

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : **Commande des systèmes**

Présenté par
Tebbiche Celia
Toubouache Meriem

Thème

Résolution d'un Problème de Commande Optimale en Utilisant l'Identité de Beltrami : Application au Remplissage d'un Bac de Stockage

Mémoire soutenu publiquement le 12/07/ 2016 devant le jury composé de :

M Rabah MELLAH

MCA, UMMTO, Président

M Ahmed MAIDI

Professeur, UMMTO, Encadreur

M Redouane KARA

MCA, UMMTO, Examineur

M Mohand ou achour TOUAT

MCB, UMMTO, Examineur

Remerciements



Nous remercions ALLAH le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur M. Ahmad Maidi pour son entière disposition, ces orientations éclairées, sa patience et sa gentillesse.

Nos remerciements s'adressent également à tous les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger notre travail.

Nos sentiments de profonde gratitude vont à nos professeurs qui tout au long des années d'études nous ont transmis leur savoir sans réserve.

Nos remerciements les plus chaleureux vont à nos chers parents pour leur encouragement, leur patience et leur grand soutien durant toutes ses années d'études.

Enfin, on tient à remercier tous nos amis et collègues pour leur soutien moral tout au long de cette préparation.

Dédicaces

À la mémoire de mes grands parents

Puisse dieu les accueillir dans son vaste paradis

À celui qui a garni mes chemins avec force et lumière... mon très cher père

À la plus belle perle du monde... ma tendre mère

À mes sœurs Ghnima, Dihia, Yasmina

À mes frères Faride et Achour

À mes chères tantes Wahiba et Samira

Je leurs souhaite tout le succès... tout le bonheur

À toute ma famille pour l'amour et le respect qu'ils m'ont toujours accordé

À ma chère binôme pour la sœur agréable qu'elle était et qu'elle restera

À tous mes amis spécialement Djamel, Hocine et sa fiancé Samia, Nedjma, Imane, Zohra, Yasmine Ihssene et Hassiba

Pour une sincérité si merveilleuse... jamais oubliable, je leurs souhaite plein de réussite et de bonheur.

À toute personne

Qui m'a aidé à franchir un horizon dans ma vie...

À aimablement

Je dédie ce modeste travail

Tefia

Dédicaces

À mes grands-parents et Mon très cher oncle Vava Amar

Puisse dieu les accueillir dans son vaste paradis

À celui qui a garni mes chemins avec force et lumière... mon très cher père

À la plus belle perle du monde... ma tendre mère

À mes petites sœurs Ouazna et Alice

À mes cousines Malika, Nadia, souade, Hassiba

À mes chers cousins Omar, Dahmane, Rabah

Je leurs souhaite tout le succès... tout le bonheur

À toute ma famille pour l'amour et le respect qu'ils m'ont toujours accordé

À ma chère binôme pour la sœur agréable qu'elle était et qu'elle restera

*À tous mes amis spécialement Abdenour, Hassiba, Imane, Nedjma, Yasmine
Ihssene, Samia et Zahia*

*Pour une sincérité si merveilleuse... jamais oubliable, je leurs souhaite plein de réussite
et de bonheur.*

À toute personne

Qui m'a aidé à franchir un horizon dans ma vie...

À aimablement

Je dédie ce modeste travail

Meriem

liste des figures

Chapitre I :

- + Figure 1.1 : La trajectoire d'un système dynamique à l'état initiale et à l'état final.
- + Figure 1.2 : Fonction de $x(t)$ sur l'horizon de commande $[t_0, t_f]$.
- + Figure 1.3 : Circuit électrique.
- + Figure 1.4 : Trajectoire optimale (principe de Bellman).

Chapitre III :

- + Figure 3.1 : Evolution de $x(t)$ cas d'Euler Lagrange.
- + Figure 3.2 : Evolution de $x(t)$ cas de Beltrami.
- + Figure 3.3 : Evolution de $x(t)$ avec les deux cas.

Chapitre IV :

- + Figure 4.1 : Elément d'un réservoir en trois dimensions.
- + Figure 4.2 : Schéma synoptique d'un bac de stockage.
- + Figure 4.3 : Evolution du niveau du liquide dans le bac de stockage avec la méthode d'Euler Lagrange.
- + Figure 4.4 : Evolution de la commande $u(t)$ avec la méthode d'Euler Lagrange.
- + Figure 4.5 : Evolution du niveau du liquide du débit de l'entrée dans le bac de stockage avec le cas de la méthode Beltrami.
- + Figure 4.6 : Evolution du débit de l'entrée dans le cas de la méthode Beltrami.
- + Figure 4.7 : Evolution du niveau du liquide dans le bac de stockage avec les deux méthodes.
- + Figure 4.8 : Evolution du débit de l'entrée dans le bas de stockage avec les deux méthodes.

Liste des symboles

t : Variable temps.

t_0 : Instant initial.

t_f : Instant final.

T : durée de l'horizon.

n : Nombre d'état.

m : Nombre de commande.

v : Nombre de sortie.

$x(t) \in \mathcal{R}^n$: vecteur d'état.

x_0 : état initial.

x_f : état final.

$x^*(t)$: Trajectoire optimale.

$u(t) \in \mathcal{R}^m$: Vecteur de commande.

$u^*(t)$: Commande optimale.

q : Contrainte instantanée.

p : Contrainte intégrale.

n_g : Nombre de contrainte.

J : Fonction objectif (ou critère de contrôle).

J^* : Cout optimal.

M_0, M_1 : Variétés de \mathcal{R}^n .

I : Intervalle de \mathcal{R} .

\mathcal{R} : Ensemble des réels.

f : Fonction décrivant la dynamique des systèmes.

ψ : partie terminale

Liste des symboles

$e(t)$: erreur

$x^d(t)$: état désiré.

r, Q : Matrices symétrique définie positive.

s : Energie minimal.

R : Résistance électrique.

i : Intensité du courant électrique

L : Self électrique.

I_C : Courant de condensateur.

I_L : Courant de la self.

c : Condensateur.

V_C : tension de condensateur.

H : Hamiltonien.

$\nabla_{u(t)}$: variation par rapport à $u(t)$

$\nabla_{\lambda(t)}$: variation par rapport à $\lambda(t)$

$\nabla_{x(t)}$: variation par rapport à $x(t)$

λ : variable adjointe.

δx : variation de la fonction x .

ΔJ : accroissement de la fonctionnelle J .

δJ : première variation linéaire en $\delta x(t)$.

Ω : espace vectoriel.

D^G : condition de stationnarité.

k : constante d'intégration.

min : minimum.

Liste des symboles

max : maximum.

Q_s : Le débit de vidage.

C_v : coefficient dépendant de la vanne.

z : la pression au fond du bac.

z_a : la pression ambiante à l'extérieur du bac.

ρ : la masse volumique du liquide.

g : l'accélération de la gravité

g_c : facteur de conversion.

Q_e : le débit d'alimentation.

S : la section du bac.

h : la hauteur du bac.

V : le volume du bac.

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur la commande optimale.	
I.1. Introduction	3
I.2. Définition de la commande optimale	3
I.3. Position du problème de la commande optimale	4
I.4. Formulation d'un problème de commande optimale.....	4
I.4.1. Modèle mathématique du système à commander	4
I.4.2. Conditions terminales	5
I.4.3. Contraintes physiques	6
I.4.3.1. Contraintes instantanées.....	6
I.4.3.2. Contraintes intégrales.....	7
I.4.4. Critère à optimiser.....	7
I.4.4.1. Poursuite	9
I.4.4.2. Régulation	10
I.4.4.3. Energie minimale	10
I.4.4.4. Commande à temps minimal	11
I.4.4.5. Commande terminale	11
I.5. Exemple de modélisation.....	11
I.6. Méthode de résolution d'un problème de commande optimale.....	14
I.6.1. Principe du minimum de Pontriaguine	14
I.6.2. Programmation dynamique	15
I.6.2.1. Principe de Bellman	16
I.6.3. Principe de calcul des variations (Euler-Lagrange)	17
Conclusion	17

Sommaire

Chapitre II : Résolution d'un problème optimale par le calcul des variations

II.1. Introduction	18
II.2. Définitions	18
II.2.1. Définition1	18
II.2.2. Accroissement d'une fonctionnelle	19
II.3. Euler- Lagrange (Méthode directe)	20
II.4. Extremum d'une fonctionnelle dépendant d'une fonction numérique	21
II.4.1. Problème 1 : état initial et état final fixe	21
II.4.2. Problème2 : état final libre.....	23
II.5. Extrémum d'une fonctionnelle dépendant de plusieurs fonctions	24
II.5.1. Problème1 : état initial et état final fixe	25
II.5.2. Problème2 : état final et instant final libre.....	26
II.6. Méthode de Lagrange (Méthode indirecte)	27
II.7. Exemple	28
Conclusion	32

Chapitre III : Simplification de l'équation d'Euler-Lagrange basée sur l'identité de Beltrami.

III.1. Introduction.....	33
III.2. Identité de Beltrami	33
III.2.1. Définition	33
III.2.2. Dérivation de l'identité de Beltrami.....	33
III.3. Exemple de modélisation.....	35
III.4. Avantages et inconvénients de la méthode de Beltrami	40
Conclusion	41

Chapitre IV : Application au remplissage d'un bac de stockage.

IV.1. Introduction	42
IV.2. Réservoirs de stockage.....	42
IV.2.1. Définitions	43
IV.2.2. Equipement d'un bac	43

Sommaire

IV.2.3. Accessoire d'un bac	43
IV.2. 3.1. Accessoires de lutte contre la surpression	43
IV.2.3.2. Accessoires de lutte contre l'incendie	43
IV.2.3.3. Accessoires de mesure de niveau de produits	44
IV.2.3.4. Accessoires de visite et nettoyage.....	44
IV.2.3.5. Accessoires de réchauffage.....	44
IV.3. Equipement et accessoires des sphères	44
IV.3.1. Définition.....	44
IV.3.2. Equipements	44
IV.4. Classifications de réservoirs	44
IV.4.1. Classifications des réservoirs selon le critère de pression	45
IV.4.2. Classifications des réservoirs selon la nature des toits	46
IV.4.3. Classifications des réservoirs selon la capacité des réservoirs	46
IV.5. Opérations sur les réservoirs de stockage.....	47
IV.5.1. Définitions et terminologie jaugeage	47
IV.5.2. Obligations tenant aux installations	47
IV.5.2.1. Aménagement des installations de stockage	47
IV.5.2.2. Jaugeage des réservoirs	48
IV.5.2.3. Description des réservoirs	48
IV.5.2.3.1. Fond des récipients	48
IV.5.2.3.2. Toit des récipients	48
IV.5.2.3.3. Orifices de pige	48
IV.5.3. Obligations tenant aux instruments de mesure	49
IV.5.3.1. Compteurs et jaugeurs automatiques	49
IV.5.3.2. Autres instruments de mesure.....	49
IV.6. Modélisation d'un bac de stockage d'un fluide	49
IV.6.1. Système à modéliser.....	50
IV.7. Problème de commande optimale.....	52
IV.8. Calcul de la commande optimale.....	53
Conclusion	59
Conclusion générale	60
Bibliographie	

Sommaire

Introduction générale

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation. Pour un système dynamique dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le *XIX^{ème}* siècle avec le calcul des variations. Une des grandes applications de la commande optimale a été l'application au lanceur Apollo dans les années 1960. Depuis, es systèmes à commander devenant de plus en plus complexes, les lois de commande deviennent elles-mêmes complexes et parfois difficiles à mettre en œuvre [6]-[8].

L'objectif d'un problème de commande optimale est d'amener le système d'un état initial donné à un état final en respectant certaines contraintes tout en minimisant un critère de performance. Une voiture sur laquelle on agit avec les pédales d'accélérateur et de frein, et qu'on guide avec le volant est un exemple de système dynamique commander pour lequel on peut imposer de faire un itinéraire en temps minimal. L'objectif peut être aussi d'atteindre une ville en temps ou en énergie minimale. Un autre exemple concerne la maximisation de rendement d'un processus industriel par exemple. Pour cela on joue à la fois sur les paramètres indépendants du temps et sur les commandes qui sont aussi dépendent du temps.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour la résolution d'un problème de commande optimale. Parmi ces méthodes on retrouve l'identité de Beltrami. Cette dernière permet de simplifier la résolution d'un problème de commande optimale suivant l'approche du calcul des variations.

L'objectif de ce travail est d'étudier l'identité de Beltrami et de l'appliquer pour la synthèse d'une loi de commande optimale pour un bac de stockage.

Notre travail est subdivisé en quatre chapitres dont les contenus sont comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur la commande optimale portant sur la définition et la formulation mathématique de commande optimale.

Introduction générale

Le second chapitre aborde l'utilisation du calcul des variations pour la résolution des problèmes de la commande optimale. Cette approche conduit à des conditions d'optimalité données par l'équation d'Euler-Lagrange.

Le troisième chapitre présente l'identité de Beltrami illustré par un exemple d'application.

Le dernier chapitre Présente une application de l'identité de Beltrami pour la conception d'une loi de commande optimale pour le remplissage d'un bac de stockage.

La fin de mémoire est réservée à une conclusion sur l'ensemble du travail.

I.1. Introduction :

Le problème de la commande optimale a été développé pour guider un système vers un objectif de manière optimale, pour atteindre un optimum de production, bien améliorer et obtenir le meilleur, selon un ensemble de critères, d'une chose ou d'une situation. Cette théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lequel on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant certain critère, les systèmes abordés sont multiples : système différentiels, système discret, système avec bruit, système avec retard, etc. Leurs origines sont très diverses : mécanique, électrique, électronique, biologique, chimique et économique. L'objectif peut être de stabiliser le système pour rendre insensible à certain perturbation (stabilisation) ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimale, ou commande optimale).

Dans ce chapitre, nous abordons la formulation générale d'un problème de la commande optimale et nous présentons les différentes méthodes pour résoudre un problème de la commande optimale et nous terminons en exposant un exemple avec sa solution.

I.2. Définition de la Commande optimale :

La commande optimale consiste à chercher une commande admissible $u^*(t)$ qui permet de transférer le système d'un état initial à l'état final tout en respectant des contraintes physiques et en minimisant des fonctions objectifs (critères ou indices de performances).

Le problème de la commande optimale d'un système est formulé en précisant les éléments suivants :

- ✓ Modèle du système à commander.
- ✓ Condition terminal (états initiales et états finales).
- ✓ Contraintes.
- ✓ Critère de performance à optimiser (minimiser ou maximiser).

Pour un système dynamique, on cherche une commande permettant de transférer le système d'un état initial vers un état final.

La commande optimale est en général soumise à diverse contraintes liées à sa réalisation (accélération limitée, vitesse de montée en puissance bornée) [9].

I.3. Position du problème de la commande optimale :

Le système à étudier est décrit dans l'espace d'états sous la forme :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad \text{I. 1}$$

On définit ainsi des ensembles admissibles x_{ad} , u_{ad} , t_{ad} , non vides pour toutes ces variables :

$$x(t) \in x_{ad} \quad \text{I. 2}$$

$$u(t) \in u_{ad} \quad \text{I. 3}$$

$$t \in t_{ad} \quad \text{I. 4}$$

I.4. Formulation d'un problème de commande optimale :

Le problème de la commande optimale sans contrainte sur l'état avec l'hypothèse de différentiabilité habituelles se complique considérablement en cas de contrainte sur l'état.

I.4.1. Modèle Mathématique du système à commander :

La formulation d'un problème de commande optimale exige une description mathématique du processus à contrôler, des contraintes physiques à respecter et la précision du critère de performance. Après la modélisation, on obtient un système comportant beaucoup de variable et de paramètres.

Les variables nommées variables d'états seront notées : $x_i, i = 1, \dots, n$. Le système évolue dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de t : $x_i(t), i = 1, \dots, n$ où t désigne le temps défini dans un intervalle $[0, t_f]$. Les n variable d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre ; elles sont sous la forme :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad \text{I. 5}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \quad \text{I. 6}$$

$$\text{Avec : } \begin{array}{ll} x \in \mathcal{R}^n & t \in \mathcal{R}^t \\ u \in \mathcal{R}^m & y \in \mathcal{R}^p \end{array}$$

Où f est un vecteur de n composantes $f_i \quad i = 1 \dots, n$. Les variables de commandes seront notées $u_j(t), j = 1 \dots, m$. Elle doit être intégrables par rapport à t .

n : Nombre de l'état.

m : Nombre de commande.

v : Nombre de sortie.

- Dans le cas linéaire on a :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

A : Matrice d'état.

B : Matrice de commande.

C : Matrice de sortie.

D : Matrice De transmission.

I.4.2. Conditions terminales :

Soit la trajectoire d'un système dynamique de la **Figure 1.1** :

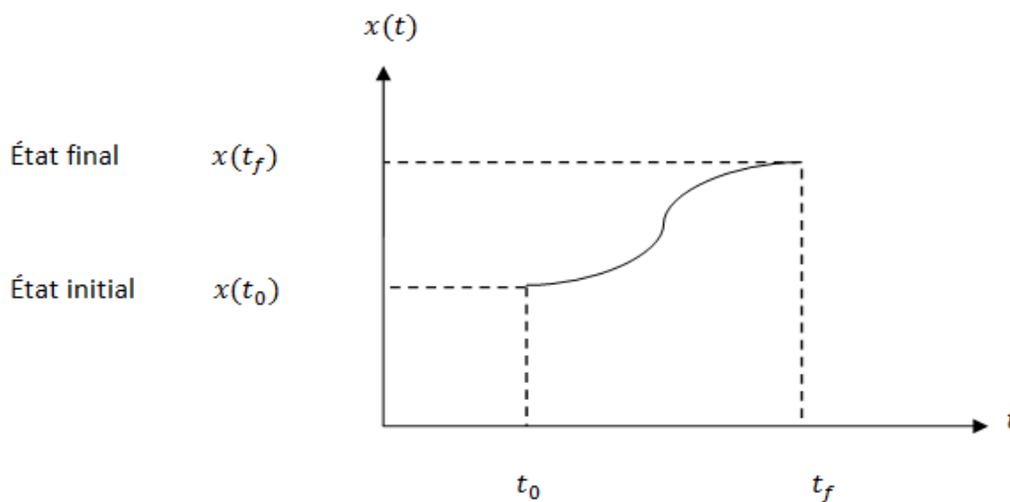


Figure 1.1 : La trajectoire d'un système dynamique à l'état initial et à l'état final

Les conditions terminales sont l'état initial et l'état final

a. État initial :

C'est l'état du système à l'instant t_0 où on commence à agir sur le processus. Il caractérise les valeurs des variables d'états à l'instant initial t_0 , elle est notée

$$x(t_0) = x_0 .$$

Comme il est indiqué dans la **Figure 1.1**.

b. État final :

C'est l'état du système à l'instant t_f après l'action de la commande. Il caractérise les valeurs des variables d'états à l'instant final t_f , Il est noté : $x_f = x_{t_f}$

Comme il est indiqué dans la **Figure 1.1[1]**.

▪ Remarque 1.1 :

- L'état final x_{t_f} peut-être : imposé (spécifie) ou libre $x(t_f) = ?$
 Imposé : c'est-à-dire $x(t_f)$ est connu
 Libre : C'est-à-dire une ou plusieurs variables d'états sont inconnues.
- L'intervalle du temps $[t_0, t_f]$ est appelé horizon de commande et le temps final peut être imposé ou libre.
- Lorsque t_f est fixe (imposé), on parle d'un horizon de commande fini.
- Lorsque t_f est tend vers ∞ , on parle d'un horizon de commande infini. ■

I.4.3. Contraintes physiques :

Généralement les contraintes physiques expriment des limitations physiques (un réservoir de carburant a un volume bien déterminé, une vanne pneumatique à une pression de commande limitée, une pompe hydraulique à une puissance de pompage limite ...).

On distingue deux types de contraintes :

I.4.3.1 . Contraintes instantanées :

Ces contraintes doivent être imposées et vérifiées à chaque instant. Elles sont exprimées comme suit :

$$g_i(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad i = 1 \dots, q \quad \text{I.7}$$

$$g \in \mathcal{R}^{ng}$$

ng : Nombre de contraintes

➤ **Exemple 1.1 :**

Pour protéger l'actionneur, on doit imposer des contraintes du type :

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq u_{max} \\ -u_{max} &\leq u \leq u_{max} \\ u - u_{max} &\leq 0 \\ -(u + u_{max}) &\leq 0 \end{aligned}$$

I.4.3.2 . Contraintes intégrales :

Ces contraintes doivent être respectées le long de l'horizon de commande c'est-à-dire $t_0 \rightarrow t_f$

Elles s'expriment comme suit :

$$\int_{t_0}^{t_f} g_i(x(t), u(t), t) dt \leq 0 \quad i = 1, \dots, p \quad \text{I. 8}$$

$$g_i \in \mathcal{R}^{ng}$$

Où ng est le nombre de contraintes

I.4.4. Critère à optimiser :

Le critère de performance exprime les objectifs à optimiser (poursuite, régulation, réaction en temps minimal, minimisation de l'énergie consommée)

Habituellement le critère de performance est défini sur l'horizon de commande et à l'instant t_f . Mathématiquement, le critère est donné comme suit :

$$\mathcal{J}(u(t)) = \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt \quad \text{I. 9}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad \text{I. 10}$$

$$x(0) = x_0 \in M_0 \quad \text{I. 11}$$

$$x(t_f) = x_1 \in M_1 \quad \text{I. 12}$$

$$u \in U, t \in I = [0, t_f] \quad \text{I. 13}$$

Où M_0, M_1 sont deux variétés de \mathcal{R}^n , I un intervalle de \mathcal{R} , $x(0) = x_0$ est la position initiale du système (I. 10) $x(t_f)$ est sa position terminale. En pratique, l'état du système peut représenter à la fois la vitesse, la position, la température et d'autre paramètre mesurable, U est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans $u \in \mathcal{R}^m$. Le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 \in M_0$ à une autre position $x_1 \in M_1$ où M_0 est l'ensemble de départ, et M_1 l'ensemble d'arrivée tout en optimisant la fonctionnelle Suivante :

$$J(u(t)) = \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt \quad \text{I. 14}$$

On appelle $J(u(t))$ le coût du contrôle ou fonction objectif. Cette fonctionnelle comporte deux parties : $\psi(x(t_f), t_f)$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final t_f , il a son importance lorsque t_f est libre, sinon il est constant. Le second terme intervenant dans la fonction objectif $\int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution définie par variables d'états. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle de chaque commande sur l'intervalle T .

- ✓ La partie terminale exprime les objectifs à optimiser à l'instant final
- ✓ La partie intégrale exprime les objectifs sur l'horizon de commande $[t_0, t_f]$.

▪ **Remarque 1.3 :**

Le critère à optimiser doit correspondre à l'expression d'un choix à étudier avec soin. Il peut être lié aux valeurs de l'état et de la commande pris à des instants donnés, lié à une intégrale d'une fonction de ces variables sur intervalle de temps fixé ou non, ou les deux à la fois.

L'existence d'une commande satisfaisant un objectif donné suppose que le processus soit commandable, hypothèse qui sera faite implicitement de façon systématique. ■

❖ **Différent type de problème de commande optimale :**

Il existe trois types de problèmes de commande optimale

➤ **Problème de Lagrange :**

Pour ce problème, le critère est donné comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt \quad \text{I. 15}$$

Où les contrôles $u(t)$ sont des fonctions définies de $[t_0, t_f]$ dans \mathcal{R} .

➤ **Problème de Mayer :**

Ici, le critère à minimiser est différent de celui de l'équation précédente. Il dépend uniquement la valeur terminale de l'état de contrôle du système.

On définit critère à optimiser comme suit :

$$J(u(t)) = \psi(x(t_f), t_f) \quad \text{I. 16}$$

➤ **Problème de Bolza (Mayer-Lagrange) :**

Le problème de Bolza regroupe les deux précédentes formulations à savoir les formulations de Lagrange et de Mayer.

On définit le critère comme suit :

$$J(u(t)) = \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt \quad \text{I. 17}$$

I.4.4.1 . Poursuite :

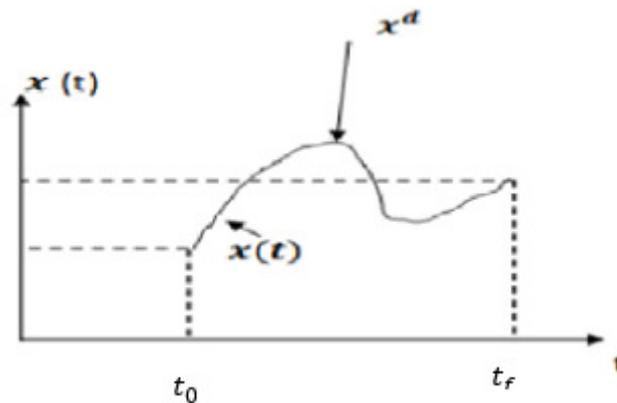


Figure 1.2 : Fonction de $x(t)$ sur l'horizon de commande $[t_0, t_f]$

$$e(t) = x^d - x(t) \quad \text{I. 18}$$

$$S = \int_{t_0}^{t_f} [x^d(t) - x(t)]^2 dt \quad \text{I. 19}$$

Dans le cas de la poursuite, on s'intéresse à avoir :

$$x^d(t) - x(t) \rightarrow 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

Cet objectif s'exprime comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [x^d(t), x(t)]^T Q [x^d(t) - x(t)] dt \quad \text{I. 20}$$

Avec $Q \geq 0$ et généralement, on prend la matrice de pondération

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{12} & 0 \\ 0 & 0 & q_{nn} \end{bmatrix}$$

I.4.4.2 . Régulation :

C'est un cas de la poursuite avec $x^d = 0$. Dans ce cas l'équation **I.20** devient :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [x(t)]^T Q [x(t)] dt \quad \text{I. 21}$$

I.4.4.3 . Energie minimale :

L'objectif est de minimiser l'énergie consommée lors de la commande.

Mathématiquement, on minimise les amplitudes de la commande :

$$s = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \quad \text{I. 22}$$

Le critère s'exprime comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [u(t)]^T r [u(t)] dt \quad r > 0 \quad \text{I. 23}$$

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{12} & 0 \\ 0 & 0 & r_{nn} \end{bmatrix}$$

I.4.4.4 . Commande à temps minimal :

L'objectif est de minimiser l'horizon de commande $T = t_f - t_0$. Ce critère, on le rencontre dans les problèmes de sécurité et médicale ...)

Le critère s'écrit comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad \text{I. 24}$$

I.4.4.5 . Commande terminale :

Dans ce cas, on s'intéresse à minimiser une certaine fonction à l'instant final [1].

➤ Exemple 1.2 :

-Un avion doit se positionner sur la piste d'atterrissage.

-on ramène l'organe terminal d'un rebot à une position bien déterminée.

Mathématiquement, le critère prend la forme suivante :

$$J(u(t)) = \psi(x(t_f), t_f) \quad \text{I. 25}$$

I.5. Exemple de modélisation :

Soit le circuit électrique suivant de la Figure 1.2 :

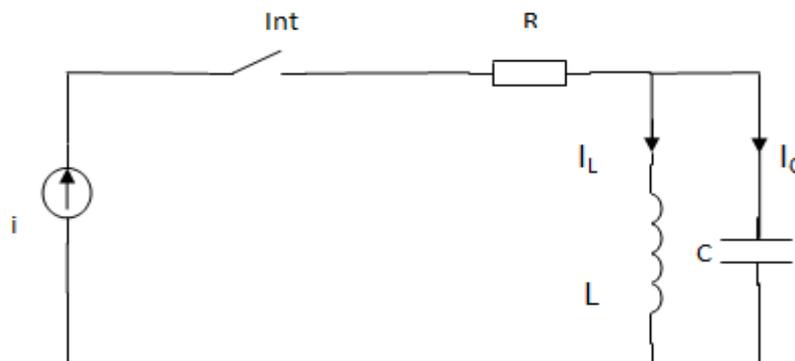


Figure 1.3 : Circuit électrique.

On suppose que le condensateur C est déchargé. A l'instant $t=0$, on ferme l'interrupteur Int , et l'objectif est de déterminer un profil pour $i(t)$ de manière à minimiser les pertes par effet Joule dans la résistance R, toute en protégeant les éléments des circuits, c'est-à-dire le courant ne doit pas dépasser 2A.

1- Modèle mathématique :

Les états sont : I_L et V_c

V_c : Tension du condensateur.

I_L : Courant de la self

Commande : i

Les lois de Kirchoff conduisent aux équations suivantes :

$$i = I_L + I_c \quad \dots (1)$$

$$-L \frac{dI_L}{dt} + V_c = 0 \Rightarrow \frac{dI_L}{dt} = \frac{1}{L} V_c$$

$$V_c = \frac{1}{c} \int I_c dt$$

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{c} I_c \quad \dots (2)$$

D'après (1), on a : $I_c = i - I_L$

On remplace dans (2), On obtient :

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{c} (i - I_L)$$

En introduisant les notions suivantes :

$$I_L = x_1, V_c = x_2, i = u$$

On obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{c} x_1(t) + \frac{1}{L} u(t) \end{cases}$$

2- Conditions terminales :

- Etat initial :

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{interrupteur ouvert} \\ \rightarrow \text{condensateur déchargé} \end{array}$$

Pour l'état final $x(t_f)$, on a un état libre (aucune condition sur $I_L(t_f)$ et $V_c(t_f)$)

3- Contrainte :

Le courant i ne doit pas dépasser $2A$.

$$i(t) \leq 2, \forall t$$

$$u(t) - 2 \leq 0$$

4- Critère à optimiser :

Minimiser l'énergie consommée par effet Joule :

$$E = \int_0^{t_f} R i^2 dt = \int_0^{t_f} R u^2(t) dt$$

$$J(u(t)) = \int_0^{t_f} R u^2(t) dt$$

En résumé :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{t_f} R u^2(t) dt$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} x_2$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{c} x_1(t) + \frac{1}{L} u(t)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(t_f) \text{ est libre}$$

$$u(t) - 2 \leq 0$$

I.6. Méthode de résolution d'un problème de commande optimale :

Il existe différentes méthodes pour résoudre un problème de commande optimale, chacune a ses avantages et ses inconvénients. Le choix de la méthode dépend du problème considéré. Généralement, les problèmes de commande optimale sont résolus par les méthodes suivantes :

- ❖ Calcul des variations (équation d'Euler Lagrange).
- ❖ Principe du minimum de Pontriaguine.
- ❖ Programmation dynamique (principe de Bellman).

I.6.1. Principe du minimum de Pontriaguine :

Le principe de minimum est la méthode la plus utilisée pour résoudre un problème de commande optimale.

Le problème de commande optimale est représenté comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \min \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt \quad \text{I.26}$$

Sujet à :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad \text{I. 27}$$

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{I. 28}$$

$$x(t_f) = x_f \text{ Où libre} \quad \text{I. 29}$$

Où :

$x(t) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état

$u(t) \in \mathcal{R}^m$ est le vecteur de commande

$J(x(t), u(t), t)$ est le critère à minimiser [2].

Résumé de la méthode :

Pour déterminer la commande optimale en utilisant le principe du minimum on suit les étapes suivantes :

- Ecrire la fonction d'Hamilton :

$$H(x, u, \lambda, t) = Q(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad \text{I. 30}$$

- Déterminer l'expression de la commande optimale en calculant :

$$\nabla u(t) H(x, u, \lambda, t) = 0 \quad \text{I. 31}$$

$$u^*(t) = f(x, \lambda, t) \quad \text{I. 32}$$

- Ecrire l'expression d'Hamiltonien optimal :

$$H^*(x, \lambda, t) = H(x, u, \lambda, t) \quad \text{I. 33}$$

- Ecrire les équations d'Hamilton :

$$\dot{x}(t) = \nabla_{\lambda(t)} H^*(x, \lambda, t) \quad \text{I. 34}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_{x(t)} H^*(x, \lambda, t) \quad \text{I. 35}$$

- Résoudre les équations d'Hamilton en considérant les conditions aux limites suivantes :

-Etat final imposé :

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{I. 36}$$

$$x(t_f) = x_f \quad \text{I. 37}$$

-Etat final libre

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{I. 38}$$

$$\lambda(t_f) = \nabla_{x(t_f)} \psi(x(t_f), t_f) \quad \text{I. 39}$$

I.6.2. Programmation dynamique :

La programmation dynamique s'appuie sur un principe simple, appelé le *principe d'optimalité de Bellman* : toute solution optimale s'appuie elle-même sur des problèmes résolus localement de façon optimale. Concrètement, cela signifie que l'on peut déduire une ou la solution optimale d'un problème en combinant des solutions optimales d'une série de sous-problèmes. Les solutions des problèmes sont calculées de manière ascendante, c'est-à-dire qu'on débute par les solutions des sous-problèmes les plus petits pour ensuite déduire progressivement les solutions de l'ensemble. Le développement d'un algorithme de programmation dynamique peut être découpé en quatre étapes.

1. Caractériser la structure d'une solution optimale.
2. Définir (souvent de manière récursive) la valeur d'une solution optimale.
3. Calculer la valeur d'une solution optimale de manière ascendante.
4. Construire une solution optimale à partir des informations calculées.

I.6.2.1. Principe de Bellman :

Considérant le problème optimal suivant :

$$\min_{u(t)} J(x, u, t) = \min \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt \quad \text{I.}$$

40

Sujet à :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad \text{I. 41}$$

Un chemin optimal est formé de sous-chemins optimaux : Si (C) est un chemin optimal allant de A à B et si C appartient à (C) alors les sous-chemins de (C) allant de A à C et de C à B sont optimaux. Comme la montre la figure 1.2

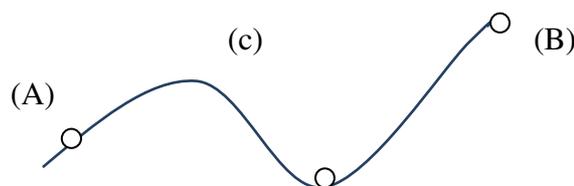


Figure 1.4 : Trajectoire optimale (principe de Bellman)

- Ce principe appliqué de façon séquentielle fournit des formules récursives pour la recherche des chemins optimaux.

➤ **Équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :**

C'est une équation aux dérivées partielles et résulte de la méthode de la programmation dynamique dans le cas continu. Elle fournit les conditions suffisantes d'optimalité sur un espace d'état entier. Cette équation est donnée comme suit :

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t}(x, t) = \min \left\{ g(x, u, \lambda, t) + \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x^T} g(x, u, \lambda, t) \right\} \quad \text{I. 42}$$

$$u \in [u_{\min}, u_{\max}] \quad \text{I. 43}$$

$$\lambda = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \quad \text{I. 44}$$

I.6.3. Principe de calcul des variations (équation d'Euler-Lagrange) :

L'équation d'Euler –Lagrange, bien connue en mécanique, peut être retrouvée à partir du principe du minimum.

Le calcul des variations représente une théorie pour l'optimisation des trajectoires et les problèmes fondamentaux du calcul des variations peuvent être écrits comme suit :

$$\min_{x(t)} \int_{t_0}^{t_f} g(\dot{x}, x, t) dx \quad \text{I. 45}$$

Pour résoudre ce problème, on utilise l'équation d'Euler-Lagrange. L'application du calcul des variations pour le calcul de la commande optimale sera détaillée dans le chapitre 2.

Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présentés des généralités sur la commande optimale. Nous avons commencé par la définition d'un problème de commande optimale, puis on a présenté la formulation mathématique de ce dernier en précisant les différentes parties du problème. Nous avons aussi donné une idée sur les différentes méthodes utilisées pour la résolution d'un problème de commande optimale. Parmi ces méthodes, l'équation d'Euler-Lagrange est l'une des méthodes les plus utilisées. Cette dernière fera l'objet du chapitre suivant.

II.1 . Introduction :

En mathématiques, et plus précisément en analyse fonctionnelle, le calcul des variations (ou calcul vibrationnel) est un ensemble de méthodes permettant de minimiser une fonctionnelle. Celle-ci, qui est à valeurs réelles, dépend d'une fonction qui est l'inconnue du problème. Il s'agit donc d'un problème d'optimisation dans un espace fonctionnel, de dimension infinie. Le calcul des variations s'est développé depuis le milieu du dix-huitième siècle jusqu'aujourd'hui. Son dernier avatar est la théorie de la commande optimale, datant de la fin des années 1950.

Le calcul des variations a été également utilisé pour la résolution des problèmes d'optimisation dont la solution possède une certaine régularité, (par exemple classe 1-continuité). Le calcul des variations dans le sens le plus large concerne l'étude des problèmes d'extremum impliquant des fonctionnelles.

Ce chapitre est consacré à des généralités sur le calcul des variations. Nous allons introduire l'équation d'Euler-Lagrange et ces conditions aux limites. L'étude est limitée aux problèmes avec une condition limite à droite fixe ou libre.

II.2 . Définitions :**II.2.1. Définition 1 :**

Le problème de calcul de variation. Consiste à trouver le minimum d'une fonctionnelle J sur V qui est une application de V dans \mathcal{R}

$$J: V \longrightarrow \mathcal{R}$$

Où : V est un espace vectoriel

- **Exemple 2.1 :**

Soit x une fonction continue définie sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ l'application J définie par :

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x(t) dt \quad \text{II. 1}$$

Est une fonctionnelle sur l'espace des fonctions continues sur $[t_0, t_f]$.

II.2.2. Définition 2 : Accroissement d'une fonctionnelle

Si x et $x + \delta x$ sont des fonctions pour lesquelles la fonctionnelle J est définie, alors

l'accroissement de J (ou la variation de J) noté ΔJ , est :

$$\Delta J = J(x + \delta x) - J(x) \quad \text{II. 2}$$

Avec :
$$\delta x(t) = x(t + \delta t) - x(t) \quad \text{II. 3}$$

Où : δx est appelé la variation de la fonction x .

II.2.3. Définitions 3 :

On définit l'accroissement d'une fonctionnelle comme suit :

$$\Delta J(x(t), \delta x(t)) = \delta J(x(t), \delta x(t)) + g(x(t), \delta x(t)) \|\delta x(t)\| \quad \text{II. 4}$$

Où : δJ représente la première variation linéaire en $\delta x(t)$.

Ainsi, l'accroissement $\Delta J(x(t), \delta x(t))$ de la fonctionnelle dépend de la fonction $x(t)$ et de sa variation $\delta x(t)$.

➤ Remarque 2.1 :

Si $\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} g(x, \delta x) = 0$, alors J est dite différentiable en x et δJ est la variation de J évaluée pour la fonction x . ■ [4].

▪ Exemple 2.2 :

Soit x une fonction réelle continue sur $[0,1]$ et J la fonctionnelle définie par :

$$J(x) = \int_0^1 x^2(t) + x(t) dt \quad \text{II. 5}$$

Déterminons la variation de J :

$$\begin{aligned} \Delta J(x, \delta x) = J(x + \delta x) - J(x) &= \int_0^1 [x(t) + \delta x(t)]^2 + [x(t) + \delta x(t)] dt \\ &\quad - \int_0^1 x^2(t) + x(t) dt \end{aligned} \quad \text{II. 6}$$

Nous obtenons :

$$\Delta J(x, \delta x) = \int_0^1 [2x(t) + 1] \delta x(t) + [\delta x(t)]^2 dt \quad \text{II. 7}$$

Soit :

$$\Delta J(x, \delta x) = \int_0^1 [2x(t) + 1] \delta x(t) + \int_0^1 [\delta x(t)]^2 dt \quad \text{II. 8}$$

Vérifions que la deuxième intégrale peut s'écrire :

$$\int_0^1 [\delta x(t)]^2 dt = g(x(t), \delta x(t)) \|\delta x(t)\| \quad \text{II. 9}$$

Et que $\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} g(x, \delta x) = 0$

Puisque x est une fonction continue, soit :

$$\|\delta x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \|\delta x(t)\| \quad \text{II. 10}$$

Nous avons :

$$g(x, \delta x) = \int_0^1 \frac{[\delta x(t)]^2}{\|\delta x(t)\|} dt \leq \int_0^1 \delta x(t) dt \leq \|\delta x(t)\| \quad \text{II. 11}$$

Par conséquent : $\lim_{\|\delta x\|} g(x, \delta x) = 0$

La fonctionnelle J est donc différentiable et sa variation δJ est :

$$\delta J(x, \delta x) = \int_0^1 [2x(t) + 1] \delta x(t) dt \quad \text{II. 12}$$

❖ Théorème 2.1 : (théorème fondamental)

Soit $x^*(t)$, un extremum, la première variation de J doit être nulle en $x^*(t)$, i.e.

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0 \quad \text{II. 13}$$

Pour toute variation admissible $\delta x(t)$

II.3 . Euler-Lagrange (Méthode directe) :

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int g(x(t), u(t), t) dt \quad \text{II. 14}$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad \text{II. 15}$$

$$x(0) = x_0 \quad \text{II. 16}$$

🚩 Condition d'Euler :

Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel normé (ou, plus généralement, d'un espace vectoriel topologique) et J une fonction différentiable. Pour que x^* minimise $J(x(t))$ dans Ω , il est nécessaire que soit vérifiée la condition d'Euler (condition du premier ordre, ou de stationnarité de J) $D^G J(x^*) = 0$.

🚩 Equation d'Euler Lagrange :

Soit x^* une fonction de classe C^1 . La condition de stationnarité $D^G J(x^*) = 0$ satisfaite seulement si x^* est une extrémale, c'est à dire est solution de l'équation d'Euler Lagrange suivante :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \right) = 0 \quad \text{II.17}$$

Il s'agit donc d'une condition nécessaire pour que x^* soit un minimum (ou maximum) local faible de J .

II.4 . Extremum d'une fonctionnelle dépendant d'une fonction numérique :

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad \text{II. 18}$$

Où : x est une fonction numérique dérivable et de dérivée continue. Le problème consiste à déterminer une fonction x^* pour laquelle la fonction J admet un extremum relatif.

Nous allons considérer les différents problèmes suivants qui sont des cas particuliers de problèmes vibrationnels [4].

II.4.1 . Problème 1 : état initial et état final fixe

On suppose, dans ce premier cas, que les instants t_0 et t_f sont fixés, et l'état initial

$$x_0 = x(t_0) \text{ et l'état final } x_f = x(t_f) \text{ sont donnés.}$$

Le problème peut être résumé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(x) = \min \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \\ x_0 \text{ et } x_f \text{ fixes} \end{array} \right. \quad \text{II. 19}$$

On appelle fonction admissible toute fonction suffisamment régulière $x(t)$ vérifiant les conditions aux limites (initiale et finale).

On suppose que la fonction g admet des dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 continues. Soit x une trajectoire admissible, calculons la variation $\delta J = (x, \delta x)$ à partir de $\Delta J = (x, \delta x)$ [4].

$$\begin{aligned} \Delta J(x, \delta x) &= J(x + \delta x) - J(x) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t) dt - g(x(t), \dot{x}(t), t) \end{aligned} \quad \text{II. 20}$$

- ✓ Pour déterminer la première variation de J . On utilise le développement de Taylor autour de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ pour le premier terme de l'intégrale **II. 20** et en gardant tout simplement les termes linéaires δx , $\delta \dot{x}$ pour obtenir :

$$\Delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta \dot{x}(t) \right] dt \quad \text{II. 21}$$

- ✓ En faisant une intégration par partie dans le deuxième terme **II. 21**, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta J(x, \delta x) &= \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \\ &\quad - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta(x) dt \end{aligned} \quad \text{II. 22}$$

- ✓ Sachant que $x(t_0)$ et $x(t_f)$ sont fixés, donc toute trajectoire admissible doit vérifier les conditions $\delta x(t_0)=0$ et $\delta x(t_f) = 0$, l'équation **II.22** précédentes donne :

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g(x(t), \dot{x}(t), t)}{\partial x} \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) dt \quad \text{II. 23}$$

Si x^* est un extremum alors :

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \right] \delta x(t) dt = 0 \quad \text{II. 24}$$

Ainsi, d'après le théorème 1, à l'optimum, la variation de J doit être nulle i.e.

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0 \quad \text{II. 25}$$

C'est-à-dire :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right)^* \right] \delta x(t) dt = 0 \quad \text{II. 26}$$

Lemme 2.1:

Si l'intégrale $\int_{t_0}^{t_f} h(t) \delta x(t) dt = 0$ où h est une fonction continue par morceaux dans l'intervalle $[t_0, t_f]$ s'annulant pour toute fonction $x \in [t_0, t_f]$ tel que : $x(t_0) = x(t_f)$, alors, $h(t)$ est nulle dans $[t_0, t_f]$.

En appliquant le lemme à $\Delta J(x^*, \delta x) = 0$, on aura le résultat suivant :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] = 0 \quad \text{II. 27}$$

Cette équation est appelée équation d'Euler Lagrange, est une condition nécessaire d'optimalité.

II.4.2. Problème 2 : Etat final libre

On suppose dans ce deuxième cas que les instants t_0 et t_f sont fixés ; l'état initiale x_0 est donné mais l'état final x_f est libre.

Le problème peut être résumé sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(x) = \min \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \\ x_0 \text{ fixe et } x_f \text{ libre} \end{array} \right. \quad \text{II. 28}$$

De la même manière que le problème 1, en utilisant le théorème 1, on calcule d'abord la variation et après une intégration par parties on aura :

$$\delta J(x, \delta x) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \right] \delta x(t) dt \quad \text{II. 29}$$

Pour toutes les trajectoires admissibles on a : $\delta x(t_0) = 0$, mais $\delta x(t_f)$ est arbitraire.

Supposons dans ce problème que x^* est un extremum et $x^*(t_f) = x_f$.

Considérons le problème avec la même fonctionnelle et avec les mêmes instants initial et final respectivement $x(t_0) = x_0$ et $x(t_f) = x_f$.

Nous remarquons que la trajectoire x^* est extrémale pour le problème **II. 28** avec état final fixe ; par conséquent, x^* doit vérifier l'équation d'Euler. Soit alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] = 0 \quad \text{II. 30}$$

Pour tout $t \in [t_0, t_f]$.

Nous avons montré que la valeur de l'intégrale dans **II. 29** est égale à 0.

- De **(II. 29)** et $\delta J(x^*, \delta x) = 0$, on déduit :

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t) \delta x(t_f) = 0 \quad \text{II. 31}$$

- Or $x(t_f)$ est libre, donc $\delta x(t_f)$ est arbitraire ; par suite nous avons :

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), (t_f)) = 0 \quad \text{II. 32}$$

L'équation **II. 32** est appelée condition aux bornes [4].

II.5 . Extremum d'une fonctionnelle dépendant de plusieurs fonctions :

Nous allons généraliser dans ce qui suit au cas d'une fonctionnelle dépendant de plusieurs fonctions indépendantes.

On considère la fonctionnelle suivante :

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{t_0}^{t_f} g(x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), t) dt \quad \text{II. 33}$$

Avec x_1, x_2, \dots, x_n sont des fonctions indépendantes avec des dérivées premières continues.

II.5.1. Problème 1 : Etat initial et Etat final fixe

Dans ce cas, on suppose que l'instant t_0 et l'état initial x_0 , ainsi que l'instant final t_f et l'état final x_f sont fixes. Le problème peut être résumé sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_0 \text{ Et } x_f \text{ fixés} \end{array} \right. \quad \text{II. 34}$$

Les conditions initiale et finale étant données par :

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_f = \begin{pmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \\ \vdots \\ x_n(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \\ \vdots \\ x_{nf} \end{pmatrix}$$

- Pour la détermination la condition nécessaire d'optimalité portant sur les fonctions extrêmes $x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_n^*(t)$, on suit les étapes suivantes :

1-calcul de l'accroissement ΔJ :

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} g(x_1(t), \delta x_1(t), \dots, x_n(t), \delta x_n(t), \dots, \dot{x}_1(t), \delta \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), \delta \dot{x}_n(t)) - g(x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), t) dt \quad \text{II. 35}$$

- Utilisation de la formule de Taylor en $x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)$, et l'intégration par parties des intégrales contenant $\delta \dot{x}_i(t)$, on obtient :

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} (x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), t) \right] \delta x_i(t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_i} (x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial y}{\partial \dot{x}_i} (x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), t) \right] \right\} \delta \dot{x}_i(t) dt \quad \text{II. 36}$$

- $\delta x_i(t_0) = 0$ et $\delta x_i(t_f) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. A l'extremum la variation doit être nulle, ce qui donne le résultat suivant :

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial x_i} (x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), \dot{x}_1^*(t), \dots, \dot{x}_n^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial y}{\partial \dot{x}_i} (x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), \dot{x}_1^*(t), \dots, \dot{x}_n^*(t), t) \right] \delta x_i(t) dt = 0 \quad \text{II. 37}$$

- D'après le lemme, le coefficient des δx_i doivent être nuls sur $]t_0, t_f[$ et puisque les dérivées partielles premières et seconde sont continues, on conclut :

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial x_i} (x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), \dot{x}_1^*(t), \dots, \dot{x}_n^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i} (x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), \dot{x}_1^*(t), \dots, \dot{x}_n^*(t), t) \right] dt = 0 \quad \text{II. 38}$$

- Nous avons maintenant n d'équation d'Euler. Le problème ci-dessus peut se présenter sous forme matricielle, en posant :

$$x(t) = (x_1, \dots, x_n)^T \text{ et } \dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)^T \quad \text{II. 39}$$

Comme suit :

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad \text{II. 40}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} (x(t), \dot{x}(t), t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} (x(t), \dot{x}(t), t), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} (x(t), \dot{x}(t), t) \right]^T \quad \text{II. 41}$$

- Finalement, la représentation matricielle de n équation d'Euler est :

$$\frac{\partial g}{\partial x} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} (x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] = 0 \quad \text{II. 42}$$

II.5.2. Problème 2 : état final et instant final libre

Dans ce deuxième cas, on considère l'instant final t_f et l'état final x_f sont libres. Le problème peut résumer comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ t_f \text{ Et } x_f \text{ libres} \end{array} \right. \quad \text{II. 43}$$

Dans ce cas le problème consiste à déterminer les conditions nécessaires d'existence d'extremum. On considère un vecteur de n fonctions :

$$\delta x(t_f) = \delta x(t_f) - \dot{x}^*(t_f) \delta(t_f) \quad \text{II. 44}$$

Et pour la variation au point d'extremum, par conséquent x^* doit être solution des équations d'Euler :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] = 0 \quad \text{II. 45}$$

- Les équations aux conditions finales sont alors :

$$\begin{aligned} \delta J(x^*, \delta x) = 0 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right]^T \delta t_f \\ + \left\{ \left[-\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right]^T x^*(t_f) + g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t) \right\} \delta t_f \end{aligned} \quad \text{II. 46}$$

II.6. Méthode de Lagrange (Méthodes indirecte) :

Cette méthode consiste à introduire la contrainte modèle dans le critère en utilisant les multiplicateurs de Lagrange λ . Puis de chercher le minimum en considérant toutes les variables x, u et λ ce qui donne un système d'équations différentielles ordinaires qu'on peut ramener à une équation ou des équations différentielles ordinaires par rapport à la variable x en faisant des manipulations algébriques. En introduisant les multiplicateurs de Lagrange, le problème de commande optimale.

$$J_{u(t)} = \int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt \quad \text{II. 47}$$

Sujet à :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \rightarrow \dot{x} - f(x, u, t) = 0 \quad \text{II. 48}$$

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{II. 49}$$

$$x(t_f) = x_f \text{ où libre} \quad \text{II. 50}$$

En introduisant la contrainte modèle dans le critère en utilisant les multiplicateurs de Lagrange, le problème devient

$$\min J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} Q(x(t), u(t), t) dt + \lambda^T (\dot{x}(t) - f(x, u, t)) dt \quad \text{II. 51}$$

Sujet à :

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{II. 52}$$

$$x(t_f) = x_f \text{ où libre} \quad \text{II. 53}$$

Dans ce cas, on doit écrire pour chaque variable, l'équation d'Euler-Lagrange correspondante ce qui conduit aux conditions d'optimalité suivantes :

$$\frac{\partial l}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \text{II. 54}$$

$$\frac{\partial l}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{u}} \right) = 0 \quad \text{II. 55}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{\lambda}} \right) = 0 \quad \text{II. 56}$$

En faisant des manipulations algébriques, ce système d'équations différentielles ordinaires peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du second ordre suivante : [4] – [14].

$$F(\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), t) = 0 \quad \text{II. 57}$$

II.7 . Exemple 2.3 :

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^1 [tu(t) + u^2(t)] dt \quad \text{II. 58}$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad \text{II. 59}$$

$$x(0) = 1 \quad \text{II. 60}$$

$$x(1) = 1 \quad \text{II. 61}$$

On constate que l'état final est imposé

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^1 [tu(t) + u^2(t)] dt \quad \text{II. 62}$$

Sujet à:

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad \text{II. 63}$$

$$x(0) = 1 \quad \text{II. 64}$$

$$x(1) = 1$$

II. 65

- L'équation du modèle donne $u(t) = \dot{x}(t)$ et le critère devient :

$$\min_{x(t)} \tilde{J}(u(t)) = \int_0^1 [t\dot{x}(t) + \dot{x}^2(t)] dt$$

II. 66

Sujet à :

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 1$$

- Equation d'Euler- Lagrange :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

II. 67

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 1$$

- Détermination de la commande optimale : calculons les différentes dérivées intervenant dans l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = t + 2\dot{x}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (t + 2\dot{x}(t)) = 1 + 2\ddot{x}(t)$$

Ce qui donne l'équation différentielle suivante :

$$0 - (1 + 2\ddot{x}(t)) = 0$$

$$2\ddot{x}(t) + 1 = 0$$

II. 68

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{2}$$

L'intégration de cette dernière donne :

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}t + C_1$$

$$x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + tC_1 + C_2$$

Détermination des constantes C_1 et C_2 :

$$x(0) = 1$$

$$-\frac{1}{4}(0)^2 + (0)C_1 + C_2 = 1$$

$$C_2 = 1$$

$$x(1) = 1$$

$$-\frac{1}{4}(1)^2 + (1)C_1 + 1 = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{4}$$

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \quad \text{II. 69}$$

Considérons maintenant le cas d'état final libre

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^1 [tu(t) + u^2(t)] dt \quad \text{II. 70}$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

$$x(0) = 1$$

$x(1)$ est libre

Le problème de calcul des variations correspondant est donné comme suit :

$$\min_{x(t)} \tilde{J}(u(t)) = \int_0^1 [t\dot{x}(t) + \dot{x}^2(t)] dt \quad \text{II. 71}$$

Sujet à :

$$x(0) = 1$$

$x(1)$ est libre

- Equation Euler -Lagrange :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

$$x(0) = 1$$

$x(1)$ est libre

- Détermination de la commande optimale :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = t + 2\dot{x}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (t + 2\dot{x}(t)) = 1 + 2\ddot{x}(t)$$

$$0 - (1 + 2\ddot{x}(t)) = 0$$

$$2\ddot{x}(t) + 1 = 0$$

II. 72

L'intégration de cette équation donne :

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{2}$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}t + C_1$$

$$x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + tC_1 + C_2$$

Détermination des constantes C_1 et C_2 :

$$x(0) = 1$$

$$-\frac{1}{4}(0)^2 + (0)C_1 + C_2 = 1$$

$$C_2 = 1$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right| = 0$$

$$t + 2 \left(-\frac{1}{2}t + C_1 \right) = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = -\frac{1}{2}t$$

II. 73

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie de calcul des variations utilisée pour l'optimisation des fonctionnelles. Cette théorie est exploitée pour résoudre le problème de la commande optimale en utilisant l'approche directe et indirecte (Lagrange). On a démontré

que la condition d'optimalité est donnée par l'équation d'Euler Lagrange munie des conditions aux limites. La résolution de ce problème aux limites permet de déterminer la commande optimale. Cette approche a été illustrée par un exemple d'application.

La condition d'optimalité qui est une équation de second ordre peut être simplifiée en la ramenant à une équation du premier ordre en utilisant l'identité de Beltrami. Cette dernière sera présentée dans le chapitre suivant.

III.1. Introduction :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'identité de Beltrami qui permet de résoudre une classe de problèmes de commande optimale et simplifie grandement la résolution. Cette méthode est très intéressante lorsque la partie intégrale est indépendante de la variable temps. Cette identité est déduite de l'équation d'Euler-Lagrange comme il sera démontré dans ce chapitre.

III.2. Identité de Beltrami :

L'utilisation de la méthode de calcul des variations conduit à l'équation d'Euler-Lagrange. Cette équation est de second ordre. La résolution de cette dernière est très difficile lorsque de fortes non linéarités caractérisent le problème de commande optimale. Il arrive souvent que la partie intégrale du critère à optimiser ne dépend pas explicitement du temps. Dans ce cas, l'équation d'Euler-Lagrange peut être simplifiée en utilisant l'identité de Beltrami pour la réduire à des équations du premier ordre. Cette démarche simplifie davantage la résolution d'un problème de commande optimale [3].

III.2.1. Définition :

L'identité Beltrami, nommé d'après Eugenio Beltrami, est une version simplifiée et moins générale de l'équation d'Euler-Lagrange utilisée en calcul des variations.

L'équation d'Euler-Lagrange permet de déterminer l'optimum de la fonctionnelle suivante :

$$g(x) = \int_a^b g(x, \dot{x}, t) dt \quad \text{III. 1}$$

Où a et b sont des constantes, et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

III.2.2. Dérivation de l'identité de Beltrami :

Considérons la dérivée totale de $g(x(t), \dot{x}(t), t)$ par rapport au temps :

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} \quad \text{III. 2}$$

Qu'on peut réécrire comme suit :

$$\frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dg}{dt} - \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} \quad \text{III. 3}$$

Chapitre III : simplification de l'équation d'Euler-Lagrange basée sur l'identité de Beltrami

En multipliant l'équation d'Euler Lagrange :

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) = 0$$

Par la dérivée de x par rapport à t , c'est-à-dire :

$$\frac{dx}{dt}$$

On obtient l'équation suivante :

$$\frac{dx^T}{dt} \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{dx^T}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{III. 4}$$

Substituant l'équation **III. 3** dans **III. 4**, on obtient :

$$\frac{dg}{dt} - \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g^T}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{dx^T}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{III. 5}$$

Qu'on peut simplifier comme suit :

$$-\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(g - \frac{dx^T}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \text{III. 6}$$

Comme dans la plupart de problèmes de la physique, la fonction g est indépendante de la variable t , alors, l'équation **III. 6** se réduit à :

$$g - \frac{dx^T}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = k \quad \text{III. 7}$$

Où k est une constante d'intégration. L'équation (**III. 7**) est appelée identité de Beltrami.

On constate que l'équation (**III. 7**) est une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

L'intégration de cette équation fait apparaître une deuxième constante en plus de la constante

k. En imposant les conditions aux limites selon la nature de l'état final, on détermine ces deux constantes [3].

Les conditions aux limites utilisées dans le cas de l'équation d'Euler-Lagrange restent valables pour l'identité de Beltrami. Ainsi, pour un état final imposé, on a la condition :

$$x(t_f) = x_f$$

Et pour un état final libre, on a la condition :

$$x(t_f) \text{ est libre}$$

III.3. Exemple de modélisation :

Dans cette section, on illustre l'application de l'identité de Beltrami pour la résolution d'un problème de commande optimale. Pour démontrer la convergence de cette dernière, on compare le résultat avec celui obtenu avec l'équation d'Euler-Lagrange.

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^1 x^2(t) + u^2(t) dt \quad \text{III. 8}$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad \text{III. 9}$$

$$x(0) = 1 \quad \text{III. 10}$$

$$x(1) = 2 \quad \text{III. 11}$$

On commence la résolution du problème par l'équation d'Euler-Lagrange. On doit d'abord mettre le problème sous forme d'un problème de calcul des variations.

A partir de l'équation du modèle, on obtient :

$$u(t) = \dot{x}(t)$$

En remplaçant cette dernière dans le critère (III. 8), on obtient :

$$\min_{x(t)} \hat{J}(u(t)) = \int_0^1 x^2(t) + \dot{x}^2(t) dt \quad \text{III. 12}$$

Sujet à :

$$x(0) = 1 \quad \text{III. 13}$$

$$x(1) = 2 \quad \text{III. 14}$$

❖ Utilisation de l'équation d'Euler -Lagrange :

L'équation d'Euler- Lagrange est donnée comme suit :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \text{III. 15}$$

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 2$$

Calculons les différentes dérivées intervenant dans l'équation. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (2\dot{x}) = 2\ddot{x}$$

D'où l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$2x - 2\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} - x = 0$$

$$\ddot{x} = x$$

L'intégration de cette dernière conduit aux résultats suivants :

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t \quad \text{III. 16}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration c_1 et c_2 on utilise les conditions aux limites comme suit :

$$x(0) = 1$$

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1 = 1 - c_2$$

$$x(1) = 2$$

$$c_1 e^{-1} + c_2 e^1 = 2$$

On remplaçant c_1 et c_2 dans (III. 16), donne :

$$x(t) = \frac{1}{e^2-1} [(2e-1)e^{-t} + (e^2-2e)e^t] \quad \text{III. 17}$$

Par conséquent la loi de commande optimale est :

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = \frac{1}{e^2-1} [(1-2e)e^{-t} + (e^2-2e)e^t] \quad \text{III. 18}$$

❖ Utilisation de l'identité de Beltrami :

L'identité de Beltrami est donnée comme suit

$$g - \frac{dx^T}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = k \quad \text{III. 19}$$

Du problème de calcul des variations obtenus, on a

$$g = x^2 + \dot{x}^2 \quad \text{III. 20}$$

En remplaçant dans l'équation de Beltrami III. 19, on obtient :

$$x^2 + \dot{x}^2 - \dot{x}(2\dot{x}) = k$$

$$x^2 - \dot{x}^2 = k$$

$$x^2 - \dot{x}^2 + k = 0$$

$$\dot{x} = (k + x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{III. 21}$$

- Après la simulation des équations Euler -Lagrange et Beltrami

$$\ddot{x} - x = 0$$

$$x^2 - \dot{x}^2 + k = 0 \quad \text{III. 22}$$

Avec les conditions initiales :

$$t = 0: x(0) = 1$$

$$t = 1: x(1) = 2$$

On remarque que l'équation obtenue est du premier ordre. La résolution de cette dernière conduit à la solution suivante :

$$x(t) = e^{(t-c_1)}(k + e^{2(c_1-t)})/2 \quad \text{III. 23}$$

Pour déterminer les inconnus c_1 et c_2 on impose les conditions aux limites. Ainsi, on a :

$$x(0) = 1$$

$$\frac{e^{(-c_1)}(k+e^{2(c_1)})}{2} = 0$$

$$k + e^{2(c_1)} - 2e^{(c_1)} = 0$$

et

$$x(1) = 2$$

$$\frac{e^{(1-c_1)}(k+e^{2(c_1-1)})}{2} = 0 \quad \text{III. 24}$$

$$k + e^{2(c_1-1)} - \frac{4}{e^{(1-c_1)}} = 0 \quad \text{III. 26}$$

Les deux équations **III. 24** et **III. 25** donne :

$$e^{(2c_1)} - 2e^{(c_1)} - k + e^{2(c_1-1)} + \frac{4}{e^{(1-c_1)}} = 0 \quad \text{III. 27}$$

La résolution de cette équation non linéaire en utilisant la méthode de Newton, conduit au résultat suivant :

$$c_1 = -0.4891$$

Puis, en utilisant l'équation (**III. 24**), on déduit :

$$k = 0.85003$$

Ce qui donne les trajectoires optimales suivantes :

$$x(t) = e^{t+0,4891}(0,85003 + e^{-0,9782-2t})/2 \quad \text{III. 28}$$

$$u(t) = (e^{t+0,4891}(0,85003 + e^{-0,9782-2t} - 2e^{-0,9782-2t})) / 2 \quad \text{III. 29}$$

Le résultat obtenu par la méthode d'Euler- Lagrange est représenté par la figure suivante :

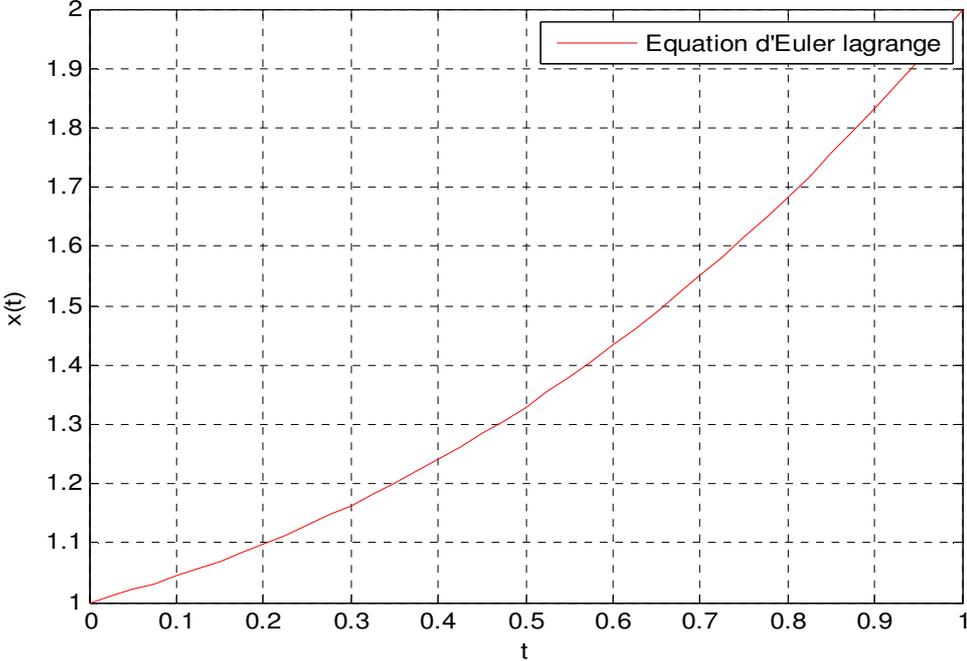


Figure 3.1 : Evolution de $x(t)$ cas Euler-Lagrange.

Le résultat obtenu par la méthode Beltrami est représenté par la figure suivante :

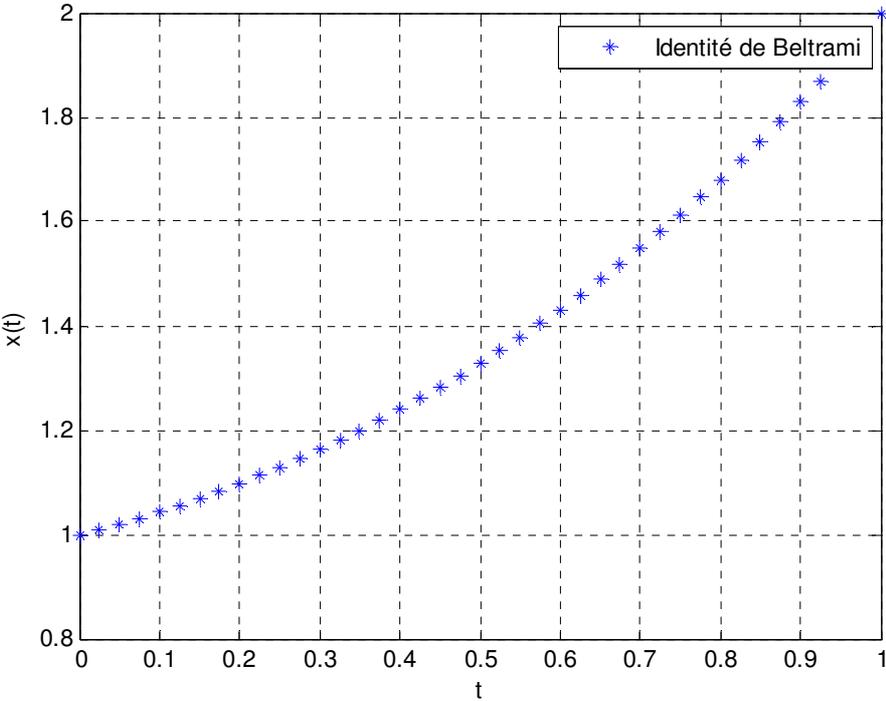


Figure 3.2 : Evolution de $x(t)$ cas Beltrami.

La comparaison des deux résultats est donnée par la figure 3.4.

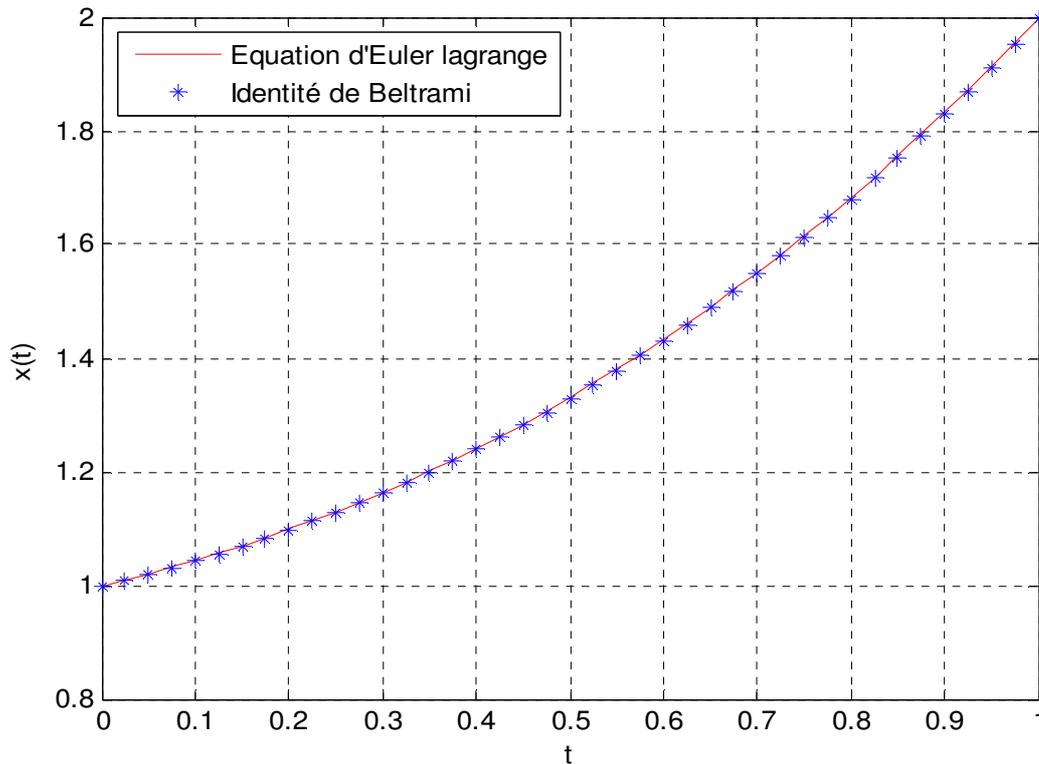


Figure 3.3: Evolution de $x(t)$ avec les deux méthodes.

La Figure 3.3 montre clairement que les trajectoires obtenues par les deux méthodes sont identiques bien que leurs expressions mathématiques sont différentes. Ce résultat démontre la convergence de l'identité de Beltrami.

III.4. Avantages et inconvénients de la méthode de Beltrami :

L'identité de Beltrami permet d'avoir une équation différentielle du premier ordre mais cette simplification peut faire apparaître certaines difficultés. Par conséquent, la méthode de Beltrami présente certains avantages et inconvénients.

❖ Les avantages sont :

- L'identité de Beltrami permet d'avoir des équations du 1^{er} ordre.
- La résolution d'un problème de la commande optimale par la méthode d'Euler-Lagrange revient à résoudre n équation du second ordre et $2n$ équation du 1^{er} ordre. Par contre Beltrami le ramène à résoudre un système n équations du 1^{er} ordre.

- Disponibilité d'intégration sophistiqué pour la résolution des équations différentiels ordinaires du 1^{er} ordre.

❖ Inconvénients :

Le seul inconvénient de la méthode de Beltrami peut conduire à des équations différentielles ordinaires implicites qui sont généralement très difficile à résoudre analytiquement. Donc la solution doit être déterminée numériquement en utilisant les différences finies.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'identité de Beltrami qui permet de simplifier la résolution d'un problème de commande optimale. Cette identité est intéressante lorsque la partie intégrale du critère à optimiser est indépendant de la variable temps. En effet, comparativement, à l'équation d'Euler-Lagrange, l'identité de Beltrami conduit à une équation du premier ordre qui peut être implicite. Cette équation peut être résolue numériquement ou analytiquement selon sa nature.

L'utilisation de l'identité de Beltrami a été illustrée par exemple d'application qui démontre sa convergence.

Dans le chapitre suivant, on va exploiter cette identité pour concevoir une commande optimale pour le remplissage d'un bac de stockage.

IV.1 Introduction :

Dans les chapitres précédents, on vu comment formuler et résoudre un problème de commande optimale en utilisant le calcul des variations. Deux approches ont été présentées et illustrées par des exemples d'application en l'occurrence l'équation d'Euler Lagrange et l'identité de Beltrami.

Dans ce chapitre, on va mettre en œuvre, en utilisant ces deux méthodes, une loi de commande optimale sur un exemple physique qui est un bac de stockage. Le chapitre commence par des généralités sur les bacs de stockage, puis on s'intéresse à la modélisation d'un bac de stockage. La deuxième partie du chapitre concerne la formulation mathématique du problème de commande et sa résolution par les deux méthodes.

IV.2 Réservoirs de stockage :

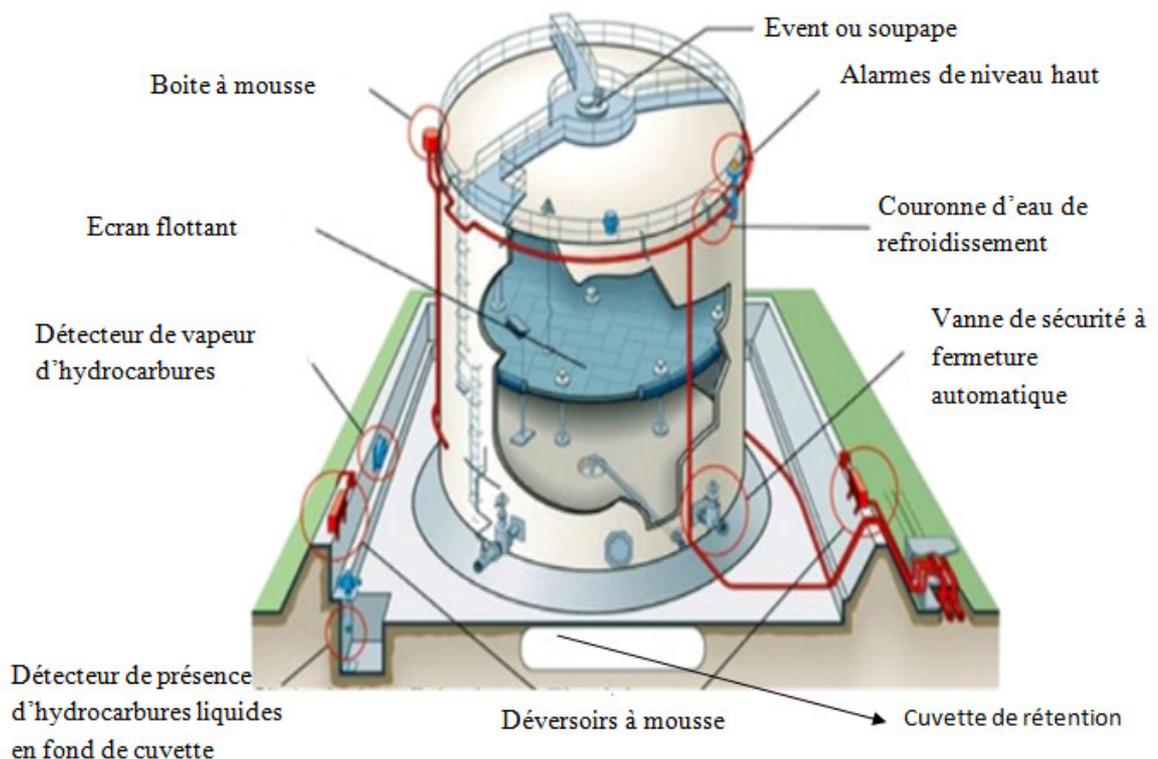


Figure 4.1 : Élément d'un réservoir en trois dimensions.

IV.2.1. Définitions :

Un bac est un réservoir cylindrique destiné au stockage des fluides tel que : hydrocarbures liquides et l'eau [5].

IV.2.2. Equipement d'un bac :

- La robe : c'est une paroi verticale constituée de tôles cintrées au diamètre du réservoir.
- La virole : c'est un anneau constitué de tôles dont la succession donne la robe.
- La cuvette : c'est un compartiment construit autour d'un bac ou d'un ensemble de bacs destiné à recevoir le contenu du bac.
- Le fond : c'est la base du réservoir, il est fait également d'un ensemble de tôles.
- L'assise : c'est la fondation sur laquelle repose le réservoir.
- Le toit : c'est la partie supérieure du réservoir, il est fait d'un assemblage de tôles. Il peut être fixe ou flottant [5].

IV.2.3. Accessoires d'un bac :

IV.2.3.1. Accessoires de lutte contre la surpression :

- Les événements : ce sont des ouvertures permanentes situées dans la partie supérieure du réservoir destinées à évacuer l'excédent de vapeur d'hydrocarbures par temps chauds.
- Les soupapes : ce sont des dispositifs automatiques qui laissent s'échapper l'excédent de vapeur une fois que la pression de la phase gazeuse, à l'intérieur du réservoir, atteint une valeur limite ou critique. Cette pression est appelée pression de tarage [5].

IV.2.3.2. Accessoires de lutte contre l'incendie :

- La couronne de mousse : extincteur de feux d'hydrocarbures (jaune orangée).
- La couronne d'eau de refroidissement : refroidissement du bac (bleu ou rouge).
- Cuvette de rétention : circonscrit la lutte contre l'incendie à un périmètre limité

IV.2.3.3. Accessoires de mesure de niveau de produits :

Sur certains réservoirs (bac de stockage de fiouls et de bitume), des accessoires appelés indicateurs de niveau à flotteur sont installés. Ils permettent de lire directement une règle graduée fixée sur la robe, la valeur du niveau du produit dans le réservoir grâce à un index se déplaçant devant la règle graduée.

IV.2.3.4. Accessoires de visite et nettoyage :

Il s'agit des gardes de corps, des escaliers et des échelles.

IV.2.3.5. Accessoires de réchauffage :

Dans le cas des fiouls, un système de réchauffage est prévu (serpentins tapissant le fond du réservoir). Le stockage du bitume en plus du système de réchauffage, il est aussi prévu un calorifugeage (isolation thermique) couplé au réservoir.

IV.3. Equipement et accessoires des sphères :

IV.3.1. Définition :

Ce sont des capacités sphériques destinées au stockage du GPL et particulièrement du butane.

IV.3.2. Equipements :

- Equipements d'accès : escaliers, gardes de corps et les échelles.
- Equipement de mesure de niveau de produits : télé jauge (sphères équipées de télé jauges)
- Equipements de sécurité : les soupapes, les couronnes d'eau et de mousse, les paratonnerres.

IV.4. Classifications de réservoirs :

Les réservoirs utilisés sont classés selon trois critères :

- ✓ La pression développée par les produits stockés et supportable par le réservoir.
- ✓ La nature du toit du réservoir.
- ✓ Les capacités des réservoirs.

IV.4.1. Classifications des réservoirs selon le critère de pression :

Les produits pétroliers sont classés en quatre groupes suivant leur pression de vapeur. A chaque classe ou groupe correspond des types particuliers de réservoirs qui se différencient essentiellement par la pression de service. La pression supportée par le réservoir est la somme de la pression hydrostatique créée par le liquide et la pression de vapeur. La pression de vapeur doit varier dans les limites pour ne pas provoquer l'explosion du réservoir. Elle est maintenue entre ces limites par des soupapes[5].

Classement des produits stockés			Types des réservoirs correspondants
N ^o de classe	Pression de vapeur aux T ⁰ de stockage.	Exemple de produit	
1	Pression de vapeur toujours supérieure à un bar.	Propane	Cigares
2	Pression de vapeur parfois légèrement inférieur à un bar.	Butane	Sphères
3	Pression de vapeur toujours supérieure à un bar mais non négligeable.	Pétrole brut. Essences	*Réservoirs dits<<haute pression>> :pression critique soupapes=180g/cm ² . *Réservoirs dits<<moyenne pression>> :pression critique soupapes=25g/cm ²
4	Pression de vapeur négligeable.	Pétrole lampant, GO, huile de graissage, Fioul, bitume.	Réservoirs à événements

Tableau 4.1 : Classement des produits stockés

IV.4.2. Classifications des réservoirs selon la nature des toits :

Selon l'utilisation du réservoir, il peut être à toit fixe. Toit flottant ou toit fixe avec écran flottant.

❖ Toit fixe :

Le toit fixe est solidaire de robe.

Ils sont destinés à la classe quatre (4) indiquée dans le **tableau 4.1**. Classement des produits stockés.

❖ Réservoirs à toit flottant :

Ce type de toit est utilisé pour les réservoirs contenant les produits volatils. Ces réservoirs sont destinés à la classe (3). Le toit coulisse verticalement dans la robe et repose directement sur le produit dont il suit les niveaux de variation. Empêchant la formation de la phase gazeuse.

❖ Toit fixe avec écran flottant :

Ce type de toit va combiner les avantages du toit fixe ou du toit flottant. Le toit fixe met le produit à l'abri de l'action des agents atmosphérique (eau de pluie). L'écran interne se comporte comme le toit flottant.

IV.4.3. Classifications des réservoirs selon la capacité des réservoirs :

Selon l'utilisation des réservoirs, on distingue deux types de réservoirs :

➤ Les réservoirs de stockage :

Ce sont des réservoirs de grandes tailles qui sont affectés aux activités de réception de produit en provenance de la raffinerie. Leurs capacités sont supérieures à $20000m^3$

➤ Les réservoirs d'exploitation :

Ce sont des réservoirs de petite de tailles destinés à des activités d'enlèvement de produits. Ils sont destinés à l'alimentation des postes de chargement de wagons-citernes et camion-citerne. Ils reçoivent du produit en provenance des réservoirs de stockage [5].

IV.5. Opérations sur les réservoirs de stockage :

IV.5.1. Définitions et terminologie jaugeage :

C'est une technique de détermination de la hauteur du produit dans un réservoir (Il peut être manuel ou automatique). Le jaugeage donne lieu à l'établissement du certificat et du barème de jaugeage.

- Récipient mesure : c'est un bac doté d'un barème de jaugeage.
- Mesurage statique : détermination de volume du produit sans mouvement dans un bac.
- Mesurage dynamique : détermination de volume par compteur (volumétrique, à turbine, etc.).
- Tables ASTM : tables de conversion des volumes et des masses volumiques des huiles minérales.
- Abréviations : les abréviations sont utilisées pour le calcul des volumes à 15°C de la masse commerciale tels qu'ils sont décrit ci-après :

Symbole	Définition	Unités
t	Température du produit mesure	°C
Vt	Volume à température t	Litres
V15	Volume à 15°C	Litres
Dt	Masse volumique à température t	kg/m ³
D15	Masse volumique à 15°C	kg/m ³
VCF	Facteur de correction à 15°C des volumes et des masses volumiques (Volume Correction Factor)	

IV.5.2. Obligations tenant aux installations :

IV.5.2.1. Aménagement des installations de stockage :

Les bacs destinés au stockage des huiles minérales doivent répondre aux prescriptions Ci- après :

- Posséder, dans leur partie supérieure, un ou plusieurs orifices de jaugeage.
- Etre pourvues d'escaliers à plan incliné et munis de rambardes, de passerelles, de garde- corps et de plates-formes réglementaires permettant un accès facile et en toute sécurité aux orifices de pige.

- Etre individualisés par un numéro ou une lettre, peint ou gravé en un endroit visible, l'indication de contenance devant figurer à côté de ce repère. La plaque d'identification de jaugeage placée à côté de la verticale de pige de référence doit mentionner la hauteur totale témoin (HTT).

IV.5.2.2. Jaugeage des réservoirs :

Les bacs doivent avoir été jaugés (vérification primitive) par le service de la Métrologie et être munis d'un barème de jaugeage encours de validité. Une vérification périodique (re- jaugeage) est obligatoire tous les dix ans pour tous les récipients mesures de produits finis et semi-finis. Si le bac a subi un accident ou a été détérioré, il doit subir une vérification primitive après réparation ou modification.

IV.5.2.3. Description des réservoirs :

Les réservoirs utilisés pour le stockage des huiles minérales sont généralement des cylindres verticaux, Il existe plusieurs types :

IV.5.2.3.1. Fond des récipients :

Il peut être plat, convexe ou concave.

IV.5.2.3.2. Toit des récipients :

Il peut être fixe ou flottant. Les toits flottants sont utilisés pour les produits légers. Ils montent et descendent en fonction du niveau du produit permettant de limiter les pertes dues à l'évaporation. Pour les récipients à toit fixe, des écrans flottants peuvent être installés à l'intérieur pour les mêmes raisons.

IV.5.2.3.3. Orifices de pige :

Conformément à la norme NF M 08-020, les récipients d'un diamètre supérieur à 3 mètres doivent être dotés en leur partie supérieure, de deux verticales de pige et ceux d'un diamètre supérieur ou égal à 10 mètres de trois verticales de pige[15].

IV.5.3. Obligations tenant aux instruments de mesure :

IV.5.3.1. Compteurs et jaugeurs automatiques :

Les compteurs et jaugeurs automatiques sont soumis à vérification primitive avant leur première mise en service. Les compteurs et jaugeurs automatiques sont également soumis à des vérifications périodiques annuelles.

IV.5.3.2. Autres instruments de mesure :

- Pour la détermination de la hauteur d'huiles minérales :
 - Un ruban gradué adapté à la hauteur du récipient mesure. Ce ruban doit avoir une graduation lisible et ne pas comporter de pliure. Le lest gradué ne doit pas être écrasé dans sa partie inférieure. Les unités de longueur doivent correspondre à celles du système International (SI). Le ruban gradué constitue une mesure de longueur et il est soumis au contrôle métrologique comprenant l'examen du type et la vérification primitive :
 - Une barrette pour le mesurage par le creux.
 - Une pâte réactive aux hydrocarbures ainsi qu'une pâte détectrice d'eau, non Périmées.
- Pour la mesure de la température des produits :
 - Une sonde électronique portative
- Pour la détermination de la masse volumique des produits :
 - Un ou plusieurs aréomètres, selon les produits concernés.
 - Un thermomètre à dilatation de liquide.
 - Une éprouvette transparente.
- Instruments permettant la prise d'échantillons.

IV.6. Modélisation d'un bac de stockage d'un fluide :

Pour modéliser un bac de stockage, on utilise le bilan massique. Avant, on doit faire quelques hypothèses simplificatrices :

- a) Le débit d'un orifice situé dans le fond d'un bac peut être considéré en première approximation comme étant proportionnel à la hauteur du liquide dans le bac :

$$Q_s = \alpha \cdot h \quad \text{IV. 1}$$

b) Une loi plus réaliste peut être obtenue à partir de la relation de Bernoulli :

$$Q_s = C_v \sqrt{z - z_a} \quad \text{IV. 2}$$

Où C_v est un coefficient dépendant de la vanne, z est la pression au fond du bac et z_a la pression ambiante à l'extérieur du bac. Si la surface du liquide est à la pression ambiante, on a

$$z = z_a + \frac{\rho g}{g_c} \cdot h \quad \text{IV. 3}$$

Où ρ est la masse volumique du liquide, g est l'accélération de la gravité et g_c est un facteur de conversion.

Considérons le système de la **figure 4.2**. Il s'agit d'un bac qu'on remplit avec un débit Q_e et qui se vide par un orifice situé dans le fond. On note :

S : la section du bac.

h : la hauteur du bac.

V : le volume du bac.

Q_s : le débit de vidange.

Q_e : le débit d'alimentation.

ρ : la masse volume du liquide [11].

IV.6.1. Système à modéliser :

Nous cherchons à modéliser le phénomène de remplissage et de vidange du bac. Le liquide est supposé ne pas changer d'état et on ne tient pas compte des effets autres que transfert de matière. En particulier, le liquide est supposé de masse volumique constante. L'écoulement de vidange sera modélisé successivement par les lois données précédemment.

Analyse des variables :

Les variables peuvent être classées comme suit :

- Variables d'état : le volume du bac, ou de façon équivalente, la hauteur de liquide h .
- Variable d'entrée : le débit volumique d'alimentation l_i
- Variable de sortie : le débit volumique de sortie l .

Equations de bilan :

On écrit le bilan de masse et, comme on suppose la masse volumique constante, on a :

$$s \frac{dh}{dt} = l_i - l \quad \text{IV. 4}$$

On distingue deux cas :

Cas a : le débit est proportionnel à la pression

$$s \frac{dh}{dt} = l_i - \alpha \cdot h \quad \text{IV. 5}$$

Dans ce cas le modèle obtenu est linéaire.

Cas b : le débit obéit à la loi de Bernoulli

$$s \frac{dh}{dt} = l_i - C_v \sqrt{\rho \frac{g}{g_c} h} \quad \text{IV. 6}$$

Dans ce cas le modèle obtenu est non linéaire.

Degrés de liberté :

Le modèle comporte deux variables (h, l) et une équation différentielle. Son degré de liberté est de 1. Pour déterminer son évolution, il suffit de fixer une variable d'action, c'est-à-dire de choisir la variable l .

Le problème à modéliser :

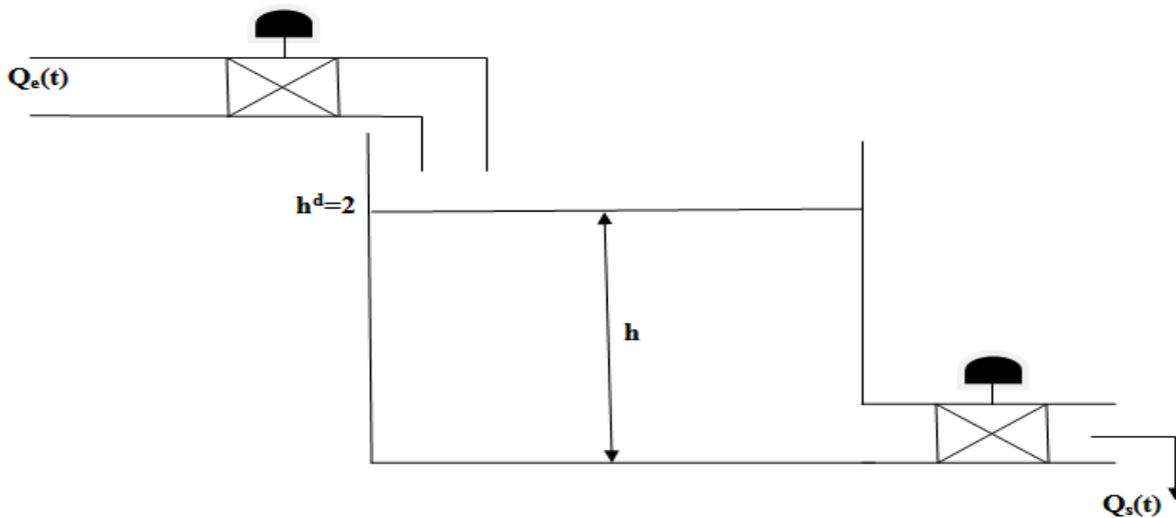


Figure 4.2 : Schéma synoptique d'un bac de stockage.

IV. 7 Problème de commande optimale :

L'objectif est de concevoir une loi de commande $Q_e(t)$ (évolutions du débit de l'entrée) pour remplir le réservoir à une hauteur désiré $h^d = 2m$ tout en minimisant l'énergie mise en œuvre. On suppose que le bac est vide à l'instant $t = 0$. Le remplissage doit se faire sur un horizon de commande de 2 min.

Pour le modèle mathématique, on considère le cas b (le débit de sortie obéit à la loi de Bernoulli). Les données du bac son comme suit : $s = 1m^2, g = g_c = 9.81 \frac{m}{s^2}, \rho = 1, c_v = 0.25 mol/m^3$, Dans ce cas le modèle est donné comme suit :

$$\dot{x}(t) = -0,25\sqrt{x} + u(t) \quad \text{IV. 7}$$

Pour les conditions terminales, on a initialement un bac vide qu'on doit remplir jusqu'à une hauteur de 2 m, par conséquent.

$$x(0) = 0 \quad \text{IV. 8}$$

$$x(2) = 2 \quad \text{IV. 9}$$

Pour le critère, on doit atteindre une hauteur de 2 m tout en minimisant l'énergie mise en œuvre, par conséquent on a le critère suivant :

$$J = \int_0^2 (2 - x(t))^2 + u^2(t) dt \quad \text{IV. 10}$$

IV.8. Calcul de la commande optimale :

Pour résoudre le problème de commande optimale formulé, on propose d'utiliser les deux méthodes présentées dans les chapitres précédents : équation d'Euler-Lagrange et identité de Beltrami.

Euler- Lagrange :

Pour utiliser l'équation d'Euler-Lagrange, on doit mettre le problème de commande optimale sous forme d'un problème de calcul des variations. A partir du modèle, on obtient :

$$u(t) = \dot{x}(t) + 0,25\sqrt{x} \quad \text{IV. 11}$$

En substituant cette expression dans le critère (IV.10), on obtient le problème de calcul des variations suivant :

$$J = \int_0^2 (2 - x(t))^2 + (\dot{x}(t) + 0,25\sqrt{x})^2 dt \quad \text{IV. 12}$$

$$x(0) = 0 \quad \text{IV. 13}$$

$$x(2) = 2 \quad \text{IV. 14}$$

Déterminons l'équation d'Euler-Lagrange correspondante au problème. L'équation d'Euler Lagrange est donnée comme suit :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \text{IV. 15}$$

Pour ce problème, on a $g = (2 - x(t))^2 + (\dot{x}(t) + 0,25\sqrt{x})^2$

Le calcul des dérivées intervenant dans l'équation donne :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 3,9375 + \frac{0,5}{2\sqrt{x}} \dot{x} \quad \text{IV. 16}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x} + 0,5\sqrt{x} \quad \text{IV. 17}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (2\dot{x} + 0,5\sqrt{x}) = 2\ddot{x} + \frac{0,5}{2\sqrt{x}} \dot{x} \quad \text{IV. 18}$$

En remplaçant dans la relation (IV.15), il vient :

$$2x - 3,9375 + \frac{0,5}{2\sqrt{x}}\dot{x} - 2\ddot{x} + \frac{0,5}{2\sqrt{x}}\dot{x} = 0 \quad \text{IV. 19}$$

$$2x - 3,9375 - 2\ddot{x} = 0 \quad \text{IV. 20}$$

On remarque que l'équation d'Euler-Lagrange est de second ordre.

La résolution de cette équation différentielle, en prenant en considération les conditions aux limite (IV. 13) et (IV. 14), conduit à la solution suivante :

$$x(t) = 0.04103 e^t - 2.00978e^{-t} + 1.96875 \quad \text{IV. 21}$$

et d'après IV.11, on déduit l'expression de la commande optimale suivante :

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = 2.00978e^{-t} + 0.0410e^t + (3564389.54559e^t - 174554254.48283 e^{-t} + 1709898864.93724)^{1/2} \quad \text{IV. 22}$$

L'évolution du niveau du liquide dans le bac est donnée par la **figure 4.3**.

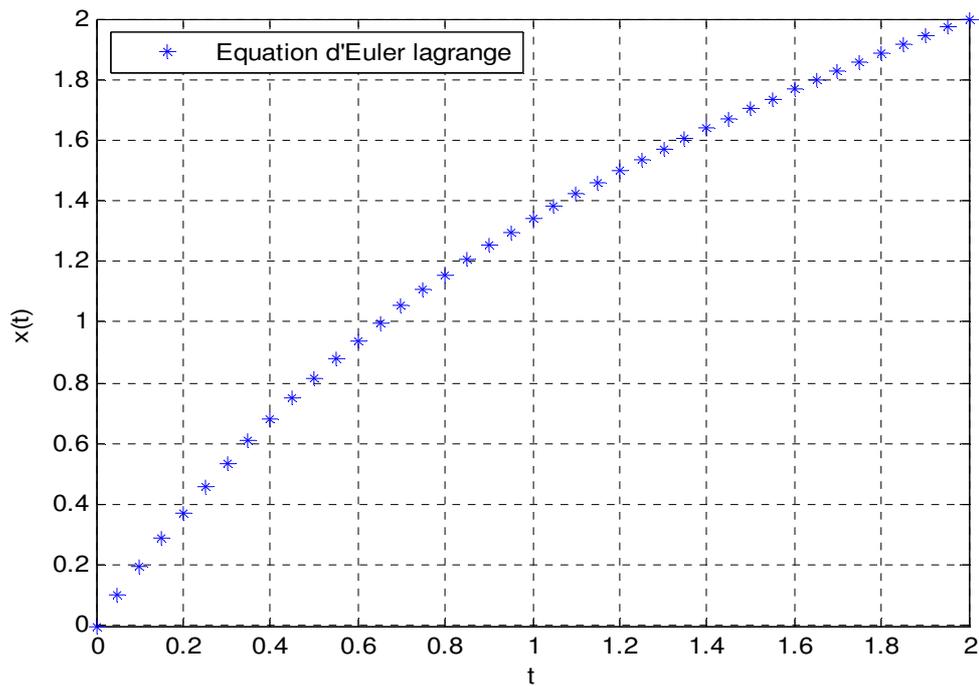


Figure 4.3 : Évolution du niveau du liquide dans le bac de stockage dans le cas la méthode d'Euler-Lagrange.

L'évolution de la commande est donnée par la **figure 4.4**

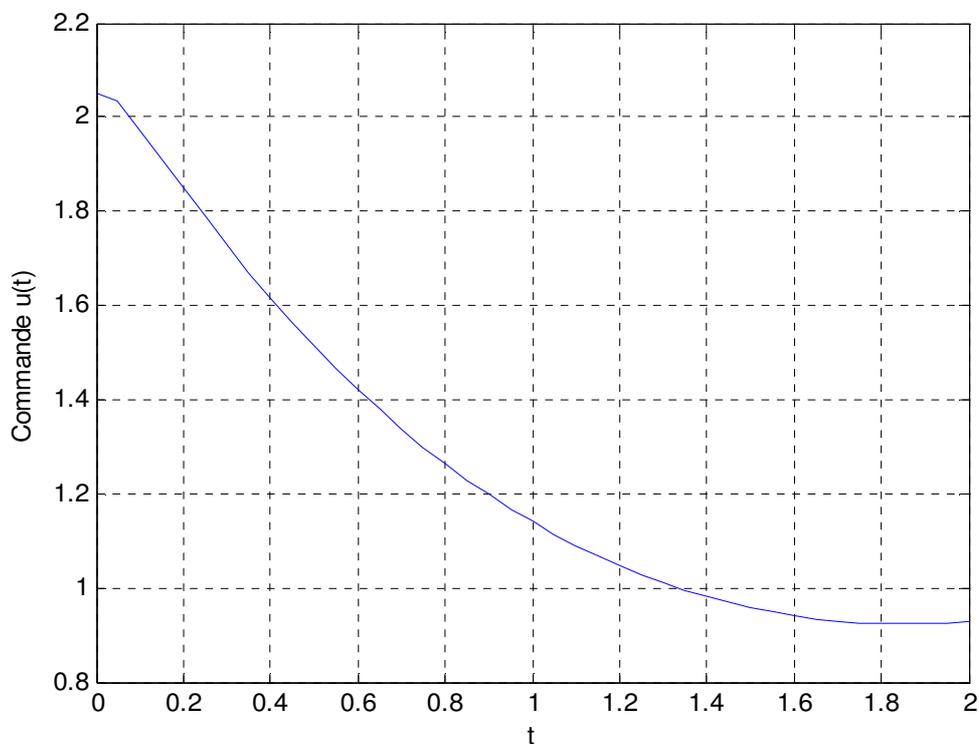


Figure 4.4 : Evolution de la commande $u(t)$ dans le cas de la méthode d'Euler-Lagrange.

Identité de Beltrami :

L'identité de Beltrami est donnée comme suit :

$$g - \frac{dx}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = k \quad \text{IV. 23}$$

Comme pour le problème en question

$$g = (2 - x(t))^2 + (\dot{x}(t) + 0,25\sqrt{x})^2 \quad \text{IV. 24}$$

Le calcul des dérivées conduit :

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x} + 05\sqrt{x} \quad \text{IV. 25}$$

En remplaçant dans (IV. 23), on obtient :

$$(2 - x(t))^2 + (\dot{x}(t) + 0,25\sqrt{x})^2 - \dot{x}(2\dot{x} + 05\sqrt{x}) = k \quad \text{IV. 26}$$

Qu'on peut simplifier comme suit :

$$x^2 - \dot{x} - 3,9375x + 4 = k \quad \text{IV. 27}$$

Notons que k est une constante à déterminer en imposant les conditions aux limites. Ainsi, la résolution de cette équation, en prenant en considération les conditions aux limites (IV. 11) et (IV. 14), donne la solution suivante avec, $c = -0.2784$ et $k = -0.2059$:

$$x(t) = \frac{\left(e^{(1.11377 - t)} (e^{(2t - 2.22754)} + 15.75e^{(t - 9.96025)} - 5.27880) \right)}{8}$$

IV. 28

et d'après (IV.14), on a l'expression de la commande optimale suivante :

$$u^*(t) = 0.65985e^{(1.11377-t)} + \frac{e^{(t-1.11377)}}{8} + \frac{\left(\left(2 e^{(1.11377-t)} \left(e^{(2t-2.22754)} + 15.75e^{(t-1.11377)} - 5.27880 \right) \right)^{1/2} \right)}{16}$$

IV. 29

Les évolutions du niveau et du débit d'alimentation sont donnés par les **figures 4.5** et **4.6**. On constate aussi que les objectifs sont atteints.

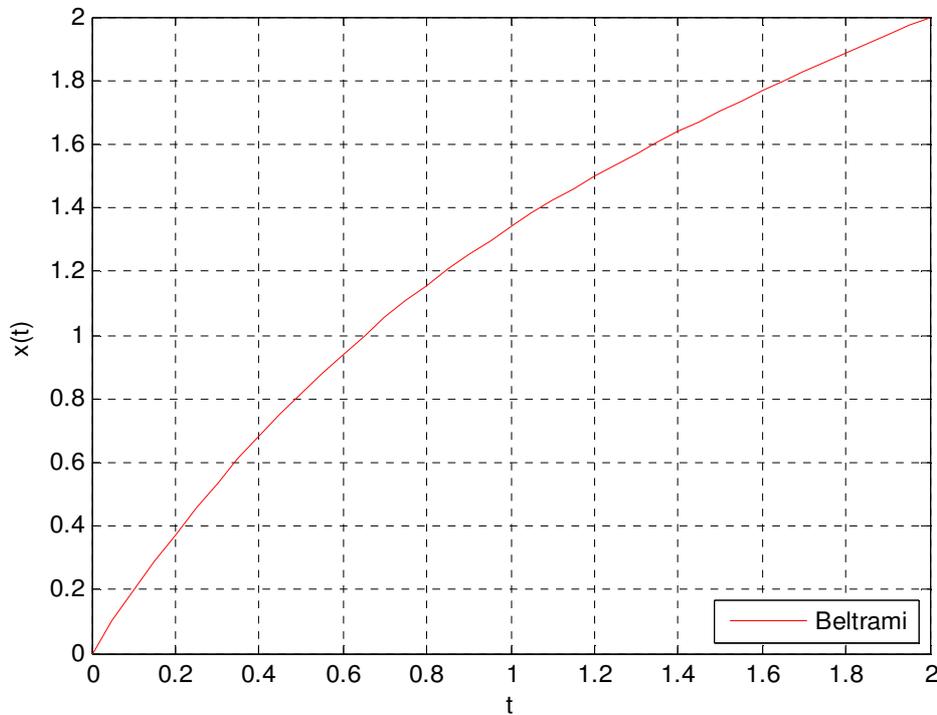


Figure 4.5 : Évolution du niveau du liquide du débit d'entrée dans le bac de stockage dans le cas de la méthode de Beltrami.

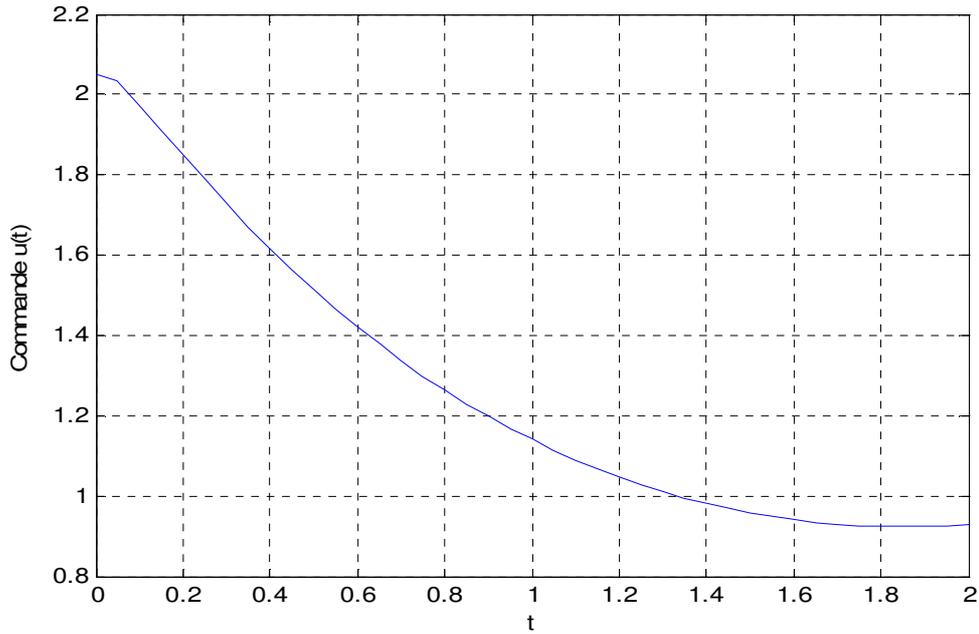


Figure 4.6. Evolution du débit d'entrée dans le cas de la méthode de Beltrami.

Pour comparer les deux méthodes, on représente sur la même **figure 4.7** les trajectoires obtenues par les deux méthodes. Cette dernière montre que les deux méthodes conduisent au même résultat. De même pour les commandes obtenues par les deux méthodes, la figure 4.8 confirme que les deux méthodes donnent le même résultat.

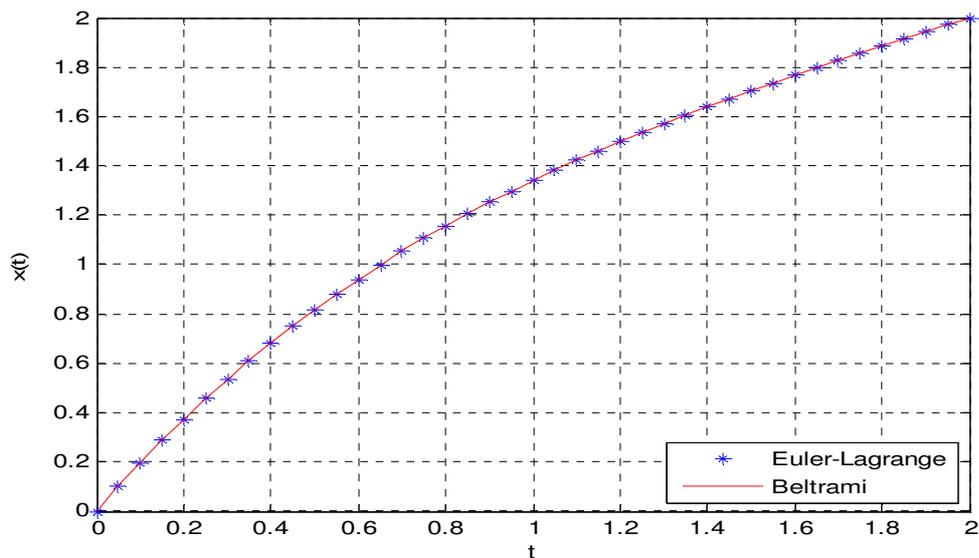


Figure 4.7 : Évolution du niveau du liquide dans le bac de stockage avec les deux méthodes.

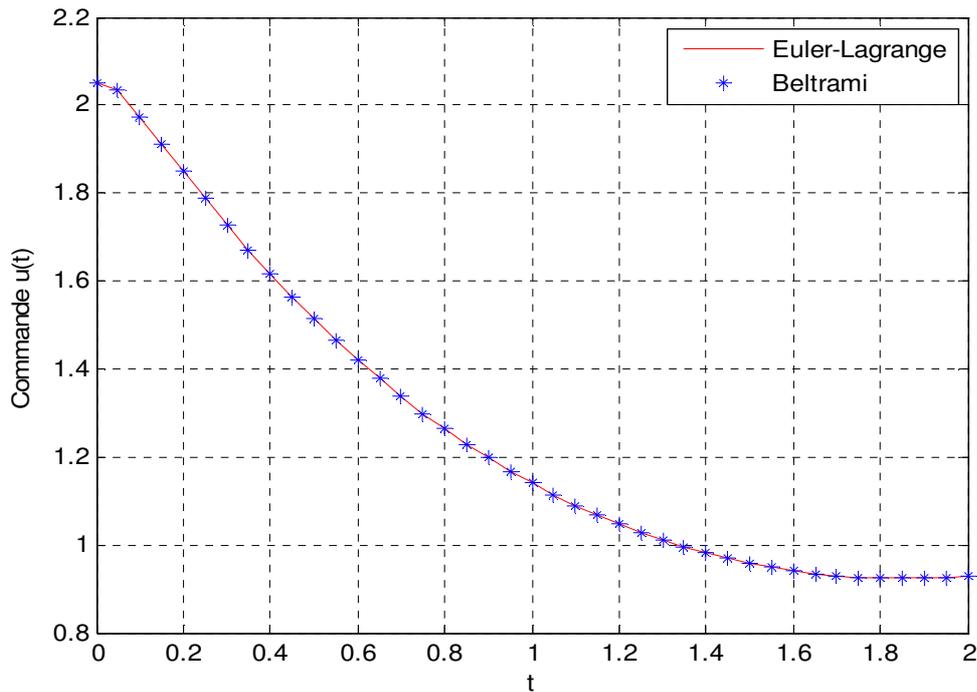


Figure 4.8 : Évolution du débit d'entrée dans le bac de stockage avec les deux méthodes.

Conclusion :

Dans ce chapitre, on a appliqué les deux méthodes d'Euler Lagrange et de Beltrami pour déterminer l'évolution optimale du débit d'entrée d'un bac de stockage assurant un remplissage imposé par un cahier des charges.

Ainsi, après la modélisation du système, nous avons formulé le problème de commande optimale, puis on a utilisé les méthodes d'Euler Lagrange et Beltrami pour résoudre le problème. Les résultats obtenus montrent clairement que les deux méthodes conduisent aux mêmes résultats.

Le travail présenté dans ce problème s'inscrit dans le cadre de la commande optimale des systèmes dynamiques. L'objectif consiste à étudier l'identité de Beltrami et de l'appliquer pour le calcul de lois de commande optimale pour un bac de stockage choisi comme exemple d'application.

En premier lieu, nous avons introduit des généralités sur la commande optimale, les différents types du problème optimale, ainsi les méthodes de résolution de ce problème. En deuxième lieu, on a résolu le problème de contrôle optimale par le calcul des variations. Ensuite on a simplifié l'équation d'Euler Lagrange en utilisant l'identité de Beltrami. A la fin, on a présenté une application de l'identité de Beltrami pour la conception d'une loi de commande optimale d'un bac de stockage. Nous avons exploité aussi la méthode d'Euler Lagrange pour résoudre ce problème et la détermination de débit d'entrée optimale. Les résultats ont été validés par un test de simulation.

Les résultats obtenus démontrent la justesse de l'approche de Beltrami. L'intérêt de cette méthode réside dans la simplification de l'ordre des conditions d'optimalité à vérifier.

Bibliographie :

- [1]. **A. Maidi.** *Cours de la théorie d'optimisation et de la théorie de la commande optimale ;* Département d'automatique, UMMTO, 2005.
- [2]. **P. Radoslav and F. Miroslav.** *Optimal Operation of Batch Membrane Processes.* Springer, Switzerland, 2016.
- [3]. **T. Singh.** *Optimal Reference Shaping for Dynamical Systems: Theory and Applications.* CRC Press, 2009.
- [4]. **A. El Jaï, E. Zerrik et K. Zlot.** *Système dynamique, Analyse et contrôle des systèmes localisés.* Edition Presses Universitaires de Perpignan, Paris, 2008.
- [5]. **J. Vincent-Genod.** *Le transport des hydrocarbures liquides et gazeux par canalisation (Volume 1).* Edition Technip, Paris, 1980.
- [6]. **E. Larouche.** *Commande optimale.* Ecole National supérieur de physique. Edition Strasbourg, 2009.
- [7]. **E. Trélat.** *Contrôle optimal : Théorie et applications.* Edition Vuibert, Paris, 2008.
- [8]. **J. Baptiste et H. Urruty.** *Les mathématiques du mieux faire, volume 2 : La commande optimale pour les débutants.* Edition Ellipses, Paris, 2008.
- [9]. **J. Pierre Babarry et W. Pelczewski.** *Commande optimale des systèmes continus déterministes.* Edition Masson, Paris, 1985.
- [10]. **P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. Pierre Richard, F. Rotella et I. Zambettakis.** *Commande et optimisation des processus.* Edition Technip, Paris, 1990.
- [11]. **J. Marie Flaus.** *La régulation industrielle.* Edition Hermès, Paris, 1994.
- [12]. **K. Louadj.** *Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimale.* Thèse de Doctorat, Département Mathématique, UMMTO, 2012.
- [13]. **N. Moussouni.** *Contrôle optimal, optimisation d'une production Céréalière.* Thèse de Doctorat, Edition département Mathématique, UMMTO, 2013.
- [14]. **P. Bérest** *Calcul des variations.* Edition Masson, Paris, 1997.

[15]. **P. Naslin.** *Théorie de la commande et conduite optimale.* Edition Dunod, Paris, 1969.

[16]. **S. Titouche.** *Résolution d'un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état.*
Thèse de Doctorat, Edition département Mathématique, UMMT0, 2013

Chapitre I :

**Généralités sur la commande
optimale**

Chapitre II :

Résolution d'un problème optimale par le calcul des variations

Chapitre III :

Simplification de l'équation d'Euler-Lagrange basée sur l'Identité de Beltrami

Chapitre IV :

Application au remplissage optimal d'un bac de stockage

Conclusion

Générale

Bibliographie

Sommaire

Introduction

Générale

Liste

Des

Figures

Liste

Des

Symboles