\widetilde{Y}_k^{[1]} \leq \delta_{n+1}^{1/2} e^{t \widetilde{C}_0}. \tag{3.36}$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{1/2} < \infty$, à partir de l'inégalité (3.36), on déduit que $\frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t, x)$ converge uniformément dans $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$. Comme $\frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t, x)$ converge uniformément, la fonction limite coïncide avec $\frac{\partial}{\partial x_i} U(t, x)$, où $U(t, x)$ est la fonction limite de la suite $\{U^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Enfin, de ce résultat et de la définition (2.20), on déduit que $\frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{U}^{[n]}(t, x)$ converge uniformément dans $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ vers $\frac{\partial}{\partial x_i} U(t, x)$. Le lemme est démontré. □

3.2 Convergence des dérivées secondes des solutions approchées

En ce qui concerne la convergence des dérivées secondes de $\widetilde{U}^{[n]}(t, x)$, nous utilisons l'idée de [3], mais nous l'appliquons directement à $\widetilde{U}^{[n]}(t, x)$ au lieu de $U^{[n]}(t, x)$, car dans notre cas $U^{[n]}(t, x)$ n'a pas de régularité suffisante.

Lemme 3.3. *Supposons que les hypothèses (1.5)–(1.13) sont remplies. Soient $\widetilde{U}^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \cdots$ les fonctions définies par (2.17)–(2.20). Soit $U(t, x)$ la fonction limite obte-*

nue dans le lemme 3.1. Alors, quel que soit $t > 0$, les fonctions $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ convergent ponctuellemément vers $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$ $(i,j = 1,\cdots,d)$ dans $\mathbb{R}^d$ pour $n \to \infty$.

Démonstration. Fixons un $t > 0$ et considérons une famille de sous-domaines bornés G_m de $\mathbb{R}^d$ telle que $G_m \subset G_{m+1}$ pour $m = 1, 2, \cdots$ et que $\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = \mathbb{R}^d$. Comme les dérivées secondes de $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ sont uniformément bornées dans $\mathbb{R}^d$ (voir le lemme 2.5) et que, pour chaque $t > 0$ fixé, leur gradient est lui aussi uniformément bornée dans $\mathbb{R}^d$ (voir le lemme 2.6), d'après le théorème d'Ascoli-Arzela dans chaque sous-domaine G_m il existe une sous-suite $\{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\widetilde{U}^{[n_q]}(t,x)\}_{q=1}^{\infty}$ qui converge uniformément sur G_m pour tout $i,j \in \{1,\cdots,d\}$. Comme $\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ convergent uniformément vers $\frac{\partial}{\partial x_i}U(t,x)$ dans $\mathbb{R}^d$, la limite de cette sous-suite ne peut être que $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$. En outre, si la suite entière $\{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)\}_{q=1}^{\infty}$ ne convergeait pas uniformément vers $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$ sur G_m, du fait que $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ sont uniformément bornées et équicontinues et du théorème d'Ascoli-Arzela on peut déduire sans difficulté une contradiction, ce qui implique que $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ convergent uniformément vers $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$ sur G_m pour $n \to \infty$.

La convergence de $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ vers $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$ sur G_m étant établie, en passant à la limite dans la famille de sous-domaines G_m, on obtient la convergence ponctuelle de $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ vers $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$ dans $\mathbb{R}^d = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$. $\square$

3.3 Passage à la limite

Maintenant nous allons montrer le passage à la limite dans la structure de l'équation de transport-diffusion pour $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, $n \to \infty$. Le point crucial pour le passage à la limite est le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Soient ε et τ deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon < \tau$. Soit $\widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ la fonction définie par (2.17)–(2.20). Supposons que les hypothèses (1.5)–(1.13) sont* *remplies. Alors, pour $\varepsilon \leq t_{k-1}^{[n]} \leq t_k^{[n]} \leq \tau$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\frac{\widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\delta_n} = -V(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) +$$

$$+\kappa \Delta \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \Theta_n * F(t_{k-1}^{[n]}, \cdot, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot))(x) + R \tag{3.37}$$

avec

$$|R| \leq \delta_n^{1/2} C, \tag{3.38}$$

où C est une constante déterminée par ε et τ et indépendante de n.

Démonstration. On remarque que, en vertu des définitions (2.18) et (2.20), on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(z) \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - z - \delta_n V(t_k^{[n]}, x - z) - y) dy dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y) dy +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(z) D_{V,z} U(x, y, z) dz dy \tag{3.39}$$

où

$$D_{V,z} U(x, y, z) =$$

$$= U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - z - \delta_n V(t_k^{[n]}, x - z) - y) - U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - z - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y).$$

En ce qui concerne le premier terme du second membre de (3.39), d'après la formule de Taylor on a

$$\widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y) =$$

$$= \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - y \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} [\delta_n^2 V_i(t_k^{[n]}, x) V_j(t_k^{[n]}, x) - 2\delta_n V_i(t_k^{[n]}, x) y_j + y_i y_j] \frac{\partial^2 \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^{d} \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \widetilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} \tag{3.40}$$

où $\mu_i = -\delta_n V_i - y_i$ (et d'une manière similaire pour μ_j et μ_h), tandis que $\widetilde{x}$ est un point entre x et $x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y$. Or, comme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y_j dy = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y_i y_j dy = 0 \text{ si } i \neq j, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y_i^2 dy = 2\delta_n \kappa,$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) y \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) dy = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \Big[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \Big(\delta_n^2 V_i(t_k^{[n]}, x) V_j(t_k^{[n]}, x) - 2\delta_n V_i(t_k^{[n]}, x) y_j + y_i y_j \Big) \frac{\partial^2 \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} \Big] dy =$$

$$= \delta_n \kappa \Delta \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n^2 \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} V_i(t_k^{[n]}, x) V_j(t_k^{[n]}, x) \frac{\partial^2 \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j};$$

par conséquent, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y) dy =$$

$$= \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) +$$

$$+ \delta_n \kappa \Delta \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n^2 \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} V_i(t_k^{[n]}, x) V_j(t_k^{[n]}, x) \frac{\partial^2 \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^{d} \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \widetilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} dy. \tag{3.41}$$

Nous fixons $\varepsilon > 0$ et $\tau > \varepsilon$. Alors, compte tenu de la relation $|\mu_i| \leq \delta_n \sup_{(s,y) \in [0,\tau_+] \times \mathbb{R}^d} |V(s,y)|$ (et d'une manière similiaire pour μ_j et μ_h) et de la relation

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) |y_i| dy = \frac{2\sqrt{\delta_n \kappa}}{\sqrt{\pi}},$$

on déduit du lemme 2.6 qu'il existe une constante C_0 telle que pour $n \geq \overline{n}$ avec un certain $\overline{n} \in \mathbb{N}$ on ait

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^{d} \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \widetilde{x} + z)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} dy \Big| \leq C_0 \delta_n^{3/2}. \tag{3.42}$$

D'autre part, comme

$$|D_{V,z} U(x,y,z)| \leq \delta_n |z| \sup_{(s,\xi) \in [0,\tau_+] \times \mathbb{R}^d} |\nabla U^{[n]}(s,\xi)| \sup_{(s,\xi) \in [0,\tau_+] \times \mathbb{R}^d} |\nabla V(s,\xi)|,$$

en rappelant le lemme 2.4, on obtient

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(z) D_{V,z} U(x,y,z) dz dy \Big| \leq C_1 \delta_n^{3/2} \tag{3.43}$$

avec une constante C_1.

Des relations (3.39)–(3.43) on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(z) \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - z - \delta_n V(t_k^{[n]}, x - z) - y) dy dz =$$

$$= \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n \kappa \Delta \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + R_1$$

avec $|R_1| \leq \delta_n^{3/2}(C_0 + C_1)$, ce qui, joint à (2.18) et (2.20), entraîne (3.37). □

Le lemme 3.4 étant démontré, on définit la fonction

$$\overline{\widetilde{U}}^{[n]}(t, x) = \frac{1}{\delta_n} \int_t^{t+\delta_n} \widetilde{U}^{[n]}(t', x) dt'. \tag{3.44}$$

On remarque que, en vertu du lemme 3.1, la fonction $\overline{\widetilde{U}}^{[n]}(t, x)$ converge ponctuellement vers $U(t, x)$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

Choisissons ε et τ tels que $0 < \varepsilon < \tau$ et considérons t, $t_{k-1}^{[n]}$, $t_k^{[n]}$ tels que $\varepsilon < t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]} < \tau$. Alors d'après la définition (2.19) on a

$$\partial_t \overline{\widetilde{U}}^{[n]}(t, x) = \frac{1}{\delta_n} \left[\widetilde{U}^{[n]}(t + \delta_n, x) - \widetilde{U}^{[n]}(t, x) \right] =$$

$$= \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} \frac{\widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - \widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\delta_n} + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} \frac{\widetilde{U}^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x) - \widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]}, x)}{\delta_n}.$$

En y substituant la relation (3.37) et en utilisant aussi (2.19), on a

$$\partial_t \overline{\widetilde{U}}^{[n]}(t, x) =$$

$$= -V(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t, x) - \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n} (V(t_{k+1}^{[n]}, x) - V(t_k^{[n]}, x)) \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]}, x) +$$
$$+ \kappa \Delta \widetilde{U}^{[n]}(t, x) + \Theta_n * D_{F,k-1,k}(x) + R, \tag{3.45}$$

où R est un terme qui vérifie la condition (3.38) et

$$D_{F,k-1,k}(x) = \frac{t_{k+1-t}^{[n]}}{\delta_n} F(t_{k-1}^{[n]}, \cdot, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot))(x) + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n} \Theta_n * F(t_k^{[n]}, \cdot, U^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot))(x).$$

Pour la formule (3.45) on a le lemme suivant.

Lemme 3.5. *La suite* $-V(t_k^{[n]}, x) \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t, x) - \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n} (V(t_{k+1}^{[n]}, x) - V(t_k^{[n]}, x)) \cdot \nabla \widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]}, x) +$ *converge ponctuellement sur* $\mathbb{R}^d$ *vers*

$$-V(t, x) \cdot \nabla U(t, x) + \kappa \Delta U(t, x) + F(t, x, U(t, x))$$

pour $n \to \infty$.

Démonstration. En vertu de la continuité en t de $V(t,x)$, de la convergence de $\nabla\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ vers $\nabla U(t,x)$ (voir le lemme 3.1) et du fait que $\nabla\widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ est uniformément borné (voir le lemme 2.4), on a

$$V(t_k^{[n]},x)\cdot\nabla\widetilde{U}^{[n]}(t,x)\to V(t,x)\cdot\nabla U(t,x) \qquad \text{pour} \quad n\to\infty, \tag{3.46}$$

$$\frac{t-t_k^{[n]}}{\delta_n}(V(t_{k+1}^{[n]},x)-V(t_k^{[n]},x))\cdot\nabla\widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]},x)\to 0 \qquad \text{pour} \quad n\to\infty. \tag{3.47}$$

D'autre part, comme le second membre de (3.37) est borné par une constante L qui ne dépend pas de n, on a $|\widetilde{U}^{[n]}(t_k^{[n]},x)-\widetilde{U}^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)|\leq L\delta_n$, ce qui entraîne que

$$|\widetilde{U}^{[n]}(t_1,x)-\widetilde{U}^{[n]}(t_2,x)|\leq L|t_1-t_2|, \qquad |U(t_1,x)-U(t_2,x)|\leq L|t_1-t_2|.$$

Donc, compte tenu aussi de l'hypothèse sur la régularité de $F(\cdot,\cdot,\cdot)$, on obtient

$$D_{F,k-1,k}(x)\to F(t,x,U(t,x)) \qquad \text{pour} \quad n\to\infty. \tag{3.48}$$

Des relations (3.45)–(3.48), jointes à la relation $\Delta\widetilde{U}^{[n]}(t,x)\to\Delta U(t,x)$ pour $n\to\infty$, qui découle du lemme 3.3, on déduit que le second membre de (3.45) converge ponctuellement vers

$$-V(t,x)\cdot\nabla U(t,x)+\kappa\Delta U(t,x)+F(t,x,U(t,x)).$$

Le lemme est démontré. □

On a aussi la convergence de $\partial_t\overline{\widetilde{U}}^{[n]}(t,x)$ vers la dérivée généralisée $\partial_t U(t,x)$.

Lemme 3.6. *Le premier membre de (3.45) converge ponctuellement vers la dérivée généralisée $\partial_t U(t,x)$ pour $n\to\infty$.*

Démonstration. La convergence du second membre de (3.45) implique aussi la convergence de $\partial_t\overline{\widetilde{U}}^{[n]}(t,x)$ vers une fonction, que nous notons à titre provisoire $\omega(t,x)$. Alors, en rappelant la définition (3.44), on a

$$\int_{t_1}^{t_2}\omega(t,x)dt=\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\partial_t\overline{\widetilde{U}}^{[n]}(t,x)dt=\lim_{n\to\infty}\Big(\overline{\widetilde{U}}^{[n]}(t_2,x)-\overline{\widetilde{U}}^{[n]}(t_1,x)\Big)=U(t_2,x)-U(t_1,x),$$

ce qui nous permet d'identifier, au sens de dérivée généralisée, $\omega(t,x)$ avec $\partial_t U(t,x)$. Le lemme est démontré. □

3.4 Résultat principal et sa démonstration

Le résultat principal de notre travail est le théorème suivant.

Théorème 3.7. *On suppose que les hypothèses* (1.5)–(1.13) *sont remplies. Alors les fonctions* $\tilde{u}^{[n]}(t,x)$ *définies par* (2.9)–(2.11) *et leurs dérivées premières* $\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{u}^{[n]}(t,x)$, $i = 1,\cdots,d$, *convergent uniformément vers une fonction* $u(t,x)$ *et ses dérivées premières* $\frac{\partial}{\partial x_i}u(t,x)$ *dans* $[0,\tau]\times\Omega$ *pour tout* $\tau > 0$, *et leurs dérivées secondes* $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\tilde{u}^{[n]}(t,x)$, $i,j = 1,\cdots,d$, *convergent ponctuellement vers* $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(t,x)$ *pour* $t > 0$, $x \in \Omega$. *En outre, la fonction limite* $u(t,x)$ *admet la dérivée généralisée par rapport à* $t > 0$ *et vérifie l'équation* (1.2) *et les conditions* (1.3)–(1.4).

Le théorème 3.7 résultera de la proposition suivante.

Proposition 3.8. *On suppose que les hypothèses* (1.5)–(1.13) *sont remplies. Alors les fonctions* $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ *définies par* (2.17)–(2.20) *et leurs dérivées premières* $\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, $i = 1,\cdots,d$, *convergent uniformément vers une fonction* $U(t,x)$ *et ses dérivées premières* $\frac{\partial}{\partial x_i}U(t,x)$ *dans* $[0,\tau]\times\Omega$ *pour tout* $\tau > 0$, *et leurs dérivées secondes* $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, $i,j = 1,\cdots,d$, *convergent ponctuellement vers* $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}U(t,x)$ *pour* $t > 0$, $x \in \Omega$, *tandis que la fonction limite* $U(t,x)$ *admet la dérivée généralisée par rapport à* $t > 0$ *et satisfait à l'équation*

$$\partial_t U(t,x) + V(t,x)\cdot\nabla U(t,x) = \kappa\Delta U(t,x) + F(t,x,U(t,x)) \qquad \textit{dans} \ \ ]0,\infty[\,\times\mathbb{R}^d, \tag{3.49}$$

à la condition initiale

$$U(0,x) = U_0(x) \qquad \textit{dans} \ \ \mathbb{R}^d, \tag{3.50}$$

et à la condition

$$U(t,x',0) = 0 \qquad \textit{sur} \ \ \{x_d = 0\}. \tag{3.51}$$

Démonstration. En vertu des lemmes 3.1, 3.2, 3.3 et 3.6, on peut conclure que les fonctions $\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$ définies par (2.17)–(2.20) et leurs dérivées premières $\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, $i = 1,\cdots,d$, convergent uniformément vers une fonction $U(t,x)$ et ses dérivées premières $\frac{\partial}{\partial x_i}U(t,x)$ dans l'intervalle $[0,\tau]\times\Omega$ pour tout $\tau>0$. De plus, leurs dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)$, $i,j=1,\cdots,d$, convergent ponctuellement vers $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}U(t,x)$ pour $t>0$ et $x\in\Omega$. Enfin, la fonction limite $U(t,x)$ possède une dérivée généralisée par rapport à $t>0$.

D'autre part, des lemmes 3.5 et 3.6 on déduit que la fonction $U(t,x)$ satisfait à l'équation (3.49) dans $[\varepsilon,\tau]\times\mathbb{R}^d$. Or, comme nous pouvons choisir ε et τ $(0<\varepsilon<\tau)$ de manière arbitraire, il résulte que la fonction $U(t,x)$ satisfait à l'équation (3.49) dans $]0,\infty[\,\times\mathbb{R}^d$.

Enfin, les relations (3.50) et (3.51) résultent de la condition (2.17) et de la relation (2.21) ainsi que de la convergence uniforme de $U^{[n]}$ vers U, ce qui achève la démonstration du théorème 3.8. □

Démonstration du théorème 3.7. Pour démontrer le théorème 3.7 il suffit de rappeler le lemme 2.1, de sorte qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{U}^{[n]}(t,x)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{u}^{[n]}(t,x)=U(t,x)=u(t,x) \qquad \text{pour}\ \ t\geq 0,\ \ x\in\Omega$$

et que la restriction de l'équation (3.49) à Ω coïncide avec l'équation (1.2). En outre, les conditions (1.3) et (1.4) résultent de (3.50) et (3.51) et du lemme 2.1. Le théorème 3.7 est démontré. □

Conclusion et Perspectives

Nous avons étudié l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$ avec la condition de Dirichlet aux limites homogène. Pour cette équation nous avons construit une famille de solutions approchées $\widetilde{u}^{[n]}(t,x)$ par la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et la translation sur chaque pas du temps discrétisé et nous avons démontré que ces solutions approchées convergent vers une fonction $u(t,x)$ qui satisfait à l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace $\mathbb{R}^d_+$, à la condition initiale donnée et à la condition de Dirichlet aux limites homogènes. La convergence des solutions approchées démontrée était la convergence uniforme pour les solutions approchées et leurs dérivées premières par rapport aux variables spatiales et la convergence ponctuelle pour les dérivées secondes par rapport aux variables spatiales ; d'autre part on a montré que la fonction limite $u(t,x)$ possède une dérivée généralisée par rapport à la variable de temps.

Ce résultat généralise le résultat de Taleb et al. [35] de 2020 et de Smaali et al. [33] de 2021, qui démontrent des résultats analogues pour l'équation de transport-diffusion dans $\mathbb{R}^d$, et en particulier généralise le résultat de [3], qui démontrent des résultats analogues dans le cas du domaine $\mathbb{R}^2_+$ avec la condition de Dirichlet aux limites homogènes sous l'hypothèse que le transport soit parallèle à l'axe x_1. Pour enlever la condition du transport parallèle à l'hyperplan $\{x_d = 0\}$, nous avons donné une estimation de la propagation de la singularité sous la condition du transport pas nécessairement parallèle à l'hyperplan $\{x_d = 0\}$, ce qui constitue un des points importants du point de vue technique.

Un point important de nos résultats est que les estimations des solutions approchées et de leurs dérivées ne dépendent pas du coefficient de diffusion. Cela nous permettra de faire tendre le coefficient de diffusion vers 0. Cette possibilité, récessament démontrée dans le cas du domaine $\mathbb{R}^d$ ([1], [11]), montre l'utilité de la méthode que nous avons adoptée : construction de solutions approchées par la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et la translation sur chaque pas du temps discrétisé.

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ouvrent de nouvelles perspectives de recherche, notamment l'étude de l'équation de transport-diffusion avec une condition initiale et des conditions aux limites de Neumann homogènes, la question de l'affaiblissement des conditions ainsi que celle des conditions aux limites non-homogènes, et l'étude du comportement de la solution de l'équation de transport-diffusion dans le demi-espace lorsque le coefficient de diffusion tend vers zéro.

Bibliographie

[1] L. Ait Mahiout, H. Fujita Yashima, *Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport. Ann. Math. Afr.*, vol. **10** (2023), pp. 105–124.

[2] M. Aouaouda, *Modèle mathématique du cyclone tropical basé sur les trajectoires du vent.* Thèse de doctorat, Univ. Oum El-Bouaghi, 2021.

[3] M. Aouaouda, A. Ayadi, H. Fujita Yashima, *Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane.* J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. vol. **26** (2022), pp. 222–258 (in Russian).

[4] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin, *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations* (Grundlehren der mathematischen Wissenschafften, 343). Springer (Berlin, Heidelberg), 2011.

[5] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik* (Méthodes de la physique mathématique), Springer, 1931.

[6] C. David, P. Gosselet, *Équations aux dérivées partielles.* Dunod (Paris), 2015.

[7] J. H. Desmond, X. Mao, A. M. Stuart, *Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations.* SIAM J. Numer. Anal. vol. **40** (2002), pp. 1041–1063.

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations.* Amer. Math. Soc., 2010.

[9] M. Freidlin, L. Koralov, *Nonlinear stochastic perturbations of dynamical systems and quasi-linear parabolic PDE's with a small parameter.* Probab. Th. Rel. Fields, vol. **147** (2009), 273–301.

[10] M. I. Freidlin, A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems* (Grundlehren der mathematischen Wissenschafften, 260), 3^{rd} Ed. Springer (Berlin, Heidelberg), 2012.

[11] H. Fujita Yashima, L. Ait-Mahiout, *Convergence of solution of transport-diffusion system to that of transport system.* Bull. Buryat St. Univ. Math. Inf. vol. **2023**, N 1 (2023), pp. 22–36 (in Russian).

[12] R. Gherdaoui, L. Taleb, S. Selvaduray, *Convergence of the heat kernel approximated solutions over the discretized time of the transport-diffusion equation in half-space.* J. Math. Anal. Appl. vol. **527** (2023), 127507.

[13] H. Gómez, I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro, *A finite element formulation for a convection–diffusion equation based on Cattaneo's law.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, vol. **196** (2007), pp 1757–1766

[14] H. Gómez, I. Colominas, F. Nararrina, M. Casteleiro, *A hyperbolic model for convection-diffusion transport problems in CFD : Numerical analysis and applications.* Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. vol. **102** (2008), pp. 319–334.

[15] P. Goyal, A. Kumar, *Mathematical modeling of air pollutants : an application to Indian urban city.* Air quality - models and applications, Intech (Rijeka, Shanghai), 2011, Chap. 7, pp. 101–130.

[16] I. Guikhman, A. Skorokhod, *Introduction à la théorie des processus aléatoires* (traduit du russe). Mir (Moscou), 1980.

[17] B. Joseph Knox, *Numerical Modeling of the Transport Diffusion and Deposition of Pollutants For Regions and Extended Scales.* Journal of the Air Pollution Control Association, vol. **24**, N 7, pp. 660-664,

[18] A. N. Kolmogorov, *Über die analytischen Methodes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Math. Ann. vol. **104** (1931), pp. 415–438.

[19] N.V. Krylov, *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces.* AMS, 1996.

[20] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (translated from Russian). Amer. Math. Soc., 1968.

[21] E. E. Levi, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali.* Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. **24** (1907), pp. 275–317.

[22] G. Lévy, *On uniqueness for a rough transport-diffusion equation.* C. R. Acad. Sci, Ser. I, vol. **354** (2016), pp. 804–807.

[23] N. Ma, Z. Wu, *Classical and weak solutions of the partial differential equations associated with a class of two-point boundary value problems.* Bound. Value. Probl, (2018).

[24] V. Mikhailov, *Équations aux dérivées partielles* (traduit du russe). Ed. Mir, 1980

[25] G. N. Milstein, M. V. Tretyakov, *Stochastic numerics for mathematical physics.* Springer (Berlin, Heidelberg), 2004.

[26] V. A. Naumov, *Mathematical modeling of distribution of suspended impurities from a point source and its deposition in the watercourse* (en russe). Nauch. Zh. Izvestiya KGTU, vol. **44** (2017), pp. 46–58.

[27] É. Pardoux, S. Peng, *Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasi-linear SPDEs.* Prob. Theory Rel. Fields, vol. **98** (1994), pp. 209–227.

[28] É. Pardoux, A. Răşcanu, *Stochastic differential equations, backward SDEs, partial differential equations.* Springer (Heidelberg), 2014.

[29] É. Pardoux, A. Yu. Veretennikov, *Averaging of backward stochastic differential equations, with applications to semi-linear PDE's. Stochastics Stochastics Rep.*, vol. **60** (1997), pp. 255–270.

[30] I.G. Petrovsky, *Lecture on partial differential equations* (translated from Russian). Inters. Publ., 1954.

[31] J-E. Rakotoson, J-M. Rakotoson, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles.* Presses Universitaires de France, 1999.

[32] M. Roger, C. Caliot, N. Crouseilles, P.J. Coelho, *A hybrid transport-diffusion model for radiative transfer in absorbing and scattering media.* Journal of Computational Physics, vol. **275** (2014), pp. 346–362

[33] H. Smaali, H. Fujita Yashima, *Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion.* Ann. Math. Afr, vol. **9** (2021), pp. 89–108.

[34] A. I. Sukhinov, D. S. Khachunts, A. E. Chistyakov, *A mathematical model of pollutant propagation in near-ground atmospheric layer of a coastal region and its software implementation* (en russe). Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fis. vol. **55** (2015), pp. 1238–1254.

[35] L. Taleb, S. Selvaduray, H. Fujita Yashima, *Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion.* Ann. Math. Afr., vol. **8** (2020), pp. 53–73.

[36] A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Équations de physique mathématique* (en russe), 5$^{\text{ème}}$ Ed., Nauka, 1977.

[37] A.Y. Veretennikov, *On the averaging principale for sysyems of stochastic differential equation* Math. Ussr. Sb, vol. **69** (1991), pp 271–284.