REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTER DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DE SCIENCES - DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Option: Processus Aléatoires et Statistique de la Décision

FRACTIONS CONTINUES ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

sous la Direction de

Mr BOUDIBA MOHAND AREZKI

présenté le 08/10/2012 par:

HEDJEM AKILA

devant le Jury:

Mr HAMADOUCHE DJAMEL, Pr, UMMTO, Président
Mr BOUDIBA MOHAND AREZKI, MC, UMMTO, Rapporteur
Mr FELLAG HOCINE, Pr, UMMTO, Examinateur
Mme HARMIM DEHBIA, Chargée de Recherches, UMMTO, Examinatrice

Remerciements

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Hamadouche Djamel, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je remercie également Monsieur Fellag Hocine , ainsi que madame Harmim Dehbia , pour avoir accepté de lire ce mémoire et de faire partie du jury.

Je présente mes sinsères remerciements à mon directeur de mémoire Monsieur Boudiba Mohand Arezki, pour m'avoir proposer ce thème, pour ses orientations, et sa grande contribution à l'aboutissement de ce projet.

Enfin, il m' est agréable d'adresser mes remerciments à tous ceux qui de prés ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je remercie affectueusement mes deux chers parents pour tous les effors qu'ils ont fournis afin que je puisse poursuivre mes études.

Je souhaite aussi remercier mes deux frères Kamel et Arezki pour leurs soutien au long de ces années, ainsi que mes deux soeurs Saida et Wassila, qui ont vécu avec moi tous les états d'âme à travers lesquels je suis passé tout au long de ce travail.

Enfin je n'oublie pas de remercier chacune de mes adorables amies: Djidjiga, Wiza, Sabrina, Kahina. avec eux, j'ai partagé des moments agréables et inoubliables.

Table des matières

Introduction

L'étude de processus de Markov $(X_n)_n$ engendrés par des produits de composition de fonctions aléatoires indépendantes F_n est intensément étudié ces derniéres années. Le modèle le plus simple de ce type de processus est constitué par les marches aléatoires. La généralisation introduite par rapport aux marches aléatoires tient dans le type de fonction F_n. Ce qui est nouveau depuis quelques années, c'est qu'en général ces fonctions F_n ne sont pas linéaires et donc le modèle des marches aléatoires ne convient pas tout à fait. Depuis les travaux de Furstehberg dans les années 80, de nombreux auteurs se sont intéressés à ce type de Processus: Letac, Diaconis, Guivarc'h, Bougerol, Mirek,..De nombreux travaux sont consacrés chaque année à l'etude des propriétés de ce type de processus.

L'absence d'une théorie générale pour ce type de processus, fait qu'au niveau des méthodes d'étude, un appareillage mathématique élaboré et varié est necessaire. Furstenber utilise des algébres et des groupes de Lie; Diaconis developpe l'analyse de Fourier; Guivarc'h les operateurs de Doeblin-Fortet; Mirek la théorie ergodique,...

Les problèmes posés par l'étude de ces processus sont la recherche de conditions sur les F_n pour assurer la convergence du processus itéré $F_1 \circ F_2 \cdots \circ F_n$. Souvent la question principale est de préciser les conditiions de récurrence ou de transience pour la chaîne de Markov $(X_n)_n$.

Nous nous interessons à ce type de processus dans le cas où les fonctions sont des fractions continues. Dans le premier chapitre, nous donnons une synthèse sur les fractions continues arithmétiques et complexe. Le deuxième chapitre introduit l'étude de systèmes dynamiques $(X_n)_n$ définis par la donnée d'une variable aléatoire X_0 et

$$\forall\ n > 0 \quad X_n = F_n \circ X_{n-1}$$

où F_n sont des fonctions aléatoires indépendantes, nous nous plaçons dans le cas où F_n est de la forme

$$F_n(x) = f_{Y_n}(x) = Y_n + \frac{1}{x}$$

où $(Y_n)_n$ est une suite de variable aléatoire indépendantes et identiquement distribuées et alors le processus (X_n^x) pour x donné est de la forme

$$X_{n+1}^x = Y_{n+1} + \frac{1}{X_n^x}.$$

Dans le troisième chapitre nous appliquons le théorème ergodique de Birkhoff sur les fractions continues arithmétiques. Le quatrième chapitre est cansacré à l'étude de comportement de la marche aléatoire dans $\mathbb{N}$.

Chapitre 1

Généralités sur les fractions continues

1.1 Fractions continues arithmétiques

Définition 1. *Une expression du type*

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \cdots}}}$$

où $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont des suites de nombres réels ou complexes, est appellée fraction continue. Le nombre de termes n pouvant être fini ou infini, la fraction continue sera dite alors finie ou infinie.

Définition 2. *On appelle fraction continue arithmétique une expression de la forme*

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \cdots}}}$$

Le premier terme a_1 appartenant à $\mathbb{Z}$, les autres termes a_2,a_3,$a_4, \cdots$ appartenant tous à $\mathbb{N}^*$.

Notation: Remarquons que l'écriture d'une telle fraction continue limitée

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \cdots}}}$$

est encombrante, on utilisera l'écriture

$$[a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n].$$

Les termes $a_1,a_2,\cdots,a_n$ s'appellent quotients partiels de la fraction continue.

Théorème 1. *Toute fraction continue arithmétique finie est un nombre rationnel, et réciproquement tout rationnel peut s'exprimer sous forme de fraction continue arithmétique finie, et cette représentation est unique.*

Démonstration. La première partie du théorème est évidente.

Démontrons la réciproque. Soit un nombre rationnel de la forme

$$p/q \quad \text{avec} \quad (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$$

.

a)Divisons p par q

$$p = a_1 q + r_1 \quad 0 \leq r_1 < q \quad \text{avec} a_1 \in \mathbb{Z}$$

Si $r_1 = 0$ la fraction continue est

$$p/q = [a_1].$$

Si $r_1 \neq 0$, on a:

$$p/q = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} \quad a_1 \in \mathbb{Z}.$$

b)Divisons q par r_1.

$$q = a_2 r_1 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

$$q > 0 \quad et \quad r_1 > 0 \quad donc \quad a_2 > 0.$$

Si $r_2 = 0$, on a:

$$p/q = a_1 + \frac{1}{a_2} = [a_1,a_2].$$

Si $r_2 \neq 0$, on a:

$$p/q = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

c)Divisons r_1 par r_2.

$$r_1 = a_3 r_2 + r_3 \quad 0 \leq r_3 < r_2.$$

$$r_1 > 0 \text{ et } r_2 > 0 \text{ donc } a_3 > 0.$$

Deux cas se présentent alors $r_3 = 0$ ou $r_3 \neq 0$ et ainsi de suite jusqu'au dernier reste nul supposons r_n.

$$r_{n-3} = a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2}.$$

$$r_{n-2} = a_n r_{n-1} + r_n \quad r_n = 0.$$

En effet ce calcul se termine au bout d'un nombre fini de divisions puisque les restes successifs $r_1, r_2, \cdots, r_n$ forment une suite décroissante d'entiers positifs majorée par q entier positif donné.

Le rationnel p/q peut s'écrire sous la forme

$$p/q = [a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

L'unicité du développement en résulte. □

Définition 3. *Les diverses fractions*

$$[a_1] \; ; \; [a_1, a_2] \; ; \; [a_1, a_2, a_3] \; ; \; \cdots$$

sont respectivement la première, la seconde, la troisième réduite.

la n^{ime} réduite étant

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

Théorème 2. *Le numérateur p_i et le dénominateur q_i de la réduite $[a_1, a_2, \cdots, a_i]$*

de la fraction continue $[a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$ satisfont aux égalités

$$\begin{cases} p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases} \quad \text{pour tout entier } n \geq 3$$

avec

$$\begin{cases} p_1 = a_1 \\ q_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_2 = a_2 a_1 + 1 \\ q_2 = a_2 \end{cases}$$

Démonstration. En effet :

$$[a_1] = a_1 = \frac{p_1}{q_1} \quad \text{avec} \quad p_1 = a_1 \ ; \quad q_1 = 1.$$

$$[a_1,a_2] = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2} \quad \text{avec} \quad p_2 = a_1a_2 + 1 \ ; \quad q_2 = a_2.$$

$$[a_1,a_2,a_3] = \frac{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3}{a_2a_3 + 1} = \frac{p_3}{q_3}.$$

$$[a_1,a_2,a_3,a_4] = \frac{a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2 + a_1a_4 + a_3a_4 + 1}{a_2a_3a_4 + a_2 + a_4}.$$

On a:

$$[a_1,a_2,a_3] = \frac{a_3(a_1a_2 + 1) + a_1}{a_3(a_2) + 1} = \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + 1} = \frac{p_3}{q_3}.$$

d'où

$$\begin{cases} p_3 = a_3p_2 + p_1 \\ q_3 = a_3q_2 + 1 \end{cases}$$

De même on peut écrire pour $[a_1,a_2,a_3,a_4]$:

$$[a_1,a_2,a_3,a_4] = \frac{a_4(a_1a_2a_3 + a_1 + a_3) + (a_1a_2 + 1)}{a_4(a_2a_3 + 1) + a_2} = \frac{a_4p_3 + p_2}{a_4q_3 + q_2} = \frac{p_4}{q_4}.$$

d'ou

$$\begin{cases} p_4 = a_4p_3 + p_2 \\ q_4 = a_4q_3 + p_2 \end{cases}$$

Supposons que:

$$[a_1,a_2,\cdots,a_i] = \frac{p_i}{q_i}$$

avec

$$\begin{cases} p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_iq_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}$$

et démontrons que

$$[a_1,a_2,\cdots,a_{i+1}] = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}.$$

avec

$$\begin{cases} p_{i+1} = a_{i+1}p_i + p_{i-1} \\ q_{i+1} = a_{i+1}q_i + q_{i-1} \end{cases}$$

On a

$$[a_1,a_2,\cdots,a_{i+1}] = [a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},(a_i + \frac{1}{a_{i+1}})].$$

que l'on peut écrire

$$[a_1,a_2,\cdots,a_{i+1}] = \frac{(a_i + \frac{1}{a_{i+1}})p_{i-1} + p_{i-2}}{(a_i + \frac{1}{a_{i+1}})q_{i-1} + q_{i-2}} = \frac{(a_i a_{i+1} + 1)p_{i-1} + a_{i+1}p_{i-2}}{(a_i a_{i+1} + 1)q_{i-1} + a_{i+1}q_{i-2}}.$$

$$[a_1,a_2,\cdots,a_{i+1}] = \frac{a_{i+1}(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{a_{i+1}(a_i q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}}.$$

Ce qui donne

$$[a_1,a_2,\cdots,a_{i+1}] = \frac{a_{i+1}p_i + p_{i-1}}{a_{i+1}q_i + q_{i-1}} = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}.$$

La démonstration par récurrence est donc effectuée. □

Théorème 3. *Le développement en fraction continue d'un irrationnel est illimité.*

Démonstration.

Soit x un irrationnel donné positif.

a_1 la partie entière de x.

$$a_1 = E(x)$$

On a:

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2} \qquad 0 < \frac{1}{x_2} < 1.$$

Donc

$$x_2 = \frac{1}{x - a_1} > 1$$

est un irrationnel, x étant irrationnel.
$a_2 = E(x_2)$, on peut écrire x_2 sous la forme

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} \qquad a_2 \geq 1 \qquad 0 < \frac{1}{x_3} < 1.$$

Donc

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} > 1$$

est un irrationnel, x_2 étant irrationnel.

On peut répéter indéfiniment ce calcul, on obtient

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \frac{1}{x_2} \qquad x_2 > 1. \\ x_2 &= a_2 + \frac{1}{x_3} \qquad x_3 > 1, \ \ a_2 \geq 1. \\ x_3 &= a_3 + \frac{1}{x_4} \qquad x_4 > 1, \ \ a_3 \geq 1. \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \qquad x_{n+1}, \ \ a_n \geq 1. \\ &\vdots \end{aligned}$$

avec $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ entiers positifs $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ quotients complets irrationnel. Cette suite $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ ne pouvant pas être finie, sinon un entier serait égale à un nombre irrationnel.

Pour trouver le développement en fraction continue de l'irrationnel x, on remplace dans l'expression

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2} \qquad x_2 > 1$$

x_2 par la valeur donnée par

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} \qquad a_2 \geq 1 \qquad x_3 > 1 \quad ect,$$

On obtient

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}}.$$

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots].$$

□

Exemple:

Programme R qui détermine la n^{ime} réduite de développement en fraction continue d'un irrationnel positif $(\sqrt{23})$.

Programme

```
n = 20
y = numeric(n)
x = numeric(n)
x = 1/sqrt(23)
for(i  in  1 : n){
y = floor(1/x)
x = 1/x − floor(1/x)
print(y)}
```

[1] 4
[1] 1
[1] 3
[1] 1
[1] 8
[1] 1
[1] 3
[1] 1
[1] 8
[1] 1
[1] 3
[1] 1
[1] 8
[1] 1
[1] 3
[1] 1
[1] 8
[1] 1
[1] 3
[1] 1

> On remarque que $\sqrt{23} = [4,\overline{1,3,1,8}\ ]$.

Propriétés des réduites:

Propriété 1:

$$\forall i \geq 0 \quad p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i.$$

En effet:

$$p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1\times = (-1)^0 \quad pour\ i = 0.$$
$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_1 \times 0 - 1 \times 1 = -1 = (-1)^1 \quad pour\ i = 1.$$
$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = (a_1 a_2 + 1) \times 1 - a_1 a_2 = 1 = (-1)^2 \quad pour\ i = 2.$$

Supposons que $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i$
et démontrons que $p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} = (-1)^{i+1}$.
On a:

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i$$

et

$$\begin{aligned} p_{i+1}q_i - p_i q_{i+1} &= (a_{i+1}p_i + p_{i-1})q_i - p_i(a_{i+1}q_i + q_{i-1}) \\ &= -(p_i q_{i-1} - p_{i-1}q_i) = -(-1)^i = (-1)^{i+1}. \end{aligned}$$

D'ou

$$\forall i \geq 0 \quad p_i q_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i.$$

Propriété 2:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \quad n \geq 2.$$

Divisons les deux membres de

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^n \quad \forall n \geq 0.$$

Par le produit $q_n q_{n-1} \neq 0$, on obtient

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \quad n \geq 2.$$

Propriété 3:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{a_n(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-2}} \quad n \geq 3.$$

En effet:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2}q_n}{q_n q_{n-2}}.$$

Or

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}.$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

On aura:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(a_n p_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2})p_{n-2}}{q_n q_{n-2}}.$$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})}{q_n q_{n-2}}.$$

D'où en supposant les $q_n > 0$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{a_n(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-2}} \quad n \geq 3.$$

Théorème 4. *Soit* $[a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots]$ *une fraction continue infinie alors les suites de réduites pairs et impairs sont tel que*

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \uparrow \qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \downarrow .$$

$$\text{Et on a } \forall n, \ \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \leq \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

Démonstration.

Montrons par récurrence $\forall n \geq 1$

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \cdots < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \cdots < \frac{p_6}{q_6} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2} \tag{1}$$

Montrons que (1) est vraie pour $n = 1$.
D'aprés la 2^{ime} propriété:

$$\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}} \quad i \geq 2.$$

En supposant tous les q_n positifs, on a

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{q_2 q_1} > 0$$

d'où

$$\frac{p_2}{q_2} > \frac{p_1}{q_1}.$$

Montrons que (1) est vraie pour $n = 2$.
D'aprés la 3^{ime} propriété:

$$\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = \frac{a_i(-1)^{i-1}}{q_i q_{i-2}} \qquad i \geq 3$$

on a:

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_3(-1)^2}{q_3 q_1} = \frac{a_3}{q_3 q_1}.$$

$$\frac{a_3}{q_3 q_1} > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_1}{q_1}.$$

D'aprés la 3^{ime} propriété:

$$\frac{p_4}{q_4} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_4(-1)^3}{q_4 q_2} = -\frac{a_4}{q_4 q_2}.$$

$$-\frac{a_4}{q_4 q_2} < 0 \quad \text{donc} \quad \frac{p_2}{q_2} > \frac{p_4}{q_4}.$$

D'aprés la 2^{ime} propriété:

$$\frac{p_4}{q_4} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{(-1)^4}{q_4 q_3} = \frac{1}{q_4 q_3}.$$

$$\frac{1}{q_4 q_3} > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{p_4}{q_4} > \frac{p_3}{q_3}.$$

d'où

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}.$$

Supposons que (1) est vraie à l'ordre n.
Montrons que (1) est vraie à l'ordre $n + 1$.

i.e $\displaystyle \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \cdots < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \cdots < \frac{p_6}{q_6} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}.$

Montrons que

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

D'aprés la 3^{ime} propriété:

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = \frac{a_{2n+1}(-1)^{2n}}{q_{2n+1}q_{2n-1}}.$$

$$\frac{a_{2n+1}(-1)^{2n}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} = \frac{a_{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} > 0.$$

D'où

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

Montrons que

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

D'aprés la 3^{ime} propriété:

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{a_{2n+2}(-1)^{2n+1}}{q_{2n+2}q_{2n}}.$$

$$\frac{a_{2n+2}(-1)^{2n+1}}{q_{2n+2}q_{2n}} = -\frac{a_{2n+2}}{q_{2n+2}q_{2n}} < 0.$$

D'où

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

Montrons maintenant que

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

D'aprés la 2^{ime} propriété:

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n+2}}{q_{2n+2}q_{2n+1}}.$$

$$\frac{(-1)^{2n+2}}{q_{2n+2}q_{2n+1}} = \frac{1}{q_{2n+2}q_{2n+1}} > 0.$$

D'où
$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$
Donc
$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$
On a par hypothèse:
$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \cdots < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \cdots < \frac{p_6}{q_6} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}.$$
En conclusion
$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \cdots < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \cdots < \frac{p_6}{q_6} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}.$$
□

Théorème 5. *Soit* $[a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots]$ *le développement en fraction continue d'un nombre irrationnel x, et soit*
$$\frac{p_n}{q_n} \text{ la reduite d'ordre } n, \text{ alors } \frac{p_n}{q_n} \longrightarrow x, \ n \longrightarrow \infty.$$

Démonstration.

La suite de reduites $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ est une suite croissante majoree par $\frac{p_2}{q_2}$. Elle converge donc vers une limite l.
$$l \leq \frac{p_2}{q_2}.$$
La suite de reduites $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ est une suite decroissante minoree par $\frac{p_1}{q_1}$. Elle converge donc vers une limite l'.
$$l' \geq \frac{p_1}{q_1}.$$

Montrons maintenant que ces deux suites sont adjacentes, c'est-à-dire que
$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n}q_{2n-1}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n-1}}.$$

tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ ce qui est évident car $\lim_{n\longrightarrow\infty} q_n = \infty$ d'où $l = l'$.
Montrons maintenant que cette limite l coincide avec x.

$$x = [a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},x_n].$$

avec

$$x_n = [a_n,a_{n+1},a_{n+2},\ldots] = a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \qquad (1)$$

et donc

$$x_{n+1} = [a_{n+1},a_{n+2},\ldots] \qquad (2)$$

d'aprés (1) $x_n > a_n$, car $x_{n+1} > 0$ de même $x_{n+1} > a_{n+1}$

$$\text{donc } \frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}}$$

or

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}} < a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$$

d'où

$$a_n < x_n < a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \qquad (3).$$

Il s'agit de montrer que x est compris entre deux réduites successives

$$\frac{p_n}{q_n} \text{ et } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Soient les trois expressions

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1,a_2,\ \ldots,a_{n-1},a_n].$$

$$x = [a_1,a_2,\ \ldots,a_{n-1},x_n].$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = [a_1,a_2,\ \ldots,a_n,a_{n+1}].$$

Il s'agit donc de comparer les termes

$$\frac{1}{a_n},\ \frac{1}{x_n},\ \frac{1}{a_{n+1}}.$$

D'aprés (3)

$$\frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{a_n}.$$

x est donc toujours compris entre deux réduites succesives.
Mais on sait que

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$$

d'où

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < x < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \qquad n \in \{1,2,3\ldots,i,\ldots\}$$

c'est-à-dire

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \cdots < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \cdots < x < \cdots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \cdots < \frac{p_6}{q_6} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}.$$

Or lorsque n tend vers l'infini les réduites

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \text{ et } \frac{p_n}{q_n}$$

ont la même lilmite l. Donc $x = l$. □

1.2 Fractions continues complexes

1.2.1 Transformations homographiques

Nous rappelons ici les notions de bases sur Les transformations classiques du plan affine euclidien.

Soit, $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$un repère orthonormal dans le plan affine euclidien, soit f:$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. Si M est le point d 'affixe z, soit M'le point d'affixe $z' = f(z)$. On définit ainsi, dans le plan, la transformation géométrique associée à f qui, à tout point M fait correspondre le point M'.

Si f est la fonction

$$z \longmapsto f(z) = z + h \quad \text{avec} \quad h = \alpha + i\beta \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Pour $z \in \mathbb{C}$

$$z' = f(z) = x' + iy' \quad z = x + iy \text{ avec } x,x',y,y' \in \mathbb{R}$$

on a

$$z' = z + h \Longleftrightarrow \begin{cases} x'\text{=x+ }\alpha \\ y'\text{=y+ }\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

La transformation géométrique associée à f est donc la translation de vecteur

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Si f est la fonction

$$z \longmapsto f(z) = e^{i\theta} z$$

avec θ fixé. Pour $z \in \mathbb{C}$ on a

$$z' = f(z) = e^{i\theta} z \Longleftrightarrow \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg z' = \arg z + \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}) + \theta[2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

La transformation géométrique associée à f est la rotation de centre O et d'angle θ.

Si f est la fonction :

$$z \longmapsto f(z) = kz \qquad k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ on a

$$z' = f(z) = kz \Longleftrightarrow \begin{cases} |z'| = |k||z| \\ \arg z' = \arg z + \arg k \end{cases} \Longleftrightarrow (\overrightarrow{OM'} = k\ \overrightarrow{OM})$$

arg $k = 0$ ou π selon que $k > 0$ ou $k < 0$.

La transformation géométrique associées à f est donc l'homothétie de centre O et de rapport k.

Si f est la fonction

$$z \longmapsto f(z) = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ on a

$$z' = f(z) = \frac{1}{z} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z'| = \frac{1}{|z|} \\ \\ \arg z' = \text{-}\arg z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} OM' = \frac{1}{OM} \\ \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi] \end{cases}$$

Cette transformation, associé à la fonction inverse définie dans $\mathbb{C} - \{0\}$, est appelée inversion complexe .

Remarque:
Le point O n'a jamais d'image par cette transformation. Contrairement à toutes les transformations précédentes, l'image d'une droite n'est généralement pas une droite.

Expression analytique:

$$z' = \frac{1}{z} \Longleftrightarrow x' + iy' = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \\ y' = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Transformations homographiques:

Les transformations homographiques sont les transformations de la forme

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}.$$

avec $ad - bc \neq 0$.

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est appelée matrice de la transformation.

Propsition 1. *Soit S l'ensemble des transformations homographiques muni de la loi de composition $\circ$, alors $(S, \circ)$ est un groupe.*

Démonstration.
Soient T et T' deux transformations homographiques, définies par:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

$$T'(w) = \frac{a'w + b'}{c'w + d'}.$$

On a

$$\begin{aligned} T'(T(z)) &= \frac{a'\frac{az+b}{cz+d} + b'}{c'\frac{az+b}{cz+d} + d'} \\ &= \frac{a'(az+b) + b'(cz+d)}{c'(az+b) + d'(cz+d)} \\ &= \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

Il en résulte que $T' \circ T$ est une homographie de matrice

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Donc la loi de composition " $\circ$ " est une loi interne.

Si T_1,T_2,T_3 sont des transformations homographiques, alors on:

$$(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$$

donc la loi de composition " $\circ$ " est une loi associative.

L'élément neutre de la loi " $\circ$ " est la transformation homographique $T(z) = z$.

Le symetrique de la transformation homographique

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

par apport à la loi de composition " $\circ$ " est la transformation homographique

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Ces propriétés montrent que les transformations homographiques forment un groupe. □

Les translations, les rotations, les homothéties, les inversions sont des cas particuliers de transformations homographiques. les matrices associées sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion:

Si $c \neq 0$ on peut écrire

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^2(z+d/c)} + \frac{a}{c}.$$

Ceci montre qu' une homographie est la composition de tansformations classiques: translation, inversion, rotation, et homothétie suivie par une autre translation.

Si $c = 0$ l'homographie est la composition de transformations: translation, rotation, et homothétie.

Fonctions analytiques:

Définition 4. *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$ et z_0 un point de $\mathcal{O}$.*

On dit que f est analytique au voisinage de z_0, s'il existe un réel $r > 0$ tel que
$D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes tels que :

$$\forall z \in D(z_0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Définition 5. *On dit que f est analytique sur $\mathcal{O}$ si elle est analytique en tout point de $\mathcal{O}$.*

Propriétés des fonctions analytiques:

Propriété 1:
La somme de deux fonctions analytiques sur $\mathcal{O}$ est analytique sur $\mathcal{O}$.
En effet
Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad et \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \qquad \forall z \in D(z_0, r)$$

on a alors

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n.$$

Propriété 2:
Le produit de deux fonctions analytiques sur $\mathcal{O}$ est analytique sur $\mathcal{O}$.

En effet
Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad et \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \qquad \forall z \in D(z_0, r)$$

on a alors

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \ \text{ avec } \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Propriété 3:
La composée de deux fonctions analytiques sur $\mathcal{O}$ est analytique sur $\mathcal{O}$.
Ce sera une conséquence des définitions et proppriétés suivantes.

Fonctions holomorphes:

Définition 6. *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert non vide dans $\mathbb{C}$, et f une fonction de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$, on dit que f est dérivable ou holomorphe au point z_0 si*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \ \text{ existe.}$$

On note $f'(z_0)$ cette limite.

Théorème 6. *Si $f : \mathcal{O} \longmapsto \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$,$\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $f(\mathcal{O})$ et $g : \mathcal{O}' \longmapsto \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathcal{O}'$, alors $g \circ f$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$ avec $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.*

Démonstration. Même démonstration dans le cas réel. □

Théorème 7. *Si $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$ alors f est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si:*
1) f est differentiable au point (x_0,y_0)

$$i.e \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

existent et sont continues au voisinage du point (x_0,y_0).

2) les fonctions u et v verifient les conditions de Cauchy-Riemann: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$

Théorème 8. *Toute fonction analytique f sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ est holomorphe sur cet ouvert.*

Démonstration.

Soit f une fonction analytique sur $\mathcal{O}$. Pour $z_0 \in \mathcal{O}$, ou bien f est constante et dans ce cas le théorème est trivial. Ou bien f est non constante et dans ce cas, il existe un disque ouvert $D(z_0,r)$ avec $r > 0$, contenu dans le disque de convergence de la série entiére définssant f (car f est analytique) i.e.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0,\, r) \subset \mathcal{O}.$$

Et alors d'aprés les théorèmes sur les séries entiéres f est dérivable en tout point de $D(z_0,\, r)$, comme somme d'une série entiére de rayon de convergence positif, et sa dérivée pour $z \in D(z_0,\, r)$ est

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}.$$

Donc f est holomorphe sur $\mathcal{O}$. □

Enfin nous acceptons sans démonstration, le résultat important suivant. (Cf.[6])

Théorème 9. *Toute fonction holomorphe f sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ est analytique sur cet ouvert. On a donc :*

$$f \text{ est analytique sur } \mathcal{O} \Longleftrightarrow f \text{ est holomorphe sur } \mathcal{O}.$$

Démonstration de la propriété 3:
On a :

$$f \text{ est analytique sur } \mathcal{O} \Longleftrightarrow f \text{ est holomorphe sur } \mathcal{O}$$

donc d'aprés le théorème 6, on en déduit que la composée de deux fonctions analytiques sur $\mathcal{O}$ est analytique sur $\mathcal{O}$.

Propsition 2. *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, et T une fonction homographique*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \forall z \in \mathcal{O}\backslash\{-\frac{d}{c}\}.$$

Alors T est analytique sur $\mathcal{O}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$.

Démonstration. Soit T une fonction homographique

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Montrons que T est analytique sur $\mathcal{O}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$.
Pour cela on démontre que T est holomorphe sur $\mathcal{O}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$.
On a:
$az+b$ et $cz+d$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$ et comme T est le rapport de deux fonctions holomorphes , il en résulte que T est holomorphe sur $\mathcal{O}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$. $\square$

1.2.2 Théorème de convergence

Pour $p = 0,\, 1,\, 2, \cdots$ soient les transformations homographiques définies par:

$$\tau_p(w) = \frac{\alpha_p w + \beta_p}{\gamma_p w + \delta_p}, \text{ avec } \alpha_p,\, \beta_p,\, \gamma_p,\, \delta_p \in \mathbb{C} \quad \gamma_p \neq 0.$$

On considère maintenant la composée de $(n+1)$ transformations

$$\tau_0 \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n.$$

Si on écrit

$$\tau_p(w) = \frac{\alpha_p}{\gamma_p} - \frac{\Delta_p/\gamma_p^2}{\delta_p/\gamma_p + w}, \;\; \Delta_p = \alpha_p\delta_p - \beta_p\gamma_p.$$

On a

$$\tau_0 \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n(w) = \frac{\alpha_0}{\gamma_0} - \cfrac{\Delta_0/\gamma_0^2}{\frac{\delta_0}{\gamma_0} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} - \cfrac{\Delta_1/\gamma_1^2}{\frac{\delta_1}{\gamma_1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2} - \cdots - \cfrac{\Delta_{n-1}/\gamma_{n-1}^2}{\frac{\delta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} - \cfrac{\Delta_n/\gamma_n^2}{\frac{\delta_n}{\gamma_n} + w}}}}$$

Quand n tend vers ∞ et pour $w = \infty$, $\tau_0 \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n$ est appellée fraction continue complexe.

Si la limite de

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \tau_0 \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_n(\infty) = \nu$$

existe et finie, la fraction continue complexe est dite convergente, ν est la valeur de cette fraction continue.

Soient les transformations définies par:

$$t_0(w) = b_0 + w, \;\; t_p(w) = \frac{a_p}{b_p + w}, \;\; p = 1,2,3,\ldots$$

La fraction continue complexe obtenue est

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots}}.$$

On remarque que

$$t_0 \circ t_1 \circ \ldots \circ t_n(0) = t_0 \circ t_1 \circ \ldots \circ t_{n+1}(\infty).$$

La valeur de la fraction continue complexe est

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} t_0 \circ t_1 \circ \ldots \circ t_n(0) = \lim_{n \longrightarrow \infty} t_0 \circ t_1 \circ \ldots \circ t_n(\infty).$$

Définition 7.

$$t_0 \circ t_1 \circ \cdots \circ t_n(0) = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots + \frac{a_n}{b_n}}}$$

est appellée le n^{ime} approximant.

Propsition 3. *Avec ces notations on a*

$$t_0 \circ t_1 \circ \ldots \circ t_n(w) = \frac{A_{n-1}w + A_n}{B_{n-1}w + B_n}, \quad n = 0{,}1{,}2, \ldots$$

avec A_{n-1}, A_n, B_{n-1}, B_n *sont indépendantes de* w *et*

$$A_{-1} = 1,\ B_{-1} = 0,\ A_0 = b_0,\ B_0 = 1$$

$$A_{p+1} = b_{p+1}A_p + a_{p+1}A_{p-1} \qquad p = 0{,}1{,}2, \ldots$$

$$B_{p+1} = b_{p+1}B_p + a_{p+1}B_{p-1} \qquad p = 0{,}1{,}2, \ldots.$$

Démonstration.
Montrons par par récurrence

$$t_0 \circ t_1 \circ \ldots \circ t_n(w) = \frac{A_{n-1}w + A_n}{B_{n-1}w + B_n}, \quad n = 0{,}1{,}2, \ldots \qquad (**).$$

Pour $n = 0$ $(**)$ est vraie car $t_0(w) = b_0 + w$.

On suppose que $(**)$ est vraie pour $n = k$ et on démontre $(**)$ est vraie pour $n = k + 1$.

$$t_0 \circ t_1 \circ \ldots \circ t_{k+1}(w) = t_0 \circ t_1 \circ \ldots \circ t_k(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1} + w})$$
$$= \frac{A_k w + (b_{k+1}A_k + a_{k+1}A_{k-1})}{B_k w + (b_{k+1}B_k + a_{k+1}B_{k-1})}$$
$$= \frac{A_k w + A_{k+1}}{B_k w + B_{k+1}}.$$

Donc $(**)$ est vraie pour $n = k + 1$ par conséquent $(**)$ vraie pour tout n. □

Remarque

A_n est appellée le n^{ime} numérateur et B_n est le n^{ime} dénominateur. Le n^{ime} approximant est donnée par

$$t_0 \circ t_1 \circ \ldots \circ t_n(0) = \frac{A_n}{B_n}.$$

Propsition 4. *Avec ces notations nous avons:*

$$A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1} = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n \qquad n = 1{,}2, \ldots$$

Démonstration. Calculons le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} A_{n-1} & b_nA_{n-1}+a_nA_{n-2} \\ B_{n-1} & b_nB_{n-1}+a_nB_{n-2} \end{pmatrix} = -a_n det\begin{pmatrix} A_{n-2} & A_{n-1} \\ B_{n-2} & B_{n-1} \end{pmatrix}$$

On itère cette relation jusqu'a $n = 1$ et comme

$$det\begin{pmatrix} A_{-1} & A_0 \\ B_{-1} & B_0 \end{pmatrix} = 1.$$

Nous avons donc $A_{n-1}B_n - A_nB_{n-1} = (-1)^n a_1a_2\dots a_n \qquad n = 1{,}2,\dots$ □

Définition 8. *La fraction continue complexe*

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2+\dots}}$$

est dite convergente s 'il existe un nombre fini de ses dénominateurs B_p nuls, et la limite

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{A_n}{B_n}$$

existe et finie. La fraction continue complexe est dite divergente sinon.

Théorème 10. *Si la série $\sum|b_p|$ converge, alors la fraction continue complexe*

$$\cfrac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2+\frac{1}{b_3+\dots}}}$$

diverge. Les suites de ses numérateurs et dénominateurs pairs et impairs $(A_{2p})_p$, $(A_{2p+1})_p$, $(B_{2p})_p$, $(B_{2p+1})_p$ convergent vers les limites F_0,F_1,G_0,G_1 respectivement, avec

$$F_1G_0 - F_0G_1 = 1.$$

Démonstration. Nous avons d'aprés la proposition (3)

$$A_{2p} = b_{2p}A_{2p-1} + A_{2p-2}$$

car les a_n sont égaux à 1

$$A_{2p} = b_{2p}A_{2p-1} + b_{2p-2}A_{2p-3} + A_{2p-4}$$

$$A_{2p} = b_{2p}A_{2p-1} + b_{2p-2}A_{2p-3} + \ldots + b_2A_1$$

donc

$$A_{2p} = \sum_{r=1}^{p} b_{2r}A_{2r-1}.$$

Nous avons d'aprés les hypothèses la série $\sum |b_{2r}|$ est convergente.
Pour montrer que la suite $(A_{2p})_p$ est convergente il suffit de montrer que $|A_{2p-1}| < C$ avec C est une constante indépendante de p.

Montrons par récurrence que si $M > |A_{-1}|$ et $M > |A_0|$ alors

$$|A_n| \leq M(1 + |b_1|)(1 + |b_2|)\ldots(1 + |b_n|) \qquad (***).$$

Pour $n = 1$

$$|A_1| \leq |b_1||A_0| + |A_{-1}| \leq M(1 + |b_1|)$$

donc $(***)$ est vraie pour $n = 1$.
Pour $n = 2$

$$|A_2| \leq |b_2||A_1| + |A_0| \leq M|b_2|(1 + |b_1|) + M$$

$$|A_2| \leq M(1 + |b_1|)(1 + |b_2|)$$

donc $(***)$ est vraie pour $n = 2$.
supposont que $(***)$ est vraie pour $n = k - 1$ et montrons que $(***)$ est vraie pour $n = k$.
Nous avons

$$|A_k| \leq |b_k||A_{k-1}| + |A_{k-2}|$$

$$|A_k| \leq |b_k|M(1+|b_1|)(1+|b_2|)\ldots(1+|b_{k-1}|)+M(1+|b_1|)(1+|b_2|)\ldots(1+|b_{k-2}|)$$

$$|A_k| \leq M(1 + |b_1|)(1 + |b_2|)\ldots(1 + |b_k|)$$

donc il suffit de prendre

$$C = M\prod_1^{\infty}(1 + |b_p|)$$

car la série $\sum |b_p|$ est convergente par hopothèse donc

$$\prod_1^{\infty}(1 + |b_p|) \;\; \text{converge}$$

par conséquent la suite $(A_{2p})_p$ est convergente.
De la même manière on démontre que $(A_{2p+1})_p$, $(B_{2p})_p$, $(B_{2p+1})_p$ sont convergentes.
D'apres la proposition (4) on a:

$$A_{2p+1}B_{2p} - A_{2p}B_{2p+1} = 1$$

en passant à la limite on aura

$$F_1G_0 - F_0G_1 = 1.$$

La fraction continue est divergente car ses approximants oscillent entre les deux limites

$$\frac{F_0}{G_0} \text{ et } \frac{F_1}{G_1}.$$

□

Nous acceptons sans démonstration le résultat suivant (Cf [3]).

Lemme 1. *Soient*

$$\cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \dots}}}$$

une fraction continue complexe, $(A_n)_n$ *est la suite de ses numérateurs et* $(B_n)_n$ *et la suite de ses dénominateurs.*

$$s_p = \sum_{r=1}^{r=p} b_{2r}$$

$$\pi_k = \prod_{p=1}^{k}(1 + b_{2n+2p+1}s_{n+p}) \text{ avec } |b_{2p+1}s_p| < 1 \text{ pour } p \geq n$$

$$k = 1{,}2{,}3, \dots$$

Et soient

$$U_{2k} = \frac{A_{2n+2k+1}}{\pi_k}, \quad V_{2k} = \frac{B_{2n+2k+1}}{\pi_k}$$

$$U_{2k+1} = (A_{2n+2k+2} - s_{n+k+1}A_{2n+2k+1})\pi_k$$

$$V_{2k+1} = (B_{2n+2k+2} - s_{n+k+1}B_{2n+2k+1})\pi_k$$

$$k = 0{,}1{,}2, \dots, (\pi_0 = 1)$$

$$c_{2k} = \frac{b_{2n+2k+1}}{\pi_{k-1}\pi_k}, \quad c_{2k+1} = -b_{2n+2k+1}s_{n+k}^2\pi_{k-1}\pi_k \qquad k = 1,2,3,\dots$$

Alors on a

$$U_k = c_k U_{k-1} + U_{k-2}.$$

$$V_k = c_k V_{k-1} + V_{k-2}.$$

$$k = 2,3,4,\dots$$

Théorème 11. *Si les séries*

$$\sum |b_{2p+1}|$$

et

$$\sum |b_{2p+1}s_p^2|, \text{ où } s_p = \sum_{r=1}^{r=p} b_{2r}$$

sont convergentes, et

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} \inf |s_p| < \infty,$$

alors la fraction continue complexe

$$\frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

diverge. Les suites de ses numérateurs et dénominateurs impairs $(A_{2p+1})_p$ $(B_{2p+1})_p$ convergent vers les limites finies F_1 et G_1 respectivement.
Si la suite $(s_p)_p$ converge vers une limite finie s alors les suites $(A_{2p})_p$ et $(B_{2p})_p$ convergent vers les limites finies $F(s)$ et $G(s)$, respectivement et

$$F_1 G(s) - G_1 F(s) = 1.$$

finalement, si

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} s_p = \infty$$

alors on a

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} \frac{A_{2p}}{B_{2p}} = \frac{F_1}{G_1} \qquad (finie\ ou\ infinie).$$

Démonstration. Montrons que la série $\sum |b_{2p+1}s_p|$ est convergente.
• Si $|s_p| \leq 1$ alors on a

$$|b_{2p+1}s_p| \leq |b_{2p+1}|.$$

• Si $|s_p| > 1$ on a

$$|b_{2p+1}s_p| \leq |b_{2p+1}s_p^2|.$$

Comme les séries $\sum |b_{2p+1}|$ et $\sum |b_{2p+1}s_p^2|$ sont convergentes (par hypothèse), il en résulte que la série $\sum |b_{2p+1}s_p|$ est convergente.

La série $\sum |b_{2p+1}s_p|$ est convergente i.e il existe un indice $n \geq 1$ tel que

$$|b_{2p+1}s_p| < 1 \quad \text{pour } p \geq n.$$

Par suite

$$\pi_k = \prod_{p=1}^{k}(1 + b_{2n+2p+1}s_{n+p}) \qquad k \geq 1$$

sont différents de zéro et

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \pi_k = \prod_{p=1}^{\infty}(1 + b_{2n+2p+1}s_{n+p})$$

converge et sa valeur et différente de zéro.
Soient

$$U_{2k} = \frac{A_{2n+2k+1}}{\pi_k}, \;\; V_{2k} = \frac{B_{2n+2k+1}}{\pi_k}$$

$$U_{2k+1} = (A_{2n+2k+2} - s_{n+k+1}A_{2n+2k+1})\pi_k$$

$$V_{2k+1} = (B_{2n+2k+2} - s_{n+k+1}B_{2n+2k+1})\pi_k$$

$$k = 0,1,2,\ldots,(\pi_0 = 1)$$

$$c_{2k} = \frac{b_{2n+2k+1}}{\pi_{k-1}\pi_k}, \quad c_{2k+1} = -b_{2n+2k+1}s_{n+k}^2\pi_{k-1}\pi_k \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

D'aprés le lemme (1) nous avons

$$U_k = c_kU_{k-1} + U_{k-2}$$

$$V_k = c_kV_{k-1} + V_{k-2}$$

$$k = 2,3,4,\ldots$$

Comme

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \pi_k = \prod_{p=1}^{\infty}(1 + b_{2n+2p+1}s_{n+p})$$

est convergent et les séries $\sum |b_{2p+1}|$, $\sum |b_{2p+1}s_p^2|$ sont convergentes (par hypothèse), il en résulte que
$$\sum |c_p|$$
est convergente.
Nous avons d'aprés le théorème (10) les suites $(U_{2k})_k$, $(U_{2k+1})_k$, $(V_{2k})_k$, $(V_{2k+1})_k$ sont convergentes, et donc les limites

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} A_{2p+1} = F_1, \qquad \lim_{p\longrightarrow\infty} B_{2p+1} = G_1 \qquad (1)$$

et

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} A_{2p} - s_pA_{2p-1} = X \qquad (2)$$

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} B_{2p} - s_pB_{2p-1} = Y \qquad (3)$$

exitent et sont finies.
D'aprérs la proposition (4) on a

$$A_{2p-1}(B_{2p}-s_pB_{2p-1})-B_{2p-1}(A_{2p}-s_pA_{2p-1}) = A_{2p-1}B_{2p}-B_{2p-1}A_{2p} = 1 \qquad (4).$$

En passant à la limite on aura

$$F_1Y - G_1X = 1$$

Soit s la limite finie de la suite $(s_p)_p$, nous avons d'aprés (1),(2),(3)

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} A_{2p} = sF_1 + X = F(s).$$

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} B_{2p} = sG_1 + Y = G(s).$$

D'aprés (4) on a
$$F_1G(s) - G_1F(s) = 1.$$
Montrons maintenant
$$\lim_{p\longrightarrow\infty} \frac{A_{2p}}{B_{2p}} = \frac{F_1}{G_1}.$$
On a $\lim_{p\longrightarrow\infty} s_p = \infty$ (par hypothèse).

$$\frac{A_{2n+2p}}{B_{2n+2p}} = \frac{A_{2n+2p-1} + \frac{U_{2p-1}}{\pi_{p-1}s_{n+p}}}{B_{2n+2p-1} + \frac{V_{2p-1}}{\pi_{p-1}s_{n+p}}}.$$

En passant à la limite on aura

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \frac{A_{2p}}{B_{2p}} = \frac{F_1}{G_1} \qquad \text{(finie ou infinie).}$$

$\square$

Théorème 12. *Soit*

$$\cfrac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

une fraction continue complexe et soient les séries

$$\sum |b_{2p+1}|, \quad \sum |b_{2p+1} s_p^2| \;\; \text{avec} \;\; s_p = \sum_{r=1}^{r=p} b_{2r}.$$

Si

1. $\sum |b_{2p+1}|$ *et* $\sum |b_{2p+1} s_p^2|$ *sont convergentes.*
2. $\lim s_p = \infty$
3. $\mathcal{R}(b_1) > 0$ *et* $\mathcal{R}(b_p) \geq 0 \qquad p = 2{,}3{,}4, \dots$

Alors

1. *la fraction continue*

$$\cfrac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

est convergente.

2. *la valeur ν de la fraction vérifie l'inégalité*

$$|\nu - \frac{1}{2\mathcal{R}(b_1)}| \leq \frac{1}{2\mathcal{R}(b_1)}$$

Idée de la démonstration

Nous avons d'aprés les hypothèses $\sum |b_{2p+1}|$ et $\sum |b_{2p+1} s_p^2|$ sont convergentes et $\lim s_p = \infty$, donc d'aprés le théorème(11)

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \frac{A_{2p}}{B_{2p}} = \frac{F_0}{G_0} = \lim_{p \longrightarrow \infty} \frac{A_{2p+1}}{B_{2p+1}} = \frac{F_1}{G_1} \qquad \text{(finie ou infinie).}$$

Pour montrer que la fraction est convergente il suffit de montrer que

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} \frac{A_p}{B_p} = \frac{F_1}{G_1} \qquad \text{est finie.}$$

Soient les transformations homographiques définies par

$$t_p(w) = \frac{1}{b_p + w}.$$

Avec les hypothèses $\mathcal{R}(b_1) > 0$ et $\mathcal{R}(b_p) \geq 0$ on a admet l' inégalité suivante

$$|t_1(w) - \frac{1}{2\mathcal{R}(b_1)}| \leq \frac{1}{2\mathcal{R}(b_1)}.$$

On a

$$t_1 \circ t_2 \circ \dots t_p(0) = \frac{A_p}{B_p}$$

donc

$$|\frac{A_p}{B_p} - \frac{1}{2\mathcal{R}(b_1)}| \leq \frac{1}{2\mathcal{R}(b_1)} \qquad p \geq 1.$$

En passant à la limite il en résulte que la fraction continue est convergente et sa valeur ν vérifie l'inégalité

$$|\nu - \frac{1}{2\mathcal{R}(b_1)}| \leq \frac{1}{2\mathcal{R}(b_1)}.$$

Chapitre 2

Introduction à l'etude de systèmes dynamiques

2.1 Introduction

Si $F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots$ sont des fonctions aléatoires indépendantes, nous nous s'interessons au comportement asymptotique de systèmes dynamiques $(X_n)_n$ définis par la donnée d'une variable aléatoire X_0 et

$$\forall\ n > 0 \quad X_n = F_n \circ X_{n-1}$$

A l'heure actuelle, il n'existe pas de théorie générale pour l'étude de ce type de processus. Dans le cas ou les fonctions F_n sont générées par des variables aléatoires Y_n indépendantes de nombreux travaux ont été effectués ces dernières années. Dans le cas de fonctions affines ou linéaires cela débouche sur l'étude des Marches aléatoires, branche trés active en Calcul de Probabilités et dont l'étude est avancée. En général, les fonctions F_n s'expriment sous forme de fonctions non linéaires des Y_n. Les travaux actuels se concentrent sur le comportement limite de $(X_n)_n$, dans ce cas(Cf. travaux de Marius, Bougerol, Letac, Guivarch's,...).

Pour $x,y \in \mathbb{R}$, soit $f(x,y) = f_y(x)$ une fonction réelle. Si $(Y_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, soit

$F_n = f_{Y_n}$. Dans ce cas $(X_n)_n$ est la chaîne de Markov, définie par:X_0 une variable aléatoire donnée et

$$\forall n > 0, \ \ X_n = f_{Y_n} \circ X_{n-1}$$

On peut envisager par exemple les cas où $f_y(x) = y\ x(1-x)$ ou le cas $f_y(x) =\mid x - y \mid$. Nous disposons de quelques observations, résultat du travail de B. Bessad sur le 1er cas. Le 2éme cas est intensement étudié(Cf. Feller p.208).

Nous nous plaçons, dans le cas où les fonctions f_y sont non linéaires tout en ayant quelque propriétés de contraction. Plus exactement, nous nous posons la question de savoir à quelles conditions sur les Y_n ou $f_y(x)$ $(X_n)_n$ admet une limite, dans un sens à préciser. Et si cette limite n'existe pas que peut-on dire de la récurrence de la chaîne de Markov associée $(X_n)_n$. Dans le cas de la chaîne de Markov associée $(X_n)_n$, avec $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$,on a $\lim X_n$ n'existe dans aucun sens. Cependant d'aprés Feller, la chaîne de Markov associée $(X_n)_n$ sur $\mathbb{R}$ est récurente car elle admet une mesure stationnaire bornée.

Cependant nous avons la proposition suivante qui montre que dans certains cas la limite de la suite $(X_n)_n$ existe.

Propsition 1. *Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et soit $f_y(x) = y + g(x)$, la fonction réelles des variables réelles x et y, avec g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et tel que $\mid g' \mid \leq k < 1$. Si $(X_n)_n$ est la chaîne de Markov définie par: X_0 une variable aléatoire donnée et indépendante des Y_n et pour $n \geq 1$,*

$$X_n = f_{Y_n}(X_{n-1}),$$

alors $\lim_n X_n$ existe p.s.

2.2 Systèmes dynamiques et fractions continues: Cas de l'itération de $f_y(x) = y + \frac{1}{x}$

Soit pour tout $x \in [a,b[\subset [1,\infty[$,

$$f_y(x) = y + g(x) \text{ avec } g(x) = \frac{1}{x}$$

La chaîne de Markov dans ce cas est définie par

$$X_n^x = f_{Y_n} \circ X_{n-1}^x \text{ pour } n \geq 1 \quad \text{avec } X_0^x = x$$

$$X_n^x = Y_n + \frac{1}{Y_{n-1} + \frac{1}{Y_{n-2} + \cdots + \frac{1}{x}}}$$

Nous avons:

$$|g'(x)| = |-\frac{1}{x^2}| < \frac{1}{a^2} < 1$$

D'aprés la proposition (1) la chaîne de Markov définie par l'algorithme aléatoire

$$f_y(x) = y + \frac{1}{x}$$

converge p.s

Soit le processus $(H_n^x)_n$ définie par:

$$H_n^x = f_{Y_1} \circ f_{Y_2} \circ \ldots f_{Y_n}(x) \text{ pour } n \geq 1 \quad \text{avec } X_0^x = x$$

H_n^x converge p.s vers la variable aléatoire H_∞
conséquence:
la chaîne de Markov

$$(X_n^x)_n \text{ avec } X_n^x = f_{Y_n} \circ X_{n-1}^x \text{ et } X_0^x = x$$

converge en loi vers la loi de H_∞

En effet

les processus $(X_n^x)_n$, $(H_n^x)_n$ ont même loi car $\forall n$, $\mathcal{L}(H_n^x)$ est déterminée par les lois de $Y_1 \ldots Y_n$ et $\mathcal{L}(X_n^x)$ est déterminée par les lois de $Y_n \ldots Y_1$. Mais $\mathcal{L}(Y_1 \ldots Y_n) = \mathcal{L}(Y_n \ldots Y_1)$

Nous nous appuyons dans notre étude sur le Principe de Contraction (Cf. [5]).

Théorème 1 (Principe de contraction). *Soient $(E,\mathcal{E})$ un espace localement compact, $(F,\mathcal{F},Q)$ un espace de probabilité, et $f : E \times F \longrightarrow E$ une* *fonction tel que pour tout y fixé* $x \longrightarrow f(x,y) = f_y(x)$ *est continue, et soit* $(H_n^x)_n$ *le processus définie par:*

$$H_n^x = f_{Y_1} \circ f_{Y_2} \circ \dots f_{Y_n}(x)$$

avec $(Y_n)_n$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et de même loi* Q *et indépendante de* x.

Si $\lim_{n\to\infty} H_n^x = H$ *existe p.s et ne dépend pas de* x *alors* $\pi = \mathcal{L}(H)$ *est une loi stationnaire pour le noyau* P *.*

Pour démontrer ce théorème on a besoin de la proposition suivante.

Propsition 2. *avec ces notations nous avons si* X_n^x *le processus défini par*

$$X_n^x = f_{Y_n} \circ X_{n-1}^x$$

$(\pi_n^x)_n = \mathcal{L}(X_n^x)$, *et si* $(\pi_n^x)_n$ *converge vaguement vers* π, *et ne dépend pas de* x, *alors* π *est une loi stationnaire pour le noyau* P.

Démonstration. Soit $C(E)$={ les fonction continue bornées sur E }
On a π_n^x converge vaguement vers π

$$\text{i.e } \forall g \in C(E) \quad \int_E g(x)\pi_n^x(dx) \to \int_E g(x)\pi(dx).$$

Montrons que:

$$\int_E g(x_1)\pi_n^x(dx_1) = \int_{E\times F} g(f_y(x_1))\pi_{n-1}^x(dx_1)Q(dy) \qquad (*)$$

On a:

$$\pi_n^x(dx_1) = P[X_n^x \in dx_1] = P[f_{Y_n}(X_{n-1}^x) \in dx_1] = P[X_{n-1}^x \in f_y^{-1}(dx_1), Y_n \in dy]$$

soit Q la loi des $(Y_n)_n$ on a donc

$$P[X_{n-1}^x \in f_y^{-1}(dx_1), Y_n \in dy] = P[X_{n-1}^x \in f_y^{-1}(dx_1)]Q(dy) = \pi_{n-1}^x(f_y^{-1}(dx_1))Q(dy).$$

donc

$$\int_E g(x_1)\pi_n^x(dx_1) = \int_F \int_E g(f_y(x_2))\pi_{n-1}^x(dx_2)Q(dy) = \int_{E\times F} g(f_y(x_1))\pi_{n-1}^x(dx_1)Q(dy).$$

Montrons maintenant que:

$$x_1 \to \int_F g(f_y(x_1))Q(dy) \ \text{ est continue.}$$

En effet
$x \to f_y(x)$ est continue (par hypothèse), donc si $(x_n)_n$ converge vers x_1 alors

$$f_y(x_n) \to f_y(x_1).$$

et d'autre part g est continue car $g \in C(E)$ donc

$$\lim_{n\to\infty} g(f_y(x_n)) = g(\lim_{n\to\infty} f_y(x_n)) = g(f_y(x_1)).$$

et comme g est bornée on a:

$$\lim_{n\to\infty} \int_F g(f_y(x_n))Q(dy) = \int_F \lim_{n\to\infty} g(f_y(x_n))Q(dy) = \int_F g(f_y(x_1))Q(dy).$$

donc

$$x_1 \to \int_F g(f_y(x_1))Q(dy) \text{ est continue.}$$

En passant à la limite dans la relation $(*)$ on aura:

$$\int_E g(x_1)\pi(dx_1) = \int_{E\times F} g(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy) \qquad (**)$$

En effet

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g(x_1)\pi_n^x(dx_1) = \int_E g(x_1)\pi(dx_1) \text{ (car } g \in C(E) \text{ et } \pi_n^x \text{ converge vaguement vers } \pi)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E\times F} g(f_y(x_1))\pi_{n-1}^x(dx_1)Q(dy) = \int_{E\times F} g(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy)$$

(car $x_1 \to \int_F g(f_y(x_1))Q(dy)$ est continue et π_n^x converge vaguement vers π)
En posant

$$g = \lim_{n\to\infty} g_n \text{ avec } g_n = 1_B,\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

dans la relation $(**)$ on aura

$$(**) \Longleftrightarrow \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x_1)\pi(dx_1) = \int_{E\times F} \lim_{n\to\infty} g_n(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy)$$

$$(**) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x_1)\pi(dx_1) = \lim_{n\to\infty} \int_{E\times F} g_n(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy)$$

$$(**) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E 1_B(x_1)\pi(dx_1) = \lim_{n\to\infty} \int_{E\times F} 1_B(f_y(x_1))\pi(dx_1)Q(dy)$$

$$(**) \Longrightarrow \pi(B) = \int_E P(B,x_1)\pi(dx_1)$$

i.e π est stationnaire pour le noyau P. □

Démonstration. (théorème (1))

$$\lim_{n\to\infty} H_n^x = H \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(H_n^x) = \mathcal{L}(H)$$

comme

$$\mathcal{L}(H_n^x) = \mathcal{L}(X_n^x)$$

et d'aprérs la proposition (2) $\pi = \mathcal{L}(H)$ est stationnaire pour le noyau P. □

Chapitre 3

Théorème ergodique de Birkhoff et fractions continues

3.1 Transformation de Gauss

Rappelons que si $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité et $T : \Omega \to \Omega$ une transformation , on dit que T préserve la mesure si T est mesurable et

$$\forall\ A \in \mathcal{A},\ P[T^{-1}(A)] = P[A].$$

Un évenement A est dit alors invariant si $T^{-1}(A) = A$. On note alors par $\mathcal{J}$, la tribu des événements invariants. La transformation T est dite ergodique si $\forall\ A \in \mathcal{J}$

$$P[A] = 0 \ \text{ ou } \ 1.$$

Rappelons maintenant le théorème ergodique de Birkhoff

Théorème 1. *Si f est une fonction de $L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$, et si T est ergodique alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k w) = \int_\Omega f\ dp \qquad p.s$$

Propsition 1. *Dans l'espace de probabilité* $(]0,\ 1[,\mathcal{B}_{]0,\ 1[},m)$*, où* m *est la mesure définie par*

$$m(dx) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}dx,$$

soit T *l'application définie pour* $x \in]0{,}1[$ *par:*

$$T(x) = \frac{1}{x} - E(\frac{1}{x}).$$

T *est appelée Transformation de Gauss.*

Alors T *préserve la mesure* m*.*

Démonstration. Commençons par expliciter l'action de T sur les fractions continues arithmétiques. On a: si $x = [a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots]$ alors

$$T(x) = [a_1,a_3,\cdots,a_n,\cdots].$$

En effet: $a_1 = E(x) = 0$ car $x \in]0{,}1[$.

$$x = \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\cdots}}} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x} = a_2 + \frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\cdots}}.$$

$$\frac{1}{x} - E(\frac{1}{x}) = \frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\cdots}} = a_1 + \frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\cdots}}.$$

Donc $T(x) = [a_1,a_3,\cdots,a_n,\cdots]$.

Montrons à présent que T est mesurable.

Pour montrer que T est mesurable il suffit de montrer que T est continue sur $]0{,}1[$.

Soient f et g les fonctions définies pour $x \in]0{,}1[$ par,

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x - E(x).$$

Alors on a

$$T(x) = g(f(x)) = f(x) - E(f(x)) = \frac{1}{x} - E(\frac{1}{x}).$$

f est continue sur $]0{,}1[$.

g est continue sur $]0{,}1[$ car $g(x) = x \quad \forall x \in]0{,}1[$.

Donc $T = gof$ est continue sur $]0{,}1[$ et par conséquent T est mesurable.

Rappelons que la mesure m définie sur $(]0,1[,\mathcal{B}_{]0,1[})$ par:

$$m(A) = \frac{1}{\ln 2}\int_A \frac{dx}{1+x}\ , \qquad A \in \mathcal{B}_{]0,1[}$$

est appelée la mesure de Gauss.

Montrons à présent que T préserve m. Il suffit de verifier que T préserve la mesure des intervalles de la forme $]0,\alpha[, \quad \alpha < 1$.

$$\text{i.e} \quad m(]0,\alpha[) = m(T^{-1}(]0,\alpha[)).$$

Montrons que

$$T^{-1}(]0,\alpha[) = \bigcup_{k\geq 1}]\frac{1}{k+\alpha},\frac{1}{k}[.$$

Soit $x \in \ T^{-1}(]0,\alpha[)$, il s'agit de montrer que

$$\exists k \geq 1 \ \text{ tel que } \ x \in \ ]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}[.$$

$$x \in \ T^{-1}(]0,\alpha[) \Longleftrightarrow x \in \ ]0,\alpha[\Longleftrightarrow T(x) \in \ ]0,\alpha[$$

en posant

$$k = E(\frac{1}{x})$$

On aura

$$\frac{1}{x} - k \in \ ]0,\alpha[\Longleftrightarrow \ 0 < \frac{1}{x} - k < \alpha \Longleftrightarrow \frac{1}{k+\alpha} < x < \frac{1}{k}.$$

D'où

$$T^{-1}(]0,\alpha[) \subset \bigcup_{k\geq 1}]\frac{1}{k+\alpha},\frac{1}{k}[\qquad\qquad (*)$$

Montrons maintenant

$$\bigcup_{k\geq 1}]\frac{1}{k+\alpha},\frac{1}{k}[\ \subset T^{-1}(]0,\alpha[).$$

Il s'agit de montrer que $\forall k \geq 1$

$$]\frac{1}{k+\alpha},\frac{1}{k}[\ \subset T^{-1}(]0,\alpha[)$$

$$\text{soit} \quad x \in \left]\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\right[$$

$$x \in \left]\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\right[\Longleftrightarrow \frac{1}{k+\alpha} < x < \frac{1}{k} \Longleftrightarrow k < \frac{1}{x} < k+\alpha.$$

Comme

$$k < \frac{1}{x} < k+\alpha \quad \text{donc} \quad E(\frac{1}{x}) = k \quad \text{car} \quad \alpha < 1$$

Donc

$$0 < \frac{1}{x} - E(\frac{1}{x}) < \alpha \Longleftrightarrow T(x) \in]0,\alpha[\quad \text{donc} \quad x \in T^{-1}(]0,\alpha[)$$

D'où

$$\bigcup_{k\geq 1} \left]\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\right[\subset T^{-1}(]0,\alpha[) \qquad (**)$$

De $(*)$ et $(**)$ en déduit que

$$T^{-1}(]0,\alpha[) = \bigcup_{k\geq 1} \left]\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\right[$$

On a:

$$m(T^{-1}(]0,\alpha[)) = m(\bigcup_{k\geq 1} \left]\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\right[) = \sum_{k\geq 1} m(\left]\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\right[)$$

donc

$$m(T^{-1}(]0,\alpha[)) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k\geq 1} \int_{\frac{1}{k+\alpha}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{1+x}$$

$$m(T^{-1}(]0,\alpha[)) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k\geq 1} \ln(1+\frac{1}{k}) - \ln(1+\frac{1}{k+\alpha})$$

Or

$$\ln(1+\frac{1}{k}) - \ln(1+\frac{1}{k+\alpha}) = \ln((\frac{k+1}{k})(\frac{k+\alpha}{k+\alpha+1})) = \ln((\frac{k+\alpha}{k})(\frac{k+1}{k+\alpha+1}))$$

$$\ln((\frac{k+\alpha}{k})(\frac{k+1}{k+\alpha+1})) = \ln(1+\frac{\alpha}{k}) - \ln(1+\frac{\alpha}{k+1})$$

donc

$$m(T^{-1}(]0,\alpha[)) = \frac{1}{\ln 2}\sum_{k\geq 1}\ln(1+\frac{\alpha}{k}) - \ln(1+\frac{\alpha}{k+\alpha})$$

d'où

$$m(T^{-1}(]0,\alpha[)) = \frac{1}{\ln 2}\sum_{k\geq 1}\int_{\frac{\alpha}{k+\alpha}}^{\frac{\alpha}{k}}\frac{dx}{1+x}$$

et comme

$$]0,\alpha[=\bigcup_{k\geq 1}]\frac{\alpha}{k+1},\frac{\alpha}{k}[$$

finalement:

$$m(T^{-1}(]0,\alpha[)) = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{\alpha}\frac{dx}{1+x} = m(]0,\alpha[).$$

□

Avec ces notations, nous admettons le théorème suivant (Cf [4]).

Théorème 2. *(Billingsley 1965)*

T est ergodique pour la mesure m.

3.2 Application du théorème de Birkhoff aux fractions continues

Propsition 2. *Soit $x \in]0,1[$ tel que*

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\cdots}}} = [a_1,a_2,a_3,\ldots]$$

alors

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k^2+2k})^{\frac{\ln k}{\ln 2}} \quad m-pp$$

avec m la mesure de Gauss.

Démonstration.

Soit T la transformation de Gauss

$$\text{i.e} \quad T(x) = \frac{1}{x} - E(\frac{1}{x})$$

Nous voulons appliquer le théorème de Birkhoff pour la transformation de Gauss T. Montrons que si

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}} = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

alors

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + T^n(x)] \text{ avec } a_k = E(\frac{1}{T^{k-1}(x)}), \qquad k = 1,2,\ldots$$

En effet, si $x \in]0,1[$ alors $\frac{1}{x} > 1$, et:

$$\frac{1}{x} = E(\frac{1}{x}) + T(x)$$

Par conséquent

$$x = [a_1 + T(x)] = \frac{1}{a_1 + T(x)}, \text{ avec } a_1 = E(\frac{1}{x}) \qquad (1)$$

Si $T(x) = 0$, alors $x = [a_1, 0, 0, \ldots]$, sinon

$$\frac{1}{T(x)} = E(\frac{1}{T(x)}) + T^2(x) \qquad (2).$$

Il suit de (1) et (2) que:

$$x = [a_1, a_2 + T^2(x)] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + T^2(x)}} \text{ avec } a_2 = E(\frac{1}{T(x)}).$$

donc si $T(x), T^2(x), \ldots, T^n(x)$ sont non nuls, on obtient par récurrence:

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + T^n(x)] \text{ avec } a_k = E(\frac{1}{T^{k-1}(x)}), \qquad k = 1,2,\ldots$$

Montrons maintenant que si

$$a_k(x) = a_k = E(\frac{1}{T^{k-1}(x)}) \qquad (3)$$

alors

$$a_k(x) = a_k = a_1(T^{k-1}(x)) \qquad (4)$$

d'aprés (3)

$$a_k(T(x)) = a_{k+1}(x)$$

et donc

$$a_k(x) = a_1(T^{k-1}(x))$$

Soit alors la fonction f définie par $f(x) = \ln(a_1(x))$.

D'aprés (3), nous avons

$$a_1(x) = a_1 = E(\frac{1}{x}).$$

On remarque que $a_1(x) = k$ pour

$$x \in]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}[, \; k = 1,2,\ldots,$$

car

$$x \in]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}[\Longleftrightarrow k < \frac{1}{x} < k+1 \;\; \text{donc} \;\; E(\frac{1}{x}) = a_1(x) = k.$$

Donc $f(x) = \ln(k)$ pour

$$x \in]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}[, \; k = 1,2,\ldots.$$

Par suite, $f \in L^1_m(]0,1[)$. En effet

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{f(x)}{1+x}dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\ln k}{1+x}dx = \sum_{k=1}^{\infty} \ln k \ln(1+\frac{1}{k^2+2k}).$$

On a:

$$\ln k \ln(1+\frac{1}{k^2+2k}) \sim \ln k \frac{1}{k^2+2k} = \frac{\ln k}{k^2+2k}.$$

On pose

$$U_k = \frac{\ln k}{k^2+2k}$$

et

$$V_k = \frac{1}{k^\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2$$

On a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{U_k}{V_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\ln k^{2-\alpha}} = 0$$

$$\text{Comme } \sum_{k=1}^{\infty} V_k \text{ converge donc } \sum_{k=1}^{\infty} U_k \text{ converge}$$

Par conséquent, cela montre que nous avons bien $f \in L^1_m(]0,1[)$.

Appliquons à présent le théorème ergodique de Birkhoff. Nous avons, d'aprŕes la relation (4)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\ a_1(T^k(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\ a_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\ a_k$$

Comme cela vient d'être montré, $f \in L^1_m(]0,1[)$, T présérvant la mesure m et ergodique, Nous avons donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln a_k \to \frac{1}{ln2}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx \quad m-pp.$$

Mais

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln a_k = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k^{\frac{1}{n}} = \ln(\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}})$$

et

$$\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx = \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\ln k}{1+x}dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{\ln 2}\ln(1+\frac{1}{k^2+2k})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{\ln 2}\ln(1+\frac{1}{k^2+2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{(k^2+2k})^{\frac{\ln k}{\ln 2}}) = \ln(\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k^2+2k})^{\frac{\ln k}{\ln 2}})$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}}) = \ln(\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k^2+2k})^{\frac{\ln k}{\ln 2}}) \quad m-pp \qquad (5)$$

finalement

$$(5) \Longleftrightarrow \exp(\lim_{n\to\infty} \ln(\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}})) = \exp(\ln(\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k^2+2k})^{\frac{\ln k}{\ln 2}})) \quad m-pp$$

$$\text{i.e} \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{k^2+2k})^{\frac{\ln k}{\ln 2}} \quad m - pp$$

□

Chapitre 4

Marche aléatoire dans $\mathbb{N}$ et fractions continues

4.1 Préliminaires et définitions

Soit $(X_n)_n$ la marche aléatoire d'espace des états $\mathbb{N}$, de probabilités de transition $(p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ définies par $\forall i,j \in \mathbb{N}$, $p_{ij} = p[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$ avec $p_{01} = 1$, $p_{i\ i-1} = g_i$,et $p_{i\ i+1} = 1 - g_i$ avec $0 < g_i < 1 \quad i = 1,2,\ldots$ et $p_{ij} = 0$ si $j \neq i \pm 1$. Il est immédiat que $(X_n)_n$ est irréductible, i.e. tous les états communiquent.

Pour $j \in \mathbb{N}$, soit T_j la variable aléatoire à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}}$, définie par $T_j = \inf\{n > 0,\ X_n = j\}$, s'il existe $n > 0$ tel que $X_n = j$ et $T_j = +\infty$ sinon. T_j est donc le premier instant où la chaîne rentre dans l'état j. Soit $f_{ij}^{(n)} = P[T_j = n|X_0 = i]$.

Soit $p_{ij}^{(n)} = P[X_n = j|X_0 = i]$ et soient $F_0(z)$ et $G_0(z)$ les fonctions définies par:

$$F_0(z) = \sum_{k\geq 1} f_{00}^{(2k)} z^k$$

.

$$G_0(z) = \sum_{k\geq 1} p_{00}^{(2k)} z^k$$

. $F_0(z)$ et $G_0(z)$ sont les fonctions génératrices des lois conditionnelles à $X_0 = i$ de T_j et X_n respectivement.

4.2 Étude de comportement asymptotique

Nous avons avec ces notations, d'après Gerl (Cf. [2]) la proposition suivante:

Propsition 1 (Gerl 1984).

$$a) F_0(z) = \frac{g_1 z}{1 - \frac{(1-g_1)g_2 z}{1 - \frac{(1-g_2)g_3 z}{1 - \dots}}}.$$

$$b) G_0(z) = \frac{1}{1 - \frac{g_1 z}{1 - \frac{(1-g_2)g_3 z}{1 - \dots}}}.$$

Il nous sera utile pour exposer la démonstration de proposition (1) (Gerl 1984), d'établir la proposition suivante

Propsition 2. *Soient*

$$G^1_{xy}(z) = \sum_{n \geq 0} p^{(n)}_{xy} z^n \quad \text{et} \quad F^1_{xy}(z) = \sum_{n \geq 1} f^{(n)}_{xy} z^n$$

alors

$$G^1_{xy}(z) = \delta_{xy} + F^1_{xy}(z) G^1_{yy}(z).$$

Démonstration.

Nous reproduisons la démonstration du cours de 3^{ime} A.

$$p^{(n)}_{xy} = p[X_n \mid X_0 = x] = p[\{X_n = y\} \cap (\bigcup_{k=1}^{k=n} \{T_y = k\}) \mid X_0 = x]$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} p[\{X_n = y\} \cap \{T_y = k\} \mid X_0 = x] = \sum_{k=1}^{k=n} p[\{T_y = k\} \mid X_0 = x]$$

En tenant compte, grace au caractère markovien, que

$$p[X_n = y \mid T_y = k, X_0 = x] = p[x_n = y \mid X_k = y, X_{k-1} \neq y, \dots, X_1 \neq y, X_0 = x] \quad (*)$$

$$(*) = p[X_n = y \mid X_k = y] = p^{(n-k)}_{yy}.$$

On a donc

$$p_{xy}^{(n)} = \sum_{1}^{n} f_{xy}^{(k)} p_{yy}^{(n-k)}.$$

Nous avons:

$$G_{xy}^1(z) = \delta_{xy} + \sum_{n\geq 1} p_{xy}^{(n)} z^{(n)} = \delta_{xy} + \sum_{n\geq 1}(\sum_{m=1}^{m=n} f_{xy}^{(m)} p_{yy}^{(n-m)}) z^{n-m} z^m$$

$$G_{xy}^1(z) = \delta_{xy} + \sum_{m\geq 1} f_{xy}^{(m)} z^m + \sum_{n\geq m} p_{yy}^{(n-m)}) z^{n-m}$$

$$G_{xy}^1(z) = \delta_{xy} + \sum_{m\geq 1} f_{xy}^{(m)} z^m + \sum_{k\geq 0} p_{yy}^{(k)}) z^k$$

$$\text{i.e} \qquad G_{xy}^1(z) = \delta_{xy} + F_{xy}^1(z) G_{yy}^1(z).$$

□

Idée de la démonstration de la proposition 1 (Gerl 1984)

Gerl donne en référence R.A Howard: Dynamic probabilistic systems, pour la formule suivante:

$$F_{i-1}(z) = \frac{(1-g_{i-1})g_i z}{1-F_i(z)}$$

Nous n'avons pas pu acceder a cette source. En admettant cette formule, le (a) est immédiat.
Montrons maintenant le (b), pour cela il suffit de montrer que:

$$G_0(z) = \frac{1}{1-F_0(z)}$$

D'aprés la proposition (2), si $x = y$, on aura

$$G_{xx}^1(z) = 1 + F_{xx}^1(z) G_{xx}^1(z) \qquad (1)$$

On remarque que:

$$\sum_{n\geq 0} p_{xy}^{(n)} z^n = \sum_{n\geq 0} p_{xy}^{(2n)} z^{2n} \qquad \text{car} \qquad p_{xy}^{(2n+1)} = 0,\ \ n \geq 0$$

$$\text{i.e } \; si \; G_{xy}(z) = \sum_{n\geq 0} p_{xy}^{(2n)} z^n \; \text{ alors } \; G_{xy}(z) = G_{xy}^1(z') \; \text{ avec } \; z'^2 = z \tag{2}$$

et

$$\sum_{n\geq 0} f_{xy}^{(n)} z^n = \sum_{n\geq 0} f_{xy}^{(2n)} z^{2n} \quad \text{car} \quad f_{xy}^{(2n+1)} = 0, \; n \geq 0$$

$$\text{i.e } \; si \; F_{xy}(z) = \sum_{n\geq 0} f_{xy}^{(2n)} z^n \; \text{ alors } \; F_{xy}(z) = F_{xy}^1(z') \; \text{ avec } \; z'^2 = z \tag{3}$$

D'aprérs (1) on a

$$G_{xx}^1(z') = 1 + F_{xx}^1(z') G_{xx}^1(z')$$

$$\text{i.e } \; G_{xx}^1(z') = \frac{1}{1 - F_{xx}^1(z')} \tag{4}$$

D'aprérs (2), (3),(4) et pour $x = 0$ on a:

$$G_0(z) = \frac{1}{1 - F_0(z)} \tag{5}$$

D'aprés le (a) et (5) on obtient:

$$G_0(z) = \frac{1}{1 - \frac{g_1 z}{1 - \frac{(1-g_2)g_3 z}{1 - \dots}}}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque:
Les séries $G_0(z)$ et $F_0(z)$ convergent pour $|z| < 1$.
En effet

$$|p_{00}^{(2k)}| \leq |z^k|, \; \text{ la serie } \; \sum_{k\geq 0} z^k \; \text{ converge si } \; |z| < 1$$

donc si

$$|z| < 1 \; \text{ alors la serie } \; \sum_{k\geq 0} p_{00}^{(2k)} z^k \; \text{ converge.}$$

idem pour la serie

$$\sum_{k\geq 0} f_{00}^{(2k)} z^k$$

.

Théorème 1 (H.S Wall). .
Soient g_1,g_2,g_3,$\ldots$ des constants tel que $0 \leq g_p \leq 1$, $p \geq 1$ alors:
a) la fraction continue

$$\frac{g_1}{1 + \frac{(1-g_1)g_2x_2}{1+\frac{(1-g_2)g_3x_3}{1+\ldots}}}$$

converge uniformement pour $\mid x_p \mid \leq 1$, $p \geq 2$

b) Les valeurs de la fraction continue sont dans le disque

$$\mid Z \mid \leq 1 - \frac{1}{S}$$

avec

$$S = 1 + \sum_{p\geq 1} \frac{g_1g_2\ldots}{(1-g_1)(1-g_2)\ldots(1-g_p)}$$

La valeur de la fraction continue pour $x_p = -1$, $p \geq 2$ est

$$1 - \frac{1}{S}$$

Corollaire 1. *$(X_n)_n$ est recurrente (respectivement transiente) si*

$$F_0(1) = 1 \quad (\text{respectivement} \quad F_0(1) < 1).$$

$$\text{i.e} \quad \sum_{p\geq 1} \frac{g_1g_2\ldots}{(1-g_1)(1-g_2)\ldots(1-g_p)} = \infty \quad (respectivement < \infty)$$

Démonstration.
Nous avons d'aprés le théorème (1) (b) [H.S Wall]

$$F_0(1) = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{p\geq 1} \frac{g_1g_2\ldots}{(1-g_1)(1-g_2)\ldots(1-g_p)}}.$$

Mais

$$F_0(1) = \sum_{n\geq 1} f_{00}^{(n)} = f_{00}^*$$

$$f_{00}^* = 1 \Longleftrightarrow \sum_{p\geq 1} \frac{g_1g_2\ldots}{(1-g_1)(1-g_2)\ldots(1-g_p)} = \infty$$

$$f_{00}^* < 1 \Longleftrightarrow \sum_{p\geq 1} \frac{g_1 g_2 \dots}{(1-g_1)(1-g_2)\dots(1-g_p)} < \infty.$$

Par définition de la recurrence, un etat x est recurrent si $f_{xx}^* = 1$ et, transient si $f_{xx}^* < 1$. Comme $(X_n)_n$ est irréductible, il en résulte que $(X_n)_n$ est recurrente (respectivement transiente) si

$$\sum_{p\geq 1} \frac{g_1 g_2 \dots}{(1-g_1)(1-g_2)\dots(1-g_p)} = \infty \quad (respectivement < \infty).$$

□

Conclusion

Nous avons exploré les possibilités d'étude de chaînes de Markov obtenues par une procédure basée sur les fractions continues. Les conditions testées sur les F_n (conditions de contraction) sont idéales. L'étude directe de la chaîne de Markov $(X_n)_n$ par la recherche d'une limite, n'est pas possible en général. Un exemple est la chaîne de Markov $(X_n)_n$ de noyau de transition P défini pour g mesurable et bornée par

$$Pg(x) = \int g(y) f_y(x) \mu(dy)$$

où $f_y(x) = yx(1-x)$, μ la loi des Y_n et $X_{n+1} = Y_{n+1}X_n(1-X_n)$; les Y_n iid.

Les pérspectives ouvertes sont l'étude de la récurrence de Chaînes de Markov sur le modèle de fractions continues questions nous semblent pas suffisament étudiées dans la literature actuelle et meritent qu'on s'y attachent.

Bibliographie

[1] Jean Trignan. *fractions continues.*
1994 Edition du Choix

[2] P, Gerl. (1984). *Continued fraction methods for random walks on N and on trees. In Probability Measures on Groups, Proceedings, Oberwolfach 1983. Lecture Notes in Mathematics 1064, GERL,*
Springer-Verlag, Berlin, 131-146.

[3] H.S,Wall. *Analytic theory of continued fractions.*
Van Nostrand, Toronto 1948.

[4] P. Billingsley.(1965) *Ergodic Theory and Information.*
Library of Congress Catalog Card Number: 65-21445. Printed in the United States of America.

[5] Gérard Letac . *A contraction principle for certain Markov Chains and its applications.*
revue: Contemporary Mathematics, Volume 50, 1986
1986 American Mathematecal Society
0271-4132/86

[6] Lars V. Ahlfors (1965) *Complex Analysis.*
Internation Student Edition.

[7] I.M Yaglom (1962)*Geometric Transformations.*
Scool Edition Published by the L W Singer Company.

[8] B.Bessad *Memoire de Magister,"Chaine de Markov et Cinetique des reactions chimiques", UMMTO,2011*