

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud MAMMERY de Tizi Ouzou

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

Département des Sciences Financières et Comptabilité



**Polycopié de cours**

# Fondements de Recherche Opérationnelle

2<sup>ème</sup> année du cycle Licence

Semestre 4

Réalisé par Dr. Gouraya BELBACHIR

Maître de conférences B

Email : [gouraya.belbachir@ummto.dz](mailto:gouraya.belbachir@ummto.dz)

Année universitaire : 2023 – 2024

To access the online courses, please scan the **QR** code using the anonymous login



## Identification du module :

<b>Unité d'enseignement</b>	<b>Méthodologique</b>	
<b>Crédits</b>	<b>4</b>	
<b>Coefficient</b>	<b>2</b>	
<b>Volume horaire hebdomadaire</b>	<b>Cours</b>	<b>1h 30 min</b>
	<b>TD</b>	<b>1h 30 min</b>
	<b>Σ</b>	<b>3h</b>
<b>Méthode d'évaluation</b>	<b>Cours</b>	<b>20 / 20</b>
	<b>TD</b>	<b>20 / 20</b>
<b>Poids relatif d'évaluation</b>	<b>Cours</b>	<b>60 %</b>
	<b>TD</b>	<b>40 %</b>
	<b>Σ</b>	<b>100 %</b>
<b>La Moyenne du Module</b>	<b>= (Note EMD * 0,6) + (Note TD * 0,4)</b>	
<b>Exemple</b>	Note EMD = <b>16 / 20</b> Note TD = <b>14 / 20</b> La Moyenne du Module = $(16 * 0,6) + (14 * 0,4)$ La Moyenne du Module = $(9,6 + 5,6)$ <b>La Moyenne du Module = 15,2 / 20</b>	
	Note EMD = <b>14 / 20</b> Note TD = <b>16 / 20</b> La Moyenne du Module = $(14 * 0,6) + (16 * 0,4)$ La Moyenne du Module = $(8,4 + 6,4)$ <b>La Moyenne du Module = 14,8 / 20</b>	

## Objectifs de l'enseignement :

Le présent cours, conçu conformément au programme ministériel, vise à ce que l'étudiant acquiert des compétences en la matière, à savoir :

- Maitriser les concepts clés des Fondements de Recherche Opérationnelle ;
- Résumer et présenter des données sous forme de tableaux et graphes ;
- S'initier à l'usage des logiciels statistiques utilitaires, notamment le logiciel de base Excel, pour les graphiques et le calcul des paramètres.

Les chapitres dispensés en cours magistral font l'objet chacun d'un traitement appliqué, sous forme de séries d'exercices, en séances de Travaux Dirigés (TD). Lors de ces dernières des éclaircissements et des informations supplémentaires, surtout d'ordre pratique, sont fournis aux étudiants.

Une bibliographie révisée et mise à jour est fournie en annexe, dans le but de permettre aux étudiants d'approfondir leurs connaissances.

Les chapitres du présent cours sont également publiés en ligne, sur la plateforme Moodle (Elearning) en accès anonyme et mon e-mail ([gouraya.belbachir@ummto.dz](mailto:gouraya.belbachir@ummto.dz)) est mis à la disposition des étudiants pour toute question ou renseignement éventuel.

# Essentials of Operations Research Program :

- Introduction générale

## ▪ **Chapitre 1 : Introduction Générale à la Recherche Opérationnelle (RO)**

1. Définition de la Recherche Opérationnelle
2. Bref Histoire
3. L'Objectif de la Recherche Opérationnelle
4. Processus Général d'Aide à la Décision
5. Disciplines Liées à la Recherche Opérationnelle
6. Les Outils Utilisés en Recherche Opérationnelle
7. Domaines d'Application sur la Formulation

## ▪ **Chapitre 2 : La Programmation Linéaire : Un Outil de Modélisation**

1. Définition de la Programmation Linéaire (PL)
2. Hypothèses de la Programmation Linéaire (PL)
3. Modélisation : Formulation du Modèle Mathématique
4. Représentation du Programme Linéaire (PL)
5. Solutions d'un Problème
6. Les Formes de Modélisation des Programmes Linéaires (PL)
7. Exemples d'Application

## ▪ **Chapitre 3 : Méthode Graphique**

1. Etapes de la Méthode Graphique
2. Exemple 1 : Problème de Maximisation (Max Z)
3. Exemple 2 : Problème de Minimisation (Min Z)

▪ **Chapitre 4 : Méthode Algébrique**

▪ **Chapitre 5 : Méthode des Tableaux : Algorithme du Simplexe**

1. Méthode du Tableau

2. Exemples d'Application

▪ **Chapitre 6 : Dualité : Résolution par Passage au Dual**

1. Définition de la dualité

2. Trouver le dual

3. Conditions d'optimalité primal-dual

- Conclusion générale

- Bibliographie

*« A problem well stated is a problem half solved ... »*

Charles Franklin Kettering

USA 1876 - 1958

# **Introduction générale**

# Introduction générale

Ce module présente les notions fondamentales de la recherche opérationnelle. La recherche opérationnelle est une discipline qui a pour rôle d'assurer la compréhension et la modélisation des systèmes industriels et du secteur public et de les traduire au monde théorique fondé principalement par des mathématiques, des statistiques et de l'informatique.

L'objectif de ce cours est double, dans un premier temps nous allons nous concentrer sur la formulation des modèles d'optimisation. Dans cette partie, nous commencerons par la collecte des données et des informations fournies par le problème traité. Ensuite nous présentons les différentes étapes à suivre pour donner une vision mathématique globale avant de passer à la deuxième étape qui concerne la présentation des différentes techniques de résolution de ces problèmes dont le but est de trouver la meilleure solution (appelée solution optimale) pour le problème étudié.

Ce cours de RO est enseigné 2023, et s'adresse aux étudiants de deuxième année de licence de la filière sciences financières et comptabilité, à l'Université de Tizi Ouzou. Bien évidemment, ce cours reste incomplet puisque le domaine de la recherche opérationnelle est très vaste. Cependant de nombreux aspects ne sont pas étudiés faute de temps et de volume horaire. Cela dit, les notions de base choisies dans ce cours permettent aux étudiants d'acquérir des connaissances et un savoir-faire en Recherche Opérationnelle pour traiter divers problèmes.

**Chapitre 1 :**  
**Introduction Générale à la**  
**Recherche Opérationnelle**

# **Chapitre 1 :**

## **Introduction Générale à la Recherche Opérationnelle**

- 1. Définition de la Recherche Opérationnelle**
- 2. Bref Histoire**
- 3. L'Objectif de la Recherche Opérationnelle**
- 4. Processus Général d'Aide à la Décision**
- 5. Disciplines Liées à la Recherche Opérationnelle**
- 6. Les Outils Utilisés en Recherche Opérationnelle**
- 7. Domaines d'Application**

## 1. Définition de la Recherche Opérationnelle :

Recherche Opérationnelle (FR) - Operational Research (UK) - Operations Research (US) : The systematic study of how best to solve problems in business and industry<sup>1</sup>.

Operations Research, operational research, or simply OR, is the use of mathematical models, statistics and algorithms to aid in decision making.

La Recherche Opérationnelle étudie les opérations d'une organisation ou d'un processus en vue d'accroître leur efficacité ou de trouver leur agencement optimal. Cette étude comporte en général deux parties : la modélisation, qui consiste à représenter les opérations du système par un modèle mathématique, et le calcul d'un plan optimal ou quasi optimal.

Un modèle comprend des relations entre les variables qui représentent les composantes du système étudié. En général, ces relations prennent la forme d'une fonction à optimiser et de contraintes auxquelles sont soumises les variables.

▪ La Recherche Opérationnelle est la discipline d'appliquer des méthodes analytiques avancées d'aide à une meilleure prise de décisions. En utilisant des techniques telles que la modélisation mathématique pour analyser des situations complexes, la Recherche Opérationnelle donne aux cadres la capacité à prendre des décisions plus efficaces et à établir des systèmes plus productifs.

▪ La RO\* est la discipline professionnelle qui traite de l'application des technologies de l'information pour une prise de décisions informée. Elle vise à fournir des bases rationnelles pour la prise de décisions en cherchant à

---

<sup>1</sup> Cambridge Dictionary.

\* **RO** : Recherche Opérationnelle.

comprendre et à structurer des situations complexes et à employer cette compréhension pour en déduire le comportement du système et améliorer sa performance. Beaucoup de ce travail est réalisé en utilisant des techniques analytiques et numériques pour développer et manipuler des modèles mathématiques et informatiques des systèmes organisationnels composés de personnes, machines, et procédures.

- La RO utilise des idées issues de l'ingénierie, du Management, des mathématiques, et de la psychologie pour contribuer à une grande variété de domaines d'applications ; le terrain est étroitement lié à plusieurs autres terrains en matière de «Sciences de la Décision», mathématiques appliquées, informatique, sciences économiques, génie industriel, et ingénierie des systèmes.

- La RO est la science de la prise de décisions rationnelle et l'étude, la conception et l'intégration des situations et des systèmes complexes dans le but d'en déduire le comportement du système et d'améliorer ou d'optimiser les performances du système. Il englobe la prise de décisions de gestion, la modélisation mathématique et informatique et l'utilisation des technologies de l'information pour une prise de décisions éclairée.

## **2. Bref Histoire :**

Si l'on cherche à trouver des précurseurs à la Recherche Opérationnelle, on peut penser à ALCUIN ou à EULER qui se sont tous deux intéressés à des problèmes du type RO, bien qu'aucune application n'ait motivé leur travail.

ALCUIN est le moine irlandais chargé par Charlemagne de construire l'école palatine et qui inventa le problème du loup, de la chèvre et du chou devant traverser une rivière dans une barque où au plus un élément peut prendre place.

Un homme devait transporter de l'autre côté d'un fleuve un loup, une chèvre et un panier de choux. Or le seul bateau qu'il put trouver ne permettait de transporter que deux d'entre eux. Il lui a donc fallu trouver le moyen de tout transporter de l'autre côté sans aucun dommage. Dites qui peut comment il a réussi à traverser en conservant intacts le loup, la chèvre et les choux.

EULER est le mathématicien allemand à qui les notables de Königsberg demandèrent s'il était possible de parcourir les ponts de la ville en passant sur chacun des 7 ponts exactement une fois. Ce genre de problème se rencontre maintenant très souvent dans les problèmes de tournées du type facteur ou ramassage de déchets ménagers, dans lesquels il faut parcourir les rues d'une ville de façon optimale. EULER trouva la solution en 1736, un tel parcours est impossible, en procédant à une modélisation subtile par des mots. La solution actuelle, beaucoup plus simple, utilise une modélisation par un graphe<sup>1</sup>.

Au début du 20<sup>ème</sup> siècle, Emile BOREL introduisait la théorie mathématique des jeux, sous sa forme moderne, à l'Académie des Sciences (1921-1925), tandis qu'Erlang fondait celle des files d'attente, qu'il utilisait à la conception des réseaux téléphoniques (1917). Enfin, à la veille de la guerre (1939-1945), Leonid KANTOROVITCH concevait et appliquait la programmation linéaire à la planification, peu après que Dénes KÖNIG eut systématisé les graphes (1936), précédé par d'imminents savants tels que Leonhard EULER et William HAMILTON.

On peut donc dire que, lorsque le physicien anglais Patrick BLACKETT fut, en 1940, appelé à diriger la première équipe de Chercheurs Opérationnels, d'illustres devanciers l'avaient précédé. Cependant, BLACKETT eut l'immense mérite de trouver, notamment, l'organisation qui lui permettait de traiter

---

<sup>1</sup> Frédéric MEUNIER, Introduction à la Recherche Opérationnelle, Université Paris Est, Paris, France, P P : 1-169, P : 2, sur le site web : <https://educnet.enpc.fr/file.php/297/CoursROPonts.pdf>.

rapidement et avec succès les difficiles questions telles que l'implantation optimale des radars de surveillance des côtes britanniques ou encore de la protection des convois de navires marchands reliant la Grande Bretagne et les USA, qui devaient jouer un rôle déterminant dans la bataille d'Angleterre.

L'efficacité de son entreprise était due aux trois faits suivants :

- Équipe très hétérogène ; c'est-à-dire elle rassemble des compétences variées, complémentaires ; ainsi, les points de vue qu'elle exprimait étaient plus pertinents ;
- Aucune information (même secrète) ne fut jugée trop noble pour échapper à sa compétence, les données, nécessaires à ses études, étaient complètes et fiables ;
- Il réservait la décision à l'état-major, il n'y eut pas de substitution de pouvoir : son équipe ne s'est pas arrogé le pouvoir de décision.

L'amirauté britannique restait libre d'adopter les conclusions des travaux de Blackett et de son équipe, ou bien de les rejeter. Ces règles s'appliquent encore aujourd'hui, et font partie de la déontologie de la Recherche Opérationnelle d'entreprise. Dès la fin des hostilités, nombreuses applications à l'économie industrielle des méthodes de la Recherche Opérationnelle, ont eu lieu, et depuis les années cinquante, diverses publications scientifiques et techniques témoignent de leur réussite et de leurs heureux développements.

Aussi, il faut noter que le succès de la Recherche Opérationnelle est fortement lié à l'évolution extraordinaire des ordinateurs, car sans ces machines, aucun problème concret n'aurait pu être résolu efficacement.

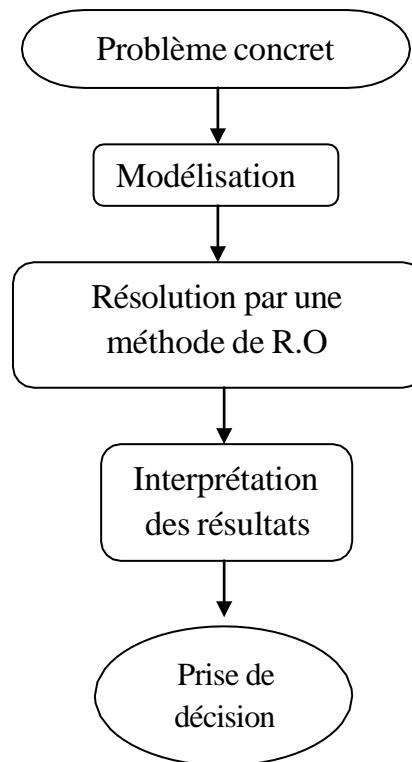
### 3. Objectifs de la Recherche Opérationnelle :

L'objectif de la Recherche Opérationnelle est l'aide à la décision : L'optimalité de la décision.

RO  $\Rightarrow$  Comment utiliser les ressources de l'entreprise d'une manière optimale (de la meilleure façon)

### 4. Processus Général d'Aide à la Décision :

La procédure utilisée par la Recherche Opérationnelle (RO) peut être schématisée comme suit:



**Figure 1 : Schéma de procédure utilisée par la Recherche Opérationnelle (RO)**

On peut résumer donc l'ensemble des concepts relatif à la RO à savoir :

- La Programmation Linéaire (PL)\*.
- Comment formuler un programme linéaire.
- Comment traduire une problématique en programme linéaire.
- Comment résoudre un programme linéaire à fin de prendre une décision.
- Quelles sont les outils disponibles pour faire la résolution de ces problèmes et bien de ces programmes linéaires.

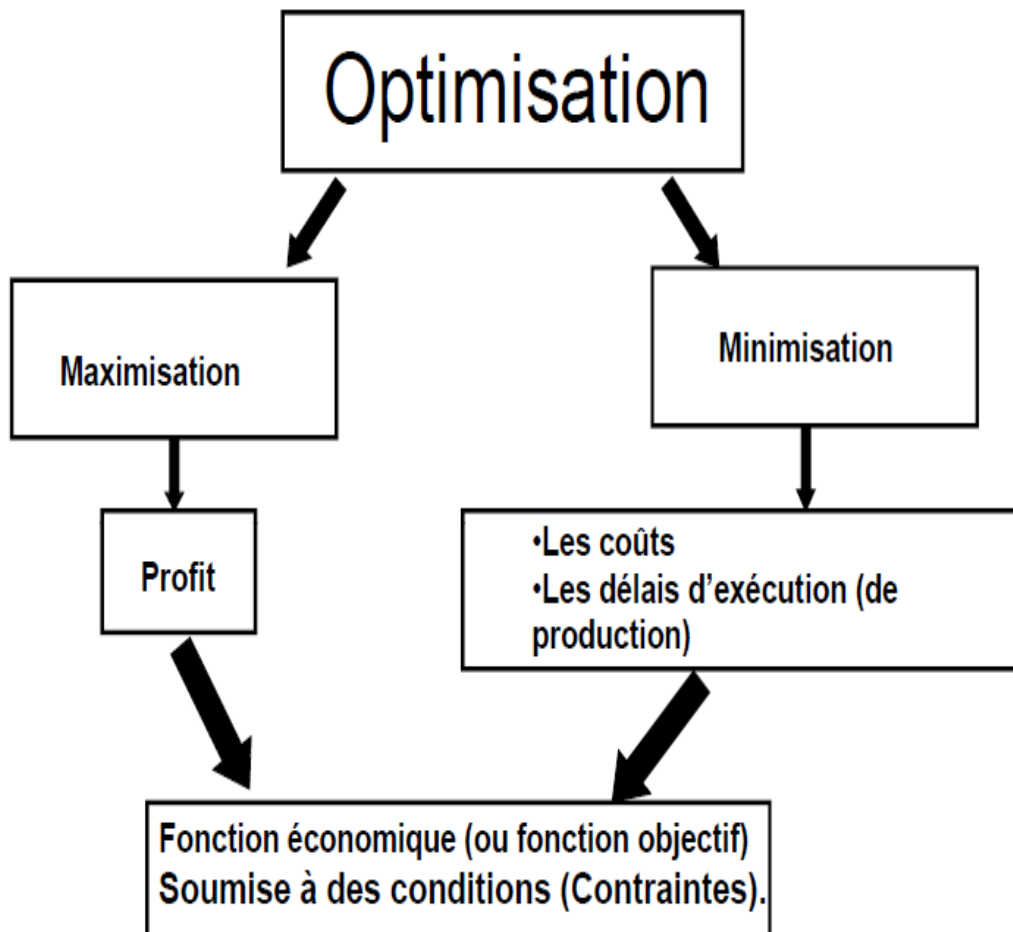


Figure 2 : Optimisation en Recherche Opérationnelle (RO)

---

\* PL : Programmation Linéaire

## 5. Disciplines Liées à la Recherche Opérationnelle :

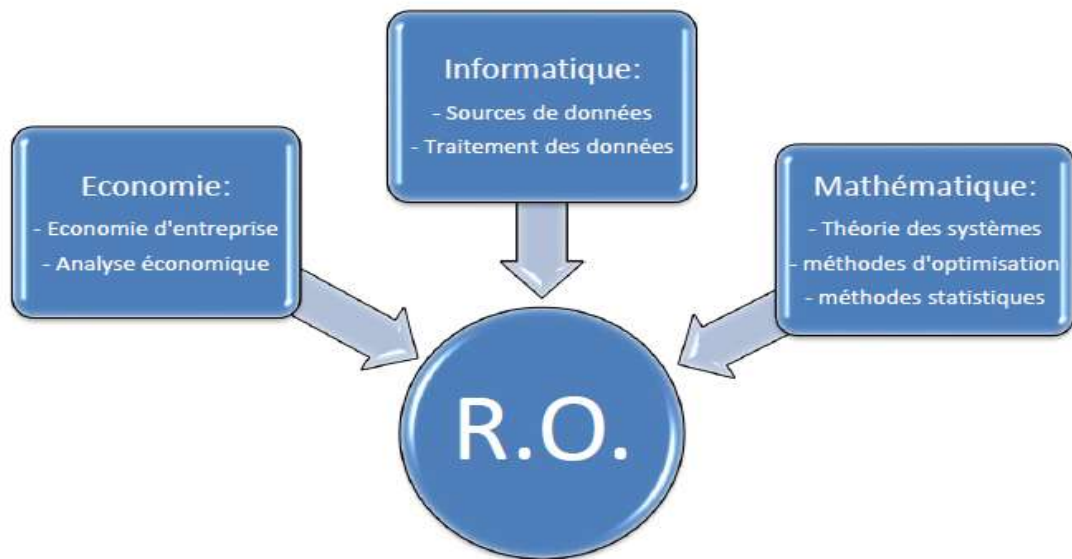


Figure 3 : Disciplines Liées à la Recherche Opérationnelle (RO)

## 6. Les Outils Utilisés en Recherche Opérationnelle :

La Recherche Opérationnelle puise ses ressources de plusieurs domaines des mathématiques, on cite :

- La programmation mathématique : linéaire et non linéaire.
- La théorie des graphes.
- L'optimisation combinatoire.
- Les processus stochastiques.
- L'aide multicritère à la décision.
- La théorie des jeux.

## 7. Domaines d'Application :

▪ **Problèmes combinatoires** : définition des investissements les plus rentables ; optimisation des niveaux d'activité, des affectations, des transports ; ordonnancements, ...

Un problème est dit combinatoire lorsqu'il comprend un grand nombre de solutions admissibles parmi lesquelles on cherche une solution optimale ou proche de l'optimum.

➤ **Exemple typique** : Déterminer où installer 5 centres de distribution parmi 30 sites d'implantation possibles, de sorte que les coûts de transport entre ces centres et les clients soient minima.

Ce problème ne peut être résolu par une simple énumération des solutions possibles par l'esprit humain, puisqu'il en existe  $30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 / (5 \times 4 \times 3 \times 2) = 142506$  (!)

▪ **Problèmes stochastiques** : (c à d, ou intervient le hasard, aléatoire) files d'attente ; fiabilité et sûreté de fonctionnement des équipements ; gestion de la production, ...

Un problème est dit aléatoire s'il consiste à trouver une solution optimale face à un problème qui se pose en termes incertains.

➤ **Exemple typique** : Dans une grande entreprise, la moyenne des entrées des personnels au bureau du correspondant de la sécurité sociale est d'une personne par 4 min. Un employé peut servir, en moyenne, une personne toutes les 3 min 20 sec. Combien d'employés faut-il embaucher dans le bureau ?

▪ **Problèmes concurrentiels** : définition de politiques d'approvisionnement, de vente, ...

Un problème est dit concurrentiel s'il consiste à trouver une solution optimale face à un problème dont les termes dépendent de l'interrelation entre ses propres agissements et ceux d'autres décideurs.

➤ **Exemple typique** : Fixer une politique de prix de vente, sachant que les résultats d'une telle politique dépendent de la politique que les concurrents adopteront.

**Chapitre 2 :**  
**La Programmation Linéaire:**  
**Un Outil de Modélisation**

# **Chapitre 2 :**

## **La Programmation Linéaire: Un Outil de Modélisation**

- 1. Définition de la Programmation Linéaire (PL)**
- 2. Hypothèses de la Programmation Linéaire (PL)**
- 3. Modélisation : Formulation du Modèle Mathématique**
- 4. Représentation du Programme Linéaire (PL)**
- 5. Solutions d'un Problème**
- 6. Les Formes de Modélisation des Programmes Linéaires (PL)**
- 7. Exemples d'Application sur la Formulation**

## 1. Définition de la Programmation Linéaire (PL) :

On appelle problème de Programmation Linéaire (PL), tout problème dans lequel il s'agit d'optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire de  $n$  variables. Celle-ci devra satisfaire à un ensemble de contraintes linéaires exprimées sous forme d'équations ( $=$ ) ou d'inéquations ( $\leq, \geq$ ).

Tout problème linéaire est formé de trois parties :

- **Les Variables de Décision (Les Inconnus) :** appelés variables non-négatifs, ou variables d'activités  $x_i$ , dont on cherche la valeur.

- **Les Contraintes :** Une contrainte est une règle obligatoire qui réduit la liberté d'action. En mathématiques, et plus particulièrement en optimisation, une contrainte est une égalité ou une inégalité que doivent satisfaire les solutions réalisables d'un problème :

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} * x_j \leq b_i \quad (\leq; \geq; =)$$

- **La Fonction Objectif (Economique) :** ou critère

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j * x_j$$

Minimisation (Min Z) ou Maximisation (Max Z).

➤ **Vocabulaire de la Programmation Linéaire (PL) :**

- **Solution Admissible :** ce sont celles qui satisfont toutes les contraintes du problème.

- **Solution Optimale :** Elles se distinguent des différentes solutions car elles optimisent la fonction dont on cherche le maximum et le minimum.

## **2. Hypothèses de la Programmation Linéaire (PL) :**

- La linéarité des contraintes et de la fonction objectif.
- La proportionnalité des gains/coûts et des consommations de ressources.
- La divisibilité des variables.
- Le déterminisme des données.

Lors de la modélisation d'un problème réel, l'impact de ces hypothèses sur la validité du modèle mathématique doit être étudié.

Cette analyse peut mener à choisir un modèle différent (non linéaire, stochastique, ...) et est essentielle pour la phase d'interprétation des résultats fournis par le modèle.

## **3. Modélisation : Formulation du Modèle Mathématique :**

La formulation du modèle mathématique est l'étape la plus délicate de la résolution d'un problème. Il nécessite un effort de conception qui doit aboutir à la détermination des trois éléments suivants :

**Formalisation :** en 4 étapes.

- Compréhension du problème.
- Identification des variables de décision (qui sont les inconnus du problème).
- Fixation des objectifs à atteindre  $\Rightarrow$  la fonction objectif (Max Z ou Min Z).
- Précision des contraintes du problème, contraintes exprimées sous forme linéaire par rapport aux variables de décision  $\Rightarrow$  les sous contraintes (S/C).

Un Programme Linéaire (PL) consiste à trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines équations et inégalités dites contraintes.

En langage mathématique, on décrira de tels modèles de la manière suivante :

▪ **Variables de Décision :**

Étant donnée  $n$  variables de décision :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Les variables de décision sont positives :  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

▪ **Fonction Objectif :**

La fonction objectif est une forme linéaire en fonction des variables de décision:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_n x_n$$

Les coefficients  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs (+), négatifs (-) ou nuls (0).

Le coefficient  $c_i$  peut représenter un profit unitaire lié à la production d'une unité supplémentaire du bien  $x_i$  ainsi la valeur de  $Z$  est le profit total ( $\Sigma$ ) lié à la production des différents biens en quantités égales à  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

▪ **Les Contraintes :**

Les variables de décision doivent vérifier un système d'équations linéaires définis par  $m$  inégalités :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n \leq b_3$$

.

.

.

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

Les coefficients  $a_{11}, \dots, a_{mn}$  et  $b_1, \dots, b_m$  doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs (+), négatifs (-) ou nuls (0).

Le paramètre  $b_j$  représente la quantité de matière première disponible dont le bien  $x_i$  utilise une quantité égale à  $a_{ij} * x_i$

#### 4. Solutions d'un Problème :

##### ▪ Solution Admissible :

On appelle solution admissible (ou solution) d'un problème tout vecteur  $x \in S$  qui satisfait toutes les contraintes du problème.

##### ▪ Solution Optimale :

On appelle solution optimale  $X^*$ , la solution parmi toutes les solutions admissibles qui fournissent le meilleur résultat, c'est à dire de trouver le Max pour un problème de maximisation ou trouver le Min pour un problème de minimisation.

#### 5. Représentation du Programme Linéaire (PL) :

En suivant les étapes de formulation précédentes, on peut représenter le PL comme suit :

$$\begin{aligned} & \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) \\ \text{S.C: } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

## 6. Les Formes de Modélisation des Programmes Linéaires (PL) :

Un Programme Linéaire (PL) est un système d'équations ou d'inéquations appelées « contraintes » qui sont linéaires, et à partir de ses contraintes on doit optimiser une fonction également linéaire appelée « objectif » ou « économique » sous la forme :

$$\text{Opt } (\sum C_i X_i)$$

$$\sum a_{ij} X_j \leq b_i, = \text{ ou } \geq b_i$$

$$X_i \geq 0$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Tel que :

$$\text{Opt} = (\text{Max } Z \text{ ou Min } Z).$$

$\sum_{1 \leq j \leq n} c_j x_j$  : est la fonction à optimiser

$x_j$  : variables de décision

$c_j \in \mathbb{R}^n$  : est le vecteur coût

$b_i \in \mathbb{R}^m$  : est le second membre

### ▪ Forme Canonique d'un Programme Linéaire (PL) :

Tout Programme Linéaire peut être mis sous forme canonique, c'est-à-dire, un système avec un ensemble d'inéquation et une fonction à optimiser.

Fonction objectif linéaire : (Max Z)

Opt ( $\sum C_j X_j$ )

Sous contraintes linéaire : ( $\leq$ )

$\sum a_{ij} X_j \leq b_i$  , = ou  $\geq b_i$

$X_i \geq 0$

$i = 1, 2, 3, \dots, m$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$

Il y a  $m$  contraintes propres et  $n$  contraintes impropres (de positivité), et  $n$  variables naturelles.

**Une solution admissible** : est un ensemble de valeurs données aux variables qui satisfait toutes les contraintes ; parmi ces solutions admissibles celle (s) pour la (les) quelle (s) la fonction économique est maximale, s'appelle (nt) solution (s) optimale (s).

**Une solution optimale** : est une solution admissible qui optimise la fonction objectif.

**Propriété** : Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique.

Min (Z) = - Max (- Z)

$\sum a_{ij} X_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum (-a_{ij}) X_j \leq -b_i$

$$\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{1 \leq j \leq n} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i \end{cases}$$

$x_j \leq 0 \Rightarrow -x_j \geq 0 \Rightarrow$  changement de variable  $x_j' = -x_j$  dans le PL, si certaines variables n'ont pas de condition de signe, on pose  $x_j = x_j' - x_j''$ , avec  $x_j' \geq 0$  et  $x_j'' \geq 0$ .

▪ **Forme Standard d'un Programme Linéaire (PL) :**

On introduit des variables dites d'écart. La forme standard d'un PL est telle que :

-On maximise une fonction économique linéaire des variables

-Les variables sont assujetties à des contraintes :

**Propres :** équations linéaires (en introduisant des variables d'écart, positives)

**Improperes :** conditions de positivité (des variables naturelles et des variables d'écart)

Fonction objectif linéaire :

$$\text{Opt } (\sum C_j X_j)$$

Sous contraintes linéaire :

$$\sum a_{ij} X_j + e_{(n+i)} \leq, = \text{ ou } \geq b_i$$

$$X_i \geq 0$$

$$e_{(n+i)} \geq 0$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

▪ **Forme Matricielle d'un Programme Linéaire (PL) :**

Notons par  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^t$  le vecteur des variables.  $b = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)^t$  le second membre des contraintes,  $c = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)^t$  le vecteur coût ou profit associé aux variables et  $A$  la matrice  $m * n$  des  $a_{ij}$ .

Fonction objectif linéaire :

$$\text{Max } (c^t x)$$

Sous contraintes linéaire :

$$S.C: \begin{cases} Ax \leq b^t \\ x \geq 0 \end{cases}$$

▪ **Interprétation économique :**

Un programme linéaire a une interprétation économique très large :

-Un acteur économique qui exerce  $n$  activités avec des intensités  $x_j$  à déterminer.

-Ces activités utilisent  $m$  ressources.

-La quantité  $a_{ij}$  de ressources  $i$  nécessaires pour exercer l'activité  $j$  avec une intensité  $I$ .

-On connaît le profit (en Maximisation) et le coût (en Minimisation).

- $c_j$  correspond à une intensité  $I$  de l'activité  $j$ .

## 7. Exemples d'Application sur la Formulation :

Actuellement, plusieurs problèmes de divers domaines sont représentés ou approximés par des modèles de Programmation Linéaire (PL). L'utilisation de ces techniques de modélisation s'est renforcée avec l'apparitions des algorithmes et des logiciels capables de résoudre de plus larges problèmes avec autant de variables de décision que de contraintes.

La formulation des PL demande généralement une certaine expertise et connaissance du problème pour pouvoir relever facilement les différentes composantes du problème et ainsi donner un programme qui modélise au mieux la situation réelle.

On présente une série d'exemples permettant d'introduire et d'explicitier la notion de modélisation. Ces exemples portent sur des problèmes pour lesquels la modélisation en programme linéaire est bien adaptée et clairement explicitée.

### ▪ Exemple 1 : programme de production d'une usine :

Une usine fabrique deux produits « A » et « B » à partir des matières premières  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  qui sont limités. Le profit réalisé à la vente du produit est 4 DA pour le produit A et 5 DA pour le produit B.

Le tableau suivant explique la nomenclature de chaque produit, ainsi que le stock disponible pour chaque matière.

	Produit (A)	Produit (B)	Stock
Matière Première ( $M_1$ )	2	1	8
Matière Première ( $M_2$ )	1	2	7
Matière Première ( $M_3$ )	0	1	3

C'est-à-dire que pour fabriquer une unité de A, on aura besoin de 2 unités de  $M_1$  et une unité de  $M_2$ .

▪ **Formulation :**

**-Variables de décision :**

Soit :

$x_1$  : le nombre des unités A à fabriquer

$x_2$  : le nombre des unités B à fabriquer

**-Fonction objectif :**

Le critère de choix de ces quantités est lié au gain généré en fabriquant les produit A et B.

On va produire le **maximum** de produits afin de réaliser le **maximum de bénéfice**.

La fonction économique est :  $Z = 4 x_1 + 5 x_2$

**-Contraintes du modèle :**

D'une autre part, la fabrication de ces produits ne peut pas être illimitée, car la matière première est limitée qu'on ne doit pas dépasser.

• Pour  $M_1$  :  $2 x_1 + 1 x_2 \leq 8 \Rightarrow 2 x_1 + x_2 \leq 8$

• Pour  $M_2$  :  $1 x_1 + 2 x_2 \leq 7 \Rightarrow x_1 + 2 x_2 \leq 7$

• Pour  $M_3$  :  $0 x_1 + 1 x_2 \leq 3 \Rightarrow x_2 \leq 3$

•  $x_1$  et  $x_2$  ne peuvent pas être négatifs car ce sont des quantités à produire :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

▪ **Le Modèle complet :**

On écrit le Programme Linéaire (PL) qui modélise ce problème sous forme :

$$\text{Max } Z = 4 x_1 + 5 x_2$$

Sous contraintes (S/C) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Le modèle obtenu est un exemple de problème de Programmation Linéaire (PL).

▪ **Exemple 2 :**

Une entreprise ALPHA est spécialisée dans la production de deux (2) types de produits : des climatiseurs et des ventilateurs. Les deux produits nécessitent un certain nombre d'heures machine et un certain nombre d'heures de main d'œuvre.

Le tableau suivant donne les nombres d'heures machine et d'heures main d'œuvre nécessaires à la fabrication d'une unité de chacun de ces produits, ainsi que le profit généré par la production d'une unité de ce produit :

	<b>Heures machine</b>	<b>Main d'œuvre</b>	<b>Profit</b>
<b>Climatiseur</b>	2 h / unité	3 h / unité	25 Euro / unité
<b>Ventilateur</b>	2 h / unité	1 h / unité	15 Euro / unité
<b>Total disponible</b>	240 h	140 h	

▪ **Formulation :**

**-Variables de décision :**

La compagnie veut décider du nombre de climatiseurs et du nombre de ventilateurs à produire pour maximiser le profit.

Soit :

$x_1$  : le nombre de climatiseurs

$x_2$  : le nombre de ventilateurs à produire.

**-Fonction objectif :**

L'objectif de l'entrepris, implicite dans le texte, est de déterminer le programme de production qui **maximisera** son profit.

La fonction objectif s'écrit alors :

$$\text{Max } Z = 25 x_1 + 15 x_2$$

**-Contrainte du modèle :**

La limitation des ressources contraint l'entreprise de la manière suivante :

- Contrainte heures machine :  $2 x_1 + 2 x_2 \leq 240$
- Contrainte main d'œuvre :  $3 x_1 + 1 x_2 \leq 140 \Rightarrow 3 x_1 + x_2 \leq 140$
- Contraintes de non-négativité qui exprime que les niveaux d'activité ne peuvent être négatifs :  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

**▪ Le Modèle complet :**

On écrit le Programme Linéaire (PL) qui modélise ce problème sous forme :

$$\text{Max } Z = 25 x_1 + 15 x_2$$

Sous contraintes (S/C) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 x_1 + 2 x_2 \leq 240 \\ 3 x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Le modèle obtenu est un exemple de problème de Programmation Linéaire (PL).

▪ **Exemple 3 :**

**Problème de restaurateur**

Un restaurateur a constaté que sa clientèle préfère les assortiments de coquillages et qu'il peut offrir indifféremment ; des assiettes à 8 unité monétaire (um), contenant 5 oursins, 2 praires et 1 huître, et des assiettes à 6 (um), contenant 3 oursins, 3 praires et 3 huître. Le restaurateur dispose de 30 oursins, 24 praires et 18 huîtres.

▪ **Formulation :**

**-Variables de décision :**

$x_1$  : nombre d'assiettes de premier type (de 8 um)

$x_2$  : nombre d'assiettes de deuxième type (de 6 um)

On vérifie bien que les variables de décision  $x_1$  et  $x_2$  sont positives  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

**-Fonction objectif :**

Chaque assiette vendue de type 1 permet un revenu de 8um, et chaque assiette vendue de type 2 assure un revenu de 6um.

Si  $x_1$  est le nombre d'assiette vendu de type 1, et  $x_2$  est le nombre d'assiette vendu de type 2, alors le revenu globale réalisé est :

$$\text{Max } Z = 8 x_1 + 6 x_2$$

**-Contrainte du modèle :**

Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

**Les oursins** : le restaurateur dispose de 30 oursins, ainsi la contrainte liée à la limitation de consommation des oursins est :

$$5 x_1 + 3 x_2 \leq 30$$

**Les praires** : le restaurateur dispose de 24 praires, ainsi la contrainte liée à la limitation de consommation des praires est :

$$2 x_1 + 3 x_2 \leq 24$$

**Les huîtres** : le restaurateur dispose de 18 huîtres, ainsi la contrainte liée à la limitation de consommation des huîtres est :

$$1 x_1 + 3 x_2 \leq 18$$

**-La forme canonique :**

$$\text{Max } Z = 8 x_1 + 6 x_2$$

Sous contraintes (S/C) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 * x_1 + 3 * x_2 \leq 30 \\ 2 * x_1 + 3 * x_2 \leq 24 \\ 1 * x_1 + 3 * x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

**-Forme standard :**

$$\text{Max } Z = 8 x_1 + 6 x_2 + 0 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3$$

$$5 x_1 + 3 x_2 + 1 e_1 + 0 e_2 + 0 e_3 \leq 30$$

$$2 x_1 + 3 x_2 + 0 e_1 + 1 e_2 + 0 e_3 \leq 24$$

$$1 * x_1 + 3 * x_2 + 0 * e_1 + 0 * e_2 + 1 * e_3 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; e_1 \geq 0 ; e_2 \geq 0 ; e_3 \geq 0$$

**-La forme matricielle :**

$$\max(c^t x)$$

$$S. C: \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$c^t = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad b^t = [30 \quad 24 \quad 18], \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# **Chapitre 3 :**

# **Méthode Graphique**

# **Chapitre 3 : Méthode Graphique**

- 1. Etapes de la Méthode Graphique**
- 2. Exemple 1 : Problème de Maximisation (Max Z)**
- 3. Exemple 2 : Problème de Minimisation (Min Z)**

Pour la résolution d'un programme linéaire, il y a plusieurs méthodes en fonction de nombre de variables et de contraintes.

La Méthode Graphique est une méthode de résolution d'un Programme Linéaire (PL) ne comportant que deux (2) variables de décision. Elle consiste en la délimitation de l'intersection des demi-plans représentant les inéquations des contraintes et en la recherche sur le bord de ce domaine des points donnant l'optimum de la fonction objectif.

### **1. Etapes de la méthode Graphique :**

- **Etape 1** : Tracer les droites correspondants aux contraintes et de la fonction objectif, en mettant  $Z = 0$ , sans oublier les contraintes de positivité. On prendra deux points de chaque droite.
  
- **Etape 2** : rayer ou bien hachurer l'aire des solutions admissibles (sous forme polygone convexe).
  
- **Etape 3** : Recensement des coordonnées de tous les sommets du polygone (solutions de base) frontières de l'ensemble des solutions admissibles.
  
- **Etape 4** : Calcul de  $Z$  pour chaque sommets et comparaison des résultats.
  
- **Etape 5** : Déduire la solution **optimale** de  $Z$ .

Graphiquement, cette solution optimale est l'intersection de la droite la plus éloignée de  $O(0 ; 0)$  parmi les parallèles à la droite de la fonction objectif et l'extrémité du polygone (domaine des solutions admissibles).

**Remarque** : si le Programme Linéaire (PL) admet une solution, il est unique et nécessairement l'un des sommets de programme de base.

On traitera ci-dessous deux exemples pour illustrer la méthode de résolution graphique.

## 2. Exemple 1 : Problème de Maximisation (Max Z)

Résoudre le Programme Linéaire (PL) suivant :  $\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2$

$$(S/C) : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On va premièrement tracer le graphe des inégalités, afin de visualiser les demi-plans limités par les droites des contraintes :

- $3x_1 + 2x_2 \leq 15 \Rightarrow (\Delta_1) : 3x_1 + 2x_2 = 15$

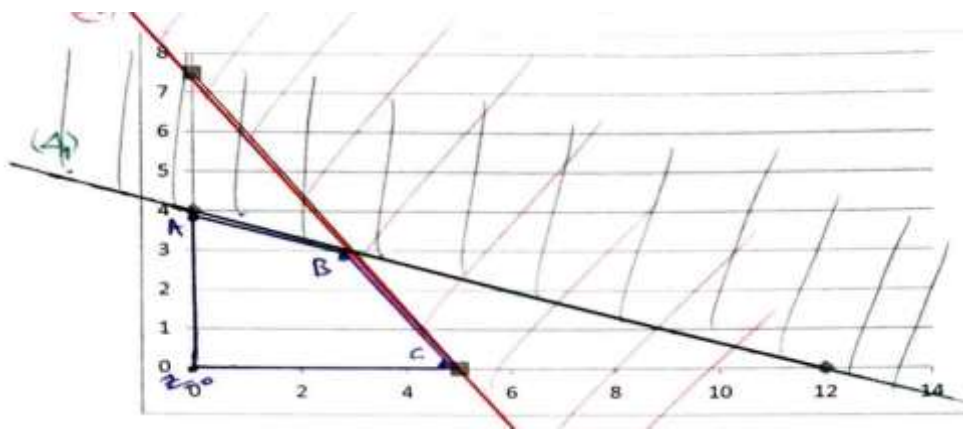
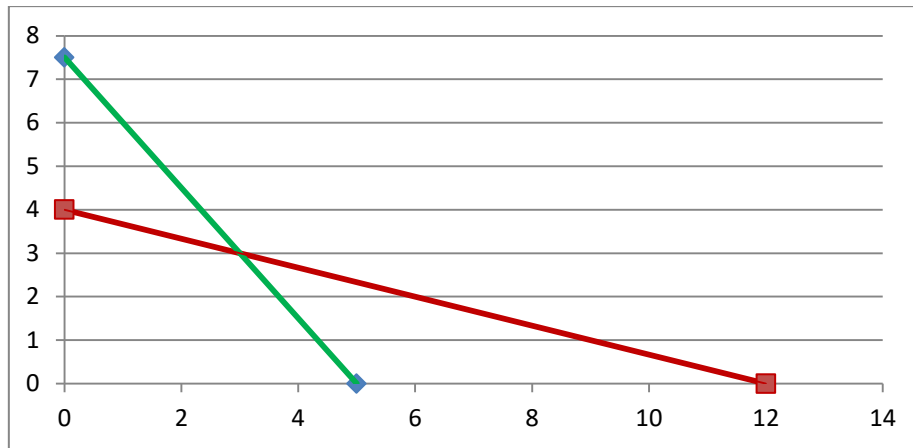
$x_1$	0	5
$x_2$	7,5	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_1)$  sont :  $(0 ; 7,5)$  et  $(5 ; 0)$

- $x_1 + 3x_2 \leq 12 \Rightarrow (\Delta_2) : x_1 + 3x_2 = 12$

$x_1$	0	12
$x_2$	4	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_2)$  sont  $(0 ; 4)$  et  $(12 ; 0)$



**Graphe 1**

L'aire limitée par les droites est appelée **l'espace des solutions admissibles**.

Les points : A (0 ; 4) ; B (3 ; 3) et C (5 ; 0) sont les **solutions possibles**.

On remplace ces points dans la fonction objectif Z, on trouve :

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 5x_2$$

$$A (0 ; 4) \Rightarrow Z = (6)(0) + (5)(4) \Rightarrow Z = 20$$

$$B (3 ; 3) \Rightarrow Z = (6)(3) + (5)(3) \Rightarrow Z = 33$$

$$C (5 ; 0) \Rightarrow Z = (6)(5) + (5)(0) \Rightarrow Z = 30$$

La solution optimale est donc : **B (3 ; 3)  $\Rightarrow x_1 = 3$  ;  $x_2 = 3$  et  $Z = 33$**

### 3. Exemple 2 : Problème de Minimisation (Min Z)

Résoudre le Programme Linéaire (PL) suivant :  $\text{Min } Z = 24x_1 + 20x_2$

$$(S/C) : \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 30 \\ x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On va premièrement tracer le graphe des inégalités, afin de visualiser les demi-plans limités par les droites des contraintes :

- $x_1 + x_2 \geq 30 \Rightarrow (\Delta_1) : x_1 + x_2 = 30$

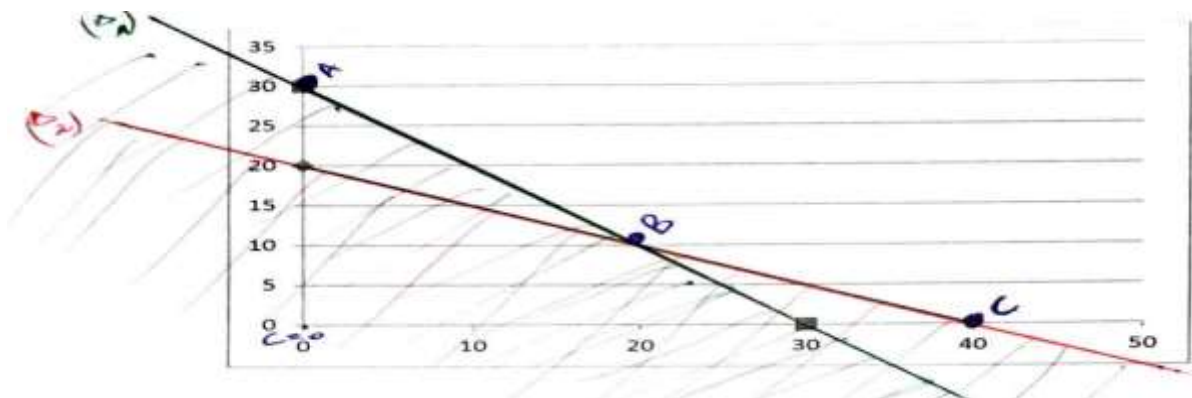
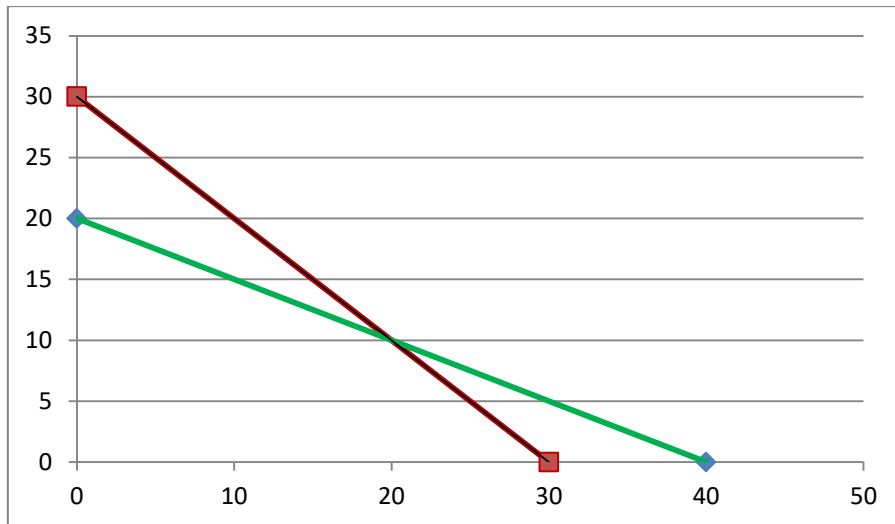
$x_1$	0	30
$x_2$	30	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_1)$  sont :  $(0 ; 30)$  et  $(30 ; 0)$

- $x_1 + 2x_2 \geq 40 \Rightarrow (\Delta_2) : x_1 + 2x_2 = 40$

$x_1$	0	40
$x_2$	20	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_2)$  sont  $(0 ; 20)$  et  $(40 ; 0)$



**Grappe 2**

L'aire limitée par les droites est appelés **l'espace des solutions admissibles**.

Les points : A (0 ; 30) ; B (10 ; 20) et C (40 ; 0) sont les **solutions possibles**.

On remplace ces points dans la fonction objectif Z, on trouve :

$$\text{Min } Z = 24 x_1 + 20 x_2$$

$$A (0 ; 30) \Rightarrow Z = (24)(0) + (20)(30) \Rightarrow Z = 600$$

$$B (20 ; 10) \Rightarrow Z = (24)(20) + (20)(10) \Rightarrow Z = 680$$

$$C (40 ; 0) \Rightarrow C = (24)(40) + (20)(0) \Rightarrow Z = 960$$

La solution optimale est donc : **A (0 ; 30)  $\Rightarrow$   $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 30$  et  $Z = 600$**

**Chapitre 5 :**  
**Méthode des Tableaux :**  
**Algorithme du Simplexe**

# **Chapitre 5 :**

## **Méthode des Tableaux : Algorithme du Simplexe**

- 1. Méthode du Tableau**
- 2. Exemples d'Application**

## 1. Méthode du Tableau :

Développée par Dantzig en 1947, cette méthode se base sur le principe suivant : on part du sommet du polygone qui est solution de base, pour lequel la fonction économique  $Z$  est nulle, généralement le point  $(0 ; 0)$ . Ensuite on passe de proche en proche à des sommets voisins en augmentant à chaque étape la valeur de  $Z$ . Comme le nombre de sommets est limité, on parvient après plusieurs itérations à la solution optimale.

Elle peut être présentée soit en utilisant la méthode algébrique ou la représentation en tableau. La première étant plus lourde et moins pratique, laisse à la deuxième l'utilisation répondue.

Méthode du tableau :

- Il existe plusieurs manières de construire ce tableau ;
- Chaque colonne correspond à l'une des variables ;
- Une colonne de plus comporte les noms des variables de base ;
- Dans chaque ligne le nom de variable de base qui lui est associée est celui qui correspond à la colonne de la variable ayant un coefficient égal à **1** .

**Etapas à suivre :**

**Etape 1 :** Construire le tableau du programme linéaire

**Etape 2 :** Recherche du pivot.

Le pivot est l'intersection de la colonne de la variable entrante qui correspond au coefficient strictement positif le plus grand de la fonction économique et la ligne de la variable sortante qui correspond au plus petit rapport positif des rapports du second membre des contraintes et le coefficient de la variable entrante :

$$\text{Rapport} = \frac{\text{Second membre}}{\text{Coefficient de la variable entrante}} \quad \text{.L'infini et le nombre négatif étant exclus.}$$

**Etape 3 :** Transformer le premier tableau comme suite :

- 1- Remplacer la variable sortante par la variable entrante dans la base ;
- 2- Diviser toute la ligne du pivot par le pivot pour avoir un (1) ;
- 3- Faire apparaître des zéros (0) sur la colonne du pivot en remplaçant chacune des autres lignes par un calcul matriciel.

$$L'_j = L_j - k * L'_i$$

C'est-à-dire choisir le coefficient k pour avoir des zéros (0) sur la colonne du pivot.

**Etape 4 :** Refaire les étapes jusqu'à ce que les coefficients de la fonction économique sont tous négatifs ou nuls, on sait donc que l'on a atteint le maximum.

**Etape 5 :** Lecture du tableau tel que :

- 1- les variables hors base ont toujours la valeur 0 ;
- 2- Les valeurs des variables dans la base se lient directement dans la colonne « second membre du tableau considéré ;
- 3- La valeur de la fonction économique Z pour chaque programme admissible est l'opposé du nombre sur la ligne de Z dans la colonne « second membre ».

## 2. Exemples d'Application :

### Exemple 1 :

Considérons le problème suivant :

$$\text{Max } F = 40 y_1 + 60 y_2$$

Sous les contraintes

$$2y_1 + y_2 \leq 70$$

$$y_1 + y_2 \leq 40$$

$$y_1 + 3y_2 \leq 90 \quad y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

### Solution :

Soit  $y_3$ ,  $y_4$  et  $y_5$ , les variables d'écart relatif respectivement aux contraintes 1,2 et 3, qui permettent de transformer les contraintes d'inégalité pour obtenir les égalités suivantes :

$$2y_1 + y_2 + y_3 = 70$$

$$y_1 + y_2 + y_4 = 40$$

$$y_1 + 3y_2 + y_5 = 90$$

On commence à partir du point  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$  et on vérifie s'il est possible d'augmenter la fonction objective sachant que notre système est un système de trois équations avec cinq inconnues.

Pour trouver la solution on impose deux des variables à zéro et on déduit les valeurs des trois variables restantes. Ce qui donne :

$$y_1 = 0,$$

$$y_2 = 0$$

Pour les variables de base.

$$y_3 = 70$$

$$y_4 = 40$$

$$y_5 = 90$$

Pour les variables hors base.

Et la valeur de la fonction objectif :

$$F = 40 y_1 + 60 y_2 = 0,$$

La question qui se pose est : Est-il possible d'augmenter F ?

Pour répondre à cette question, on vérifie la fonction objective. Si les coefficients sont positifs, ce qui est le cas, on a donc la possibilité d'augmenter F. On favorise l'augmentation de la variable qui a le plus grand coefficient dans la fonction objective. Donc on choisit  $y_2$  en maintenant  $y_1 = 0$ .

On remplace  $y_1=0$  dans les équations :

$$2y_1 + y_2 + y_3 = 70 \Rightarrow y_2 + y_3 = 70$$

$$y_1 + y_2 + y_4 = 40 \Rightarrow y_2 + y_4 = 40$$

$$y_1 + 3y_2 + y_5 = 90 \Rightarrow 3y_2 + y_5 = 90$$

On réécrit les variables restantes en fonction d' $y_2$  pour chaque équation. Ce qui nous donne :

$$y_3 = 70 - y_2 \geq 0 \rightarrow y_2 \leq 70$$

$$y_4 = 40 - y_2 \geq 0 \rightarrow y_2 \leq 40$$

$$y_5 = 90 - 3y_2 \geq 0 \rightarrow y_2 \leq 30$$

On peut augmenter la valeur de  $y_2$  au maximum à 30 puisque c'est la valeur qui permet de satisfaire les équations.

Nouvelle solution admissible :

$$y_1 = 0 ;$$

$$y_2 = 30 ;$$

$$y_3 = 40 ;$$

$$y_4 = 10 ;$$

$$y_5 = 0$$

On remarque bien que  $y_1 = 0$  est toujours maintenu à zéro. Par ailleurs,  $y_5$  est passé de 90 à 0 et  $y_2$  est passé de 0 à 30. Donc on déduit que pour cette étape la variable sortante de la base est  $y_2$  et la variable entrante à la base est  $y_5$ .

La nouvelle valeur de la fonction objective est :  $F = 40 y_1 + 60 y_2 = 1800$ ,

Les coefficients de la fonction objectif sont positifs. Ce qui permet améliorer d'avantage la solution obtenue. Dans ce cas on s'arrange pour exprimer toutes les équations en fonction de  $y_1$  et  $y_5$ . Pour ce faire on retire la valeur de  $y_2$  de la troisième équation et on remplace son expression dans les deux premières. Il en est de même pour  $F$ , ce qui nous donne dans cette étape les équations

$$\frac{5}{3} y_1 + y_3 - \frac{1}{3} y_5 = 40$$

$$\frac{2}{3} y_1 + y_4 - \frac{1}{3} y_5 = 10$$

$$\frac{1}{3} y_1 + y_2 + \frac{1}{3} y_5 = 30$$

Nouvelle expression de la fonction objectif

$$F = 1800 + 20y_1 - 20y_5$$

D'après l'expression de la fonction objective de l'étape précédente on choisit d'augmenter  $y_1$  en gardant  $y_5 =$

$$\frac{5}{3} y_1 + y_3 - \frac{1}{3} y_5 = 40 \quad y_3 = 40 - \frac{5}{3} y_1 \geq 0 \rightarrow y_1 \leq 24$$

$$\frac{2}{3} y_1 + y_4 - \frac{1}{3} y_5 = 10 \quad y_4 = 10 - \frac{2}{3} y_1 \geq 0 \rightarrow y_1 \leq 15$$

$$\frac{1}{3} y_1 + y_2 + \frac{1}{3} y_5 = 30 \quad y_5 = 30 - \frac{1}{3} y_1 \geq 0 \rightarrow y_1 \leq 90$$

La valeur maximale admissible pour  $y_1 = 15$ .

Nouvelle solution admissible :

$$y_1 = 15;$$

$$y_2 = 25;$$

$$y_3 = 15;$$

$$y_4 = 0;$$

$$y_5 = 0$$

Pour cette étape, la variable sortante de la base est  $y_2$  et la variable entrante à la base est  $y_4$ . L'expression de la nouvelle valeur du critère est :

$$F = 2100 - 30y_4 - 10y_5$$

Les coefficients de  $y_4$  et  $y_5$  dans la fonction objectif de la dernière étape sont négatifs, quelle que soient la valeur de  $y_4$  et  $y_5$  qui implique une diminution de la valeur du critère  $F$ . Il n'existe donc plus d'augmentation et d'amélioration

possible et la dernière solution obtenue représente la solution optimale qui est égale à 2100.

**Exemple 2 :**

Résoudre le programme linéaire suivant (Donner uniquement le premier tableau du simplexe), et expliquer comment on détermine la colonne pivot, la ligne pivot et l'élément pivot.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

(S.C.)

$$x_1 + 2x_2 \leq 10000$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12000$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 15000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

**Solution :**

Résoudre le programme linéaire suivant (Donner uniquement le premier tableau du simplexe)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

(S.C.)

$$x_1 + 2x_2 \leq 10000$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12000$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 15000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Transformation des contraintes d'inégalité en contraintes égalité par l'ajout de variables d'écarts, le problème prend la forme suivante :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

(S.C.)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10000$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12000$$

$$x_1 + 4x_2 + x_5 = 15000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

La forme matricielle :

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 10000 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12000 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 15000 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} (3 \ 5 \ 0 \ 0 \\ 0) \end{array}$$

La matrice des contraintes

Le vecteur b

Le vecteur c

La matrice identitaire existe donc on peut tracer le tableau initial :

Max	Ci		3	5	0	0	0	
C <sub>B</sub>	B	b	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	bi/ccp
0	X <sub>3</sub>	10000	1	2	1	0	0	10000/2=5000
0	X <sub>4</sub>	12000	2	3	0	1	0	12000/3=4000
0	X <sub>5</sub>	15000	1	4	0	0	1	15000/4=3750
	Zi	0	0	0	0	0	0	
	Ci - Zi		3	5	0	0	0	

▪ La détermination de la colonne pivot :

$\text{Max } (C_i - Z_i) = (3,5) \Rightarrow \text{Max} = 5 \Rightarrow$  la colonne pivot est la colonne de  $x_2$  ( $x_2$  : représente la variable entrante)

▪ La détermination de la ligne pivot :

On calcule le rapport  $b_i/c_{ip}$

$\text{Min } b_i/c_{ip} = (5000, 4000, 3750) \Rightarrow \text{Min} = 3750 \Rightarrow$  la ligne pivot est la ligne de  $x_5$  ( $x_5$  : représente la variable sortante)

▪ La détermination de l'élément pivot :

L'élément pivot : représente l'intersection de la ligne pivot et la colonne pivot.

Ici, l'élément pivot = 4.

**Exemple 1:**

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 7x_2$$

$$\text{S.C : } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Le PL sous forme standard :**

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$\text{S.C : } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 7 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 ; x_4 \geq 0 ; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

**Sous forme tableau :**

		Le pivot		Variables d'écart			Second membre	coef
		x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	bi	
Variables dans la base	x <sub>3</sub>	1	2	1	0	0	12	6
	x <sub>4</sub>	3	2	0	1	0	18	9
	x <sub>5</sub>	1	1	0	0	1	7	7
Fonction économique	Z	5	7	0	0	0	0	

1<sup>ère</sup> itération :

Plus grand

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	bi	coef
x <sub>2</sub>	1/2	1	1/2	0	0	6	12
x <sub>4</sub>	2	0	-1	1	0	6	3
x <sub>5</sub>	1/2	0	-1/2	0	1	1	2
Z	3/2	0	-7/2	0	0	-42	L'4 = L4 - 7L'1

2<sup>ème</sup> itération :

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	bi	coef
x <sub>2</sub>	0	1	1	0	-1	5	L''1 = L'1 - 1/2 * L''3
x <sub>4</sub>	0	0	1	1	-4	2	L''2 = L'2 - 2L''3
x <sub>1</sub>	1	0	-1	0	2	2	L''3 = (L'3)/(1/2)
Z	0	0	-2	0	-3	-45	L''4 = L'4 - 3/2 L''2

Tous les coefficients sur la ligne de la fonction économique sont négatifs ou nuls, le maximum est donc atteint.

La valeur maximale de Z est 45, et elle est atteinte pour x<sub>1</sub> = 2 et x<sub>2</sub> = 5.

On vérifie que  $Z = (5*2) + (7*5) = 45$

**Exemple 2:**

Max  $Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3$

S.C :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ 0,5x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard du problème :

Max  $Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0*x_4 + 0*x_5 + 0*x_6$

S.C :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ 0,5x_1 + 7x_2 + x_3 + x_6 = 12 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 ; x_4 \geq 0 ; x_5 \geq 0 ; x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Le pivot

	Variable de décision	Variables d'écart					Second membre	
	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	bi	
Variables dans la base	x <sub>4</sub>	3	1	1	1	0	0	2
	x <sub>5</sub>	1	1	2	0	1	0	1
	x <sub>6</sub>	0,5	7	1	0	0	1	12
Fonction économique	Z	5	3	4	0	0	0	0

coef	
2/3	L1
1	L2
24	L3

Plus grand

1<sup>ère</sup> itération :

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	bi	coef
x <sub>1</sub>	<b>1</b>	1/3	1/3	1/3	0	0	2/3	2 L'1 = (L1) / 3
x <sub>5</sub>	0	2/3	<b>5/3</b>	-1/3	1	0	1/3	<b>1/5</b> L'2 = L2 - L'1
x <sub>6</sub>	0	41/6	5/6	-1/6	0	1	35/3	14 L'3 = L3 - 1/2L'1
Z	0	4/3	<b>7/3</b>	-5/3	0	0	<b>-10/3</b>	L'4 = L4 - 5L'1

2<sup>ème</sup> itération :

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	bi	coef
x <sub>1</sub>	1	1/5	0	2/5	-1/5	0	3/5	3 L''1 = L'1 - 1/3*L''2
x <sub>4</sub>	0	<b>2/5</b>	1	-1/5	3/5	0	1/5	<b>1/2</b> L''2 = (L'2)/(5/3)
x <sub>6</sub>	0	13/2	0	0	-0,5	1	23/2	23/13 L''3 = L'3 - 5/6*L''2
Z	0	<b>2/5</b>	0	-6/5	-7/5	0	<b>-19/5</b>	L''4 = L'4 - 7/3*L''2

3<sup>ème</sup> itération :

	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	bi	coef
x <sub>1</sub>	1	0	-1/2	1/2	-1/2	0	1/2	L'''1 = L''1 - 1/5*L'''2
x <sub>3</sub>	0	1	5/2	-1/2	3/2	0	1/2	L'''2 = (L''2)/(2/5)
x <sub>6</sub>	0	0	-65/4	13/4	-41/4	1	33/4	L'''3 = L''3 - 13/2*L''2
Z	0	0	-1	-1	-2	0	<b>-4</b>	L'''4 = L''4 - 2/5*L''2

Tous les coefficients sur la ligne de la fonction économique sont négatifs ou nuls, le maximum est donc atteint.

La valeur maximale de Z est 4, et elle est atteinte pour x<sub>1</sub> = 0,5 ; x<sub>2</sub> = 0,5 et x<sub>3</sub> = 0.

On vérifie que  $Z = (5*0,5) + (3*0,5) + (4*0) = 4$

# **Chapitre 6 : Dualité**

## **Résolution par Passage au Dual**

# **Chapitre 6 : Dualité**

## **Résolution par Passage au Dual**

- 1. Définition de la dualité**
- 2. Trouver le dual**
- 3. Conditions d'optimalité primal-dual**

## 1. Définition de la dualité :

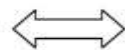
La dualité est un programme linéaire qui reflète un programme linéaire d'un problème donné par sa première de description (principale). Autrement dit, la dualité est une façon de visualiser un problème donné sous un autre angle. La dualité d'un problème, peut-être assimilé à l'effet miroir où on arrive à voir la même chose sauf que les coordonnées de la base utilisée ne sont pas les mêmes.

La dualité est un concept important en recherche opérationnelle. Tout programme linéaire admet un programme dual. Autrement dit, à tout problème de maximisation peut être associé un problème de minimisation et à tout problème de minimisation peut être associé un problème de maximisation. Le premier est appelé : primal, le second étant son dual<sup>1</sup>.

Programme linéaire primal

$$\max z = c^T x$$

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Programme linéaire dual

$$\min f = b^T y$$

$$\begin{cases} A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Le fait d'avoir un problème vu selon deux angles différents (primal - dual) liés d'une certaine manière, met en évidence la dépendance des solutions entre primal - dual.

D'ailleurs on peut facilement trouver une solution de l'un à partir de la solution de l'autre.

---

<sup>1</sup> Sari Triqui Lamia, Polycopié de cours "Recherche Opérationnelle", département GEE, Faculté de TECHNOLOGIE, Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen, Septembre 2016, P : 33.

## 2. Trouver le dual :

Pour passer du primal au dual, certaines transformations doivent être considérées qui sont définies comme suit <sup>1</sup>:

a) Les termes du second membre des contraintes "bi" dans le problème primal deviennent les coefficients de la nouvelle fonction objective du dual et les coefficients de la fonction objective primal deviennent le second membre des contraintes du dual.

b) Les variables de décisions du problème primal deviennent des variables d'écart dans le problème dual et les variables d'écart deviennent les variables de décisions.

c) Le problème de maximisation devient un problème de minimisation et le problème de minimisation devient un problème de maximisation.

d) Les inégalités d'infériorité deviennent des inégalités de supériorité et inversement.

e) La matrice A se transforme en sa transposée AT. (l'écriture en ligne devient l'écriture en colonne).

### Exemple :

$$\text{Max } F(x_1; x_2) = 6x_1 + 4x_2$$

Sous contrainte :

$$3x_1 + 9x_2 \leq 81$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 55$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

---

<sup>1</sup> Idem.

A chaque contrainte, nous affecterons une variable appelée  $y_i$ . La transformation est donnée par le tableau A.

Problème primal		Problème dual	
Max $F(x_1; x_2) = 6x_1 + 4x_2$		Min $k(y_1; y_2; y_3) = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3$	
S.C		S.C	
$y_1$	$x_1 + 9x_2 \leq 81$	$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 6$	
$y_2$	$4x_1 + 5x_2 \leq 55$	$9y_1 + 5y_2 + 1y_3 \geq 4$	
$y_3$	$2x_1 + 1x_2 \leq 20$	$y_1; y_2; y_3 \geq 0$	
$x_1; x_2 \geq 0$			

**Tableau : Passage du primal vers le dual**

### 3. Conditions d'optimalité primal-dual :

L'ensemble primal-dual possède un certain nombre de conditions et de propriétés indissociables raccordées l'une à l'autre, précisées comme suit : si le problème primal est réalisable et possède une solution optimale donc, forcément, il existe une solution optimale pour le dual qui est la même. Et si le problème primal est non réalisable, le primal l'est non borné.



To access the online answer key, please scan the **QR** code using the anonymous login.



Pour chaque exercice, formuler le problème de Programmation Linéaire (PL)

### Exercise 1 :

Une entreprise fabrique des tables et des chaises à partir de deux matières : le bois et la peinture, sachant que la réalisation d'une table nécessite **3 m** de bois et **4 kg** de peinture, la réalisation d'une chaise nécessitent **2 m** de bois et **1 kg** de peinture.

Les moyens financiers de l'entreprise acceptent un approvisionnement de **100 m** de bois et **120 kg** de peinture par semaine. Les produits ainsi fabriqués fournissent un bénéfice de **500 DA** par table et **300 DA** par chaise vendu. Formuler le problème.

### Exercise 2 :

Un atelier de couture fabrique en série deux modèles de tabliers. Le premier modèle nécessite **1** mètre de tissu, **4** heures de travail et rapporte **240 DA**. Un tablier du deuxième modèle exige **2** mètres de tissu, **2** heures de travail et rapporte **160 DA**.

Sachant que l'atelier dispose quotidiennement de **150** mètres de tissu et de **400** heures de travail, et qu'il peut vendre toute sa fabrication. Combien de tablier faut-il fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal ?

### Exercice 3 :

Une entreprise disposant de **10000 m<sup>2</sup>** de bois en réserve, fabrique et commercialise **2** types de boîtes en bois.

La fabrication d'une boîte en bois de type **1** et de type **2** nécessite, respectivement, **1** et **2 m<sup>2</sup>** de bois ainsi que **2** et **3** minutes de temps d'assemblage. Seules **200** heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir.

Les boites sont clouer et il faut quatre fois plus de clou pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock de clous disponible permet d'assembler au maximum **15000** boîtes du premier type.

Les boites sont vendues, respectivement, **300 DA** et **500 DA**. Déterminez le nombre de boite de chaque type pour avoir la recette maximale.

### Exercice 4 :

Une entreprise fabrique deux produits **A** et **B**, en utilisant une machine **m** et deux matières premières **p** et **q**.

On suppose que :

La production d'une unité de **A** nécessite **2** kg de **p** et **9** kg de **q**, et utilise la machine **m** durant **1** heure ;

La production d'une unité de **B** nécessite **2** kg de **p** et **4** kg de **q**, et utilise la machine **m** durant **2** heures.

Les profits réalisés sont de : **50 DA** par unité de **A** et **60 DA** par unité de **B**.

On dispose chaque jour de : **8** heures de **m**, de **10** kg de **p** et de **36** kg de **q**.

L'objectif que poursuit l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces **2** produits en utilisant au mieux ses ressources.



## Solution of Exercise 1 :

### ▪ La formulation du problème :

Reprenons les données de l'exemple sur un tableau :

	Table	Chaise	Stock
Bois	3	2	100
Peinture	4	1	120
Bénéfice	500	300	

### ▪ Les variables :

$x_1$  : Représente la quantité des tables

$x_2$  : Représente la quantité des chaises

### ▪ La fonction objectif :

Le gain ou bien le bénéfice :  $Z = 500x_1 + 300x_2$

⇒ La fonction objectif : Maximiser  $Z = \text{Max } Z = 500x_1 + 300x_2$

### ▪ Les contraintes :

Pour le bois :  $3x_1 + 2x_2 \leq 100$

Pour la peinture :  $4x_1 + x_2 \leq 120$

Pour soulever le problème de la non-négativité (positivité +) des variables, puisqu'on ne peut pas produire moins de deux tables ou moins vingt chaises nous supposons que les variables sont positives, on ajoute une contrainte supplémentaire au problème :

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

▪ **Formulation de PL :**

$$\Rightarrow \quad \text{Max } Z = 500x_1 + 300x_2$$

$$\text{S/C} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 100$$

$$4x_1 + x_2 \leq 120$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

**Solution of Exercise 2 :**

▪ **Analyse du problème :**

	<b>Tablier du premier modèle</b>	<b>Tablier du deuxième modèle</b>	<b>Ressource disponible</b>
<b>Tissu</b>	1 m	2 m	150 m
<b>Heur de travail</b>	4 h	2 h	400 h
<b>Bénéfice</b>	240 DA	160 DA	

▪ **Les variables :**

$x_1$  : Quantité de tablier du premier modèle

$x_2$  : Quantité de tablier du deuxième modèle

▪ **La fonction objectif :**

Le premier modèle rapporte 240 DA

Le deuxième modèle rapporte 160 DA

⇒ La fonction objectif :  $\text{Max } Z = 240x_1 + 160x_2$

▪ **Les contraintes :**

Pour le Tissu :  $x_1 + 2x_2 \leq 150$

Pour l'Heur de travail :  $4x_1 + 2x_2 \leq 400$

Pour soulever le problème de la non-négativité (positivité +) des variables, nous supposons que les variables sont positives, on ajoute une contrainte supplémentaire au problème :

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

▪ **Formulation de PL :**

⇒  $\text{Max } Z = 240x_1 + 160x_2$

S/C  $x_1 + 2x_2 \leq 150$

$4x_1 + 2x_2 \leq 400$

$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$

**Solution of Exercise 3 :**

▪ **Analyse du problème :**

	<b>Boites en bois type 1</b>	<b>Boites en bois type 2</b>	<b>Ressource disponible</b>
<b>Bois</b>	1 m <sup>2</sup>	2 m <sup>2</sup>	10000 m <sup>2</sup>
<b>Heur de travail</b>	2 min	3 min	200 h = (200*60=12000)
<b>Clous</b>	1	4	15000 clous
<b>Bénéfice</b>	300 DA	500 DA	

▪ **Les variables :**

$x_1$  : Boites en bois type 1

$x_2$  : Boites en bois type 2

▪ **La fonction objectif :**

Pour les boites en bois type 1 : 300 DA

Pour les boites en bois type 2 : 500 DA

⇒ La fonction objectif :  $\text{Max } Z = 300x_1 + 500x_2$

▪ **Les contraintes :**

Pour le bois :  $x_1 + 2x_2 \leq 10000$

Pour l'heure de travail :  $2x_1 + 3x_2 \leq 12000$

Pour les clous :  $x_1 + 4x_2 \leq 15000$

Pour soulever le problème de la non-négativité (positivité +) des variables, nous supposons que les variables sont positives, on ajoute une contrainte supplémentaire au problème :

$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$

▪ **Formulation de PL :**

⇒  $\text{Max } Z = 300x_1 + 500x_2$

S/C  $x_1 + 2x_2 \leq 10000$

$2x_1 + 3x_2 \leq 12000$

$x_1 + 4x_2 \leq 15000$

$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$

## Solution of Exercise 4 :

### ▪ Analyse du problème :

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>Ressource disponible</b>
<b>m</b>	1 h	2 h	8 h
<b>p</b>	2 kg	2 kg	10 kg
<b>q</b>	9 kg	4 kg	36 kg
<b>Bénéfice</b>	50 DA	60 DA	

### ▪ Les variables :

$x_1$  : Quantité du produit **A** à produire

$x_2$  : Quantité du produit **B** à produire

### ▪ La fonction objectif :

Le produit **A** rapporte 50 DA

Le produit **B** rapporte 60 DA

⇒ La fonction objectif :  $\text{Max } Z = 50x_1 + 60x_2$

### ▪ Les contraintes :

Pour la machine **m** :  $x_1 + 2x_2 \leq 8$

Pour la matière première **p** :  $2x_1 + 2x_2 \leq 10$

Pour la matière première **q** :  $9x_1 + 4x_2 \leq 36$

Pour soulever le problème de la non-négativité (positivité +) des variables, nous supposons que les variables sont positives, on ajoute une contrainte supplémentaire au problème :

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

▪ **Formulation de PL :**

$$\Rightarrow \quad \text{Max } Z = 50x_1 + 60x_2$$

$$\text{S/C} \quad x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$9x_1 + 4x_2 \leq 36$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

~ ... ~ ... ~



To access the online answer key, please scan the **QR** code using the anonymous login.



Pour chaque exercice, formuler le problème de Programmation Linéaire (PL) et le résoudre graphiquement.

### Exercice 1 :

Une usine fabrique deux (2) produits **P1** et **P2** en utilisant un certain nombre de ressources : post opératoire (machine), main-d'œuvre et emballage. Ces besoins sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantités limitées (cf. tableau).

	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>Ressources disponibles</b>
<b>Heure / Machine</b>	3	9	81
<b>Main-d'œuvre</b>	4	5	55
<b>Emballage</b>	2	1	20

Les deux (2) produits **P1** et **P2** rapportent à la vente respectivement des bénéfices de **600 DA** et **400 DA** par unité.

Quelles quantités de produits **P1** et **P2**, doit produire l'usine afin de maximiser le bénéfice total venant de la vente des deux (2) produits ?

### **Exercice 2 :**

Un fabricant de raquettes de tennis fait un bénéfice de **800 DA** sur chaque raquette ordinaire et de **1500 DA** sur chaque grande raquette. Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de raquettes ordinaires devrait se situer entre **30** et **80**, et la production journalière de grandes raquettes entre **10** et **30**. Pour maintenir une bonne qualité, le nombre de raquettes produites ne devrait pas dépasser **80** par jour. Combien de raquettes de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

### **Exercice 3 :**

Une association culturelle organise une exposition, pendant cette exposition des tasses de chocolat au lait et des tasses de café au lait sont vendues pour apporter une aide aux orphelins.

Un sponsor a permis de procurer **40** litres de lait, **4** kg de sucre et assez de café et de chocolat pour faire **150** tasses de chaque boisson.

On prévoit de servir **2** sucres par tasse en moyenne ; chaque paquet d'un kilogramme de sucre contient **120** morceaux, il faut **1/4** de litre de lait pour une tasse de chocolat et **1/12** de litre de lait pour une tasse de café. Le trésorier propose de vendre **50 DA** chaque tasse de chocolat au lait et **40 DA** chaque tasse de café au lait.

Déterminez le nombre de tasses de chaque sorte à servir et calculez la recette maximale collectée ?

#### Exercice 4 :

Une entreprise (notée **A**) produit **2** types de produits **P1** et **P2** pour lesquels elle utilise **3** matières premières : **M1**, **M2** et **M3**.

Le tableau ci-dessous résume les données du problème.

	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>M3</b>	<b>Bénéfice</b>
<b>P1</b>	2,5 kg	125 g	17,5 kg	65 €
<b>P2</b>	7,5 kg	125 g	10 kg	115 €
<b>Quantités disponibles</b>	240 kg	5 kg	595 kg	

Pour fabriquer **1** tonneau de produit **P1**, l'entreprise utilise **2,5 kg** de **M1**, **125 g** de **M2** et **17,5 kg** de **M3**.

La fabrication de ce tonneau lui rapporte alors un bénéfice de **65 €**.

Le tableau se lit de manière analogue pour le produit **P2**.

Déterminer la fabrication optimale de l'entreprise graphiquement.

~ ... ~ ... ~



### Solution of Exercise 1 :

	P1	P2	Ressources disponibles
Heure / Machine	3	9	81
Main-d'œuvre	4	5	55
Emballage	2	1	20

#### ▪ Les variables :

$x_1$  et  $x_2$  sont respectivement les quantités des produits P1 et P2 à fabriquer ( $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ ).

#### ▪ La fonction objectif :

Choix de la fonction objectif à maximiser

La fonction objectif correspond au bénéfice total. Elle vaut :

$$F(x_1, x_2) = 600x_1 + 400x_2.$$

Le problème se traduit donc par :

$$\text{Max } Z = 600x_1 + 400x_2$$

#### ▪ Les contraintes :

Pour La disponibilité de chacune des ressources s'écrit sous la forme suivante :

$$\Rightarrow 3x_1 + 9x_2 \leq 81$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 55$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme :

$$\Rightarrow \quad \text{Max } Z = 600x_1 + 400x_2$$

$$\text{S/C} \quad 3x_1 + 9x_2 \leq 81$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 55$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

On va premièrement tracer le graphe des inégalités, afin de visualiser les demi-plans limités par les droites des contraintes :

$$\bullet \quad 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \Rightarrow (\Delta_1) : 3x_1 + 9x_2 = 81$$

$x_1$	0	27
$x_2$	9	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_1)$  sont :  $(0 ; 9)$  et  $(27 ; 0)$

$$\bullet \quad 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \Rightarrow (\Delta_2) : 4x_1 + 5x_2 = 55$$

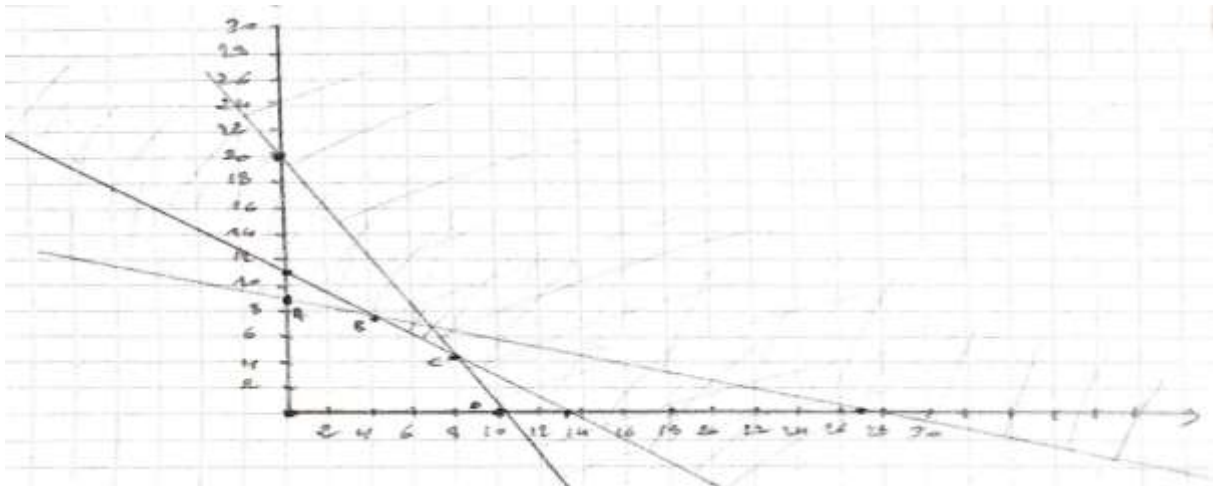
$x_1$	0	13,75
$x_2$	11	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_2)$  sont :  $(0 ; 11)$  et  $(13,75 ; 0)$

•  $2x_1 + x_2 \leq 20 \Rightarrow (\Delta_3) : 2x_1 + x_2 = 20$

$x_1$	0	10
$x_2$	20	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_3)$  sont :  $(0 ; 20)$  et  $(10 ; 0)$



**Graphe**

L'aire limitée par les droites est appelés **l'espace des solutions admissibles**.

Les points : A  $(0 ; 9)$  ; B  $(4 ; 8)$  ; C  $(8 ; 4)$  et D  $(10 ; 0)$  sont les **solutions possibles**.

On remplace ces points dans la fonction objectif Z, on trouve :

$$\text{Max } Z = 600x_1 + 400x_2$$

$$A (0 ; 9) \Rightarrow Z = (600)(0) + (400)(9) \Rightarrow Z = 3600$$

$$B (4 ; 8) \Rightarrow Z = (600)(4) + (400)(8) \Rightarrow Z = 5600$$

$$C (8 ; 4) \Rightarrow Z = (600)(8) + (400)(4) \Rightarrow Z = 6400$$

$$D (10 ; 0) \Rightarrow Z = (600)(10) + (400)(0) \Rightarrow Z = 6000$$

$\Rightarrow$  La solution optimale est donc : **C  $(8 ; 4) \Rightarrow x_1 = 8 ; x_2 = 4$  et  $Z = 6400$**

## Solution of Exercise 2 :

### ▪ La formulation du problème :

Reprenons les données de l'exemple sur un tableau :

	Raquette Ordinaire	Grande raquette
Production	30 à 80	10 à 30
Nombre de raquette	80	
Bénéfice	800	1500

### ▪ Les variables :

$x_1$  : Représente la quantité de raquette ordinaire

$x_2$  : Représente la quantité de grande raquette

### ▪ La fonction objectif :

Le gain ou bien le bénéfice :  $Z = 800x_1 + 1500x_2$

⇒ La fonction objectif : Maximiser  $Z = \text{Max } Z = 800x_1 + 1500x_2$

### ▪ Les contraintes :

$$30 \leq x_1 \leq 80$$

$$10 \leq x_2 \leq 30$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

Pour soulever le problème de la non-négativité (positivité +) des variables, nous supposons que les variables sont positives, on ajoute une contrainte supplémentaire au problème :

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

▪ **Formulation de PL :**

$$\Rightarrow \quad \text{Max } Z = 800x_1 + 1500x_2$$

$$\text{S/C} \quad 30 \leq x_1 \leq 80$$

$$10 \leq x_2 \leq 30$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

On va premièrement tracer le graphe des inégalités, afin de visualiser les demi-plans limités par les droites des contraintes :

- $30 \leq x_1 \leq 80 \Rightarrow x_1 \geq 30 \Rightarrow x_1 = 30$

$$\text{et } x_1 \leq 80 \Rightarrow x_1 = 80$$

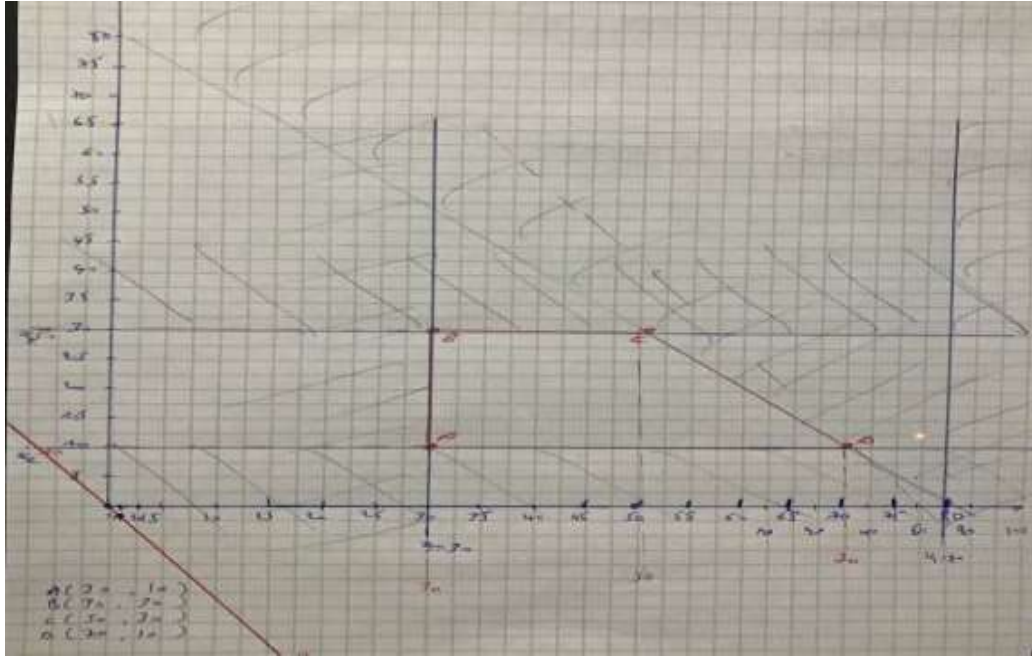
- $10 \leq x_2 \leq 30 \Rightarrow x_2 \geq 10 \Rightarrow x_2 = 10$

$$\text{et } x_2 \leq 30 \Rightarrow x_2 = 30$$

- $x_1 + x_2 \leq 80 \Rightarrow (\Delta_1) : x_1 + x_2 = 80$

$x_1$	0	80
$x_2$	80	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_1)$  sont :  $(0 ; 80)$  et  $(80 ; 0)$



### Graph

L'aire limitée par les droites est appelé **l'espace des solutions admissibles**.

Les points : A (30 ; 10) ; B (30 ; 30) ; C (50 ; 30) et D (70 ; 10) sont les **solutions possibles**.

On remplace ces points dans la fonction objectif Z, on trouve :

$$\text{Max } Z = 800x_1 + 1500x_2$$

$$A (30 ; 10) \Rightarrow Z = (800)(30) + (1500)(10) \Rightarrow Z = 39000$$

$$B (30 ; 30) \Rightarrow Z = (800)(30) + (1500)(30) \Rightarrow Z = 69000$$

$$C (50 ; 30) \Rightarrow Z = (800)(50) + (1500)(30) \Rightarrow Z = 85000$$

$$D (70 ; 10) \Rightarrow Z = (800)(70) + (1500)(10) \Rightarrow Z = 71000$$

$\Rightarrow$  La solution optimale est donc : **C (50 ; 30)  $\Rightarrow x_1 = 50$  ;  $x_2 = 30$  et  $Z = 85000$**

**Méthode des droites parallèles :**

Méthode basée sur la droite de la fonction objectif :  $\text{Max } Z = 800x_1 + 1500x_2$

$$\text{Max } Z = 800x_1 + 1500x_2$$

$$Z = 0 \Rightarrow 800x_1 + 1500x_2 = 0$$

$x_1$	0	1	1,87
$x_2$	0	-0,53	1

D'où, les points appartenant à la droite de la fonction objectif sont : (0 ; 0), (1 ; -0,53) et (1,87 ; 1)

Une fois représentée, la droite de la fonction objectif sera translatée parallèlement à elle-même dans le sens de l'optimisation (Maximisation ou Minimisation)

La solution optimale dans ce cas-là est : **D (70 ; 10)  $\Rightarrow x_1 = 70$  ;  $x_2 = 10$  et  $Z = 71000$**

$\Rightarrow$  D'après les deux méthodes on peut dire que on est en face d'un cas particulier ou il existe plusieurs solutions optimales représentées par tous les points qui se trouvent sur la droite [CD].

### Solution of Exercise 3 :

#### ▪ Analyse du problème :

	Tasse de chocolat au lait	Tasse de café au lait	Ressource disponible
<b>Lait</b>	1/4	1/12	40 L
<b>Sucre</b>	2	2	4 kg = (4 * 120 = 480)
<b>Bénéfice</b>	50 DA	40 DA	

▪ **Les variables :**

$x_1$  : Nombre de tasses chocolat au lait

$x_2$  : Nombre de tasses café au lait

▪ **La fonction objectif :**

Pour chaque tasse de chocolat au lait 50 DA

Pour chaque tasse de café au lait 40 DA

⇒ La fonction objectif :  $\text{Max } Z = 50x_1 + 40x_2$

▪ **Les contraintes :**

Pour le lait :  $1/4 x_1 + 1/12 x_2 \leq 40$

Pour le sucre :  $2x_1 + 2x_2 \leq 480$

2 sucres par tasse en moyenne ; chaque paquet d'un kilogramme de sucre contient 120 morceaux donc ( $4 * 120 = 480$ )

150 tasses de chaque boisson :

$$x_1 \leq 150$$

$$x_2 \leq 150$$

Pour soulever le problème de la non-négativité (positivité +) des variables, nous supposons que les variables sont positives, on ajoute une contrainte supplémentaire au problème :

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

▪ **Formulation de PL :**

$$\Rightarrow \quad \text{Max } Z = 50x_1 + 40x_2$$

$$\text{S/C} \quad 1/4 x_1 + 1/12 x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 480$$

$$x_1 \leq 150$$

$$x_2 \leq 150$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

On va premièrement tracer le graphe des inégalités, afin de visualiser les demi-plans limités par les droites des contraintes :

$$\bullet \quad 1/4x_1 + 1/12x_2 \leq 40 \Rightarrow (\Delta_1) : 1/4x_1 + 1/12x_2 = 40$$

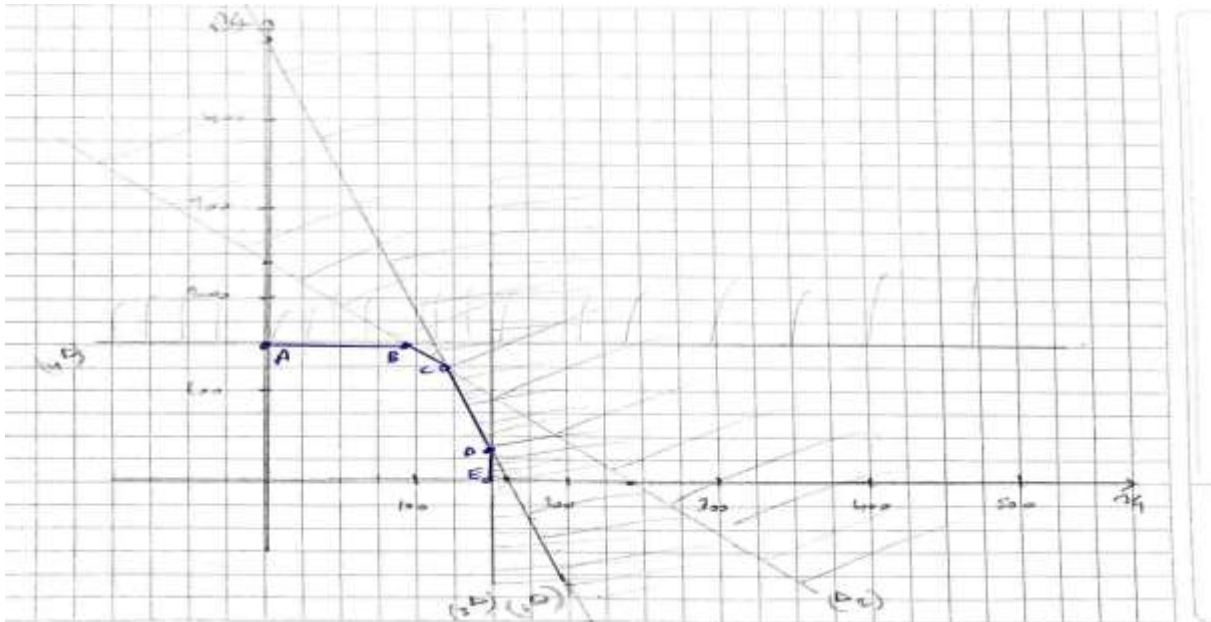
$x_1$	0	160
$x_2$	480	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_1)$  sont : (0 ; 480) et (160 ; 0)

$$\bullet \quad 2x_1 + 2x_2 \leq 480 \Rightarrow (\Delta_2) : 2x_1 + 2x_2 = 480$$

$x_1$	0	240
$x_2$	240	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_2)$  sont (0 ; 240) et (240 ; 0)



### Graphe

L'aire limitée par les droites est appelés **l'espace des solutions admissibles**.

Les points : A (0 ; 150) ; B (90 ; 150) ; C (120 ; 120) ; D (150 ; 30) et E (150 ; 0) sont les **solutions possibles**.

On remplace ces points dans la fonction objectif Z, on trouve :

$$\text{Max } Z = 50x_1 + 40x_2$$

$$A (0 ; 150) \Rightarrow Z = (50)(0) + (40)(150) \Rightarrow Z = 6000$$

$$B (90 ; 150) \Rightarrow Z = (50)(90) + (40)(150) \Rightarrow Z = 10500$$

$$C (120 ; 120) \Rightarrow Z = (50)(120) + (40)(120) \Rightarrow Z = 10800$$

$$D (150 ; 30) \Rightarrow Z = (50)(150) + (40)(30) \Rightarrow Z = 8700$$

$$E (150 ; 0) \Rightarrow Z = (50)(150) + (40)(0) \Rightarrow Z = 7500$$

La solution optimale est donc : **C (120 ; 120)  $\Rightarrow x_1 = 120$  ;  $x_2 = 120$  et  $Z = 10800$**

## Solution of Exercise 4 :

1. La détermination de la fabrication optimale de l'entreprise graphiquement :

### ▪ Analyse du problème :

	M1	M2	M3	Bénéfice
P1	2,5 kg	125 g = 0,125 kg	17,5 kg	65 €
P2	7,5 kg	125 g = 0,125 kg	10 kg	115 €
Quantités disponibles	240 kg	5 kg	595 kg	

Pour fabriquer 1 tonneau de produit **P1**, l'entreprise utilise **2,5 kg** de **M1**, **125 g** de **M2** et **17,5 kg** de **M3**.

La fabrication de ce tonneau lui rapporte alors un bénéfice de **65 €**.

Le tableau se lit de manière analogue pour le produit **P2**.

### ▪ Les variables :

$x_1$  : Nombre de tonneaux de P1

$x_2$  : Nombre de tonneaux de P2

### ▪ La fonction objectif :

Pour chaque P1 65 €

Pour chaque P2 115 €

⇒ La fonction objectif :  $\text{Max } Z = 65x_1 + 115x_2$

### ▪ Les contraintes :

Pour M1 :  $2,5x_1 + 7,5x_2 \leq 240$

Pour M2 :  $0,125x_1 + 0,125x_2 \leq 5$

1000 g -----> 1 kg

125 g -----> ?  $\Rightarrow (125 \text{ g} * 1 \text{ kg}) / 1000 \text{ g} = 0,125 \text{ kg}$

Pour M3 :  $17,5x_1 + 10x_2 \leq 595$

Pour soulever le problème de la non-négativité (positivité +) des variables, nous supposons que les variables sont positives, on ajoute une contrainte supplémentaire au problème :

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

▪ **Formulation de PL :**

$$\Rightarrow \quad \text{Max } Z = 65x_1 + 115x_2 \quad * 0,2 \quad \Rightarrow \quad \text{Max } Z = 13x_1 + 23x_2$$

$$\text{S/C} \quad 2,5x_1 + 7,5x_2 \leq 240 \quad * 0,4 \quad \text{S/C} \quad x_1 + 3x_2 \leq 96$$

$$0,125x_1 + 0,125x_2 \leq 5 \quad \text{Soit} \quad * 8 \quad x_1 + x_2 \leq 40$$

$$17,5x_1 + 10x_2 \leq 595 \quad * 0,4 \quad 7x_1 + 4x_2 \leq 238$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \quad x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

NB. Stricto sensu\*, les variables  $x_1$  et  $x_2$  doivent être entières ; mais nous constaterons en fin de résolution, qu'à l'optimum du programme linéaire continu, les variables se trouvent être entières.

Ci-dessus, on a multiplié la première contrainte par (0,4) ; la deuxième par (8), et la troisième par (0,4). De même la fonction objectif (économique) a été multipliée par (0,2). Ceci afin d'avoir des coefficients plus simples.

---

\* Au sens strict du terme.

On résout alors le programme linéaire équivalent ci-dessus. Puisqu'il ne comporte que deux variables, on peut le résoudre aisément graphiquement.

On va premièrement tracer le graphe des inégalités, afin de visualiser les demi-plans limités par les droites des contraintes :

- $x_1 + 3x_2 \leq 96 \Rightarrow (\Delta_1) : x_1 + 3x_2 = 96$

$x_1$	0	96
$x_2$	32	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_1)$  sont : (0 ; 32) et (96 ; 0)

- $x_1 + x_2 \leq 40 \Rightarrow (\Delta_2) : x_1 + x_2 = 40$

$x_1$	0	40
$x_2$	40	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_2)$  sont (0 ; 40) et (40 ; 0)

- $7x_1 + 4x_2 \leq 238 \Rightarrow (\Delta_3) : 7x_1 + 4x_2 = 238$

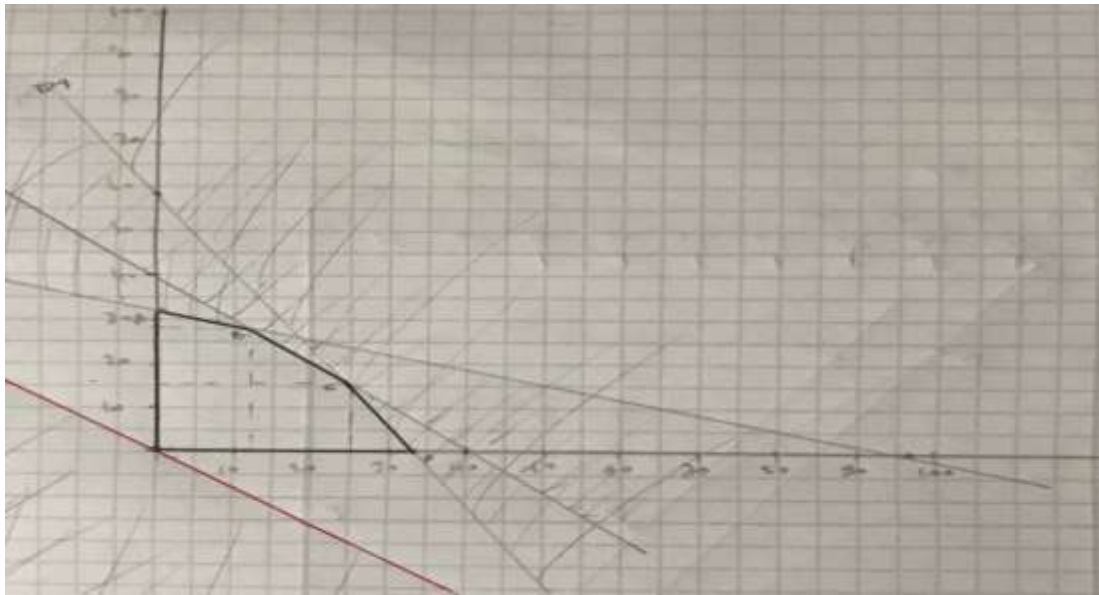
$x_1$	0	34
$x_2$	59,5	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_3)$  sont (0 ; 59,5) et (34 ; 0)

- $13x_1 + 23x_2 = 0$

$x_1$	0	1
$x_2$	0	- 0,56

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_3)$  sont (0 ; 0) et (1 ; - 0,56)



### Graphe

L'aire limitée par les droites est appelée **l'espace des solutions admissibles**.

Les points : A (0 ; 32) ; B (12 ; 28) ; C (25 ; 15) et D (34 ; 0) sont les **solutions possibles**.

On remplace ces points dans la fonction objectif Z, on trouve :

$$\text{Max } Z = 13x_1 + 23x_2$$

$$A (0 ; 32) \Rightarrow Z = (13)(0) + (23)(32) \Rightarrow Z = 736$$

$$B (12 ; 28) \Rightarrow Z = (13)(12) + (23)(28) \Rightarrow Z = 800$$

$$\text{Soit } B (12 ; 28) \Rightarrow Z = (65)(12) + (115)(28) \Rightarrow Z = 4000$$

$$C (25 ; 15) \Rightarrow Z = (13)(25) + (23)(15) \Rightarrow Z = 670$$

$$D (34 ; 0) \Rightarrow Z = (13)(34) + (23)(0) \Rightarrow Z = 442$$

La solution optimale est donc : **B (12 ; 28)  $\Rightarrow x_1 = 12$  ;  $x_2 = 28$**  et  $Z = 800$

Soit **Z = 4000 €**



*Prénom :*

*Nom :*

*Groupe :*

**Exercice 1 (5 Points) : Estimated Time 30 minutes**

Un atelier fabrique des tables et des bureaux.

- Chaque table nécessite 2,5 h pour l'assemblage, 3 h pour le polissage et 1 h pour la mise en caisse.
- Chaque bureau exige 1 h pour l'assemblage, 3 h pour le polissage et 2 h pour la mise en caisse.

L'entreprise ne peut disposer, chaque semaine, de plus de 10 h pour l'assemblage, de 15 h pour le polissage et de 8 h pour la mise en caisse. Sa marge de profit est de 30 DA par table et de 40 DA par bureau. Combien de tables et de bureaux doit-on produire afin d'obtenir un profit hebdomadaire maximal ?

**Exercice 2 (5 Points) : Estimated Time 30 minutes**

Un agriculteur souhaite mélanger des engrais de façon à obtenir au minimum 15 unités de potasse, 20 unités de nitrates et 24 unités de phosphates. Il achète deux types d'engrais :

- Le type 1 procure 3 unités de potasse, 1 unité de nitrates et 3 unités de phosphates. Il coûte 120 DA.
- Le type 2 procure 1 unité de potasse, 5 unités de nitrates et 2 unités de phosphates. Il coûte 60 DA. Exprimer à l'aide d'un Programme Linéaire (PL) la combinaison d'engrais qui remplira les conditions exigées au moindre coût.

**Exercise 3 (5 Points) : Estimated Time 15 minutes**

On considère le programme linéaire suivant :

$$\Rightarrow \quad \text{Max } Z = 5x_1 + 7x_2$$

$$\text{S/C} \quad 3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

Résoudre graphiquement ce Programme Linéaire (PL).

**\*\*\* ALL THE BEST ! \*\*\***



**The use of the mobile phone as a calculator is strictly prohibited**

- To access the online answer key, please scan the QR code by clicking on the anonymous login.
- The answer key will be available online right after the exam.



**Exercise 1 (5 Points) : Estimated Time 10 Minutes**

Répondre par Vrai au Faux aux expressions suivantes :

	Vrai	faux
1. La Recherche Opérationnelle (RO) peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur résultat possible ou encore au résultat optimal.		
2. Une solution optimale est une solution admissible qui optimise la fonction objectif.		
3. Programme Linéaire sous forme canonique est un système avec un ensemble d'inéquation et une fonction à optimiser.		
4. La Méthode Graphique est une méthode de résolution d'un Programme Linéaire (PL) ne comportant que trois (3) variables de décision.		
5. L'intersection de la ligne pivot et la colonne pivot fait ressortir l'élément pivot.		

### Exercise 2 (3 Points) : Estimated Time 10 Minutes

1. Solve the following linear problem graphically :

1. Résoudre graphiquement le programme linéaire suivant :

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

Subject to (s.t.)

Sous contraintes (S.C.)

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

### Exercise 3 (6 Points) : Estimated Time 30 Minutes

Une usine fabrique deux (2) produits **P1** et **P2** en utilisant un certain nombre de ressources : post opératoire (machine), main-d'œuvre et emballage. Ces besoins sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantités limitées (cf. tableau).

	<b>P1</b>	<b>P2</b>	<b>Ressources disponibles</b>
<b>Heure / Machine</b>	3	9	81
<b>Main-d'œuvre</b>	4	5	55
<b>Emballage</b>	2	1	20

Les deux (2) produits **P1** et **P2** rapportent à la vente respectivement des bénéfices de **600** DA et **400** DA par unité.

1. Quelles quantités de produits **P1** et **P2**, doit produire l'usine afin de maximiser le bénéfice total venant de la vente des deux (2) produits ?

**Exercise 4 (7 Points) : Estimated Time 45 Minutes**

Résoudre le programme linéaire suivant (Donner uniquement le premier tableau du simplexe), et expliquer comment on détermine la colonne pivot, la ligne pivot et l'élément pivot.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

(S.C.)

$$x_1 + 2x_2 \leq 10000$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12000$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 15000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

**\*\*\* GOOD LUCK & HAPPY HOLIDAYS ! \*\*\***



**Solution of Exercise 1(5 Points) : Estimated Time 10 Minutes**

Répondre par Vrai au Faux aux expressions suivantes :

	Vrai	faux
6. La Recherche Opérationnelle (RO) peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur résultat possible ou encore au résultat optimal. <b>1</b>	X	
7. Une solution optimale est une solution admissible qui optimise la fonction objectif. <b>1</b>	X	
8. Programme Linéaire (PL) sous forme canonique est un système avec un ensemble d'inéquation et une fonction à optimiser. <b>1</b>	X	
9. La Méthode Graphique est une méthode de résolution d'un Programme Linéaire (PL) ne comportant que trois (3) variables de décision. <b>1</b>		X
10. L'intersection de la ligne pivot et la colonne pivot fait ressortir l'élément pivot. <b>1</b>	X	

**Solution of Exercise 2 (3 Points) : Estimated Time 10 Minutes**

1. Solve the following linear problem graphically :

1. Résoudre graphiquement le programme linéaire suivant :

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

Subject to (s.t.)

Sous contraintes (S.C.)

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

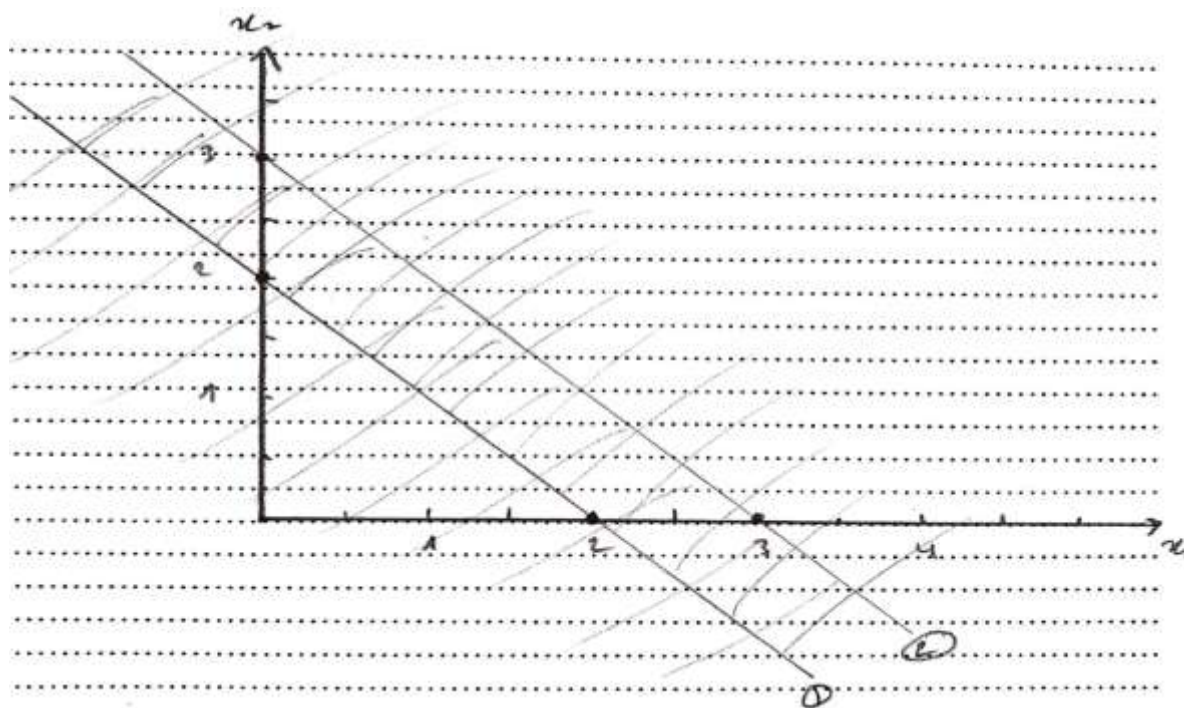
$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$x_1$	0	2
$x_2$	2	0

$x_1$	0	3
$x_2$	3	0

2



According to the graphical representation, there are no solutions. 1

### Solution of Exercise 3 (6 Points) : Estimated Time 30 Minutes

	P1	P2	Ressources disponibles
Heure / Machine	3	9	81
Main-d'œuvre	4	5	55
Emballage	2	1	20

#### ▪ Les variables :

$x_1$  et  $x_2$  sont respectivement les quantités des produits P1 et P2 à fabriquer ( $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ ).

▪ **La fonction objectif :**

Choix de la fonction objectif à maximiser

La fonction objectif correspond au bénéfice total. Elle vaut :

$$F(x_1, x_2) = 600x_1 + 400x_2.$$

Le problème se traduit donc par :

$$\text{Max } Z = 600x_1 + 400x_2 \quad \mathbf{0,25}$$

▪ **Les contraintes :**

Pour La disponibilité de chacune des ressources s'écrit sous la forme suivante :

$$\Rightarrow \quad 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \quad \mathbf{0,25}$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 55 \quad \mathbf{0,25}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20 \quad \mathbf{0,25}$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \quad \mathbf{0,25}$$

En résumé, le problème de production se modélise sous la forme : **1**

$$\Rightarrow \quad \text{Max } Z = 600x_1 + 400x_2$$

$$\text{S/C} \quad 3x_1 + 9x_2 \leq 81$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 55$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

On va premièrement tracer le graphe des inégalités, afin de visualiser les demi-plans limités par les droites des contraintes :

$$\bullet \quad 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \Rightarrow (\Delta_1) : 3x_1 + 9x_2 = 81 \quad \mathbf{0,25}$$

$x_1$	0	27
$x_2$	9	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_1)$  sont : (0 ; 9) et (27 ; 0)

$$\bullet \quad 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \Rightarrow (\Delta_2) : 4x_1 + 5x_2 = 55 \quad \mathbf{0,25}$$

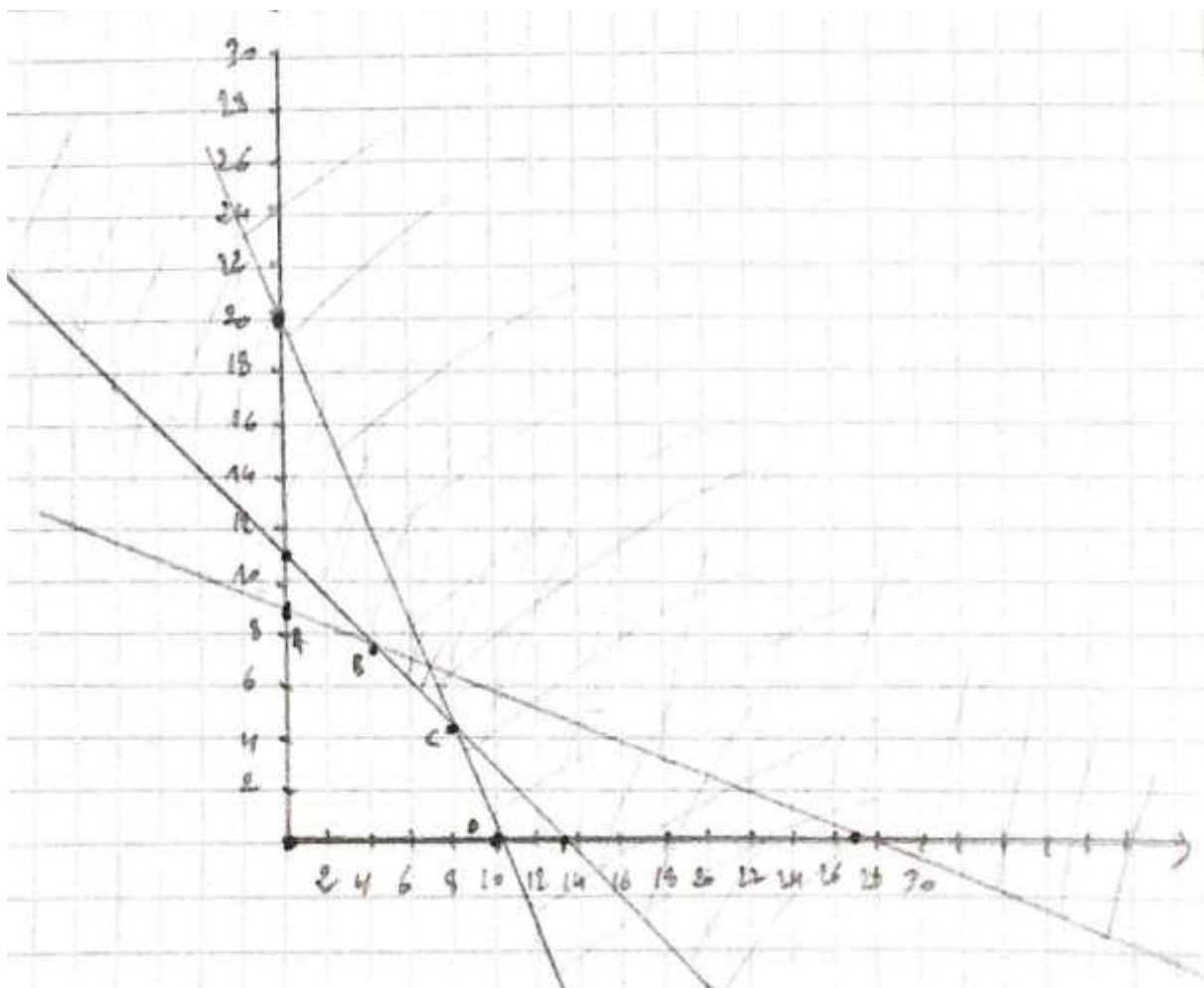
$x_1$	0	13,75
$x_2$	11	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_2)$  sont :  $(0 ; 11)$  et  $(13,75 ; 0)$

•  $2x_1 + x_2 \leq 20 \Rightarrow (\Delta_3) : 2x_1 + x_2 = 20$  **0,25**

$x_1$	0	10
$x_2$	20	0

D'où, les points appartenant à  $(\Delta_3)$  sont :  $(0 ; 20)$  et  $(10 ; 0)$



**Graphe 0,5**

L'aire limitée par les droites est appelé **l'espace des solutions admissibles**.

Les points : A (0 ; 9) ; B (4 ; 8) ; C (8 ; 4) et D (10 ; 0) sont les **solutions possibles**.

On remplace ces points dans la fonction objectif Z, on trouve :

$$\text{Max } Z = 600x_1 + 400x_2$$

$$A (0 ; 9) \Rightarrow Z = (600)(0) + (400)(9) \Rightarrow Z = 3600 \text{ } \mathbf{0,5}$$

$$B (4 ; 8) \Rightarrow Z = (600)(4) + (400)(8) \Rightarrow Z = 5600 \text{ } \mathbf{0,5}$$

$$C (8 ; 4) \Rightarrow Z = (600)(8) + (400)(4) \Rightarrow Z = 6400 \text{ } \mathbf{0,5}$$

$$D (10 ; 0) \Rightarrow Z = (600)(10) + (400)(0) \Rightarrow Z = 6000 \text{ } \mathbf{0,5}$$

$\Rightarrow$  La solution optimale est donc : **C (8 ; 4)**  $\Rightarrow x_1 = 8$  ;  $x_2 = 4$  et **Z = 6400**  $\mathbf{0,5}$

#### **Solution of Exercise 4 (7 Points) : Estimated Time 45 Minutes**

Résoudre le programme linéaire suivant (Donner uniquement le premier tableau du simplexe)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

(S.C.)

$$x_1 + 2x_2 \leq 10000$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12000$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 15000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Transformation des contraintes d'inégalité en contraintes égalité par l'ajout de variables d'écarts, le problème prend la forme suivante :

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 \quad \mathbf{0,5}$$

(S.C.)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10000 \quad \mathbf{0,25}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12000 \quad \mathbf{0,25}$$

$$x_1 + 4x_2 + x_5 = 15000 \quad \mathbf{0,25}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \quad \mathbf{0,25}$$

La forme matricielle :

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 10000 \\ 2 & 3 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 12000 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 15000 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} (3 \ 5 \ 0 \ 0 \\ 0) \end{array}$$

**0,5** La matrice des contraintes

Le vecteur **b** **0,5**

Le vecteur **c** **0,5**

La matrice identité existe donc on peut tracer le tableau initial : **1**

Max	Ci		3	5	0	0	0	
C <sub>B</sub>	B	b	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	bi/ccp
0	X <sub>3</sub>	10000	1	2	1	0	0	10000/2=5000
0	X <sub>4</sub>	12000	2	3	0	1	0	12000/3=4000
0	X <sub>5</sub>	15000	1	<b>4</b>	0	0	1	15000/4= <b>3750</b>
	Zi	0	0	0	0	0	0	
	Ci - Zi		3	<b>5</b>	0	0	0	

▪ La détermination de la colonne pivot : **1**

$\text{Max } (C_i - Z_i) = (3, 5) \Rightarrow \text{Max} = 5 \Rightarrow$  la colonne pivot est la colonne de  $x_2$  ( $x_2$  : représente la variable entrante)

- La détermination de la ligne pivot : **1**

On calcule le rapport  $b_i/c_{ip}$

$\text{Min } b_i/c_{ip} = (5000, 4000, 3750) \Rightarrow \text{Min} = 3750 \Rightarrow$  la ligne pivot est la ligne de  $x_5$  ( $x_5$  : représente la variable sortante)

- La détermination de l'élément pivot : **1**

L'élément pivot : représente l'intersection de la ligne pivot et la colonne pivot.

Ici, l'élément pivot = 4.

~ ... ~ ... ~



## Homework I & II

### Exercise 1 :

Une entreprise fabrique deux produits qu'elle désire vendre aux USA.  
Le produit **A** rapporte **4** euros par kilo et le produit **B** rapporte **6** par kilo.

Ayant des moyens financiers limités, la société ne peut affréter qu'un seul avion.  
Celui-ci ne peut transporter que **50** tonnes et a un volume de **2100** m<sup>3</sup>.

Le produit A à un volume de **30** m<sup>3</sup> par tonne, le produit B à un volume de **70** m<sup>3</sup> par tonne.

Combien de kilos de chaque produit l'entreprise doit-elle mettre dans l'avion afin de maximiser ses gains ?

### Exercise 2 :

Etudier la méthode du simplexe pour trouver la solution optimale de la fonction  $f$  du problème de programmation linéaire suivant :

$$\text{Min } Z = x_1 - 3x_2$$

$$\text{S/C } 3x_1 - 2x_2 \leq 7$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 9$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

# **Conclusion générale**

## **Conclusion générale :**

Le cours débute par une introduction au domaine de la Recherche opérationnelle, en exposant les définitions et les notions de base. L'utilisation de la recherche opérationnelle pour la résolution des problèmes ne fait qu'accroître de jour en jour et devient de plus en plus sollicitée dans plusieurs domaines. Basée principalement sur des connaissances et des outils mathématiques, elle permet de traiter efficacement beaucoup de cas tels que l'optimisation de la productivité, la planification des tournées de véhicules, la gestion des stocks, etc.

Les chapitres exposés de cette façon, c'est à dire enchaînée et suivant un raisonnement cohérent et logique, répondant largement aux principes de la recherche opérationnelle, ont pour but de faciliter à l'étudiant l'assimilation des connaissances proposées et de l'imprégner du raisonnement de la recherche opérationnelle qui est, on ne peut plus, rationnel et scientifique.

# **Bibliographie**

## **Bibliographie :**

1. C. Gueret, C. Prins et M. Sevaux, (2000), Programmation linéaire : 65 problèmes d'optimisation modélisés et résolus avec Visual Xpress, Eyrolles.
2. C. Prins et M. Sevaux, (2011), Programmation linéaire avec Excel : 55 problèmes d'optimisation modélisés pas à pas et résolus avec Excel, Eyrolles.
3. Frédéric MEUNIER, (2017), Introduction à la Recherche Opérationnelle, Université Paris Est, Paris, France, sur le site web : <https://educnet.enpc.fr/file.php/297/CoursROPonts.pdf>.
4. Frédéric MEUNIER, Introduction à la Recherche Opérationnelle, Université Paris Est, Paris, France, P P : 1-169, P : 2, sur le site web : <https://educnet.enpc.fr/file.php/297/CoursROPonts.pdf>.
5. Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2001), Introduction to operations research. McGraw-Hill.
6. Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2014), edition 10. Introduction to operations research. McGraw-Hill. New York.
7. Mariappan, P. (2013). Operations research: An introduction. Pearson.
8. R. J. Vanderbei, (2008), Linear Programming, Foundations and Extensions, Springer-Verlag.
9. Ravindran, A. R. (2008), Operations research applications. CRC Press.
10. Sari Triqui Lamia, Polycopié de cours "Recherche Opérationnelle", département GEE, Faculté de TECHNOLOGIE, Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen, Septembre 2016, P : 33.
11. V. Chvatal, (1983), Linear Programming, W.H. Freeman, New York.