

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Magister

En Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle et Optimisation

Thème

**Principe du maximum et méthode
de tir**

PRÉSENTÉ PAR :

Daya OUIDJA

DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

| | | | | |
|---------------------------|---------|---------------------------|-------|--------------|
| M. HAMADOUCHE | Djamal | Professeur | UMMTO | Président |
| M. AIDENE | Mohamed | Professeur | UMMTO | Rapporteur |
| M ^{me} . KHELLAS | Fazia | Maître de conférences (A) | UMMTO | Examinatrice |
| M. OUANES | Mohand | Maître de conférences (A) | UMMTO | Examinateur |
| M. OUKACHA | Brahim | Maître de conférences (A) | UMMTO | Examinateur |

Juin 2011

”Principe du maximum et la méthode de tir”

Résumé : On s’intéresse ici à l’étude d’une méthode de résolution des problèmes de contrôle optimal. Cette méthode, qui est à la fois, précise et rapide, fait partie des méthodes dites *indirectes*. Elle est basée sur le Principe du Maximum de Pontriaguine, et qui consiste à réduire le problème de contrôle en un problème aux valeurs limites, puis le résoudre numériquement par une *méthode de tir*. Cette dernière consiste à la recherche de zéro de la fonction de tir associée, ceci peut se faire par la méthode de Newton. Mais elle est très sensible à l’initialisation. Cette difficulté nous amène à utiliser une démarche homotopique dans laquelle on part d’un problème apparenté plus facile à résoudre.

Mots clés : Contrôle optimal, Contrôlabilité, Commande optimale, Optimisation, Principe du maximum de Pontriaguine, Méthode de tir, Contrôle Bang-bang, Homotopie.

”The maximum Principal and shooting method”

Abstract : we are interested here in the study of a resolution method of optimal control problems. This method, which is precise and fast at the same time, is part of *indirect* said methods. It is based on the Principale of the Maximum of Pontriaguine, and which consists in reducing the problem of control to a problem in the limits, then in resolving it numerically by a *shooting method*. This last one consists of the search for zero of the associated shooting function, this can be made by the Newton’s method. But it is very sensitive to the initialization. This difficulty brings us to use a *continuation* approach in which one starts with a related problem easier to solve.

Key words : Optimal contol, Controllability, Optimal command, Optimization, Pontryaguin maximum principale, Shooting methods, Bang-bang control, Continuation.

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à M. Mohamed Aidene, professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, sous la direction duquel j'ai eu le plaisir de travailler. Ses conseils, ses critiques et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener ce travail à son terme.

J'exprime mes sincères remerciements à M. Djamel Hamadouche, professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de ce mémoire.

Je suis honorée de la présence dans ce Jury de M^{me} Fazia Khellas, Maître de conférences à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, de M. Mohand Ouanes, Maître de conférences à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou et de M. Brahim Ouqacha, Maître de conférences à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou et de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

Je tiens particulièrement à remercier, M. Karim Hamid, pour son aide et son entière disponibilité. Ses conseils m'ont permis d'approfondir certains concepts. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance et de mon amitié la plus sincère. Simplement, Merci Karim...

Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Enfin pour avoir cru en moi, j'exprime ma profonde gratitude à ma chère famille, particulièrement mes parents, et à tous mes amis(es), ce modeste travail leur est dédié.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Remerciements | I |
| Table des figures | V |
| Introduction | 1 |
| 1 Généralités sur les équations différentielles | 4 |
| 1.1 Intorduction | 4 |
| 1.2 Définitions fondamentales | 4 |
| 1.3 Types d'équations différentielles | 5 |
| 1.3.1 Equation différentielle à variables séparées | 5 |
| 1.3.2 Equation différentielle linéaire d'ordre 1 | 6 |
| 1.3.3 Equation d'Euler-Lagrange | 8 |
| 1.4 Résolution numérique des équations différentielles | 10 |
| 1.4.1 Le problème de Cauchy | 10 |
| 1.4.2 Méthode de Newton | 13 |
| 1.4.3 Méthode d'Euler | 13 |
| 1.4.4 Méthode de Runge-Kutta | 14 |
| 1.4.5 Méthode de tir pour la résolution des équations différentielles | 19 |
| 2 Contrôle optimal | 24 |
| 2.1 Position du problème | 24 |
| 2.2 Propriétés essentielles du problème de contrôle optimal | 26 |
| 2.2.1 Position du problème | 26 |
| 2.2.2 Commandabilité | 27 |
| 2.2.3 Stabilisation | 35 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.2.4 | Observabilité | 37 |
| 2.3 | Méthodes de résolution numérique | 41 |
| 2.3.1 | Méthode directe | 41 |
| 2.3.2 | Méthodes indirectes | 42 |
| 3 | Principe du maximum | 43 |
| 3.1 | Introduction | 43 |
| 3.2 | Position du problème | 43 |
| 3.3 | Principe du maximum de Pontriaguine | 46 |
| 3.4 | Problèmes autonomes | 47 |
| 3.4.1 | Problème autonome aux extrémités fixes | 47 |
| 3.4.2 | Problème autonome aux extrémités libres et condition de transversalité | 48 |
| 3.5 | Problème en temps minimum | 52 |
| 3.5.1 | Formulation du problème : | 52 |
| 3.6 | Exemple d'application de PMP | 55 |
| 3.6.1 | Conditions de transversalité | 56 |
| 4 | Méthode de tir | 58 |
| 4.1 | Introduction | 58 |
| 4.2 | Méthodes de tir | 58 |
| 4.2.1 | Méthode de tir simple | 59 |
| 4.2.2 | Méthode de tir multiple | 60 |
| 4.2.3 | Rappels sur les méthodes de Newton | 62 |
| 4.3 | Résolution d'un problème aux deux bouts | 63 |
| 4.3.1 | Problème aux deux bouts | 63 |
| 4.4 | Démarche homotopique | 67 |
| 4.4.1 | Continuation discrète | 68 |
| 4.4.2 | Continuation différentielle et méthode simpliciale | 68 |
| 4.4.3 | Mise en œuvre pratique de la méthode de tir | 72 |
| 4.4.4 | Conclusion | 73 |
| 5 | Exemple d'application | 74 |
| 5.1 | Application du Principe du Maximum | 75 |
| 5.2 | Application de la méthode de tir | 79 |
| 5.3 | Résolution à l'aide du logiciel MATLAB | 80 |
| | Conclusion | 83 |

| | |
|--|----|
| Annexe | 84 |
| A Variation de la constante | 85 |
| B Fonctions implicites | 87 |
| C Théorie des points conjugués | 89 |
| D Introduction au logiciel de programmation MATLAB | 92 |
| Bibliographie | 94 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Problème du contrôle optimal | 25 |
| 2.2 | Problème de contrôlabilité | 28 |
| 2.3 | Bouclage | 36 |
| 2.4 | Système commandé-observé | 38 |
| 3.1 | Contrôle de Bang-bang | 57 |
| 5.1 | Synthèse optimale | 78 |
| 5.2 | Résultats de la méthode de tir | 82 |

Introduction Générale

*"Ce qui est créé par l'esprit
est plus vivant que la matière".*
Boudelaire.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé *le contrôle*. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines des mathématiques.

Le problème d'optimisation dans les mathématiques implique les spécifications des décisions (conditions ou contraintes) de l'utilisateur et de la formalisation du concept de l'optimale décision.

En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique de vol. La théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique (principe de Fermat, équations d'Euler-Lagrange, . . .). Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontriaguine, formulé par L. S. Pontriaguine en 1956 [50] qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales (pour plus de détails sur l'histoire de cette découverte, voir [29]). Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de *contrôlabilité*. Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R. E. Kalman [35], et pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique

de contrôlabilité est beaucoup plus difficile. En suite, une fois le problème de contrôlabilité résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (ou maximum). Pour la résolution du problème de contrôle optimal, on dispose de deux grandes classes de méthodes à savoir : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

- Les méthodes directes consistent à discrétiser le problème de contrôle (l'état et la commande) pour tout instant et on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire, puis résoudre ce problème d'optimisation ainsi obtenu, en se basant, par exemple, sur les méthodes d'Euler, de Rung-Kutta ou bien les méthodes de types SQP (méthode de programmation quadratique successive), etc. Ces méthodes sont les plus simples à mettre en œuvre.
- Les méthodes indirectes, quant à elles, consistent à appliquer le principe du maximum de Pontriaguine (PMP) [50], qui donne des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre et se traduisent dans un problème aux deux bouts. On cherche ensuite les trajectoires vérifiant ces conditions, ce qui revient en pratique à chercher le zéro d'une certaine fonction de tir associée au problème original. Ces méthodes sont à la fois précises et rapides, mais en revanche elles sont très sensibles à l'initialisation [45].

Le présent travail est donc divisé en cinq chapitres, organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, intitulé *Généralités sur les Equations Différentielles*, nous nous sommes attelés à la définition des notions que nous allons utiliser par la suite comme l'équation d'Euler-Lagrange par rapport à son rôle dans la théorie [19]. Nous donnons dans ce chapitre quelques méthodes de résolutions des équations différentielles les plus simples et les plus utiles pour notre thème [25], par exemple les méthodes de Rung-Kutta qui représentent un outil d'une grande utilité [55]. A la fin du chapitre, on a introduit la méthode de tir pour la résolution d'une équation différentielle avec conditions aux limites [25].

Dans le deuxième chapitre, intitulé *Contrôle optimal*, nous nous intéressons au problème de contrôle optimal, où nous avons présenté les notions essentielles d'un programme de contrôle optimal. La contrôlabilité (plus particulièrement pour les systèmes non linéaires), la stabilité et l'observabilité [43, 58]. Après quelques définitions de base d'un problème de contrôle optimal, nous avons introduit un exemple de l'approche direct qu'est la méthode adaptée du simplexe, mise au point par R. Gabasov et F. M. Kirillova durant les années 80. L'avantage de celle-ci, est qu'elle utilise un procédé qui démarre d'un point intérieur, elle permet aussi

l'obtention d'une solution approchée et résout des problèmes de contrôle optimal. Pour des détails sur cette méthode, le lecteur peut consulter [27, 28].

Dans le troisième chapitre, intitulé *Principe du maximum*, nous exposons une méthode de résolution de problème de contrôle optimal qui, de l'avis de tous les spécialistes et chercheurs, a révolutionné cette discipline, il s'agit du principe du maximum de Pontriaguine énoncé en 1956 [50]. En fin de ce chapitre nous illustrons cette méthode par un exemple pratique qui est le problème de contrôle de production et consommation, où le contrôle est la quantité de produit et le coût est la quantité de produit à investir.

Dans le quatrième chapitre, intitulé *Méthode de tir*, nous proposons l'étude d'une nouvelle méthode de résolution de problème de contrôle optimal appelée *la méthode de tir*, et qui fait partie des méthodes *indirectes*. Elle est basée sur le Principe du Maximum de Pontriaguine (PMP). nous soulignons certaines des difficultés que l'on s'attend à rencontrer, on introduit alors *la démarche homotopique* (ou *continuation*). Nous renvoyons les lecteurs intéressés par ces méthodes à [16, 5, 57, 45].

Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'application des méthodes décrites sur une situation réelle. On s'intéresse à un exemple simple d'un véhicule qui se déplace d'une position initiale à une autre position arbitraire. Le but étant de minimiser le temps de déplacement.

Pour finir, nous concluons et apporterons quelques perspectives dans le cadre de cette recherche.

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

1.1 Introduction

Une *équation différentielle*, en mathématique, est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques, etc. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

1.2 Définitions fondamentales

Définition 1.1. Soit $x = \varphi(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'elle soit dérivable jusqu'à l'ordre n au moins et que, en tout point t de I , il existe entre x et ses n premières dérivées une relation de la forme :

$$\phi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0. \quad (1.1)$$

Cette équation, dans laquelle la fonction $x = \varphi(t)$ est considérée comme indéterminée est appelée "*équation différentielle d'ordre n* ".

Bien entendu, la même expression s'applique à toute équation qui peut se ramener à la forme (1.1).

Un cas particulier important est celui où l'équation différentielle est de la forme :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \phi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) \quad (1.2)$$

qui est dite *forme normale*, cette expression traduit l'idée selon laquelle une équation différentielle est, en principe, destinée à permettre de calculer $\frac{d^n x}{dt^n}$ en fonction de $t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}$.

Remarque 1.1. L'équation (1.2) est dite *autonome* lorsqu'elle ne dépend pas explicitement de la variable temporelle t , c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme

$$\dot{x} = f(x).$$

Définition 1.2. Toute fonction $x = \varphi(t)$ $t \in I$ qui vérifie l'équation (1.1) en tout point de l'intervalle I est appelée "*solution*" où "*intégrale*" de cette équation.

Définition 1.3. Le graphe Γ d'une solution quelconque d'une équation différentielle est appelé "*arc intégrale*" ou "*courbe intégrale*".

Définition 1.4. Le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x) & \text{pour } t \in [a, b], \\ x(t_0) = x_0 & \text{pour } t_0 \in [a, b], \end{cases}$$

avec $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, est appelé "*problème de cauchy*".
 (t_0, x_0) est appelée "*condition initiale*".

Remarque 1.2. Le sens physique de la condition initiale est très intuitif. Un système physique régi par une équation différentielle du premier ordre, voit son état déterminé par une seule valeur qui dépend en général du temps. La connaissance de cet état à un instant donné, détermine l'état du système à tout instant.

1.3 Types d'équations différentielles

1.3.1 Equation différentielle à variables séparées

Une équation différentielle est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = g(x)f(t).$$

Pour la résoudre, on intègre les deux membres séparément, sans oublier les constantes d'intégration.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = g(x) \cdot f(t) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt,$$

par intégration, on obtient :

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt.$$

Exemple 1.1. Résolvons l'équation suivante :

$$x - \frac{\dot{x}}{2t} = 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

On écrit cette équation sous forme différentielle puis on sépare les variables :

$$x - \frac{dx}{2t} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{dx}{2t} \Leftrightarrow \frac{dx}{x-1} = 2t dt.$$

Par intégration de cette relation, il vient :

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int 2t dt \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{k}\right) = t^2 \Leftrightarrow x - 1 = ke^{t^2}.$$

En on déduit que l'ensemble des solutions est constitué des fonctions :

$$x \longmapsto 1 + ke^{t^2}.$$

1.3.2 Équation différentielle linéaire d'ordre 1

Une équation différentielle est dite *linéaire* si elle peut s'écrire sous la forme :

$$a(t)\dot{x} + b(t)x = c(t) \tag{1.3}$$

où a , b , et c sont des fonctions de la variable réelle t , continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sur lequel la fonction $a(t)$ ne s'annule pas.

Définition 1.5. On appelle "équation différentielle homogène" associée à l'équation différentielle (1.3) l'équation :

$$a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \tag{1.4}$$

Les solutions de l'équation (1.4) sont données :

$$t \mapsto ke^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt},$$

où k est une constante réelle quelconque.

Les solutions de l'équation (1.3) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de cette équation à la solution générale de l'équation homogène associée.

Remarque 1.3. Certaines équations non linéaires se ramènent à des équations linéaires par changement de variables, c'est le cas par exemple des équations de *Bernoulli* :

$$\dot{x} = p(t)x + q(t)x^\alpha.$$

Les fonctions p et q étant continues.

Lorsque α vaut 0 ou 1 l'équation est linéaire.

Sinon : en posant $y = x^{1-\alpha}$, on se ramène à l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\dot{y}}{1-\alpha} = p(t)y + q(t).$$

C'est aussi le cas de l'équation de Ricatti :

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

qui se ramène à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, dès qu'on connaît une solution particulière $x_1(t)$. En effet, il suffit de poser $x = x_1 + y$ et de le remplacer dans l'équation de Ricatti, pour montrer que la variable y vérifie l'équation de Bernoulli suivante :

$$\dot{y} = (2a(t)x_1(t) + b(t))y(t) + a(t)y^2(t).$$

Remarque 1.4. Les équations linéaires d'ordre p se ramènent à des systèmes d'équations d'ordre 1 :

$$x^{(p)} + a_{p-1}x^{(p-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

équivalent au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-2} = x_{p-1} \\ \dot{x}_{p-1} = -a_{p-1}x_{p-1} - \dots - a_1x_1 - a_0x. \end{cases}$$

En posant :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} \text{ on obtient } \dot{X} = AX, \text{ avec : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

1.3.3 Equation d'Euler-Lagrange

Soit $g : [t_0, t_f]_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Pour toute fonction $x : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , on note \dot{x} sa dérivée, et on pose :

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt.$$

Théorème 1.1. [19] Si x^* est une fonction de classe \mathcal{C}^2 qui donne à J une valeur extrémale $J^* := J(x^*)$ parmi toutes les fonctions $x : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 satisfaisant

$$x(t_0) = x_0; \quad x(t_f) = x_{t_f}, \tag{1.5}$$

alors nécessairement x^* satisfait à la formule d'Euler-Lagrange :

$$g'_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}(g'_v(t, x(t), \dot{x}(t))). \tag{1.6}$$

Signalons que, réciproquement, si $x^* : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 satisfaisant l'équation d'Euler-Lagrange (1.6) et si pour tout $t \in [t_0, t_f]$, la fonction $g_t : (x, v) \mapsto g(t, x, v)$ est *concave*, alors J^* est le maximum des $J(x)$ pour la fonction $x : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 satisfaisant (1.5), si de plus les g_t sont *strictement concaves*, x^* est l'*unique* maximum parmi ces fonctions.

Preuve. L'idée est d'utiliser le fait que toutes les dérivées partielles de la fonctionnelle J dans toutes les directions x satisfaisant (1.5) sont nécessairement nulles, et d'écrire x sous la forme $x = x^* + hX$.

Soit $X : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $X(t_f) = X(t_0) = 0$ et soit $\phi_X(h) = J(x^* + hX)$. On a $\phi_X(0) = J^*$ et comme ceci est la plus grande valeur de

$J, 0$ est un extrémum de ϕ_X , d'où $\frac{d}{dh}\phi_X(0) = 0$, en d'autres termes, en dérivant sous le signe intégral puis en intégrant par partie, on a successivement :

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{d}{dh}\phi_X(0) &= \frac{d}{dh}J(x^* + hX)|_{h=0} \\
 &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dh}g(t, x^*(t) + hX(t), \dot{x}^*(t) + h\dot{X}(t))|_{h=0} dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_f} g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))X(t) + g'_v(t, x^*, \dot{x}^*(t))\dot{X}(t) dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_f} [g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt}g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))]X(t) dt \\
 &+ [g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))X(t)]_{t=0}^{t=t_f} \\
 &= \int_{t_0}^{t_f} G(t)X(t) dt.
 \end{aligned}$$

Puisque $X(t_f) = X(t_0) = 0$, avec $G(t) = g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt}g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$, qui est continue puisque g est de classe \mathcal{C}^2 . Le théorème découle donc immédiatement du lemme suivant, souvent appelé "lemme fondamental du calcul des variations". □

Lemme 1.2. [19] Soit $G : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si pour toute fonction continue $X : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(t_f) = X(t_0) = 0$, et on a $\int_{t_0}^{t_f} G(t)X(t)dt = 0$ alors nécessairement la fonction G est nulle.

Preuve. Soit $\varphi_\varepsilon : [t_0, t_f] \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $\varphi_\varepsilon(t_f) = \varphi_\varepsilon(t_0) = 1$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_f} \varphi_\varepsilon = 0,$$

par exemple $\varphi_\varepsilon(t) = \exp t(t - t_f) / \varepsilon$, alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_f} G^2 \varphi_\varepsilon = 0$$

puisque

$$0 \leq \int_{t_0}^{t_f} G^2 \varphi_\varepsilon \leq \max(G^2) \int_{t_0}^{t_f} \varphi_\varepsilon.$$

Posons

$$X(t) = G(t)(1 - \varphi_\varepsilon(t)),$$

on a :

$$0 = \int_{t_0}^{t_f} G(t)X(t)dt = \int_{t_0}^{t_f} G^2(t)dt - \int_{t_0}^{t_f} G^2(t)\varphi_\varepsilon(t)dt.$$

En passant à la limite sur ε , on a $\int_{t_0}^{t_f} G^2(t)dt = 0$ et donc $G \equiv 0$. □

Nous renvoyons le lecteur à consulter [19], pour l'application pratique de cette équation en contrôle optimal.

1.4 Résolution numérique des équations différentielles

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution des équations différentielles : les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques ne sont pas suffisantes pour résoudre les problèmes d'équations différentielles et ne sont possibles que dans un nombre de cas très restreints.

La résolution de la plupart des équations différentielles requiert donc l'utilisation des méthodes numériques, chacune de ces méthodes peut être appliquée à la résolution de la plupart des équations différentielles, parmi ces méthodes on citera quelques une dans ce qui suit :

1.4.1 Le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy (aussi appelé problème aux valeurs initiales) consiste à trouver la solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO), scalaire ou vectorielle, satisfaisant des conditions initiales. Par exemple, dans le cas scalaire, si I désigne un intervalle de \mathbb{R} contenant le point t_0 , le problème de Cauchy associé à une EDO du premier ordre s'écrit :

trouver une fonction réelle $x(t) \in \mathcal{C}^1(I)$ solution du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

où $f(t, x)$ est une fonction donnée à valeur réelle définie sur le produit $S = I \times]-\infty, +\infty[$ et continue par rapport aux deux variables. Si f ne dépend pas explicitement de t (*i.e.* $f(t, x(t)) = f(x(t))$), l'équation différentielle est dite *autonome*.

On obtient en intégrant (1.7) entre t_0 et t

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in I. \quad (1.8)$$

La solution de (1.7) est donc de classe \mathcal{C}^1 sur I et satisfait l'équation intégrale (1.8). Inversement, si $x(t)$ est définie par (1.8), alors elle est continue sur I et $x(t_0) = x_0$.

Existence et unicité de solution

Rappelons maintenant deux résultats d'existence et d'unicité pour (1.7) :

1- Existence locale et unicité : on suppose $f(t, x)$ localement lipschitzienne en (t_0, x_0) par rapport à x , ce qui signifie qu'il existe une boule ouverte $J \subseteq I$ centrée en t_0 de rayon r_J , une boule ouverte Γ centrée en x_0 de rayon r_Γ et une constante $K > 0$ telles que

$$\forall t \in J, \forall (x_1, x_2) \in \Gamma, \|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq K \|x_2 - x_1\|. \quad (1.9)$$

Sous cette hypothèse, le problème de Cauchy (1.7) admet une unique solution dans une boule ouverte de centre t_0 de rayon r_0 avec $0 < r_0 < \min(r_J, r_\Gamma/M, 1/K)$, où M est le maximum de $|f(t, x)|$ sur $J \times \Gamma$. Cette solution est appelée "*solution locale*".

Remarquer que la condition (1.9) est automatiquement vérifiée si la dérivée de f par rapport à x est continue : en effet, dans ce cas, il suffit de prendre pour K le maximum de $|\partial f(t, x)/\partial x|$ sur $\overline{J \times \Gamma}$.

2- Existence globale et unicité : le problème de Cauchy admet une *solution globale* unique si on peut prendre dans (1.9)

$$J = I, \quad \Gamma = \mathbb{R},$$

c'est-à-dire, si f est *uniformément lipschitzienne* par rapport à x .

Par exemple, soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x} & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Cette équation admet plusieurs solutions de la forme :

$$x(t) = \begin{cases} (t - a)^2 & \text{pour } t \geq a \\ 0 & \text{pour } t \leq a, \end{cases}$$

obtenues pour différentes valeurs du paramètre a , car la fonction $x(t)$ n'est pas lipschitzienne.

Remarque 1.5. L'intervalle de définition d'une solution dépend de la condition initiale, par exemple :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2, & t \in \mathbb{R} \\ x(1) = -1, \end{cases}$$

admet comme solution $x(t) = -1/t$ qui n'est pas définie en $t = 0$ bien que la fonction $f(t, x) = x^2$ soit continue.

En vue de l'analyse de stabilité du problème de Cauchy, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y(t)) + \delta(t), & t \in I \\ y(t) = x_0 + \delta_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

où $\delta_0 \in \mathbb{R}$ et où δ est une fonction continue sur I . Le problème (1.10) est déduit de (1.7) en perturbant la donnée initiale x_0 et la fonction f . Caractérisons à présent la sensibilité de la solution y par rapport à ces perturbations.

Définition 1.6. Soit I un ensemble borné. Le problème de Cauchy (1.7) est *stable au sens de Liapunov* (ou simplement *stable*) sur I si, pour toute perturbation $(\delta_0, \delta(t))$ satisfaisant

$$|\delta_0| < \varepsilon, \quad |\delta(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I,$$

avec $\varepsilon > 0$ assez petit pour garantir l'existence de la solution du problème perturbé (1.10), alors

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |x(t) - y(t)| < C\varepsilon \quad \forall t \in I. \quad (1.11)$$

La constante C dépend en général des données du problème t_0, x et f , mais pas de ε .

Quand I n'est pas borné supérieurement, on dit que (1.7) est *asymptotiquement stable* si, en plus de (1.11), on a la propriété suivante

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty, \\ \text{si } |\delta(t)| &\rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.4.2 Méthode de Newton

Cette méthode à été mise au point par Newton en 1686, c'est pourquoi elle porte son nom. C'est l'une des méthodes les plus utilisées pour la recherche des racines des équations non linéaires. C'est une méthode simple dont la convergence est rapide.

Supposons $f \in C^1(I)$ et $f'(\alpha) \neq 0$ (α une racine simple de f). En se donnant la valeur initiale $x_{(0)}$, on obtient la méthode de Newton :

$$x_{(n+1)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \geq 0$$

Algorithme de la méthode de Newton

- i. Etant donné, ε , un critère d'arrêt.
- ii. Etant donné N , le nombre maximal d'itérations.
- iii. Etant donné x_0 , une valeur initiale de la solution.
- iv. Effectuer : $x_{(n+1)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- v. Si : $\frac{|x_{(n+1)} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon$:
 - convergence atteinte.
 - écrire la solution x_{n+1} .
 - arrêt.
- vi. Si le nombre maximal d'itération N est atteint.
 - Convergence non atteinte en N itérations.
 - arrêt.
- vii. Retour à l'étape iv.

1.4.3 Méthode d'Euler

La méthode de Leonhard Euler (1707-1783) est la méthode la plus simple de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires. Elle possède une belle interprétation géométrique et son emploi est facile. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa faible précision.

La résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

conduit au schéma suivant :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \end{cases}$$

En pratique, la méthode d'Euler n'est pas utilisée car elle n'offre pas une précision suffisante. Cette méthode est convergente et du 1^{er} ordre car l'erreur de consistance (de troncature ou de discrétisation, est la différence entre la valeur discrétisée et la valeur exacte) vaut :

$$|y(x_i) - y_i| = \frac{1}{2}h^2 f'(c, y_i), \quad \text{avec } c \in [x_{i-1}, x_i]$$

mais cette méthode dite *explicite* est souvent instable c'est le cas si la fonction est linéaire, par exemple :

$$\dot{y} = f(x, y) = -ay \quad \text{avec } a > 0.$$

Le schéma d'Euler est :

$$y_{i+1} = y_i - ah y_i = (1 - ah)y_i$$

est instable dès que $h > \frac{2}{a}$, car dans ce cas y_i tend vers l'infini lorsque i tend vers l'infini.

1.4.4 Méthode de Runge-Kutta

Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867-1944) ont proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En introduisant un schéma numérique de la forme :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi(x_i, y_i, h_i), \end{cases}$$

où la fonction d'incrémentation ϕ est une approximation de $f(x, y)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Supposons un entier r , une matrice A carrée d'ordre r dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls y compris la diagonale, et un vecteur $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$. L'algorithme de Runge-Kutta est le suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h.(b_1k_1 + \dots + b_rk_r) \\ x_{i+1} = x_i + h \\ k_j = f(x_i + c_jh, y_i + h(a_{j1}k_1 + \dots + a_{jr}k_r)). \end{cases}$$

Le vecteur b vérifie $b_1 + b_2 + \dots + b_r = 1$.

Les coefficients c_j sont les sommes des éléments de la ligne j de la matrice A .

Dans ces méthodes le pas h peut facilement varier, une méthode de Runge-Kutta est entièrement déterminée par la donnée de l'entier r , du vecteur b et de la matrice A .

Méthode d'ordre 1 (r = 1)

Pour $b = 1$, $a_{11} = 0$, l'algorithme $y_{i+1} = y_i + h.f(x_i, y_i)$, se réduit à la méthode d'Euler.

Méthode d'ordre 2 (r = 2)

Pour déterminer toute les méthodes d'ordre 2, cherchons une fonction ϕ de la forme :

$$\phi = b_1k_1 + b_2k_2$$

où les coefficients k_1 et k_2 sont donnée par :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + ch, y_i + ahk_1). \end{cases}$$

Développons y_{i+1} au voisinage du point (x_i, y_i) :

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + f(x_i, y(x_i)) \right] \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)).$$

Développons de même k_2 au voisinage du point (x_i, y_i) :

$$y_{i+1} = y_i + hb_1k_1 + hb_2[f(x_i, y_i) + hc \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + ahf(x_i, y_i) \right] \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)] + o(h^2).$$

En identifiant les deux expressions on obtient :

$$\begin{cases} y(x_i) = y_i \\ f(x_i, y_i) = (b_1 + b_2)f(x_i, y_i) \\ 1/2f'_x + 1/2f'_y f = b_2(cf'_x + af'_y f), \end{cases}$$

on en déduit que :

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$b_2c = b_2a = \frac{1}{2}$$

soit en posant :

$b_2 = \theta$, $b_1 = 1 - \theta$ et $c = a = \frac{1}{2}$, on retrouve les trois cas standards :

La méthode d'Euler s'obtient pour $\theta = 0$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

La méthode de Heun (Euler-Cauchy) est obtenue pour $\theta = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h.(k_1 + k_2)/2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1). \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta (proprement dite) est obtenue pour $\theta = 1$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + hk_1). \end{cases}$$

Méthode d'ordre 3 (r = 3)

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 3 correspond au cas $b = (1/6, 2/3, 1/6)$, et la matrice :

$$A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme effectue à chaque pas le calcul de trois facteurs k_i .

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h.(k_1 + 4k_2 + k_3)/6 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2). \end{cases}$$

Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4

- i. Etant donné un pas de temps h , une condition initiale (x_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N .
- ii. Pour $0 \leq i \leq N$:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Ecrire x_{i+1} et y_{i+1}

- iii. L'itération se termine quand $i + 1 = N$.

Remarque 1.6. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est très fréquemment utilisée car elle nous permet d'obtenir des résultats d'une grande précision. En fait plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus elle devient plus précise.

Pour améliorer l'efficacité du calcul, on utilise des méthodes à pas variable, c'est-à-dire des méthodes dans lesquelles le pas h varie à chaque itération.

Une des méthodes classiques, consiste à employer deux méthodes de *Runge-Kutta emboîtées*, la première méthode d'ordre r sert à calculer la solution approchée, tandis que la seconde d'ordre r' sert à estimer l'erreur de consistance pour contrôler le pas, on dit que la méthode est d'ordre (r, r') .

Proposée en 1957, la méthode de Merson est la première méthode de Runge-Kutta emboîtée, elle est d'ordre 5 pour le calcul de la solution et d'ordre 4 pour

le contrôle du pas, elle consiste à calculer :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/3, y_i + hk_1/3) \\ k_3 = f(x_i + h/3, y_i - hk_1/6 + hk_2/6) \\ k_4 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/8 + 3hk_2/8) \\ k_5 = f(x_i + h, y_i + hk_1/2 - 3hk_3/2 + 2hk_1) \\ y_{i+1} = y_i + h.(k_1 + 4k_2 + k_3)/6 \\ y_{i+1}^* = y_i + h(k_1 - 3k_3 + 4k_4)/2. \end{cases}$$

L'erreur :

$$\Delta_i = |y_{i+1} - y_{i+1}^*|$$

est évaluée à chaque pas.

Remarque 1.7. Si e désigne la tolérance acceptée, l'algorithme de Merson divise le pas par facteur 2 quand $\Delta_i > e$, et multiplie le pas par 2 quand $\Delta_i \leq e/64$, et conserve le pas actuel dans les autres cas.

D'autres méthodes d'ordre plus élevé ont été proposées, comme la méthode de Dormand et Prince (1980), qui est d'ordre (7, 8). Plus récemment Cash et Karp (1990) ont proposé une méthode d'ordre (4, 5).

Exemple 1.2. Dans cet exemple on s'intéresse à trouver la méthode la plus précise, pour cela on compare la méthode d'Euler et celles de Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4 :

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = -y^2(x) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

La solution exacte de ce système est :

$$y(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Avec la méthode d'Euler, la solution de ce système est :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i - hy_i^2.$$

Dans le tableau ci-dessous, on donne une comparaison entre la solution exacte et les solutions numériques obtenues avec la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4 pour un pas $h = 0,1$:

| i | h_i | y_i exacte | méthode d'Euler | méthode RK2 | méthode RK4 |
|-----|-------|--------------|-----------------|-------------|-------------|
| 1 | 0.1 | 0.90909091 | 0.90000000 | 0.90975000 | 0.90909119 |
| 2 | 0.2 | 0.83333333 | 0.81900000 | 0.83434337 | 0.83333373 |
| 3 | 0.3 | 0.76923077 | 0.75192390 | 0.77041775 | 0.76923121 |
| 4 | 0.4 | 0.71428571 | 0.69538494 | 0.71985663 | 0.71428616 |
| 5 | 0.5 | 0.66666667 | 0.64702892 | 0.67522925 | 0.66666710 |

Dans le tableau ci-dessous, on donne le pourcentage de l'erreur relative pour chaque méthode :

| i | méthode d'Euler | méthode RK2 | méthode RK4 |
|-----|-----------------|-------------|-------------|
| 1 | 1.00 | 0.072 | 0.00030 |
| 2 | 1.72 | 0.1212 | 0.00005 |
| 3 | 2.25 | 0.1543 | 0.00006 |
| 4 | 2.65 | 0.7792 | 0.000063 |
| 5 | 3.95 | 1.2844 | 0.000064 |

D'après ce tableau on remarque que l'erreur augmente dans la méthode d'Euler au fur et à mesure que i augmente de même pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 par contre elle diminue dans la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. *Il est donc généralement préférable d'utiliser des méthodes d'ordre aussi élevé que possible.*

1.4.5 Méthode de tir pour la résolution des équations différentielles

Dans cette section nous faisons l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 avec conditions aux limites de la forme :

$$y''(x) = a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \quad y(a) = y_a \quad \text{et} \quad y(b) = y_b. \quad (1.13)$$

On suppose les fonctions $(a_i(x))$ suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité des équations différentielles que nous rencontrons.

La différence entre les équations différentielles avec conditions initiales et celles avec conditions aux limites est que dans le premier cas, à $t = t_0$, la fonction $y(t_0)$

ainsi que sa pente $y'(t_0)$ sont connues. Dans le cas des équations avec conditions aux limites, on ne connaît que les valeurs de la fonction $y(t)$ aux deux extrémités de l'intervalle, soit $y(a)$ et $y(b)$. On remarque qu'il n'y a aucune condition initiale liée à la dérivée de la fonction $y(t)$ en $x = a$. La condition initiale sur la dérivée est remplacée par une condition sur la fonction $y(t)$ à l'autre extrémité de l'intervalle $[a, b]$. En effet il suffit, de remarquer que l'on peut remplacer l'équation différentielle (1.13) par deux équations différentielles avec conditions initiales. Voir [15] à propos de cette méthode.

Théorème 1.3. [25] *La solution de l'équation différentielle avec condition aux limites (1.13) est donnée par :*

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)y_2(x) \quad (1.14)$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions des équations différentielle avec conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x) + a_0(x) \\ y_1(a) &= y_a \quad \text{et} \quad y_1'(b) = 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

et

$$\begin{aligned} y_2''(x) &= a_2(x)y_2'(x) + a_1(x)y_2(x) \\ y_2(a) &= 0 \quad \text{et} \quad y_2'(a) = 1. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Preuve. On doit vérifier en premier lieu les conditions aux limites. Si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ satisfont respectivement aux équations (1.15) et (1.16) en $x = a$

$$y(a) = y_1(a) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)y_2(a) = y_a + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)0 = y_a.$$

Par ailleurs :

$$y(b) = y_1(b) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)y_2(b) = y_1(b) + (y_b - y_1(b)) = y_b.$$

Il reste à montrer que l'expression (1.14) est bien la solution de l'équation différentielle (1.13).

On pose :

$$c = \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)$$

pour simplifier la notation. On doit donc s'assurer que $y_1(x) + y_2(x)$ est la solution de l'équation différentielle (1.13). La dérivée seconde de $y(x)$ peut alors s'écrire :

$$y''(x) = (y_1(x) + cy_2(x))'' = y_1''(x) + cy_2''(x).$$

Les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont respectivement les solutions des équations (1.15) et (1.16). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} y''(x) &= (a_2(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x) + a_0(x)) \\ &+ c(a_2(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)) \\ &= a_2(x)(y_1'(x) + cy_2'(x)) \\ &+ a_2(x)(y_1(x) + cy_2(x)) + a_0(x) \\ &= a_2(x)y'(x) + a_1(x)y(x) + a_0(x) \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $y(x)$, définie par (1.14), est la solution de l'équation (1.13).
□

On peut résoudre les équations différentielles (1.15) et (1.16) à l'aide de la méthode de Runge-kutta d'ordre 4. On doit d'abord transformer chacune d'elle en un système de deux équations différentielles d'ordre 1. En posant :

$$u_1(x) = y_1(x) \quad \text{et} \quad v_1(x) = y_2(x) \quad u_1'(x) = y_1'(x) \quad \text{et} \quad v_1'(x) = y_2'(x)$$

on obtient les deux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_2(x), & (u_1(a) &= y_a) \\ u_2'(x) &= a_2(x)u_2(x) + a_1(x)u_1(x) + a_0(x) & (u_2(a) &= 0) \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= v_2(x), & (v_1(a) &= 0) \\ v_2'(x) &= a_2(x)v_2(x) + a_1(x)v_1(x) & (v_2(a) &= 1). \end{aligned}$$

La solution finale peut alors s'écrire :

$$y(x) = y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)y_2(x) = u_1(x) + \left(\frac{y_b - u_1(b)}{v_2(b)}\right)v_1(x).$$

selon les nouvelles variables $u_1(x)$ et $v_1(x)$.

Exemple 1.3. Soit l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) = -\frac{2}{x}y'(x) + \frac{1}{x^2}$$

avec les conditions aux limites $y(1) = 0$ et $y(2) = 0,693147$. On a dans ce cas :

$$a_2(x) = \frac{-2}{x}, \quad a_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad a_0(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Le tableau qui suit présente la solution de cette équation différentielle. On peut démontrer facilement que la solution analytique de cette équation est $y(t) = \ln x$, ce qui permet de calculer l'erreur absolue qui figure dans la dernière colonne du tableau.

| x | $y_1(x) = u_1(x)$ | $y_2(x) = v_1(x)$ | $y(x)$ | <i>Erreur</i> |
|-----|-------------------|-------------------|--------------|-------------------------|
| 1,0 | 0,000 000 00 | 0,000 000 00 | 0,000 000 00 | $0,0000 \times 10^{-0}$ |
| 1,1 | 0,004 402 51 | 0,097 907 02 | 0,095 309 75 | $0,4299 \times 10^{-6}$ |
| 1,2 | 0,015 656 98 | 0,166 663 59 | 0,182 320 96 | $0,5997 \times 10^{-6}$ |
| 1,3 | 0,031 597 42 | 0,230 765 68 | 0,262 363 63 | $0,6325 \times 10^{-6}$ |
| 1,4 | 0,050 760 44 | 0,285 710 54 | 0,336 471 64 | $0,5924 \times 10^{-6}$ |
| 1,5 | 0,072 134 27 | 0,333 329 55 | 0,405 464 59 | $0,5143 \times 10^{-6}$ |
| 1,6 | 0,095 006 09 | 0,374 996 26 | 0,470 003 21 | $0,4173 \times 10^{-6}$ |
| 1,7 | 0,118 865 94 | 0,411 761 06 | 0,530 627 94 | $0,3123 \times 10^{-6}$ |
| 1,8 | 0,143 344 54 | 0,444 440 91 | 0,587 786 46 | $0,2057 \times 10^{-6}$ |
| 1,9 | 0,168 171 91 | 0,473 680 79 | 0,641 853 79 | $0,1008 \times 10^{-6}$ |
| 2,0 | 0,193 149 33 | 0,499 996 70 | 0,693 147 18 | $0,4400 \times 10^{-9}$ |

On a employé la méthode de Rung-Kutta d'ordre 4 pour le calcul de $y_1(x)$ et de $y_2(x)$. On note que :

$$y_1(b) = y_1(2.0) = 0,19314933 \quad \text{et} \quad y_2(b) = y_2(2, 0) = 0,49999670$$

ce qui permet le calcul de $y(x)$ à l'aide de l'équation différentielle (1.14).

Alors on cherche d'abord $y_1(x)$ et $y_2(x)$, d'après (1.15) et (1.16) on a :

$y_1(x)$ est solution du système

$$\begin{cases} y_1''(x) = \frac{-2}{x}y_1'(x) + \frac{1}{x^2} \\ y_1(1) = 0 \quad y_1'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

La résolution du système (1.18), par la méthode de la variation de la constante (la définition de cette méthode est donnée en annexe A), nous donne

$$y_1(x) = \log(x) + \frac{1}{x} - 1.$$

$y_2(x)$ est solution du système

$$\begin{cases} y_2''(x) = \frac{-2}{x}y_2'(x) \\ y_2(1) = 0 \quad y_2'(1) = 1. \end{cases} \quad (1.19)$$

la résolution du système (1.19) nous donne

$$y_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Alors d'après l'équation différentielle (1.14) on trouve :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) + \left(\frac{y_b - y_1(b)}{y_2(b)}\right)y_2(x) \\ &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + \left(\frac{0,693147 - 0,19314933}{0,49999670}\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + \left(\frac{0,499999767}{0,49999670}\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &\simeq \log(x) + \frac{1}{x} - 1 + 1\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &\simeq \log(x) + \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion

La modélisation des problèmes de contrôle se fait généralement par des équations différentielles. Ceci procure aux équations différentielles un rôle majeur dans la théorie du contrôle. La résolution numérique des équations différentielles est le domaine de l'analyse numérique où les applications sont le plus nombreuses.

Chapitre 2

Contrôle optimal

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final prescrit, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec retard..., et leurs origines sont très diverses (mécanique, électricité, économie...). L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

2.1 Position du problème

Pour résoudre un problème d'optimisation, il faut d'abord définir un objectif d'où la nécessité d'une définition du problème en termes physiques et sa modélisation en termes mathématiques. En connaissant la fonction à optimiser, l'état, le modèle et les paramètres du système, le problème est de déterminer la meilleure commande qui optimise l'objectif, par exemple, une commande en temps optimal c'est à dire réaliser l'objectif d'un processus dans le temps le plus court (c'est l'objectif du dernier chapitre)...ect.

A l'aide des commandes u on désire faire de sorte que le système suive une trajectoire déterminée ou atteigne un état fixe ou minimise le long d'une trajectoire un ou plusieurs critères (énergétique, économiques, ...) donnés à l'avance, voir figure(2.1).



FIG. 2.1 – Problème du contrôle optimal

Un problème de commande (contrôle) optimale est défini par les éléments suivants [44] :

Objet de la commande

On suppose que l'état x est solution d'une équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}$ est la position de l'objet à l'instant t , $x(t_0) \in \mathbb{R}$ la position initiale du système, et $u(t)$ la commande.

Le but de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet considéré de la position initiale $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in G_0$) à la position $x_1(t_1)$, ($x_1 \in G$), (où G_0 est l'ensemble de départ, et G l'ensemble d'arrivée (accessibilité)). Et aussi d'optimiser le fonctionnement d'un système en fonction d'un critère de coût pertinent, ou de stabiliser un système pour le rendre insensible à certaines perturbations.

Classe des commandes admissibles

La classe des commandes admissibles U est constituée de fonctions mesurables $u(t)$:

$$U = \{u(t), \quad t \in T = [t_0, t_f]\}.$$

Chaque commande transfère l'objet du point de départ x_0 en un point de l'ensemble d'arrivée $G(t_f)$.

Commande Bang-bang

Soit U l'ensemble de commandes et U_e l'ensemble de points extrémaux de U .

La commande admissible u est dite de *Bang-bang* si $u \in U_e$ c'est-à-dire u prend les valeurs extrémales de U , ensemble borné.

Ainsi, par exemple, si on a $|u(t)| \leq 1$, les commandes Bang-bang sont telles que $u(t) = \pm 1$.

Critère de qualité

C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle T , à optimiser.

Ensemble d'accessibilité

Considérons le système contrôlé suivant :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.2)$$

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t_f > 0$ est :

$$\begin{aligned} A(x_0, t_f) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n / & \exists u \in C_{\text{morceaux}}^0([0, t_f], I), \\ & \exists x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad C^1 \text{morceaux t.q. } x(0) = x_0, \\ & \forall t \in [0, t_f] \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_f) = x_1.\} \end{aligned}$$

Autrement dit $A(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.2) au temps t_f , lorsqu'on fait varier le contrôle u .

2.2 Propriétés essentielles du problème de contrôle optimal

2.2.1 Position du problème

Dans la classe des commandes constantes par morceaux

$$U = \{u(t), t \in T = [t_0, t_f]\},$$

considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = c'x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t)dt \longrightarrow \max_{u \in U}, \quad (1) \\ \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2) \\ Hx(t_f) = g, \quad (3) \\ |u(t)| \leq 1; \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (4) \end{array} \right.$$

- $J(u)$ est le critère de qualité (fonction objectif).
- $x(t) = (x_j, j \in J) \in \mathbb{R}^n$, un n -vecteur représentant la position (l'état) du système à l'instant $t \in T$.
- $A(I, J)$ est une $n \times m$ -matrice qui caractérise le système.
- $b(J)$ est un n -vecteur donné.
- $H = H(I, J)$ C'est une $m \times n$ -matrice telle que le rang de $h = m \leq n$.
- g est un m -vecteur qui représente la sortie du signal à l'instant t_f .
- $u(t)$ est une commande.
- $C = c(J)$ est le n -vecteur des coûts.
- $I = \{1, \dots, m\}$ et $J = \{1, \dots, n\}$ sont des ensembles d'indices.
- x_0 la position initiale.

2.2.2 Commandabilité

Pour certains types de problème, avant leur résolution, on s'intéresse à l'existence de leurs solutions en utilisant les notions de *commandabilité* ou de *contrôlabilité*. Elle consiste à faire passer le système d'un état initial x_0 à un état final x_1 prescrit en un temps fini. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère.

Commandabilité des systèmes linéaires autonome :

Définition 2.1. un système défini par :

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

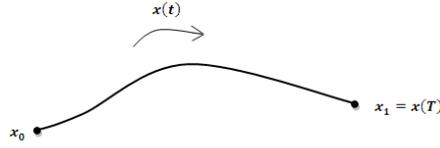


FIG. 2.2 – Problème de contrôlabilité

est dit *non autonome*, et il est dit *autonome* si les matrices $A(t) = A$ et $B(t) = B$ sont constantes,

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Définition 2.2. Le système autonome $\dot{X} = AX + BU$ où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande (on dit aussi l'entrée) $u \in \mathbb{R}^m$ et les matrices A et B sont constantes et de taille $n \times n$ et $n \times m$ respectivement, est *contrôlable* (ou *commandable*) si pour tous les états $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande mesurable, borné $u(t)$ telle que la trajectoire associée relie x_0 et x_1 en un temps fini T .

Le critère de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman, en général, facilement applicable. Soient A et B deux matrices constantes sur $[t_0, t_f]$ et on note

$$C = (A|B) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \in M_{n, nm}(\mathbb{R})$$

la matrice dont les colonnes sont constituées par celles de $B, \dots, A^{n-1}B$.

Théorème 2.1. (Critère de Kalman)[58]

Le système autonome $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est commandable en temps t_f (quelconque) si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman C est de rang $n = \dim(x)$, on écrit :

$$\text{rang}(A|B) = n. \tag{2.3}$$

L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant.

Lemme 2.2. *La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire*

$$\begin{aligned} \Phi : L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)A} B u(t) dt \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve du lemme

– Supposons tout d'abord que $\text{rang} C < n$, et montrons que Φ n'est pas surjective.

L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n / \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\psi C = 0$. Par conséquent :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tels que

$$A^n = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On déduit par récurrence immédiate que pour tout entier k :

$$\psi A^k B = 0$$

et donc, pour tout $t \in [0, t_f]$

$$\psi e^{tA} B = 0.$$

Par conséquent pour tout contrôle u on a :

$$\psi \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)A} B u(t) dt = 0,$$

i.e. $\psi \Phi(u) = 0$, ce qui montre que Φ n'est pas surjective.

– *Réciproquement* : Si Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n / \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)A} B u(t) dt = 0.$$

Ceci implique, pour tout $t \in [0, t_f]$:

$$\psi e^{(t_f-t)A} B = 0.$$

En $t = t_f$ on obtient $\psi B = 0$. Ensuite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = t_f$, on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi par dérivations successives on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0,$$

donc $\psi C = 0$, et donc $\text{rang} C < n$.

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème.

Preuve. Si la matrice C est $\text{rang} n$, alors d'après le lemme précédent l'application Φ est surjective, i.e. $\Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or pour tout contrôle u , l'extrémité au temps t_f de la trajectoire associée à u est :

$$x(t_f) = e^{t_f A} x_0 + \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)A} (Bu(t) + r(t)) dt$$

donc l'ensemble accessible en temps t_f depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\text{Acc}(t_f, x_0) = e^{t_f A} x_0 + \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)A} r(t) dt + \Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

et donc le système est contrôlable.

Réciproquement : Si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable en x_0 défini par :

$$x_0 = -e^{t_f A} \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)A} r(t) dt.$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps t_f s'écrit :

$$\text{Acc}(T_f, x_0) = \Phi(L^\infty),$$

et le système étant contrôlable cet ensemble est égal à \mathbb{R}^n , ce qui prouve que Φ est surjective, et donc d'après le lemme, la matrice C est de $\text{rang} n$. \square

Remarque 2.1. Si $\text{rang} B = j$ alors (2.3) peut être remplacée, dans l'énoncé du théorème, par

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-j} B) = n.$$

Remarque 2.2. La condition de Kalman ne dépend ni de t_f ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_f depuis x_0 alors il est contrôlable en tous temps depuis tout point.

Exemple 2.1. Soit le système d'écrit par l'équation :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous sommes dans la situation où $n = 2$ états, $m = 2$ entrées.

Et la matrice de commandabilité associée :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

alors

$$C(A, B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

nous avons $\text{rang}C(A, B) = 2$ donc le système est commandable.

Exemple 2.2. Considérons maintenant ce système :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $n = 2$ états, $m = 1$ entrée.

Et la matrice de commandabilité du système est :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

$$C(A, B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

le système est commandable si et seulement si le $\det C(A, B)$ est non nul, c'est-à-dire $\alpha \neq 3$.

Commandabilité des systèmes non linéaires

Se prononcer sur cette propriété reste jusqu'à présent une tâche très difficile. Pour étudier la commandabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le système linéarisé partant du fait que la commandabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale [48]. La non commandabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non commandabilité du système non linéaire [48]. Ceci constitue l'inconvénient principal de cette méthode.

Considérons un système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Définitions et préliminaires

Etant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, on se propose de trouver un temps T et un contrôle u sur I tel que la trajectoire x_u associée à u , vérifie :

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(t_f) = x_1. \quad (2.5)$$

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 2.3. Soit $t_f > 0$, L' application entrée-sortie en un temps t_f du système de contrôle (2) initialisé à x_0 est l'application :

$$\begin{aligned} E_{x_0, t_f} : L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto x_u(t_f) = x_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t), \\ x_u(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

U est l'ensemble des contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, t_f]$.

Lemme 2.3. *L'application E_{x_0, t_f} est différentiable au sens de Fréchet. Et sa différentielle au sens de Fréchet à l'ordre un est :*

$$E_{x_0, t_f}(u + \delta u)(t) = E_{x_0, t_f}(u) + dE_{x_0, t_f}(u) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|_{L^\infty}). \quad (2.8)$$

Par définition :

$$\begin{aligned} \dot{x}_u(t) &= Ax_u(t) + B(u(t)); \quad x_u(0) = x_0, \\ \dot{x}_{u+\delta u}(t) &= Ax_{u+\delta u}(t) + B(u + \delta u)(t), \quad x_{u+\delta u}(0) = x_0. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= x_{u+\delta u}(t) - x_u(t), \\ \dot{\delta x} &= A\delta x + B(u + \delta u) - B(u), \quad \delta x(0) = 0, \end{aligned}$$

avec

$$B(u + \delta u) = B(u) + dB(u) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|).$$

Ainsi on aura le système dit linéarisé le long de $u(\cdot)$ à l'ordre un suivant :

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + dB(u(t))\delta u(t) \cdot \delta u(t), \\ \delta x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Or à l'ordre un on a :

$$\delta x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} dB(u(s)) \delta u(s) ds \quad (2.10)$$

D'ou le résultat suivant :

$$dE_{x_0, t_f} = \int_0^{t_f} e^{(t_f-s)A} dB(u(s)) \delta u(s) ds = \delta x(t_f) \quad (2.11)$$

Résultats de contrôlabilité

Définition 2.4. L'ensemble accessible en temps t_f pour le système (2.4), noté $A(t_f)$, est l'ensemble des extrémités au temps t_f des solutions du système partant de 0. Autrement dit, c'est l'image de l'application entrée/sortie en temps t_f .

Définition 2.5. Le système (2.4) est dit *contrôlable* (en temps quelconque) depuis x_0 si :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{t_f \geq 0} A(t_f).$$

Par des arguments du type des fonctions implicites, l'étude de la contrôlabilité du système linéarisé (qui est plus simple), permet de déduire des résultats de *contrôlabilité locale* du système de départ, sur ce sujet le lecteur peut consulter [11, 42]. On peut par exemple déduire les propositions suivantes :

Proposition 1. [58] Le système (2.4) est localement contrôlable au voisinage de x_1 si et seulement si E_{x_0, t_f} est localement surjective.

D'après le théorème des fonctions implicites (théorème de la submersion est bien définie dans annexe B) si on est capable de montrer que dE_{x_0, t_f} est surjective alors E_{x_0, t_f} est localement surjective.

Proposition 2. [58] dE_{x_0, t_f} est surjective si et seulement si le système linéarisé (2.9) est contrôlable.

Proposition 3. [58] Considérons le système (2.4) où $f(x_0, u_0) = 0$. On note

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) \quad \text{et} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0).$$

Si

$$\text{rang}(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = n$$

alors le système est *localement contrôlable* en x_0 .

Théorème 2.4. [58] *Le système linéarisé (2.9) est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice :*

$$\int_0^{t_f} e^{-tA} dB(u(t)) dB(u(t))^T e^{-tA^T} dt \tag{2.12}$$

est inversible, A^T est la transposée de la matrice A .

Remarque 2.3. La condition de contrôlabilité dépend de t_f , mais ne dépend pas du point initial x_0 . Autrement dit, si le système considéré est contrôlable depuis x_0 , en temps t_f , alors il est contrôlable depuis tout point.

Contrôles singuliers

Définition 2.6. Soit u un contrôle défini sur $[0, T]$ tel que sa trajectoire associée x_u issue de $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, T]$. On dit que le contrôle u (ou la trajectoire x_u) est *singulier* sur $[0, T]$ si la différentielle de Fréchet $dE_T(u)$ de l'application entrée-sortie au point u n'est pas surjective. Sinon on dit qu'il est *régulier*.

Proposition 4. [58] Si u est un contrôle régulier sur $[0, T]$, alors le système est localement contrôlable le long de la trajectoire associée à ce contrôle.

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 2.5. [58] Soit u un contrôle défini sur $[0, T]$ tel que sa trajectoire associée x_u issue de $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, T]$ et vérifie au temps T

$$x(T) \in \partial \text{Acc}(x_0, T),$$

alors le contrôle u est singulier sur $[0, T]$.

Remarque 2.4. En général, le problème de contrôlabilité globale est difficile. Cependant, il existe des techniques pour montrer, dans certains cas, la contrôlabilité globale. Voir, par exemple, les références suivantes pour plus de détails [11, 34].

2.2.3 Stabilisation

Un *contrôle* (ou une *commande*) *en boucle ouverte* est une application $t \rightarrow u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un *contrôle en boucle fermée*, appelé aussi une *rétroaction*, ou un *bouclage* (ou encore un *feed back*), est une application $u \rightarrow g(t)$ définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier.

Bouclage statique

Définition 2.7. (Bouclage statique) On dit que u est un *bouclage statique* du système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, et $(x(t) \in M, u(\cdot) \in U)$ si sa valeur $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$, c'est-à-dire $u = g(x)$ où g est une fonction.

Ce système s'écrit tout simplement

$$\dot{x} = f(x, g(x)). \quad (2.13)$$

Il est représenté par la figure 2.3.

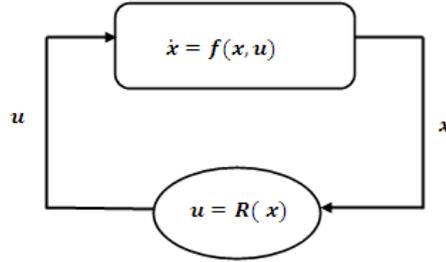


FIG. 2.3 – Bouclage

Le problème de la *stabilisation* (ou *régulation*) consiste à maintenir le système près d'un équilibre x^* . Il s'agit donc de construire une loi de commande telle que x^* soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée (2.13).

Concepts de stabilité

On se donne un système

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (2.14)$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme équilibre (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

Définition 2.8. L'équilibre $x = 0$ du système (2.13) est dit *stable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (2.13), on ait

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \|x(t)\| < \varepsilon.$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est *instable*.

Définition 2.9. L'équilibre $x = 0$ du système (2.14) est dit *attractif* s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (2.14) on ait

$$\|x(t)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

L'équilibre $x = 0$ du système (2.14) est dit *globalement attractif* si pour toute solution $x(t)$ de (2.14) on a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

L'ensemble \mathcal{B} défini par la propriété

$$x(0) \in \mathcal{B} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

s'appelle *le bassin d'attraction* de l'origine. Ainsi $x = 0$ est attractif si \mathcal{B} est un voisinage de 0. Il est globalement attractif si $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$.

Définition 2.10. L'équilibre $x = 0$ du système (2.14) est dit *asymptotiquement stable* s'il est stable et attractif. Il est dit *globalement asymptotiquement stable (GAS)* s'il est stable et globalement attractif.

Définition 2.11. L'équilibre $x = 0$ du système (2.14) est dit *exponentiellement stable* s'il existe $r > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ on ait

$$\|x(t)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

L'équilibre $x = 0$ du système (2.14) est dit *globalement exponentiellement stable* s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (2.14) on a

$$\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On montre que, en général d'après [37], stable *n'implique pas* attractif, attractif *n'implique pas* stable, exponentiellement stable *implique* asymptotiquement stable, et asymptotiquement stable *n'implique pas* exponentiellement stable.

2.2.4 Observabilité

Système commandé-observé

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée *la sortie* ou *la variable observée*, est mesurée. Un système *commandé-observé* est un système différentiel de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.15}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, le vecteur x est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). Ce système est dit *en boucle ouverte* et est représenté par la figure 2.4.

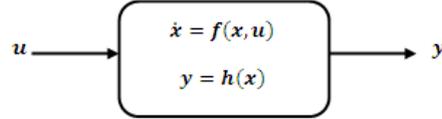


FIG. 2.4 – Système commandé-observé

Un système non linéaire sera dit *observable* si la sortie $y(t)$ permet de retrouver l'état $x(t)$. Pour plus de détails voir [30]. Un observateur pour le système (2.15) est un système

$$\dot{\hat{x}}(t) = g(\hat{x}(t), y(t), u(t))$$

ayant comme entrées $u(t)$ et $y(t)$ (la sortie du système (2.15)) et tel que l'erreur $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tende vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

Définition 2.12. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$.

Le système (2.16) est *observable* en temps T si :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) / y_u(\cdot, x_1) \neq y_u(\cdot, x_2).$$

Dans ce cas on dit que x_1 et x_2 sont *distinguishables*.

Autrement dit, deux états initiaux x_1 et x_2 sont *distinguishables ou discernables* si on peut trouver sur un intervalle de temps $[0, T]$, une entrée telle que les trajectoires de sortie (observées) correspondant aux deux états, lorsque cette entrée est

appliquée, soient différentes. De manière équivalente, on peut dire :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) / y_u(\cdot, x_1) = y_u(\cdot, x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

La connaissance de la trajectoire observée détermine de manière univoque l'état initial.

L'intérêt de la notion d'observabilité est le suivant : si on considère le système comme une boîte noire à laquelle on applique une *entrée*¹ (contrôle) $u(t)$, et de laquelle émerge une *sortie*² (observable) $y(t)$, la propriété d'être distinguable signifie la possibilité de différencier par des expériences de type entrée-sortie. On peut alors se demander si la connaissance partielle de l'état permet de reconstituer l'état complet, c'est la propriété d'observabilité.

Définition 2.13. Le système (2.16) est *globalement observable* s'il ne possède pas de couple d'états.

Définition 2.14. Considérons les systèmes linéaires commandés-observés (systèmes linéaires invariants SLI) définis par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU. \end{cases} \quad (2.17)$$

Un système est dit *observable* si l'observation de ses entrées et sorties pendant un intervalle de temps fini $[t_i, t_f]$ permet de retrouver l'état initial $x(t_i)$. En fait, puisqu'il est possible pour les SLI d'avoir une solution analytique, l'observabilité est donc une propriété intéressante qui nous permet d'affirmer que l'on peut connaître l'état $x(t)$ à tout instant compris dans l'intervalle $[t_i, t_f]$.

Critère d'observabilité de Kalman pour les SLI

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 2.6. [43] *Le système linéaire (2.17) est observable si et seulement si :*

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n.$$

¹En anglais : *input*

²En anglais : *output*

La matrice \mathcal{O} est appelée la matrice d'observabilité de Kalman, et ses lignes se calculent facilement de façon itérative :

$$CA^{k+1} = CA^k \times A.$$

Noter que la paire (A, C) est observable si et seulement s'il existe $T > 0$ tel que la matrice

$$\mathcal{O}_T = \int_0^T e^{sA'} C' C e^{sA} ds$$

soit inversible.

Remarque 2.5. La notion d'observabilité de l'état ne porte que sur les matrices A et C .

Dire que le système est observable équivaut à dire que la paire (A, C) est observable.

Exemple 2.3. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t). \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = 0$$

$n = 3$ états

$p = 2$ sorties

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}, \mathcal{O}(A, C) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -7 \\ 22 & -6 & -1 \\ 8 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

Matrice de rang 3 \Rightarrow Le système est observable.

Exemple 2.4. Considérons maintenant un autre système :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t). \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} D = 0$$

$n = 2$ états

$p = 1$ sortie.

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}, \mathcal{O}(A, C) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha - 2 & -3 \end{pmatrix} \det \mathcal{O}(A, C) = -\alpha - 1$$

Le système est observable si et seulement si le $\det \mathcal{O}(A, C)$ est non nul, c'est-à-dire $\alpha \neq -1$.

2.3 Méthodes de résolution numérique

Les problèmes de contrôle optimal, en général, n'ont pas toujours de solutions analytiques. En conséquence, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour pouvoir les résoudre.

Il existe différentes méthodes pour résoudre les problèmes de commande optimale, chacune avec ses avantages et inconvénients. Le choix de la méthode dépend du problème considéré, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes :

2.3.1 Méthode directe

Les méthodes directes ont pris de l'importance dans le domaine du contrôle optimal numérique depuis les années 80. Il existe deux approches de ces méthodes à savoir :

- i. Discrétisation
- ii. Approche de la programmation linéaire

La première approche basée sur la discrétisation totale ou partielle du problème, et consiste à arriver à la résolution d'un problème linéaire en se basant sur la méthode d'Euler ou de Runge-Kutta, dont la solution est loin de celle du problème de départ, sauf dans le cas où la commande est impulsive (c.à.d $U(t) \equiv U_j, t \in [\tau_j; \tau_{j+1}]$, $\tau_j - \tau_{j+1} \leq h$ et $T = \cup_{j=1}^N [\tau_j; \tau_{j+1}]$).

L'exemple de la deuxième approche plus utilisée en contrôle optimal, est *la méthode adaptée*, inventée par R. Gabasov et F. M. Kirillova durant les années 80. Cette méthode nous permet d'avoir une solution approchées et permet de démarrer l'itération à partir d'un point intérieur, d'ailleurs elle s'appelle *la méthode de point intérieur*.

Les méthodes directes sont très faciles à appliquer, et relativement robustes à l'initialisation. On peut traiter un système avec un grand nombre de variables d'état. Leur précision est limité par la précision de la discrétisation, donc le nombre de variables utilisées, peut s'avérer insuffisantes pour certains problèmes. Les méthodes directes fournissent une trajectoire et une commande en boucle ouverte (u en fonction du temps). Cela rend ces méthodes moins adaptées à certains cas particuliers, comme le problème de système d'équations non linéaires, et pour sortir de cette situation désagréable, nous optons pour une deuxième approche qui fait l'objet des chapitres suivants.

2.3.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le Principe du Maximum de Pontriaguine (PMP) qui donne une condition nécessaire d'optimalité. On cherche ensuite les trajectoires vérifiant ces conditions, et qui numériquement se ramènent à une méthode de tir (exemple tir simple). Le choix de ces méthodes s'explique par leurs avantages, la bonne rapidité de convergence (quand il y a convergence) et leur grande précision dans le traitement des problèmes de contrôle optimal mais lourdement dépendantes du point initial. En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en la résolution d'un système d'équations non linéaires.

Chapitre 3

Principe du maximum

3.1 Introduction

Il existe deux grandes classes de méthodes de résolution de problèmes de commande optimale :

- le principe du maximum de Pontriaguine.
- La programmation dynamique de Bellman.

Ces deux méthodes sont des extensions des méthodes variationnelles classiques.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au principe du maximum énoncé par Pontriaguine en 1956 [50], qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations, et développé par la suite par ses élèves et collaborateurs (Pontryaguine et al., 1961).

Il est important de noter que cette condition a une forme qui diffère essentiellement de celle des équations d'Euler-Lagrange. La résolution du problème de commande optimale nécessite la résolution préalable d'un problème du maximum auxiliaire (d'où le terme principe du maximum).

Avant d'entamer l'étude de ce principe, on donnera quelques notions et rappels qui seront utiles.

3.2 Position du problème

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{3.1}$$

et la fonctionnelle à optimiser :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x, u) dt \rightarrow \min_u, \quad (3.2)$$

$x \in \mathbb{R}$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $t \in [t_0, t_f]$ où

$U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$: ensemble des commandes admissibles bornées et continues par morceaux sur $[t_0, t_f]$,

$f^0(x, u, t)$: fonction de coût définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f]$, continue sur $\mathbb{R}^n \times \overline{\Omega} \times [t_0, t_f]$

où $\overline{\Omega}$: la fermeture de Ω ,

$\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x, u)$: la dérivée de f^0 par rapport à x , continue sur $\mathbb{R}^n \times \overline{\Omega} \times [t_0, t_f]$,

$\frac{\partial f^0}{\partial t}(t, x, u)$: la dérivée de f^0 par rapport à t , continue sur $\mathbb{R}^n \times \overline{\Omega} \times [t_0, t_f]$,

$f(x, u, t)$, continue sur $\mathbb{R}^n \times \overline{\Omega} \times [t_0, t_f]$,

x_0 : l'état du système 3.1 à l'instant t_0 (état initial),

x_1 : l'état du système 3.1 à l'instant t_f (état terminal ou final),

Le problème consiste à transférer le point représentatif de l'état x_0 à l'état x_1 tout en minimisant la fonctionnelle J .

Définition 3.1. [51] Soit S un sous ensemble de $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$, on suppose que :

$(x_1, t_f) \in S$.

S est appelé "ensemble d'arrivée" ou "cible".

S peut prendre les formes suivantes :

a) $S = \{x_1\} \times \mathbf{T}$: x_1 est fixé dans \mathbb{R}^n et $\mathbf{T} \subset [t_0, t_f]$.

b) $S = \mathbb{R}^n \times \mathbf{T}$ c'est-à-dire, x_1 est libre dans \mathbb{R}^n .

c) $S = S_1 \times \mathbf{T}$ où S_1 : variété de dimension k , $1 \leq k \leq n - 1$ dans \mathbb{R}^n .

d) $S = \{(t, g(t)), t \in [t_0, t_f]\}$ où $g(t)$: une fonction définie sur $[t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$, continue et différentiable.

Dans ce cas $x_1 \in S$ veut dire mobile.

e) S : variété de dimension $(k + 1)$, $1 \leq k \leq n - 1$ dans $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$, continue et différentiable en t telle qu'il existe $(n - k)$ fonctions : $g_1(x, t), \dots, g_{n-k}(x, t)$ définies sur $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$ vérifiant :

i. $S = \{(x, t) / g_1(x, t) = g_2(x, t) = \dots = g_{n-k}(x, t) = 0\}$.

- ii. Les fonctions $g_i(x, t)$, $\frac{\partial g_i}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial g_i}{\partial t}(x, t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$, $i = 1, \dots, n - k$.
- iii. Les vecteurs $\frac{\partial g_i}{\partial x}(x, t)$, $i = \overline{1, n - k}$ sont linéairement indépendants en chaque point de S .

Définition 3.2. [51] On peut rassembler les équations (3.1)-(3.2) en utilisant la fonction $H(t, x, p, p^0, u)$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Omega}$ dans \mathbb{R} tel que :

$$H(t, x, p, p^0, u) = p^0 f^0(t, x, u) + \langle p, f(t, x, u) \rangle.$$

$H(t, x, p, p^0, u)$ est appelée "fonction hamiltonienne".

Les fonctions $H(t, x, p, p^0, u)$ et $\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p, p^0, u)$ sont continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Omega}$.

Définition 3.3. [51] La fonction p découle de la résolution du système d'équations aux variables auxiliaires p_0, p_1, \dots, p_n suivant :

$$\dot{p} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(t, x, u) p_\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Le système (3.3) appelé *état adjoint* ou *vecteur adjoint*, est linéaire et homogène.

Quelque soient les conditions initiales correspondantes aux fonctions p_i , (3.3) admet une solution unique $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ [d'après le Théorème d'existence et d'unicité]. Cette solution est définie sur $t_0 \leq t \leq t_f$, tout entier sur lequel est définie la commande $u(t)$.

$p_i(t)$: sont continues et admettent des dérivées continues sauf en un nombre fini de points (précisément les points de discontinuité de la commande $u(t)$).

Définition 3.4. Le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x, p, u) = f(t, x, u) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, p, u) = -p^0 \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x, p, u) - p \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, p, u) \right), \end{cases}$$

est dit *système hamiltonien*.

Pour étudier le principe du maximum de Pontriaguine, on revient à la fonction hamiltonienne :

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle = \sum_{\alpha=0}^n p_\alpha f^\alpha(t, x, u). \quad (3.4)$$

et aux systèmes

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Si l'on prend arbitrairement une commande admissible (continue par morceaux) $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, et la condition initiale $x(t_0) = x_0$, nous pouvons ainsi trouver la trajectoire $x(t)$ correspondante à $u(t)$ satisfaisant au système (3.5) et ensuite, nous trouvons les solutions $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ correspondant aux fonctions $u(t)$ et $x(t)$ satisfaisant au système (3.4).

Pour des valeurs fixes de p et x , H sera une fonction de $u \in U$.

Soit alors :

$$M(t, x, p) = \max_{u \in U} H(t, x, p, u)$$

si la fonction H atteint son maximum en un point $u \in U$ alors : $M(t, x, p)$ représente le maximum de la fonction H pour p et x fixes.

3.3 Principe du maximum de Pontriaguine

La résolution du problème de commande optimale nécessite la résolution préalable d'un problème du maximum auxiliaire (d'où le terme principe du maximum).

On considère toujours le problème [(3.1)-(3.2)]. L'hamiltonien de ce problème [Pontriaguine et al. 1961] est donné par la formule (3.4).

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire d'optimalité, c'est le *principe du maximum de Pontriaguine*.

Théorème 3.1. (Pontriaguine et al)[50] Soit $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, une commande admissible du problème [(3.1)-(3.2)], et $x(t)$ la trajectoire correspondante à $u(t)$ et telle que $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_1$.

Pour que la commande $u(t)$ et la trajectoire $x(t)$ soient optimales, il est nécessaire qu'existe un vecteur fonction $p(t) = (p_0(t), \dots, p_n(t))$ solution de [(3.5)-(3.4)], continue et identiquement non nul appelé vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ soit non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, t_f]$,

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

satisfaisant aux conditions du principe du maximum

$$\max_u H(t, x(t), p(t), p^0(t), u) = H(t, x^*(t), p(t), p^0(t), u^*(t)),$$

correspondant aux fonctions $u(t)$ et $x(t)$ tel que :

- i. $\forall t, t_0 \leq t \leq t_f$, la fonction $H(t, x(t), p(t), u)$ de la variable $u \in U$ atteint son maximum, c'est-à-dire :

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), u) = M(t_f, x(t_f), p(t_f)). \quad (3.7)$$

- ii. A l'instant final t_f soient vérifiées les relations :

$$p_0(t_f) \leq 0$$

$$M(t_f, x(t_f), p(t_f)) = 0.$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir [58].

Remarque 3.1. Si les conditions du théorème sont satisfaites par une seule trajectoire joignant x_0 à x_1 , il est clair que la trajectoire optimale doit exister, on peut espérer que la trajectoire trouvée est précisément optimale.

3.4 Problèmes autonomes

3.4.1 Problème autonome aux extrémités fixes

Position du problème

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t))dt \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_1, \end{cases} \quad (3.8)$$

où x_0, x_1 sont fixés.

Ce problème est dit *autonome* car il ne dépend pas explicitement du temps.

Théorème 3.2. Soit $u^*(t)$ une commande admissible transférant (x_0, t_0) à $S = \{x_1\} \times [t_0, t_f]$ et $x^*(t)$ la trajectoire correspondante à $u^*(t)$, ($x^*(t_f) = x_1$). Pour que $u^*(t)$ et $x^*(t)$ soient optimales, il est nécessaire qu'il existe un vecteur fonction $p(t)$ non nul et continu tel que :

1) $p(t)$ et $x^*(t)$ soient solutions du système hamiltonien :

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), p(t), u^*(t)) \quad (3.9)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), p(t), u^*(t)) \quad (3.10)$$

et satisfaisant aux conditions aux limites : $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(t_f) = x_1$.

2) La fonction hamiltonienne atteint son maximum au point $u = u^*(t)$, c'est-à-dire :

$$\max_{u \in U} H(t, x^*(t), p(t), u) = H(t, x^*(t), p(t), u^*(t)), \quad (3.11)$$

ou encore :

$$H(t, x^*(t), p(t), u) \leq H(t, x^*(t), p(t), u^*(t)), \quad \forall u \in \Omega.$$

3)

$$H(t, x^*(t), p(t), u^*(t)) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

3.4.2 Problème autonome aux extrémités libres et condition de transversalité

- Quelques généralités et définitions fondamentales

On a besoin de certaines notions géométriques pour formuler et résoudre des problèmes de commande optimale.

Définition 3.5. Soit $f(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction scalaire réelle, définie sur un certain domaine G d'un espace X .

Si la fonction f admet dans G des dérivées partielles premières par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n alors le vecteur

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

est appelé "le vecteur gradient" de f noté $\text{grad } f(x)$.

Définition 3.6. On appelle *hypersurface* de X , l'ensemble S de points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ satisfaisant la relation :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (3.12)$$

Si $x \in S$ tel que :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\text{grad}f(x) = 0$$

alors x est appelé *point singulier* de l'hypersurface S . x est dit non singulier dans le cas contraire, c'est-à-dire :

$$\text{grad}f(x) \neq 0.$$

Définition 3.7. Si l'hypersurface S ne contient pas de points singuliers et si f est continûment dérivable alors S est appelée "*hypersurface continûment différentiable*".

Pour $n = 2$: ($f(x_1, x_2) = 0$), dans ce cas on a : une ligne continûment différentiable dans le plan engendrée par x_1 et x_2 .

Pour $n = 3$: ($f(x_1, x_2, x_3) = 0$), dans ce cas on a : une surface continûment différentiable dans l'espace engendrée par x_1, x_2 et x_3 .

Définition 3.8. Si l'équation (3.12) est linéaire c'est-à-dire, elle est sous la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$$

alors l'*hypersurface* définie par cette relation est appelée "*hyperplan*".

Pour $n = 2$: l'hyperplan est une droite.

Pour $n = 3$: l'hyperplan est un plan.

Définition 3.9. Soit $x_0 \in S$ où S est une hypersurface définie par (3.12). On appelle "*vecteur normal*" à l'hypersurface S en x_0 le vecteur $\text{grad}f(x)$.

Dans le cas d'un hyperplan, il existe un seul vecteur normal (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Définition 3.10. Soit S une hypersurface continûment différentiable et $x_0 \in S$. L'hyperplan passant par x_0 et admettant pour normal le vecteur $\text{grad}f(x_0)$ est appelé "*hyperplan tangent*" à l'hypersurface S en x_0 .

Définition 3.11. Soit $x_0 \in S$. Un vecteur d'origine x_0 est tangent à S si et seulement s'il est orthogonal au vecteur $\text{grad}f(x_0)$.

Définition 3.12. Soient S_1, S_2, \dots, S_k des hypersurfaces continûment différentiables définies par les équations :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

L'intersection M de S_1, S_2, \dots, S_k est appelée *variété* continûment différentiable de dimension $(n - k)$ dans X si : $\forall x \in M, \text{grad}f_1(x), \dots, \text{grad}f_k(x)$ sont linéairement indépendants.

Ainsi par définition, une variété de dimension $(n - 1)$ est donnée par une seule équation, par conséquent, elle coïncide avec l'hyperplan définie par cette équation.

Définition 3.13. Soit M une variété continûment différentiable de dimension $(n - k)$ et $x \in M$, L_i l'hyperplan tangent en x , ($i = 1, 2, \dots, k$), à l'hypersurface

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

alors : $\bigcap_{i=1}^k L_i$ est un plan de dimension $(n - k)$ appelé "plan tangent" en x à la variété M .

- **Conditions de transversalité**

Position du problème.

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow \min, \quad (3.13)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x, u), \quad (3.14)$$

$$x(t_0) = x_0 \in S_0, \quad (3.15)$$

$$x(t_1) = x_f \in S_1, \quad (3.16)$$

où S_0, S_1 sont des variétés continûment différentiables de dimensions r_0, r_1 respectivement.

Le problème consiste à trouver la commande admissible $u(t)$ transférant $x_0 \in S_0$ à la position $x_1 \in S_1$ et qui minimise la fonctionnelle J . On appelle un tel problème,

le problème optimal aux extrémités libres, les conditions du principe du maximum restent valables pour des problèmes optimaux aux extrémités libres, mais il faut ajouter d'autres relations qui permettraient de déterminer la position des points x_0 et x_1 sur les variétés S_0 et S_1 , ces relations sont appelées : "conditions de transversalité", elles nous donnent $r_0 + r_1$ relations dans lesquelles figurent les coordonnées des points extrémaux x_0 et x_1 .

Formulons maintenant ces conditions :

Soient $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$, T_0 et T_1 des plans tangents aux variétés S_0 et S_1 en ces points tels que : $\dim T_0 = r_0$, $\dim T_1 = r_1$ et soit $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_f$ une solution optimale du problème aux extrémités fixes x_0 et x_1 , il existe alors, une fonction $p(t)$ satisfaisant le Principe du Maximum de Pontriaguine.

On dit que $p(t)$ satisfait à la condition de transversalité à l'extrémité droite (c'est-à-dire à $x_1 = x(t_f)$) si :

$$p(t_f) = (p_1(t_f), p_2(t_f), \dots, p_n(t_f)) \perp T_1.$$

En d'autre terme la condition de transversalité signifie que $\forall \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ appartenant (ou parallèle) à T_1 alors :

$$\langle p(t_f), \theta \rangle = 0.$$

Remarque 3.2. On a la même condition de transversalité à l'extrémité gauche, il suffit seulement de remplacer t_f et T_1 par t_0 et T_0 .

Remarque 3.3. Si $S_1 = \mathbb{R}^n$, la condition de transversalité $p(t_f) \perp T_1$ implique que

$$p(t_f) = 0.$$

Théorème 3.3. [50]

On considère le problème [(3.14)-(3.16)].

Soit $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, une commande admissible transférant le point $x_0 \in S_0$ à $x_1 \in S_1$ et $x(t)$ la trajectoire correspondante.

Pour que la commande $u(t)$ et la trajectoire $x(t)$ soient solutions optimaux du problème de contrôle optimal aux extrémités libres, il est nécessaire qu'existe un vecteur fonction $p(t)$ continu et non nul satisfaisant aux conditions du principe du maximum et à la condition de transversalité aux deux extrémités de la trajectoire $x(t)$.

Définition 3.14. (*Extrémale*) On appelle *extrémale* du problème de contrôle optimal un triplet $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$ solution des équations (3.9), (3.10) et (3.11).

3.5 Problème en temps minimum

Une application typique du principe du maximum est la commande en temps minimum c'est à dire, il s'agit d'atteindre l'objectif ou bien d'arriver à la position x_1 à partir de la position x_0 en un temps minimum.

Le problème consiste à trouver une commande transférant le point x_0 à x_1 en un temps minimum et la fonctionnelle à minimiser est sous la forme suivante :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt.$$

Autrement dit :

$$f^0(x, u, t) \equiv 1$$

et le temps final t_f est libre.

3.5.1 Formulation du problème :

La classe des problèmes d'optimisation dans laquelle on cherche à minimiser le temps de transition d'un état initial x_0 à un état final x_1 est appelée *classe des problèmes en temps minimum*.

On formulera un problème du contrôle en temps optimal (en temps minimum) en essayant de trouver :

- 1) Le premier instant d'atteindre l'état terminal x_1 .
- 2) La commande qui accomplira cette tâche.

Position du problème

On considère le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

avec une contrainte supplémentaire : $y(t) = h(x(t))$, où : $x(t)$ est un n – vecteur et $u(t)$ est m – vecteur telque $0 < m \leq r \leq n$, et f : n – vecteur fonction de classe C^1 , h : m – vecteur fonction.

On suppose que les composantes : $u_1(t), \dots, u_r(t)$ de $u(t)$ satisfont l'inégalité :

$$|u_j(t)| \leq m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (3.17)$$

Soit $z(t)$ un vecteur à m composantes dit *vecteur de sortie*, et $e(t) = y(t) - z(t)$ le vecteur erreur.

Le problème consiste à trouver une commande telle que :

- La contrainte (3.17) sera satisfaite.
- Cette commande conduit le système de telle sorte à avoir en temps T

$$e(t_f) \in E$$

où $E \subset \mathbb{R}^m$ et

$$E = \{e(t) = y(t) - z(t) \text{ telque } e(t) \text{ soit plus petit que possible}\}.$$

3) Minimiser la quantité $t_f - t_0$.

Application du principe du maximum

On considère le système dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \rightarrow \min \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ |u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, \dots, r \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \in S \\ S \text{ mobile.} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

f est une fonction continue par rapport à ses arguments.

$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u), \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, u)$ sont aussi continues et $u(t) \in \Omega, |u_j(t)| \leq 1, j = 1, \dots, r, \forall t$.

L'ensemble d'arrivée S est mobile et est défini par la relation suivante :

$$g(t, x) = 0$$

g : un $n - \beta$ vecteur fonction, $\beta \geq 1$.

Où : $g_\alpha(t, x), \frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(t, x), \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}(t, x)$ sont continues en x et t .

Les vecteurs gradients $\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(t, x)$ sont linéairement indépendants pour tout $(t, x) \in S$.

Notre but est de déterminer la commande $u(t)$ telle que :

- i. Satisfait la contrainte $|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, \dots, r$.
- ii. Transfère l'état $x(t_0)$ à l'ensemble S .
- iii. Minimise la fonctionnelle $J(u)$.

Pour que $u^*(t)$ et $x^*(t)$ soient solutions optimales du problème (3.18), il est nécessaire qu'existe un vecteur fonction P non nul et continu satisfaisant :

- 1) $\max_{|u| \leq 1} H(t, x^*, p, u) = H(t, x^*, p, u^*)$.
- 2) $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*, p, u^*)$ et $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, p, u^*)$
- 3) $H(t_f^*, x^*(t_f^*), p(t_f^*), u^*(t_f^*)) = \langle e, \frac{\partial g_\alpha}{\partial t_f^*}(t_f^*, x^*(t_f^*)) \rangle$,
 où $e : n - \beta$ vecteur de composantes $e_1, e_2, \dots, e_{n-\beta}$.
 Si S est indépendant du temps, on aura :

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t_f^*}(t_f^*, x^*(t_f^*)) = 0.$$

et donc :

$$H(t_f^*, x^*(t_f^*), p(t_f^*), u^*(t_f^*)) = 0.$$

- 4) Condition de transversalité : $p(t_f^*) \perp S$ en $t = t_f^*$.
 L'ensemble S en $t = t_f^*$ est défini par $n - \beta$ équations :

$$g_1(t_f^*, x) = 0, \quad g_2(t_f^*, x) = 0, \dots, g_{n-\beta}(t_f^*, x) = 0.$$

Soit

$$h_\alpha(t_f^*, x) = \frac{\partial g_\alpha}{\partial x}(t_f^*, x), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - \beta$$

donc, il est nécessaire qu'on ait :

$$p(t_f^*) = \sum_{\alpha=1}^{n-\beta} k_\alpha h_\alpha(t_f^*, x^*(t_f^*))$$

où k_α sont des constantes arbitraires.

Ici la fonction hamiltonienne H est définie par :

$$H(t, x, p, u) = -1 + \langle p(t), \dot{x}(t) \rangle.$$

Nous proposons dans le cinquième chapitre, un exemple d'application de ce type de problèmes.

3.6 Exemple d'application de PMP

Problème de contrôle de production et consommation :

Supposons que nous disposons d'une usine pour laquelle nous pouvons contrôler la production. Commençons par construire le modèle mathématique en posant

$$x(t) = \text{quantité produite à l'instant } t.$$

Supposons que nous consommons une fraction de notre production à chaque instant t , de même nous réinvestissons la fraction restante. Notons par

$$u(t) = \text{fraction de la production restante à l'instant } t.$$

$u(t)$ sera notre contrôle que nous allons en outre soumettre à la contrainte suivante :

$$0 \leq u(t) \leq 1 \text{ à chaque instant } t.$$

La production de notre usine est régie par le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ku(t)x(t) \\ x(t_0) = x^0 = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

où k est une constante qui représente le taux de croissance de notre réinvestissement. Prenons comme fonction de coût la fonction suivante :

$$P[u(\cdot)] = \int_0^T (1 - u(t))x(t)dt$$

qui signifie que nous cherchons à maximiser la consommation totale de la quantité produite. Notre consommation à un instant donné t est $(1 - u(t))x(t)$.

Nous allons maintenant chercher à caractériser un contrôle optimal de notre problème. Et pour cela nous appliquons le principe du maximum de Pontryaguine. Nous avons $n = m = 1$:

$$f(x(t), u(t)) = x(t)u(t), \quad g \equiv 0, \quad r(x, u) = (1 - u)x.$$

Calcul du Hamiltonien

Le Hamiltonien du système précédent s'écrit :

$$\begin{aligned} H(x(t), p(t), u(t)) &= f(x(t), u(t))p(t) + r(x(t), u(t)) \\ &= p(t)x(t)u(t) + (1 - u(t))x(t) \\ &= x(t) + u(t)x(t)(p(t) - 1). \end{aligned}$$

Et l'équation dynamique du système est :

$$\dot{x}(t) = H_p = \frac{\partial H}{\partial p} = u^*(t)x(t), \quad (3.20)$$

et l'équation adjointe (ou le vecteur adjoint) :

$$\dot{p}(t) = -H_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 - u^*(t)(p(t) - 1). \quad (3.21)$$

3.6.1 Conditions de transversalité

La condition finale peut s'exprimer de la manière suivante :

$$p(T) = g_x(x(T)) = 0. \quad (3.22)$$

Enfin, le maximum de l'Hamiltonien :

$$H(x(t), p(t), u^*(t)) = \max_{0 \leq u \leq 1} \{x(t) + u(t)x(t)(p(t) - 1)\}. \quad (3.23)$$

Utilisation du principe du maximum

Nous déduisons les informations utiles à partir des équations du système ainsi que les équations (3.20), (3.21), (3.23), et (3.22).

A partir de (3.23), à tout instant t , la valeur $u^*(t)$ doit être choisie de manière à maximiser $u(p(t) - 1)$ pour $0 \leq u \leq 1$. Comme $x(t) > 0$, alors la solution extrême est égale :

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(t) > 1 \\ 0 & \text{si } p(t) \leq 1. \end{cases}$$

Ainsi, il reste à connaître $p(\cdot)$ pour déterminer le contrôle optimale $u^*(\cdot)$.

Nous allons devoir résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -1 - u^*(t)(p(t) - 1), & t \in [0, T] \\ p(T) = 0. \end{cases}$$

Puisque $p(T) = 0$, on déduit, par continuité, que $p(t) \leq 1$ pour tout t assez proche de T , $t < T$. Ainsi $u(t) = 0$ pour ces valeurs de $t \in V(T)$.

Donc $\dot{p}(t) = -1$, et par conséquent $p(t) = T - t$ pour les instants t qui se trouvent dans cet intervalle. Nous avons donc $p(t) = T - t$ pour les instants vérifiant $p(t) \leq 1$, et ceci se produit pour $T - 1 \leq t \leq T$.

Mais pour les instants $t \leq T - 1$, avec t proche de $T - 1$, on a $u(t) = 1$, et d'après (3.21) on aura :

$$\dot{p}(t) = -1 - (p(t) - 1) = -p(t).$$

Du moment que $p(T - 1) = 1$, on a $p(t) = e^{T-1-t} > 1$ pour tout les instants ($0 \leq t \leq T - 1$). En particulier, il n'existe pas des points de commutation au-dessus de cet intervalle.

Par conséquent, on déduit que le contrôle optimal est :

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq t^*, \\ 0 & \text{si } t^* \leq t \leq T, \end{cases}$$

pour un temps de commutation optimal $t^* = T - 1$.

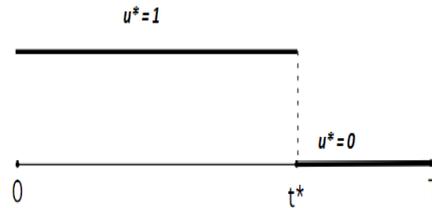


FIG. 3.1 – Contrôle de Bang-bang

Conclusion 1. Le principe du maximum de Pontriaguine donne des conditions nécessaires d'optimalité qui permettent de calculer les trajectoires optimales, et aussi son application peut être en pratique assez complexe. Pour trouver les solutions qui satisfont ces conditions (chercher des fonctions $p(t)$), on fait appel à la méthode de tir.

Chapitre 4

Méthode de tir

4.1 Introduction

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduisent le problème à un problème d'optimisation linéaire ou non linéaire (programmation non linéaire¹).

Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une *méthode de tir*², un problème aux valeurs limites obtenu par application du Principe du Maximum de Pontriaguine.

Le problème de contrôle optimal est analysé par la méthode indirecte ou utilise les conditions nécessaires du principe du maximum pour sélectionner les trajectoires optimales parmi une famille de trajectoire extrémales, solution d'un système Hamiltonien. Dans cette partie, nous nous intéressons à la définition et l'application de la méthode de tir au contrôle optimal. Le lecteur est renvoyé à [58, 45].

4.2 Méthodes de tir

On distingue deux types de méthodes de tir : méthode de tir simple et méthode de tir multiple.

¹En anglais : nonlinear programming

²En anglais : *shooting method*

4.2.1 Méthode de tir simple

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} \min J(x, u) &= g(x) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x, u) dt \\ \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0, & x(t_f) = x_1 \\ p(0) = p_0, & p(t_f) = p_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

et supposons dans un premier temps que le temps final est fixé.

Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale.

Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme $\dot{z} = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, finales et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme :

$$R(z(0), z(t_f)) = R(x_0, p_0, x_1, p_1) = 0.$$

Finalement, on obtient le *problème aux valeurs limites* suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)) \\ R(z(0), z(t_f)) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\dot{z} = F(t, z(t)), \quad z(0) = z_0.$$

La *fonction de tir* est définie par :

$$G(t_f, z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0)).$$

Le problème (4.2) aux valeurs limites est alors équivalent à la résolution du système suivant :

$$G(t_f, z_0) = 0,$$

il s'agit de *déterminer un zéro de la fonction G*. Ceci peut se résoudre par la méthode de Newton.

Remarque 4.1. Si la condition de maximisation (PMP) permet de déterminer localement le contrôle comme une fonction $u(x, p)$ lisse, alors la fonction de tir G est lisse, ce qui assure la validité de la méthode. De plus, pour appliquer la méthode de Newton il faut que G soit localement une immersion, ce qui est lié à l'existence de temps conjugués. la théorie des points conjugués (voir l'annexe D) permet d'établir qu'une extrémal est localement optimale avant son premier temps conjugué. L'optimalité globale est beaucoup plus difficile à établir en général.

4.2.2 Méthode de tir multiple

Par rapport à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple découpe l'intervalle $[t_0, t_f]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et se donne comme inconnues les valeurs $z(t_i)$ au début de chaque sous-intervalles. Il faut prendre en compte des conditions de recollement en chaque temps t_i (conditions de continuité). L'intérêt est d'améliorer la stabilité de la méthode. Une référence classique pour l'algorithme de tir multiple est [57] (voir aussi [13, 58]). De manière plus précise, l'application du principe du maximum réduit le problème de contrôle optimal à un *problème aux valeurs limites* de type :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) & \text{si } t_0 \leq t < t_1 \\ F_1(t, z(t)) & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots \\ F_s(t, z(t)) & \text{si } t_s \leq t < t_f. \end{cases} \quad (4.3)$$

où $z = (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ (p est le vecteur adjoint), et $t_1, t_2, \dots, t_s \in [t_0, t_f]$ peuvent être des *temps de commutation*, et dans le cas où le problème inclut des contraintes sur l'état, ce peut être des *temps de contact* avec la frontière. Nous avons de plus des conditions de continuité sur l'état et le vecteur adjoint aux points de commutation (voir à ce sujet [12, 46, 14, 33]). De plus on a des conditions aux limites sur l'état, le vecteur adjoint (conditions de transversalité), et sur le Hamiltonien si le temps final est libre.

Remarque 4.2. A priori le temps final t_f est inconnu. Et dans la méthode de tir multiple le nombre s de commutations doit être fixé, on le détermine lorsque c'est possible par une analyse géométrique du problème.

La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle $[t_0, t_f]$ en N sous-intervalles, la valeur de $z(t)$ au début de chaque sous-intervalle étant inconnue. Plus

précisément, soit $t_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k < t_f$ une subdivision *fixée* de l'intervalle $[t_0, t_f]$. En tout point σ_j la fonction z est *continue*, nous pouvons considérer σ_j comme un point de commutation fixe, en lequel nous avons

$$\begin{cases} z(\sigma_j^+) = z(\sigma_j^-) \\ \sigma_j = \sigma_j^* \text{ fixe.} \end{cases}$$

On définit maintenant les *nœuds*

$$\{\tau_1, \dots, \tau_m\} = \{t_0, t_f\} \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \cup \{t_1, \dots, t_s\}. \quad (4.4)$$

Finalement, nous sommes conduits au *problème aux valeurs limites* suivant :

- $\dot{z}(t) = F(t, z(t)) =$

$$\begin{cases} F_1(t, z(t)) & \text{si} & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ F_2(t, z(t)) & \text{si} & \tau_2 \leq t < \tau_3 \\ \vdots & & \\ F_{m-1}(t, z(t)) & \text{si} & \tau_{m-1} \leq t < \tau_m, \end{cases} \quad (4.5)$$

- $\forall j \in \{2, \dots, m\} \quad r_j(\tau_j, z(\tau_j^-), z(\tau_j^+)) = 0,$
- $r_m(\tau_m, z(\tau_1), (\tau_m)) = 0,$

où $\tau_1 = t_0$ est fixé, $\tau_m = t_f$, et les r_j représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

Remarque 4.3. Nous améliorons la stabilité de la méthode en augmentant le nombre de nœuds. C'est là en effet le principe de la méthode de tir multiple, par opposition à la méthode de tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale évoluent exponentiellement en fonction de $t_f - t_0$. A ce sujet, voir [57, 58].

Bien sûr dans la méthode de tir multiple il y a beaucoup plus d'inconnues que dans la méthode de tir simple.

Posons $z_j^+ = z(\tau_j^+)$, et soit $z(t, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad z(\tau_{j-1}) = z_{j-1}^+.$$

On a

$$z(\tau_j^-) = z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+).$$

Les conditions intérieures et frontières s'écrivent

$$\begin{aligned} \forall j \in \{2, \dots, m_1\} \quad r_j(\tau_j, z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+), z_j^+) &= 0, \\ r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) &= 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Posons maintenant

$$Z = (z_1^+, \tau_1, z_2^+, \tau_2, \dots, z_{m-1}^+, \tau_{m-1})^T \in \mathbb{R}^{(2n+1)(m-1)}$$

(où $z \in \mathbb{R}^{2n}$). Alors les conditions (4.6) sont vérifiées si

$$G(Z) = \begin{pmatrix} r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) \\ r_2(\tau_2, z(\tau_2^-, \tau_1, z_1^+), z_2^+) \\ \vdots \\ r_{m-1}(\tau_{m-1}, z(\tau_{m-1}^-, \tau_{m-1}, z_{m-2}^+), z_{m-1}^+) \end{pmatrix} = 0.$$

On s'est donc ramené à déterminer un zéro de la fonction G , qui est définie sur un espace vectoriel dont la dimension est proportionnelle au nombre de points de commutation et de points de la subdivision. L'équation $G = 0$ peut alors être résolue itérativement par la méthode Newton.

4.2.3 Rappels sur les méthodes de Newton

Il s'agit de résoudre numériquement $G(z) = 0$, où $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction de classe C^1 . L'idée de base est la suivante : Si z_k est proche d'un zéro z de G , alors

$$0 = G(z) = G(z_k) + dG(z_k).(z - z_k) + o(z - z_k).$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence

$$z_{k+1} = z_k - (dG(z_k))^{-1}.G(z_k),$$

un point initial $z_0 \in \mathbb{R}^p$ étant choisi, et on espère que z_k converge vers le zéro z . Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne de G , ce qui doit être évité numériquement. Il s'agit alors, à chaque étape, de résoudre l'équation

$$G(z_k) + dG(z_k).d_k = 0,$$

où d_k est appelée *direction de descente*, et on pose $z_{k+1} = z_k + d_k = 0$.

Sous des hypothèses générales, l'algorithme de Newton converge, et la convergence est quadratique (voir [6, 53, 57]). Il existe de nombreuses variantes de la méthode Newton : méthode de descente, de quasi-Newton, de Newton quadratique, etc.

Cette méthode permet, en général, une détermination très précise d'un zéro (d'une solution). Son inconvénient principal est la petitesse du domaine de convergence. Pour faire converger la méthode, il faut que le point initial z_0 soit suffisamment proche de la solution recherchée z . Ceci suppose donc que pour déterminer le zéro z il faut avoir au préalable une idée approximative de la valeur de z .

Du point de vue du contrôle optimal, cela signifie que, pour appliquer une méthode de tir, il faut avoir une idée *a priori* de la trajectoire optimale cherchée. Ceci peut sembler paradoxal, mais il existe des moyens de se donner une approximation, même grossière de cette trajectoire optimale. Il s'agit là en tout cas d'une caractéristique majeure des méthodes de tir : elles sont très précises mais requièrent une connaissance a priori (plus ou moins grossière) de la trajectoire optimale cherchée.

4.3 Résolution d'un problème aux deux bouts

Cas général

Considérons le problème général de contrôle optimal à instants fixés suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) & \text{Objectif} \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{Dynamique} \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m & \text{Contrôles admissible} \\ \psi_0(t_0, x(t_0)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_0} & \text{Conditions initiales} \\ \psi_f(t_f, x(t_f)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_1} & \text{Conditions finales .} \end{array} \right.$$

4.3.1 Problème aux deux bouts

La condition nécessaire d'optimalité (PMP) nous conduit à un système différentiel à $2n$ équations avec $n_0 + n_1$ paramètres (μ_0 et μ_1) et à $2n + n_0 + n_1$ conditions

initiales et terminales suivant :

$$(P) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ \dot{p}(t) = -f_x^t(t, x(t), u(t))p(t) - l_x(t, x(t), u(t)) \\ u(t) = h(p(t)) \\ h_0(x(t_0)) = 0 \\ h_1(x(t_f)) = 0 \\ p(t_0) = -\frac{\partial \phi}{\partial x_0}(x(t_0), x(t_f), \mu_0, \mu_1) \\ p(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x_f}(x(t_f), x(t_f), \mu_0, \mu_1), \end{cases}$$

où $u(t) = h(p(t))$ est donné par la minimisation de l'Hamiltonien, et la fonction ϕ

$$\phi : (t_0, x_0, t_f, x_f, \mu_0, \mu_1) \mapsto g(t_0, x_0, t_f, x_f) + (\psi_0(t_0, x_0)|\mu_0) + (\psi_0(t_f, x_f)|\mu_1).$$

En posant $y(t)$ le couple état, état adjoint ($y(t) = (x(t), p(t))$) et φ la dynamique du couple état-état adjoint donnée par le système Hamiltonien et en éliminant les paramètres, μ_0 et μ_1 , nous sommes conduits à un problème aux deux bouts TPBVP ³ suivant :

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = \phi(y) = \varphi(t, y(t)) & pp \text{ sur } [t_0, t_f] \\ c_0(t_0, y(t_0)) = 0 & \text{Conditions aux limites en } t_0 \\ c_f(t_f, y(t_f)) = 0 & \text{Conditions aux limites en } t_f. \end{cases}$$

Remarque 4.4. Ces conditions aux limites c_0 et c_f correspondent aux conditions de transversalité mentionnées ci-dessus, qui contiennent les conditions initiales et finales de (P), en plus des conditions sur l'état adjoint p .

Problème à valeur initiale et méthode de tir

Nous allons maintenant définir la méthode de tir pour résoudre ce problème aux deux bouts. Posons $y(\cdot; z)$ la solution du système à valeur initiale IVP ⁴ suivant :

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t)) & pp \text{ sur } [t_0, t_f] \\ y(t_0) = z & \text{Valeur Initiale} . \end{cases}$$

On introduit maintenant une application G appelée *fonction de tir*, qui à la valeur initiale z associe la valeur des conditions aux limites en t_f pour la solution correspondante de (IVP), définie par :

³En anglais : Two Points Boundary Value Problem

⁴En anglais : Initial Value Problem

$$G : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$z \longmapsto G(z) = \begin{pmatrix} R_0(z) \\ R_f(y(t_f; z)) \end{pmatrix}$$

Trouver un zéro de la fonction de tir G est alors équivalent à la résolution de problème ($TPBVP$), et donne ainsi une solution de (P).

Remarque 4.5. L'algorithme de résolution numérique de problème $TPBVP$ sera complètement défini si on se donne :

- i. L'algorithme de résolution de $G(z) = 0$.
- ii. L'algorithme d'intégration d'un système différentiel à valeur initiale pour calculer la fonction de tir G .

Exemple 4.1. On considère le problème simple de contrôle optimal suivant :

$$(P) \begin{cases} \min \int_0^2 u^2(t) dt \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0 \\ x_1(2) = 0.5, \quad x_2(2) = 0. \end{cases}$$

Application du Principe du Maximum

Le Hamiltonien du système est :

$$H = p_0(u^2(t)) + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t).$$

Le Principe du Maximum de Pontriaguine, nous conduit à un système différentiel à deux équations et à une condition initiale et une condition terminale, en d'autre terme à un problème aux deux bouts $TPBVP$ suivant :

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ \dot{p}(t) = 0 \\ u(t) = h(p(t)) \\ x(0) = x_0 = 0 \\ x(2) = x^f = 0.5, \end{cases}$$

où $u(t) = h(p(t))$ est donné par minimisation de l'Hamiltonien :

$$\begin{cases} \min H(t, x(t), u(t), p(t)) = \min(u^2(t) + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)) \\ |u| \leq 1. \end{cases}$$

Nous obtenons immédiatement ici

$$\begin{cases} u(t) = -\frac{p_2(t)}{2} \text{ si } |p_2(t)| \leq 2 \\ u(t) = -\text{sing}(p(t)) \text{ si non.} \end{cases}$$

Détermination de la fonction de tir :

Posons $y(t) = (x(t), p(t))$. Résoudre le problème (TPBVP) est alors équivalent à rechercher un zéro de l'équation $G(z) = 0$ où la fonction G_0 , qui sera appelée *la fonction de tir*, associée à notre problème est définie par :

$$G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \longmapsto G(z) = y(2; 0, z) - x(2)$$

avec $y(., 0, z)$ est la solution du système à valeur initial suivant :

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = u(t) \\ \dot{y}_3(t) = 0 \\ \dot{y}_4(t) = -y_3(t) \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0 \\ y_3(0) = z_1 \in \mathbb{R}, \quad y_4(0) = z_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $y(t, 0, 0, z_1, z_2)$ une solution du système au temps t avec les conditions initiales $(0, 0, z_1, z_2)$.

Pour $t_f = 2$, on doit avoir :

$$y(2, 0, 0, z_1, z_2) = \begin{pmatrix} y_1(2, 0, 0, z_1, z_2) \\ y_2(2, 0, 0, z_1, z_2) \\ y_3(2, 0, 0, z_1, z_2) \\ y_4(2, 0, 0, z_1, z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ qlq \\ qlq \end{pmatrix}.$$

On définit la fonction de tir suivante :

$$G(t_f, y) = \begin{pmatrix} y_1(2, 0, 0, z_1, z_2) - 0.5 \\ y_2(2, 0, 0, z_1, z_2) \end{pmatrix}.$$

Notre but est de chercher les racines de la fonction de tir G .

Remarque 4.6. La fonction de tir G peut être non différentiable à la frontière de la région de contrôle et même aussi peut être non définie en certains points initiaux. En conséquence, des difficultés risquent de survenir lorsqu'on essaye de résoudre $G(z) = 0$ à l'aide d'un algorithme de Newton, en particulier si le point initial n'est pas dans la bonne région. De faite, résoudre directement $G(z) = 0$ depuis un point de départ quelconque n'est pas trivial. Donc la méthode de tir simple peut diverger si le point de départ est situé dans une "mauvaise" région (avec davantage d'itérations toutefois). La question posé : comment faire converger la méthode de tir ? Les différents outils de convergence par exemples : l'application préalable d'une méthode directe (on peut obtenir une approximation de l'état adjoint), étude géométrique et la *démarche homotopique* qui nous permettons obtenir un point initial satisfaisant. On décrit ici le principe général de cette démarche homotopique d'après [45, 58].

4.4 Démarche homotopique

Comme nous venons de le voir, l'application de la méthode de tir est parfois délicate, en raison de la très grande sensibilité au point initial. Ceci est dû au fait qu'elle consiste typiquement à utiliser un algorithme de Newton pour trouver un zéro de la fonction de tir. Pour certains problèmes, cette fonction de tir peut être fortement non linéaire ou peu régulière, d'où un rayon de convergence parfois très faible. C'est en particulier le cas pour les problèmes à structure bang-bang ou présentant des arcs singuliers.

Une voie possible pour contourner cette difficulté est alors d'utilisé une démarche homotopique pour trouver une bonne initialisation de la méthode de tir. A la base, le principe d'une méthode homotopique (ou *continuation*) est de résoudre un problème difficile en partant de la solution connue d'un problème apparenté, mais plus facile. On entend par apparenté l'existence d'une application \mathcal{H} , appelée *homotopie*, qui connecte les deux problèmes, avec des bonnes propriétés.

Définition 4.1. Soient g et f deux applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . On appelle *une homotopie connectant g et f* toute application \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \bar{\Omega} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (z, \lambda) &\mapsto \mathcal{H}(z, \lambda) \end{aligned}$$

avec Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et \mathcal{H} continue, telle que

$$\mathcal{H}(\cdot, 0) = g \text{ et } \mathcal{H}(\cdot, 1) = f.$$

La première chose à faire est donc de trouver une telle application \mathcal{H} pour le problème de contrôle optimal considéré. Pour cela, on choisit d'introduire le paramètre homotopique λ dans l'objectif du problème original. Cette paramétrisation est faite de telle manière que le cas $\lambda = 1$ corresponde au problème non modifié, et que le cas $\lambda = 0$ soit plus régulier et puisse être résolu directement par la méthode de tir simple. On obtient alors une famille de problèmes aux deux bouts $(BVP)_\lambda$ paramétrée par $\lambda \in [0, 1]$, et l'on peut utiliser les fonctions de tirs associées (G_λ) pour la continuation, en définissant l'homotopie

$$\mathcal{H} : (z, \lambda) \mapsto G_\lambda(z).$$

Maintenant, supposons connaître une solution z_0 du problème $(BVP)_0$, c'est-à-dire un zéro de $\mathcal{H}(\cdot, 0)$. Le principe de la méthode de la continuation est de partir de cette solution en $\lambda = 0$ pour atteindre $\lambda = 1$, où l'on a une solution du problème original.

4.4.1 Continuation discrète

La première idée qui vient à l'esprit est tout simplement d'essayer de résoudre une suite de problèmes $(BVP)_{\lambda_k}$, avec une suite (λ_k) allant de 0 à 1. Chaque problème intermédiaire utilise alors la solution précédente comme point initial. Cependant, trouver en pratique une telle suite (λ_k) convenable est souvent problématique, la question du pas suivant λ étant en particulier laissée à l'expérimentateur. C'est pourquoi il est souvent préférable de recourir à une méthode de suivi de chemin.

4.4.2 Continuation différentielle et méthode simpliciale

Contrairement à la continuation discrète, les méthodes de suivi de chemin visent à suivre complètement le chemin de zéros, et peuvent être classifiées en deux grandes familles, les méthodes de continuation différentielle (ou *Predictor-Corrector (PC)*), et les méthodes simpliciales (PL)⁵. Une documentation étendue sur les deux classes peut être trouvée dans les ouvrages de référence [2].

⁵En anglais : *Piecewise Linear*

Les méthodes de continuation différentielle suivent le chemin de zéros en le considérant comme une courbe différentiable. Elles sont généralement rapides, car le pas suivant le paramètre homotopique λ est calculé automatiquement, et le suivi peut parfois ainsi être complété en un très petit nombre de pas.

Exemple 4.2. L'exemple simple de contrôle optimal que nous allons présenter dans cette section est résolu par Martinon (cité dans [45]), qui permet de souligner les difficultés liées à la structure de contrôle et à la convergence de la fonction de tir, et de donner des informations sur l'application de cette démarche.

– *Position du problème :*

On considère le problème simple de contrôle optimal suivant :

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \min \int_0^2 |u(t)| dt \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x(0) = x_0 = (0, 0) \\ x(2) = x_f = (0.5, 0). \end{cases}$$

– *Application du principe du maximum :*

Le Hamiltonien du système précédent est défini par :

$$H : (t, x(t), p(t), u(t)) \mapsto |u(t)| + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

et le contrôle optimal par

$$\begin{cases} u(t) = -\text{sing}(p_2) & \text{si } |p_2(t)| > 1 \\ u(t) = 0 & \text{si } |p_2(t)| < 1 \\ u(t) = -\alpha p_2(t) & \text{si non } \alpha \in [0, 1]. \end{cases}$$

Ainsi le contrôle est discontinu, de type Bang-bang.

Si l'on définit la *fonction de commutation* correspondante ψ par

$$\psi : (t, x(t), p(t)) \mapsto 1 - |p_2(t)|,$$

alors les commutations de la structure bang-bang sont les zéros de ψ .

remarque : le temps de commutation est le temps où la commande $u(t)$ change de signe pour $t \in [0, t_f]$.

Nous avons le problème aux deux bouts (*TPBVP*) suivant :

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \\ x(0) = x_0 = (0, 0) \\ x(2) = x^f = (0.5, 0) \\ p(0) \in \mathbb{R}, \quad p(2) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

– *Application de la méthode de tir :*

La fonction de tir associée à notre problème est définie par :

$$G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G(z) = \hat{x}(2) - x_f = x(2; x^0, z) - (0.5, 0)$$

avec \hat{x} est la solution (correspond à l'intégration) du système à valeur initial suivant :

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \\ x(0) = (0, 0) \\ p(0) = z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

– *Simulation numérique à l'aide de Matlab :*

Si l'on examine les différentes valeurs possibles de l'état adjoint initial $p(0) = z \in \mathbb{R}^2$ (exemple pour les 9 régions suivantes : $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-2, -2)$, $(-1, -2)$ et $(0, -2)$).

Dans ce cas, on constate que G n'est pas différentiable à la frontière de ces régions, et n'est même pas définie en $(0, -1)$ et $(0, 1)$. En conséquence, des difficultés risquent de survenir lorsqu'on essaye de résoudre $G(z) = 0$ à l'aide d'un algorithme de type Newton, en particulier si le point initial n'est pas dans la bonne région. De fait, même sur cet exemple très simple, résoudre directement $G(z) = 0$ depuis un point de départ quelconque n'est pas trivial. On indique ci-dessous les résultats du tir simple à partir d'un point de chacune des 9 régions, la convergence est notée "CV" avec entre parenthèses le nombre d'itérations en cas de succès, et $(-)$ sinon.

| | | |
|--------------------------|--------------------------|------------------------|
| $p(0) = (0, 2) (-)$ | $p(0) = (1, 2) (-)$ | $p(0) = (2, 2) CV(61)$ |
| $p(0) = (-1, 0) CV(30)$ | $p(0) = (0, 0) (-)$ | $p(0) = (1, 0) CV(63)$ |
| $p(0) = (-2, -2) CV(39)$ | $p(0) = (-1, -2) CV(26)$ | $p(0) = (0, -2) (-)$ |

Bien sur, il n'y a ici que peu de régions à explorer, et l'on peut en fait atteindre la convergence depuis un point situé dans une "mauvaise" région (avec davantage d'itérations toutefois), mais ceci dû à la simplicité du problème (P). En fait, le tir simple diverge déjà dans 4 cas sur 9, alors la résolution de problème de cette façon est très difficile.

Alors la démarche de continuation (homotopique) servant à obtenir un point initial faible pour le tir.

– *continuation sur l'objectif :*

On paramètre ici l'objectif par $\lambda \in [0, 1]$:

$$J_\lambda = \int_0^2 \lambda |u| + (1 - \lambda) |u|^2 dt.$$

Ceci donne une famille de problème (P_λ) telle que (P_1) est le problème (P) originel. L'application du PMP à (P_λ) donne la dynamique (inchangée) de l'état et état adjoint

$$\varphi \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \end{cases}$$

ainsi que l'expression du contrôle optimal

$$\lambda < 1$$

$$\begin{array}{ll} \text{si } |p_2(t)| \leq \lambda & \text{alors } u^*(t) = 0 \\ \text{si } |p_2(t)| > 2 - \lambda & \text{alors } u^*(t) = -\text{sign}(p_2(t)) \\ & \text{sinon } u^*(t) = -\text{sign}(p_2(t)) \frac{|p_2(t)| - \lambda}{2(1-\lambda)} \end{array}$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{array}{ll} \text{si } |p_2(t)| < 1 & \text{alors } u^*(t) = 0 \\ & \text{sinon } u^*(t) = -\text{sign}(p_2(t)) \end{array}$$

avec les conditions aux limites sur l'état adjoint p :

- $p(0)$ est libre (donc $z = p(0)$).
- $p(2)$ est libre, car $x(2)$ est fixé.

Si l'on note G_λ la fonction de tir associée à (P_λ) , notre but est maintenant de suivre le chemin de zéros de l'homotopie

$$\mathcal{H} : (z, \lambda) \mapsto G_\lambda(z)$$

de $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = 1$. Pour $\lambda = 0$ le problème (P_0) est bien plus régulier, car le contrôle optimal est continu, au lieu de la structure bang-bang discontinue pour $\lambda = 1$. La fonction de tir correspondante G_0 est ainsi plus lisse. En fait, pour (P_0) le tir simple converge depuis n'importe quelle initialisation.

En fait, pour (p_0) le tir simple converge depuis n'importe laquelle initialisations testées précédemment, et donne $z^* = (-1.5, -1.5)$ solution pour (P_0) .

Et il suffit d'effectuer le suivi de chemin de $\lambda = 0$ à $\lambda = 1$, ce qui est réalisé par l'algorithme simplicial décrit au [45] pour déterminer le chemin de zéros pour le problème (P) .

Après on prend comme point initial la solution z_1 obtenue à la fin du chemin (pour $\lambda = 1$), le tir simple converge immédiatement. Et la solution de (P) est égale à $z^* = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

4.4.3 Mise en œuvre pratique de la méthode de tir

Le calcul de la loi optimale en utilisant le principe du maximum est fondé sur le principe suivant :

Étape 1 : En un point $z = (x(t), p(t))$ de la trajectoire, on calcule le contrôle avec la condition de maximisation. Ce contrôle s'exprime comme un feedback dynamique (fonction en général multi-valuée) $u(t) = \hat{u}(x(t), p(t))$.

Étape 2 : Dans le cas où la condition de maximisation conduit à un contrôle unique $\hat{u}(x, p)$, on définit l'*Hamiltonien* $\hat{H}(x, p) = H(x, p, \hat{u}(x, p))$ qui définit par intégration les trajectoires optimales. On applique une méthode de tir, pour calculer le vecteur adjoint initial $p_0 = p(0) = z$, qui doit donc résoudre une *équation de tir* (non linéaire) $G(z) = 0$. Le problème est bien posé car le nombre d'équations de tir coïncide avec le nombre d'inconnues.

Étape 3 : Si l'on veut converger vers la solution, la résolution de l'équation par la méthode Newton nécessite d'avoir une *bonne approximation du vecteur* $z = p(0)$

initial. Pratiquement, on effectue souvent le calcul en immergeant le problème dans une famille de problèmes à un paramètre λ , c'est la *démarche homotopie* (ou *méthode de continuation*), où l'équation de tir s'écrit $G_\lambda(z) = 0$.

4.4.4 Conclusion

Comme toutes les méthodes numériques, les méthodes indirectes présentent des avantages et des inconvénients :

Les avantages des méthodes indirectes sont :

- L'extrême précision numérique.
- La bonne rapidité de convergence.

Les inconvénients des méthodes indirectes sont les suivants :

- Elles calculent les contrôles optimaux sous forme de boucle ouverte.
- Elles sont basées sur le principe du maximum qui est une condition nécessaire d'optimalité seulement, et donc il faut être capable de vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée.
- Rigidité de la méthode : la structure des commutations doit être connue à l'avance (par exemple par une étude géométrique du problème). De même, il n'est pas facile d'introduire des contraintes sur l'état, car d'une part cela requiert d'appliquer un principe du maximum tenant compte de ces contraintes (qui est beaucoup plus compliqué que le principe du maximum standard), d'autre part la présence de contrainte sur l'état peut rendre compliquée la structure de la trajectoire optimale, notamment la structure de ses commutations.
- Il faut être capable de deviner de bonnes conditions initiales pour l'état et le vecteur adjoint, pour espérer faire converger la méthode de tir. En effet le domaine de convergence de la méthode de Newton peut être assez petit en fonction du problème de contrôle optimal.

Chapitre 5

Exemple d'application

Dans ce chapitre, nous appliquons le principe du maximum et la méthode de tir à un problème de contrôle en temps optimal. On considère une voiture qui se déplace d'un état x_0 à un état x_1 . Notre but est de trouver la meilleure commande (commande optimale) pour ramener la voiture de x_0 à x_1 en temps minimal.

Le problème considéré est régi par l'équation différentielle suivante (équation du mouvement de la voiture) :

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = u,$$

où u est un paramètre de commande réel, $|u| \leq 1$. Il s'agit de minimiser la fonction coût suivante :

$$J(u) = \int_0^{t_f} dt = t_f - 0 = t_f \rightarrow \min.$$

Dans l'espace de phase, on pose $\dot{x} = y$ et $\ddot{x} = \dot{y} = u$ avec x est la position et y la vitesse, en faisant associer la condition initiale et la condition finale, le problème peut s'écrire d'une manière équivalente :

$$(P) \begin{cases} J(u) = \int_0^{t_f} dt \longrightarrow \min_u \\ \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ |u(t)| \leq 1, \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(t_f) = -1. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1 Application du Principe du Maximum

Contrôlabilité :

Comme le système (5.1) est linéaire, alors il s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{X} = AX + BU,$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nous avons $n = 2$ états, $m = 1$ entrée.

Et la matrice de commandabilité du système est :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice C est de rang $2 = n$, d'après le théorème de Kalman, le système (5.1) est contrôlable.

Calcul de l'hamiltonien :

La fonction hamiltonienne de ce problème s'écrit :

$$H = H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = p_x(t)y(t) + p_y(t)u(t) + p^0,$$

où p^0 est une constante négative qui est la variable duale du coût et $p(t) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur adjoint, solution du système :

$$\dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x.$$

On en déduit que $p_x(t) = \text{constante} = \lambda$, et donc $p_y(t) = -\lambda t + \mu$, où λ et μ sont des constantes.

Donc

$$H = \lambda y + (\mu - \lambda t)u.$$

Principe du maximum :

Par ailleurs la condition du maximum (du principe du maximum) :

$$\max_{-1 \leq u \leq 1} H = \lambda y + \max_{-1 \leq u \leq 1} (\mu - \lambda t)u,$$

nous donne

$$u(t) = \text{signe}(\mu - \lambda t). \quad (5.2)$$

Comme la droite $(\mu - \lambda t)$ change au plus une fois de signe sur l'intervalle $t_0 \leq t \leq t_1$ alors, chaque commande optimale $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ est une fonction constante par morceaux, prenant les valeurs ± 1 et admettant au plus deux intervalles de constance. En particulier les contrôles extrémaux ont au plus une commutation.

Inversement, une telle fonction $u(t)$ peut être tirée de la relation (5.2) pour certaines valeurs de constantes λ, μ .

i. $u \equiv +1$: la résolution de système du problème (5.1), donne :

$$\dot{y} = u = +1 \Rightarrow y = t + s_2,$$

et

$$\dot{x} = y = t + s_2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}t^2 + s_2t + s_2 = \frac{1}{2}(t + s_2)^2 + (s_1 - \frac{s_2^2}{2})$$

où s_1, s_2 sont des constantes d'intégration.

De là on obtient x en fonction de y :

$$x = \frac{1}{2}y^2 + s \quad (5.3)$$

où $s = s_1 - \frac{1}{2}s_2^2$ est une constante. Par conséquent la portion de trajectoire de phase pour laquelle $u \equiv +1$ est un arc de parabole (5.3).

De la même manière :

ii. Pour $u \equiv -1$, on obtient les trajectoires suivantes :

$$y = -t + z_2$$

et

$$x = \frac{-1}{2}t^2 + z_2t + z_2 = \frac{-1}{2}(-t + z_2)^2 + (z_1 + \frac{z_2^2}{2})$$

où z_1, z_2 sont des constantes d'intégration.

Alors on obtient x en fonction de y :

$$x = \frac{-1}{2}y^2 + z \quad (5.4)$$

Les points présentatifs parcourent les paraboles (5.3) de bas en haut (car $\dot{y} = +1$) et les paraboles (5.4) de haut en bas (car $\dot{y} = -1$).

- iii. Si la commande $u(t) = +1$ et ensuite $u(t) = -1$, la trajectoire de phase est composée de deux portions de paraboles contigues, la deuxième portion est située sur la parabole (5.4) qui passe par l'origine (car la trajectoire cherchée doit finir à l'origine).
- iv. Si la commande $u(t) = -1$ et ensuite $u(t) = +1$, la trajectoire de phase est remplacée par une trajectoire qui lui est symétrique par rapport au centre.

Remarque 5.1. La solution du problème optimal de cet exemple peut être interprétée de la manière suivante :

Soit $v(x, y) = v(z)$, la fonction définie dans le plan (x, y) comme suit :

$$v(z) = \begin{cases} +1, & \text{au dessous de la ligne AOB et sur l'arc AO} \\ -1, & \text{au dessus de la ligne AOB et sur l'arc BO .} \end{cases}$$

Sur chaque trajectoire optimale, la valeur $u(t)$ (à l'instant t) est égale à $v(x(t))$.
Donc, le système (5.1) devient en remplaçant u par la fonction $v(x)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = v(x, y), \\ |u(t)| \leq 1, \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(t_f) = -1. \end{cases} \quad (5.5)$$

La solution du système (5.5) (avec un état initial $x_0 = (0, 0)$) nous donne la trajectoire de phase optimale qui mène à un état final arbitraire x_1 .

En d'autre terme, le système (5.5) est un système d'équations différentielles (avec un deuxième ordre discontinu) dont la résolution donne les trajectoires optimales.

Décrivons la trajectoire obtenue en prenant $u(t) = 1$ sur $[0, t_1[$, puis $u(t) = -1$ sur $]t_1, T]$. D'après les équations (5.1), on obtient

- si $0 \leq t \leq t_1$, alors $x(t) = \frac{t^2}{2}$ et $y(t) = t$,
- si $t_1 \leq t \leq T$, alors $x(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t_1t - t_1^2$ et $y(t) = -t + 2t_1$.

Les trajectoires obtenues en prenant d'abord $u = -1$, puis $u = 1$, sont les symétriques des précédentes par rapport à l'origine

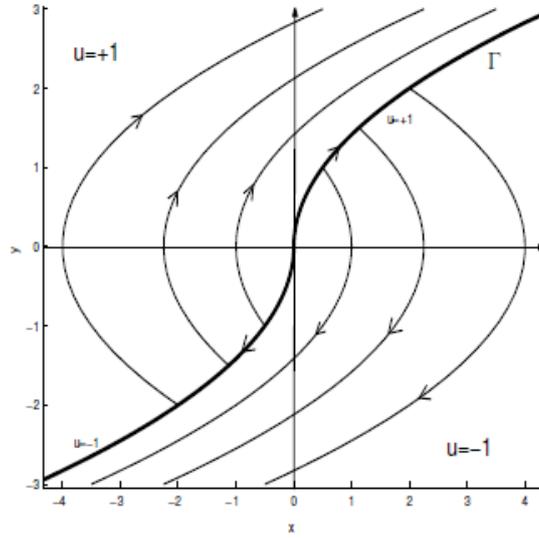


FIG. 5.1 – Synthèse optimale

Il est clair que la courbe Γ définie par

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{y^2}{2} \text{signe}(y)\},$$

est la courbe de commutation. Plus précisément, le contrôle temps minimal est donné par

- Si $x > \frac{y^2}{2} \text{signe}(y)$ ou si $x = \frac{y^2}{2}$, alors $u(x, y) = +1$
- Si $x < \frac{y^2}{2} \text{signe}(y)$ ou si $x = -\frac{y^2}{2}$, alors $u(x, y) = -1$

Calculons la fonction de temps minimal $t_f(x, y)$ pour aller de $(0, 0)$ à (x, y) .

Supposons que le point (x, y) est en dessous de la courbe Γ . Ce point est atteint par la succession d'un arc $u = +1$, puis $u = -1$. On en déduit qu'il existe un unique couple (t_1, t_f) tel que $x(t) = -\frac{t_f^2}{2} + 2t_1 t_f - t_1^2$, et $y = -t_f + 2t_1$.

La résolution de ce système conduit facilement à $t_f = 2\sqrt{x + \frac{1}{2}y^2 - y}$. De même, si

le point (x, y) est au-dessus de la courbe Γ , on calcule $t_f = 2\sqrt{x + \frac{1}{2}y^2 + y}$. Enfin, le long de la courbe Γ , on a clairement $t_f = |y|$, finalement, la fonction temps

minimal est donnée par la formule

$$t_f(x, y) = \begin{cases} 2\sqrt{x + \frac{1}{2}y^2} - y & \text{si } x \geq \frac{y^2}{2} \text{sign}(y) \\ 2\sqrt{x + \frac{1}{2}y^2} + y & \text{si } x < \frac{y^2}{2} \text{sign}(y) \end{cases}$$

5.2 Application de la méthode de tir

La méthode de tir simple permet de trouver la commande optimale et la trajectoire associée là où le principe du maximum seul s'avère impuissant. C'est le cas de notre problème qui est de type Bang-bang.

Dans notre cas on résout le problème optimal en considérant l'état initial x_0 l'origine et en prenant un état final $x_1 = (0, -1)$ de l'espace X . il existe une fonction $z(t) = (x(t), p(t))$ définie dans X et à valeur dans U , et les conditions initiales, finales et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme :

$$h(z(t), p(t_f)) \tag{5.6}$$

définit toutes les trajectoires optimales, et d'après le principe de maximum on a $u(t) = \text{signe}(p_y(t))$

La connaissance de la fonction de tir permet de considérer que ce problème optimal est entièrement résolu mathématiquement.

Nous avons le problème aux deux bouts suivant :

$$(TBVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = u(t) \\ \dot{p}_x(t) = 0 \\ \dot{p}_y(t) = -p_x(t) \\ x(t_0) = 0, \quad y(t_0) = 0 \\ x(t_f) = 0, \quad y(t_f) = -1, \end{cases}$$

En posons $z(t) = (x(t), y(t), p_x(t), p_y(t)) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t))$. Résoudre le problème $(TPBVP)$ est alors équivalent à rechercher un zéro de l'équation $G(z) = 0$ où la fonction G est la fonction de tir associée à notre problème et est définie par :

$$G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ z \longmapsto G(z) = z(t; 0, h)$$

avec $z(t, 0, h)$ est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = u(t) \\ \dot{z}_3(t) = 0 \\ \dot{z}_4(t) = -z_3(t) \\ z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0 \\ z_3(0) = h_1 \in \mathbb{R}, \quad z_4(0) = h_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit $z(t, 0, 0, h_1, h_2)$ une solution du système au temps t avec les conditions initiales et finales $(0, 0, h_1, h_2)$.

Dans cet exemple on a : le temps final est libre c'est t_f , on doit avoir :

$$z(t_f, 0, 0, h_1, h_2) = \begin{pmatrix} z_1(t_f, 0, 0, h_1, h_2) \\ z_2(t_f, 0, 0, h_1, h_2) \\ z_3(t_f, 0, 0, h_1, h_2) \\ z_4(t_f, 0, 0, h_1, h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ qlq \\ qlq \end{pmatrix}.$$

On définit la fonction de tir suivante :

$$G(z) = \begin{pmatrix} z_1(t_f) \\ z_2(t_f) + 1 \\ H(t_f) = 0 \end{pmatrix},$$

qu'est égale à :

$$G(z) = \begin{pmatrix} z_1(t_f, 0, 0, h_1, h_2) - (0) \\ z_2(t_f, 0, 0, h_1, h_2) - (-1) \\ z_3(t_f, 0, 0, h_1, h_2)z_4(t_f, 0, 0, h_1, h_2) + |z_4(t_f, 0, 0, h_1, h_2)| - 1 \end{pmatrix}.$$

car $(x_f, y_f) = (0, -1)$ et $\max H(t) = z_3(t)z_4(t) + |z_4(t)| - 1$, dans notre cas $p^0 = -1$, et le fait que le temps final t_f est libre donc $H(t_f) = z_3(t_f)z_4(t_f) + |z_4(t_f)| - 1 = 0$.

5.3 Résolution à l'aide du logiciel MATLAB

On se ramène à un problème de tir simple, le programme suivant est effectué sous *Matlab*, on utilise la méthode de Newton, implémentée dans la *ToolBox optim* de *Matlab*, il s'agit de la routine *fsolve.m*.

```

function tirsimple

% Methode de tir simple, en utilisant fsolve,
% pour le systeme de controle
%      xdot=y, ydot=u, |u|<=1.
% On veut aller de (0,0) à (0,-1) en temps minimal.

clear all ; clf ; clc ; format long ;

global x0 ; x0=[0;0] ;
P0=[1;1] ; tf=5 ;

% Calcul de P0,tf
options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');
[P0tf,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@F,[P0;tf],options);

EXITFLAG % 1 si la methode converge, -1 sinon

% Trace de la trajectoire optimale
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[t,z] = ode45(@sys,[0;P0tf(3)],[x0;P0tf(1);P0tf(2)],options) ;
subplot(121) ; plot(z(:,1),z(:,2)) ; axis square ; title('Trajectoire') ;
subplot(122) ; plot(t,sign(z(:,4))) ; axis square ; title('Contrôle') ;

t(end) % 2.41194262167697
z(1,3) % 1.41531069421559
z(1,4) % 0.99965473076264

%-----

function Xzero=F(X)
% Definition de la fonction dont on cherche un zero

global x0 ;
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;

```

```
[t,z] = ode113(@sys,[0;X(3)], [x0;X(1);X(2)],options) ;
HamEnd = z(end,3)*z(end,2)+abs(z(end,4))-1 ;
Xzero = [ z(end,1)           % on impose xf=0
          z(end,2)+1        % on impose yf=-1
          HamEnd           ] ;           % tf libre donc H(tf)=0
```

%-----

```
function zdot=sys(t,z)
```

```
u=sign(z(4)) ;
zdot = [ z(2)
          u
          0
          -z(3) ] ; % systeme extremal
```

Les résultats sont donnés dans la figure 5.2

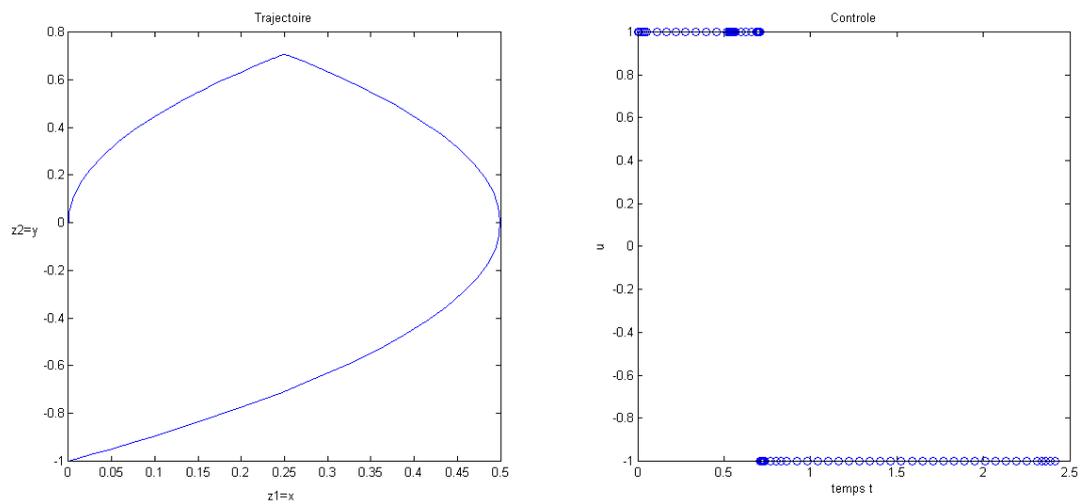


FIG. 5.2 – Résultats de la méthode de tir

Conclusion Générale

L'objectif de ce travail est de présenter une méthode numérique en contrôle optimal. C'est une *méthode indirecte* basée sur le Principe du maximum, qui permet d'exprimer la commande comme une fonction de l'état et du vecteur adjoint, $u(t) = (x(t), p(t))$. On obtient donc un problème aux valeurs limites, car on a une condition initiale en x et une condition finale en p , qu'on peut résoudre numériquement par une *méthode de tir*. Les méthodes indirectes sont réputées pour leur rapidité et leur précision dans le traitement des problèmes de contrôle optimal. En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en un problème qui consiste à résoudre un système d'équations différentielles non linéaire. La contrepartie à la précision de celles-ci est en général la difficulté d'initialisation des algorithmes correspondants et à la structure de contrôle (par exemple de type Bang-bang), en générale, nous traitons cette difficulté par une *démarche homotopique* (ou *continuation*). Il serait préférable d'opter pour une méthode indirecte :

- Si la dimension d'espace est assez grande.
- Si on a besoin de calculer la trajectoire optimale de manière très précise.
- Dans un deuxième temps, après avoir appliqué une méthode directe qui a donné une première approximation de la solution optimale.

Pour ce faire, on a présenté d'abord une introduction générale aux équations différentielles car la modélisation d'un système de contrôle peut avoir recours à des équations différentielles, et on a abordé quelques méthodes de résolutions (exemple de la méthode de tir pour des équations différentielles linéaires d'ordre 2 avec condition aux limites) que nous avons développé dans ce mémoire.

Nous nous sommes intéressés à la théorie de contrôle optimal où nous avons développé certains éléments de base de cette théorie, en portant un intérêt particulier à la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires. Et à la fin nous avons présenté les deux approches de résolution d'un problème de contrôle optimal.

Et nous avons consacré une partie pour la présentation de Principe du Maximum de Pontriaguine et à l'étude théorique de la méthode de tir, plus précisément du tir simple, en contrôle optimal. Cette étude est accompagnée d'illustrations par des exemples simples.

L'exemple pratique d'un véhicule se déplaçant d'un point à un autre nous permet de constater l'efficacité de la méthode de tir.

En perspective de ce travail il est souhaitable de raffiner l'étude, pour l'application de cette méthode à des exemples pratiques, et pour traiter des structures plus complexes, comme par exemple :

- Etude des problèmes avec contraintes sur l'état.
- Résolution de problèmes de contrôle optimal avec retard.
- Problèmes non linéaires.
- Problèmes stochastiques.

Annexe A

Variation de la constante

On associe à l'équation complète

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (\text{A.1})$$

l'équation sans second membre

$$a(x)y' + b(x)y = 0. \quad (\text{A.2})$$

L'équation (A.2) est à variables séparables

$$\frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}dx.$$

Soit

$$y = Kz(x) = K \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right)$$

la solution générale de l'équation sans second membre (A.2).

On fait alors le changement de fonction inconnue défini par

$$y(x) = K(x)z(x)$$

ce qui revient à remplacer la constante K par une fonction de la variable x (d'où le nom de la méthode : variation de la constante).

Dérivons y et reportons dans l'équation différentielle (A.1)

$$a(x)[K'(x)z(x) + K(x)z'(x)] + b(x)K(x)z(x) = c(x)$$

ou

$$a(x)K'(x)z(x) + K(x)[a(x)z'(x) + b(x)z(x)] = c(x)$$

z étant solution de l'équation sans second membre, le crochet est nul et les termes en K se simplifient.

Il ne reste plus que

$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)z(x)}$$

l'expression que l'on intègre pour trouver $K(x)$ à une constante près et que l'on reporte dans $y = K(x)z(x)$.

Annexe B

Fonctions implicites

Définition B.1. (méthodes explicites et méthodes implicites) Une méthode est dite *explicite* si la valeur u_{n+1} peut être calculée directement à l'aide des valeurs précédentes $u_k, k \leq n$ (ou d'une partie d'entre elles). Une méthode est dite *implicite* si u_{n+1} n'est définie que par une relation implicite faisant intervenir la fonction f . Noter que les méthodes implicites nécessitent à chaque pas de temps la résolution d'un problème non linéaire (si f dépend non linéairement de la seconde variable).

Définition B.2. Soit \mathcal{O} une partie ouverte de \mathbb{R}^m et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable. On dit que $P \in \mathcal{O}$ est un *point régulier* de f , ou que f est *submersive* en P , si df_P est une application linéaire surjective. Une application submersive en tout point est dite une *submersion*.

Il va sans dire que si $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est submersive en un point P alors $m \geq n$.

Si on précise au préalable que $n \leq m$, on peut aussi dir que f est submersive en P si la différentielle df_P est de rang n , ou si la matrice jacobienne $J_{ac}f_P$ de f en P est une matrice $n \times m$ de rang maximal n .

L'exemple classique d'une submersion est donné par l'application linéaire

$$(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, \quad m \geq n,$$

qui est évidemment une projection linéaire de \mathbb{R}^m sur \mathbb{R}^n . Nous l'appellerons la *submersion canonique* de \mathbb{R}^m sur \mathbb{R}^n .

Définition B.3. Une fonction $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie sur une partie ouverte de \mathbb{R}^m , est *immersible* en $x \in \mathcal{O}$ si sa différentielle en x , df_x , est injective. Quand

la fonction f est immersive en tout point de son domaine de définition \mathcal{O} , nous dirons que la fonction f est une *immersion* (de \mathcal{O} dans \mathbb{R}^n).

Si $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion en un point $x \in \mathcal{O}$, alors on doit avoir, forcément, que $m \leq n$ et que la différentielle df_x est de rang m . En particulier, une application $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est immersion de \mathcal{O} dans \mathbb{R}^n si et seulement si le rang de la différentielle df_x est égal à m en tout point $x \in \mathcal{O}$.

L'exemple classique d'une immersion est l'application linéaire de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n

$$(x^1, x^2, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x^1, x^2, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

elle est dite *l'immersion canonique* de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n .

Théorème B.1. (Théorème des fonctions implicites)

Soient $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m-n}$ une partie ouverte et $f : (u, v) \in \mathcal{O} \mapsto f(u, v) \in \mathbb{R}^n$ une fonction C^k , ($k \geq 1$). Supposons qu'au point $(u_0, v_0) \in \mathcal{O}$ on ait

$$\left| \frac{\partial(f^1, \dots, f^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)}(u_0, v_0) \right| \neq 0 \text{ et } f(u_0, v_0) = 0.$$

Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_{(u_0, v_0)}$ de (u_0, v_0) , un voisinage ouvert $\mathcal{O}_{v_0} \subset \mathbb{R}^{m-n}$ de v_0 et une fonction $g : \mathcal{O}_{v_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k tels que l'ensemble des points $(u, v) \in \mathcal{O}_{(u_0, v_0)} \mid f(u, v) = 0$ coïncide avec le graphe $(g(v), v) \mid v \in \mathcal{O}_{v_0}$:

$$(u, v) \in \mathcal{O}_{(u_0, v_0)} \mid f(u, v) = 0 = (g(v), v) \mid v \in \mathcal{O}_{v_0}.$$

En d'autres termes si on a n équations en $m \geq n$ variables

$$\begin{aligned} f^1(x^1, \dots, x^m) &= 0 \\ f^2(x^2, \dots, x^m) &= 0 \\ &\vdots \\ f^n(x^1, \dots, x^m) &= 0 \end{aligned}$$

et si en un point (x_0^1, \dots, x_0^m) qui satisfait ces équations le déterminant de la sous-matrice jacobienne $(\partial f^i / \partial x^j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est non nul, alors les n premières coordonnées de toute solution (x^1, \dots, x^m) de ce système sont, dans un voisinage de (x_0^1, \dots, x_0^m) , des fonctions des $m - n$ dernières. La classe de différentiabilité de ces fonctions est la même que celle des fonction f^1, \dots, f^n .

Annexe C

Théorie des points conjugués

Le but de la théorie des points conjugués est de donner des conditions (du second ordre) nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité, pour des problèmes de contrôle optimal. Dans le cas général, on se réfère à [8](voir aussi [13], Chapitre 9). Dans cette annexe, pour simplifier la présentation, on se limite au problème du temps minimal pour le système de contrôle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application lisse, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ (cas sans contrainte sur le contrôle). Tout contrôle u temps minimal sur $[t_0, t_f]$ est alors *singulier*. D'après le principe du maximum qu'est énoncé au chapitre précédent, la trajectoire $x(\cdot)$ est projection d'une extrémale, solution des équations

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P}(x, p, u), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, u) \text{ et } \frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = 0,$$

où $H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle$. On suppose que $H(x(t), p(t), u(t)) \neq 0$ le long de l'extrémal, que la Hessienne $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x, p, u)$ est définie négative (hypothèse de Legendre stricte), et que la singularité est de codimension un sur tout sous-intervalle (hypothèse de régularité forte). L'application du théorème des fonctions implicites permet d'exprimer, localement, $u(t) = u(x(t), p(t))$. Toute extrémale vérifie alors

$$\dot{x} = \frac{\partial H_r}{\partial P}(x, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_r}{\partial x}(x, p),$$

où $H_r(x, p) = H(x, p, u(x, p))$ est le *Hamiltonien réduit*. Et notant $z = (x, p)$,

$$\dot{z}(t) = \overrightarrow{H_r}(z(t)). \tag{C.1}$$

On définit l'application exponentielle

$$\exp_{x_0}(t, p_0) = x(t, x_0, p_0),$$

où $(x(t, x_0, p_0), p(t, x_0, p_0))$ est la solution du système (C.1) partant du point (x_0, p_0) en $t = 0$. Le temps t varie dans \mathbb{R}^+ (du moins, tant que la solution est bien définie), et le vecteur adjoint initial p_0 est défini à scalaire multiplicatif près, sachant que l'on suppose $H_r(x_0, p_0) \neq 0$, on peut donc supposer que $p_0 \in S^{n-1}$. finalement, l'application \exp_{x_0} est définie sur $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \cap p_0 \mid H_r(x_0, p_0) \neq 0$, à valeurs dans \mathbb{R}^n . Son image s'appelle *un champ central*. Voir à ce sujet par exemple ([20])

Soit $z(t, z_0) = (x(t, x_0, p_0), p(t, x_0, p_0))$ une extrémale de référence, définie sur $[t_0, t_f]$. Le temps $t_c \in]t_0, t_f]$ est dit *conjugué* si l'application $\exp_{x_0}(t_c, \cdot)$ n'est pas une immersion en p_0 . Le point $x(t_c)$ est dit *conjugué* à x_0 .

Pour calculer un temps conjugué, il s'agit donc de déterminer un temps auquel le rang de $\frac{\partial \exp_{x_0}(t_c, \cdot)}{\partial p_0}$ est inférieur ou égal à $n - 2$. Pour cela, on introduit le *système variationnel*

$$\delta \dot{z}(t) = \frac{\partial \vec{H}_r}{\partial z}(z(t)) \delta z(t), \quad (\text{C.2})$$

ou appelée *équation de Jacobi*. Un champ de Jacobi $J(t) = (\delta x(t), \delta p(t))$ est une solution non triviale de (C.2). Il est dit *vertical* au temps t si $\delta x(t) = 0$. Un temps t_c est conjugué si et seulement s'il existe un champ de Jacobi vertical aux temps 0 et t_c .

La justification de ce résultat technique se trouve dans [9].

On propose trois tests (algorithmes) équivalents pour calculer de calcul de champ de Jacobi.

Test 1. On se restreint à l'espace vectoriel de dimension $(n - 1)$ des champs de Jacobi $J_i(t) = (\delta x_i(t), \delta p_i(t))$, $i = 1, \dots, n - 1$, verticaux en 0, vérifiant $\langle p_0, \delta p_i(0) \rangle = 0$. Il s'agit donc de calculer numériquement les champs de Jacobi correspondants, et de déterminer à quel instant le rang de $(\delta x_1(t), \dots, \delta x_{n-1}(t))$ est inférieur ou égal à $(n - 2)$.

Test 2. Une autre possibilité est de calculer numériquement les champs de Jacobi $J_i(t) = (\delta x_i(t), \delta p_i(t))$, $i = 1, \dots, n - 1$, correspondant aux conditions initiales $\delta p_i(0) = e_i$, $i = 1, \dots, n$, où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ représente la base canonique de \mathbb{R}^n , et calculer le rang de $(\delta x_1(t), \dots, \delta x_n(t))$, celui-ci devant être égal à $(n - 1)$ en dehors d'un temps conjugué, et étant inférieur ou égal à $(n - 2)$ en un temps conjugué.

Test 3. La dérivée de l'application exponentielle par rapport à t étant égale à la dynamique f du système, on peut donc également prendre une base $(\delta p_1, \dots, \delta p_{n-1})$ vérifiant $\langle p_0, \delta p_i(0) \rangle = 0$, calculer numériquement les champs de Jacobi correspondants $J_i(t) = (\delta x_i(t), \delta p_i(t))$, $i = 1, \dots, n-1$, et tester l'annulation du déterminant $\det(\delta x_1(t), \dots, \delta x_{n-1}(t), f(x(t), u(t), p(t)))$. En effet, par hypothèse le Hamiltonien est non nul le long de l'extrémal, et donc $\dot{x}(t)$ est transverse à $\det(\delta x_1(t), \dots, \delta x_{n-1}(t))$.

Remarque C.1. Les algorithmes précédents sont très simples à programmer, à l'aide d'un logiciel COTCOT (En anglais : Conditions of Order Two and COnjugate Times) disponible sur le web (<http://www.n7.fr/apo/cotcot>), dont le fichier principal est une routine MATLAB, `cotcot.m`.

Annexe D

Introduction au logiciel de programmation MATLAB

MATLAB est une abréviation de "MATrix LABoratory", est un environnement informatique conçu pour le calcul matriciel. L'élément de base est une matrice dont la dimension n'a pas à être fixée. Avec ses fonctions spécialisées, MATLAB peut être considéré comme un langage de programmation adapté pour les problèmes scientifiques. Ecrit à l'origine, en Fortran, par C.Moler. La version actuelle est écrite en C par the Math Works Inc.

MATLAB est un langage interprété. Il n'est pas nécessaire de compiler un programme avant de l'exécuter et toute commande tapée dans la fenêtre de commande est immédiatement exécutée. Il existe deux modes de fonctionnement :

- **Mode interactif** : MATLAB exécute les instructions au fur et à mesure qu'elles sont données par l'utilisateur.
- **Mode exécutif** : MATLAB exécute ligne par ligne un fichier 'm' (programme de langage MATLAB).

L'interface utilisateur de MATLAB affiche les fenêtres suivantes :

- **Fenêtre de commande** : dans cette fenêtre, l'utilisateur donne les instructions et MATLAB retourne les résultats.
- **Fichiers m** : ce sont les programmes écrits par l'utilisateur en langage MATLAB.
- **Workspace** : la zone de travail de MATLAB comprend l'ensemble de variables accumulées pendant une session de MATLAB et enregistrées dans la mémoire.
- **Command history** : permet de voir toutes commandes exécutées dans la

fenêtre de commande.

- **Current directory** : permet de voir tous les fichiers et dossiers qui se trouvent dans le répertoire de travail.
- **Help** : permet d'obtenir de l'aide sur une commande.

MATLAB comprend aussi un ensemble d'outils spécifiques à des domaines, appelés *Toolboxes* (ou boîtes à outils) indispensable à la plupart des utilisateurs. Les boîtes à outils sont des collections qui étendent l'environnement MATLAB pour résoudre des catégories spécifiques de problèmes.

MATLAB fait également partie d'un ensemble d'outils intégrés dédiés au Traitement du Signal.

Bibliographie

- [1] M. Aidene, I. L. Vorb'ev et B. Oukacha, *Algorithm for solving a linear Optimal Control Problem with Minimax Performance Index*. Journal of Computational mathematics and Mathematical physics. Vol. 45, N 10, pp.1756-1765, 2005.
- [2] E. Allgower et K. Georg, *Numerical Continuation Methods*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.
- [3] V. I. Arnold, *Toutes les mathématiques*. Edition Ellipses, 2004.
- [4] V. I. Arnold, *Equations différentielles*. Edition Mir, 1988.
- [5] U.M. Ascher, R.M. Matthey et R.D. Russel, *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, 1988.
- [6] A. Avez, *Calcul différentiel*. Masson, Paris, 1983.
- [7] R. Bellman, *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [8] B. Bonnard, J-B. Caillau et E. Trélat, *Second order optimality conditions and applications in optimal control*. Preprint de l'Univ. d'Orsay, 2005.
- [9] B. Bonnard, J-B. Caillau et E. Trélat, *Geometric optimal control of elliptic Keplerian orbits*. Discrete and Continuous Dynamical Systeme-Series B, 5(4) : 929-956, Novembre 2005.
- [10] B. Bonnard, M. Chyba et H. Heutte, *Contrôle optimal géométrique appliqué*. Preprint, Université de Bourgogne, 1995.
- [11] B. Bonnard et M. Chyba, *The role of singular trajectories in control theory*. Math. Monograph, Springer-Verlag, 2003.
- [12] B. Bonnard, L. Faubourg et E. Trélat, *Optimal control of the atmospheric arc of a space shuttle and numerical simulations by multiple-shooting techniques*. Math. Models Methods Applied Sci. 2, 15, 2005.

-
- [13] B. Bonnard, L. Faubourg et E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*. Math & Appl. 51 Springer Verlag, 2006.
 - [14] B. Bonnard, L. Faubourg, G. Launay et E. Trélat, *Optimal control with state constraints and the space shuttle re-entry problem*. Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 9, n^o. 2, P155-P199, 2003.
 - [15] R.L. Burden et J.D. Faires, *Numerical Analysis*. 5^{ième} édition, Boston, PWS Kent, 1993.
 - [16] L. Cesari, *optimization theory and application. Problems with ordinary differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
 - [17] M. Crouzeix et A. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1984.
 - [18] G.B. Dantzig, *Programmation linéaire*. Edition : Dunod, Paris, 1966.
 - [19] M. et F. Diener, *Macrodynamique et financement des économies ouvertes*. CIMPA, Nouakchott, 1998.
 - [20] R. Dujol. *Contribution à l'étude du contrôle optimal des transferts orbitaux mono-entrée*. Thèse de Doctorat à l'institut national polytechnique de Toulouse, 2006.
 - [21] D. Duverney et S. Heumez, *Toutes les mathématiques*. Edition Ellipses, 2004.
 - [22] L. C. Evans, *An introduction to mathematical optimal control theory*. Département de Mathématiques, Université de Californie, Berkeley.
 - [23] P. Faure, *Analyse numérique, notes d'optimisation*. Edition Marketing, 1988.
 - [24] R. Fierro, A.K. Das, V. Kumar et J.P. Ostrowski, *Hybrid control of formations of robots*. In IEEE Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation, 2001.
 - [25] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*. Edition de L'école polytechnique de Montréal. 1997.
 - [26] R. Gabassov, *Adaptive method of linear programming*. Preprint of the University of Karlsruhe. Institute of Statistics and Mathematics. Karlsruhe, Germany. 1993.
 - [27] R. Gabassov, F.M. Kirrilova, *Méthodes de programmation linéaire*. Tome 1, 2, 3, Minsk : Edition de l'université, 1977, 1978, 1980.

- [28] R. Gabassov, F.M. Kirrilova et A.I. Lutov, *Algorithms of solution of optimal control problems*. Conférence tenue à Blazejewko, Zielona Gora, 1983.
- [29] R. V. Gamkrelidze, *Discovery of the maximum principle*. Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 5, no. 4, 437-451, 1999.
- [30] J. P. Gauthier et I. Kupka, *Deterministic observation theory and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [31] J. Gergaud, *TP : Résolution des problèmes de contrôle optimal "Méthode de tir simple"*. E.N.S.E.E.I.H.T, 2007/2008.
- [32] W. Hahn, *Stability of Motion*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 1967.
- [33] D. Jacobson, D. Lele et J. L. Speyer, *New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 35, pp. 255-284, 1971.
- [34] V. Jurdjevic, *Geometric control theory*. Cambridge University Press, 1997.
- [35] R.E.Kalman, *Mathematical description of linear dynamical systems*. SIAM Journal on control, 1 : 152-192, 1963.
- [36] F. Kara, *Optimisation de problème de contrôle d'une commande polyédrale*. Mémoire de Magistère en recherche opérationnelle, Université Mouloud Mammeri, 2008.
- [37] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [38] G. Knowles, *An introduction to applied optimal control*. Academic Press, Inc. 1981.
- [39] E. A. Kostina et O. I. Kostuokova, *Algorithme de résolution d'un problème convexe de programmation quadratique avec des contraintes linéaires et non linéaires*. Revue de la mathématique physique et du calcul mathématique. T.42,7, 2001, P1012-1026, Minsk.
- [40] P. Lascaux, R. Théodor, *Analyse numérique matricielles appliquée à l'art de l'ingénieur*. Tomes 1 et 2, Masson, Paris. 1996.
- [41] F. Lasfer, *Synthèse sur la Théorie du Contrôle Optimal Et Application aux problèmes perturbés*. Mémoire de Magistère en recherche opérationnelle, Université Mouloud Mammeri, 2002.
- [42] E. B. Lee, L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*. John Wiley et Sons, New-York, 1967.

- [43] C. Lobry et T. Sari, *Introduction à la théorie du contrôle*. CIMPA, Tlemcen, 2003.
- [44] J. Macki, A. Stauss, *Introduction to optimal control theory*. Springer verlag (second printing), 1995.
- [45] P. Martinon, *Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale*. Thèse de Doctorat à l'institut national polytechnique de Toulouse, 2005.
- [46] H. Maurer, *On optimal control problems with bounded state variables and control appearing linearly*.SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 15, 3, pp. 345-362, 1977.
- [47] M. Minoux, *Programmation mathématique, théorie et algorithmes*. Bordas et C.N.E.T-E.N.S.T, Paris 1983.
- [48] Nenik Nijmeijer, Arjan Van Der Shaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag New Yourk Inc. 1990.
- [49] B. Oukacha, *Résolution de problème de contrôle optimal*. These de Doctorat en recherche opérationnelle, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2006.
- [50] L. S. Pontriagin, *Mathematical Theory of Optimal Processus*. Interscience, New York, 1962.
- [51] L. Pontriagin, V. Boltianski, R. Gamkrelidze et E. Michtchenko, *Théorie Mathématique des processus optimaux*. Edition MIR-Moscou, (traduit du Russe), 1974.
- [52] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales.Série et équations différentielles*. 3^e édition. 1994.
- [53] J. Rappaz, M. Picasso, *Introduction à l'analyse numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1998.
- [54] F. Rezki, *Résolution d'un problème terminal de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec une trajectoire discontinue*. Mémoire de Magistère en recherche opérationnelle, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2006.
- [55] F. Scheid, *Numerical Analysis*. Schaum's Outline Series, New york, McGraw-Hill, 1968.
- [56] S. M. Sinha, *Mathematical programming, theory and methods*. Elsevier Science and Technology Books, 2006.

- [57] J. Stoer et R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [58] E. Trélat, *Contrôle optimal : Théorie et applications*. Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.
- [59] E. Trélat, *Commande optimale*. Notes du cours A 08, 2007/2008.
- [60] E. Trélat, *Théorie du contrôle et application en aéronautique*. Université d'Orléans, UFR Sciences Fédération Denis Poisson, Labo. MAPMO, UMR 6628, Route de Chartres, BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2, France.
- [61] M. I. Zelikin, *Control theory and Optimization*. Springer, 1999.