

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etude de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : **Sciences et Technologies**
Filière : **Automatique**
Spécialité : **Commande des systèmes**

Présenté par :

Tarik GHEZLI
Sid ahmed CHABANE
Djamila BEN BELKACEM

Mémoire dirigé par Mme Safia YOUSFI

Thème

METHODES D'APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Mémoire soutenu publiquement le 04 juillet 2017 devant le jury composé de

M Khadidja KHERRAZ
MCA, UMMTO, Président

M Safia YOUSFI
MAA UMMTO, Rapporteur

M Aldjia NAIT ABDESLAM
MMA, UMMTO, Examineur

M Fatima CHEBALA
MMA, UMMTO, Examineur

Remerciements

Tout d'abord; on remercie Dieu le tout puissant de nous avoir donné la patience, la volonté et l'énergie pour faire ce travail.

On tient à remercier madame YOUSFI Safia, maitre de conférences UMMTO, d'avoir accepté d'encadrer et diriger ce travail.

On remercie aussi les membres du jury de nous avoir fait l'honneur d'examiner et évaluer notre travail.

Nos remerciements vont également à monsieur CHAREF Abdelfattah, professeur à l'université de Constantine, MANSOURI Rachid, professeur à l'UMMTO, et DJENNOUNE Saïd professeur à l'UMMTO, de leur humilité, gentillesse, conseils, et de leur aide très précieuse.

Sans oublier tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire de près ou de loin.

Dédicaces

*On dédie ce modeste travail à tous ceux qui
nous sont cher*

TABLE DES MATIERES

<i>INTRODUCTION GENERALE</i>	<i>1</i>
<i>GENERALITES SUR LES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE</i>	<i>3</i>
I.1. INTRODUCTION.....	4
I.2. OUTILS MATHEMATIQUES DE BASE	5
I.2. 1. LA FONCTION GAMMA	5
I.2. 2. LA FONCTION DE MITTAG-LEFFLER	6
I.2. 3. TRANSFORMATION DE LAPLACE ET PRODUIT DE CONVOLUTION :	7
I.3. OPERATEURS D'ORDRE FRACTIONNAIRE	8
I.3. 1. DEFINITION MATHEMATIQUE	8
I.3. 2. INTEGRATION D'ORDRE FRACTIONNAIRE	9
I.4 .2.1. Interprétation	10
I .3.3. DERIVATION D'ORDRE FRACTIONNAIRE	10
I.3. 3.1. Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Louville	10
I.3. 3.2. Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo	11
I.3.3.3. Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov.....	12
I.3. 3.4. Interprétation	14
I.4.3.5. Quelques propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaires ..	14
I.4. TRANSFORMEE DE LAPLACE DES OPERATEURS FRACTIONNAIRES	14
I.4.1. TRANSFORMEE DE LAPLACE DE L'INTEGRALE FRACTIONNAIRE	15
I.4.2. TRANSFORMEE DE LAPLACE DE LA DERIVATION FRACTIONNAIRE.....	16
I.4.2.1. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	16
I.4.2.2. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo	16
I.4.2.3 Au sens de Grunwald- Letnikov :	16
I.4.2.4 Remarques	
I.5. REPRESENTATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE	17
1.5.1. EQUATION DIFFERENTIELLE FRACTIONNAIRE.....	17
1.5.2. FONCTION DE TRANSFERT D'ORDRE FRACTIONNAIRE	18
1.5.3. REPRESENTATION D'ETAT D'UN SYSTEME D'ORDRE FRACTIONNAIRE	19
1.5.4. COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE DES SYSTEMES FRACTIONNAIRES ...	20
a). Commandabilité	20
b). Observabilité	20
1.5.5. STABILITE DES SYSTEMES FRACTIONNAIRES	21

I.6. CONCLUSION	22
------------------------------	-----------

METHODES D'APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRE

<u>FRACTIONNAIRE</u>	23
-----------------------------------	-----------

II. 1 INTRODUCTION :	24
II. 2. OPERATEURS D'ORDRE FRACTIONNAIRE :	26
II.2.1 OPERATEURS D'ORDRE FRACTIONNAIRES ANALOGIQUES :	26
II.2.2 OPERATEURS D'ORDRE FRACTIONNAIRE NUMERIQUES :	26
II.3. APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE :	27
II .3.1 APPROXIMATION NUMERIQUE DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE :	27
II.3.1.1 Approximation par calcul de l'expression analytique :	27
II.3.1.2 Approximation par un modèle rationnel discret :	28
II.3.1.3 Approximation en utilisant un modèle entier continu :	29
II.3.2. APPROXIMATION ANALOGIQUE DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE :	
.....	30
II.3.2.1 Méthodes d'approximation en utilisant l'expansion des fonctions continues :	30
II.3.2.2 Méthode de Carlson :	31
II.3.2.3 Méthode de Matsuda :	31
II.3.2.4 méthodes utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification :	32
II.3.2.4.1. Méthode de Charef : fonction de singularité :	32
II.3.2.4.1.1 Approximation des systèmes du 1 ^{er} ordre fractionnaire :	32
II.3.2.4.1.2 Approximation des systèmes à ordres fractionnaires multiples : ...	35
II.3.2.4.1.3 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire :	37
II.3.2.4.1.4 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire :	39
II.3.2.4.2. Méthode d'Oustaloup :	41
II.4 REALISATION PAR DES CIRCUITS ANALOGIQUES :	45
II.4.1. L'IMPLEMENTATION DE L'INTEGRATEUR :	45
II.4.2. L'IMPLEMENTATION DU DERIVATEUR :	46
II.5 CONCLUSION	48

APPLICATION DES METHODES D'APPROXIMATION DES SYSTEMES

<u>D'ORDRE FRACTIONNAIRE</u>	49
---	-----------

III. 1. INTRODUCTION :	50
III.2. APPLICATION DE LA METHODE DE CHAREF :	51
III.2.1 INTEGRATEUR FRACTIONNAIRE :	51
III.2.1.1 Pour ωl , $\omega h = 0.01$, 1000 et $m = 0.1$:	51

III.2.1.2 Pour ωl , $\omega h = 0.01$, 1000 et $m = 0.5$:	53
III.2.1.3 Pour ωl , $\omega h = 0.01$, 1000 et $m = 0.9$:	54
III.2.1.4 Pour ωl , $\omega h = 1000$, 100000 et $m = 0.1$:	56
III.2.1.5 Pour ωl , $\omega h = 1000$, 100000 et $m = 0.5$:	57
III.2.1.6 Pour ωl , $\omega h = 1000$, 100000 et $m = 0.9$:	59
III.2.2 DERIVATEUR FRACTIONNAIRE :	60
III.2.2.1. Pour ωl , $\omega h = 0.01$, 1000 et $m = 0.1$:	60
III.2.2.2. Pour ωl , $\omega h = 0.01$, 1000 et $m = 0.5$:	62
III.2.2.3. Pour ωl , $\omega h = 0.01$, 1000 et $m = 0.9$:	63
III.2.3 INTERPRETATION DES RESULTATS :	65
III.3. APPLICATION DE LA METHODE D'OUSTALOUP:	66
III.3.1 POUR $N = 5$ ET $m = 0.1$	66
III.3.2 POUR $N = 5$ ET $m = 0.5$	67
III.3.3 POUR $N = 5$ ET $m = 0.9$	67
III.3.4 POUR $N = 20$ ET $m = 0.1$	68
III.3.5 POUR $N = 20$ ET $m = 0.5$	69
III.3.6 POUR $N = 20$ ET $m = 0.9$	69
III.3.7 INTERPRETATION DES RESULTATS :	70
REMARQUE :	71
III.4. METHODE DE CHAREF VS METHODE D'OUSTALOUP:	72
III.4.1 COMPARAISON POUR $m = 0.1$:	73
III.4.2 COMPARAISON POUR $m = 0.5$:	75
III.4.3 COMPARAISON POUR $m = 0.9$:	76
III.5 CONCLUSION :	77
 <u>CONCLUSION GENERALE</u>	 78

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	82
-----------------------------	-----------

TABLE DES FIGURES

CHAPITRE I

Figure I .1 :Domaine de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire dans le plan complexe . 22

CHAPITRE II

- Figure II 1** : Diagramme de Bode du modèle avec une pente de -20 m dB/ dec et son approximation par des zig zag à -20 dB/dec et 0 dB/dec 33
- Figure II. 2** : Choix des singularités pour l'approximation en maintenant un écart $y(\text{dB})$ constant entre la ligne à -20m dB/dec et les lignes zig zag..... 34
- Figure II .3** :Diagramme asymptotique de Bode de $Dbf(s)$ et $DN(s)$ Pour $m \in]0, 1[$ 44
- Figure II. 4** :Circuit RC équivalent à l'intégrateur d'ordre fractionnaire..... 46
- Figure II .5** : Circuit RC équivalent au dérivateur d'ordre fractionnaire..... 47

CHAPITRE III

- Figure III .1** Tracé de Bode de $1s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande de fréquences $\omega l, \omega h = 0.01, 1000$ 52
- Figure III .2** : Tracé de Bode de $1s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 0.01, 1000$ 54
- Figure III .3** : Tracé de Bode de $1s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 0.01, 1000$ 55
- Figure III. 4:** Tracé de Bode de $1s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 1000, 100000$ 57
- Figure III .5:** Tracé de Bode de $1s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 1000, 100000$ 58
- Figure III 6:** Tracé de Bode de $1s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 1000, 100000$ 60
- Figure III. 7** : Tracé de Bode de $s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 0.01, 1000$ 61
- Figure III 8:** Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 0.01, 1000$ 63
- Figure III .9** : Tracé de Bode de $s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 0.01, 1000$ 64
- Figure III. 10:** Tracé de Bode de $s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 0.01, 1000$ pour $N = 5$ 66
- Figure III .11:** Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences $\omega l, \omega h = 0.01, 1000$ pour $N = 5$ 67

Figure III 12: Tracé de Bode de $s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences ωl , $\omega h = 0.01, 1000$ pour $N = 5$	68
Figure III 13: Tracé de Bode de $s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences ωl , $\omega h = 0.01, 1000$ pour $N = 20$	68
Figure III 14: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences ωl , $\omega h = 0.01, 1000$ pour $N = 20$	69
Figure III 15: Tracé de Bode de $s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences ωl , $\omega h = 0.01, 1000$ pour $N = 20$	70
Figure III 16: Tracé de Bode de $s^{-0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences ωl , $\omega h = 0.01, 1000$ pour $N = 20$	72
Figure III 17: Tracé de Bode de $s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode de Charef et d'Oustaloup dans la bande d fréquences ωl , $\omega h = 0.001, 100000$	74
Figure III 18: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode de Charef et d'Oustaloup dans la bande d fréquences ωl , $\omega h = 0.001, 100000$	75
Figure III 19: Tracé de Bode de $s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode de Charef et d'Oustaloup dans la bande d fréquences ωl , $\omega h = 0.001, 100000$	76

Introduction Générale

Introduction générale

Le calcul fractionnaire peut être défini comme la généralisation du calcul classique, à des ordres d'intégration et dérivation pas nécessairement entiers. Même si le concept d'opérateurs fractionnaires n'est, en aucun cas, nouveau, la première réunion consacrée à ce domaine a été organisée par B. Ross en 1974 seulement à New Heaven, Connecticut, Etats Unis, sous le titre « Le calcul fractionnaire et ses applications ». Et même à un tel événement, le calcul fractionnaire n'intéressait que quelques mathématiciens et physiciens théoriciens. Mais depuis, les circonstances ont considérablement changé. L'intérêt général pour un tel outil a continuellement augmenté durant les quatre dernières décennies, et à présent, on peut trouver plusieurs conférences, symposiums, workshops et publications dans des revues reconnues portant sur les aspects théoriques et pratiques du calcul fractionnaire. Cet intérêt est motivé par les applications en ingénierie et particulièrement l'ingénierie du contrôle [35].

L'application des concepts du calcul fractionnaire dans le domaine des systèmes de commande automatique et de l'identification par des modèles d'ordre fractionnaire remonte aux années soixante, mais ce n'est que pendant les années 90 [4] que les contrôleurs fractionnaires gagnent de plus en plus d'intérêt au sein de la communauté de commande [12]. Le concept de commande d'ordre fractionnaire signifie que les systèmes commandés et les correcteurs sont représentés par des équations différentielles et des transferts d'ordre non entier. Dont le but principal est d'améliorer les performances et la robustesse des systèmes de commande classiques par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaires dans les algorithmes de commande [11].

Le premier qui a introduit un correcteur d'ordre fractionnaire est A. Oustaloup, [4][11][12][43], qui a développé le correcteur de Commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE). Depuis cette initiative, beaucoup de chercheurs se sont intéressés au sujet, Podlubny, qui 1991 propose le régulateur $PI^\lambda D^\mu$, dont les actions intégrales et dérivée sont d'ordre fractionnaire.

De nombreux phénomènes physiques peuvent être décrits par des modèles non entiers, tels que certains systèmes thermiques ou électrochimiques, mais vu le manque, voir l'inexistence, de moyens techniques (logiciels) pour l'analyse, simulation et implémentation ce genre de modèles, il est nécessaire de revenir vers des modèles d'ordre entier via des approximations [6].

Introduction Générale

Beaucoup de recherches ont été entamées dans ce sens, et plusieurs méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire dans le domaine analogique ou numérique ont été élaborées. L'objectif de ce travail est d'énumérer certaines de ces méthodes, dont certaines seront détaillées et analysées dans le but de tirer des conclusions vis-à-vis de leurs performances et de leur précision. Les deux méthodes étudiées sont celle de la fonction de singularités de Charef, et celle des pôles et zéros récursifs d'Oustaloup. La finalité étant de déterminer si une méthode est plus efficace que l'autre et sous quelles conditions, une étude comparative sera effectuée.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres organisés de la façon suivante :

Le premier chapitre, intitulé « Généralités sur les systèmes d'ordre fractionnaire », est lui-même divisé en deux parties distinctes. La première partie, est un exposé des bases et notions fondamentales du calcul d'ordre fractionnaire, on y présentera les principales définitions et propriétés de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire ainsi que leur transformée de Laplace. Dans la seconde, on définira les modes de représentation d'un système d'ordre fractionnaire, à savoir, l'équation différentielle, la fonction de transfert, et la représentation d'état. On y définira aussi, certaines propriétés des systèmes fractionnaires telles que : la commandabilité, l'observabilité et la stabilité.

Dans le deuxième chapitre « Méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire », on introduit les opérateurs intégrateur et dérivateur d'ordre fractionnaire et on exposera les principales méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire, dans le domaine numérique et analogique dont les deux méthodes de Charef (approximation du dérivateur et de l'intégrateur fractionnaires) et d'Oustaloup (introduction et approximation du dérivateur généralisé) seront détaillées.

Et finalement le troisième chapitre, comme l'indique son titre « Application des méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire », sera consacré à l'application des méthodes de Charef et d'Oustaloup pour des exemples simples dans le but d'étudier l'efficacité de chacune, et aussi leurs limites par rapport à différents paramètres. Et enfin, on procédera à une petite étude comparative entre les deux méthodes pour conclure sur laquelle des deux est meilleure.

Pour procéder à toutes ces applications, on utilisera des programmes MATLAB.

Chapitre **1**

*Généralités sur les
Systèmes d'Ordre
Fractionnaire*

I.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire est un domaine des mathématiques qui traite des dérivées et des intégrales d'ordre non entier. C'est un concept vieux (de plus de 300 ans) remontant à des correspondances entre Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hospital et Johann Bernouli à la fin du 17^{ème} siècle. Mais ces pionniers se heurtent à un paradoxe [1]. Un paradoxe duquel on tirera, un jour, d'utiles conséquences : écrit Leibniz. En réponse à la question « qu'en serait il si l'ordre de la dérivation était égal à $\frac{1}{2}$? » soulevée par l'Hospital [2].

De nombreux mathématiciens tels que, N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, J.Fourier, A.K. Grunwald, J. Hadamard, G.H.Hardy, O. Heaviside, H.J.Holmgren, P.S.Laplace, A.V. Letnikov, J. Liouville, B.Riemann, M.Riesz et H.Weyl ont contribué au développement du calcul fractionnaire jusqu'à la moitié du siècle passé, en posant plusieurs définitions sans qu'elles soient, pour autant, compatibles entre elles. Cependant, on peut considérer le calcul fractionnaire comme un axe de recherche relativement nouveau, puisque ce n'est que dans la deuxième partie du 20^{ème} siècle, suite au développement de l'informatique, qu'il fait l'objet de beaucoup de travaux. Aujourd'hui, l'intérêt du calcul d'ordre fractionnaire et ses applications ne cessent de grandir [3].

L'idée des dérivées et d'intégrales fractionnaires semble un peu étrange et difficile à expliquer, cela est dû au fait que l'opérateur d'ordre fractionnaire n'a pas d'interprétation géométrique précise, contrairement aux opérateurs d'ordre entier, c'est pourquoi cet outil est souvent considéré comme irréal.

On pourrait penser donc que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques pure sans intérêt pour l'ingénieur. Pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment l'intégrale d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne [1]. L'utilisation de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire réel est maintenant largement répandue dans des domaines aussi variés que la mécanique, l'automatique, l'électrochimie, la biologie... etc.

[4].

Dans le domaine de l'automatique, le calcul fractionnaire est utilisé pour la modélisation, l'identification et la commande des systèmes. Des congrès aussi prestigieux que le CDC (Conférence on Décision and Control), ou IFAC (International Fédération of Automatic Control), organisent régulièrement des sessions spéciales sur la dérivation non entière et ses applications. A partir de 2004 un workshop, qui se déroule tous les deux ans, spécialement dédié au calcul fractionnaire et ses applications, a été créé [5].

L'objectif de ce chapitre est de présenter certaines bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent, et aussi les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire. En commençant par les outils mathématiques de base utilisés.

I.2 Outils mathématiques de base

Dans ce début de chapitre, pour permettre la compréhension de l'intégrale et la dérivée fractionnaire et de fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire, on présente quelques outils mathématiques de base qui nous seront utiles tout le long du chapitre. Il s'agit de la fonction **Gamma**, la fonction **Mittag-Leffler** et le principe de **convolution**.

I.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma (Γ) est la généralisation aux nombres réels de la fonction factorielle n ($n!$) et elle permet à n de prendre des valeurs non entières, elle est donnée par : [6] [7] [14]

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \alpha > 0 \quad (\text{I.1})$$

A partir de l'expression (I.1), on peut déduire que :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1 \quad (\text{I.2})$$

L'intégration par parties de l'expression (I.1), conduit à la formule de récurrence suivante, qui est une propriété importante de la fonction Gamma :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} y^{\alpha} e^{-y} dy = [-e^y y^{-\alpha}]_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (I.3)$$

Et pour $\alpha \in \mathbb{N}$ on a : $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha !$ (I.4)

Puisque $\Gamma(1) = 1$ dans (I.2), et en utilisant la formule (I.3) pour $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1 \Gamma(1) = 1 ! \\ \Gamma(3) &= 2 \Gamma(2) = 2 ! \\ \Gamma(4) &= 3 \Gamma(3) = 3 ! \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \Gamma(n + 1) &= n \Gamma(n) = n (n - 1) ! = n ! \end{aligned} \quad (I.5)$$

Dans ce qui suit on donne quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$:

- Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- Pour $\alpha = n + \frac{1}{2}$, avec n un entier positif $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$

I.2.2 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est très importante pour le calcul fractionnaire, elle représente la généralisation de l'exponentielle au calcul d'ordre non entier.

On distingue deux types de fonctions de Mittag-Leffler : la fonction à deux paramètres et la fonction à un seul paramètre.

Initialement introduite par R.P. Agarwal et Erdelyi (1953-1954), la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par la formule suivante : [6] [7]

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (I.6)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre, introduite par Mittag-Leffler en 1903 :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (I.7)$$

Pour $\alpha = 1$, dans la fonction (I.7), on peut déduire la fonction exponentielle comme suit :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \quad (I.8)$$

Puisque $k \in \mathbb{N}$ et d'après la propriété de la fonction Gamma (I.4) donc :

$$\Gamma(k+1) = k! \quad (I.9)$$

En remplaçant dans (I.8), on obtient l'expression de développement en séries de l'exponentiel :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (I.10)$$

Pour les équations différentielles d'ordre non entier, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

I.2.3 Transformation de Laplace et produit de convolution :

La transformée de Laplace est un outil mathématique utilisé dans l'analyse des systèmes, et dans la résolution de certains problèmes complexes dans le domaine temporel tels que, les produits de convolution et les équations différentielles.

La transformée de Laplace d'une fonction est définie comme suit :

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (I.11)$$

La transformée de Laplace de la $i^{\text{ème}}$ dérivée de $f(t)$; est donnée par : [7]

$$\mathcal{L}\{f^{(i)}(x)\} = s^i F(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^k f^{(i-k-1)}(0) \quad (I.12)$$

Où

$f^{(i)}(0)$ représente les conditions initiales.

Le produit de convolution est un opérateur mathématique et un produit commutatif, noté $(f * g)$, qui associe aux deux fonctions f et g l'intégrale suivante :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau = g(t) * f(t) \quad (I.13)$$

Cette intégrale étant difficile à résoudre dans le domaine temporel, il devient préférable d'utiliser sa transformée de Laplace qui est exprimée par le produit des deux transformées de Laplace des fonctions f et g

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(t)\} = F(s) G(s) \quad (I.14)$$

I.3 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Dans cette partie, on présentera les opérateurs d'ordre non entier : une définition généralisée de l'opérateur intégral-différentiel, l'opérateur intégral et quelques définitions de la dérivation fractionnaires [2].

I.3.1 Définition mathématique

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différenciation de l'opérateur fondamental d'ordre non entier ${}_a D_t^\alpha$ où a et t sont les limites de l'opération, et α l'ordre de l'opération, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. L'opérateur intégral-différentiel continu est noté comme suit :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (I.15)$$

Les définitions les plus utilisées pour l'opérateur intégro-différentiel d'ordre fractionnaire général sont celles de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo.

I.3.2 Intégration d'ordre fractionnaire

Pour chaque fonction $f(t)$ continue intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on peut définir selon la formule de Cauchy, l'intégrale $k^{\text{ème}}$ notée $I^k f(t)$ comme suit : [12]

$$\int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} f(t) dt_1 = I^k f(t)$$

$$\Rightarrow I^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) d\tau \quad (I.16)$$

Pour généraliser la formule de Cauchy (I.16), à un nombre non entier (réel) $\alpha \in \mathcal{R}_+^*$, Riemann a proposé de remplacer la fonction factorielle par la fonction Gamma (I.1) qui en est la généralisation aux nombres réels.

En utilisant la propriété (I.4) de la fonction Gamma, l'équation (I.16) devient :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.17)$$

Cette intégrale est appelée, intégrale de Riemann-Liouville, et sera notée ${}^{RL}I_{t_0}^\alpha$.

I.4 .2.1 Interprétation

On peut noter que pour une valeur de $\alpha = 1$, la quantité $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ est égale à 1, ce qui revient à dire que l'intégrale fractionnaire (I.17), devient l'intégrale entière d'ordre 1 de $f(t)$. L'intégrale entière d'ordre 1 de la fonction $f(t)$, représente l'aire, entre t_0 et t , délimitée par la courbe de la fonction $f(t)$ et l'axe des abscisses. On peut donc interpréter l'intégrale fractionnaire comme étant l'aire, entre t_0 et t , délimitée par la courbe de la fonction $f(t)$ et l'axe des abscisses, pondérée par la fonction $\Phi_\alpha(t)$ avec :

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (I.18)$$

Il est aussi intéressant de noter que l'intégrale fractionnaire (I.17), pour un système dynamique où la fonction $f(t)$ est causale, est équivalente à la formule suivante :

$$I^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \Phi_\alpha(t) * f(t) \quad (I.19)$$

Nous pouvons donc voir dans (1.19) que l'intégrale d'ordre fractionnaire s'exprime également par le produit de convolution des deux fonctions $\Phi_\alpha(t)$ et $f(t)$.

I.3.3 Dérivation d'ordre fractionnaire

Les définitions de l'opérateur de dérivation d'ordre fractionnaire sont nombreuses, toutefois elles ne sont pas toutes équivalentes. Dans ce paragraphe nous n'exposeront que les plus utilisées [8] [9].

I.3.3.1 Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Louville

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus répandue, elle est basée sur le calcul de la $k^{\text{ème}}$ intégrale d'une fonction. La dérivée s'obtient alors en deux étapes :

- Intégration non entière d'ordre $(n - \alpha)$, comme suit :

$${}^{\text{RL}}I_{t_0}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.20)$$

- Dérivation entière de (I.20) d'ordre n , pour avoir la dérivation au sens de Riemann-Liouville d'ordre α notée ${}^{\text{RL}}D_t^\alpha$ et définie comme suit :

$${}^{\text{RL}}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.21)$$

$$\text{Où } n \text{ est un nombre entier tel que : } n - 1 < \alpha < n \quad (I.22)$$

Exemple :

On voudrait Calculer la dérivée à l'ordre $\alpha = 0.7$ d'une fonction constante $f(t) = C$ selon la définition de Riemann-Liouville, les étapes sont :

- 1) Calcul de l'entier n à partir de la condition de l'expression (I.22), on trouve : $n = 1$
- 2) Intégrer la fonction $f(t) = C$, à l'ordre non entier $n - \alpha = 0.3$, on obtient :

$${}^{\text{RL}}I_{t_0}^{0.3} = \frac{C}{\Gamma(0.3)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-0.7} d\tau \quad (I.23)$$

- 3) Dériver la fonction (I.23) à l'ordre entier $n = 1$, on trouve la dérivée d'ordre $\alpha = 0.7$ suivante :

$${}^{\text{RL}}D_t^{0.7} f(t) = \frac{C}{\Gamma(0.3)} (t-t_0)^{-0.7} \quad (I.24)$$

I.3.3.2 Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo

Comme la dérivée de Reimann-Liouville, la dérivée de Caputo se base aussi sur le calcul de la $k^{\text{ème}}$ intégrale d'une fonction, mais elle requiert que la fonction $f(t)$ et ses n dérivées successives soient nulles pour $t \leq 0$, ce qui la rend plus restrictive que la dérivée de Riemann-Liouville qui n'exige que la seule causalité de $f(t)$. [10]

La dérivée d'ordre α de Caputo notée ${}_{t_0}^c D_t^\alpha$ est obtenue en deux étapes :

- Dériver la fonction $f(t)$ à un ordre entier, on trouve

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \quad (I.25)$$

- Intégrer la fonction (I.25) obtenue à l'ordre non entier $n - \alpha$, on obtient la dérivée à l'ordre non entier α de Caputo définie par la formule (I.26)

$${}_{t_0}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (I.26)$$

Où n est un nombre entier tel que : $n - 1 < \alpha < n$

Remarque [6]

Les deux dérivées de Riemann-Liouville et Caputo sont reliées, c'est-à-dire, qu'il est possible d'exprimer l'une en fonction de l'autre :

Pour $t_0 = 0$, entre les deux équations (I.21) et (I.26), il existe les deux relations suivantes :

$${}_{t_0}^c D_t^\alpha f(t) = {}_{t_0}^{RL} D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(0^+) \right) \quad (I.27)$$

$${}_{t_0}^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}_{t_0}^c D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+) \quad (I.28)$$

I.3.3 Dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

A la différence des deux premières définitions présentées, la dérivée de Grunwald-Letnikov est basée sur la définition usuelle de la dérivation entière : [11] [9]

$$D^1 f(t) = \frac{d}{dt} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (I.29)$$

Le calcul des dérivées successives de la fonction $f(t)$ donne la généralisation de la formule (I.29) à l'ordre, $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n(n-1) + \dots + (n-j+1)}{j!} f(t-jh) \quad (I.30)$$

Une autre écriture de (I.30) est :

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh) \quad (I.31)$$

Où

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (I.32)$$

Représente la combinaison de j élément parmi n .

La formule (I.31) représente la dérivée d'ordre entier n , pour généraliser aux ordres non entiers on applique les propriétés de la fonction Gamma : (I.3),(I.4), (I.5)

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \frac{-n(1-n)(2-n) \dots (j-1-n)}{j!} \quad (I.33)$$

Pour un nombre α non entier, et après application des propriétés de la fonction Gamma :

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\alpha)} \quad (I.34)$$

En remplaçant (I.34) dans (I.31), on obtient la définition de la dérivée de Grunwald-Letnikov suivante :

$$D_{GL}^{\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(-\alpha)} f(t - jh) \quad (I.35)$$

I.3.3.4 Interprétation

La dérivation au sens classique ou d'ordre entier a un sens physique et géométrique, tous deux très clairs. Ce qui simplifie leur usage pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs domaines de la science. Malheureusement ce n'est pas le cas pour la dérivation d'ordre fractionnaire, et la question est restée sans réponse. Il est donc resté parmi les problèmes ouverts lors des différentes conférences internationales [8] [9].

I.4.3.5 Quelques propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaires

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont : [8] [6] [12]

- 1) Si $f(t)$ est une fonction analytique de t , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^{\alpha}f(t)$ est une fonction analytique de t et α .
- 2) Pour $\alpha = n$, où n est un entier, l'opération $D^{\alpha}f(t)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
- 3) Pour $\alpha = 0$ l'opération $D^{\alpha}f(t)$ est l'opérateur identité : $D^0f(t) = f(t)$.
- 4) La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires. En effet si a et b sont deux constantes alors :

$$D^{\alpha}[af(t) + bg(t)] = aD^{\alpha}f(t) + bD^{\alpha}g(t)$$

- 5) La loi additive d'indexe :

$$D^{\alpha}f(t) D^{\beta} f(t) = D^{\beta}f(t) D^{\alpha} f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$$

I.4 Transformée de Laplace des opérateurs fractionnaires

Les définitions temporelles des opérateurs différentiels non entiers souffrent d'un formalisme mathématique quelquefois compliqué, mais leur expression dans le domaine de Laplace se révèle d'une simplicité remarquable.

I.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire

L'écriture de l'intégration non entière comme un produit de convolution (I.19) permet de calculer la transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction temporelle causale. [13] [7]

$$\mathcal{L}\{I^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{\Phi_\alpha(t) * f(t)\} = \mathcal{L}\{\Phi_\alpha(t)\}\mathcal{L}\{f(t)\} \quad (I.36)$$

Avec

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (I.37)$$

La transformée de Laplace de $\Phi(t)$ se calcule en utilisant le lemme suivant :

- **Lemme :**

La transformée de Laplace de la fonction t^n , $n \in \mathbb{R}_+$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\{t^n\} = s^{-1-n} \Gamma(n+1)$$

On aura donc :

$$\mathcal{L}\{\Phi_\alpha(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} = \frac{s^{-\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = s^{-\alpha} = \frac{1}{s^\alpha} \quad (I.38)$$

De là, on trouve la transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire comme suit :

$$\mathcal{L}\{I^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{\Phi_\alpha(t) * f(t)\} = \mathcal{L}\{\Phi_\alpha(t)\}\mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (I.39)$$

I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivation fractionnaire

Du fait de la non unicité de la définition de la dérivée non entière, l'expression de sa transformée de Laplace n'est pas unique et fait apparaître des différences dans la manière de prendre en compte les conditions initiales [3] [6] [8] [13].

Les différentes définitions de la transformée de Laplace de la dérivation fractionnaires sont des généralisations de la transformée de Laplace de la dérivée n^{ème} entière donnée par :

$$\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} f(t) \quad (I.40)$$

I.4.2.1 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La formule (I.40) peut être généralisée au cas d'ordre non entier α au sens de Riemann-Liouville comme suit :

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} f(t) \quad (I.41)$$

Avec

$$n - 1 < \alpha < N$$

I.4.2.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

De même, il a été démontré, de la formule (I.40), que la transformée de Laplace de la dérivation fractionnaire au sens de Caputo est définie par :

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (I.42)$$

I.4.2.3 Au sens de Grünwald-Letnikov :

La transformée de Laplace de la dérivée de Grünwald-Letnikov est donnée par :

$$\mathcal{L}\{{}^{\text{GL}}_0 D_t^\alpha\} = s^\alpha F(s) \quad (I.43)$$

I.4.2.4 Remarques

- L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter.
- Les transformées de Laplace des dérivées d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville et Caputo sont équivalentes si et seulement si le système est au repos pour $t < 0$.
- La transformée de Laplace de Riemann Liouville est bien connue mais son applicabilité est limitée a cause de l'absence d'une interprétation physique des conditions initiales des dérivées fractionnaires. [20]
- La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace se fait de la même manière qu'avec les équations différentielles d'ordre entier. L'outil informatique ne connaît que des intégrateurs et des dérivateurs d'ordre entier. Alors les opérateurs d'ordre non entier nécessitent une approximation pour pouvoir les traiter dans les environnements programmable actuels.

I.5 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

Plusieurs représentations peuvent décrire un système entier (équation différentielle, équation de récurrence, représentation d'état, fonction de transfert...), le comportement d'un système d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenant des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Dans cette section nous présentons les trois modes existants de représentation des systèmes non entiers : [4]

- Equation différentielle
- Fonction de transfert
- Représentation d'état

1.5.1 Equation différentielle fractionnaire

Plusieurs systèmes dynamiques naturels ont un comportement qui peut être modélisé par des équations différentielles comprenant des dérivées d'ordre fractionnaire. Il est préférable d'utiliser la dérivation de Caputo, car aux conditions initiales, elle ne contient que des dérivées

d'ordre entier, et sa dérivée d'une constante est égale à 0. Ce qui conduit à une transformation de Laplace plus simple de (I.42). Un système mono-variable (SISO) peut être identifié par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante : [12] [41]

$$a_0 Y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} Y(t) = b_0 u(t) + \sum_{j=1}^m b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (I.44)$$

Où $u(t) \in \mathbb{R}$ et $y(t) \in \mathbb{R}$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système. $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^+$, et les ordres de dérivation sont ordonnés pour des raisons évidentes d'identifiabilité :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n, \quad 0 < \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_m$$

Comme dans le cas d'une équation différentielle à dérivées entières, les ordres de dérivation doivent vérifier la contrainte $\alpha_n > \beta_m$ pour que le système soit strictement propre.

- **Système d'ordre commensurable :**

Un système d'ordre commensurable est décrit par une équation différentielle où, tous les ordres de dérivation sont multiples du même nombre réel α . C'est-à-dire :

$\alpha_k, \beta_k = n \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$, et $n \in \mathbb{N}$. Il est donc représenté par l'équation différentielle suivante :

$$a_0 Y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{i\alpha} Y(t) = b_0 u(t) + \sum_{j=1}^m b_j D^{j\alpha} u(t)$$

1.5.2 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire

L'application de la transformée de Laplace à l'équation (I.44), en considérant les conditions initiales nulles, permet de déduire la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^m b_j s^{\beta_j}}{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i}} \quad (I.45)$$

Où $Y(s)$ et $U(s)$ sont, respectivement, les transformées de Laplace de $y(t)$ et $u(t)$.

Lorsque les ordres de dérivation α_i et β_j sont quelconques le système est appelé système fractionnaire généralisé. Dans le cas d'un système commensurable, cette fonction de Transfert s'écrit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^m b_j s^{j\alpha}}{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i s^{i\alpha}} \quad , 0 < \alpha < 1 \quad (I.46)$$

Par contre dans le cas général du système non entier multi variables, ayant L entrées et Q sorties, il est décrit par un système d'équations différentielles d'ordre non entier, dont la matrice de fonction de transfert a pour expression :

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1L}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{Q1}(s) & \cdots & G_{QL}(s) \end{pmatrix} \quad (I.47)$$

1.5.3 Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire

Comme dans le cas entier, une représentation d'état non entière comporte deux équations :

- Une équation d'état non entière dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel.
- Une équation d'observation identique à celle des systèmes d'ordre entier.

Elle est ainsi définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ Y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (I.48)$$

Où :

$$D^{(\alpha)}(x) = [D^{\alpha_1}x_1, D^{\alpha_2}x_2 \dots D^{\alpha_n}x_n]^T \quad (I.49)$$

Dans lequel :

- u : vecteur des entrées dimension (1×1) ;

- x : Vecteur d'état non entier de dimension $(n \times 1)$;
- y : Vecteur des sorties de dimension $(q \times 1)$;
- α : L'ordre de dérivation non entière ;
- Les matrices A, B, C, E sont toutes à éléments constants.

Dans le cas des systèmes commensurables le modèle d'état non entier (I.48) devient :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = Cx(t) + E u(t) \end{cases} \quad (I.50)$$

Où :

$$D^\alpha(x) = D^\alpha[x_1, x_2 \dots x_n]^T \quad (I.51)$$

1.5.4 Commandabilité et observabilité des systèmes fractionnaires

a) Commandabilité

La définition de la Commandabilité des systèmes fractionnaires est la même que celle des systèmes entiers.

- Le système non entier d'ordre commensurable de l'équation (I.50) est Commandable si pour un temps donné t_0 il existe $t_1 > t_0$ tel que, quelque soient deux états : $x(t_0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$ dans l'espace d'état, il existe une entrée de commande $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ qui permet de transférer l'état $x(t)$ de x_0 à x_1 en un temps fini t_1 .

Le système non entier d'ordre commensurable est commandable si le rang de la matrice de Commandabilité soit égal à n .

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (I.52)$$

$$\text{rang}(\mathcal{C}) = n \quad (I.53)$$

b) Observabilité

De la même manière, la condition d'observabilité des systèmes d'ordre non entier commensurables est établie en utilisant la définition d'observabilité des systèmes entiers, et est donnée par :

- Les systèmes non entiers d'ordre commensurable de l'équation (I.50) sont observables pendant l'intervalle de temps $[t_0 t_1]$, $t_1 > 0$, si n'importe quel état $x(t_0)$ peut être déduit à partir des observations de la sortie $y(t)$ et de l'entrée $u(t)$ pendant un temps fini $t \in [t_0 t_1]$. Dans ce cas aussi, la condition d'observabilité du système est que le rang de la matrice d'observabilité soit égal à n .

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (I.54)$$

$$\text{rang}(O) = n \quad (I.55)$$

1.5.5 Stabilité des systèmes fractionnaires

La définition de stabilité au sens BIBO (Bounded Input, Bounded Output), dite aussi stabilité externe, est donnée par la définition suivante : [41]

- Un système est dit BIBO stable si et seulement si, à une entrée bornée, correspond une sortie bornée.
- Dans le cas des systèmes entiers, la condition de stabilité est que l'équation caractéristique du système n'admet aucune racine à partie réelle positive. Par contre les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stable.

Il n'y a en ce moment aucune technique polynomiale pour analyser la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire, telles que le critère de Routh-Hurwitz pour les systèmes d'ordre entier. Jusqu'à maintenant le seul moyen connu, est l'application du principe basé sur les conditions sur l'argument.

Un système d'ordre commensurable ayant pour polynôme caractéristique $\Delta(p)$ de (I.52): avec

$$\Delta(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 \quad (I.56)$$

Est stable si et seulement si :

$$|\text{Arg}(p_i)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall i \quad (I.57)$$

Avec p_i la $i^{\text{ème}}$ racine de $\Delta(p)$. Cette condition définit la région (domaine) de stabilité d'un système d'ordre fractionnaire, dans le plan complexe S , représentée dans la figure (1 .1) suivante :

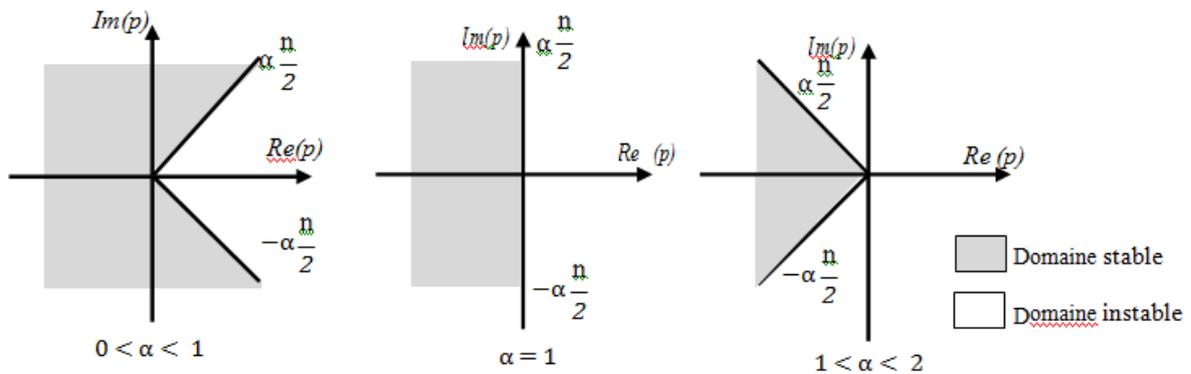


Figure I.1 : Domaine de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire dans le plan complexe

I.6 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux notions fondamentales de la théorie du calcul d'ordre fractionnaire. Nous y répertorions quelques notions nécessaires pour la compréhension de notre travail.

Commençant par les différentes définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, leurs propriétés, et leurs transformées de Laplace.

A la fin de ce chapitre nous avons abordé les différents modèles de représentation des systèmes fractionnaires et leurs propriétés (stabilité, Commandabilité et observabilité).

Chapitre 2

Méthodes d'Approximation des Systèmes d'Ordre Fractionnaire

II. 1 Introduction :

Un grand intérêt a été porté aux systèmes d'ordre fractionnaire, dans les dernières décennies, à cause des nombreuses applications dans les sciences appliquées et l'ingénierie [17].

A cause de leur représentation par des fonctions irrationnelles, les opérateurs d'ordre fractionnaires ont été marginalisés dans l'étude des systèmes. Ce n'est que dans les 20 dernières années que des travaux de recherche intensifs ont permis l'application pratique des opérateurs d'ordre fractionnaire dans le domaine du génie électrique [18].

L'étude et la simulation des systèmes d'ordre entier s'effectuent sur des logiciels. Or ces derniers ne sont pas destinés aux simulations des systèmes d'ordre non entier. Donc si on veut faire une simulation ou une implémentation de correcteur, des systèmes d'ordre fractionnaire une approximation est nécessaire [11].

On a plusieurs schémas d'approximation qui sont proposés, on en distingue deux types principaux, des méthodes d'approximation discrètes (numériques) et des méthodes continues (analogiques). Dans le domaine s (dans le domaine fréquentiel), l'approximation est dite continue. Dans le domaine z (dans le domaine de temps), on parle d'approximation discrète. [6].

Beaucoup de travaux ont été fait pour l'approximation numérique des opérateurs fractionnaires par des fonctions rationnelles. Il y a deux techniques d'approximations : directes et indirectes. Les méthodes directes sont basées sur le développement en séries de puissance dans le domaine discret des opérateurs fractionnaires (Euler, Tustin, Al Alaoui). Les méthodes indirectes, requièrent deux étapes. En premier, une approximation fréquentielle est faite sur l'opérateur fractionnaire, la deuxième étape étant l'utilisation d'une des méthodes de passage du domaine analogique au discret. [17][12][20]. Parmi lesquelles on cite : [20][21]

- Intégration numérique et développement en série de puissances (PSE)
- Méthode CFE (Continuous Function Expansion)

Il existe plusieurs techniques d'approximation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles. Elles se basent sur l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaires par un transfert dans les pôles et les zéros sont liés par une équation de récurrence. L'approximation est faite en 3 étapes : [6]

-
- Approximation de l'opérateur non entier sur une bande de fréquences finie $[W_A, W_B]$
 - Approximation du modèle non entier obtenu par un modèle entier
 - Calcul du modèle global et de la sortie.

Il est généralement préférable d'utiliser les approximations d'opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles, car, dans le but d'une interpolation ou d'évaluation, les fonctions rationnelles sont supérieures aux polynômes. Et à cause de leur capacité de modéliser des fonctions par des zéros et des pôles, elles convergent plus rapidement que l'expansion en série de puissance. [21][22]

On peut citer parmi ces méthodes : [12][17][20][21][22]

- Méthode d'approximation par CFE (Continuous Function Expansion)
- Méthode de Carlson
- Méthode de Matsuda
- Méthode d'Oustaloup
- Méthode de Charef

Dans la littérature les méthodes d'Oustaloup et de Charef sont les plus répandues, c'est pourquoi nous allons les détailler dans ce chapitre.

Ce présent chapitre, dans le but de permettre l'étude et la simulation des systèmes d'ordre fractionnaires, va traiter des différentes méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire en fonctions rationnelles (discrètes : brièvement et continues avec détails sur les méthodes d'Oustaloup et de Charef). Mais d'abord nous allons commencer par présenter quelques notions de base sur les opérateurs d'ordre fractionnaire.

II.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire :

On peut distinguer deux types d'opérateurs d'ordre fractionnaires : opérateurs analogiques et opérateurs numériques. Ces opérateurs sont des généralisations des opérateurs classiques d'ordre entier, ce qui leur donne une plus grande flexibilité dans la modélisation des systèmes physiques [17].

II.2.1 Opérateurs d'ordre fractionnaires analogiques :

L'intégrateur et dérivateur non entiers analogiques sont, respectivement, représentés par les fonctions irrationnelles suivantes : [17][23] [24]

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \quad (II.1)$$

$$G_D(s) = s^m \quad (II.2)$$

Avec

$$0 < m < 1$$

Où : $s = j\omega$ est la fréquence complexe et m un nombre fractionnaire positif.

II.2.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire numériques :

L'intégrateur et dérivateur non entiers numériques sont, respectivement, représentés par les fonctions irrationnelles suivantes : [17]

$$G_R(z) = z^{-m} \quad (II.3)$$

$$G_A(z) = z^m \quad (II.4)$$

Avec

$$0 < m < 1$$

Remarque :

Les opérateurs d'ordre fractionnaires numériques, intégrateur et dérivateur, sont appelés, respectivement, opérateur d'avance et opérateur de retard.

II.3 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire :

Dans la littérature, il existe beaucoup de méthodes d'approximation des systèmes d'ordre non entier. Elles se partagent en deux classes principales : les méthodes du domaine fréquentiel (approximations analogiques), et les méthodes du domaine temporel (approximations numériques).

II .3.1 Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire :

La difficulté majeure des systèmes d'ordre fractionnaires est la simulation dans le domaine temporel car l'expression analytique de la sortie est difficile à implémenter, ce qui nécessite donc une approximation. Il y a trois types de méthodes d'approximation numérique : [6][20][21][25][27].

- Par calcul de l'expression analytique de la sortie du système
- Par approximation du modèle non entier par un modèle rationnel discret
- Par approximation du modèle non entier par un modèle rationnel continu puis la discrétisation de ce dernier.

II.3.1.1 Approximation par calcul de l'expression analytique :

Détaillée dans [6], [25] et [27], la méthode consiste à calculer la sortie du système d'ordre fractionnaire à partir de sa représentation modale qui est donnée par la fonction suivante :

$$H(s) = \sum_{l=1}^L \frac{A_l}{s^n - \lambda_l} \quad (II.5)$$

Où $l = 1, 2, \dots, L$ est la multiplicité de la valeur propre λ_l

La sortie est donnée par la formule suivante :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_l}{s^n - \lambda_l} \right\} * u(t) = h_l(t) * u(t) \quad (II.6)$$

L'expression analytique de la sortie n'est pas simple, puisqu'elle exige le calcul d'une intégrale compliquée. De plus, elle dépend de la précision utilisée dans le calcul du produit de convolution de l'entrée et $h_l(t)$.

II.3.1.2 Approximation par un modèle rationnel discret :

Le principe de cette méthode est de remplacer s , dans le modèle non entier, par son équivalent discret $w(z^{-1})$. Cette opération donne la fonction de transfert discrète suivante :

$$H(z) = \frac{b_1(w(z^{-1}))^{n_{b1}} + \dots + b_j(w(z^{-1}))^{n_{bj}}}{(w(z^{-1}))^{n_{a1}} + \dots + a_L (w(z^{-1}))^{n_{aL}}} \quad (II.7)$$

Où $w(z^{-1})$, peut être calculé de plusieurs méthodes. Parmi lesquelles on peut citer : Euler, Tustin, Simpson, et Al Alaoui :

i. Euler (Grunwald) :

$$s^n = \left(\frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \right)^n = \frac{1}{T^n} \left(1 - n z^{-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{-2} + \dots \right) \quad (II.8)$$

ii. Tustin :

$$s^n = \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^n = \left(\frac{2}{T} \right)^n (1 - 2n z^{-1} + 2n^2 z^{-2} + \dots) \quad (II.9)$$

iii. Simpson :

$$s^n = \left(\frac{3}{T} \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}} \right)^n = \left(\frac{3}{T} \right)^n (1 - 4n z^{-1} + 2n(4n + 3)z^{-2} + \dots) \quad (II.10)$$

iv. Al Alaoui :

$$s^n = \left(\frac{8}{7T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{z^{-1}}{7}} \right)^n = \left(\frac{8}{7T} \right)^n \left(1 - \frac{8}{7} n z^{-1} + \left(-\frac{24}{49} n + \frac{32}{49} n^2 \right) z^{-2} + \dots \right)^n \quad (II.11)$$

L'inconvénient de ces méthodes est que l'ordre du modèle entier obtenu est élevé, et cela rend la simulation à temps réel dure à obtenir.

II.3.1.3 Approximation en utilisant un modèle entier continu :

Dans ces méthodes la sortie du système non entier est calculée en utilisant un modèle entier équivalent. Le modèle entier est trouvé en utilisant des méthodes d'approximation continues des opérateurs fractionnaires par des modèles rationnels. Généralement l'analyse du modèle fractionnaire se fait dans une plage de fréquences limitée, donc le modèle d'ordre entier continu trouvé doit avoir la même dynamique dans la bande de fréquences. L'approximation du système se calcule en trois étapes :

- L'opérateur fractionnaire est représenté par un modèle non entier dans une plage de fréquences limitée $[w_A \ w_B]$.
- Le modèle obtenu est alors approximé par un modèle entier continu en utilisant une des méthodes qui seront détaillées plus tard dans ce chapitre.
- Par des méthodes de discrétisation classiques, le modèle entier obtenu sera discrétisé et de là sa sortie pourra être calculée.

II.3.2. Approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire :

Dans le but de réaliser et implémenter des correcteurs ou simuler des systèmes d'ordre non entier, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire doivent être remplacées par des modèles entiers, avec un comportement identiques à celui des fonctions fractionnaires et plus faciles à manipuler. Il existe plusieurs méthodes d'approximation qui utilisent des approches différentes, utilisant l'expansion de fonction continues (CFE : fonction utilisée pour l'évaluation de fonctions et converge plus rapidement), et des méthodes d'ajustement de courbes. [21]

Dans la section qui suit, nous allons présenter brièvement le principe de certaines de ces méthodes, dont les méthodes de Charef et Oustaloup qui seront détaillées car elles sont les plus utilisées dans la littérature et les plus élaborées. [18][19][20][21][26].

II.3.2.1 Méthodes d'approximation en utilisant l'expansion des fonctions continues :

La méthode générale d'approximation de l'opérateur intégrateur fractionnaire $G_I(s) = \frac{1}{s^m}$ en utilisant la CFE, est donnée par les fonctions suivantes :

$$G_h(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^m} \quad (II.12)$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^m \quad (II.13)$$

Où $G_h(s)$ est l'approximation en hautes fréquences, et $G_l(s)$ est l'approximation en basses fréquences.

II.3.2.2 Méthode de Carlson :

La méthode est dérivée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative d'ordre α . La méthode se base sur la relation suivante :

$$(H(s)^{1/\alpha} - G(s)) = 0 \Rightarrow H(s) = (G(s))^\alpha \quad (II.14)$$

En posant $\alpha = \frac{1}{q}$ et $m = \frac{q}{2}$ dans chaque itération, à partir de $H_0(s) = 1$ comme valeur initiale, l'approximation est obtenue par la formule suivante :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (II.15)$$

II.3.2.3 Méthode de Matsuda :

Proposée dans [33], cette méthode est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle obtenue par la CFE, et l'ajustement de la fonction d'origine dans un ensemble de points logarithmiques espacés. En prenant les points s_k avec $k = 1, 2, \dots$. L'approximation prend la forme suivante :

$$H(s) = a_0(s) + \frac{s - s_0}{a_1 + \frac{s - s_1}{a_2 + \frac{s - s_2}{a_3 + \dots}}} \quad (II.16)$$

Avec

$$a_i = v_i(s_i) \quad v_0(s) = H(s) \quad v_{i+i}(s) = \frac{s - s_i}{v_i(s) - a_i} \quad (II.17)$$

II.3.2.4 Méthodes utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification :

C'est les méthodes les plus utilisées, et on va exposer dans ce qui suit les méthodes de Charef, appelée aussi méthode de la fonction de singularité, et la méthode d'Oustaloup.

II.3.2.4.1. Méthode de Charef : fonction de singularité :

La méthode de Charef a été élaborée pour l'approximation des opérateurs fractionnaires (intégrateur et dérivateur) par des fonctions rationnelles, dans le but de les implémenter en correcteurs $PI^\lambda D^\mu$.

Le principe de cette méthode est que, pour une bande de fréquences donnée, l'opérateur est approximé par une fonction PPF : Pôle à Puissance Fractionnaire (FPP : Fractional Power Pole), cette dernière est ensuite, approximée par une fonction rationnelle en utilisant la méthode d'approximation de Charef des systèmes à un seul ordre fractionnaire, et celle des systèmes à ordres fractionnaires multiples.

Mais avant d'exposer les méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire, on présente la méthode d'approximation des systèmes non entiers [18][19].

II.3.2.4.1.1 Approximation des systèmes du 1^{er} ordre fractionnaire :

Dans le domaine fréquentiel, un système du 1^{er} ordre fractionnaire (single fractal system) peut être modélisé par la fonction de transfert PPF suivante :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \quad (II. 18)$$

Où $1/P_T$ est la constante de temps, et $0 < m < 1$ est l'ordre non entier

Dans le diagramme de Bode de $H(s)$ la ligne avec une pente de $-20m \text{ dB/dec}$ est approximée par un nombre de zig zag interconnectés, avec des pentes alternées entre 0 dB/dec et -20 dB/dec comme le montre la figure (II.1). Les propriétés en hautes et basses fréquences, de la fonction de transfert du modèle du 1^{er} ordre fractionnaire, montrent que les première et dernière singularités de l'approximation doivent être des pôles. On peut donc réécrire (II.18) comme suit :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.19})$$

Avec $N + 1$ est le nombre total de singularités qui est déterminé par la bande de fréquences du système.

Pour une bande de fréquences finie, le nombre de singularités sera fini. La formule (II.19) peut être écrite comme suit :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.20})$$

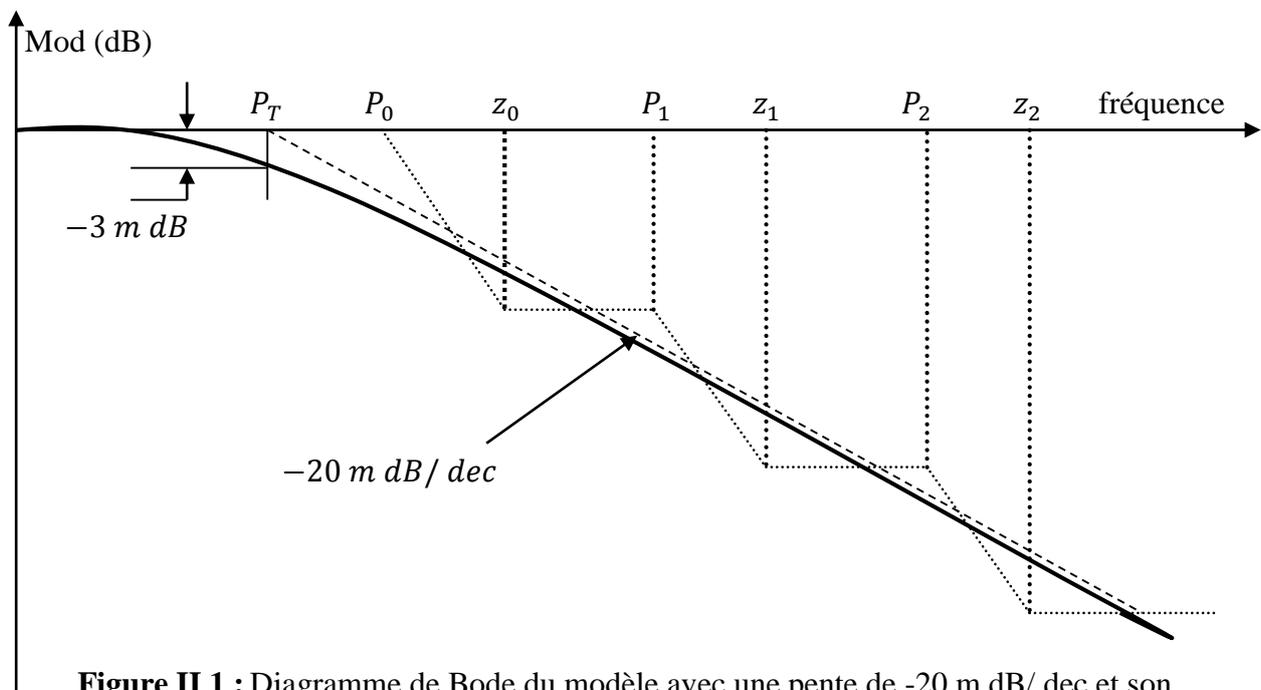


Figure II 1 : Diagramme de Bode du modèle avec une pente de -20 m dB/dec et son approximation par des zig zag à -20 dB/dec et 0 dB/dec

En supposant que l'erreur entre le zig zag et la ligne désirée soit y (dB) (Figure (II.2)), alors les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être trouvés comme suit :

Le premier pôle : $P_0 = P_T 10^{\left[\frac{y}{20m}\right]}$

Le premier zéro : $z_0 = P_0 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}$

Le deuxième pôle : $P_1 = z_0 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}$

Le deuxième zéro : $z_1 = P_1 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}$

⋮ ⋮

Le N^{eme} zéro : $z_{N-1} = P_{N-1} 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]}$

Le $(N + 1)^{\text{eme}}$ pôle : $P_N = z_{N-1} 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]}$

Où P_T est la fréquence correspondant à $-3m$ dB comme dans la figure (II.1), P_0 est la première singularité qui est déterminée par y (dB) et P_N est la dernière singularité, déterminée par N .

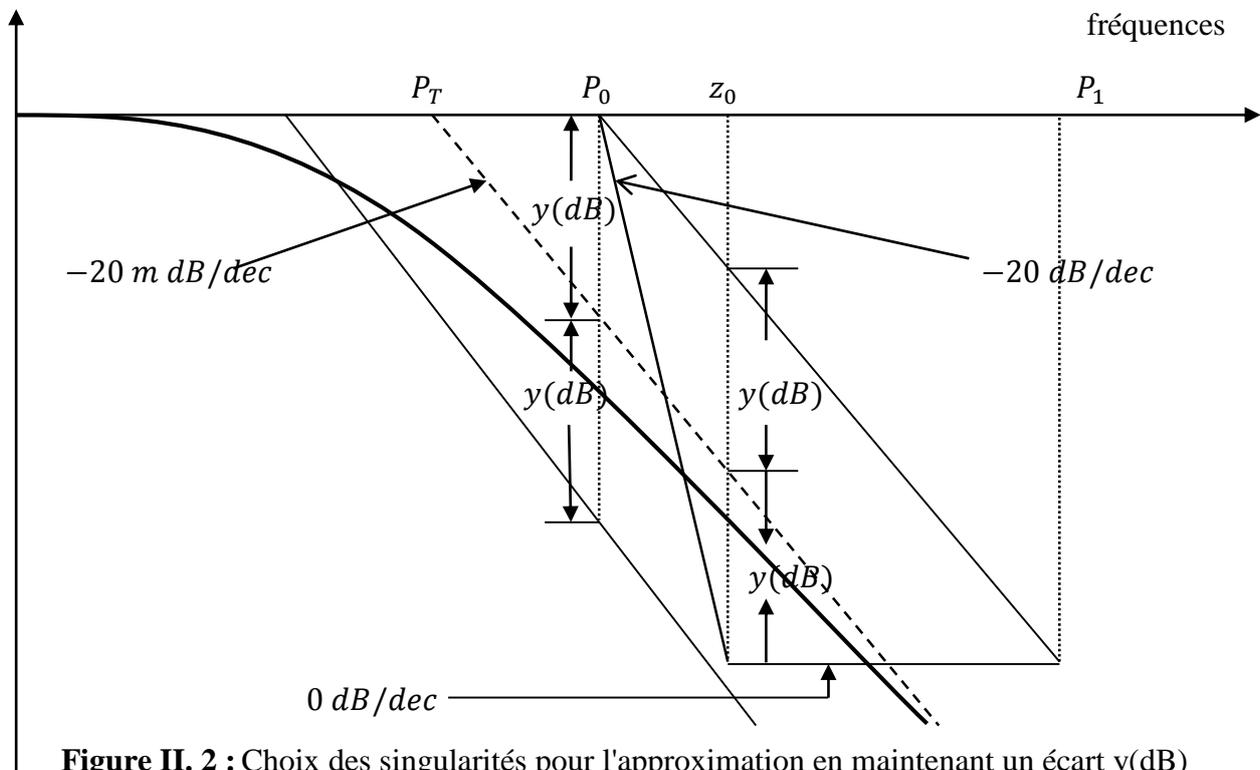


Figure II. 2 : Choix des singularités pour l'approximation en maintenant un écart y (dB) constant entre la ligne à $-20m$ dB/dec et les lignes zig zag

Posons :

$$a = 10^{\lfloor y/10(1-m) \rfloor} \quad (II.21)$$

$$b = 10^{\lfloor y/10m \rfloor} \quad (II.22)$$

a et b sont appelés les rapports de position.

Alors

$$ab = 10^{\lfloor y/10m(1-m) \rfloor} \quad (II.23)$$

De là on peut déduire les valeurs des pôles et des zéros de la fonction de singularité, qui sont définis par les relations suivantes :

$$P_i = (ab)^i P_0 \quad (II.24)$$

$$z_i = (ab)^i a P_0 \quad (11.25)$$

Pour $i = 1, 2, 3, \dots$

Donc la fonction rationnelle approximée s'écrit sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} \quad (II.26)$$

Avec : [19]

$$N = \text{integer} \left(\frac{\log \left(\frac{\omega_{max}}{P_0} \right)}{\log(ab)} \right) + 1 \quad (II.27)$$

Où ω_{max} est la fréquence maximum de la bande de fréquences de travail spécifiée, et les deux derniers pôles doivent satisfaire la condition suivante :

$$P_{N-1} < \omega_{max} < P_N$$

II.3.2.4.1.2 Approximation des systèmes à ordres fractionnaires multiples :

Un système à ordres fractionnaires multiples (multiple-fractal system), peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par la PPF multiple comme suit [19] :

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^p \left(1 + \frac{s}{P_{T_i}}\right)^{m_i}} \quad (II.28)$$

Où $P_{T_i} < P_{T_{i+1}}$ et $0 < m_i < 1$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ sont les fréquences de coupure.

Comme pour le système du 1^{er} ordre fractal, chaque section du système multiple peut être approximée par un nombre de singularités. Donc la fonction (II.28) peut être approximée comme suit :

$$H(s) = \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{z_{i_1}}\right)}{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{P_{i_1}}\right)} \frac{\prod_{i_2=0}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{z_{i_2}}\right)}{\prod_{i_2=0}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{P_{i_2}}\right)} \dots \frac{\prod_{i_p=0}^{N_p} \left(1 + \frac{s}{z_{i_p}}\right)}{\prod_{i_p=0}^{N_p} \left(1 + \frac{s}{P_{i_p}}\right)} \quad (II.29)$$

Les singularités sont choisies de telle sorte à avoir une alternance entre les pôles et les zéros, pour assurer que les résidus soient réels et positifs. On commence par choisir les pôles pour chaque section.

$$P_n = (ab)^n P_0, \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (II.30)$$

$$M = N_1 + N_2 + \dots + N_p + (p - 1)$$

Les zéros sont choisis en fonction des deux pôles qui leur seront adjacents. En effet, puisque le processus débute par un pôle P_0 , chaque section doit se terminer par un zéro pour que la section lui succédant débute par un pôle. Les zéros sont donc générés par les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
1^{\text{ère}} \text{ section : } & z_{i_1} = (ab)^{i_1} a_1 P_0 , & i_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 \\
2^{\text{ème}} \text{ section : } & z_{i_2} = (ab)^{(N_1+1+i_2)} a_2 P_0 , & i_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 \\
& \vdots \\
P^{\text{ème}} \text{ section : } & z_{i_p} = (ab)^{(N_1+N_2+\dots+N_{p-1}+(p-1)+i_p)} a_p P_0 , & i_p = 0, 1, 2, \dots, N_p
\end{aligned}$$

Où N_1, N_2, \dots, N_p sont déterminés de la même façon que pour le système du 1^{er} ordre fractionnaire, c'est-à-dire, en fixant la bande de fréquences et l'écart y (dB) désiré. Et avec (ab) constant pour tout le système. On aura donc l'approximation du système suivante :

$$H(s) \approx \sum_{n=0}^M \frac{k_n}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^n P_0}\right)} \quad (\text{II.31})$$

Avec

$$k_n = \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left[1 - \frac{(ab)^{n-i_1}}{a_1}\right] \prod_{i_2=0}^{N_2} \left[1 - \frac{(ab)^{n-(N_1+1+i_2)}}{a_2}\right] \dots \prod_{i_p=0}^{N_p} \left[1 - \frac{(ab)^{n-(N_1+\dots+N_{p-1}+(p-1)+i_p)}}{a_p}\right]}{\prod_{i=0}^M [1 - (ab)^{n-1}]}$$

II.3.2.4.1.3 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire :

Cette méthode est efficace et facile à utiliser dont le but est d'approximer par une fonction rationnelle l'intégrateur non entier. Dans un premier lieu, l'opérateur est modélisé par une fonction PPF dans une bande de fréquence d'utilité pratique. Ensuite, cette dernière est approximée par une fonction rationnelle en utilisant la méthode de Charef exposée dans la section précédente. Donc avec cette méthode on peut atteindre n'importe quelle précision désirée sur n'importe quelle bande de fréquences [18].

Pour une bande de fréquences d'utilité pratique donnée $[\omega_l \ \omega_h]$, l'opérateur intégrateur présenté par la formule (II.1) peut être modélisé par la fonction de transfert PPF suivante : [18]

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right)^m} \quad (II.32)$$

En supposant que $\omega \in [\omega_l \ \omega_h]$, on a $\omega \gg \omega_c$, alors :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = G_I(s) \quad (II.33)$$

Avec $K_I = \frac{1}{\omega_c^m}$ et ω_c est la fréquence de coupure obtenue dans le diagramme de Bode à $-3m \text{ dB}$ qui est calculée par : $\omega_c = \omega_l \sqrt{10^{[\varepsilon/10m]} - 1}$, où ε est l'erreur maximale permise entre les pentes de l'intégrateur d'ordre fractionnaire (II.1) et sa fonction PPF (II.32) dans une bande fréquences donnée.

Pour représenter la fonction (II.32) par un modèle temps-invariant, on va l'approximer par la méthode de la fonction de singularité vue dans la section précédente (II.3.2.4.1.1). La méthode consiste en l'approximation de la pente à $-20m \text{ dB/dec}$, dans le diagramme de Bode, par une alternance de pentes à -20 dB/dec et 0 dB/dec . Cette dernière correspond à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan complexe S .

$$P_0 < z_0 < P_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < P_N$$

On obtient l'approximation suivante :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (II.34)$$

Obtenue en choisissant y et ω_{max} , qui peut être fixée à $100 \omega_h$, et avec

$$P_0 = \omega_c 10^{y/20m} \text{ et } z_0 = a P_0$$

a, b et N restent les mêmes que dans (II.21), (II.22) et (II.27) respectivement.

Nous avons vu que les pôles et les zéros P_i et z_i peuvent être écrits comme dans (II.24) et (II.25), respectivement. De là, on peut déduire l'approximation de l'intégrateur non entier dans une bande de fréquences donnée.

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (II.35)$$

Pour voir la contribution de chaque pôle, on décompose la fonction (II.35) en somme de fractions simples (ou résidus). On obtient :

$$G_I(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (II.36)$$

Avec

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (II.37)$$

II.3.2.4.1.4 Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire :

Dans le but d'implanter des correcteurs d'ordre fractionnaire, la méthode d'approximation de l'intégrateur a été étendue au dérivateur d'ordre fractionnaire, et de même la PPF a été étendue à la ZPF : Zéro à Puissance Fractionnaire (FPZ : Fractional Power Zero).

Pour une bande de fréquences d'utilité pratique donnée, le dérivateur d'ordre fractionnaire donné dans (II.2), peut être modélisé par la fonction ZPF suivante : [18]

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \quad (II.38)$$

En supposant que $\omega \in [\omega_l \ \omega_h]$, on a $\omega \gg \omega_c$, alors :

$$G(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D s^m}{\omega_c^m} = s^m = G_D(s) \quad (II.39)$$

Avec $K_D = \omega_c$ et ω_c est la fréquence de coupure obtenue dans le diagramme de Bode à $-3 m \text{ dB}$ qui est calculée par : $\omega_c = \omega_l \sqrt{10^{[\varepsilon/10m]} - 1}$, où ε est l'erreur maximale permise entre les pentes du dérivateur d'ordre fractionnaire (II.2) et sa fonction ZPF (II.38) dans une bande fréquences donnée.

Pour représenter la fonction (II.38) par un modèle temps-invariant, on va l'approximer par la méthode des singularités vue précédemment. Elle consiste dans ce cas, en l'approximation de la pente à $20 m \text{ dB/dec}$ du diagramme de Bode de la ZPF, par une succession de pentes à 20 dB/dec et 0 dB/dec . Elles correspondent à une alternance de zéros et de pôles sur l'axe réel négatif du plan complexe S . Comme suit

$$z_0 < P_0 < z_1 < P_1 < \dots < z_N < P_N$$

On obtient l'approximation suivante :

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m = K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i} \right)} \quad (II.40)$$

De même que pour l'intégrateur d'ordre fractionnaire, les zéros et les pôles de l'approximation sont en progression géométrique. En spécifiant y et ω_{max} , peut être fixée à $100 \omega_h$. On détermine les paramètres suivants :

$$z_0 = \omega_c 10^{(y/20m)} \quad \text{et} \quad P_0 = a z_0$$

a, b et N restent les mêmes que dans (II.21), (II.22) et (II.27) respectivement.

En remplaçant P_i et z_i par leurs formules respectives, (II.24) et (II.25), on obtient l'approximation suivante :

$$G_D(s) = s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (II.41)$$

Le calcul des résidus de la fonction (II.41), donne la formule suivante :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{k_i s}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} \quad (II.42)$$

Avec $G_0 = K_D$ et

$$k_i = -\frac{K_D}{P_0(ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (II.43)$$

II.3.2.4.2 Méthode d'Oustaloup :

La méthode est basée sur l'approximation par pôles et zéros récursifs de l'opérateur de dérivation non entière. L'objectif de cette méthode est d'approcher l'opérateur d'intégration ou de dérivation non entier par un modèle entier borné en fréquence de dimension finie. Cette approximation nécessite deux étapes : [21][25][28][29][30][32][34]

- La troncature fréquentielle de l'opérateur d'intégration ou de dérivation.

- L'approximation de l'opérateur non entier borné en fréquence par un modèle entier.

a) Dérivateur généralisé :

Le dérivateur généralisé est défini par la fonction de transfert suivante :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (II.44)$$

Où $m \in \mathcal{R}$ et ω_c est appelée fréquence transitionnelle. Ainsi, pour des ordres strictement positifs la relation (II.44) définit un dérivateur d'ordre non entier et pour des ordres strictement négatifs un intégrateur d'ordre non entier [15].

En premier lieu, on effectue une troncature, elle consiste à limiter le comportement différentiel de $\left(\frac{s}{\omega_c} \right)$, sur l'intervalle $[\omega_A, \omega_B]$ centré sur ω_c . En réalité, la troncature sera effectuée sur l'intervalle plus large $[\omega_l, \omega_h]$, pour plus de précision.

Avec

$$\omega_l \ll \omega_A \text{ et } \omega_h \gg \omega_B$$

On introduit alors, le dérivateur d'ordre fractionnaire borné en fréquence proposé par Oustaloup.

$$D_{bf}(s) = \left(C_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_l}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad -1 < m < 1 \quad (II.45)$$

Où

$$C_0 = \frac{\omega_l}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_h} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\omega_h \omega_l} \quad (II.46)$$

Pour assurer un gain unitaire à la fréquence ω_c

Dans une seconde phase, l'approche consiste à approximer le dérivateur borné en fréquence (II.45), par une distribution récursive de pôles et de zéros réels. Ce qui donne un transfert d'ordre entier.

$$D_{bf}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \quad (II.47)$$

Où

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_h}\right)^m \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{P_i}} \quad (II.48)$$

z_i et P_i représentent les zéros et les pôles de rang i ; ces $N + 1$ paires de zéro-pôle sont déterminés par les relations récursives suivantes :

$$\frac{P_i}{z_i} = \alpha > 0 \quad (II.49)$$

$$\frac{z_{i+1}}{P_i} > \eta > 0 \quad (II.50)$$

$$\frac{z_{i+1}}{z_i} = \frac{P_{i+1}}{P_i} = \alpha\eta > 1 \quad (II.51)$$

Les facteurs α et η sont appelés facteurs récursifs. Et ils donnent un rapport constant $\alpha\eta$ entre deux pôles ou deux zéros consécutifs. Et N est généralement fixé de telle sorte à avoir $\alpha\eta$ approximativement égal à 5

La figure suivante représente le diagramme asymptotique de Bode de $D_N(s)$, ce dernier est lissé pour aboutir au diagramme de $D_{bf}(s)$

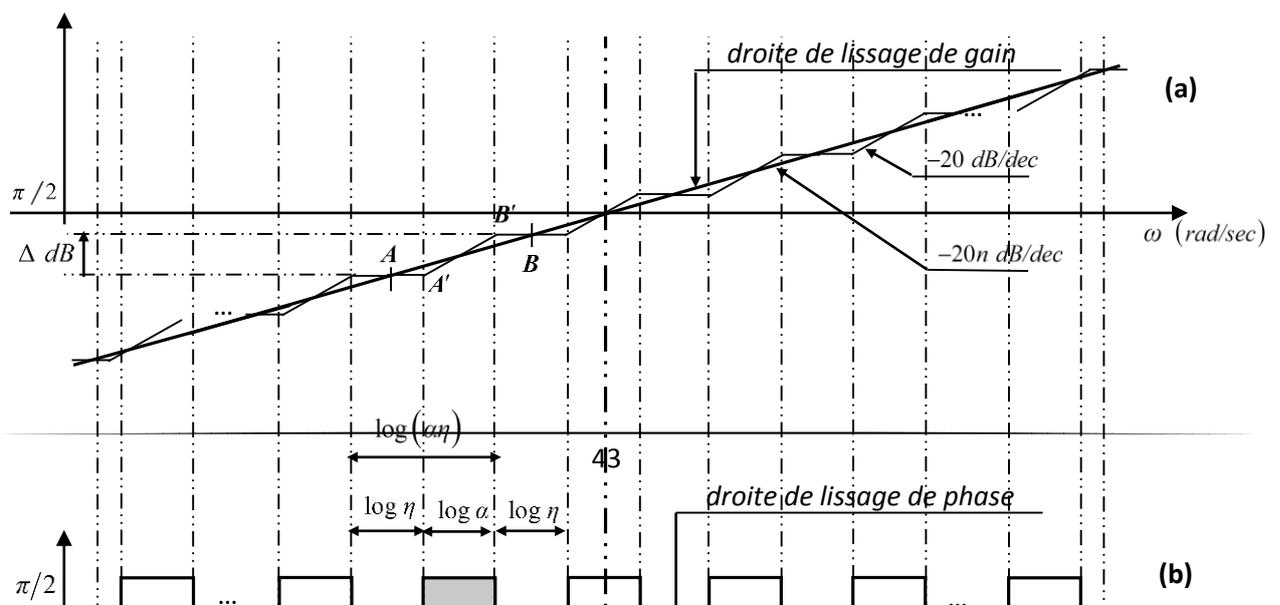


Figure II .3 :Diagramme asymptotique de Bode de $D_{bf}(s)$ et $D_N(s)$ Pour $m \in]0, 1[$

A partir des pentes des deux segments AB et $A'B'$ qui sont données respectivement par :

$$20m \text{ dB/dec} = \frac{\Delta dB}{\log(\alpha) + \log(\eta)} \quad (II.52)$$

$$20 \text{ dB/dec} = \frac{\Delta dB}{\log(\alpha)} \quad (II.53)$$

On peut déduire, en effectuant leur rapport, la relation entre l'ordre m et les facteurs récurrents α et η :

$$m = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)} \quad (II.54)$$

On peut aussi, à partir du diagramme précédent déduire les formules suivantes :

$$\frac{\omega_h}{\omega_l} = (\alpha\eta)^{2N+1} \Rightarrow (\alpha\eta) = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{1/(2N+1)} \quad (II.55)$$

$$\alpha = (\alpha\eta)^m \quad \text{et} \quad \eta = (\alpha\eta)^{1-m} \quad (11.56)$$

Les pôles et zéros de rang i peuvent être, aussi, écrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} z_i = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2-n/2)}{2N+1}} \omega_l \\ P_i = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2+n/2)}{2N+1}} \omega_l \end{cases} \quad (II.57)$$

L'intérêt de cette méthode d'approximation réside dans sa simplicité de mise en œuvre. Si l'ordre $m > 1$ ou $m < -1$, seule la partie non entière est approchée par un modèle entier.

A défaut de l'expression analytique de la réponse indicelle d'un système non entier, la réponse issue de l'approximation par un grand nombre de pôles et de zéros récursifs et une large bande fréquentielle peut être utilisée comme sortie de référence [31].

Néanmoins, cette approche est moins efficace quand l'ordre s'approche de 1. [25][34]. deux nouvelles approximations, moins sensibles à l'ordre, sont présentées dans [25]. La première inclue deux pôles et un zéro de plus, et la deuxième inclue un pôle et deux zéro de plus.

II.4 Réalisation par des circuits analogiques :

Pour l'implémentation des opérateurs d'ordre non entier, on utilisera l'approximation obtenue par la méthode de Charef. [4][18][20].

II.4.1. L'implémentation de l'intégrateur :

A partir de la fonction (II.36), on peut voir qu'elle est l'équivalent d'une impédance de $N + 1$ cellules RC parallèles connectées en série comme montré dans la figure (II.3).

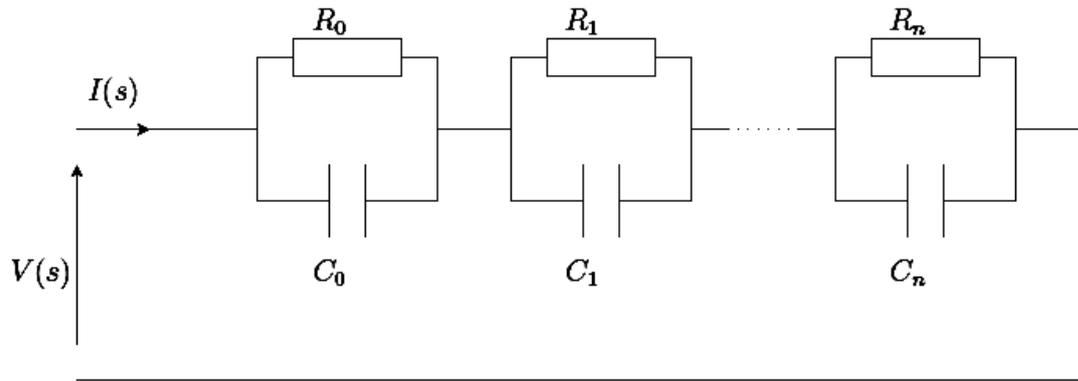


Figure II. 4 : Circuit RC équivalent à l'intégrateur d'ordre fractionnaire

L'impédance $Z(s)$ de ce circuit est donnée par cette formule :

$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{R_i}{1 + s R_i C_i} \right) \quad (II.58)$$

On peut donc déduire de (II.36) et (II.58) et pour $i = 1, 2, \dots, N$ que :

$$h_i = R_i \quad \text{et} \quad R_i C_i = \frac{1}{(ab)^i P_0} \quad (II.59)$$

Et donc les valeurs des résistances et des capacités sont données comme suit :

$$R_i = h_i, \quad C_i = \frac{1}{(ab)^i P_0 h_i} \quad (II.60)$$

II.4.2. L'implémentation du dérivateur :

A partir de la fonction (II.42), on voit qu'elle est équivalente à l'admittance d'une résistance placée en parallèle avec $N + 1$ cellules RC placées en cascade. Comme sur la figure (II.4).

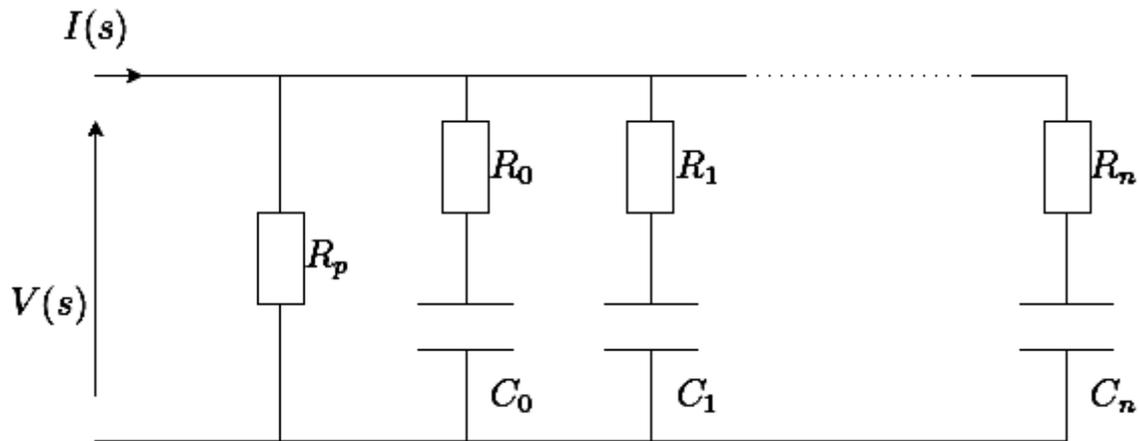


Figure II .5 : Circuit RC équivalent au dérivateur d'ordre fractionnaire

L'admittance $Y(s)$ est donnée par la formule :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left(\frac{sC_i}{1 + s R_i C_i} \right) \quad (II.61)$$

De (II.42) et (II.61), on voit que :

$$G_0 = \frac{1}{R_p}, \quad C_i = k_i, \quad \text{et} \quad R_i C_i = \frac{1}{(ab)^i P_0}$$

De là, on peut déduire les valeurs des résistances et des capacités.

$$R_p = \frac{1}{G_0}, \quad C_i = k_i, \quad R_i = \frac{1}{(ab)^i P_0 k_i} \quad (II.62)$$

II.5 Conclusion

La synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire nécessite leur approximation à des modèles d'ordre entier. Dans ce chapitre, nous avons fait un exposé théorique des différentes méthodes d'approximation connues dans la littérature.

Tout d'abord, on s'est brièvement intéressé aux méthodes d'approximation numériques. Puis on s'est intéressé aux méthodes d'approximation analogiques notamment les méthodes de Charef et d'Oustaloup, auxquelles nous avons porté un intérêt particulier et que nous avons détaillées.

Les deux méthodes sont similaires, en effet, elles sont toutes les deux des méthodes graphiques (se basent sur le tracé du diagramme de Bode), et fournissent des approximations sur des bandes de fréquences définies.

Enfin, en se basant sur les approximations obtenues par la fonction de singularité, on a présenté une implémentation aux opérateurs d'ordre fractionnaire par des circuits électriques : des cellules *RC* parallèles pour l'intégrateur, et des cellules *RC* en cascade pour le dérivateur.

A l'issue de ce chapitre, nous avons une meilleure compréhension et maîtrise théoriques des méthodes d'approximation de Charef et d'Oustaloup, et une anticipation de possibles résultats pratiques qui seront confirmés avec l'application des deux méthodes dans la suite de ce travail.

Chapitre **3**

*Application des Méthodes
d'Approximation des
Systèmes d'Ordre
Fractionnaire*

III. 1 Introduction :

Après avoir présenté les bases du calcul fractionnaire et des systèmes d'ordre fractionnaire dans le Chapitre I, montré la nécessité d'approximer ces systèmes par des modèles d'ordre entier, à des fins de simulation, analyse et régulation, dans le Chapitre II. Ce présent Chapitre va traiter des exemples utilisant les approximations vues précédemment.

Etant les deux méthodes les plus utilisées dans la littérature, notre choix se porte donc sur l'application des méthodes de Charef et d'Oustaloup pour les exemples que nous traiterons dans ce chapitre.

Théoriquement, une représentation d'ordre entier d'un système d'ordre fractionnaire est de dimension infinie. Or il est possible de faire une implémentation selon une bande de fréquence limitée. [35]. C'est en effet, le principe sur lequel sont basées ces deux méthodes. Nous avons vu que pour une bande de fréquences définie, le système d'ordre fractionnaire et son approximation d'ordre entier ont la même dynamique.

Dans ce chapitre, nous allons essayer, par le biais d'exemples simples et directs, de confirmer cette hypothèse. Et pour ce faire, il sera procédé, en utilisant des programmes Matlab, à l'approximation de l'intégrateur (de même pour le dérivateur) fractionnaire par les deux méthodes, avec deux choix différents de bandes de fréquences. On considérera aussi trois valeurs différentes de l'ordre m . Une valeur proche de zéro ($m = 0.1$), une valeur proche de 1 ($m = 0.9$) et une valeur médiane ($m = 0.5$), pour montrer l'influence de l'ordre.

Les résultats seront, ensuite, interprétés selon l'hypothèse émise. Et enfin, on procédera à une comparaison entre les deux méthodes

III.2 Application de la méthode de Charef :

Dans un premier temps, on applique cette méthode à un intégrateur pour deux bandes de fréquences différentes. Et dans tout ce qui suivra, on considère $y = 1$ l'écart de l'approximation choisi. Et $\varepsilon = 10^{-5}$ l'erreur maximale permise pour les pentes de la FPP.

III.2.1 Intégrateur fractionnaire :

III.2.1.1 Pour $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ et $m = 0.1$:

La fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.1}}$$

Pour la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$, et $\varepsilon = 10^{-5}$, on trouve $\omega_c = 4.7986 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$, $K_I = 2.7033$. Le modèle FPP de cet opérateur est donc :

$$G_I = \frac{2.7033}{\left(1 + \frac{s}{4.7986 \times 10^{-5}}\right)^{0.1}}$$

L'approximation de la FPP ci-dessus donne les résultats suivants :

$$a = 1.2915, b = 10, ab = 12.9155, P_0 = 1.5174 \times 10^{-4}, z_0 = 1.9598 \times 10^{-4} \text{ et } N = 8.$$

De là, on déduit :

$$P_i = 1.5174 \times 10^{-4} (12.9155)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$$z_i = 1.9598 \times 10^{-4} (12.9155)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 7$$

Et donc :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.1}} = 2.7033 \frac{\prod_{i=0}^7 \left(\frac{s}{1.9598 \times 10^{-4} (12.9155)^i} \right)}{\prod_{i=0}^8 \left(\frac{s}{1.5174 \times 10^{-4} (12.9155)^i} \right)}$$

La figure III.1 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $m = 0.1$ et de son approximé par la méthode de Charef

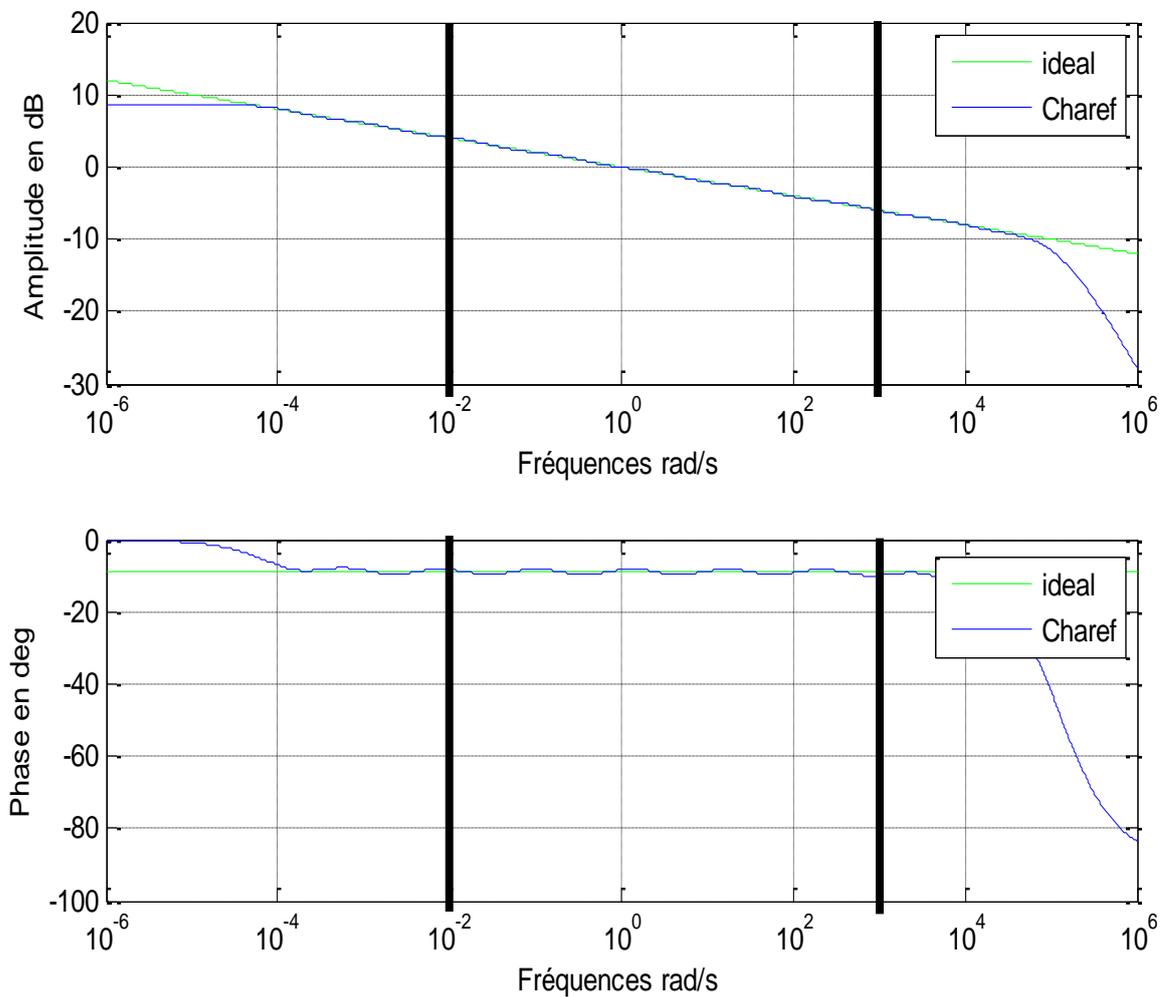


Figure III .1 Tracé de Bode de $\frac{1}{s^{0.1}}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$

III.2.1.2 Pour $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ et $m = 0.5$:

La fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$$

Pour la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$, et $\varepsilon = 10^{-5}$, on trouve $\omega_c = 2.1460 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$, $K_I = 215.8680$. Le modèle FPP de cet opérateur est donc :

$$G_I = \frac{215.8680}{\left(1 + \frac{s}{2.1460 \times 10^{-5}}\right)^{0.5}}$$

L'approximation de la FPP ci-dessus donne les résultats suivants :

$a = 1.5849$, $b = 1.5849$, $ab = 2.5119$, $P_0 = 2.7016 \times 10^{-5}$, $z_0 = 4.2818 \times 10^{-5}$ et $N = 24$.

De là, on déduit :

$$P_i = 2.7016 \times 10^{-5} (2.5119)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 24$$

$$z_i = 4.2818 \times 10^{-5} (2.5119)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 23$$

Et donc :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.5}} = 215.8680 \frac{\prod_{i=0}^{23} \left(\frac{s}{4.2818 \times 10^{-5} (2.5119)^i} \right)}{\prod_{i=0}^{24} \left(\frac{s}{2.7016 \times 10^{-5} (2.5119)^i} \right)}$$

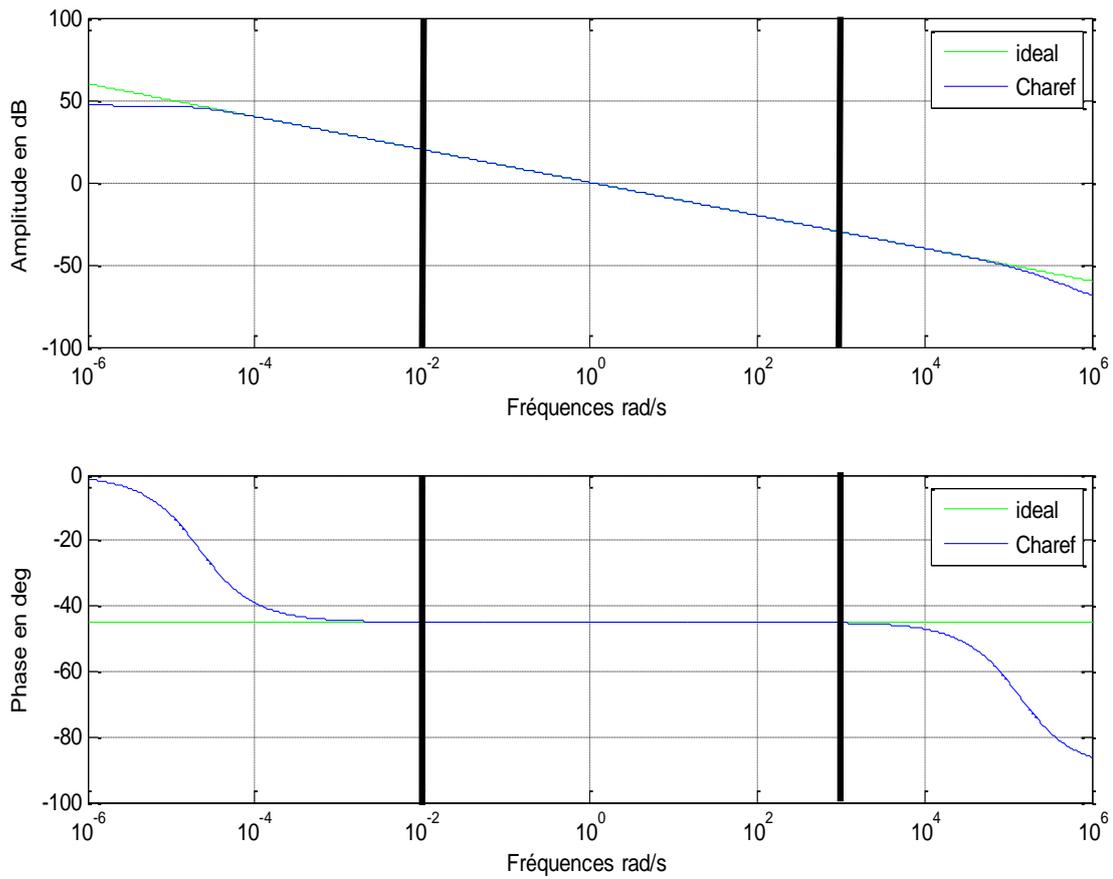


Figure III .2 : Tracé de Bode de $\frac{1}{s^{0.5}}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$

III.2.1.3 Pour $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ et $m = 0.9$:

La fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.9}}$$

Pour la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$, et $\varepsilon = 10^{-5}$, on trouve $\omega_c = 1.5995 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$, $K_I = 2.0721 \times 10^{-4}$. Le modèle FPP de cet opérateur est donc :

$$G_I = \frac{2.0721 \times 10^{-4}}{\left(1 + \frac{s}{1.5995 \times 10^{-5}}\right)^{0.9}}$$

L'approximation de la FPP ci-dessus donne les résultats suivants :

$a = 10, b = 1.2915, ab = 12.9155, P_0 = 1.1878 \times 10^{-5}, z_0 = 1.8178 \times 10^{-5}$ et $N = 9$.

De là, on déduit :

$$P_i = 1.1878 \times 10^{-5} (12.9155)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 9$$

$$z_i = 1.8178 \times 10^{-5} (12.9155)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

Et donc :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.9}} = 2.0721 \times 10^{-4} \frac{\prod_{i=0}^8 \left(\frac{s}{1.8178 \times 10^{-5} (12.9155)^i} \right)}{\prod_{i=0}^9 \left(\frac{s}{1.1878 \times 10^{-5} (12.9155)^i} \right)}$$

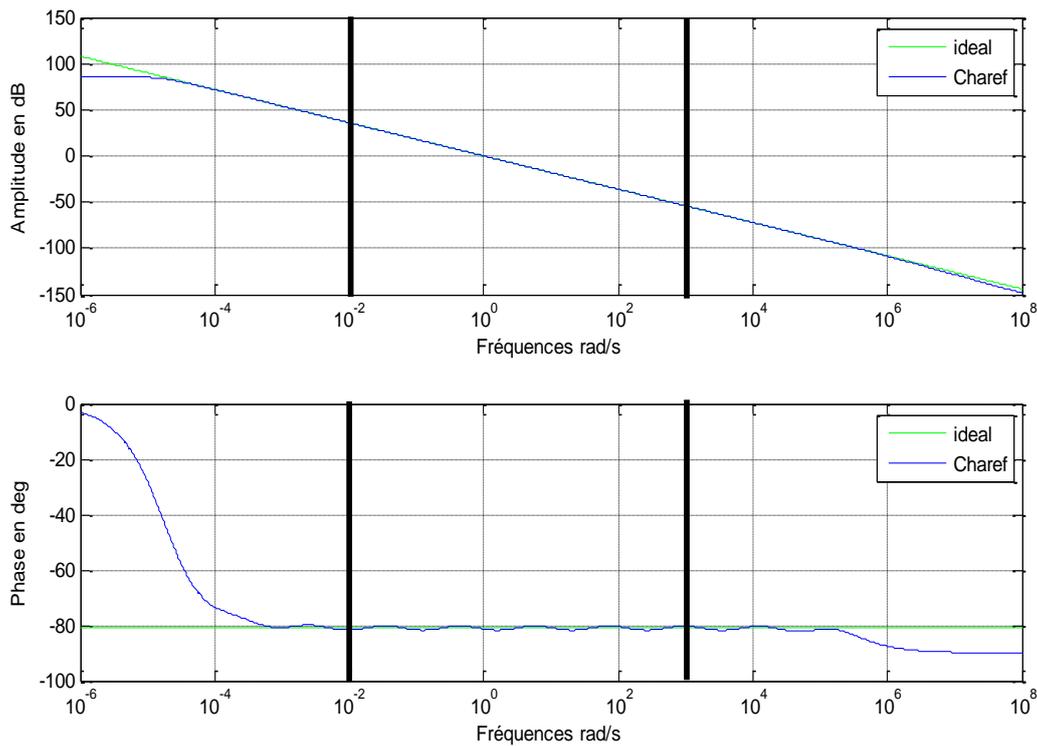


Figure III .3 : Tracé de Bode de $\frac{1}{s^{0.9}}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$

III.2.1.4 Pour $[\omega_l, \omega_h] = [1000, 100000]$ et $m = 0.1$:

Dans cette section, on considère la nouvelle bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [1000, 100000]$. Puis on refait le même travail dans cette dernière : on obtient les résultats suivants :

$\omega_c = 4.7986 \text{ rad/sec}$, $K_I = 0.8548$. Le modèle FPP de cet opérateur est donc :

$$G_I = \frac{0.8548}{\left(1 + \frac{s}{4.7986}\right)^{0.1}}$$

L'approximation de la FPP ci-dessus donne les résultats suivants :

$a = 1.2915$, $b = 10$, $ab = 12.9155$, $P_0 = 15.1744$, $z_0 = 19.5984$ et $N = 6$.

De là, on déduit :

$$P_i = 15.1744 (12.9155)^i \quad , i = 1, 2, \dots, 6$$

$$z_i = 19.5984(12.9155)^i \quad , i = 1, 2, \dots, 5$$

Et donc :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.5}} = 0.8548 \frac{\prod_{i=0}^5 \left(\frac{s}{19.5984 (12.9155)^i} \right)}{\prod_{i=0}^6 \left(\frac{s}{15.1744 (12.9155)^i} \right)}$$

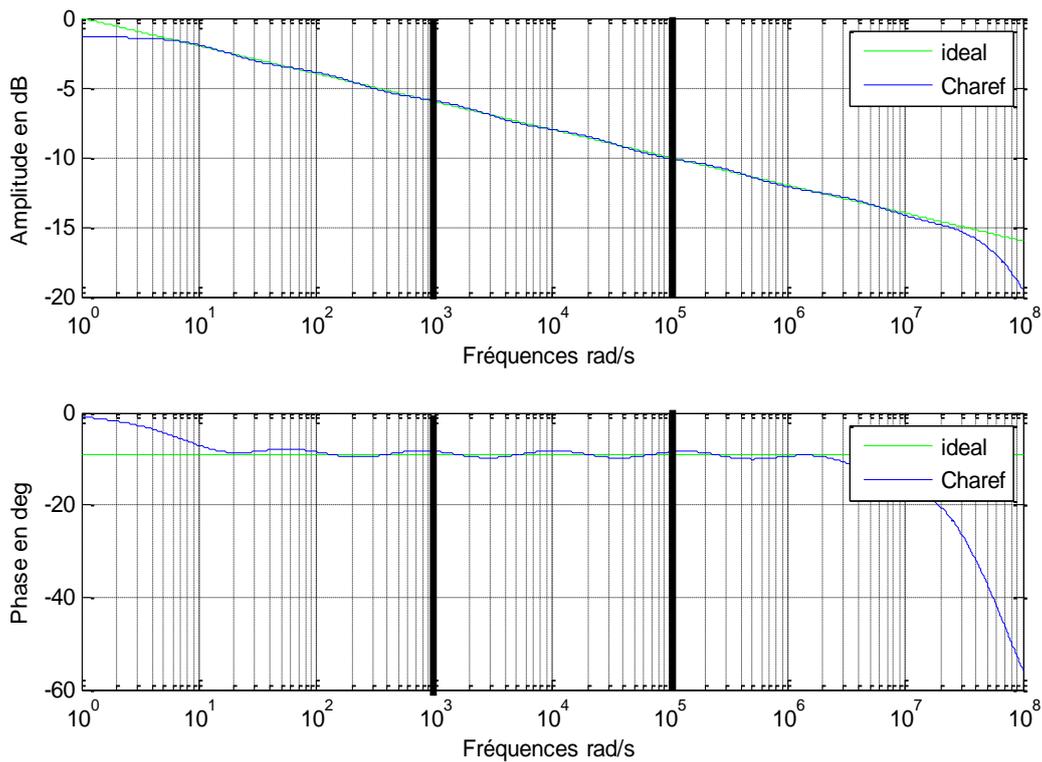


Figure III. 4: Tracé de Bode de $\frac{1}{s^{0.1}}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [1000, 100000]$

III.2.1.5 Pour $[\omega_l, \omega_h] = [1000, 100000]$ et $m = 0.5$:

On obtient les résultats suivants :

$\omega_c = 2.1460 \text{ rad/sec}$, $K_I = 0.6826$. Le modèle FPP de cet opérateur est donc :

$$G_I = \frac{0.6826}{\left(1 + \frac{s}{2.1460}\right)^{0.5}}$$

L'approximation de la FPP ci-dessus donne les résultats suivants :

$a = 1.5849$, $b = 1.5849$, $ab = 2.5119$, $P_0 = 2.7016$, $z_0 = 4.2818$ et $N = 17$.

De là, on déduit :

$$P_i = 2.7016 (2.5119)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 17$$

$$z_i = 4.2818(2.5119)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 16$$

Et donc :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.5}} = 0.6826 \frac{\prod_{i=0}^{16} \left(\frac{s}{4.2818(2.5119)^i} \right)}{\prod_{i=0}^{17} \left(\frac{s}{2.7016 (2.5119)^i} \right)}$$

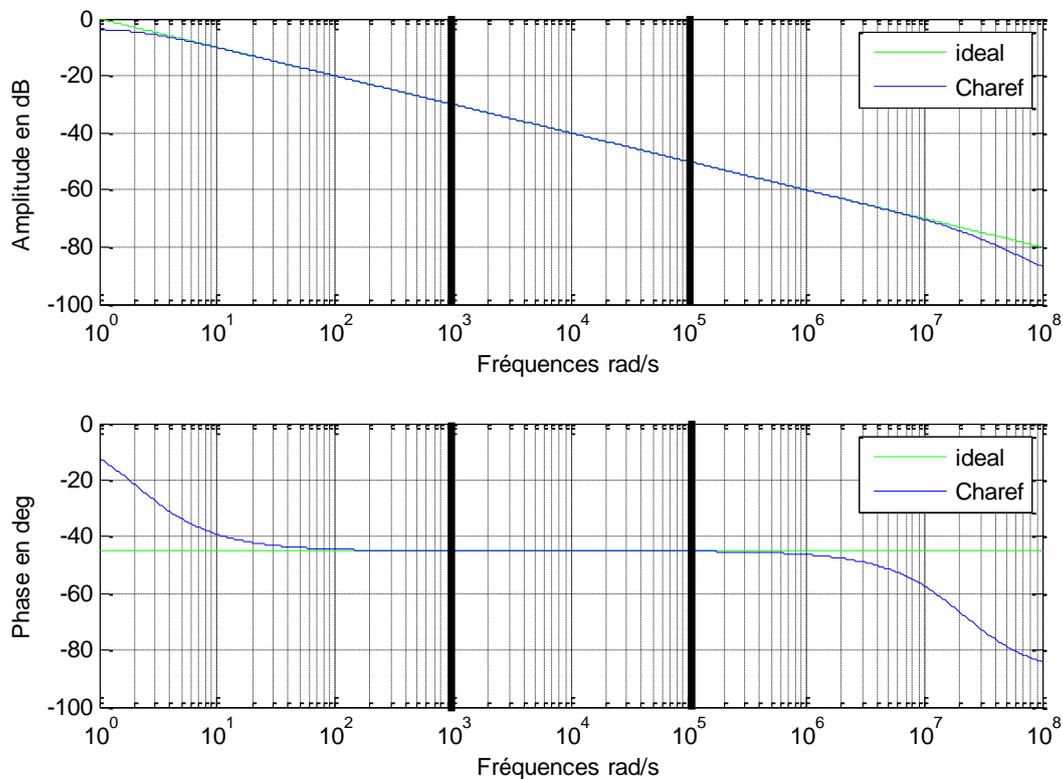


Figure III. 5: Tracé de Bode de $\frac{1}{s^{0.5}}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [1000, 100000]$

III.2.1.6 Pour $[\omega_l, \omega_h] = [1000, 100000]$ et $m = 0.9$:

On obtient les résultats suivants :

$\omega_c = 1.5995 \text{ rad/sec}$, $K_I = 0.6553$. Le modèle FPP de cet opérateur est donc :

$$G_I = \frac{0.6553}{\left(1 + \frac{s}{1.5995}\right)^{0.9}}$$

L'approximation de la FPP ci-dessus donne les résultats suivants :

$a = 10$, $b = 1.2915$, $ab = 12.9155$, $P_0 = 1.8178$, $z_0 = 18.1778$ et $N = 7$.

De là, on déduit :

$$P_i = 1.8178 (12.9155)^i \quad , i = 1, 2, \dots, 7$$

$$z_i = 18.1778(12.9155)^i \quad , i = 1, 2, \dots, 6$$

Et donc :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^{0.9}} = 0.6553 \frac{\prod_{i=0}^6 \left(\frac{s}{18.1778(12.9155)^i} \right)}{\prod_{i=0}^7 \left(\frac{s}{1.8178 (12.9155)^i} \right)}$$

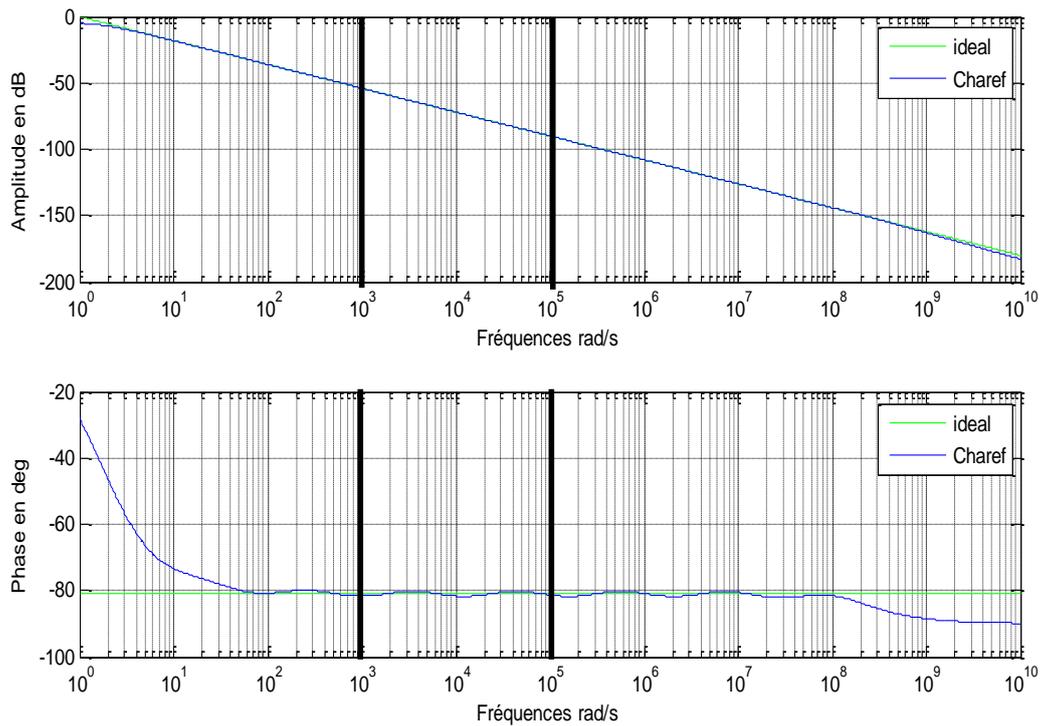


Figure III 6: Tracé de Bode de $\frac{1}{s^{0.9}}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [1000, 100000]$

III.2.2 Dérivateur fractionnaire :

III.2.2.1 Pour $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ et $m = 0.1$:

La fonction de transfert du dérivateur fractionnaire est donnée par la formule suivant :

$$G_D(s) = s^{0.1}$$

Le calcul donne les résultats suivants :

$\omega_c = 4.7986 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$ et $K_D = 0.3699$, on en déduit donc la fonction FPZ de ce dérivateur :

$$G_D(s) = 0.3699 \left(1 + \frac{s}{4.7986 \times 10^{-5}} \right)^{0.1}$$

La FPZ ci-dessus est approximée comme suit :

$a = 1.2915, b = 10, ab = 12.9155, P_0 = 1.9598 \times 10^{-5}, z_0 = 1.5174 \times 10^{-4}$ et $N = 8$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donc égaux à :

$$P_i = 1.9598 \times 10^{-5} (12.9155)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$$z_i = 1.5174 \times 10^{-4} (12.9155)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

De là, on peut déduire l'approximation du dérivateur :

$$G_D(s) = s^{0.1} = 0.3699 \frac{\prod_{i=0}^8 \left(1 + \frac{s}{1.5174 \times 10^{-4} (12.9155)^i} \right)}{\prod_{i=0}^8 \left(1 + \frac{s}{1.9598 \times 10^{-5} (12.9155)^i} \right)}$$

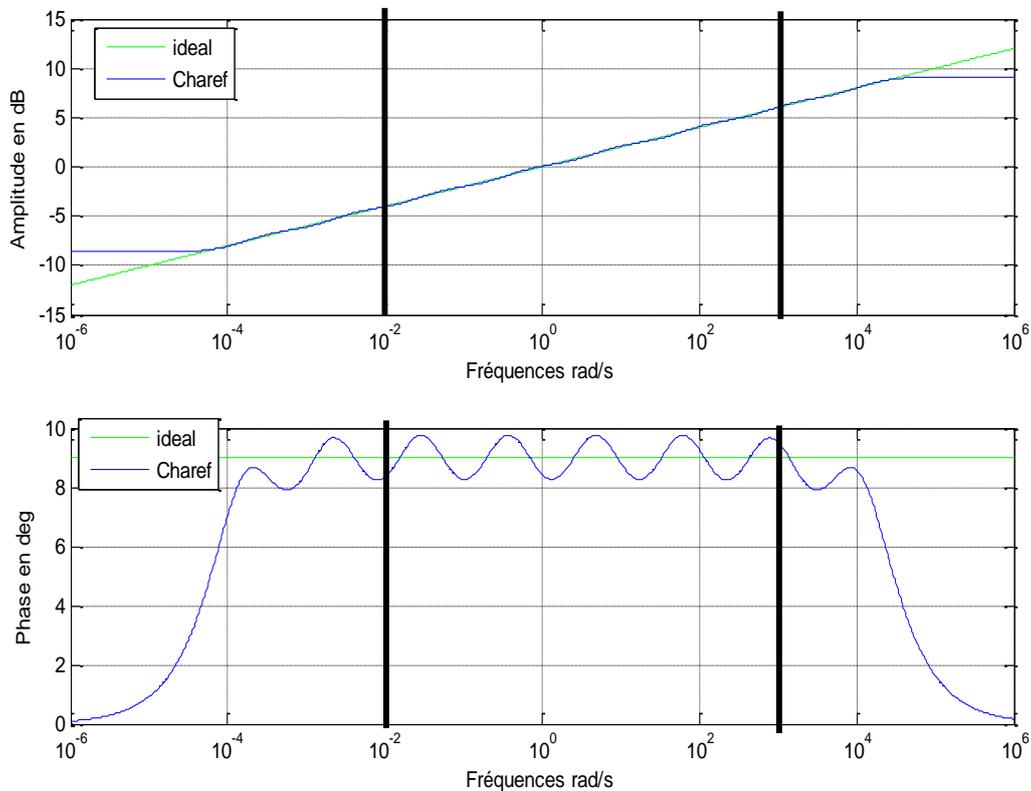


Figure III. 7 : Tracé de Bode de $s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$

III.2.2.2. Pour $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ et $m = 0.5$:

La fonction de transfert du dérivateur fractionnaire est donnée par la formule suivant :

$$G_D(s) = s^{0.5}$$

Le calcul donne les résultats suivants :

$\omega_c = 2.1460 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$ et $K_D = 0.0046$, on en déduit donc la fonction FPZ de ce dérivateur :

$$G_D(s) = 0.0046 \left(1 + \frac{s}{2.1460 \times 10^{-5}} \right)^{0.5}$$

La ZPF ci-dessus est approximée comme suit :

$a = 1.5849$, $b = 1.5849$, $ab = 2.5119$, $P_0 = 4.2818 \times 10^{-5}$, $z_0 = 2.7016 \times 10^{-5}$ et $N = 24$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donc égaux à :

$$P_i = 4.2818 \times 10^{-5} (2.5119)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 24$$

$$z_i = 2.7016 \times 10^{-5} (2.5119)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 24$$

De là, on peut déduire l'approximation du dérivateur :

$$G_D(s) = s^{0.5} = 0.0046 \frac{\prod_{i=0}^{24} \left(1 + \frac{s}{2.7016 \times 10^{-5} (2.5119)^i} \right)}{\prod_{i=0}^{24} \left(1 + \frac{s}{4.2818 \times 10^{-5} (2.5119)^i} \right)}$$

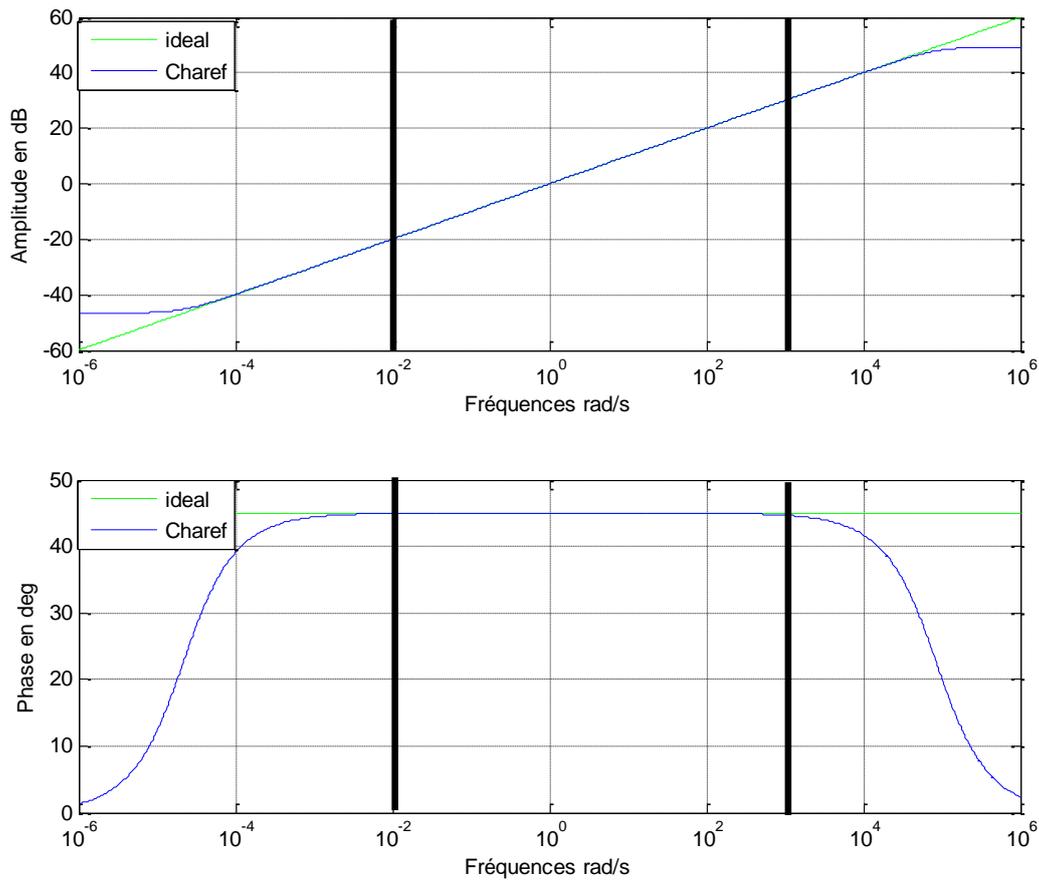


Figure III 8: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$

III.2.2.3 Pour $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ et $m = 0.9$:

La fonction de transfert du dérivateur fractionnaire est donnée par la formule suivant :

$$G_D(s) = s^{0.9}$$

Le calcul donne les résultats suivants :

$\omega_c = 1.5995 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$ et $K_D = 4.8260 \times 10^{-5}$, on en déduit donc la fonction FPZ de ce dérivateur :

$$G_D(s) = K_D = 4.8260 \times 10^{-5} \left(1 + \frac{s}{1.5995 \times 10^{-5}}\right)^{0.9}$$

La FPZ ci-dessus est approximée comme suit :

$a = 10, b = 1.2915, ab = 12.9155, P_0 = 1.8178 \times 10^{-4}, z_0 = 1.8178 \times 10^{-5}$ et $N = 8$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donc égaux à :

$$P_i = 1.8178 \times 10^{-4} (12.9155)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$$z_i = 1.8178 \times 10^{-5} (12.9155)^i, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

De là, on peut déduire l'approximation du dérivateur :

$$G_D(s) = s^{0.9} = 0.0046 \frac{\prod_{i=0}^8 \left(1 + \frac{s}{1.8178 \times 10^{-5} (12.9155)^i} \right)}{\prod_{i=0}^8 \left(1 + \frac{s}{1.8178 \times 10^{-4} (12.9155)^i} \right)}$$

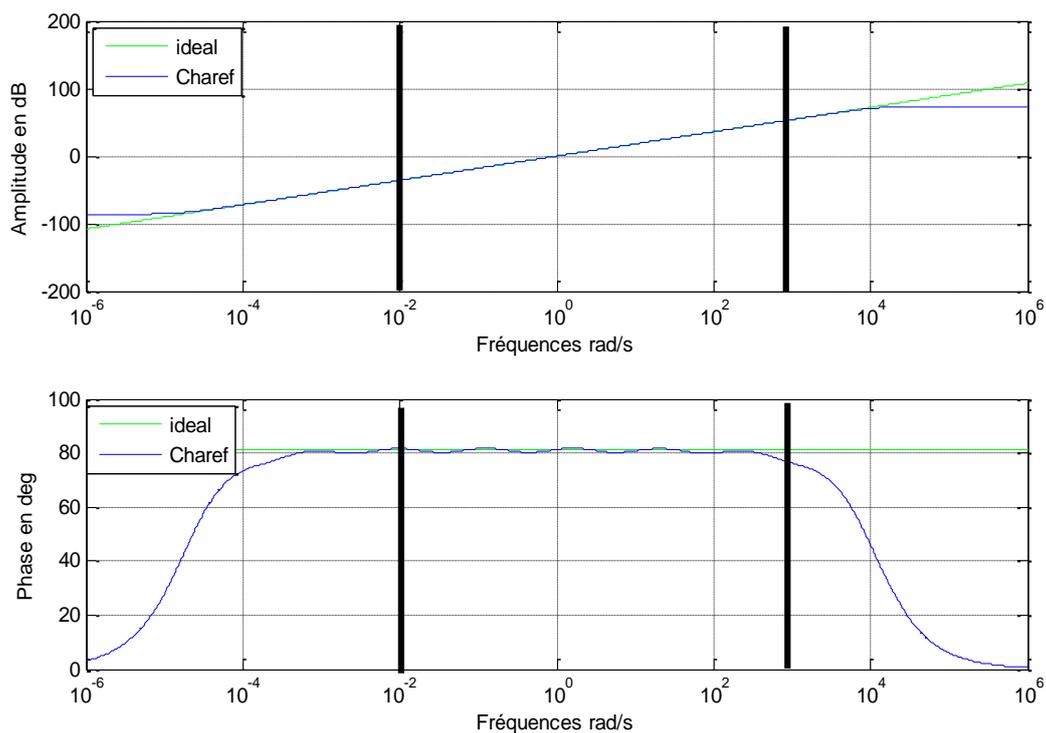


Figure III.9 : Tracé de Bode de $s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode de Charef dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$

III.2.3 Interprétation des résultats :

D'après ces exemples, les résultats obtenus, et les tracés de Bode, nous pouvons tirer quelques observations et conclusions par rapport à la méthode d'approximation de Charef et son efficacité.

En premier lieu, on remarque que pour $m = 0.5$, les tracés de Bode, du gain et de la phase, se superposent et sont parfaitement confondus dans les deux bandes de fréquences considérées. Que ce soit pour l'approximation de l'opérateur intégrale ou dérivée.

Pour des valeurs de m proches de 1 ($m = 0.9$ dans notre cas), les résultats de l'approximation pour l'intégrateur et le dérivateur sont très similaires. En effet, pour les deux bandes de fréquences considérées, l'opérateur fractionnaire et son approximation ont la même dynamique mais avec une moins bonne précision que pour le cas précédent ($m = 0.5$). Puisqu'on remarque sur les tracés de Bode l'apparition d'oscillations à amplitudes très faibles, synonymes néanmoins d'une perte de précision.

Et enfin, pour le dernier cas, avec m qui se rapproche de zéro ($m = 0.1$ dans notre cas). On remarque une nette différence entre l'approximation de l'intégrateur et celle du dérivateur, en effet, pour les deux bandes de fréquences considérées, les tracés de l'approximation de l'intégrateur et de l'intégrateur fractionnaire se superposent mais avec des oscillations indiquant un manque de précision. En ce qui concerne l'approximation du dérivateur, les oscillations sont beaucoup plus flagrantes et visibles. Ce qui indique une mauvaise précision dans l'approximation.

D'après ces remarques, nous pouvons, sans doute, tirer la conclusion suivante à propos de la méthode d'approximation de Charef. Pour une bande de fréquences donnée, le modèle approximé et le modèle fractionnaire, possèdent la même dynamique, ce qui prouve l'efficacité de la méthode. Toutefois, on se doit d'émettre des réserves pour les ordres proches de 1, où on a vu une légère baisse de précision, d'autant plus que la méthode est inefficace pour les ordres s'approchant de zéro. Il est donc primordiale lors de l'application de la méthode de faire des choix judicieux de bande de fréquence, écart $y...$ etc ,

III.3 Application de la méthode d'Oustaloup:

Comme vu dans le chapitre II, cette méthode se base sur l'approximation du dérivateur borné en fréquence par un modèle de degré entier dans une bande fréquences donnée. Dans cette section, nous allons vérifier l'efficacité de la méthode par des exemples d'application simples et directes, et sa sensibilité vis-à-vis de l'ordre du dérivateur m et N (nombre de troncatures ou singularités).

Pour ce faire, on appliquera la méthode pour deux valeurs de N , une petite valeur ($N = 5$), et une grande valeur ($N = 20$). Tout en changeant la valeur du degré m , on prendra trois valeurs comme pour l'application précédente.

Dans tout ce qui suit, on considère la bande de fréquence $[\omega_l, \omega_h[=] 0.001, 1000[$.

III.3.1 Pour $N = 5$ et $m = 0.1$

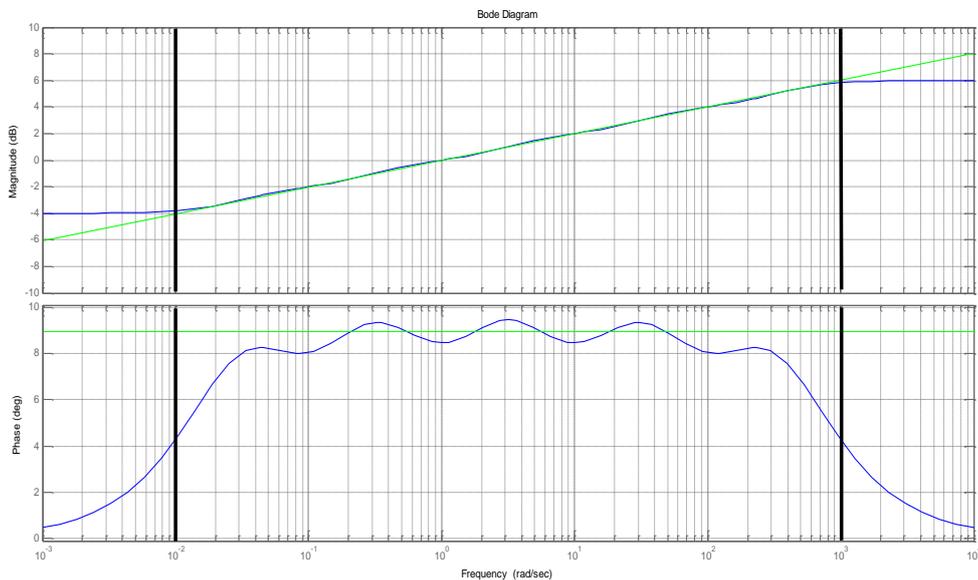


Figure III. 10: Tracé de Bode de $s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ pour $N = 5$

III.3.2 Pour $N = 5$ et $m = 0.5$

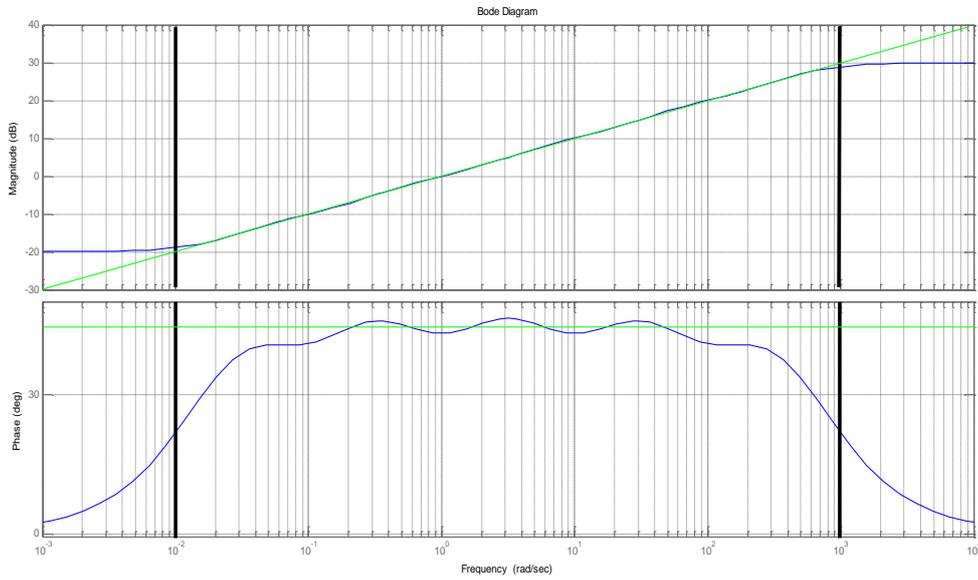


Figure III .11: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ pour $N = 5$

III.3.3 Pour $N = 5$ et $m = 0.9$

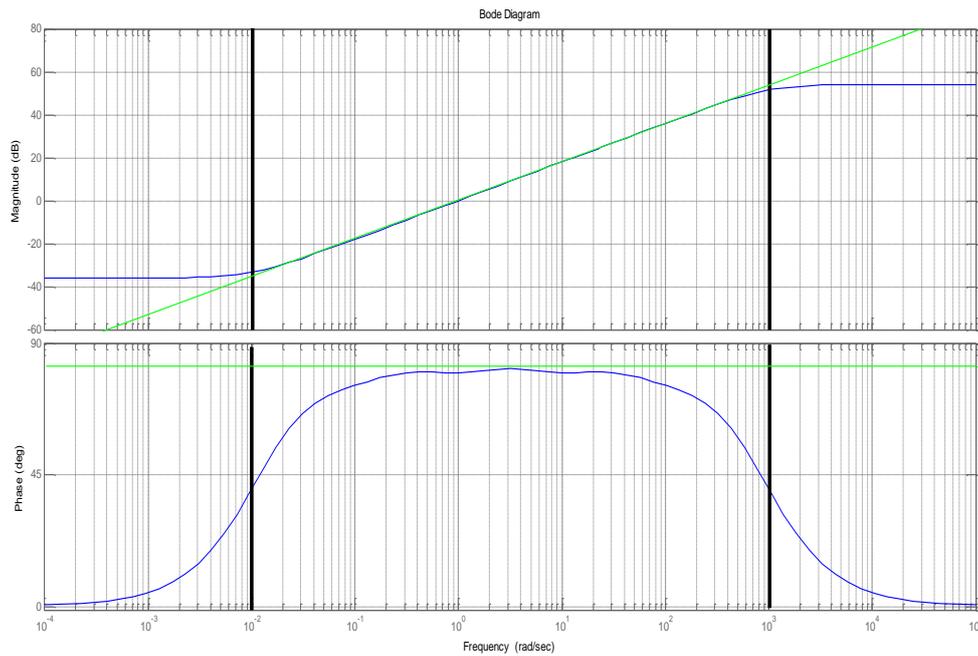


Figure III 12: Tracé de Bode de $s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ pour $N = 5$

III.3.4 Pour $N = 20$ et $m = 0.1$

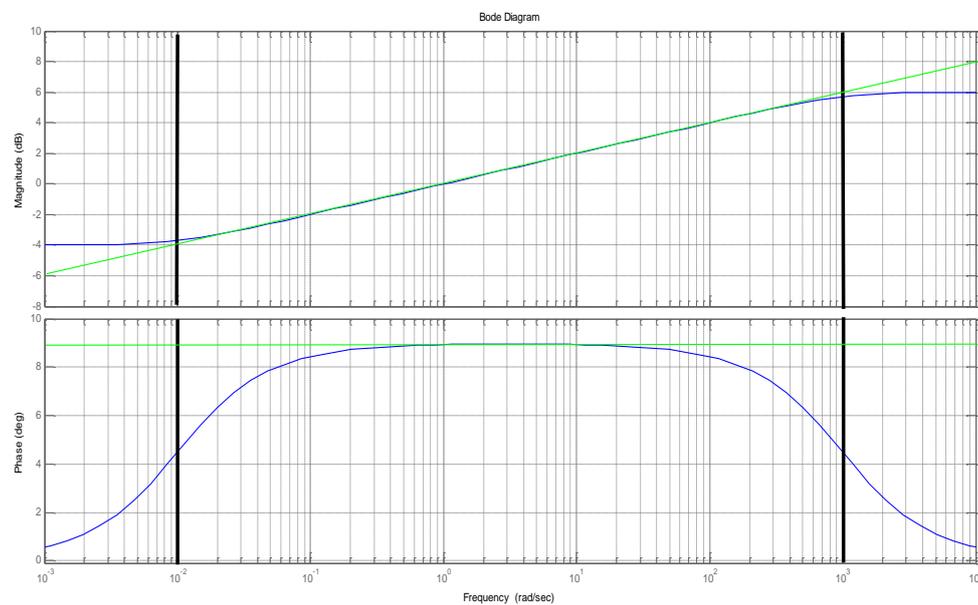


Figure III 13: Tracé de Bode de $s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ pour $N = 20$

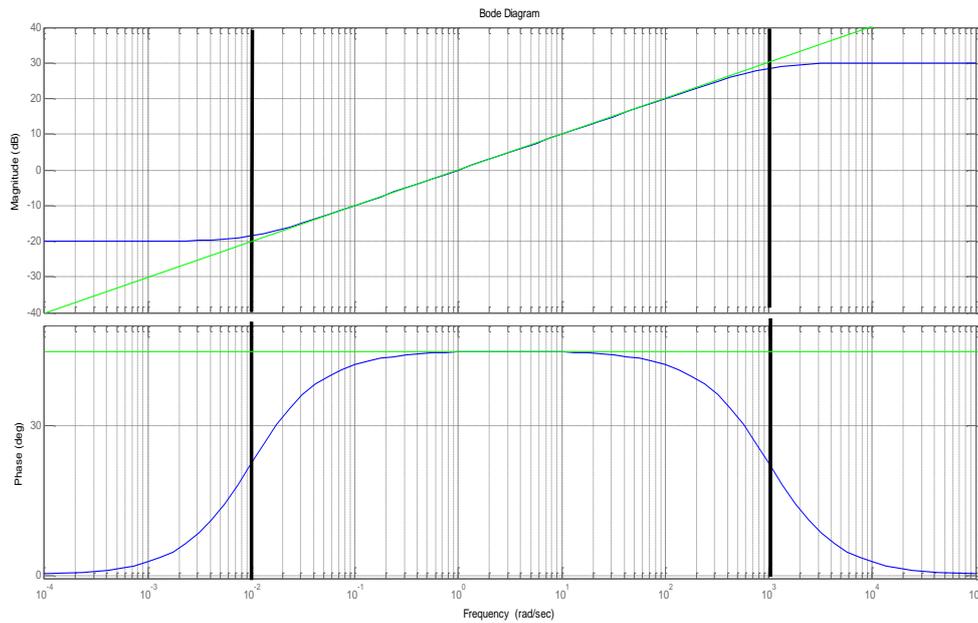
III.3.5 Pour $N = 20$ et $m = 0.5$ 

Figure III 14: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande d fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ pour $N = 20$

III.3.6 Pour $N = 20$ et $m = 0.9$

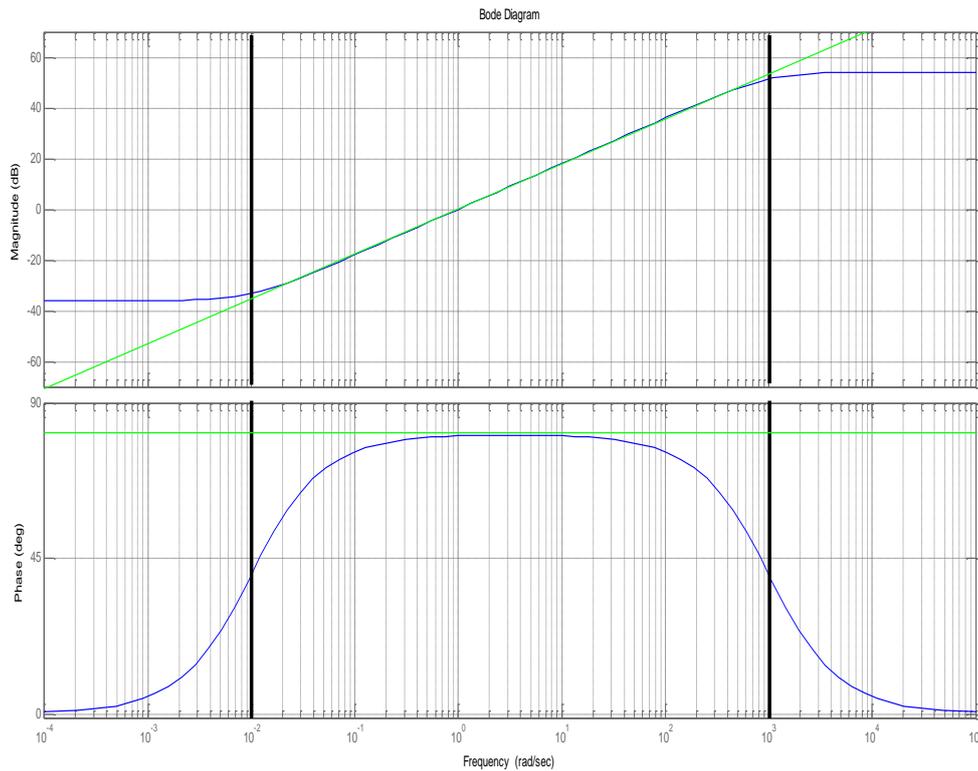


Figure III 15: Tracé de Bode de $s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ pour $N = 20$

III.3.7 Interprétation des résultats :

Après l'analyse des résultats obtenus par les exemples précédents, on peut tirer quelques conclusions importantes à propos de la méthode d'approximation d'Oustaloup, sa précision et sa sensibilité à quelques paramètres tels que : l'ordre m , le nombre de cellules N et aussi la bande de fréquences choisie.

Dans un premier temps, après des essais multiples, on voit que la méthode est très sensible à N . En effet pour de petites valeurs de ce dernier ($N = 5$ dans nos exemples), l'approximation est inefficace puisque on remarque des oscillations dans les diagrammes de Bode. Ce qui est synonyme d'une mauvaise précision. Cette dernière devient bonne pour des valeurs de $N > 10$, et s'améliore avec l'augmentation de N , ce qui se manifeste sur les diagrammes de Bode pour $N = 20$, où on voit la disparition des oscillations.

Ensuite, nous avons aussi remarqué une légère sensibilité de la méthode à l'ordre non entier m . En effet on remarque, pour $m = 0.5$, un écart presque nul entre le dérivateur généralisé (en vert) et son approximation (en bleu) dans la bande de fréquences $]\omega_l, \omega_h [$ choisie (les deux courbes se superposent et se confondent). Cet écart s'accroît en dehors de la bande, ce qui indique l'efficacité de la méthode. Par contre, pour des valeurs de m , s'approchant de 1 ou de 0 ($m = 0.1$ et $m = 0.9$ dans notre cas), la méthode d'approximation d'Oustaloup est moins efficace.

La méthode d'Oustaloup, d'après les essais faits, est aussi sensible à la bande de fréquences de travail. La réduction de la largeur de la bande réduit l'écart entre le diagramme de Bode du dérivateur généralisé et son approximé par la méthode d'Oustaloup.

En résumé, pour une bande de fréquences $]\omega_l, \omega_h [$ donnée. La méthode d'Oustaloup donne une approximation fidèle et efficace au dérivateur généralisé. A condition, cependant, de faire un bon choix des paramètres N ($N \gg$), m (éviter les valeurs proches de 1 et de 0) et aussi une bonne plage de fréquences.

Remarque :

Dans le chapitre II, nous avons dit que, pour des valeurs négatives de m , le dérivateur généralisé définit un intégrateur d'ordre non entier. On a donc fait les mêmes essais que précédemment, et on a abouti aux mêmes conclusions que celles tirées pour le dérivateur.

A titre d'exemple, prenons $m = -0.5$, $N = 20$ et $]\omega_l, \omega_h [=]0.01, 1000[$, on obtient les résultats suivants :

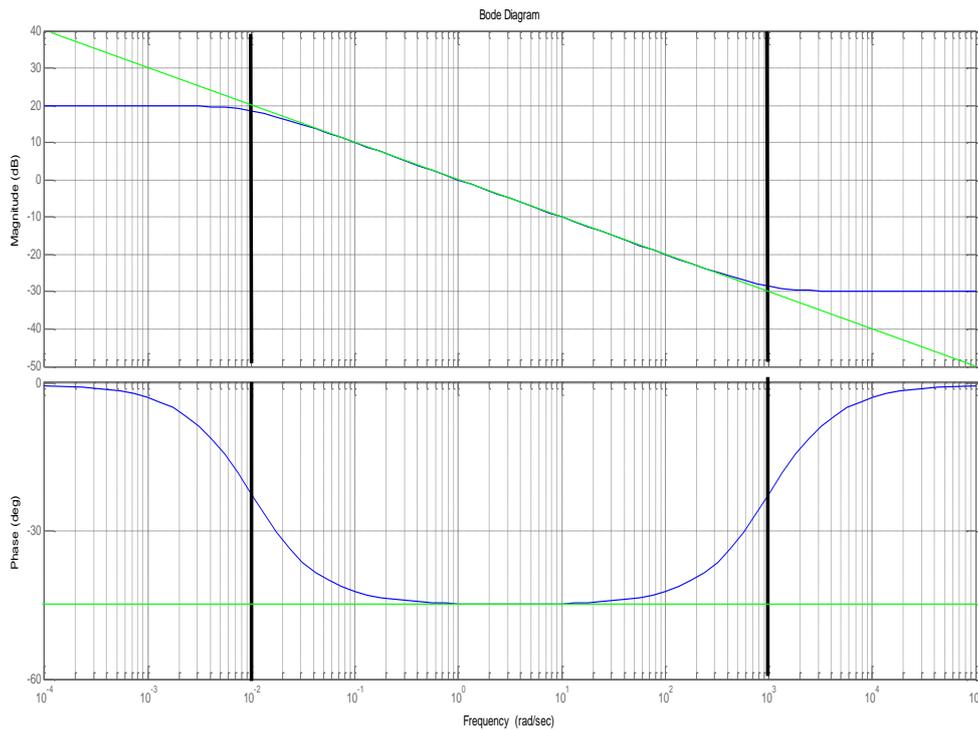


Figure III 16: Tracé de Bode de $s^{-0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$ pour $N = 20$

On peut donc voir que, comme pour le dérivateur, les deux graphes se superposent sur une bande de fréquences donnée (toujours plus large pour l'amplitude que pour la phase). Et l'écart s'accroît en dehors de la bande.

III.4 Etude comparative

Il s'agit, dans cette section d'effectuer une comparaison entre les deux méthodes d'approximation, en analysant les performances de chacune. Et cela en se basant sur ce qui a été fait précédemment et sur un exemple de synthèse pour voir les principales différences des deux méthodes.

A part quelques différences mineures, les deux méthodes sont très similaires, que ce soit dans l'application que dans les résultats qu'elles donnent. En effet, toutes les deux sont des méthodes graphiques, se basent sur l'approximation, dans le diagramme de Bode, de la pente à

$-20m \text{ dB/dec}$ (pour l'intégrateur) ou $20 m \text{ dB/dec}$ (pour le dérivateur). Et les deux donnent des approximations des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles d'ordre entier dans des bandes de fréquences données. Au-delà de ça, elles sont d'une efficacité équivalente, et affichent des limites similaires. Comme nous l'avons déjà vu, elles sont sensibles aux bandes de fréquences pour lesquelles elles sont appliquées, et manquent de précision pour des ordres non entiers proches de 0 ou de 1.

Parmi les différences, on peut citer le fait que le nombre de singularités ou troncatures ou cellules N , soit précisé au préalable dans la méthode d'Oustaloup (ce qui la rend sensible à ce paramètre), et calculé dans la méthode de Charef. Et aussi, la méthode de Charef distingue entre l'approximation de l'intégrale et du dérivateur, et l'ordre m prend des valeurs entre 0 et 1. Tandis que, la méthode d'Oustaloup se base sur l'approximation du dérivateur généralisé qui peut prendre des valeurs négatives de m . En ce qui concerne les performances, la méthode de Charef est inefficace pour des valeurs de m proches de 0, alors que la méthode d'Oustaloup est moins précise pour des valeurs de m proches de 1.

Pour illustrer ces observations, on fera dans ce qui suit une étude comparative entre les deux méthodes sous forme d'exemple de synthèse. Pour ce faire on appliquera les deux méthodes dans une même bande de fréquences de travail ($[\omega_l, \omega_h[=]0.001, 100000[$) au dérivateur d'ordre fractionnaire. De la même façon que précédemment, on considérera trois cas $m = 0.1$, $m = 0.5$ et $m = 0.9$. On prend pour l'application de Charef $\gamma = 1$ et $\varepsilon = 10^{-5}$, et pour la méthode d'Oustaloup $N = 20$.

III.4.1 Comparaison pour $m = 0.1$:

Dans cette section, et tout ce qui suivra, les tracé de Bode de la méthode de Charef sera représenté à gauche (Fig a), et celui de la méthode d'Ousaloup sera représenté à droite (Fig b).

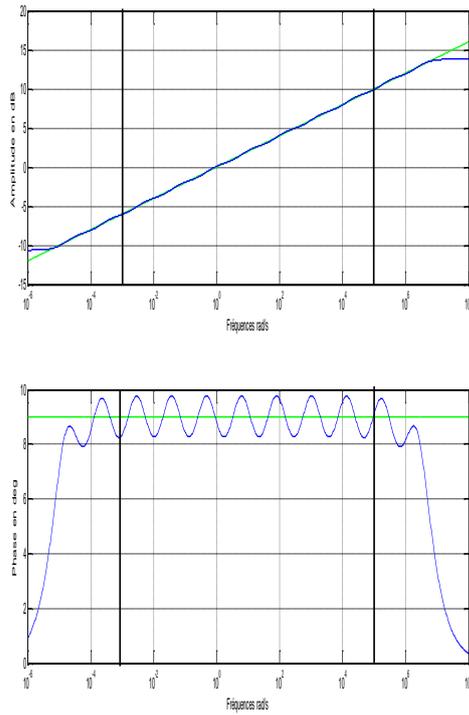


Fig (a)

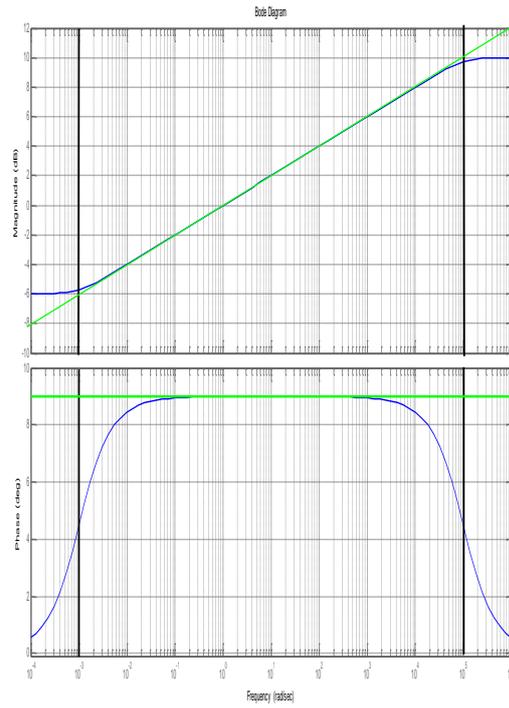


Fig (b)

Figure III 17: Tracé de Bode de $s^{0.1}$ et de son approximé par la méthode de Charef et d'Oustaloup dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.001, 100000]$

En comparant les deux graphes, on s'aperçoit que la méthode de Charef est inefficace dans ce cas, tandis que celle d'Oustaloup donne une bonne approximation avec néanmoins un écart assez considérable aux extrémités de la bande de fréquences. En effet, entre les fréquences 10^{-3} et 10^5 , les graphes dans Fig (a) ne se superposent pas et le graphe du dérivateur approximé (en bleu) est oscillant. Dans la Fig (b) l'approximation est meilleure puisque l'écart entre les deux graphes se réduit entre 10^{-3} et 10^{-1} de 4.5 dB à approximativement 0.1 dB . Les tracés, ensuite, se superposent entre 10^{-1} et 10^3 , pour voir finalement l'écart augmenter une nouvelle fois.

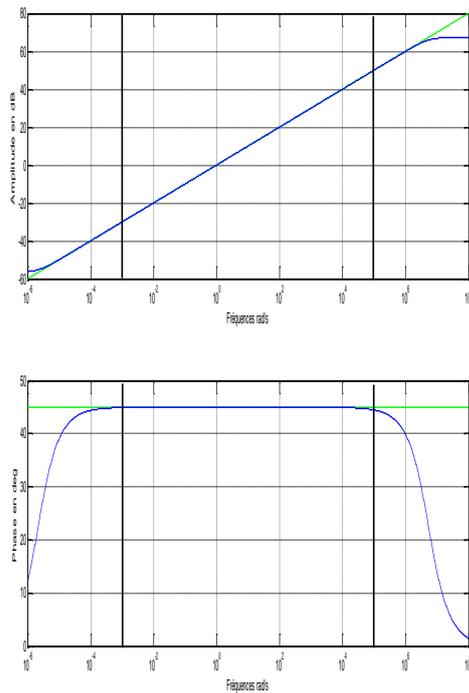
III.4.2 Comparaison pour $m = 0.5$:

Fig (a)

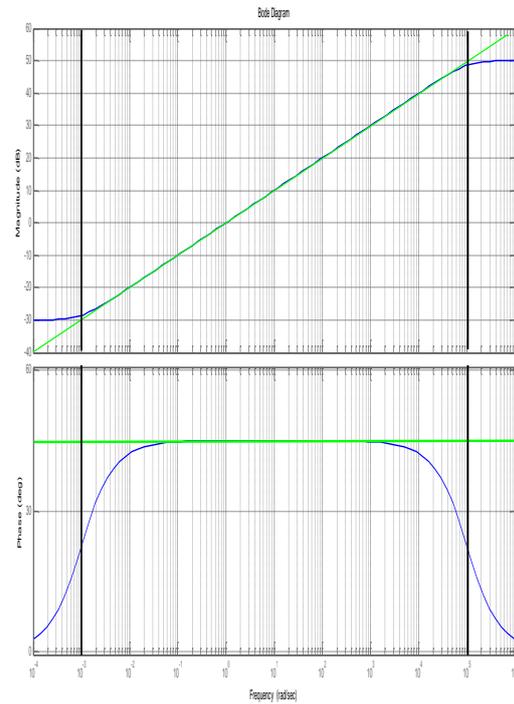


Fig (b)

Figure III 18: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode de Charef et d'Oustaloup dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.001, 100000]$

Dans ce cas, on peut voir que les deux méthodes sont efficaces et donnent de bonnes approximations, avec un léger avantage à la méthode de Charef. En effet, dans la figure Fig(a), entre les fréquences 10^{-3} et 10^5 , les deux tracés se superposent parfaitement ce qui signifie que le modèle approximé a la même dynamique que le modèle fractionnaire. Il est de même dans la figure Fig (b), avec, toutefois, un écart aux extrémités de la bande de fréquences choisie, mais beaucoup moins important que pour le cas précédent ($m = 0.1$), ce qui veut dire que l'approximation est meilleure.

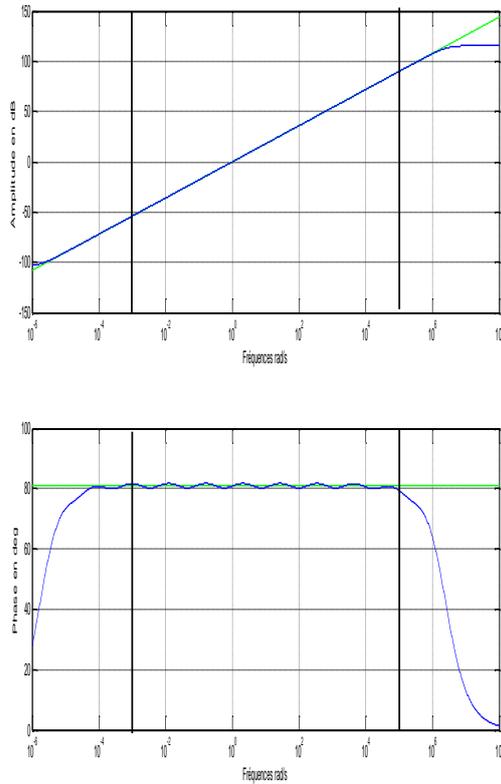
III.4.3 Comparaison pour $m = 0.9$:

Fig (a)

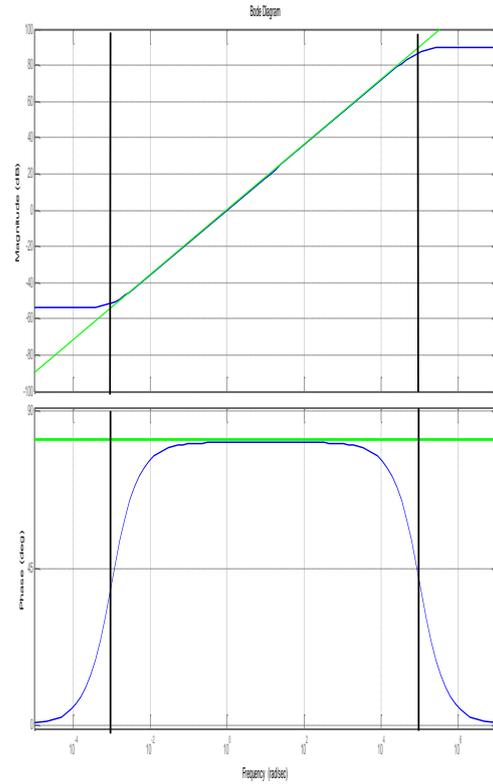


Fig (b)

Figure III 19: Tracé de Bode de $s^{0.9}$ et de son approximé par la méthode de Charef et d'Oustaloup dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.001, 100000]$

Dans ce dernier cas considéré, on constate l'inefficacité de l'approximation d'Oustaloup et la perte de précision dans l'approximation de Charef. En effet, dans Fig (a), entre les fréquences 10^{-3} et 10^5 , on remarque des légers écarts entre les deux tracés ce qui signifie une perte de précision par rapport au cas précédent ($m = 0.5$). Alors que dans Fig (b), les deux tracés se rapprochent sans jamais se toucher, ce qui veut dire que les deux dérivateurs n'ont pas la même dynamique. De là, on peut conclure que l'approximation est inefficace.

De cette dernière application, on peut voir que les conclusions faites auparavant sont confirmées pour l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire. Cela peut être évidemment étendu à l'intégrateur fractionnaire.

III.5 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons essayé de confirmer l'hypothèse émise auparavant, et qui stipulait que : Dans une bande de fréquences limitée, les systèmes d'ordre fractionnaire ont la même dynamique que les systèmes d'ordre entier. C'est via des exemples simples et directs de l'application des méthodes d'approximation de Charef et d'Oustaloup que nous avons basé cette étude. Les résultats des essais effectués ont débouché sur les conclusions suivantes :

- Les systèmes d'ordre fractionnaire ont le même comportement que les systèmes d'ordre entier au sein d'une plage de fréquences limitée.
- Les méthodes d'approximation utilisées sont sensibles à certains paramètres, qu'il est donc nécessaire de bien choisir et ajuster, tels que : La bande de fréquences, les écarts, le nombre de singularités (> 10 pour la méthode d'Oustaloup)...
- Les méthodes d'approximation ont des limites de performances vis-à-vis de l'ordre m , en effet les deux méthodes ont affiché des pertes de précision, voir inefficacité, pour des valeurs de m proches de 0 et de 1.

De plus, nous avons fait une comparaison des performances des deux méthodes considérées pour des valeurs différentes de l'ordre m . A travers des exemples illustratifs nous avons conclu que :

- Les deux méthodes offrent des performances quasi identiques, avec un léger avantage à la méthode de Charef du point de vue de la précision.
- La méthode de Charef est inefficace pour des valeurs proches de 0, tandis que celle d'Oustaloup est imprécise.
- Pour des valeurs proches de 1, c'est la méthode d'Oustaloup qui est inefficace, alors que celle de Charef perd de précision.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Aujourd'hui, beaucoup de chercheurs s'intéressent au développement de méthodes et techniques d'identification de systèmes d'ordre fractionnaire et du réglage du correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$. L'intérêt pour ce type de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande, puisqu'il possède deux paramètres en plus qui sont les ordres fractionnaires, en plus des actions dérivée et intégrale. Ce qui rend le correcteur capable de satisfaire des performances additionnelles dans la commande, alors leur simulation et implémentation sont devenus des axes de recherche très importants. Or ceci, vu l'impossibilité d'implémentation directe, nécessite l'approximation la plus fidèle possible au fonctionnement réel.

L'objectif de ce mémoire était de connaître et exposer les différentes méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles entiers, en appliquant deux d'entre elles pour confirmer les hypothèses posées et comparer leurs résultats pour voir laquelle d'entre elles est la plus adéquate pour réaliser des approximations désirées.

Ce travail nous a permis, en première partie, de mieux comprendre les notions de base du calcul fractionnaire telles que la dérivation, l'intégration et la transformée de Laplace qui sont utiles pour étudier les systèmes fractionnaires. Mais aussi connaître les représentations des systèmes non entiers et certaines de leurs propriétés, les opérateurs d'ordre fractionnaire et les méthodes de leurs approximations pour pouvoir les simuler, les implémenter, et les appliquer à des systèmes physiques dans des buts de contrôle et commande.

La deuxième partie de ce travail nous a permis de voir, par le biais d'exemples illustratifs simples des approximations de Charef et d'Oustaloup, l'efficacité de chaque méthode ainsi que leurs limites. Leur comparaison nous a permis aussi de conclure qu'il n'était pas judicieux de se prononcer sur l'efficacité de l'une par rapport à l'autre. En effet nous avons vu que chacune affichait clairement des sensibilités à certains paramètres, tels que l'ordre, la bande de fréquences, les erreurs et les écarts ou encore le nombre de singularités, d'où l'importance de bien les choisir.

Conclusion générale

En conclusion, et d'après les résultats de simulation sous matlab, on peut dire que sous certaines conditions et choix des paramètres les deux méthodes de Charef et d'Oustaloup sont performantes, et qu'il n'est pas possible, dans le cadre de notre étude, de trancher et de tirer une règle sur l'efficacité des deux méthodes.

C'est pour cela, que nous pouvons poser comme perspective d'étendre la comparaison à l'application des deux méthodes à des systèmes physiques réels qui offriraient une meilleure analyse des deux méthodes.



Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

[1] : F. Dubois, A.C. Galucio, et N. Point « Introduction à la dérivée fractionnaire : Théorie et applications », Conservatoire des Arts et Métiers, Mathématiques, Paris, France. EADS Innovation Works, Suresnes, France. 29 mars 2010

[2] : A. Neçaibia « Contribution à la commande $PI^\lambda D^\mu$ adaptative et aux régulateurs auto-ajustables d'ordre fractionnaire », Thèse de Doctorat en sciences. Université 20 Aout 1955, de Skikda. Soutenu en 2016

[3] : B. Bouhraoua, B. Musabyimana « Commande des systèmes par un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire. Application : commande d'un quadri rotor », Mémoire de Master. Université Hassiba Benbouali de Chlef. Soutenu en 2016

[4] : A. Djouambi « Contribution à la commande CRONE ». Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine. Soutenu en 2008

[5] : R. Mansouri « Contribution à l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire par la représentation d'état ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2008

[6] : A. SI Ammour « Contribution à la commande par mode glissants d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2011.

[7]: S. Hammouche « Identification d'un modèle fractionnaire à l'aide des réseaux de neurones ». Mémoire de Magistère. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2012

[8]: I. Ndoye « Généralisation du Lemme Gronwald-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires ». Thèse de Doctorat. Université Henri Poincaré, Nancy 1 et Université Hassan II Aïn Chock, Casablanca. Soutenu en 2011.

[9]: D. Slimani « Dérivation non entière : Application en traitement d'images ». Mémoire de Magistère. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou.

[10]: S. Oukacine « Identification des systèmes non linéaires : Application au cas des systèmes d'ordre non entier ». Mémoire de Magistère. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2012 .

- [11]: K. Bettou « Analyse et réalisation de correcteurs analogiques d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri de Constantine. Soutenue en 2011
- [12]: M. Assaba « Contribution à la commande d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université de Constantine. Soutenue en 2015
- [13]: V. M. L. Fadiga « Commande H_∞ à base de modèles non entiers ». Thèse de Doctorat. Université de bordeaux. Soutenue le 12 juillet 2014
- [14]: Z. Korichi « Statistique quantique basée sur la mécanique quantique fractionnaire ». Mémoire de Master. Université Kasdi Merbah Ouergla. Soutenu en 2013
- [15]: Xavier MOREAU, Pascal SERRIER et Alain OUSTALOUP « La dérivation non entière en isolation vibratoire : application au contrôle global de la suspension de véhicule » (Equipe CRONE - LAPS - UMR 5131 CNRS - ENSEIRB - Université Bordeaux 1)
- [16] : D. RIU « Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi ». Thèse de Doctorat. Soutenue le 11 décembre 2001.
- [17] : T. BENSUOICI « Implémentation numérique du retard d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université de Constantine. Soutenue en 2012
- [18] : A. CHAREF « Analogue Realisation of fractional order integrator and differentiator and fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller ». Original paper. The institution of engineering and technology 2006. IEE proceedings on line 20050019
- [19] :A. CHAREF, H. H. Sun, Y. Y. Tsao, and B. Onaral «Fractal system as represented by singularity function ». Original paper. IEEE Transactions on automatic control, VOL 37, N.9 ; SEPTEMBER 1992
- [20] : S. Ladaci « Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri Constantine. Soutenue en 2007
- [21] : B. M. VINAGRE, I.Poudlubny, A. Hernandez, V.Felieu « Some approximations of fractional order operators used in control theory and application ».
- [22] : M. BENMALEK « Contribution à l'analyse de l'électrocardiogramme (ECG) en utilisant les concepts des opérateurs d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri de Constantine. Soutenue en 2011

[23] : H. NEZZARI « Contribution à l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri de Constantine. Soutenue en 2013

[24] : A.CHAREF et D.IDIOU « Design of analog variable fractional order differentiator and integrator ». Original paper. Springer science + media B.V 2012. Published online 10 March 2012

[25] : M. AOUN, R. MALTI, F. LEVRON, et A. OUSTALOUP « Numirical simulation of fractional systems ». ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA, September 2-6, 2003

[26] : D. IDIOU « Implémentation Analogique de Dérivateur et d'Intégrateur d'Ordre Fractionnaire Variable ». Thème de Magistère. Université Mentouri de Constantine. Soutenue en 2008

[27] : A. CHAREF « modeling and analog realization of the fundamuntal linear fractional order differential equation ». Non linear dynamics (2006) 46: 195-210. Springer 2006

[28] : R.MALTI, S. Victor, A. Oustaloup « System identification using fractional models : state of the art ». Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2007 September 4-7, 2007, Las Vegas, Nevada, USA

[29] : R. MALTI, M. Aoun, J. Sabatier, A. Oustaloup « Tutorial of system identification usig fractional differentiation models » . 14th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle, Australia, 2006

[30] : O. Cois « Systèmes linéaire non entiers et identification par modèle non entier : Application thèrmique ». Thèse de Doctorat. Université de Bordeaux 1. Soutenue en 2002.

[31] : M. Chetoui « Identification des systèmes par modèle non entier à partir de signaux d'entrée sortie bruités ». Thèse de Doctorat. Universités de Gabès et Bordeaux. Soutenue en 2013

[32] : S . Victor « Identification Par modèle non entier pour la poursuite robuste de trajectoire par platitude ». Thèse de Doctorat. Université de Bordeaux 1. Soutenue en 2010.

[33] : K. Matsuda et H. Fujii « H_∞ optimized wave-absorbing control : Analytical and experimental results ». JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS Vol. 16, No. 6, November-December 1993

- [34] : L. AIT Messaoud « Contribution à la commande des systèmes par des régulateurs d'ordre non entier : Application à la commande de la machine asynchrone ». Thème de Magistère. Soutenu en 2007.
- [35] : C. A. Monje, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu « Fractional order systems and control :Fundamentals and applications ». Springer. 2010
- [36] : A. Oustaloup, X. Moreau, B. Mathieu « Commande CRONE : Principes et exemples d'application »
- [38] : Saptarshi Das, Indranil Pan « Fractional order signal processing : introductory concepts and applications ». Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012.
- [39]: Mitkowski W. Oprzędkiewicz K. (2016) An estimation of accuracy of Charef approximation Theoretical developments and applications of non-integer order systems : 7th conference on Non-integer order calculus and its applications (Lecture Notes in Electrical Engineering ; ISSN 1876-1100 ; vol. 357). Szczecin, Poland / eds. Stefan Domek, Paweł Dworak. Springer 2016, pp 71-80
- [40] : Krzysztof Oprzędkiewicz , Wojciech Mitkowski , Edyta Gawin « An estimation of accuracy of Oustaloup approximation »
- [41]: S. Guermah « Commande CRONE, Application à un procédé pilote de laboratoire « Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2011
- [42]: O. Cois, P.Laussen, F. Dancla et A. Oustaloup « Fractional Systems Toolbox for MATLAB : Applications in system identification and CRONE CSD », <https://www.researchgate.net/publication/228733934>.
- [43]: S.Canat « Contribution à la modélisation dynamique d'ordre non entier de la machine synchrone à cage « , Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechniques de Toulouse. Soutenu le 19 Juillet 2005.

Résumé

Les systèmes d'ordre fractionnaire ont reçu un intérêt considérable dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ces systèmes sont généralement décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans le domaine fréquentiel, ils sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles. A cause de ces fonctions irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Comme ils n'ont pas de solutions analytiques exactes, les techniques numériques et d'approximation sont largement utilisées pour leur résolution, analyse et implémentation. Dans ce memoire des techniques de résolution, d'implémentation analogiques et d'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire fondamentaux en se basant sur des approximations par des fonctions rationnelles de leur fonctions de transfert irrationnelles sont présentées. L'extraction et l'analyse des caractéristiques fréquentielles et temporelles de ces systèmes a aussi été faite. Des exemples illustratifs ont été présentés pour démontrer l'efficacité et l'exactitude des méthodes proposées. Les résultats des simulations obtenus ont été satisfaisants. Ils ont été discutés et comparés avec des méthodes de résolution récente dans la littérature.

Mots clés : Equation différentielle d'ordre fractionnaire, Fonction irrationnelle, Fonction rationnelle Implémentation analogique, Systèmes d'ordre fractionnaire