MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE MASTER II

SPECIALITE: MATHEMATIQUES

OPTION: RECHERCHE OPERATIONNELLE ET OPTIMISATION

Présenté par:

Azeb Salim et Laceb Amar

Sujet:

Relation binaires et semigroupe de relations non ambigu

Devant le jury d'examen composé de:

Mr SADI Bachir;	MCA;	U.M.M.T.O;	Président
Mr OUKACHA Brahim;	MCA;	U.M.M.T.O;	Rapporteur
Mr OUANES Mohand;	MCA;	U.M.M.T.O;	Examinateur
Mme LOUADJ Kahina	MCB;	U.M.M.T.O;	Examinateur

Soutenu le: 09/07/2013

Remerciements

Nous remercions à prime abord Dieu tout puissant qui nous a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Nos remerciements vont conjointement et tout particulièrement à Mr B.Oukacha, de nous avoir proposé ce sujet de fin d'étude et nous avoir encadré.Nous tenons également à lui exprimer notre profonde reconnaissance pour sa disponibilité à tout moment,ses encouragements, ses conseils,ainsi que pour la confiance qu'il a en nous.

Nous adressons nos vifs remerciements aux membres du jury,devant qui nous avont l'honneur d'exposer notre travail,et qui ont pris peine de lire avec soin cette thèse pour juger son contenu.

Nous remercions également, tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce projet.

Table des matières

Introduction

Cette thèse porte sur l'étude des rangs des relations binaires,en particulier dans le cas des semi-groupes de relations non ambigue,elle s'organise de la façon suivante.

Le premier chapitre comporte les définitions de base et quelques resultats connus à propos des relations de Green.

Le second chapitre est consacré à la présentation des quatres notions de rang et du grade.Aprés avoir considérer le cas des K-relations où K est un semi-anneau,nous nous consacrons exclusivement aux relations à coefficients 0 ou 1.
Nous présentons les deux notions principales de rang d'une relation en fonction du support de la relation.Par ce biais,nous abordons aussi la non ambiguité,puis nous établissons un lien entre les relations,le graphe qui leurs est associé,la vision ensembliste,et leur forme matricielle.Le rang et le rang non ambigu sont présentés sous chacun de ces points de vue.Nous présentons ensuite les rangs en ligne et en colonne,puis le grade et pour terminer ,nous donons des propriétés pratiques pour le calcul des rangs.

Le troisième chapitre présente les semi-groupes de relations non ambigus et leurs liens avec les automates non ambigus.Nous donnons un encadrement du nombre maximal de '1' que peut contenir une relation non ambigue,ensuite nous décrivons quelques propriétés utiles des semi-groupes de ralations non ambigus transitifs et en particulier de leurs idéal minimal.

Les chapitres 4 et 5 constituent le coeur de ce travail.Dans le quatriéme chapitre,aprés une étude nécessaire sur le comportement des rangs par rapport au produit,nous comparons systématiquement chaque notion du rang avec les autres,y compris le grade.Il vient ensuite l'étude des relations dont l'un des rangs est maximal,dans le cas général puis pour les relations non ambigues.Pour terminer,nous calculons les rangs de relations particulières dont les relations symétriques,les relations monomiales en lignes ou en colonnes et certaines relations triangulaires.

Dans le cinquième chapitre,nous étudions le comportement des rangs des relations dans les semigroupes de relations.Tout d'abord,nous montrons que les résultats connus sur les rangs,rangs en ligne et en colonne dans les $\mathcal{D}$-classes ne s'appliquent au rang non ambigu que si le semigroupe de relations et non ambigu.Nous donnons aussi la valeur du grade des relations régulières dans les s.r.n.a,nous introduisont ensuite les boites et les coffrets et leurs liens avec les m.r.n.a transitifs et donnons quelques propriétés sur l'appartenance d'une relation à une boite ou un coffret.Puis nous montrons que le rang,le rang non ambigu et les rang en ligne et en colonne sont différents dans les $\mathcal{D}$-classes non régulières des m.r.n.a transitifs corréspondants aux boites et aux coffrets.De plus nous examinons la minimalité des contres exemples,notamment dans le cas où le rang et le rang non ambigu diffèrent.Pour términer,nous montrons que dans un sous-semigroupe de B_n,deux $\mathcal{D}$-calsses différentes et comparables par l'ordre partiel sur les $\mathcal{D}$-classes peuvent étre de meme grade,ce qui n'est pas le cas dans B_n.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre contient les définitions de base et les notations utilisées dans le reste de ce travail.

1.1 Notations et conventions générales

Voici les notations que nous utilisons dans ce travail:
-L'ensemble des entiers naturels est $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entriers relatifs est $\mathbb{Z}$.
-L'union disjointe de deux ensembles A et B est notée A$\biguplus B$.
-La partie entière d'un nombre x est notée $\lfloor x \rfloor$.
-Le cardinal d'un ensemble X est noté $|X|$.
-Si L et C sont deux ensembles de parties de X, on note: $\mathcal{L} \cdot \mathcal{C} = \{L \times C | L \in \mathcal{L} et C \in \mathcal{C}\}$
.

1.2 Théorie des semigroupes

Nous rappelons ici les définitions d'algèbre générale que nous utilisons par la suite.
Un semigroupe est un couple $(S,\cdot)$ où S est un ensemble et " $\cdot$ " est une loi de composition interne associative.
Pour deux eléments a et b d'un semigroupe S,on notera le plus souvent ab au lieu de a$\cdot b$.
Soit T et T$'$ deux sous-ensembles d'un semigroupe S.On note: TT$'$ = {ab | a $\in$ T et b $\in$ T'}.Si T est reduit à un singleton {a},on note Ta au lieu de T{a},de meme,on note aT au lieu de {a} T.
Un sous-ensemble T d'un semigroupe S est un sous-semigroupe si TT$\subseteq T$.

Un monoide est un triplet (M,$\cdot$,1) où (M,$\cdot$) est un semigroupe et 1 est un élément neutre: pour tout a $\in M$,$a1 = 1a = a$.
Pour un semigroupe S,on note:

$$\begin{cases} S^1\text{=S si S est un monoide,} \\ S^1\text{=S} \bigcup \{1\} \text{ sinon.(où 1 est un element neutre).} \end{cases}$$

on définit aussi la notation a^k où "a" appartient à un semigroupe et k $\in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ de la façon suivante: a^1 =a et ,pour tout k $\geq$ 2, a^k = aa^{k-1}=a $^{k-1}$a.

Définition 1:
Un idempotent est un élément e telque ee=e.
Un élément "a" est régulier dans S si et seulement s'il existe b$\in$X telque a=aba.

Définition 2:
Un sous-ensemble non vide I d'un semigroupe S est un idéal à gauche (resp idéal à droite) si S^1 $I \subseteq I$ (resp IS^1 $\subseteq$ I).C'est un idéal si S$^1 I$ S $^1 \subseteq I$.
On appelle idéal minimal un idéal minimal pour la relation d'inclusion.Si le semigroupe S possède un zéro,c'est à dire un élément 0$\in$ S tel que pour tout a $\in$ S,a0=0a=0,on dit qu'un idéal I du semigroupe S est 0-minimal s'il est non réduit {0} et si pour tout idéal j de S,J $\subseteq$ I implique J={0}=I.

Définition 3:
Un semi-anneau est un triplet (K,+,$\cdot$),où (K,+) est un monoide commutatif dont l'élément neutre est noté 0,et (k,$\cdot$) est un monoide,la loi $\cdot$ etant distributive par rapport à + et ,pour tout a$\in$K,on a 0a=a0=0.

1.3 Relation de green

Introduite en 1951,les relations de Green,jouent un role important en théorie des semigroupes.Nous donnons les définitions et quelques résultats essentiels.

Définition 4: *Relations de green*
Soit S un semigroupe non necéssairement fini.On définit cinq relations d'équivalence sur S de la façon suivante: soient a et b $\in$ S

$$a\mathcal{R}_S b \text{ si } aS^1 = bS^1,$$
$$a\mathcal{L}_S b \text{ si } S^1a=S^1b,$$
$$a\mathcal{H}_S b \text{ si } a\mathcal{R}_S b \text{ et } a\mathcal{L}_S b,$$
$$a\mathcal{D}_S b \text{ si } \exists c\in S \text{ tel que } a\mathcal{R}_S c\mathcal{L}_S b,$$
$$a\mathcal{J}_S b \text{ si } S^1aS^1=S^1bS^1.$$

Remarquons que a$\mathcal{R}_S$b si et seulement s'il existe c,d$\in$ S^1 tel que ac=b et bd=a.La meme remarque est pour les deux relations $\mathcal{L}_S$ et $\mathcal{J}_S$.On vérifie aussi que la relation $\mathcal{R}_S$ est compatible a gauche avec la multiplication,et que la relation $\mathcal{L}_S$ est compatible a droite avec la multiplication.

Propositions 1.1
1. Les relations $\mathcal{R}_S$ et $\mathcal{L}_S$ cummutent,on a donc :$\mathcal{D}_S$=$\mathcal{R}_S$o$\mathcal{L}_S$=$\mathcal{L}_S$o$\mathcal{R}_S$.

2.Soit S un semigroupe fini,on a $\mathcal{D}_S$=$\mathcal{J}_S$, on a donc $\mathcal{D}_a \leq_S \mathcal{D}_b$ si $S^1aS^1 \subseteq S^1bS^1$.

3.(**lemme de Green**)
Soient a et b deux éléments d'un semigroupe S tel que a$\mathcal{R}_S$b et u,v$\in$ $\mathcal{S}^1$ tel que au=b et bv=a.
Soient ρ_u et ρ_v les translations à droite définies par ρ_u(x)=xu et ρ_v(x)=xv alors, $\rho_u$et ρ_v induisent des bijections inverses de L_a sur L_b et de L_b sur L_a qui présèrvent les $\mathcal{H}_S$-classes,c'est à dire que pour tout x,y $\in L_a$ ou x,y $\in L_b$,x$\mathcal{H}_S$y si et seulement si ρ_u(x)$\mathcal{H}_S\rho_u$(y) ou ρ_v(x)$\mathcal{H}_S\rho_v$(y) respectivement.
Soit a un élément régulier dans un semigroupe S,Alors il existe un idempotent e dans S tel que e $\in$ $\mathcal{D}_a$

Exemple:
Soit M le monoide engendré par les trois éléments:
a=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, b=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et c=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient,en notant 1 la matrice identité et 0 la matrice nulle:

$$M=\{1,a,b,c,ab,bc,cb,0,bcb\}.$$

Puis pour la décomposition en $\mathcal{D}$-classes:

D_1

1
b

D_2

a	ab
c	cb
bc	bcb

D_3 $\boxed{0}$.

Définition 5:
Un automate (resp.semi-automate) sur un alphabet A est un quadruplet $\mathcal{A}$=(Q,I,T,$\mathcal{F}$)(resp.un doublet $\mathcal{A}$=(Q,$\mathcal{F}$)) où Q est un ensemble fini,ses éléments sont les états de l'automate, $\mathcal{F} \subset Q \times A \times Q$ est un ensemble de flèches et,pour un automate,I et T sont des parties de Q appelées réspéctivement ensemble des états initiaux et terminaux.
Une flèche (p,a,q) est aussi notée $p \rightarrow^{a} q$ et la lettre $a \in A$ est appelée étiquette de cette flèche.
Un chemin dans A est une suite finie de flèche consécutives.

Exemple: le semi-automate suivant a pour alphabet l'ensemble {a,b,c} et comme ensemble d'états {1,2}.

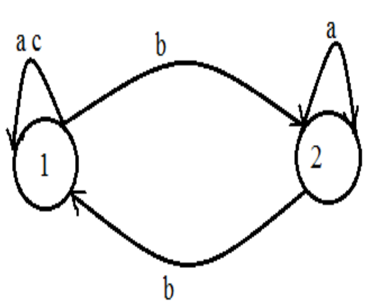

Fig. 1.1

Définition 6:
Soient deux automates A_1=(Q_1,I_1,T_1,$\mathcal{F}_1$) et A_2=(Q_2,I_2,T_2,$\mathcal{F}_2$) sur le meme alphabet A.Le produit des automates $\mathcal{A}_1$et $\mathcal{A}_2$ est un automates sur le meme alphabet,noté $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ est définit comme suite:$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$=($Q_1\times Q_2$,$I_1\times I_2$,$T_1\times T_2$,$\mathcal{F}$), où (($p_1$,$p_2$),a,($q_1$,$q_2$))$\in$ F si et seulement si (p_1,a,q_1)$\in$ $\mathcal{F}_1$ et (p_2,a,q_2)$\in$ $\mathcal{F}_2$.

Lorsque les deux automates sont égaux,le produit $\mathcal{A}\mathcal{A}$ est noté $\mathcal{A}^2$ et est applé carré de l'automate $\mathcal{A}$.

Chapitre 2

Relations binaires

Dans ce chapitre,nous introduisons la définition de K-relation où K est un semi-anneau.Les relations apparaissent comme un cas particulier de cette définition corréspendant au semi-anneau booléen.Nous donnons aussi une définition du rang dans le cas général,les cas où le semi-anneau est $\mathbb{N}$ ou le semi-anneau de bool $\mathcal{B}$ donnent lieu aux définitions du rang et du rang non ambigu d'une relation.Puis nous établissons un lien entre différentes représentations d'une relation entre deux ensembles X et Y:graphe de la relation,sous-ensemble de X $\times$ Y ou encore matrice booléenne. Le rang et le rang non ambigu sont présentés sous chacun de ces points de vue.Nous définissons ensuite les rangs en ligne et en colonne et le grade.

2.1 Les k-relations et leur rang

Soit K un semi-anneau et x et y deux ensembles finis de cardinal n et m respéctivement.
Une K-relation entre X et Y est une application de X $\times$ Y vers K.
On note K$^{X\times Y}$ l'ensemble des k-relations entre X et Y.
Soit K un semi-anneau et X et Y deux ensembles finis.Une décomposition dans K d'une K-relation α entre X et Y est l'écriture de α sous la forme α=$\gamma\lambda$, où γ et λ sont deux K-relations entre X et Z et entre Z et Y,la taille de la décomposition est le cardinal de Z (|Z|)
Le rang dans K d'une K-relation α entre X et Y,noté rg$_K(\alpha)$est la taille minimale d'une décomposition dans K de α.

2.2 Support de la relation:

Dans cette section,on considère des relations à coefficients 0 ou 1,autrement dit ,les relations sont considérées comme des K-relation particulières n'ayant que des coefficient 0 et 1.

2.2.1 Le semi-anneau de Bool $\mathcal{B}$ et le rang dans $\mathcal{B}$:

Soit $\mathcal{B}$ le semi-anneau de Bool,autrement dit l'ensemble $\{0,1\}$ muni des opérations booléennes "+" et "×" définies comme suit:
0+0=0, 0+1=1+0=1+1=1. 1·1=1, 1·0=0·1=0·0=0.

Maintenant on va définir les relations binaires dans $\mathcal{B}$.Pour simplifier,on parle simplement de relations binaires et lorsque le support K de la relation est différent de $\mathcal{B}$,on parle des relations binaires dans K.

Définition 1:
Soient X et Y deux ensembles finis de cardinal n≥1 et m≥1 réspéctivement,tel que X=$\{x_1,x_2,...,x_n\}$ et Y=$\{y_1,y_2,...,y_m\}$. Une relation binaire α entre X et Y est une $\mathcal{B}$-relation.Le graphe de la relation est un graphe biparti non orienté entre X et Y:deux sommets x_i et y_j sont reliés par un arc si $(x_i,y_j)\in \alpha$.

La matrice d'incidence de la relation α ou de son graphe est une matrice booléenne de taille n×m dont les coéfficients (i,j) vaut 1 si (x_i,y_j) est un élément de α,et vaut 0 sinon.
Mettons ça au claire par un exemple simple: Soient X=Y={1,2,3}.

La relation α_1={(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,3)} a pour graphe :

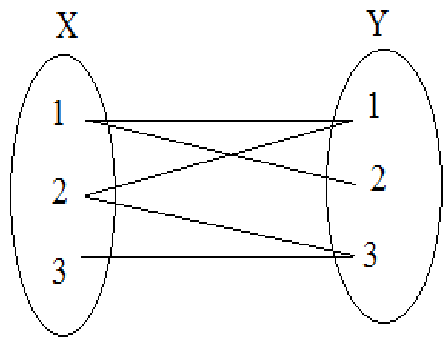

FIG. 2.1

et pour matrice d'incidence $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et voici le semi-automate défini par la relation α_1 :

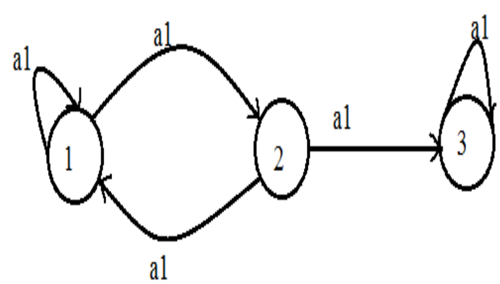

FIG. 2.2

A présent, nous donnons quelques notions se rapportant à une relation $\alpha \subseteq X \times Y$:
iα **:** ensemble des éléments de Y en relation avec i:

$$i\alpha=\{j \in Y \mid (i,j) \in \alpha\}.$$

On représente aussi iα par la i^{ième} ligne de la matrice α,en effet,iα est l'ensemble des positions des "1" dans ce vecteur ligne.

α**j :** ensemble des éléments de X en relation avec j:

$$\alpha j=\{i \in X \mid (i,j) \in \alpha\}.$$

On représente aussi αj par la j^{ième} colonne de la matrice α.

Iα **:** ensemble des eléments de Y en relation avec i $\in$ I, où I $\subseteq$ X :

$$I\alpha=\bigcup_{i\in I} I\alpha.$$

On représente aussi Iα par la somme booléenne des vecteurs lignes iα.

α**J :**ensemble des éléments de X en relation avec j $\in$ J, où J $\subseteq$ Y :

$$\alpha J=\bigcup_{j\in J} \alpha j.$$

.

On représente aussi αJ par la somme booléenne des cevteurs colonnes αj.

Dom(α**):**c'est le domaine de α, c'est à dire l'ensemble des éléments de X appartenant à une colonne de α ou l'ensemble des indices des lignes non vides de α:

$$\text{Dom}(\alpha)=\alpha Y=\{i\in X \mid i\alpha \neq \emptyset\}.$$

.

$\overline{Dom}(\alpha)$:c'est le complément de dom(α) ,qui est aussi l'ensemble des indices des lignes vides de α:

$$\overline{Dom}(\alpha)=X \setminus \text{Dom}(\alpha)=\{i\in X \mid i\alpha=\emptyset\}.$$

.

Im(α**):**c'est l'image de α,c'est à dire l'ensemble des éléments de Y appartenant à une ligne de α ou l'ensemble des indices des colonnes non vides de α:

$$\text{Im}(\alpha)=X\alpha=\{j \in Y, \mid \alpha j\neq \emptyset\}.$$

On utilise le signe "$\bigcup$" ou "+" pour noter l'union ou la somme booléenne de plusieurs lignes ou colonnes,selon que l'on utilise la notation ensembliste ou cevtorielle.

Exemple : Soit

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La deuxième ligne de α est :

$$2\alpha=\{1,3\}=(1\ 0\ 1).$$

L'union des trois lignes donne:

$$X\alpha=\{1,2\}\bigcup\{1,3\}\bigcup\{3\}$$

$$.\ X\alpha=(1\ 1\ 0)+(1\ 0\ 1)+(0\ 0\ 1).$$

La deuxième colonne de α est :

$$\alpha 2=\{1\}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La transposée d'une relation α entre X et Y est notée α^t et est définie par (i,j) $\in$ α^t si et seulement si (i,j) $\in \alpha$.La notation α^t a pour matrice d'incidence la matrice transposée de α.
Le complément d'une relation α noté α^c est définit par (i,j) $\in \alpha^c$ si et seulement si (i,j) $\notin \alpha$.

Rang dans $\mathcal{B}$

Le rang dans $\mathcal{B}$ d'une relation α ,noté $\rho(\alpha)$,est la taille minimale d'une décomposition dans $\mathcal{B}$ de α.

Exemple:

La relation α_2 a une décomposition dans $\mathcal{B}$ de taille 3:

$$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme cette décomposition est de taille minimale ,on a $\rho(\alpha_2)$=3.

2.2.2 Le semi-anneau des entiers naturels et le rang non ambigu :

nous considérons là,des relations binaires dans $\mathbb{N}$,c'est à dire des $\mathbb{N}$-relations à coefficients 0 ou 1.
La matrice d'une relation dans $\mathbb{N}$ entre deux ensembles X et Y est un élément de $\mathbb{N}^{X\times Y}$ où $\mathbb{N}$ est reduit à {0,1}
Soient $\alpha\in\mathbb{N}^{X\times Z}$ et $\beta \in \mathbb{N}^{Z\times Y}$ deux relations dans $\mathbb{N}$,le produit de α et β est obtenu en faisant le produit des matrices dans $\mathbb{N}$ c'est une $\mathbb{N}$-relation,on note ce produit $\cdot_N$

Définition 2:
Le rang dans $\mathbb{N}$ ou rang non ambigu d'une relation α noté $\rho_{NA}(\alpha)$ est la taille minimale d'une décomposition non ambigue de α.

2.2.3 Somme et produit non ambigus :

Definition 3:
Soient $\alpha\in\mathbb{N}^{X\times Z}$ et $\beta \in \mathbb{N}^{Z\times Y}$ deux relations binaires dans $\mathbb{N}$.Le produit (respectivement la somme $\alpha +_N \beta$)$\alpha \cdot_N \beta$ est non ambigu si $\alpha \cdot_N \beta$ ($\alpha +_N \beta$)est une relation à coefficients {0,1}.
Autrement dit,le produit de deux relations binaires α et β est non ambigu si leur produit booléen est égal à leur produit dans $\mathbb{N}$:$\alpha\beta$=$\alpha \cdot_N \beta$.De meme,la somme de deux relations est non ambigue si leur somme booléenne est égale à leur somme dans $\mathbb{N}$.
Une somme ou un produit est ambigu s'il n'est pas non ambigu.
Pour tester si le produit de α et β est non ambigu,il suffit de vérifier qu'une ligne de α et une colonne de β ont au plus un élément en commun.

2.3 Différents point de vue sur le rang et le rang non ambigu:

Une relation binaire peut étre considérer de plusieures façon:on peut s'interesser à son graphe,ou bien considérer la relation comme un sous-ensemble de X×Y,ou encore comme une matrice à coefficients dans 0,1.

2.3.1 Les graphes

Le rang dans $\mathcal{B}$ d'une relation est le nombre minimal de sous graphes bipartis complets nécessaire pour couvrir les arétes du graphe de la relation sachant qu'une aréte peut étre couverte plusieurs fois.

Exemple:

soit la relation $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

qui a pour graphe

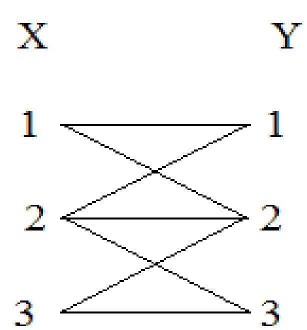

FIG. 2.3

Le rang de αest 2,car il faut au minimum deux sous-graphes bipartis complets pour couvrir toute les arétes du graphe de α.

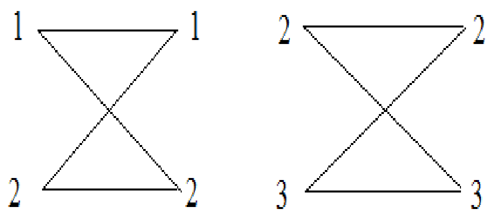

Fig. 2.4

Remarquons que l'aréte (2,2) est couverte deux fois.
La notion de rang non ambigu,comme celle du rang,à été définit en termes de graphe par J.Orlin [Or77]:c'est le nombre minimal de sous graphes bipartis complets nécessaires pour partitionner les arétes du graphe de la relation.

Exemple :
Dans l'exemple ci-dessus,il faut minimum trois sous-graphes bipartis complets pour partitionner les arétes de α.

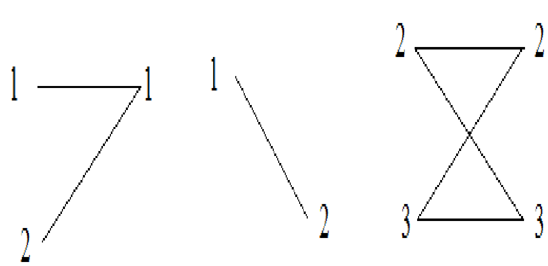

Fig. 2.5

2.3.2 Les ensembles

Ici,une décomposition dans β d'une relations α entre X et Y s'écrit comme union de prosuits cartésiens de parties de X et de Y.
En particulier,si la décomposition s'écrit $\alpha = \gamma\lambda$,chaque linge de α se décompose en somme booléenne de ligne de λ,il est de méme pour les colonnes.

T.Jiang et B.Ravikumar décrivent le problème du rang de α de la façon suivante:
Problème de la base d'un ensemble
Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles de parties de X (ici $\mathcal{L}$ est l'ensemble des lignes ou des colonnes de α).On dit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{L}$ si ,pour tout L $\in \mathcal{L}$,la partie L se décompose en union d'éléments de $\mathcal{B}$.Une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ n'est pas nécessairement incluse dans $\mathcal{L}$.Etant donné un entier k,le problème est de savoir si $\mathcal{L}$ a une base de cardinal au plus k.

Exemple :
On connait une décomposition dans $\mathcal{B}$ de α_2 de l'exemple précedent de taille minimale 3,$\alpha_2 = \gamma\lambda$ avec : $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cette décomposition dans $\mathcal{B}$ s'écrit aussi comme union de trois produits cartésient:$\alpha_2 = \{1,2,5\} \times \mathbf{\{1,2\}} \cup \{1,3,5\} \times \mathbf{\{1,3\}} \cup \{2,4,5\} \times \mathbf{\{4\}}$.

Les ligne de λ correspondent aux ensembles en gras.soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des ligne de α_2
$\mathcal{L}$={{1,2,3},{1,2,4},{1,3},{4},{1,2,3,4}},il s'ensuit que{{1,2},{1,3},{4}} est une base de cardinal minimal de $\mathcal{L}$.La décomposition de α_2 donne aussi une base de cardinal minimal de l'ensemble des colonnes de α_2.
De manière analogue,une décomposition non ambiguë d'une relation α entre X et Y s'écrit comme union disjoint de produit cartésien de X et de Y.Si $\alpha = \gamma\lambda$ est une décomposition non ambiguë,chaque ligne de α se décompose sans ambiguïté en somme de ligne de λ.Comme précedemment,ce problème est décrit en terme d'ensemble par T.Jiang et B.Ravikumar:

Problème de la base d'un ensemble
Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles de parties de X.On dit que $\mathcal{B}$ est une base normal de $\mathcal{L}$ si pour tout L $\in \mathcal{L}$,L se décompose en union disjointe d'élément de $\mathcal{B}$.Une base normale $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ n'est pas nécessairement incluse dans $\mathcal{L}$.Etant donné un entier k,le problème est de savoir si $\mathcal{L}$ est une base normal de cardinal au plus k.

2.3.3 Les blocs

Un bloc est une relation de rang 1:c'est le produit cartésien de deux sous ensembles de X et de Y.Toute les lignes et les colonnes de sa matrice sont égales ou nulles.
Un bloc α est entièrement définit par une ligne et une colonne non vides.En notant C et L cette colonne et cette ligne,on peut ecrire: α=CL.
la ligne L peut étre considérée comme un sous ensemble de X et la colonne comme un sous ensemble de Y.
Le graphe d'un bloc est composé d'un unique sous graphe biparti complet.

Exemple:
Voici un bloc β,sa matrice et son graphe:
Soient X={1,2,3} et Y={1,2,3,4},

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \{1,2\} \times \{1,3,4\}$$

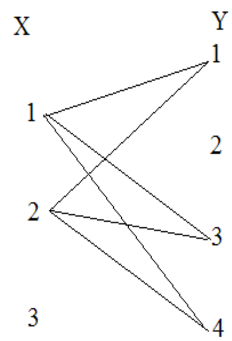

FIG. 2.6

On peut développer l'écriture d'une décomposition dans $\mathcal{B}$ en une somme booléenne de relation binaires,voici comment on passe d'une relation a l'autre:
soit r la taille de la décomposition dans $\mathcal{B}$ d'une relation $\alpha = \gamma\lambda$.Soient $C_1, C_2, \ldots, C_r$ les r colonnes de γ et $L_1, L_2, \ldots, L_r$ les r lignes de λ,on a alors $\alpha = \gamma\lambda = C_1L_1 + \ldots + C_rL_r$.Chaque produit C_iL_i forme un bloc,inversement ,si on connait une décomposition en blocs de α ,on en deduit une décomposition dans $\mathcal{B}$ par :

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ .. \\ L_r \end{pmatrix}$$

On utilise de préférence la notation $\cup$ au lieu de $+$ lorsque les blocs ne sont pas notés de façon matricielle.
On note $\alpha = \uplus\, C_i L_i$ une décomposition de α de taille r.On dit aussi que le rang d'une relation est le nombre minimal de blocs nécessaires pour couvrir les '1' de la relation.cette termonologie vient du fait que chaque '1' de la matrice doit appartenir à au moins un bloc.

Remarques :
1.Une relation peut avoir plusieurs décompositions de taille minimal dans $\mathcal{B}$.

2.Un bloc est maximal dans une relation α s'il n'est pas strictement inclus dans un autre bloc de relation.

3.Si un élément d'une relation α appartient à un unique bloc maximal de α alors,ce bloc apparait dans toute décomposition dans $\mathcal{B}$ de α.

4.Si α=C_1L_1+...+C_rL_r est une décomposition en blocs de α de taille r,on a aussi α=C_1L_1+...+C_rL_r+C_rL_r,ce qui permet de trouver des décompositions en blocs de taille quelconque supérieure ou égale à r,par conséquent,si une relation α a une décomposition dans $\mathcal{B}$ de taille r,et aucune décomposition de taille r-1,alors $\rho(\alpha)$=r.

Une relation peut avoir plusieurs décompositions non ambigues de taille minimal.

A la difference d'une décomposition dans $\mathcal{B}$,on ne peut supposer que tout les blocs d'une décomposition non ambigue sont maximaux puisque chaque élément doit appartenir à exactement un bloc.

Si α a une décomposition non ambigue de taille p< $\mid \alpha \mid$,alors il existe une décomposition non ambigue de taille p+1.De ce fait,si une relation α a une décomposition non ambigue de taille p et aucune décomposition non ambigue de taille p-1,alors $\rho_{NA}(\alpha)$=p.

2.4 D'autre rangs pour une relation binaire

2.4.1 Cardinal des espaces lignes et espaces colonnes

Soit α une relation entre X et Y.l'espace ligne d'une relation α noté R(α) est l'ensemble de toutes les unions possibles de ligne de α.R(α)={Iα | $I \subseteq X$}
De méme,l'espace colonne d'une relation α,noté C(α),est l'ensemble de toutes les unions possibles de colonnes de α.C(α)=$\{\alpha J \mid J \subseteq Y\}$.
Nottons que R(α) et C(α) contiennent l'ensemble vide.

Lemme 2.1
Pour toute relation α,on a $\mid R(\alpha) \mid = \mid C(\alpha) \mid$

Définition 5:
On appelle grade d'une relation α,noté grade(α),le cardinal de l'espace ligne et de l'espace colonne: grade(α)=$\mid R(\alpha) \mid = \mid C(\alpha) \mid$

Exemple :

Soit $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors R(α_1)={$\emptyset$,{1,2},{1,3},{1,3},{3},{1,2,3}}
C(α_1)={$\emptyset$,{1,2},{1},{2,3},{3},{1,2,3}} et donc grade(α_1)=5.

2.4.2 Rangs en ligne et en colonne

La base en ligne de la relation α,notée r(α) est l'ensemble des lignes non vides de α qui ne sont pas union d'autres lignes de α.On définit de meme la base en colonne de α et en le note c(α).
La terminologie "base en ligne" peut se justifier ainsi :r(α) et c(α) sont des bases dans le sens où toute ligne de α s'ecrit comme union (somme booléenne) de ligne de r(α) et ,de meme,toute colonne de α s'écrit comme union de colonnes de c(α).

Lemme 2.2
Soit deux relations α et β sur X,on a :
R(α)=R(β)$\Longleftrightarrow$r(α)=r(β)
et
$C(\alpha)$=C(β)$\Longleftrightarrow$c(α)=c(β).

Remarques :
1.Dans cette définition de "base",toutes les lignes de la base en ligne r(α) sont des lignes de α.

2.La décomposition des lignes de α sur r(α) n'est pas toujours unique,comme on le montre l'exemple suivant:

Exemple :

Pour α_2=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La base en ligne est r(α_2)={1α_2,2α_2,3α_2,4α_2} et la cinquième ligne a plusieurs décompositions sur r(α_2):
5α_2=1$\alpha_2\bigcup$1α_2=1$\alpha_2\bigcup$4α_2=....

Définition 6: *Rang en ligne et en colonne*:

Le rang en ligne d'une relation α,noté $\rho_r(\alpha)$,est le cardinal de sa base en ligne r(α),de meme,le rang en colonne de α est le cardinal de sa base en colonne c(α).

Exemple :
La relation α_2 est une de {1,2,3,4,5} sur {1,2,3,4}.La base en ligne est r(α)={{1,2,3},{1,2,4},{1,3},{4
et la base en colonne est c(α_2)={{1,2,5},{1,3,5},{2,4,5}} donc $\rho_r(\alpha_2)$=4,et $\rho_c(\alpha_2)$=3.

2.5 Proporiétés sur le calcul des rangs :

Pour une relation α entre X et Y,i∈X et j∈Y,on note respectivement $\alpha_{\bar{i},*}$ et $\alpha_{*,\bar{j}}$ les relations entre X et Y obtenues à partir de α en remplaçant la ligne iα par une ligne nulle et la colonne αj par une colonne nulle:

$$\alpha_{\bar{i},*}=\{(k,j)\in \alpha \;|k\neq i\}$$

et

$$\alpha_{*,\bar{j}}=\{(i,k)\in \alpha \;|k\neq j\}.$$

On note aussi $\alpha_{\overline{i,j}}$ la relation où la ligne i et la colonne j sont remplacées par des 0:

$$\alpha_{\overline{i,j}}=\{(k,l)\in \alpha \;|k\neq i \text{ et } l\neq j\}=(\alpha_{\bar{i},*})_{*,\bar{j}}.$$

On étend cette notation à un ensemble de lignes iα avec i∈I ou à un ensemble de colonnes αj avec j∈J de la façon suivante.

Soient deux sous-ensembles I⊆X et J⊆Y.

$$\alpha_{\bar{i},*}=\{(k,j)\in \alpha \mid k\notin I\}$$
$$\alpha_{*,\bar{j}}=\{(i,k)\in \alpha \mid k\notin J\}$$
$$\text{et}$$
$$\alpha_{\overline{i,j}}=\{(k,l)\in \alpha \mid k\notin I \text{ et } l \notin J\}$$

On note aussi

$$\alpha_{i,j}=\{(k,l) \in \alpha \mid k \in I \text{ et } l\in J\}$$

Exemple :
Soit la relation

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les relations $\alpha_{\bar{1},*}$ et $\alpha_{*,\bar{4}}$ sont obtenues en supprimant respectivement les éléments de la première ligne et ceux de la quatrième colonne.

$$\alpha_{\bar{1},*}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha_{*,\bar{4}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si I={1,2} et J={3,4}, on a alors : $\alpha_{\overline{i,j}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les lemmes suivants comparent les rangs d'une relation α avec ceux des relations $\alpha_{\bar{i},*}$ et $\alpha_{*,\bar{j}}$.

Lemme 2.3
Soient α une relation entre X et Y,i∈ X et j ∈ Y.
(1).La relation α est réstreinte à (X\{i})×Y:

$$\rho(\alpha_{\bar{i},*})\leq \rho(\alpha)\leq \rho(\alpha_{\bar{i},*})+1.$$
$$\rho_{NA}(\alpha_{\bar{i},*})\leq \rho_{NA}(\alpha)\leq \rho_{NA}(\alpha_{\bar{i},*})+1.$$
$$\rho_{r}(\alpha_{\bar{i},*})\leq \rho_{r}(\alpha)\leq \rho_{r}(\alpha_{\bar{i},*})+1.$$
$$\rho_{c}(\alpha_{\bar{i},*})\leq \rho_{c}(\alpha).$$

et $\rho_c(\alpha)$ peut atteindre la valeur $\frac{1}{2}\rho_c(\alpha_{\bar{i},*})(\rho_c(\alpha_{\bar{i},*})+1)+1$.

(2).La relation α est restreinte à X $\times$ (Y\{j}):

$$\rho(\alpha_{*,\bar{j}})\leq \rho(\alpha)\leq \rho(\alpha_{*,\bar{j}})+1.$$
$$\rho_{NA}(\alpha_{*,\bar{j}})\leq \rho_{NA}(\alpha)\leq \rho_{NA}(\alpha_{*,\bar{j}})+1.$$
$$\rho_c(\alpha_{*,\bar{j}})\leq \rho_c(\alpha)\leq \rho_c(\alpha_{*,\bar{j}})+1.$$
$$\rho_r(\alpha_{*,\bar{j}})\leq \rho_r(\alpha).$$

et $\rho_r(\alpha)$ peut atteindre la valeur $\frac{1}{2}\rho_r(\alpha_{*,\bar{j}})(\rho_r(\alpha_{*,\bar{j}})+1)+1$.

Lemme 2.4

Soient α une relation entre X et Y,i$\in$ X et j$\in$ Y.
(1).Si α possède une colonne ne contenant que l'élément i,alors:

$$\rho(\alpha)=\rho(\alpha_{\bar{i},*})+1,$$
$$\rho_{NA}(\alpha)=\rho_{NA}(\alpha_{\bar{i},*})+1,$$
$$\rho_r(\alpha)=\rho_r(\alpha_{\bar{i},*})+1;$$

(2).Si α possède une ligne ne contenant que l'élément j ,alors:

$$\rho(\alpha)=\rho(\alpha_{*,\bar{j}})+1,$$
$$\rho_{NA}(\alpha)=\rho_{NA}(\alpha_{*,\bar{j}})+1,$$
$$\rho_c(\alpha)=\rho_c(\alpha_{*,\bar{j}})+1.$$

Lemme 2.5

Soit α une relation entre X et Y.

(1).Si la ligne iα est union d'autres lignes de α,alors :

$$\rho(\alpha)=\rho(\alpha_{\bar{i},*}),$$
$$\rho_r(\alpha)=\rho_r(\alpha_{\bar{i},*}),$$
$$\rho_c(\alpha)=\rho_c(\alpha_{\bar{i},*}),$$
$$\mathrm{grade}(\alpha)=\mathrm{grade}(\alpha_{\bar{i},*}).$$

Si de plus la ligne iα est union disjointe d'autres lignes de α,alors :

$$\rho_{NA}(\alpha)=\rho_{NA}(\alpha_{\bar{i},*}).$$

(2).Si la colonne αj est union d'autres colonnes de α,alors:

$$\rho(\alpha)=\rho(\alpha_{*,\bar{j}}),$$

$$\rho_r(\alpha)=\rho_r(\alpha_{*,\bar{j}}),$$
$$\rho_c(\alpha)=\rho_c(\alpha_{*,\bar{j}}),$$
$$\text{grade}(\alpha)=\text{grade}(\alpha_{*,\bar{j}}).$$

Si de plus l'union est disjointe,

$$\rho_{NA}(\alpha)=\rho_{NA}(\alpha_{*,\bar{j}}).$$

.

Exemple:
Soit

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base en ligne r(α)={2α,3α,4α},d'où Z_r={2,3,4} et

$$\alpha_{Z_r,*}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base en colonne est c(α)={α1,α2,α3}={α1,α2,α4}.On considère par exemple Z_c={1,2,3},d'où

$$\alpha_{Z_r,Z_c}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

.

Chapitre 3

Semigroupe de relations non ambigu

3.1 Définitions et lien avec les automates

Définition 1:
Un semigroupe (S,$\cdot$) de relations sur X est dit non ambigu si le produit de deux relations de S est toujours non ambigu.c'est à dire que pour toute relations α,β dans S, et pour tout (i,k) $\in \alpha\beta$,il existe un unique j $\in$ X tel que (i,j) $\in \alpha$ et (j,k)$\in \beta$.

On défini de méme un monoide de relation non ambigu.
cette définition entraine la propriété suivante :
Soit S un semigroupe de relation non ambigu sur X.Une ligne et une colonne quelquonques de deux relations de S ont au plus un élément en commun:si α,β $\in$S,et i,j$\in$X,alors : |i$\alpha \cap \beta$j| ≤ 1.
En effet si ce n'est pas le cas ,le produit des relations α et β serai ambigu.

Définition:
une relation α sur X est non ambigue si le semigroupe engendré par α est non ambigu,en particulier toute relation d'un s.r.n.a est non ambigue.
Dans le cas d'une relation idempotente e,cela revient à dire que le produit ee est non ambigu puisque le semigroupe engendré par e est {e}.Il suffit donc de vérifier qu'une ligne et une colonne quelquonque de e ont au plus un élément en commun.

Lemme 3.1
Une relation α sur X est non ambigue si et seulement si pour tout entier k,l,et pour tout i,j $\in$X,|i$\alpha^k \cap \alpha^l$j| ≤ 1.

Définition:
Soit un automate $\mathcal{A}$=(Q,I,T,$\mathcal{F}$) sur un alphabet A.
Soit φ:A$\longrightarrow \mathcal{N}^{Q\times Q}$.

φ(a)$_{p,q}$=1 si (p,a,q)$\in \mathcal{F}$,0 sinon.

où a $\in$ A et p,q $\in$ Q

On étend φ sur A* par :$\varphi(1)=I_Q$ où 1 est le mot vide;et pour deux mots u,v $\in$ A*: φ(uv)$_{p,q}$=$\sum$ φ(u)$_{pr}\varphi$(v)$_{rq}$.
Pour un mot $\omega \in$ A*,$\varphi(\omega)_{p,q}$ est le nombre de chemins dans l'automate $\mathcal{A}$ de l'état p à l'état q ayant ω pour étiquette ,on dit alors que φ est la représentation associée à l'automate $\mathcal{A}$
L'automate $\mathcal{A}$ est dit non ambigu si pour tout mot ω de $\mathcal{A}^*$ il y a au plus un chemin d'étiquette ω allant d'un état p vers un état q dans l'automate.
On définit de la méme façon un semi-automate non ambigu puique les états initiaux et términaux n'intérviennent pas dans la définition.
Un automate est ambigu si il n'est pas non ambigu.

Lemme 3.2
Soit S un semigroupe de relations binaires sur X engendré par un ensemble de relation A=α_1,α_2,...,α_p,et soit $\mathcal{A}$le semi-automate sur l'alphabet A tel que Q=X,et (i,α,j) $\in$ F si et seulement si (i,j) $\in \alpha$.Alors le semigroupe S est non ambigu si et seulement si le semi-automate $\mathcal{A}$ est non ambigu.

Exemple:
Soit S un semigroupe engendré par les deux relations suivante:

α=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et β=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et **A** l'automate correspondant:

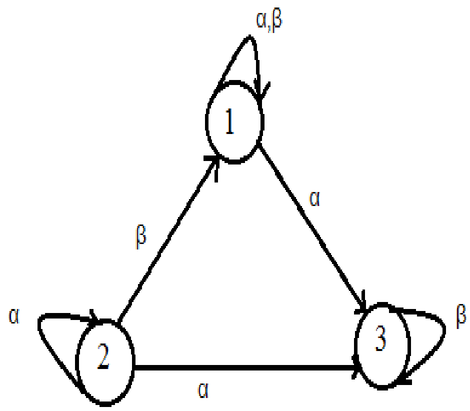

Fig. 3.1

Pour vérifier que l'automate $\mathcal{A}$ est non ambigu,on calcule son carré.On a déssine ci-dessous uniquement les chemins dont l'origine est de la forme:(p,p)$\mapsto$(r,s)$\mapsto$... avec r<s.

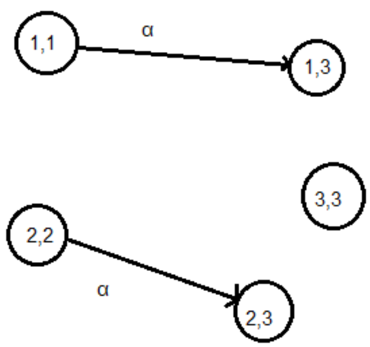

Fig. 3.2

Comme aucun de ces chemins n'aboutit à un état (q,q),on en déduit que l'automate $\mathcal{A}$ est non ambigu,et le semigroupe S aussi.

3.2 Semigroupe de relation non ambigu transitif

Un semigroupe de relations S sur X est dit transitif si pour tout i,j $\in$ X,il esxiste une relation $\alpha \in$ S telle que (i,j)$\in$ α.

Lemme 3.3
Soit S un s.r.n.a.t sur X avec |X| $\geq$2,et ζ un zéro de S,alors ζ est la relation vide 0.

Chapitre 4

Comparaison et propriétés des rangs

Dans ce chapitre ,on commence par des comparaisons sur les rangs.Nous comparons systématiquement chaque notion du rang avec les autres,y compris le grade.Nous étudions ensuite les relations dont l'un des rang est maximal,dans le cas général puis non ambigu.Nous montrons que certaines valeurs du grade sont intérdites pour les relations non ambigues.Pour términer,nous calculons les rangs des relations particulières comme les relations symétriques,les relations monomiales en ligne ou en colonne et certaines relations triangulaires.

4.1 Comparaison des rangs par rapport au produit

Proposition
Soient α et β deux relations binaires sur un ensemble X,et $\alpha\beta$ leur produit dans $\mathcal{B}$,on a alors les proporiété suivantes:

1. Pour le rang $\rho(\alpha\beta) \leq \min(\rho(\alpha), \rho(\beta))$;

2. Pour le rang non ambigu:si le produit $\alpha\beta$ est non ambigu,alors $\rho_{NA}(\alpha\beta) \leq \min(\rho(\alpha), \rho(\beta))$, mais la propriété n'est pas vraie dans le cas général;

3. Pour le rang en ligne et en colonne:$\rho(\alpha\beta) \leq \rho_r(\alpha)$ et $\rho_c(\alpha\beta) \leq \rho_c(\beta)$;

4. Pour le grade :grade($\alpha\beta$)$\leq$ min(grade(α),grade(β))

Il existe un semi-anneaux K différents de $\mathcal{B}$,pour lesquels la propriété $\mathrm{rg}_K(\alpha\beta)\leq\min(\mathrm{rg}_K(\alpha),\mathrm{rg}_K(\beta))$ n'est pas vérifiée,par exemple $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$.

Cette proposition montre que le rang non ambigu est interessant dans le cas des s.r.n.a,et que le rang dans K n'est pas toujours approprié au cadre des relations binaires lorsque le semi-anneau K est différent du semi-anneau de bool $\mathcal{B}$.

Lemme 4.1
Soient deux relations α et β .Alors $\mathrm{R}(\alpha\beta)\subseteq\mathrm{R}(\beta)$ et $\mathrm{C}(\alpha\beta)\subseteq\mathrm{C}(\alpha)$

4.2 Comparaison des différentes notions de rangs entre elles

La proposition ci-dessous compare les différentes notions de rang définies jusqu'à présent,ensuite nous comparons le grade avec chaque notion de rang,et enfin,nous citons le cas où les rangs valent 0 ou 1.

Proposition 4.2
Soit une relation $\alpha \subseteq \mathrm{X}\times\mathrm{Y}$,on a alors:
1. $\rho(\alpha)\leq \min(\rho(\alpha_r),\rho(\alpha_c))$.
2. $\rho(\alpha)\preceq\rho_{NA}(\alpha)$.
3. $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\alpha)\leq \rho_{NA}(\alpha)$.
4. $\rho(\alpha)$ et $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\alpha)$ sont incomparables.
5. $\min(\rho(\alpha_r),\rho(\alpha_c))$ et $\rho_{NA}(\alpha)$ sont incomparables mais on a: $\rho_{NA}(\alpha)\leq 2^{(min\rho(\alpha_r),\rho(\alpha_c))}$-1.
6. $\max(\rho(\alpha_r),\rho(\alpha_c))$ est incomparable avec $\rho_{NA}(\alpha)$ et $\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\alpha)$.
De plus les inégalités 1,2 et 3 peuvent étre strictes.

Lemme 4.3
La différence entre le rang et le rang non ambigu pour une meme relation peut prendre n'importe qu'elle valeur:quel que soit $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$,il existe une relation α telle que $\rho_{NA}(\alpha)=\rho(\alpha)+\mathrm{k}$.

Proposition 4.4
Soit αune relation de B_n,et r=min($\rho_r(\alpha)$,$\rho_c(\alpha)$).On a alors:
1. r+1$\leq$grade(α)$\leq 2^r$,
2. $\rho(\alpha)$+1$\leq$grade(α)$\leq 2^{\rho(\alpha)}$,
3. $\rho_{NA}(\alpha)$+1$\leq$grade(α)$\leq 2^{\rho_{NA}(\alpha)}$.
Toute les bornes sont atteintes.

Lemme 4.5
Soit α une relation binaire.Si l'un des rangs parmi le rang,le rang non ambigu,le rang en ligne ou en colonne est nul (resp.vaut 1),alors tout les autres rangs cités sont nuls (resp.valent 1) et la relation α est la relation vide (resp.est un bloc) et enfin grade(α)=1 (resp.grade(α)=2).

4.3 Rangs maximaux et non ambiguité

On s'interesse à présent au cas des relations sur X dont l'un au moins des rangs vaut n avec |X|=n.

Définition *Relation de Hall*
Une relation binaire α sur X est dite relation de Hall si α contient une permutation sur X.

Théorème *Hall-konig*
Soit une relation α dans B_n.Cette relation est une matrice de Hall si et seulement si pour tout k$\in${1,2,...,n} et pour tout sous-ensemble {i_1,i_2,...,i_k}$\subseteq${1,...,n},l'union des lignes $i_1\alpha$,$i_1\alpha$,...,$i_k\alpha$ contient au moins k elements.

Lemme 4.6
Soit α une relation binaire,si $\rho_{NA}(\alpha)$=n alors α est une relation de Hall.

Corollaire 4.7
Si $\rho(\alpha)$=n,alors α est une relation de Hall.

Lemme 4.8
Soit α une relation non ambigue,la relations α est de rang plein si et seulement si α est une permutation.

Lemme 4.9
Soit α une relation non ambigue sur X,si α est une matrice de Hall,alors α est une permutation.

Lemme 4.10
Soit α une relation non ambigue sur X,avec |X|=n.On a $\rho_r(\alpha)$=n si et seulement si $\rho_c(\alpha)$=n.

Proposition 4.11
Soit α une relation non ambigue sur X avec |X|=n.Les assertions suivantes sont équivalentes:
1. grade(α)=2^n,
2. $\rho_r(\alpha)$=n,
3. $\rho_c(\alpha)$=n,
4. $\rho_{NA}(\alpha)$=n,
5. α est une permutation.

4.4 Rangs de relations particulières

De cette partie,nous examinons le rang des relations d'un type particulier:les relations symétrique,les relations monomiales en ligne ou en colonne,et enfin les relations triangulaires dont la sur-diagonale est nulle.Ces dérnières relations interveinnent dans la comparaison du rang non ambigu et du rang en ligne et en colonne.

4.4.1 Les relations symétriques

Une relation α sur X est dite symétrique lorsque (i,j) $\in \alpha$ si et seulement si (j,i)$\in$ α.autrement dit,une relation est symétrique si elle est égale à sa transposée.

Proposition 4.12
les rangs en ligne et en colonne d'une relation symétrique sont égaux,en revanche ses rang,rang non ambigu et rang en ligne peuvent etre deux à deux différents.

Exemple
Soit α une relation symétrique ,on sais déja que $\rho_r(\alpha^t)$=$\rho_c(\alpha)$ or α=α^t d'où l'égalité des rangs en ligne et en colonne.

Par ailleurs ,les deux relations suivantes sont symétriques mais leurs rangs sont pas tous égaux.

$$\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha_5=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La relation α_4 illustre la différence entre rang et rang en ligne d'une part et rang non ambigu d'autre part car :$\rho(\alpha_4)$=$\rho_r(\alpha_4)$=$\rho_c(\alpha_4)$=2 alors que $\rho_{NA}(\alpha_4)$=3.
La relation α_5 fournit un exemple où le rang et le rang en ligne diffèrent :$\rho(\alpha_5)$=3 et $\rho_r(\alpha_5)$=4.

4.4.2 Les relations monomiales en ligne ou en colonne

Une relation est dite monomiale en ligne (ou en colonne) lorsque chacune de ses lignes (ou colonnes) contient au plus un élément.

Une relation entre X et Y monomiale en ligne est une fonction partielle de X vers Y.La transposée d'une relation entre X et Y monomiale en colonne est une fonction partielle de Y vers X.

Proposition 4.13
Soit α une relation monomiale en ligne ou en colonne ,on a alors : $\rho(\alpha)$=$\rho_{NA}(\alpha)$=$\rho_r(\alpha)$=$\rho_c(\alpha)$.

4.4.3 Les relations triangulaires dont la sur-diagonale est nulle

Pour simplifier les notations,on suppose dans cette section que X={1,..,n}.
Une relation $\alpha \in B_n$ est dite triangulaire si pour tout i,j $\in$ X tels que j$\leq$i,(i,j) $\in$ α.La sur-diagonale d'une relation $\alpha \in B_n$ est l'ensemble {(i,i+1)|1$\leq$i$\leq$n-1}
Soit $\alpha \in B_n$ une relation triangulaire dont la sur-diagonale est nulle,c'est à dire
$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & * \\ .. & .. & .. & .. & 0 \\ 1 & .. & .. & .. & 1 \end{pmatrix}$$
où les étoiles valent 0 ou 1.Que valent les rangs d'une telle relation

Les résultats de cette section traitent successivement les cas ou les éléments notés par une étoile valent tous 0,puis tous 1,puis le cas où ils valent tous 0 sauf ceux de la première ligne.Le cas général reste à étudier!

Lemme 4.14
Soit α la relation triangulaire de B_n définit par :(i,j)$\in \alpha$ si et seulement si 1$\leq$j$\leq$i$\leq$n.c'est à dire:

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & 0 \\ 1 & .. & .. & 1 \end{pmatrix}$$ alors $\rho(\alpha)$=$\rho_{NA}(\alpha)$=$\rho_r(\alpha)$=$\rho_c(\alpha)$=n et grade(α)=n+1.

Proposition 4.14
Soit n$\geq$2 et soit α la relation de B_n définie par (i,j)$\in \alpha$ si et seulement si i$\neq$j :$\alpha=\begin{pmatrix} 0 & 1 & .. & 1 \\ 1 & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & 1 \\ 1 & .. & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Alors

1. $\rho_{NA}(\alpha)$=n.De plus les deux seules décompositions non ambigues de α de taille minimale sont constitués des n lignes ou des n colonnes de α.
2. Pour n≥5 on a $\rho(\alpha)$≤n-1.Pour n∈{2,3,4},$\rho(\alpha)$=n.
3. $\rho_r(\alpha)$=$\rho_c(\alpha)$=n.
4. grade(α)=n+2.

Proposition 4.15
Soit n≥3 et soit α la relation de B_n definie par (i,j)∈ α si et seulement si j≠i+1 pour 1≤i≤n-1.c'est à dire:

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & & .. & .. & 1 \\ .. & & & .. & 0 \\ 1 & .. & .. & .. & 1 \end{pmatrix} \text{ Alors}$$

1. $\rho_{NA}(\alpha)$=n;
2. pour n≥6,on a $\rho(\alpha)$≤n-2,pour n∈{3,4,5} ,$\rho(\alpha)$=n-1.
3. $\rho_r(\alpha)$=$\rho_c(\alpha)$=n-1.
4. grade(α)=n+1.

Lemme 4.16
Soit n≥2 et soit α une relation de B_n de la forme suivante:si 1≤j≤i≤n,alors (i,j)∈ α,si j≥i+1 pour 2≤i≤n-1,alors (i,j)n'appartient par à α et (1,2) n'appartient pas à α,c'est-à-dire si:

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ où les étoiles représentent des 0 ou des 1,alors } \rho_{NA}(\alpha)\text{=n.}$$

Chapitre 5

Etude des rangs dans un semigroupe de relations

Dans ce chapitre nous analysons le comportement des rangs des relations dans les semigroupes de relations.Nous montrons que dans les s.r.n.a,le rang non ambigu est constant dans une $\mathcal{D}$-classe et que tout les rang sont égaux dans une $\mathcal{D}$-classe régulière.Nous donnons aussi la valeur du grade des relations régulière dans les s.r.n.a.

Une partie importante est ensuite consacrée à introduire les boites et les coffrets.En particulier,nous donnons quelques prporiétés qui caractérisent l'appartenance d'une relation à un monoide défini par une boite ou un coffret.Nous montrons que les rang,rang non ambigu et rang en ligne et en colonne sont différents dans les m.r.n.a.De plus nous nous interessons à la minimalité des contre exemple,notamment dans le cas où le rang et le rang non ambigu diffèrent.

5.1 Rangs et relations de Green

Dans la suite ,nous considérons le semigroupe B_n de toute les relations sur X où $|X|$=n,ou bien un sous-semigroupe S de B_n,on note $\mathcal{D}$,$\mathcal{R}$,$\mathcal{L}$,$\mathcal{H}$ les relations de Green dans B_n et $\mathcal{D}_s$,$\mathcal{R}_s$,$\mathcal{L}_s$,$\mathcal{H}_s$ les relations de Green dans S,les théorème suivant précisent les liens entre les différentes notions de rang et les relations de Green.

Soit α et β deux relations sur X ,alors:

$\alpha\ \mathcal{L}\ \beta$ si et seulement si α et β ont le meme espace ligne,ou encore si et seulement si α et β ont la meme base en ligne.
$\alpha\ \mathcal{R}\ \beta$ si et seulement si α et β ont le meme espace colonne,ou encore si et seulement si α et β ont la meme base colonne.
$\alpha\ \mathcal{R}\ \beta$ si et seulement si α et β ont le meme espace ligne et le meme espace colonne,ou encore si et seulement si α et β ont la meme base en ligne et la meme base en colonne.

Corollaire 5.1
Soit S un sous-semigroupe de relations de B_n,et α et β deux relations de S

Si $\alpha\ \mathcal{L}_s\ \beta$,alors $\rho_r(\alpha)$=$\rho_r(\beta)$ et grade(α)=grade(β).
si $\alpha\ \mathcal{R}_s\ \beta$,alors $\rho_c(\alpha)$=$\rho_c(\beta)$ et grade(α)=grade(β).
Si $\alpha\ \mathcal{D}_s\ \beta$ alors grade(α)=grade(β).

Ce théorème s'applique bien entendu au cas où S=B_n,cependant dans ce cas ,meme la reciproque est fausse comme le montre cet exemple:

soient α et β dans B_3 où :$\alpha=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ces deux relations ont le meme rang en ligne et en colonne (3) et meme grade (5),pourtant α et β n'appartiennent pas à la meme $\mathcal{D}$-classe et a fortiori pas à la meme $\mathcal{R}$-classe ou à la meme $\mathcal{L}$-classe.En effet βest idempotente alors que α n'est pas régulière ce qui exclu leur appartenance à une $\mathcal{D}$-classe commune.

Théorème 5.2
Soient S un sous-semigroupe de relations de B_n etα et β deux relations de S.Si α $\mathcal{D}_s\ \beta$ alors $\rho_r(\alpha)$=$\rho_r(\beta)$ et $\rho_c(\alpha)$=$\rho_c(\beta)$.

Théorème 5.3
Soient deux relations α et β,et S un sous-semigroupe de B_n. Si $\alpha\ \mathcal{D}_s\ \beta$ alors $\rho(\alpha)$=$\rho(\beta)$,si de plus S est un s.r.n.a, si $\alpha\ \mathcal{D}_s\ \beta$ alors $\rho_{NA}(\alpha)$=$\rho_{NA}(\beta)$.

Cela n'est pas vrai en général dans un semigroupe quelconque.

Soit α une relation régulière dans un semigroupe S alors,$\rho_r(\alpha)=\rho_c(\alpha)=\rho(\alpha)$.

Théorème 5.4
Une relation α est régulière si et seulement si $\alpha \subseteq \alpha(\alpha^t\ \alpha^c\ \alpha^t)^c\ \alpha$.

5.2 Etude des rangs dans un s.r.n.a

Les deux propositions suivantes caractérisent la forme d'une relation idempotente non ambigue,ce qui permet ensuite d'en déduire l'égalité des rangs des relations régulières dans un s.r.n.a.La première caractérisation a été donnée par Berstel et Perrin sous une forme matricielle,alors que la seconde caractérise les lignes de la relation.

Proposition 5.5
Soient M un m.r.n.a sur X,α dans M et Y=Fix(α).La relation α est idempotente si et seulement si $\alpha=\gamma\lambda$ et $\lambda\gamma=\mathrm{I}_Y$,où γ et λ sont respectivement les restrictions de α à X×Y et à Y×X de plus $\gamma=\begin{pmatrix} I_Y \\ \gamma' \end{pmatrix}$,$\lambda=(\mathrm{I}_Y\ \lambda')$,$\alpha=\begin{pmatrix} I_Y & \lambda' \\ \gamma' & \gamma'\lambda' \end{pmatrix}$
avec $\gamma' \subseteq$(X)×Y,$\lambda' \subseteq$Y×(X) et $\lambda'\gamma'=0$.

Corollaire 5.6
Une relation α sur X est idempotente et non ambigue si et seulement si pour tout l∈X,la ligne lα est de la forme (1) ou (2):
(1) lα={l}$\uplus$K$_l$,où K$_l$ $\subset$ $\overline{Dom}(\alpha)$,i.e. pour tout k ∈K$_l$,kα=∅.
l(α) est union disjointe de lignes de la forme (1).

Exemple:

$$\text{La relation } \alpha=\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & 1 & . & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

est idempotente et non ambigue puisqu'elle vérifie les conditions du lemme ci dessue:l'ensemble des lignes de la forme (1) est Fix(α)={1,2,3,4} et les lignes 5,7 et 9 sont vides:
1α={1} ,2α={2}∪{9}, 3α={3}∪{5,7,9},4α={4}∪{7}.
où les ligne {5,7,9} sont vides.Toutes les autres lignes sont de la forme (2).Les lignes vides sont des unions vides et :
6α={1,2,4}∪{7,9}=1α∪2α∪4α, 8α={1,4}∪{7}=1α∪4α, 10α={4}∪{7}=4α.

Le théorème suivant traite les cas d'égalité des rangs pour les relations régulières dans le cas des s.r.n.a.

Théorème 5.7
Soit S un s.r.n.a et α une relation régulière dans S,alors:$\rho_r(\alpha)=\rho_c(\alpha)=\rho(\alpha)=\rho_{NA}(\alpha)$ si αest idempotente,la valeur de ces rangs est $|\text{Fix}(\alpha)|$

Dans l'exemple précédent ,on vérifie bien que $\rho_r(\alpha)=\rho_c(\alpha)=\rho(\alpha)=\rho_{NA}(\alpha)=|\text{Fix}(\alpha)|$.
En effet $\rho(\alpha)$=Fix(α)={1,2,3,4} est de cardinal 4,

$$\text{et } \alpha=\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

est une décomposition non ambigue de α.

Théorème 5.8
Soit S un s.r.n.a. sur un ensemble X,et soit α une relation régulière dans S,soit p la valeur commune des rangs,rang en ligne et colonne et du rang non ambigu de α (et de $|\mathrm{Fix}(\alpha)|$ si α est idempotente) on a :grade(α)=2^p.
Ce résultat n'est pas vrai dans un semigroupe de relations quelconque.
Comme l'illustre l'exemple suivant,l'hypothèse de non ambiguité du semigroupe est nécessaire.

Exemple:
Soit $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cette relation est idempotente et ambigue car $1\alpha \cap \alpha 2$={1,2}.La base en ligne est r(α)={{1,2},{2}},d'où $\rho_c(\alpha)=\rho_r(\alpha)=\rho(\alpha)=2$.Cependant,l'espace ligne est R(α)={$\emptyset$,{1,2},{2}} ,donc grade(α)=$3\neq 2^2$.

5.3 Boites et coffrets:m.r.n.a transitifs maximaux avec ou sans zéro

On dit qu'une famille $\mathcal{L}$ de parties de X est recouvrante si l'union de tous les éléments de $\mathcal{L}$ est égale à X.

Définition:*Section et sous-section*
Soit $\mathcal{L}$ une famille recouvrante de parties de X et C une partie de X.On dit que

C est une section (resp.sous-section) de $\mathcal{L}$ si C intersecte chaque élément de $\mathcal{L}$ en exactement un point (resp.en au plus un point).

Définition: *Coffrets et boites*

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ deux familles recouvrantes de parties d'un ensemble X.le couple ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) est un coffret (une boite) sur X si $\mathcal{L}$ est l'ensemble des sections (des sous-sections maximales) de $\mathcal{C}$,et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des sections (des sous-sections maximales) de $\mathcal{L}$.

L'entier |X| est appelé taille du coffret (resp.de la boite).

Les coffrets et les boites sont représentés par des tableaux dont les lignes et les colonnes sont indexées par les éléments de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{C}$.Chaque case du tableau contient l'intersection des éléments L et C l'indexant.Les ensembles L et C sont notés sans accolades et sans virgules,c'est à dire par exemple 1 2 au lieu de {1,2}.

Exemple:

Voici une boite qui n'est pas un coffret :

$\mathcal{L} \setminus \mathcal{C}$	1 3	1 4	2 4
1 2	1	1	2
2 3	3		2
3 4	3	4	4

La colonne {1,4} est une sous-section maximale de $\mathcal{L}$ mais n'est pas une section car $\{1,4\}\cap\{2,3\}=\emptyset$.

Il existe aussi des coffrets qui ne sont pas des boites comme l'illustre l'exemple suivant.Cet exemple est de taille minimale car tous les coffrets de taille inférieure ou égale à 5 sont aussi des boites.

Exemple:

$\mathcal{L} \setminus \mathcal{C}$	1 4 5	2 4 6	3 5 6
1 2 3	1	2	3
1 6	1	6	6
2 5	5	2	5
3 4	4	4	3

Pour obtenir une boite,il faudrait ajouter {4,5,6} en colonne car c'est une sous-section maximale de $\mathcal{L}$.

Théorème 5.9
Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ deux familles de parties de X.
(1) Si ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) est un coffret,alors l'ensemble des sections de $\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}$ est un m.r.n.a.t ne contenant pas 0.
(2) Si ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$)est une boite,alors l'ensemble des sous-sections de $\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}$ est un m.r.n.a.t.

Lemme 5.10
Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ deux familles de parties de X.
(1) Si ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) est un coffret,alors $\mathcal{L} \cdot \mathcal{C} \subseteq \text{Sect}(\mathcal{L} \cdot \mathcal{C})$.
(2) Si ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) est une boite,alors $\mathcal{L} \cdot \mathcal{C} \subseteq \text{SSect}(\mathcal{L} \cdot \mathcal{C})$.

Lemme 5.11
Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ deux familles de parties de X avec |X|=n.
(1) Si ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) est un coffret,l'ensemble des sections de $\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}$ est égale à l'ensemble des relations qui envoient $\mathcal{L}$ dane $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$: $\text{Sect}(\mathcal{L} \cdot \mathcal{C})=\{\alpha \in \text{B}_n \setminus \forall \text{L}\in \mathcal{L}, \forall \text{C}\in \mathcal{C}, \text{L}\alpha \in \mathcal{L} \text{ et } \alpha\text{C}\in \mathcal{C}\}$.
(2) Si ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) est une boite et $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{C}'$ sont les ensembles des sous-sections de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{L}$ respectivement,alors l'ensemble des ous-sections de ($\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}$) est égal à l'ensemble des relations qui envoient $\mathcal{L}'$ dans $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{L}'$: $\text{SSect}(\mathcal{L} \cdot \mathcal{C})=\{\alpha \in \text{B}_n \setminus \forall \text{L}\in \mathcal{L}', \forall \text{C}\in \mathcal{C}', \text{L}\alpha \in \mathcal{L}' \text{ et } \alpha\text{C}\in \mathcal{C}'\}$.

Lemme 5.12
Soient ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) un coffret ou une boite et M le monoide associé:M=Sect($\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}$) ou M=SSect($\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}$).Soient aussi $\mathcal{L}_{max}$ et $\mathcal{C}_{max}$ l'ensemble des lignes et colonnes maximales des relations de M alors:$\mathcal{L}$=$\mathcal{L}_{max}$ et $\mathcal{C}$=$\mathcal{C}_{max}$.

Proposition 5.13
Soient un coffret ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) et M=Sect($\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}$)le monoide associé.alors $\mathcal{C} \cdot \mathcal{L}$ est l'idéal minimal de M.

5.4 Caractérisation de l'appartenance à un coffret

Le lemme suivant exprime de différentes façons l'appartenance d'une relation à un coffret.En particulier ce lemme caractérise les blocs d'une décomposition non ambigue pour une telle relation.

Proposition 5.14

Soient ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$)un coffret sur X,α une relation sur X,et α=$\cup$C$_i$L$_i$ une décomposition non ambigue en blocs de α.La relation α appartient au coffret ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) si et seulement si l'une des assértions ci-dessous est vérifiée:

(1).Pour tout L$\in$ $\mathcal{L}$,et C$\in$ $\mathcal{C}$,|L$\times$C$\cap\alpha$ |=1 (condition de Boe)

(2).Pour tout L$\in$ $\mathcal{L}$,et C$\in$ $\mathcal{C}$,LαC=1,et les produits Lα et αC sont non ambigus (condition de Césari)

(3).$\mathcal{L}\alpha \subseteq \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}\alpha$ est non ambigu.

(4).$\alpha\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$ et $\alpha\mathcal{C}$ est non ambigu.

(5).Pour tout L$\in$ $\mathcal{L}$,pour tout ligne maximale L,l'union des L$_i$ tels que C$_i\cap$L$\neq \emptyset$ est aussi une ligne maximale.

Théorème 5.15

Soit α une relation non ambigue sur X={1,2,...,n},s'il existe une famille $\mathcal{L}$ de parties de X telle que :

(1).La famille $\mathcal{L}$ est recouvrante.

(2).La famille C=Sect($\mathcal{L}$) est recouvrante.

(3).Toute ligne de α peut étre complétée,par union disjointe avec d'autres lignes de α,en un élément de $\mathcal{L}$.

(4).Pour tout L$\in$ $\mathcal{L}$,le produit Lα est non ambigu.

(5).La famille $\mathcal{L}\alpha$={Lα | L$\in$ $\mathcal{L}$} est incluse dans $\mathcal{L}$,alors le couple de familles (SSect($\mathcal{C}$),$\mathcal{C}$) est un coffret contenant α.

Réciproquement,si ($\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$) est un coffret et α une relation appartenant au monoide Sect($\mathcal{L}\cdot\mathcal{C}$),alors $\mathcal{C}$=Sect($\mathcal{L}$) et $\mathcal{L}$=Sect($\mathcal{C}$),et les cinq proporiétés ci dessus sont vérifiées.

Lemme 5.16

Soient α une relation non ambigue sur X,et $\mathcal{L}$ une famille de parties de x telle que toute ligne de α soit incluse dans un élément de $\mathcal{L}$.Alors pour tout C$\in$ $\mathcal{C}$=Sect($\mathcal{L}$),le produit αC est non ambigu.

5.5 Etude des rangs dans un m.r.n.a.t avec ou sans zéro

Les quatre théorème ci-dessous comparent le rang,le rang non ambigu et le minimum des rangs en ligne et en colonne des relations non ambigues.Plus précisément,nous comparons ces rangs dans les monoides liés aux boites et au coffrets (les monoides de ralations non ambigus transitifs contenant ou non la relation nulle).Enfin,nous étudions la minimalité des contre-exemples selon divérs critères.
Voici d'abord un lemme préscisant la forme d'une relation α telle que $\rho(\alpha)$¡$\rho_{NA}(\alpha)$.Soient X et Y deux ensembles de cardinal respactifs m et n.On rappelle que 0_{mn} est la relation vide entre X et Y,et que J_{mn}=X×Y.

Lemme 5.17
Soit une relation α telle que (α)¡$\rho_{NA}(\alpha)$.Alors il existe une relation $\beta \subseteq \alpha$ et des entiers non nuls k,l,m,p,q et r tels que: $\beta=\begin{pmatrix} J_{k,p} & J_{k,q} & 0_{k,r} \\ J_{l,p} & J_{l,q} & J_{l,r} \\ 0_{m,p} & J_{m,q} & J_{m,r} \end{pmatrix}$
et on peut extraire de α trois lignes d'indices i_1,i_2,i_3 et trois colonnes d'indices j_1,j_2,j_3 telles que :$\alpha=\begin{pmatrix} & \vdots & & & \\ \dots & 1 & 1 & 0 & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & 1 & \dots \\ & & & \vdots & \end{pmatrix}$
De plus ,si α est non ambigue,alors $|\{i_1,i_2,i_3\}\cap\{j_1,j_2,j_3\}|\leq 1$.

Théorème 5.18
Le rang et le rang non ambigu ne sont pas toujours égaux dans les s.r.n.a.Plus précisément,il existe une boite de taille 5 contenant une relation de rang 2 et de rang non ambigu 3.
Ce contre-exemple est minimal car pour une relation α non ambigue sur X,le rang et le rang non ambigu coincide lorsque $|X|\leq 4$ ou $\rho_{NA}(\alpha)\leq 2$.Autrement dit,une boite contenant une relation dont le rang et le rang non ambigu diffèrent est de taille au moin 5.

Exemple

Voici une boite de taille 5 contenant une relation de rang 2 et de rang non ambigu 3:

$\mathcal{L}\backslash\mathcal{C}$	1 4 5	2 4 5	3 4 5
1 2 3	1	2	3
4	4	4	4
5	5	5	5

.

Cette boite contient la relation α ci-dessous,pour le vérifier,il suffit de constater que quels que soient L$\in \mathcal{L}$ et C$\in \mathcal{C}$,la relation α vérifie $|\mathrm{L}\times\mathrm{C}\cap\alpha\,|\leq 1$.

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on vérifie bien que $\rho(\alpha)$=2 alors que $\rho_{NA}(\alpha)$=3.

Ces rangs sont minimaux car il n'ya pas de relations de rang 1 et de rang non ambigu 2.En effet,si l'un des rang vaut 1 l'autre aussi.(d'apres le lemme 4.7)

Prouvons maintenant la minimalité de taille de ce contre-exemple.Puisque $\rho(\alpha)<\rho_{NA}(\alpha)$,la relation α a la forme $\alpha=\begin{pmatrix} & \vdots & & & \\ \cdots & 1 & 1 & 0 & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ & & & \vdots & \end{pmatrix}$

et on a aussi $|\{i_1,i_2,i_3\}\cup\{j_1,j_2,j_3\}|\leq 1$.D'aprés le meme lemme,puisque α est non ambigue,on a donc $|\{i_1,i_2,i_3\}\cup\{j_1,j_2,j_3\}|\geq 5$.

On peut remarquer que cette boite et aussi un coffret.Cependant,l'ensemble des sections de $\mathcal{L}\cdot\mathcal{C}$ n'est pas égal à l'ensemble des sous-sections de $\mathcal{L}\cdot\mathcal{C}$.en fait ,chaque sous-section est incluse dans une section.La relation α n'est pas une section de $\mathcal{L}\cdot\mathcal{C}$ car {1,2,3} et {3,4,5} sont respectivement une ligne et une colonne du coffret et $\{1,2,3\}\times\{3,4,5\}\cap\alpha=\emptyset$.Donc la relation α n'appartient pas à ce coffret bien qu'elle appartient à la boite.

Remarque 5.19

Le contre-exemple donné ci-dessus montre aussi que le minimum du rang en ligne et en colonne et le rang non ambigu ne sont pas toujours égaux dans un s.r.n.a .En effet ,on a ,pour la relation α donné ci-dessus,$\rho_{NA}(\alpha)$=3 alors que $\rho_r(\alpha)=\rho_c(\alpha)$=2.Ce

contre exemple est donc minimal pour les rangs puisque d'aprés le lemme 4.7,si min($\rho_r(\alpha)$,$\rho_c(\alpha)$)=1 alors $\rho_{NA}(\alpha)$=1.
Pour la question de l'égalité du rang et du rang non ambigu dans les m.r.n.a.t ne contenant pas 0,le résultat est tout aussi négatif.

Théorème 5.20
Le rang et le rang non ambigu ne sont pas toujours égaux pour une relation appartenant à un m.r.n.a.t ne contenant pas 0.Plus précisement,il existe un coffret de taille 9 contenant une relation de rang 4 et de rang non ambigu5.
Ce contre-exemple est minimal pour les rangs:les deux rangs coincident pour une relation de rang non ambigu inférieur ou égal à 4 lorsqu'elle appartient à un m.r.n.a.t ne contenant pas de 0.De plus,si un m.r.n.a.t ne contenant pas de 0 sur X contient une relation de rang et de rang non ambigu différents,alors |X|≥7.Autrement dit un coffret contenant une relation dont les rang et rang non ambigu diffèrent et de taille au moins 7.
On ne sait pas s'il existe des m.r.n.a.t ne contenant pas 0 de taille 7 ou 8 contenant une relation de rang et rang non ambigu différents.

Exemple
Voici un coffret de taille 9 contenant une relation dont les rang et rang non ambigu diffèrent:

$\mathcal{L} \backslash \mathcal{C}$	1 4 5	1 4 9	1 5 8	1 8 9	2 4 5 7	2 4 7 9	2 5 7 8	2 7 8 9	3 4 5 6	3 4 6 9	3 5 6 8	3 6 8 9
1 2 3	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
1 2 6	1	1	1	1	2	2	2	2	6	6	6	6
1 3 7	1	1	1	1	7	7	7	7	3	3	3	3
1 6 7	1	1	1	1	7	7	7	7	6	6	6	6
4 8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8
5 9	5	9	5	9	5	9	5	9	5	9	5	9

Ce coffret contient la relation α ci-dessus,pour le vérifier,il suffit de constater que quels que soient L∈ $\mathcal{L}$ et C∈ $\mathcal{C}$,la relation α vérifie |L×C∩α |=1.

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

On a $\rho(\alpha)$=4 alors que $\rho_{NA}(\alpha)$=5.

En effet,d'aprés le lemme 2.6,comme la colonne 6 ne contient que l'élément 8,on a $\rho(\alpha)= \rho(\alpha_{\overline{8},*})+1$ et $\rho_{NA}(\alpha)= \rho_{NA}(\alpha_{\overline{8},*})+1$.Puis ,comme la colonne 7 ne contient que l'élément 9,on a $\rho(\alpha)= \rho(\alpha_{\overline{\{8,9\}},*})+2$ et $\rho_{NA}(\alpha)= \rho_{NA}(\alpha_{\overline{\{8,9\}},*})+2$ or

$$\alpha_{\overline{8,9},*}=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Comme les lignes et colonnes vides ne changent pas le rang et le rang non ambigu d'une relation,on a $\rho(\alpha_{\overline{8,9},*})=\rho(\alpha_4)$ et $\rho_{NA}(\alpha_{\overline{8,9},*})=\rho_{NA}(\alpha_4)$ où

$$\alpha_4=\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 1&1&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix}$$

Remarque:

Le contre-exemple donné dans ci-dessus montre aussi que le minimum du rang en ligne et en colonne et le rang non ambigu ne sont pas toujours égaux dans un m.r.n.a.t ne contenant pas la relation nulle.En effet,pour la relation α donné ci-dessus,on a $\rho_{NA}(\alpha)$=5 alors que $\rho_r(\alpha)=\rho_c(\alpha)$=4.Ce contre-exemple est minimal pour les rangs puisque si $\rho_{NA}(\alpha)\leq 4$ et si α appartient à un m.r.n.a.t ne contenant pas zéro,le lemme suivant établit que $\rho(\alpha)=\rho_{NA}(\alpha)$ et comme $\rho(\alpha)\leq(\rho_r(\alpha),\rho_c(\alpha))$,on a $\rho_{NA}(\alpha)\leq\min(\rho_r(\alpha),\rho_c(\alpha))$.

Lemme 5.21
Soit α une relation appartenant à un m.r.n.a.t ne contenant pas 0 telle que $\rho(\alpha)< \rho_{NA}(\alpha)$.Alors $\rho(\alpha)>4$ et $\rho_{NA}(\alpha)\geq 5$.

Lemme 5.22
Soit α une relation non ambigue telle que $\rho(\alpha)< \rho_{NA}(\alpha)$,avec $\rho(\alpha)\geq 4$ et $\rho_{NA}(\alpha)\geq 5$.Alors α de taille au moins 7.

Théorème 5.23
Le rang et le minimum du rang en ligne et du rang en colonne ne sont pas toujours égaux dans un m.r.n.a.t ne contenant pas 0.
Plus précisément,il existe un coffret de taille 10 contenant une relation de rang 5 et de rang en ligne et en colonne 6.

$\mathcal{C}$onclusion

Dans cette thèse nous avons étudier les rangs des relations binaires et les semi-groupes de relations non ambigue.
Avant d'entamer notre travail,nous avons en premier lieu présenter quelques définitions de bases,et quelques résultats connus qui sont utiliser le long de ce travail.
Ensuite,nous avons présenter les quatres notions du rang puis le grade,et aborder la non ambiguité,puis nous avons etablit un lien entre les relations ,leur graphe et leur forme matricielle.
Les automates,les relations non ambigues et leur lien avec les automates non ambigus sont présentés dans le troisième chapitre,nous avons présenter aussi quelques propriétés utiles des semi-groupes de ralations non ambigus transitifs .

Nous avons,aprés ,étudier le comportement des rangs par rapport au produit,et nous avons comparer systématiquement chaque notion du rang avec les autres,y compris le grade.Il vient ensuite l'étude des relations dont l'un des rangs est maximal,dans le cas général puis pour les relations non ambigues. ,puis le comportement des rangs des relations dans les semigroupes de relations,nous avons montrer que les résultats connus sur les rangs,rangs en ligne et en colonne dans les $\mathcal{D}$-classes ne s'appliquent au rang non ambigu que si le semigroupe de relations et non ambigu,nous avons introduit ensuite les boites et les coffrets et leurs liens avec les m.r.n.a transitifs et donner quelques propriétés sur l'appartenance d'une relation à une boite ou un coffret.
La préparation de cette thèse nous a permit de mettre en oeuvre les connaissances théoriques aquises le long de notre parcours universitaire.On éspère que ce modeste travail servira les promotions à venir et apportera des informations utiles et supplémentaire dans ce domaine et pourquoi pas ,arriver à répondre à des quetions qui sont rester ouverte et parmis elles:
(1) Etant donné une relation non ambigue,trouver un algorithme "éfficace" décidant,s'il existe un coffret contenant cette relation et calculant un tel coffret s'il en existe un.!
(2) Engendrer,ou au moins dénombrer de façon effective tous les coffret de taille n.!
(3) Dans le théorème 5.20,nous donnons un coffret qui contient une relation dont le rang et le rang non ambigu diffèrent.nous montrons qu'un tel coffret et de taille

au moin 7 mais le coffret donné est de taille 9,qu’en est-il pour les coffrets de taille 7 et 8?

Bibliographie

[1] Berstel.J.,Perrin D.,*Theory of Codes*,Academic Press, Inc.,New York,(1985).

[2] Boe J.M.,*Représentation des monoides.Application à la théorie des codes*,thèse,univ.du Languedoc,(1976).

[3] Boe j.m.,*Les boites*,Theorretical computer Science,vol81,(1991),app 17-34.

[4] Capri A., *On unambiguous reductions of monoids of unambiguous relations*, Theoretical Computer Science,Vol51,(1987),pp215-220.

[5] Césari Y., *Sur l'pplication du théorème de Suschkewitsch à l'étude des codes rationels complets*, in :Loeckx J., ed., *Automata, Languages and programming*, Springer, Berlin,(1974),pp 342-350

[6] Champarnaud J.M.,Hansel G.,AUTOMATE, *Un logiciel de manipulation des automates et des semigroupe finis*, rapport L.I.T.P. 89-71,(1989).

[7] Clifford A.H.,Preston G.B., *Algebraic Theory of Semigroups*, vol.1, Amer.Math.Soc.,Providence, R.I.,(1961).

[8] Hammer P., Rudeanu S.,*Boolean Methods in Operations Research,* Springer-Verlag,New York (1968).

[9] Howie J.M.,*An Introduction of Semigroup Theory*,Academic Press,London,(1976)

[10] Kim K.H.,*Boolean Matrix Theory and application,*Marcel Dekker,inc.,New York,1982.

[11] Konieczny J.,*Semigroup of Binary Relations,*Ph.Dthesis,univ.of Pennsylvania,1992.

[12] Le Rest E.,*Le Rest M.,Sur les relations entre un nombre finis de mots*,Thèse univ.de rouen,1979.

[13] Le Rest E.,Le Rest M.,*Une reprèsentation fidèle de groupes d'un monoide de ralations binaires sur un ensemble fini,*Semigroup Forum,vol.21,1980,pp 167-172.

[14] Markowski G.,*Green's equivalence relation and the semigroup of binary relations on a set*,Preliminary Report,Harvard Univ.,Cambridge,MAss.,1972.

[15] Perrin D.,Schutzenberger M.P.,*Codes et sous-monoides possedant des mots neutres.*,Theor.Compu.SC.,Lect.Note in Comput.Sc,vol 48.1976,pp 270-281.

[16] Perrin D.,*Les débuts de la théorie des automates*,Rapport du LITP no.93.04,1993.

[17] Pin J.E.,*sur les mots synchronisant dans un automate fini*,Elektron.Informationverarb.Kybernet.,vol.14,1978,pp 293-303.

[18] Pin J.E.,*Variétés de Language Formels*,Masson,Paris,1984.

[19] Plemmons R.J.,West M.T.,*On the semigroup of binary relations*,Pacific Jour.of MAth.,vol.35,1970. pp 743-753.

[20] Shein B.M.,*Semigroups of binary relations*,Proc.of Mini-C0nf.on Semigroup Theory,Szeged,Hungary,1972,pp 17-24.

[21] Schutzenberger M.P.,*Une théoris algébrique du codage*,Séminaire Dubreuil-Pisot,éxposé No.15,1955.

[22] Schutzenberger M.P.,*Sur cértains sous-monoides libres*,Bull.Soc.Math.France,vol.93,1965,pp 209-223.

[23] Schwarz S.,*on the semigroup of binary relations on a finit set,*Czech.Math.Jour.vol.20,1970,pp 632-679.