

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

## Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : **Commande des systèmes**

*Présenté par*

**DJOUHAR YOUSFI**

**JUBA REKHOU**

Thème

## Résolution d'un problème de commande optimale par la méthode de tir

*Mémoire soutenu publiquement le 14/07/2016. devant le jury composé de :*

**M SAID DJENNONNE**

professeur, UMMTO , Président

**M Ahmed MAIDI**

Professeur, UMMTO , Encadreur

**M BOULEM SALHI**

M A A, UMMTO, Examineur

**M HAMID HAMICHE**

M C A, UMMTO, Examineur

# *Remerciements*

*Nous remercions tous d'abord le bon dieu qui nous a donné courage et volonté pour réaliser ce modeste travail.*

*Nos sincères remerciements vont en particulier à notre promoteur M<sup>r</sup> Ahmed MAIDI, qui nous a dirigé afin de mener à bien ce travail avec ses conseils constructifs.*

*Nous tenons à remercier vivement les membres de jury qui feront l'honneur d'évaluer notre travail.*

*Enfin nous tenons à remercier tous les enseignants du département d'automatique, sans oublier nos amis (es) de la promotion 2015/2016.*

# *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

*À mes chers parents qui m'ont éduquée dès mon enfance jusqu'à aujourd'hui, qui m'ont soutenue durant tout mon cursus, qui sont la source de résistance et d'espérance pour moi, en ce moment je ne saurais que témoigner ma reconnaissance sans limite. "Que dieu vous procure santé et longue vie".*

*À la mémoire de mon grand-père que dieu ait son âme et qu'il l'accueille dans son vaste paradis.*

*À ma chère grand-mère que dieu lui procure santé et longue vie.*

*À mes chères sœurs Tinhinane et Amel.*

*À mes chers frères Amrane et Ouahmed.*

*À mes chères tantes paternelles et maternelles.*

*À mes chers oncles paternels et maternels en particulier mon cher oncle Akli yousfi.*

*À mes chers cousins et cousines.*

*Mes profondes dédicaces vont en particulier à ma chère tante Malika et son époux Mohand Tahar Kaci pour leur accueil chaleureux durant toutes mes années d'études universitaires.*

*À tous mes amis (es).*

*Sans oublier tous mes professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieure.*

**DJOUHAR YOUSFI.**

# Dédicaces

À mes très chers parents

À mes frères et ma sœur

À mon beau frère

À mes amis(es)

**JUBA REKHOU.**



# Sommaire

# Sommaire

---

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre1 : Formulation d'un problème de commande optimale</b>	
1.1 Introduction .....	3
1.2 Notion de l'optimum et de la commande admissible .....	3
1.2.1 Notion de l'optimum .....	3
1.2.2 Minimum local .....	3
1.2.3 Minimum global .....	3
1.2.4 Maximum local.....	3
1.2.5 Maximum global .....	4
1.2.6 Commande admissible .....	4
1.3 Commande optimale.....	4
1.4 Formulation d'un problème de commande optimale.....	5
1.4.1 Système dynamique et ses caractéristiques .....	5
1.4.2 Mise en équation (modèle mathématique).....	5
1.4.3 Conditions terminales.....	5
1.4.3.1 État initial .....	5
1.4.3.2 État final .....	5
1.4.4 Contraintes.....	6
1.4.4.1 Contrainte instantanée .....	6
1.4.4.2 Contrainte intégrale .....	6
1.4.5 Critère à optimiser .....	6
1.4.5.1 Commande en temps minimale .....	7
1.4.5.2 Commande à consommation minimale .....	7
1.4.5.3 Poursuite.....	8
1.4.5.4 Régulation .....	8
1.4.5.5 Commande à énergie minimale .....	8
1.4.5.6 Commande terminale.....	9

# Sommaire

---

1.5 Classification des problèmes de commande optimale.....	9
1.5.1 Problème de Mayer .....	9
1.5.2 Problème de Lagrange.....	10
1.5.3 Problème de Bolza.....	10
1.6 Exemple d'application.....	10
1.7 Synthèse de la loi de commande optimale .....	13
1.8 Conclusion.....	13

## Chapitre2 :Résolution d'un problème de commande optimale

2.1 Introduction .....	14
2.2 Calcul des variations .....	14
2.2.1 Définition d'une fonctionnelle .....	14
2.2.2 Variation d'une fonctionnelle.....	14
2.2.3 Extremum d'une fonctionnelle.....	14
2.3 Résolution d'un problème de commande optimale par le calcul des variations.....	18
2.3.1 Exemple illustratif.....	19
2.4 Principe du minimum de Pontriaguine.....	20
2.4.1 Résolution d'un problème de commande par le principe du minimum.....	21
2.4.2 Conditions d'optimalité.....	22
2.4.3 Exemple illustratif.....	23
2.5 Conclusion.....	26

## Chapitre3 : Résolution des équations différentielles ordinaires

3.1 Introduction .....	27
3.2 Équation différentielle d'ordre 1 .....	27
3.3 Résolution d'une équation différentielle .....	27
3.3.1 Solution analytique.....	27
3.3.2 Solution numérique .....	29
3.3.2.1 Méthode d'Euler explicite.....	29
3.3.2.2 Principes de la méthode d'Euler explicite :.....	30

## **Sommaire**

---

3.3.2.3 Précision de la méthode d'Euler explicite .....	31
3.3.2.4 Calcul de l'erreur de troncature pour la méthode d'Euler explicite .....	31
3.3.2.5 Méthode d'Euler implicite.....	33
3.3.2.6 Précision de la méthode d'Euler implicite.....	34
3.3.2.7 Stabilité de la méthode d'Euler implicite et explicite.....	35
3.3.2.8 Méthode de Taylor d'ordre 2.....	37
3.3.2.9 Calcul de l'erreur de troncature pour la méthode de Taylor d'ordre 2.....	38
3.3.2.10 Méthode de Runge - Kutta d'ordre 2.....	38
3.3.2.11 Méthode de Runge - Kutta d'ordre 4.....	39
3.3.2.12 Stabilité de la méthode de Runge - kutta d'ordre 4 .....	41
3.4 Résolution d'équations différentielles d'ordre n avec les méthodes numériques.....	41
3.5 Problème aux limites .....	44
3.6 Méthode de tir .....	44
3.6.1 Rappel sur les conditions aux limites de Dirichlet .....	45
3.6.2 Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 avec conditions aux limites de Dirichlet .....	45
3.7 Conclusion.....	51
<b>Chapitre 4 : Détermination d'une thérapie optimale pour le traitement d'un cancer</b>	
4.1 Introduction .....	52
4.2 Généralité sur le cancer .....	52
4.2.1 Définition du cancer .....	52
4.2.2 Croissance d'un cancer.....	52
4.2.3 Méthodes de traitement du cancer.....	53
4.2.3.1 Chirurgie.....	53
4.2.3.2 Radiothérapie.....	53
4.2.3.3 Chimiothérapie .....	53
4.2.4 Effets secondaires de la chimiothérapie .....	54
4.3 Commande optimale et la chimiothérapie .....	55
4.4 Modèles mathématique de Fister et Panetta pour le traitement du cancer .....	55

## *Sommaire*

---

4.5 Application numérique .....	56
4.5.1 Formulation du problème .....	57
4.5.2 Résolution du problème en utilisant le calcul des variations.....	57
4.5.2.1 Transformation de problème de commande optimale en un problème de calcul des variations	57
4.5.2.2 Calcul de l'équation d'Euler - Lagrange.....	58
4.5.2.3 Transformation de l'équation différentielle d'ordre 2 en un système d'équations d'ordre 1 ....	59
4.6 Conclusion.....	66
<b>Conclusion générale</b> .....	<b>67</b>



# Nomenclature

Nomenclature utilisée est la suivante :

$t$	: Temps
$t_0$	: Instant initial
$t_f$	: Instant final
$T$	: Horizon de commande
$x(t) \in \mathbb{R}^n$	: Vecteur d'état
$x_0$	: État initial
$x_f$	: État final
$x^*$	: Optimum
$X^*(t)$	: Trajectoire extrémale
$u(t)$	: Vecteur de commande
$u^*(t)$	: Commande optimale
$P$	: Contrainte intégrale
$J$	: Critère de performance
$\hat{j}$	: Coût optimale
$\Psi$	: Partie terminale
$\varphi$	: Partie intégrale
$M, R, h_i$	: Matrices symétriques semi définies positives
$m$	: Masse
$f$	: Force
$f_k$	: Force de rappel d'un ressort
$K$	: Constante du raideur du ressort
$V$	: Vitesse de la masse
$\lambda$	: Multiplicateur de Lagrange
$H$	: Fonction d'Hamilton
$h$	: Le pas du temps
$\sigma_{n+1}$	: Erreur de troncature locale

$r$	: Taux de croissance de la tumeur
$\rho$	: Dose du médicament
$\varepsilon$	: Gain
$N$	: Densité de la tumeur
$N_0$	: Densité initiale de la tumeur
$N_f$	: Densité finale de la tumeur
$F$	: Fonction de croissance généralisée
$G$	: Pharmacocinétique et effets pharmaco-médicales du médicament



# Introduction générale

La théorie de commande optimale s'inscrit dans la continuité de calcul des variations. Elle est apparue après la deuxième guerre mondiale, dans le but de répondre à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique de navigation. La théorie de contrôle optimal est très liée à la mécanique classique [1], en particulier aux principes variationnelles (équations de Lagrange et Hamilton). Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontriaguine formulé par Pontriaguine en 1956 qui donne une condition nécessaire d'optimalité et qui permet ainsi de calculer les trajectoires optimales.

Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : premièrement, il faut déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible. Pour se faire, il faut tout d'abord vérifier si une cible est atteignable, il s'agit donc d'un problème de contrôlabilité. Par la suite une fois le problème de contrôlabilité est résolu, il faut déterminer parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne un coût minimum ou maximum [2].

Pour la résolution d'un problème de contrôle optimal, on dispose de deux grandes classes de méthodes à savoir les méthodes directes et indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser le problème de contrôle optimal pour le ramener à un problème d'optimisation non linéaire. Puis pour résoudre le problème obtenu, on peut utiliser les méthodes d'optimisation numériques comme la méthode de Newton. Les méthodes indirectes consistent à appliquer le principe du minimum qui donne des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre ou bien le calcul des variations qui conduit à une équation différentiels d'ordre 2 qui nécessite une transformation à un système d'équations d'ordre 1 associées de conditions aux limites. On cherche, par la suite, les trajectoires vérifiant ces conditions ce qui revient généralement en pratique à chercher le zéro d'une certaine fonction de tir associée au problème originale.

La commande optimale est utilisée dans divers domaines : technique, économique, sociale et médicale. Ces dernières années, l'application de la commande optimale aux problèmes médicaux est très répandue. Elle est utilisée pour la détermination des thérapies optimales de certaines maladies.

L'objectif de ce travail, consiste à étudier la résolution d'un problème de commande optimale par la méthode de tir. Cette méthode est l'une des méthodes les plus utilisées vue sa

simplicité et son efficacité. Il consiste à ramener un problème aux limites à un problème avec des valeurs initiales (problème de Cauchy). Comme exemple d'application, on considère le calcul d'une thérapie optimale d'un cancer.

Ainsi, le mémoire réalisé est réparti en quatre chapitres :

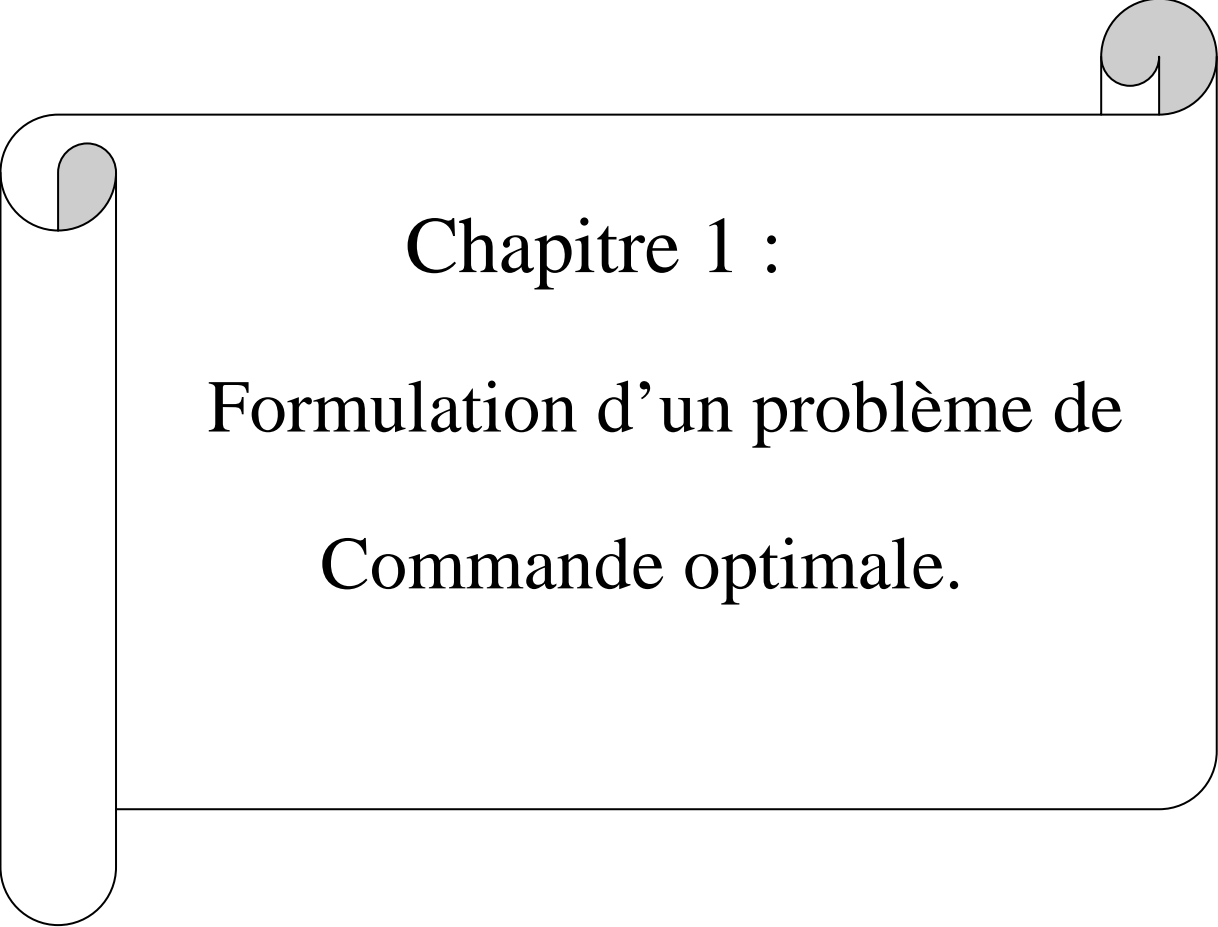
Le premier chapitre expose les étapes de formulation d'un problème de commande optimale en définissant l'ensemble des éléments qui le constituent et quelques notions de base.

Le deuxième chapitre expose deux méthodes de résolutions d'un problème de commande optimale qui sont le principe du minimum et la méthode de calcul des variations.

Le troisième chapitre a pour but de présenter la méthode de tir qui est utilisée pour la résolution des problèmes aux limites et quelques méthodes numériques de résolutions des équations différentielles d'ordre 1, dites méthodes à un pas, qui contournent les difficultés de la résolution analytique .

Le quatrième chapitre a pour but d'appliquer la méthode de tir pour déterminer une thérapie optimale pour minimiser la densité d'une tumeur en prenant en considération les effets secondaires éventuels du médicament sur le patient.

En fin ce travail se termine par une conclusion générale et des perspectives de continuité.



**Chapitre 1 :**  
**Formulation d'un problème de**  
**Commande optimale.**

## 1.1 Introduction

La théorie de commande optimale fait partie de l'automatique et des mathématiques appliquées (Optimisation des processus). Cette théorie généralise le calcul des variations, elle a également un champ d'application en physique mathématique.

Pour bien synthétiser une loi de commande optimale, il faut bien poser le problème et savoir le formuler. Dans ce chapitre, on s'intéresse à la formulation d'un problème de commande optimale en mettant l'accent sur l'ensemble des éléments qui le définissent.

## 1.2 Notion de l'optimum et de la commande admissible

### 1.2.1 Notion de l'optimum

Soit  $f(x)$  une fonction définie sur un intervalle  $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et soit  $V \subset D$ . On définit l'optimum  $x^*$  comme suit :

### 1.2.2 Minimum local

On dit que  $x^*$  est un minimum local si et seulement si :

$$\forall x \in V : f(x^*) \leq f(x) \quad (1.1)$$

### 1.2.3 Minimum global

On dit que  $x^*$  est un minimum global si est seulement si :

$$\forall x \in D : f(x^*) \leq f(x) \quad (1.2)$$

### Remarque

On écrit mathématiquement un problème d'optimisation comme suit :

$$f(x^*) = \min_x f(x) \quad (1.3)$$

$$x^* = \operatorname{argmin} f(x^*) \quad (1.4)$$

### 1.2.4 Maximum local

On dit que  $x^*$  est un maximum local si est seulement si :

$$\forall x \in V : f(x^*) \geq f(x) \quad (1.5)$$

### 1.2.5 Maximum global

On dit que  $x^*$  est un maximum global si est seulement si :

$$\forall x \in D: f(x^*) \geq f(x) \quad (1.6)$$

#### Remarque

Mathématiquement, on écrit :

$$f(x^*) = \max_x f(x) \quad (1.7)$$

$$x^* = \operatorname{argmax} f(x^*) \quad (1.8)$$

### 1.2.6 Commande admissible

Une commande est dite admissible si elle peut transférer le couple  $(t, x)$  de la condition initiale  $(t_0, x_0)$  à une condition finale  $(t_f, x_f)$  avec  $x(t_f) = x_f$  et  $x(t_0) = x_0$ .  $x$  représente l'état du système.

## 1.3 Commande optimale

### 1.3.1 Définition

On définit la commande optimale comme suit : C'est une commande admissible qui respecte les conditions suivantes :

- Vérifie les conditions initiales et finales exigées,
- Satisfait les différentes contraintes imposées (accélération limite, vitesse limite, volume d'un réservoir limite.....etc.),
- Optimise un critère choisi.

#### Remarque

Pour appliquer une commande sur un système, il faut qu'il soit commandable.

## 1.4 Formulation d'un problème de commande optimale

### 1.4.1 Système dynamique et ses caractéristiques

Un système dynamique est un ensemble très général de composants en interactions (Système) réparti sur plusieurs états et structuré selon certaines propriétés. Il est caractérisé par trois variables :

1. Les variables de commande représentées dans un vecteur de dimension  $m$ ,
2. Les variables internes qui caractérisent l'état du système représentées dans un vecteur  $x(t)$  de dimension  $n$ ,
3. Les variables de sorties représentées dans un vecteur de dimension  $r$ .

### 1.4.2 Mise en équation (modèle mathématique)

On modélise l'évolution d'un système dynamique par un ensemble d'équation (équation différentielle, équation d'état ...etc.) qui doit être simple pour la résolution mathématique et numérique. Généralement, on utilise la représentation d'état explicité sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (1.9)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (1.10)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  : vecteur d'état.

$y(t) \in \mathbb{R}^r$  : vecteur de sortie.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ : vecteur de commande.

### 1.4.3 Conditions terminales

Les conditions terminales comportent deux états :

#### 1.4.3.1 État initial $x(t_0)$

C'est l'état du système à l'instant initial noté :  $t_0$  (C'est l'instant au moment où on applique la commande sur le système).

#### 1.4.3.2 État final $x(t_f)$

C'est l'état du système à l'instant final noté :  $t_f$ .

**Remarque**

- L'état initial noté  $x(t_0)$  est toujours connu.
- L'état final peut être connu ou libre.
- Le temps  $t_f - t_0$  est appelé horizon de commande, il peut être fini si  $t_f$  est fini ou infini si  $t_f$  est infini.

**1.4.4 Contraintes**

Une contrainte est une condition que doit satisfaire la solution d'un problème de Commande optimale, on distingue deux types de contraintes :

**1.4.4.1 Contrainte instantanée**

C'est une contrainte qui doit être satisfaite et respectée à tout instant.

**Exemple :** dans un circuit électrique  $i(t)$  ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale :

$$I(t) \leq I_{\max} \quad (1.11)$$

**1.4.4.2 Contrainte intégrale**

C'est une contrainte qui doit être satisfaite sur un horizon de commande  $T = t_f - t_0$  et elle ne doit pas dépasser une certaine valeur. Elle est souvent liée à une limitation de ressources (exemple un réservoir contient une quantité limitée du produit à utiliser).

Ce type de contrainte s'exprime sous la forme suivante :

$$\int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) dt \leq 0, p \in \mathbb{R}^n \quad (1.12)$$

**1.4.5 Critère à optimiser**

On choisit le critère à optimiser selon les exigences du cahier des charges et les performances désirées, il peut être lié à l'état et / ou à la commande.

L'expression générale du critère est donnée comme suit :

$$J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.13)$$

Avec :

$\Psi(x(t_f), t_f)$  : est appelé la partie terminale.

$\int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt$  : est appelé la partie intégrale.

Parmi les critères qu'on peut optimiser, on peut citer :

#### 1.4.5.1 Commande en temps minimale

La commande en un temps minimale consiste à transférer l'état d'un système d'un état initial  $x(t_0)$  vers un état final  $x(t_f)$  dans une durée plus courte possible (minimisation de l'horizon de commande).

L'expression mathématique de la commande en temps minimale est donnée comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (1.14)$$

#### Remarque

On pose généralement ce genre de problème dans les problèmes de sécurité et la minimisation des coûts liés à la durée. Les applications principales se rencontrent dans le domaine de la production continue, la médecine et la défense.

- La production continue : s'agit de fabrication régulière des produits finis par une industrie.

Exemple : Fabrication des produits alimentaires.

#### 1.4.5.2 Commande à consommation minimale

La commande à consommation minimale permet de diminuer les coûts de fonctionnement pour les systèmes de production continue. De point de vu physique elle est liée à l'amplitude de la commande.

L'expression mathématique de ce critère est la suivante :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (\sum_{i=1}^n h_i |u_i(t)|) dt \quad (1.15)$$

Avec :

$$h_i \geq 0$$

Pour un système monovariante on a  $h_i = 1$  et le critère va s'écrire comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \quad (1.16)$$

### 1.4.5.3 Poursuite

La poursuite s'agit de maintenir l'état  $x(t)$  d'un système proche de  $x(t)^d$  dans un horizon de temps  $T = t_f - t_0$ , donc on doit avoir l'erreur  $e(t) = x(t)^d - x(t)$  plus faible possible. L'expression mathématique pour ce type de critère est la suivante :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (x(t)^d - x(t))^T M [x(t)^d - x(t)] dt \quad (1.17)$$

Avec :  $M = M^T, M \geq 0$

### 1.4.5.4 Régulation

La régulation est un cas particulier de la poursuite, car dans ce cas on a  $(x(t))^d = 0$ .

L'expression mathématique pour ce critère est donnée comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)^T M [x(t)] dt \quad (1.18)$$

Avec :  $M = M^T, M \geq 0$ .

### 1.4.5.5 Commande à énergie minimale

La commande à énergie minimale consiste à transférer l'état d'un système d'un état initial :  $x(t_0)$  vers un état final :  $x(t_f)$  en minimisant l'effort de la commande. De point de vue physique, l'énergie est liée à l'évolution de la commande donc pour minimiser l'énergie, on doit minimiser le critère suivant :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T R u(t) dt \quad (1.19)$$

Avec  $R = R^T, R > 0$ .

Pour le cas monovariante nous avons :  $R=1$ .

Donc le critère devient :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^2 dt \quad (1.20)$$

### 1.4.5.6 Commande terminale

Il s'agit de minimiser à l'instant  $t_f$  certaines fonctions des variables d'états.

#### Remarque

- La mise en œuvre d'un critère quadratique intervient dans les problèmes de minimisation de l'énergie mise en œuvre, de stabilisation, et de suivie de la trajectoire. Il concerne essentiellement les problèmes de régulation et d'asservissement en générale ainsi que les problèmes de processus mettent en œuvre des énergies importantes. L'intérêt apparaît à la fois au niveau de la qualité et des coûts de mise en œuvre.
- À partir des critères de base cités, on peut construire d'autres critères qui optimisent plusieurs critères et satisfissent plusieurs contraintes.

Exemple : on peut définir un critère qui impose les conditions suivantes : poursuite + commande terminale + commande à consommation minimale sous la forme suivante :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (x(t)^d - x(t))^T M [x(t)^d - x(t)] dt + \int_{t_0}^{t_f} 1 dt + \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \quad (1.21)$$

$$\text{On pose } e(t) = (x(t)^d - x(t)) . \quad (1.22)$$

Donc le critère se résume ainsi :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (1 + e(t)^T M e(t) + |u(t)|) dt \quad (1.23)$$

## 1.5 Classification des problèmes de commande optimale

Selon la forme du critère, on peut classifier les problèmes d'optimisation en trois classes :

### 1.5.1 Problème de Mayer

Pour ce type de problème, nous avons le critère est constitué que de la partie terminale qui exprime l'objectif à optimiser à l'instant final  $t_f$ .

L'expression mathématique pour ce type de critère est donnée sous la forme suivante :

$$J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) \quad (1.24)$$

### 1.5.2 Problème de Lagrange

Ce problème est constitué de la partie intégrale qui exprime la condition à satisfaire sur l'horizon de commande son expression mathématique est donnée comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.26)$$

### 1.5.3 Problème de Bolza

Dans ce type de problème, on combine la partie terminale et intégrale donc le critère s'écrit comme suit :

$$J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.27)$$

### 1.6 Exemple d'application

On désire concevoir une loi de commande  $f(t)$  qui permet de transférer la masse  $m$  en un temps minimal de sa position initiale  $x(t_0)$  à une position finale  $x(t_f)$  égale à 3 fois sa position initiale  $x(t_0)$  en toute sécurité. La vitesse de la masse  $m$  ne doit pas dépasser la vitesse limitée  $V_{max}$ . On prend l'instant initial  $t = 0$  et on considère les coordonnées  $(0, x, y)$  comme indiqué sur la figure ci-dessous :

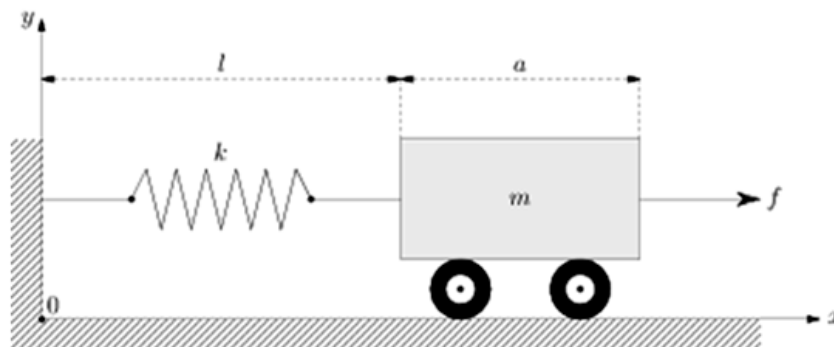


Figure (1.1) : masse avec ressort

#### 1. Modèle mathématique

En appliquant la loi de Newton on obtient :

$$m \ddot{x}(t) = \sum \text{Forces} . \quad (1.28)$$

Pour ce système nous avons deux forces :

$f(t)$  : la force avec laquelle on tire la masse.

$f_k(t)$  : la force qui applique le ressort sur la masse.

Donc, on aura :

$$m\ddot{x}_1(t) = f(t) - f_k(t) \quad (1.29)$$

$$\text{avec : } f_k(t) = k x_1(t) \quad (1.30)$$

où :

$k$  : longueur du ressort.

$x_1(t)$  : la position initiale de la masse .

$$\text{Donc : } m\ddot{x}_1(t) = f(t) - k x_1(t) \quad (1.31)$$

Sous forme d'état, on a :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1.32)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = -\frac{k}{m} x_1(t) + \frac{1}{m} f(t) \quad (1.33)$$

où  $x_2(t)$  représente la vitesse de la masse  $m$ .

## 2. Conditions terminales

### ➤ Condition initiale ( $t = 0$ )

À  $t = 0$ , nous avons la position initiale de la masse est  $x_1(t) = 1 + \frac{a}{2}$  et sa vitesse initiale est nulle  $x_2(t) = 0$ .

Donc à  $t = 0$

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

### ➤ Condition finale ( $t = t_f$ )

À  $t = t_f$ , nous avons la masse  $m$  doit atteindre la position  $3(1 + \frac{a}{2})$  avec une vitesse nulle  $x_2(t) = 0$ .

Donc à  $t = t_f$ , on a :

$$X(t_f) = \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1 + \frac{a}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

### 3 Contraintes

On doit déplacer la masse avec une vitesse qui ne doit pas dépasser la vitesse maximale  $V_{max}$  imposée, alors :

$$x_2(t) \leq V_{max} \rightarrow x_2(t) - V_{max} \leq 0 \quad (1.36)$$

### 4 Critères à optimiser

#### 4.1 Commande en temps minimal

Nous devons déplacer la masse de  $x(t_0) = x_0$  vers  $x(t_f) = x_f$  en un temps minimal.

L'expression du critère est la suivante :

$$J(u(t)) = \int_0^{t_f} 1 \, dt \quad (1.37)$$

#### 4.2 Minimiser l'énergie de commande

Le transfert doit se faire en minimisant l'énergie mise en œuvre, le critère correspondant est le suivant :

$$J(u(t)) = \int_0^{t_f} f^2 \, dt \quad (1.38)$$

Ainsi, le problème de commande optimale peut être résumé comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{t_f} (f^2 + 1) \, dt \quad (1.39)$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (1.40)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m} x_1(t) + f(t)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$X(t_f) = \begin{bmatrix} (3(1 + \frac{a}{2})) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

### 1.7 Synthèse de la loi de commande optimale

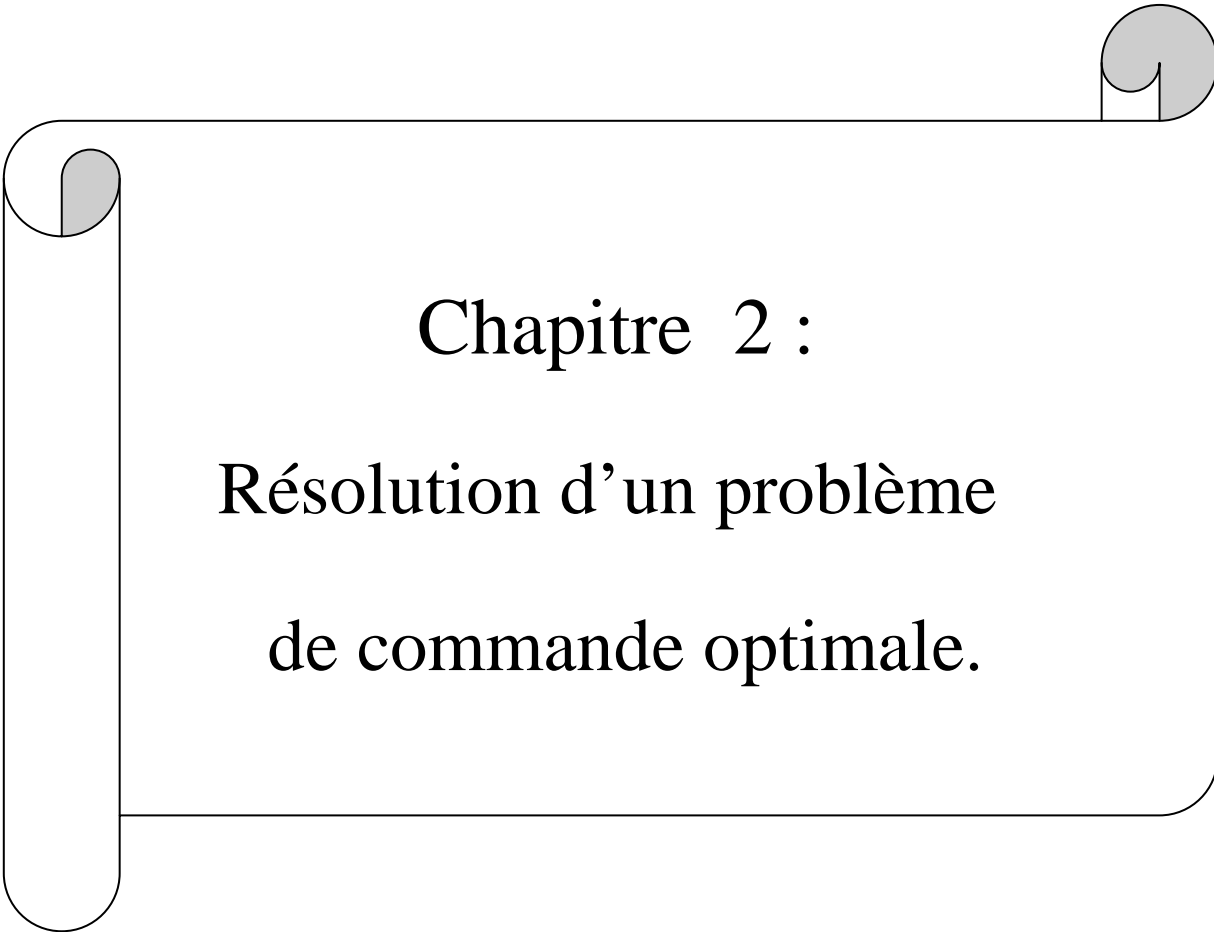
Pour synthétiser une loi de commande optimale, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Modéliser le système à étudier : cette étape nécessite des connaissances a priori à propos des différentes parties du système et les différentes relations qui régissent leurs fonctionnements.
2. Déterminer les différentes contraintes à satisfaire.
3. Choisir un critère à minimiser.
4. Résoudre le problème en satisfaisant les différentes contraintes et déterminer la loi de commande optimale.
5. Implémenter la commande.

### 1.8 Conclusion

Savoir poser un problème constitue la moitié de sa solution et la façon de le poser influence la précision et la justesse de cette dernière. Un problème bien posé admet toujours de solutions .

Dans ce chapitre, on a défini la démarche principale à suivre pour formuler un problème de commande optimale tout en définissant l'ensemble des éléments qui le constituent. La question suivante concerne la résolution d'un problème de commande optimale. Le chapitre suivant présente deux principes importants utilisés pour la résolution d'un problème de commande optimale .



Chapitre 2 :  
Résolution d'un problème  
de commande optimale.

## 2.1 Introduction

La résolution d'un problème de commande optimale consiste à trouver une commande qui transfère le système d'un état initial à un autre état tout en minimisant un critère et satisfaisant un nombre de contraintes exigées. Dans ce chapitre, on présente deux principes importants de résolution d'un problème de commande optimale qui sont : le calcul des variations et le principe du minimum.

## 2.2 Calcul des variations

En mathématique et exactement en analyse fonctionnelle le calcul des variations s'est développé pour résoudre des problèmes nécessitant de trouver une fonction rendant extrémale une quantité donnée comme la trajectoire, temps minimum...etc. Donc, il ne s'agit pas de trouver les extrémums d'une fonction mais de trouver une fonction inconnue rendant extrémale la valeur d'une fonctionnelle.

### 2.2.1 Définition d'une fonctionnelle [3]

Une fonctionnelle en mathématique est définie comme suit :

Soit  $V$  un espace vectoriel. Une fonctionnelle  $J$  sur  $V$  est une application de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  son expression est la suivante :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} x(t) dt \quad (2.1)$$

$x(t)$  : est une fonction supposée continue sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ .

### 2.2.2 Variation d'une fonctionnelle [3]

Considérant deux fonctions continues  $x(t)$  et  $\delta x(t)$  pour lesquelles la fonctionnelle  $J$  est définie, alors la variation de  $J$  notée  $\Delta J$  est donnée ainsi :

$$\Delta J = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \quad (2.2)$$

$\delta x(t)$  : est la variation de la fonction  $x(t)$ .

### 2.2.3 Extremum d'une fonctionnelle [3]

Soit une fonctionnelle définie comme suit :

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} G(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.3)$$

$x(t)$  est une fonction numérique dérivable et sa dérivée est continue et  $G$  une fonction de classe 2.

Si  $x(t)$  et  $(x(t) + \delta x(t))$  sont des fonctions pour lesquelles la fonctionnelle  $J$  est définie, alors la variation  $\Delta J$  est calculée ainsi :

$$\Delta J = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \quad (2.4)$$

Le problème qui se pose est de trouver une fonction  $x^*(t)$  pour laquelle la fonctionnelle  $J(x(t))$  admet un extremum relatif. Pour se faire, on considère les différents cas particuliers suivants :

**Cas 1 : état initial  $x(t_0)$  et état final  $x(t_f)$  sont fixés**

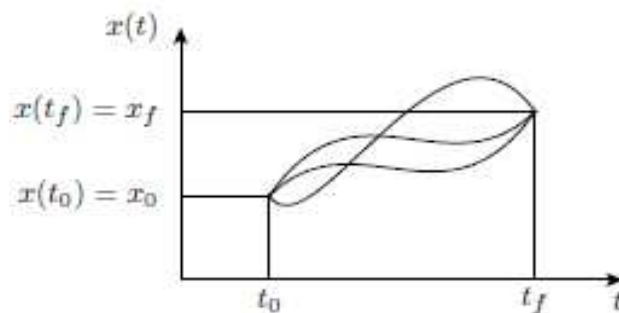


Figure 2.1 Ensembles des trajectoires admissibles pour  $x(t_0)$  et  $x(t_f)$  fixés.

Dans ce cas le problème, se résume comme suit :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} G(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.5)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.6)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (2.7)$$

Supposant que  $G$  admet des dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 continues et soit  $x(t)$  une trajectoire admissible. Calculons la variation  $\delta(x(t), \delta x(t))$  à partir de  $\Delta J(x(t), \delta x(t))$  :

$$\Delta J(x(t), \delta x(t)) = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \quad (2.8)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} G(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} G(x(t), \dot{x}(t), t) dt. \quad (2.9)$$

Appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 au point  $(x(t), \dot{x}(t))$  pour le terme

$$\int_{t_0}^{t_f} G(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t) \quad (2.10)$$

On aura :

$$\begin{aligned} \Delta J(x(t), \delta x(t)) = & \int_{t_0}^{t_f} (G(x(t), \dot{x}(t), t) + \frac{\partial G}{\partial x(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta \dot{x}(t) \\ & + O(2)) dt - \int_{t_0}^{t_f} G(x(t), \dot{x}(t), t) dt \end{aligned} \quad (2.11)$$

On considère seulement les termes linéaires par rapport à  $\delta x(t)$ ,  $\delta \dot{x}(t)$  et on néglige les termes d'ordre (2) :  $O(2)$ , on aura ainsi :

$$\delta J(x(t), \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial G}{\partial x(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta \dot{x}(t) \right] dt \quad (2.12)$$

Nous remarquons que le premier terme dépend de  $\delta x(t)$  par contre le deuxième dépend de  $\delta \dot{x}(t)$ , alors nous devons faire une intégration par partie pour le deuxième terme ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta \dot{x}(t) dt = \\ \left. \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) \right|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \delta J(x(t), \delta x(t)) = & \left. \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) \right|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial G}{\partial x(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

Puisque  $x(t_0)$  et  $x(t_f)$  sont fixés alors :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) \right|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (2.15)$$

$$\delta J(x(t), \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial G}{\partial x(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) \right) dt \quad (2.16)$$

Si  $x(t)$  est extrémale ( $x(t) = x(t)^*$ ) alors :

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial G}{\partial x(t)}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \delta x(t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \delta x(t) \right) dt = 0 \quad (2.17)$$

Selon le lemme suivant :

**Lemme :** si  $\varphi$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ , et si : [3]

$$\int_{t_0}^{t_f} \varphi \delta x(t) dt = 0 \quad (2.18)$$

Pour toute  $\delta x(t) \neq 0$  sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ , alors  $\varphi$  est identiquement nulle sur  $[t_0, t_f]$ .

En appliquant ce lemme sur  $\delta J(x^*(t), \delta x(t))$ , on trouve la condition pour que  $x^*(t)$  soit nulle comme suit :

$$\frac{\partial G}{\partial x(t)}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] dt = 0 \quad (2.19)$$

Cette équation est appelée équation d'Euler - Lagrange.

**Cas 2 : état initial  $x(t_0)$  fixe et état final  $x(t_f)$  libre**

Dans ce cas, on considère que l'instant initial et final sont donnés. État initial est donné par contre l'état final est libre donc le problème se résume ainsi :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} G(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.20)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.21)$$

$$x(t_f) \text{ est libre} \quad (2.22)$$

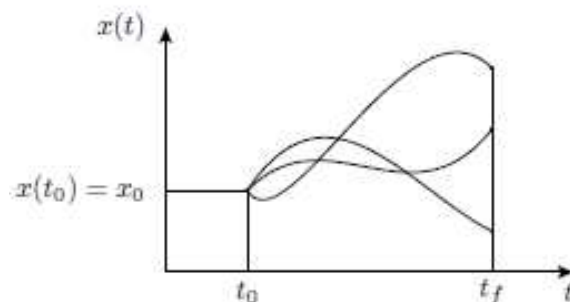


Figure 2.2 Ensemble des trajectoires admissibles cas : état initial fixe et état final est libre.

En suivant les mêmes étapes que précédemment, on aboutit à la variation (2.14), pour que cette dernière soit nulle pour une trajectoire extrémale  $x^*(t)$ , il faut que les deux termes soient nulles comme  $x(t_f)$  est libre.

Donc pour résoudre le problème dans ce cas, on doit résoudre un problème à deux limites suivant :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) \right|_{t_f} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x(t)}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] dt = 0. \quad (2.24)$$

### 2.3 Résolution d'un problème de commande optimale par le calcul des variations

Pour résoudre un problème de commande optimale en utilisant le calcul des variations, il faut d'abord le transformer en un problème de calcul des variations.

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min J(u(t))_{u(t)} = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.25)$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t), t) \quad (2.26)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.27)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (\text{Elle peut être libre}) \quad (2.28)$$

Pour transformer un problème de commande optimale en un problème de calcul des variations, on suit les étapes suivantes :

1. Exprimer  $u(t)$  en fonction de  $x(t)$  et de  $\dot{x}(t)$  :

$$u(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (2.29)$$

2. Remplacer l'expression de la commande dans le critère :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), F(x(t), \dot{x}(t), t), t) dt \quad (2.30)$$

$$\hat{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.31)$$

On a ramené le problème de commande optimale en un problème de calcul des variations.

Donc le problème se résume ainsi :

$$\hat{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.32)$$

Sujet à :

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.33)$$

$$x(t_f) = x_f \text{ (Elle peut être libre)} \quad (2.34)$$

Selon la nature de l'état final, on doit résoudre l'équation d'Euler-Lagrange avec les conditions aux limites imposées pour déterminer la trajectoire optimale  $x^*(t)$  puis on déduit l'expression de la commande optimale  $u(t)^*$  en utilisant la relation (2.29).

### 2.3.1 Exemple illustratif

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (t^2 x(t) + u^2(t)) dt \quad (2.35)$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (2.36)$$

$$x(0) = 1 \quad (2.37)$$

$$x(1) = 2 \quad (2.38)$$

## 1. Transformation du problème de commande optimale en un problème de calcul des variations

Pour transformer ce problème de commande optimale en un problème de calcul des variations, il suffit de remplacer  $u(t)$  par  $\dot{x}(t)$  dans le critère, donc le problème devient un problème de calcul des variations donné comme suit :

$$\min J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (t^2 x(t) + (\dot{x}(t))^2) dt \quad (2.39)$$

Sujet à :

$$x(0) = 1 \quad (2.40)$$

$$x(1) = 2 \quad (2.41)$$

## 2 Détermination de la loi de commande optimale

Pour déterminer la commande, on doit résoudre le problème de calcul des variations. Comme l'état final est fixe, dans ce cas on doit résoudre l'équation d'Euler - Lagrange.

$$\text{On pose } G(x) = (t^2 x(t) + \dot{x}^2(t)) \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}(t)} = t^2 - \frac{d}{dt} (2\dot{x}(t)) = t^2 - 2\ddot{x}(t) = 0 \quad (2.43)$$

De (2.43), on a :

$$\ddot{x}(t) = +\frac{1}{2}t^2 \quad (2.44)$$

On intègre l'équation (2.44) et on aura :

$$\dot{x}(t) = +\frac{1}{6}t^3 + c_1. \quad (2.45)$$

$$x(t) = +\frac{1}{24}t^4 + c_1 t + c_2. \quad (2.46)$$

On détermine les constantes  $c_1$  et  $c_2$  en appliquant les conditions aux limites :

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \quad (2.47)$$

$$x(1) = 2 \Rightarrow c_1 = \frac{23}{24} \quad (2.48)$$

$$x(t)^* = +\frac{1}{24}t^4 + \frac{23}{24}t + 1 \text{ (trajectoire optimale)}$$

Et la loi de commande optimale est donnée comme suit

$$u(t)^* = \dot{x}^*(t) = +\frac{1}{6}t^3 + \frac{23}{24}. \quad (2.49)$$

### 2.4 Principe du minimum de Pontriaguine

Le principe du minimum de Pontriaguine est une méthode élégante facilitant d'avantage la détermination de la loi de commande optimale. Cette méthode élégante est basée sur le calcul des variations et conduit à une solution générale du problème de commande optimale.

### 2.4.1 Résolution d'un problème de commande par le principe du minimum [4]

Prenant l'exemple de commande optimale défini comme suit :

$$\min J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt. \quad (2.50)$$

Sujet à :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.51)$$

Qu'on peut écrire :

$$\min J(u(t)) = \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt. \quad (2.52)$$

Sujet à :

$$f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t) = 0 \quad (2.53)$$

En appliquant la méthode de Lagrange et en introduisant le vecteur des variables adjointes  $\lambda(t)$  qui est de même dimension que le vecteur  $x(t)$ . Le problème de commande optimale avec contraintes se ramène ainsi à un problème sans contraintes défini comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{J}(u(t)) &= \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t) [f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)] dt \\ &= \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) [f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)] dt \end{aligned} \quad (2.54)$$

Pour simplifier l'étude de la minimisation de nouveau critère  $\hat{J}(u(t))$ , on introduit la fonction d'Hamilton qui est définie comme suit :

$$H(x(t), \lambda(t), u(t), t) = \varphi(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t) \quad (2.55)$$

L'équation (2.54) devient :

$$\begin{aligned} \hat{J}(u(t)) &= \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [H(x(t), \lambda(t), u(t), t) - \lambda^T(t) \dot{x}(t)] dt \\ &= \Psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [H(x(t), \lambda(t), u(t), t)] dt - \int_{t_0}^{t_f} [\lambda^T(t) \dot{x}(t)] dt \end{aligned} \quad (2.56)$$

Faisant une intégration par partie pour le terme  $-\int_{t_0}^{t_f} [\lambda^T(t) \dot{x}(t)] dt$ , l'équation (2.56) devient comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{J}(u(t)) &= \Psi(x(t_f), t_f) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [H(x(t), \lambda(t), u(t), t)] dt - [\lambda^T(t)x(t)] \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} [\lambda^T(t)x(t)] dt \\ &= [\Psi(x(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)x(t_f)] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [H(x(t), \lambda(t), u(t), t) + \lambda^T(t)x(t)] dt \end{aligned} \quad (2.57)$$

Pour minimiser le critère  $\hat{J}$ , on va utiliser le calcul des variations, donc on doit calculer la variation suivante :

$$\Delta \hat{J} = \hat{J}(x + \delta x, u + \delta u, \lambda + \delta \lambda, t + \delta t) - \hat{J}(x, u, \lambda, t) \quad (2.58)$$

Le calcul de la première variation  $\delta \hat{J}(x, u, \lambda, \delta x, \delta u, \delta \lambda, t)$  conduit à :

$$\begin{aligned} \delta \hat{J} &= (\delta x^T(t) [\nabla_{x(t)} \Psi(x(t), t) - \lambda(t)]) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (\delta x^T(t) [\nabla_{x(t)} H(x(t), \lambda(t), u(t), t) + \lambda^T(t)] \\ &\quad + \delta u^T(t) \nabla_{u(t)} H(x(t), \lambda(t), u(t), t)) dt \end{aligned} \quad (2.59)$$

Donc la résolution du problème défini dans (2.50) revient à minimiser le critère (2.59).

### 2.4.2 Conditions d'optimalité

Pour déterminer les conditions d'optimalité, on doit imposer  $\delta \hat{J} = 0$  pour n'importe quelle variation  $\delta x(t)$  et  $\delta u(t)$ , on aura :

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), \lambda(t), u(t), t) = 0 \quad (2.60)$$

$$\nabla_{x(t)} H(x(t), \lambda(t), u(t), t) + \lambda^T(t) = 0 \quad (2.61)$$

$$\nabla_{\lambda(t)} H(x(t), \lambda(t), u(t), t) - \dot{x}(t) = 0 \quad (2.62)$$

Qu'on peut écrire :

$$\lambda^T(t) = -\nabla_{x(t)} H(x(t), \lambda(t), u(t), t) \quad (2.63)$$

$$\dot{x}(t) = \nabla_{\lambda(t)} H(x(t), \lambda(t), u(t), t) \quad (2.64)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\delta x^T(t) [\nabla_{x(t)} \Psi(x(t), t) - \lambda(t)] \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (2.65)$$

Remarque pour les conditions aux limites :

- Si l'état final  $x(t_f)$  est fixe alors, on aura les conditions suivantes :

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.66)$$

$$x(t_f) = x_f \quad (2.67)$$

- Si l'état final  $x(t_f)$  est libre alors, on aura les conditions suivantes :

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.68)$$

En plus, on doit imposer la contrainte suivante :

$$\lambda(t_f) = \nabla_{x(t_f)} \Psi(x(t_f), t_f) \quad (2.69)$$

Notons que les équations (2.63) et (2.64) s'appellent équations de Hamilton - Pontriaguine.

### Remarque

Pour étudier la nature de la commande optimale, on doit étudier la positivité de la matrice Hessienne suivante :

$$\nabla_{u(t)}^2 H(x(t), \lambda(t), u(t), t) \quad (2.70)$$

### 2.4.3 Exemple illustratif

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min J(u(t)) = -1/2 \int_0^2 [x_1(t) + u(t)]^2 dt \quad (2.71)$$

Sujet à

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (2.72)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \quad (2.73)$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

$$X(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

➤ **L'Hamiltonian**

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = Q + \lambda^t(t) f(x(t), u(t), t) \quad (2.76)$$

$$= -1/2 (x_1(t) + u(t))^2 + \lambda_1(t)\dot{x}_1(t) + \lambda_2(t) \dot{x}_2(t) \quad (2.77)$$

$$= -1/2(x_1(t) + u(t))^2 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t) (x_1 + u(t)) \quad (2.78)$$

➤ **Commande optimale**

$$\nabla_{u(t)} H(x(t), u(t), \lambda(t)) = -(x_1(t) + u(t)) + \lambda_2(t) = 0 \quad (2.79)$$

$$\Rightarrow u^*(t) = -x_1(t) + \lambda_2(t) \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} H^* &= H(x(t), u^*(t), \lambda(t)) = H|_{u=-x_1(t) + \lambda_2(t)} \\ &= -1/2(x_1(t) - x_1(t) + (\lambda_2(t))^2 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)(x_1(t) - x_1(t) + \lambda_2(t)) \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$H^* = H(x(t), u^*(t), \lambda(t)) = \left(\frac{1}{2}\right) (\lambda_2(t))^2 + \lambda_1(t)x_2(t) \quad (2.82)$$

➤ **Équations d'Hamilton - Pontriaguine**

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_1(t)} = x_2(t) \quad (2.83)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_2(t)} = \lambda_2(t) \quad (2.84)$$

$$\lambda_1(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_1(t)} = 0 \quad (2.85)$$

$$\lambda_2(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_2(t)} = -\lambda_1(t) \quad (2.86)$$

En intégrant les équations, on aura :

$$\lambda_1(t) = c_1 \quad (2.87)$$

$$\lambda_2(t) = -c_1 t + c_2 \quad (2.88)$$

$$x_2(t) = -\frac{c_1}{2} t^2 + c_2 t + c_3 \quad (2.89)$$

$$x_1(t) = -\frac{c_1}{6} t^3 + \frac{c_2}{2} t^2 + c_3 t + c_4 \quad (2.90)$$

En imposant les conditions terminales, il vient :

Pour  $t = 0$  :

$$x_1(0) = c_4 = 0 \quad (2.91)$$

$$x_2(0) = c_3 = 0 \quad (2.92)$$

Pour  $t=2$  :

$$x_1(2) = -\frac{4}{3}c_1 + 2c_2 = 2 \quad (2.93)$$

$$x_2(2) = -2c_1 + 2c_2 = 1 \quad (2.94)$$

A partir de la résolution des 2 équations, on aura :

$$c_1 = \frac{3}{2} \quad (2.95)$$

$$c_2 = 2 \quad (2.96)$$

En remplaçant  $c_1, c_2, c_3, c_4$  dans les équations on aura :

$$\lambda_1(t) = \frac{3}{2} \quad (2.97)$$

$$\lambda_2(t) = -\frac{3}{2}t + 2 \quad (2.98)$$

$$x_2(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 2t \quad (2.99)$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{4}t^3 + t^2 \quad (2.100)$$

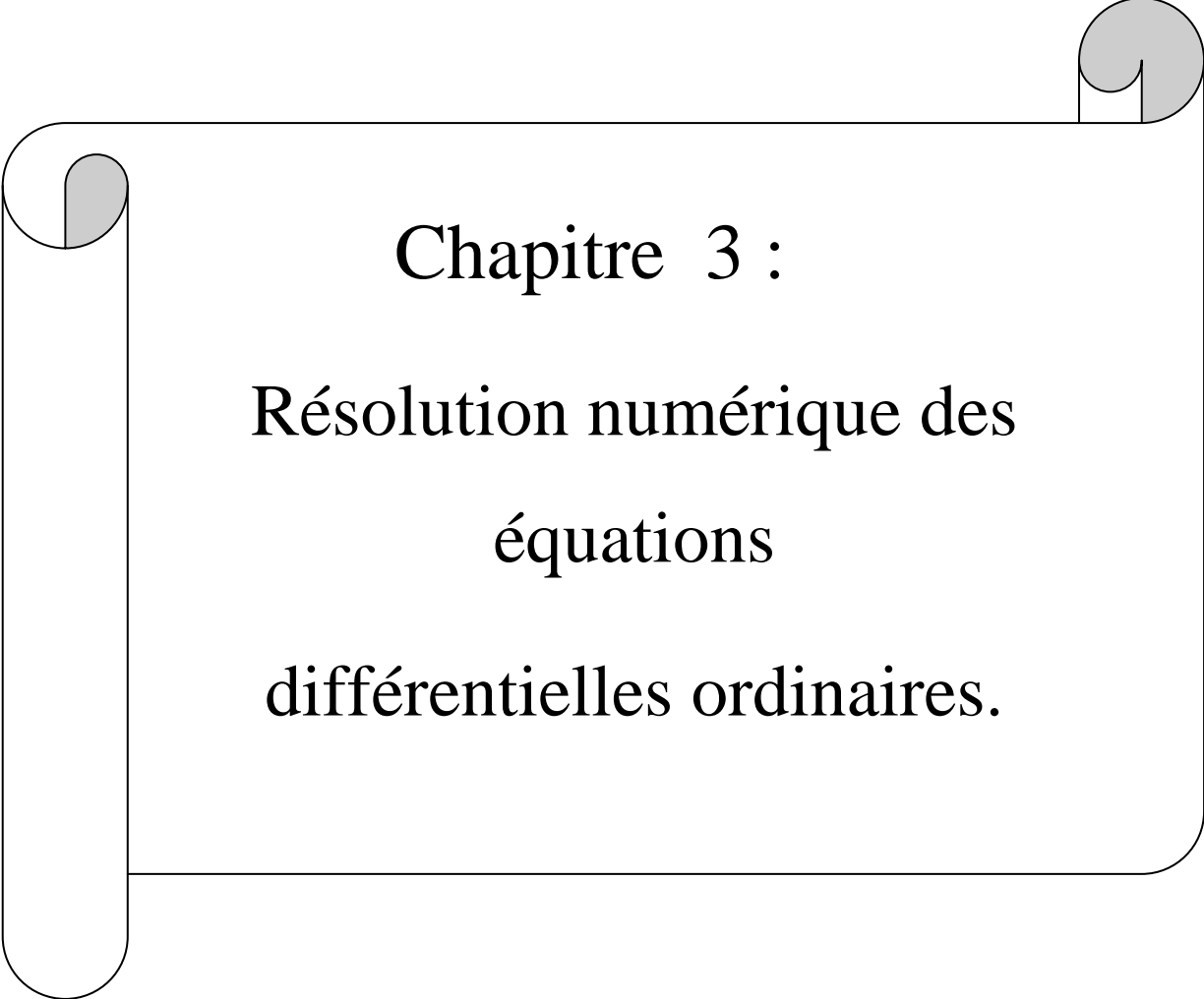
L'expression de la commande optimale est :

$$u^*(t) = -x_1(t) + \lambda_2(t) \quad (2.101)$$

$$u^*(t) = \frac{1}{4}t^3 - t^2 - \frac{3}{2} \quad (2.102)$$

**2.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, on a présenté deux méthodes de résolution d'un problème de commande optimale. On remarque que la résolution d'un problème de commande optimale revient à résoudre des équations différentielles associées de conditions aux limites qui présentent des fois des cas difficiles à résoudre analytiquement. Par conséquent la synthèse de la loi de commande est aussi difficile ce qui nous pousse d'aller au domaine discret. Dans ce cas on utilise des méthodes numériques de résolution d'équations différentielles qui contournent la difficulté de la résolution analytique. Le chapitre suivant est consacré aux méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires.

A decorative graphic of a scroll with a black outline and a light gray shadow. The scroll is unrolled in the center, with the top edge curving upwards at the right and downwards at the left. The text is centered within the unrolled portion.

Chapitre 3 :  
Résolution numérique des  
équations  
différentielles ordinaires.

### 3.1 Introduction

La résolution numérique des équations différentielles est le domaine de l'analyse numérique où les applications sont très nombreuses que se soit en mécanique des fluides, en transfert de chaleur ....etc. L'avantages des ces méthodes c'est que elles permettent d'étudier des problèmes qui sont très complexes dont la résolution analytique est difficile.

### 3.2 Équation différentielle d'ordre 1 [5]

La forme générale d'une équation différentielle d'ordre 1 avec condition initiale est donnée ainsi :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & (3.1) \\ y(t_0) = y_0 & (3.2) \end{cases}$$

$f$  : est une fonction quelconque à deux variables supposée différentiable.

$y(t_0) = y_0$  est la condition initiale.

### 3.3 Résolution d'une équation différentielle

La résolution d'une équation différentielle s'agit de trouver  $y(t)$  pour  $t \geq t_0$ . Cette solution peut être déterminée analytiquement où en faisant une approximation à  $\dot{y}(t)$  en utilisant les méthodes numériques.

#### 3.3.1 Solution analytique

Prenons deux exemples simples pour la résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 avec condition initiale.

**Exemple 1 :** soit l'équation différentielle d'ordre 1 suivante

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{1}{2}t & (3.3) \\ y(0) = \frac{1}{2} & (3.4) \end{cases}$$

Pour obtenir la solution  $y(t)$  de cette équation, on intègre chaque coté :

$$\int \dot{y}(t) = \int \frac{1}{2}t \, dt. \quad (3.5)$$

Ce qui donne : 
$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 + c \quad (3.6)$$

(3.6) représente la solution générale de l'équation différentielle où  $c$  est une constante.

Pour déterminer la solution particulière, il suffit juste de déterminer la constante  $c$  en imposant la condition initiale :

$$y(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

Donc la solution particulière est la suivante :

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2} \quad (3.8)$$

### Exemple 2

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) = t^2 y(t) \quad (3.9)$$

$$y(0) = 1 \quad (3.10)$$

Dans ce cas, il ne suffit pas d'intégrer les deux cotés mais il faut d'abord séparer les variables comme suit :

Nous avons : 
$$\frac{dy(t)}{dt} = t^2 y(t) \quad (3.11)$$

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = t^2 dt \quad (3.12)$$

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)} = \int t^2 dt. \quad (3.13)$$

$$\ln y(t) = \frac{1}{3}t^3 + c \quad (3.14)$$

$$y(t) = e^{\frac{1}{3}t^3 + c} \quad (3.15)$$

$$y(t) = e^{\frac{1}{3}t^3} e^c$$

On pose  $C = e^c \Rightarrow y(t) = e^{\frac{1}{3}t^3} C$  (solution générale)

En imposant la condition initiale, on détermine la constante  $C$  et on trouve la solution particulière :

$$y(0) = 1 \tag{3.16}$$

$$C = 1 \tag{3.17}$$

alors :  $y(t) = e^{\frac{1}{3}t^3}$  (solution particulière). (3.18)

### 3.3.2 Solution numérique

Comme on vient de voir pour des cas simples la résolution analytique est facile, mais il existe des cas où il est difficile de déterminer la solution analytiquement. Dans ce cas, on fait appel aux méthodes numériques. Dans ce qui suit on présente quelques méthodes numériques de résolution des équations différentielles dites méthodes à un pas.

#### Définition [5]

Une méthode de résolution d'équation différentielle est dite à un pas si elle est de la forme suivante :

$$y_{n+1} = y_n + h \varnothing(t_n, y_n) \tag{3.19}$$

$\varnothing$  : est une fonction bien déterminée.

La méthode est à un pas si pour obtenir la solution en  $t = t_{n+1}$ , on doit utiliser la solution numérique à  $t_n$  seulement.

Parmi ces méthodes numériques, on peut citer :

#### 3.3.2.1 Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler explicite est une méthode à un pas de résolution numérique des équations différentielles. Son emploi est facile mais elle n'est pas très utilisée car elle a une faible précision. Elle est qualifiée de l'explicite car pour le calcul de la solution en  $t_{n+1}$ , on a besoin juste de la solution à l'instant  $t_n$ .

Exemple : soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y} = f(t) \tag{3.20}$$

En approximant la dérivée par la différence finie avant, on obtient :

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t} = f(t_n) \tag{3.21}$$

Alors :

$$y_{(t_{n+1})} = y(t_n) + \Delta t f(t_n) \quad (3.22)$$

Comme nous voyons la solution à l'instant  $t_{n+1}$  dépend de la solution à l'instant  $t_n$ .

### 3.3.2.2 Principes de la méthode d'Euler explicite [5]

Pour montrer le principe de la méthode d'Euler considérant l'équation différentielle du premier ordre à deux variables suivante :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad (3.23)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (3.24)$$

Le but consiste à trouver une approximation de la solution en :  $t_1 = t_0 + h$ .

Pour aller de  $(t_0, y_0)$  vers le point  $(t_1, y_1)$ , il faut déterminer tout d'abord dans quelle direction qu'il faut avancer. Pour cela comme l'équation de la courbe  $y(t)$  n'est pas définie alors la pente  $\dot{y}(t)$  en  $t = t_0$  peut être exploitée, en effet l'équation différentielle assure que :

$$\dot{y}(t) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0). \quad (3.25)$$

#### Remarque

$f(t_0, y_0)$  est une approximation de la solution analytique  $f(t_0, y(t_0))$ . Donc, il faut suivre la droite notée  $d_0(t)$  qui est une droite de pente  $f(t_0, y_0)$  qui passe par le point  $(t_0, y_0) = (t_0, y(t_0))$  avec  $d_0(t_0) = y_0$  son expression est la suivante :

$$d_0(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) \quad (3.26)$$

On pose  $h = t - t_0$ .

$h$  : est le pas du temps.

Alors : 
$$d_0(t) = y_0 + h f(t_0, y_0) \quad (3.27)$$

Pour trouver l'approximation de la solution en  $t = t_1$ , il suffit juste de remplacer  $t$  par  $t_1$  dans l'équation (3.27) ainsi :

$$d_0(t_1) = y_0 + (t_1 - t_0) f(t_0, y_0) \quad (3.28)$$

$$= y_0 + h f(t_0, y_0) = y(t_1) \approx y_1 \quad (3.29)$$

Pour trouver l'approximation de la solution au point  $t_2$ , c'est à dire  $y(t_2)$ , il faut refaire l'analyse précédent en allant du point  $(t_1, y_1)$ .

On remarque que  $\dot{y}(t) = f(t_1, y_1)$  (3.30)

$$d_1(t) = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1) \quad (3.31)$$

$$d_1(t_2) = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1) \quad (3.32)$$

Donc pour trouver l'approximation de la solution à chaque instant  $t_{n+1} = t_n + h$

On utilise cette équation :

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \quad (3.33)$$

L'équation (3.33) est la base de la méthode d'Euler explicite pour la résolution numérique des équations différentielles d'ordre 1.

### 3.3.2.3 Précision de la méthode d'Euler explicite

Pour étudier la précision de la méthode d'Euler explicite, on peut utiliser la définition de l'erreur de troncature locale utilisée pour étudier la précision des méthodes numériques à un pas de résolution d'équations différentielles.

#### Définition [5]

L'erreur de troncature locale au point  $t = t_n$  est définie par :

$$\sigma_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \varphi(t_n, y(t_n)) \quad (3.34)$$

#### Remarque

L'erreur de troncature locale mesure la précision de l'approximation de dérivée.

### 3.3.2.4 Calcul de l'erreur de troncature pour la méthode d'Euler explicite

Nous avons :  $\sigma_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \varphi(t_n, y(t_n))$  (3.35)

Sachant que :  $\varphi(t_n, y(t_n)) = f(t_n, y_n)$  (3.36)

D'autre part nous avons :  $y(t_{n+1}) = y(t_n + h)$  (3.37)

Faisant un développement de Taylor autour du point  $t = t_n$  :

$$\begin{aligned}y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) = y(t_n) + \dot{y}(t_n) h + \frac{h^2}{2} \ddot{y}(t_n) + O(h^3) \\ &= y(t_n) + f(t_n, y(t_n)) h + \frac{h^2}{2} \ddot{y}(t_n) + O(h^3)\end{aligned}\tag{3.38}$$

Puisque  $\dot{y}(t_n) = f(t_n, y(t_n))$

En remplaçant (3.36) et (3.38) dans (3.35) l'erreur devient :

$$\sigma_{n+1}(h) = \frac{1}{2} h \ddot{y}(t_n) + O(h^2)\tag{3.39}$$

Ou plus simplement :

$$\sigma_{n+1}(h) = O(h)\tag{3.40}$$

On conclue que l'erreur est d'ordre 1 et qu'elle diminue d'un facteur d'ordre 2 à chaque fois que le pas diminue d'un facteur de 2.

### Exemple illustratif

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) = -y(t) + t + 1\tag{3.41}$$

Avec la condition initiale :

$$y(0) = 1\tag{3.42}$$

La solution analytique pour ce système est la suivante :

$$y(t) = e^{-t} + t\tag{3.43}$$

En utilisant la méthode d'Euler explicite, on a calculé la solution numérique avec les différents pas  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$ ,  $h = 0.025$ , et on a eu les solutions numériques présentées sur la figure (3.1) avec la représentation de la solution analytique :

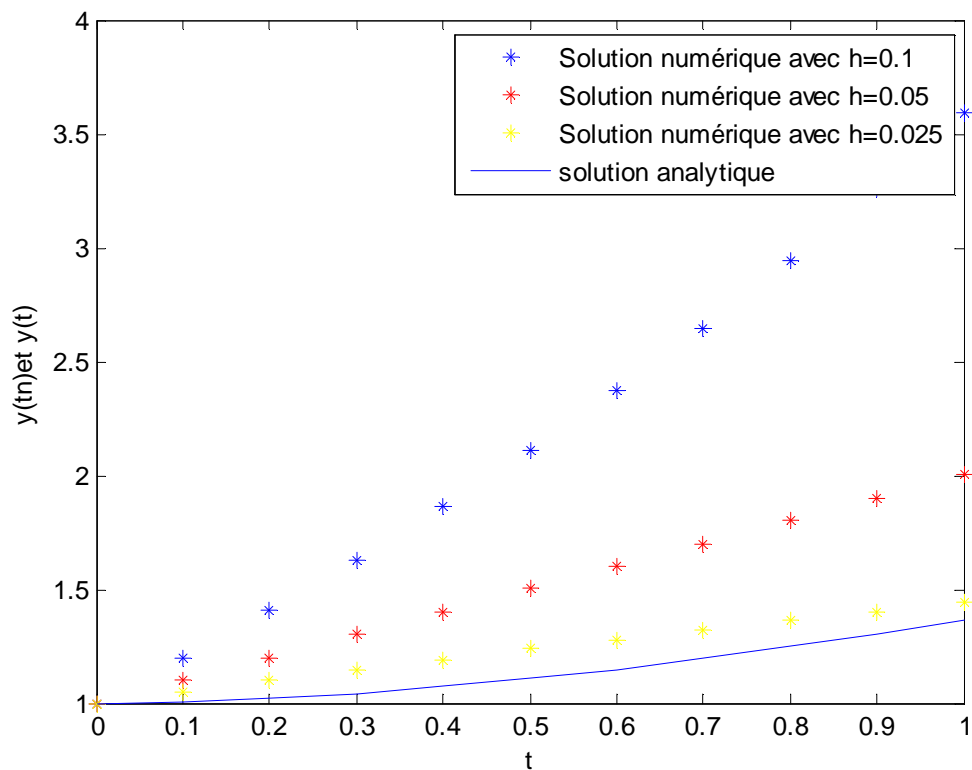


Figure (3.1) : Méthode d'Euler explicite pour  $h=0.1$ ,  $h=0.05$ ,  $h=0.025$ .

### Remarque

Nous remarquons qu'à chaque fois que le pas diminue, la solution numérique s'approche de la solution analytique ce qui prouve les résultats trouvés théoriquement.

#### 3.3.2.5 Méthode d'Euler implicite [5]

Différemment à la méthode d'Euler explicite dont la formule de différence avant d'ordre 1 est utilisée pour faire approcher la dérivée  $\dot{y}(t)$  en  $t = t_n$ . Une formule de différence arrière peut être utilisée pour synthétiser une méthode d'Euler dite implicite.

La formule d'Euler implicite est donnée comme suit :

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (3.44)$$

$h$  et  $y_n$  sont connus.

Nous remarquons que cette équation est une équation non linéaire donc à chaque pas, on doit résoudre une équation sous cette forme :

$$f(x) = x - y_n - h f(t_{n+1}, x) \quad (3.45)$$

Pour résoudre cette équation on peut utiliser les méthodes de résolutions des équations non linéaires, par exemple la méthode de Newton.

### 3.3.2.6 Précision de la méthode d'Euler implicite

De même que la méthode explicite, on calcule l'erreur de troncature locale pour la méthode implicite :

$$\text{Nous avons :} \quad \sigma_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \varphi(t_n, y(t_n)) \quad (3.46)$$

$$\text{Dans ce cas :} \quad \varphi(t_n, y(t_n)) = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (3.47)$$

$$\text{D'autre part nous avons :} \quad y(t_{n+1}) = y(t_n + h) \quad (3.48)$$

Faisant un développement de Taylor autour du point  $t = t_n$  ce qui donne :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) = y(t_n) + \dot{y}(t_n)h + \frac{1}{2}\ddot{y}(t_n)h^2 + O(h^3) \\ &= y(t_n) + f(t_n, y(t_n))h + \frac{1}{2}\ddot{y}(t_n)h^2 + O(h^3) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\text{Puisque} \quad \dot{y}(t_n) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

En remplaçant (3.47) et (3.49) dans (3.46), on aura :

$$\sigma_{n+1}(h) = +\frac{1}{2}\ddot{y}(t_n)h + O(h^2) \quad (3.50)$$

Ou plus simplement :

$$\sigma_{n+1}(h) = O(h) \quad (3.51)$$

### Remarque

Nous remarquons que l'erreur de troncature pour la méthode d'Euler implicite est de même ordre que celle d'Euler explicite, mais comme la méthode d'Euler implicite résout à chaque itération une équation non linéaire cela permet d'avoir plus de précision par rapport à la méthode explicite.

**3.3.2.7 Stabilité de la méthode d'Euler implicite et explicite [5]**

Pour étudier la stabilité des deux méthodes prenant un exemple simple d'une équation différentielle d'ordre 1 définie ainsi :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \beta y(t) & (3.52) \\ y(0) = y_0 & (3.53) \end{cases}$$

Avec  $\beta = \beta_R + i\beta_I$  est un nombre complexe.

La solution analytique de l'équation différentielle (3.54) avec la condition initiale (3.53) est la suivante :

$$y(t) = y_0 e^{\beta t} \tag{3.54}$$

On considère trois cas pour la solution analytique :

1.  $\beta_R > 0$  : la solution pour ce cas croît d'une manière exponentielle, c'est un problème instable.
2.  $\beta_R = 0$  : la solution est périodique et ne pose pas de problème.
3.  $\beta_R < 0$  : dans ce cas la solution décroît d'une manière exponentielle, c'est un problème stable et on voudrait que la solution numérique fasse la même chose sa veut dire :

$$|y_{n+1}| < |y_n| \tag{3.55}$$

Pour satisfaire la condition (3.55) on doit imposer des conditions sur  $h$  et  $\beta$  ce qui définit la zone de stabilité de chaque méthode.

**1. Stabilité de la méthode explicite**

On applique la méthode d'Euler explicite pour l'équation différentielle (3.52), on aura :

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) = y_n + h \beta y_n = (1 + h \beta) y_n \tag{3.56}$$

Pour que la solution numérique soit décroissante (suit la solution analytique) il faut que :

$$|1 + h \beta| < |1| \tag{3.57}$$

On pose  $z = h \beta$ , on aura :

$$|1 + z| < 1 \tag{3.58}$$

Donc la zone de stabilité est l'intérieure du cercle de centre  $(-1+ 0i)$  du rayon 1.

**Remarque**

Dans le cas où  $\beta$  est un réel inférieure à zéro alors la zone de stabilité vérifie :

$$-1 < 1 + h \beta < 1 \rightarrow -2 < h \beta < 0 \tag{3.59}$$

Nous remarquons que pour assurer la stabilité de la méthode dans ce cas, il faut que  $h < -\frac{2}{\beta}$ .

Donc comme nous voyons en étudiant la stabilité de la méthode d'Euler explicite le choix du pas  $h$  ne se fait pas au hasard mais en posant des conditions sur la convergence de la solution analytique.

**2. Stabilité de la méthode implicite**

On applique la méthode d'Euler implicite pour l'équation (3.52), on aura :

$$y_{n+1} = y_n + h \beta y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} (1 - \beta h) = y_n$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{(1 - \beta h)} y_n \tag{3.60}$$

La stabilité absolue est donnée comme suit :

$$\left| \frac{1}{(1 - \beta h)} \right| < 1 \Rightarrow |(\beta h - 1)| > 1 \tag{3.61}$$

On pose  $\beta h = z$  donc on aura :

$$|(z - 1)| > 1 \tag{3.62}$$

Sachant que  $z$  est un nombre complexe.

Donc la zone de stabilité pour la méthode d'Euler implicite est l'extérieure du cercle de centre  $(1+0i)$  et de rayon 1.

**Remarque**

- Dans le cas où  $\beta$  est un réel inférieure à zéro, la méthode d'Euler implicite est stable pour tous choix de  $h$  c'est à dire que toute valeur de  $h$  donnera des résultats correctes mais d'autant plus précises que  $h$  est petit.
- La méthode d'Euler implicite est plus stable par rapport à la méthode explicite.

Comme la méthode d'Euler explicite est faible en précision et la méthode d'Euler implicite présente l'inconvénient de résoudre à chaque itération une équation non linéaire. Les méthodes de Taylor sont développées pour contourner les inconvénients de ces deux méthodes. Parmi les méthodes de Taylor, on peut citer celle qui est d'ordre 2.

**3.3.2.8 Méthode de Taylor d'ordre 2 [5]**

Considérant l'équation différentielle du premier ordre définie précédemment comme suit

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) & (3.63) \\ y(t_0) = y_0 & (3.64) \end{cases}$$

Nous savons bien que pour la solution de l'équation différentielle à  $t = t_{n+1}$  est :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) \tag{3.65}$$

Le développement de Taylor au point  $t = t_n$  pour l'équation (3.65) donne :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + h \dot{y}(t_n) + \frac{h^2}{2} \ddot{y}(t_n) + O(h^3) \tag{3.66}$$

Comme  $\dot{y}(t_n) = f(t_n, y(t_n))$  (3.67)

En remplaçant (3.67) dans (3.66) donc l'équation devient :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \dot{f}(t_n, y(t_n)) + O(h^3) \tag{3.68}$$

$\dot{f}(t_n, y(t_n))$  peut s'écrire comme suit :

$$\dot{f}(t_n, y(t_n)) = \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y(t_n)} f(t_n, y(t_n)) \tag{3.69}$$

En remplaçant (3.69) dans (3.68) l'équation (3.68) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} \\ + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y(t_n)} f(t_n, y(t_n)) + O(h^3) \end{aligned} \tag{3.70}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y(t_n)} f(t_n, y(t_n)) \quad (3.71)$$

Cette équation est la base de la méthode de Taylor d'ordre 2.

### 3.3.2.9 Calcul de l'erreur de troncature pour la méthode de Taylor d'ordre 2

$$\text{Nous avons : } \sigma_{n+1}(h) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \varphi(t_n, y(t_n)) \quad (3.72)$$

$$\varphi(t_n, y(t_n)) = f(t_n, y(t_n)) + \frac{1}{2} h \left( \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y(t_n)} f(t_n, y(t_n)) \right) \quad (3.73)$$

en remplaçant (3.70) et (3.73) dans (3.72), on aura :

$$\sigma_{n+1}(h) = o(h^2) \quad (3.74)$$

Nous remarquons que l'erreur est d'ordre 2 donc elle est plus précise par rapport aux méthodes d'Euler. Nous pouvons obtenir des méthodes de Taylor encore plus précises en poursuivant le développement de Taylor jusqu'à des termes encore plus élevés donc on doit encore évaluer des dérivés de la fonction de  $f(t_n, y(t_n))$  d'ordre de plus en plus élevés. Pour cette raison, les méthodes obtenues sont difficiles à utiliser. Des méthodes dites méthodes de Runge-Kutta Sont développées pour contourner les difficultés des méthodes de Taylor.

### 3.3.2.10 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 [5]

Comme on a vu précédemment la méthode de Taylor passe par la résolution de cette équation :  $y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}$

$$+ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y(t_n)} f(t_n, y(t_n)) + O(h^3) \quad (3.75)$$

La méthode de Runge-Kutta consiste à remplacer l'équation (3.75) par une équation équivalente qui est la suivante :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + a_1 hf(t_n, y(t_n)) + a_2 h f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) \quad (3.76)$$

Les paramètres:  $a_1, a_2, a_3, a_4$  doivent être définis, mais avant il faut faire un développement de Taylor à deux variables pour  $f(t_n + a_3h, y(t_n) + a_4h)$  au point  $(t_n, y(t_n))$  ce qui donne :

$$f(t_n + a_3h, y(t_n) + a_4h) = f(t_n, y(t_n)) + a_3h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_4h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y(t_n)} + O(h^2) \quad (3.77)$$

Remplaçant (3.7) dans (3.76), l'équation (3.76) devient :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + (a_1 + a_2)hf(t_n, y(t_n)) + a_2a_3h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_2a_4h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y(t_n)} + O(h^3) \quad (3.78)$$

L'identification de (3.78) à (3.70) conduit à résoudre un système d'équation qu'il faut résoudre afin de déterminer les paramètres  $a_1, a_2, a_3, a_4$ :

- $(a_1 + a_2) = 1$  (3.79)

- $a_2a_4 = \frac{1}{2}$  (3.80)

- $a_2a_3 = \frac{1}{2}f(t_n, y(t_n))$  (3.81)

### 3.3.2.11 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 [5]

Le développement de Taylor pour l'équation  $f(t_n + a_3h, y(t_n) + a_4h)$  au point  $(t_n, y(t_n))$  jusqu'à l'ordre 5 en suivant le même raisonnement que celui de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 mène à résoudre un système de 8 équations non linéaires avec 10 inconnus. Le résultat final est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 dont l'algorithme est le suivant :

1. pour  $0 \leq n \leq S, (S = (t_f - t_0) / h)$  (3.82)

2.  $k_1 = hf(t_n, y_n)$  (3.83)

3.  $k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$  (3.84)

4.  $k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + k_2)$  (3.85)

5.  $k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$  (3.86)

6.  $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$  (3.87)

7.  $t_{n+1} = t_n + h$  (3.88)

**Application sur exemple**

On prend la même équation différentielle, étudiée avec la méthode d'Euler explicite, suivante:

$$\dot{y}(t) = -y(t) + t + 1 \tag{3.89}$$

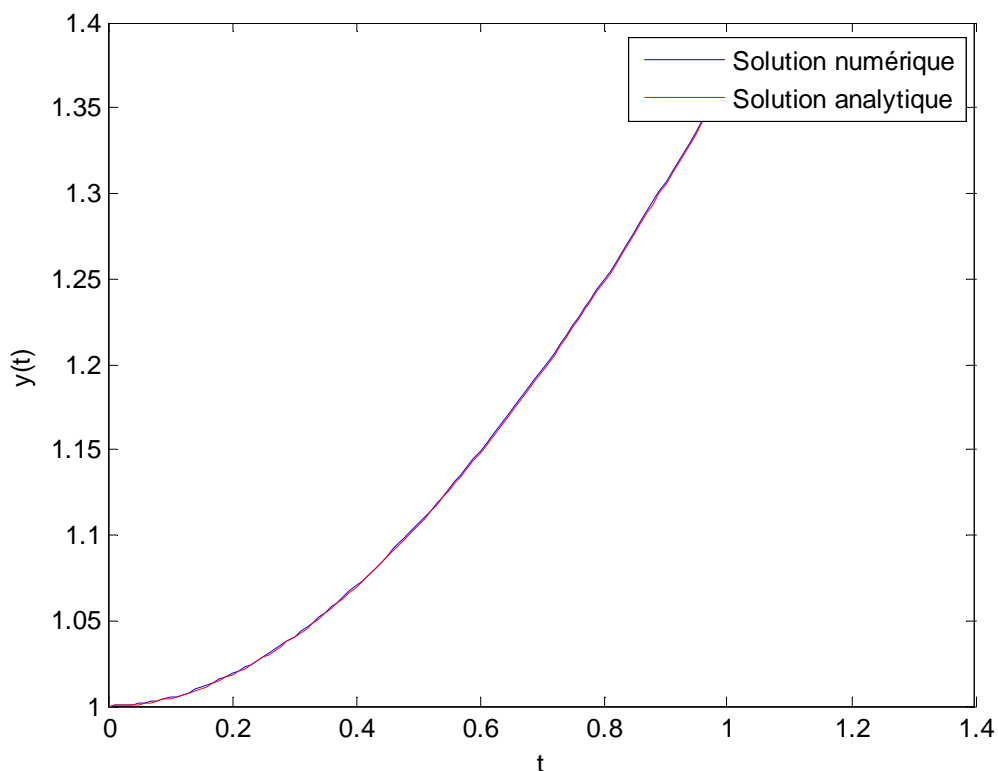
Avec la condition initiale suivante :

$$y(0) = 1 \tag{3.90}$$

On prend le pas :

$$h = 0.01 \tag{3.91}$$

En appliquant la méthode de Runge-Kutta pour l'équation différentielle précédente on a eu la solution numérique présentée sur la figure (3.2) avec la solution analytique.



Figure(3.2) : solution numérique avec méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 Comparée à une solution analytique (h=0.01)

**Remarque**

Nous remarquons que la solution numérique se coincide avec la solution analytique. Donc la méthode de Runge -Kutta d'ordre 4 avec un bon choix du pas donne de meilleurs résultats .

**3.3.2.12 Stabilité de la méthode de Runge-kutta d'ordre 4 [5]**

Appliquant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour le même exemple étudié dans le cas de la stabilité des méthodes d'Euler. Les calculs conduisent à :

$$y_{n+1} = y_n \left( 1 + h\beta + \frac{(h\beta)^2}{2} + \frac{(h\beta)^3}{6} + \frac{(h\beta)^4}{24} \right) \tag{3.92}$$

On pose  $z = h\beta$ , on aura :

$$y_{n+1} = y_n \left( 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \right) \tag{3.93}$$

$$\text{On pose aussi } k = \left( 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \right) \tag{3.94}$$

$$= \left( 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \right) \tag{3.95}$$

Pour que la méthode de Runge-Kutta soit stable il faut que :

$$|k| < 1 \tag{3.96}$$

**Remarque**

- Nous remarquons que  $k$  contient les premiers termes du développement de Taylor de la fonction exponentielle donc son domaine de stabilité est plus vaste que celui d'Euler explicite.
- Pour assurer la stabilité de la méthode de Runge-Kutta, il faut poser une valeur de  $h$  qui assure  $|k| < 1$ .

**3.4 Résolution d'équations différentielles d'ordre n avec les méthodes numériques**

Dans tous ce qui est précédant on a montré l'utilisation des méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles d'ordre 1 mais la question qui se pose si nous avons une équation d'ordre n comment procéder ?

La réponse est simple : on doit transformer cette équation différentielle d'ordre n avec condition initiale en un système de n équations différentielles d'ordre 1.

Soit l'équation différentielle d'ordre n suivante :

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (3.97)$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$y(t_0) = c_1 \quad (3.98)$$

$$y^{(1)}(t_0) = c_2 \quad (3.99)$$

$$y^{(2)}(t_0) = c_3 \quad (3.100)$$

⋮

$$y^{(n-2)}(t_0) = c_{n-1} \quad (3.101)$$

$$y^{(n-1)}(t_0) = c_n \quad (3.102)$$

Sachant que  $y^{(i)}(t)$  est la  $i^{\text{ème}}$  dérivée de la fonction  $y(t)$ .

Pour transformer l'équation différentielle précédente en un système d'équations différentielles d'ordre 1, on pose les changements de variables suivants :

$$y_1(t) = y(t) \quad (3.103)$$

$$y_2(t) = y^{(1)}(t) \quad (3.104)$$

$$y_3(t) = y^{(2)}(t) \quad (3.105)$$

⋮

$$y_{n-1}(t) = y^{(n-2)}(t) \quad (3.106)$$

$$y_n(t) = y^{(n-1)}(t) \quad (3.107)$$

Ce qui donne :

$$\dot{y}_1(t) = y^{(1)}(t) = y_2(t) \quad (3.108)$$

$$\dot{y}_2(t) = y^{(2)}(t) = y_3(t) \quad (3.109)$$

$$\dot{y}_3(t) = y^{(3)}(t) = y_4(t) \quad (3.110)$$

⋮

$$\dot{y}_{n-1}(t) = y^{(n-1)}(t) = y_n(t) \quad (3.111)$$

$$\dot{y}(t) = y^{(n)}(t) = f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad (3.112)$$

On détermine une condition initiale pour chaque équation en raisonnant de la même façon que précédemment, alors :

$$y_1(t_0) = y(t_0) = c_1 \quad (3.113)$$

$$y_2(t_0) = y^{(1)}(t_0) = c_2 \quad (3.114)$$

$$y_3(t_0) = y^{(2)}(t_0) = c_3 \quad (3.115)$$

⋮

$$y_{n-1}(t_0) = y^{(n-2)}(t_0) = c_{n-1} \quad (3.116)$$

$$y_n(t_0) = y^{(n-1)}(t_0) = c_n \quad (3.117)$$

Pour résoudre ce système d'équations, on doit appliquer une des méthodes de résolution numérique présentées précédemment pour chaque équation différentielle.

### Exemple

Soit l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$\ddot{y}(t) = -5\dot{y}(t) - 6y(t) + t \quad (3.118)$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$y_1(0) = 1/9 \quad (3.119)$$

$$y_2(0) = 0 \quad (3.120)$$

Transformant cette équation en un système d'équation d'ordre 1 avec conditions initiales en posant ce changement de variables :

$$y_1(t) = y(t) \quad (3.121)$$

$$y_2(t) = \dot{y}(t) \quad (3.122)$$

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) \quad (3.123)$$

$$\dot{y}_2(t) = -5y_2(t) - 6y_1(t) + t \quad (3.124)$$

Donc on aboutit à un système d'équation d'ordre 1 qu'on peut représenter ainsi :

$$1. \begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ y_1(0) = 1/9 \end{cases} \quad (3.125)$$

$$2. \begin{cases} \dot{y}_2(t) = -5y_2(t) - 6y_1(t) + t \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \quad (3.126)$$

Pour résoudre ce système, il suffit juste appliquer l'une des méthodes présentées précédemment pour chacun de ces systèmes.

### 3.5 Problème aux limites

Un problème aux limites est constitué d'une équation différentielle (ou plus généralement au dérivées partielles), dont on recherche une solution prenant de plus des valeurs imposées aux limites du domaine de résolution. Contrairement au problème analogue de Cauchy où une ou plusieurs conditions en un même endroit sont imposées (la valeur de la solution et des ces dérivées successives en un point sont données).

Les problèmes de commandes optimales sont généralement des problèmes à deux limites et pour les résoudre on utilise généralement la méthode de tir.

### 3.6 Méthode de tir [6]

La méthode de tir est une méthode qui est utilisée pour résoudre les équations différentielles d'ordre 2 de la forme :

$$\ddot{y}(t) + p(t) \dot{y}(t) + Q(t) y(t) = f(t, y, \dot{y}) \quad (3.127)$$

soumise à des conditions aux limites du type Dirichlet de la forme :

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y(t_n) = y_n \end{cases} \quad (3.128)$$

### 3.6.1 Rappel sur les conditions aux limites de Dirichlet

En mathématique, on dit qu'une équation différentielle est une équation avec conditions aux limites de Dirichlet lorsque l'on spécifie des valeurs que doit vérifier la solution aux limites du domaine de résolution.

### 3.6.2 Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 avec conditions aux limites de Dirichlet

Soit  $u(t)$  la solution particulière pour l'équation (3.127) donc  $u(t)$  satisfait l'équation:

$$\ddot{u}(t) + p(t)\dot{u}(t) + Q(t)u(t) = f(t, y, \dot{y}) \quad (3.129)$$

Et  $v(t)$  est la solution homogène pour l'équation (3.127) (sans  $f(t, y, \dot{y})$ ), c'est-à-dire :

$$\ddot{v}(t) + p(t)\dot{v}(t) + Q(t)v(t) = 0 \quad (3.130)$$

La soustraction de l'équation (3.127) et (3.129) donne :

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + Q(t)y(t) - f(t, y, \dot{y}) - (\ddot{u}(t) + p(t)\dot{u}(t) + Q(t)u(t) - f(t, y, \dot{y})) &= 0 \\ \Rightarrow (y(t) - u(t))'' + p(t)(y(t) - u(t))' + Q(t)(y(t) - u(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.131)$$

#### Remarque

On remarque que l'équation (3.131) est une équation homogène équivalente à l'équation (3.130) par conséquent la solution de l'équation (3.131) qui est  $(y(t)-u(t))$  et la solution de l'équation (3.130) qui est  $v(t)$  sont proportionnelles c'est-à-dire :

$$y(t) - u(t) = \alpha v(t) \quad (3.132)$$

$$y(t) = u(t) + \alpha v(t) \quad (3.133)$$

On remplace l'équation (3.133) dans l'équation (3.129), on aura :

$$\ddot{u}(t) + p(t)\dot{u}(t) + Q(t)u(t) = f(t, u(t) + \alpha v(t), \dot{u}(t) + \alpha \dot{v}(t)) \quad (3.134)$$

On remarque que  $u(t)$  ne doit pas dépendre de la constante de proportionnalité  $\alpha$ , on doit exiger que  $f(t, y, \dot{y})$  soit indépendante de  $y(t)$  et  $\dot{y}(t)$ , ainsi la méthode de tir est applicable aux équations de la forme :

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + Q(t)y(t) = f(t) \quad (3.1.35)$$

L'objectif de la méthode de tir est de mettre le problème aux limites sous la forme de deux problèmes à conditions initiales. Le principe est le suivant :

Problème en  $u(t)$  :

$$\ddot{u}(t) + p(t)\dot{u}(t) + Q(t)u(t) = f(t) \quad (3.136)$$

Problème en  $v(t)$  :

$$\ddot{v}(t) + p(t)\dot{v}(t) + Q(t)v(t) = 0 \quad (3.137)$$

Pour compléter les deux problèmes, on doit spécifier les conditions initiales.

A partir de l'équation (3.133), on a :

$$y(t) = u(t) + \alpha v(t)$$

Donc :

$$\dot{y}(t) = \dot{u}(t) + \alpha\dot{v}(t) \quad (3.138)$$

Par conséquent, les conditions des problèmes initiaux doivent être identifiées en utilisant l'information  $y(t_0) = y_0$ , on aura:

$$y(t_0) = u(t_0) + \alpha v(t_0) \quad (3.139)$$

Donc :

$$\dot{y}(t_0) = \dot{u}(t_0) + \alpha\dot{v}(t_0) \quad (3.140)$$

Pour identifier la condition initiale  $u(t_0)$  nous avons :

Comme  $y(t_0)$  est connue et  $\alpha$  n'est pas connue, on profite de prendre :

$$u(t_0) = y_0 \text{ et } v(t_0) = 0.$$

Pour identifier la condition initiale  $v(t_0)$ , comme  $\dot{y}(t_0)$  n'est pas connu et  $\alpha$  n'est pas connu, on profite d'identifier  $\dot{y}(t_0)$  à  $\alpha$  on posant  $\dot{u}(t_0) = 0$  et  $\dot{v}(t_0) = 1$ .

En résumé, les deux problèmes sont donnés comme suit :

1. Problème en  $u(t)$  :

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + p(t) \dot{u}(t) + Q(t) u(t) = f(t) \\ u(t_0) = y_0 \\ \dot{u}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (3.141)$$

2. Problème en  $v(t)$  :

$$\begin{cases} \ddot{v}(t) + p(t) \dot{v}(t) + Q(t) v(t) = 0 \\ v(t_0) = 0 \\ \dot{v}(t_0) = 1 \end{cases} \quad (3.142)$$

Les deux problèmes  $u(t)$  et  $v(t)$  qui ont les conditions initiales peuvent être résolus par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à partir de laquelle nous déterminons  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

Si  $v_n \neq 0$ , la condition de Dirichlet pour  $y(t_n)$  devient :

$$y_n = u_n + \alpha v_n \quad (3.143)$$

Puisque  $u_n$  et  $v_n$  sont connus et  $y_n$  est spécifiée par la condition aux limites, on aura :

$$\alpha = \frac{y_n - u_n}{v_n} \quad (3.144)$$

### Exemple illustratif

On considère l'équation :

$$\ddot{y}(t) + t\dot{y}(t) + ty(t) = -4 \exp(-t) \quad (3.145)$$

Avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} y(1) = 2 \exp(-1) \\ y(3) = 6 \exp(-3) \end{cases} \quad (3.146)$$

La solution analytique pour l'équation (3.145) est :

$$y(t) = 2t \exp(-t) \quad (3.147)$$

Avec

$$1 \leq t \leq 3 \quad (3.148)$$

Pour résoudre ce problème aux limites, on applique la méthode de tir et en le transformant en deux problèmes avec conditions initiales comme est expliqué précédemment : Ainsi, on a :

1. Problème en  $u(t)$  :

$$\ddot{u}(t) - t \dot{u}(t) - t u(t) = -4 \exp(-t) \quad (3.149)$$

Avec des conditions initiales :

$$u(1) = 2 \exp(-1) \quad (3.150)$$

$$\dot{u}(1) = 0 \quad (3.151)$$

Problème en  $v(t)$  :

$$\ddot{v}(t) - t \dot{v}(t) - t v(t) = 0 \quad (3.152)$$

Avec des conditions initiales :

$$v(1) = 0 \quad (3.153)$$

$$\dot{v}(1) = 1 \quad (3.154)$$

Pour résoudre ces deux problèmes, on utilise l'une des méthodes présentées précédemment par exemple la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Avant de les résoudre, il faut transformer chaque problème en un système d'équations différentielles d'ordre 1 pour pouvoir appliquer la méthode.

Le changement de variable pour l'équation (3.149) :

On pose :

$$u_1(t) = u(t) \quad (3.155)$$

$$u_2(t) = \dot{u}(t) \quad (3.156)$$

On dérive les deux équations (3.155) et (3.156) et on aura le 1<sup>er</sup> système de deux équations du 1<sup>er</sup> ordre

Systeme(1) :

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t) & (3.157) \\ \dot{u}_2(t) = t u_2(t) + t u_1(t) - 4 \exp(-t) & (3.158) \end{cases}$$

Le changement de variable pour l'équation (3.152) :

On pose :

$$v_1(t) = v(t) \quad (3.159)$$

$$v_2(t) = \dot{v}(t) \quad (3.160)$$

On dérive les deux équations (3.159) et (3.160) et on aura le 2<sup>eme</sup> système de deux équations du 1<sup>er</sup> ordre :

Systeme (2) :

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t) = v_2(t) & (3.161) \\ \dot{v}_2(t) = t v_2(t) + t v_1(t) & (3.162) \end{cases}$$

Pour résoudre ces deux systèmes d'équations, on a utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordres 4 avec un pas  $h= 0.01$  : les résultats obtenus sont résumés dans les tableaux suivants :

Solution u(t) :

t	0	0.01	0.02	0.03	0.04
u	0.7358	0.7357	0.7356	0.7354	0.7352

Solution v(t) :

t	0	0.01	0.02	0.03	0.04
v	0	0.0101	0.0202	0.0305	0.0408

Détermination de  $\alpha$ :

à partir de l'équation (3.144), on a :

$$\alpha = \frac{y_n - u_n}{v_n}$$

$$\alpha = 2.3692e-010$$

Solution  $y(t)$  :

t	0	0.01	0.02	0.03	0.04
y	0.7358	0.7357	0.7356	0.7354	0.7352

Solution analytique : (3.147)

t	0	0.01	0.02	0.03	0.04
$y_{\text{-exact}}$	0.7358	0.7357	0.7356	0.7354	0.7352

Le graphe représentant la solution numérique et la solution analytique est donné par la figure (3.2) :

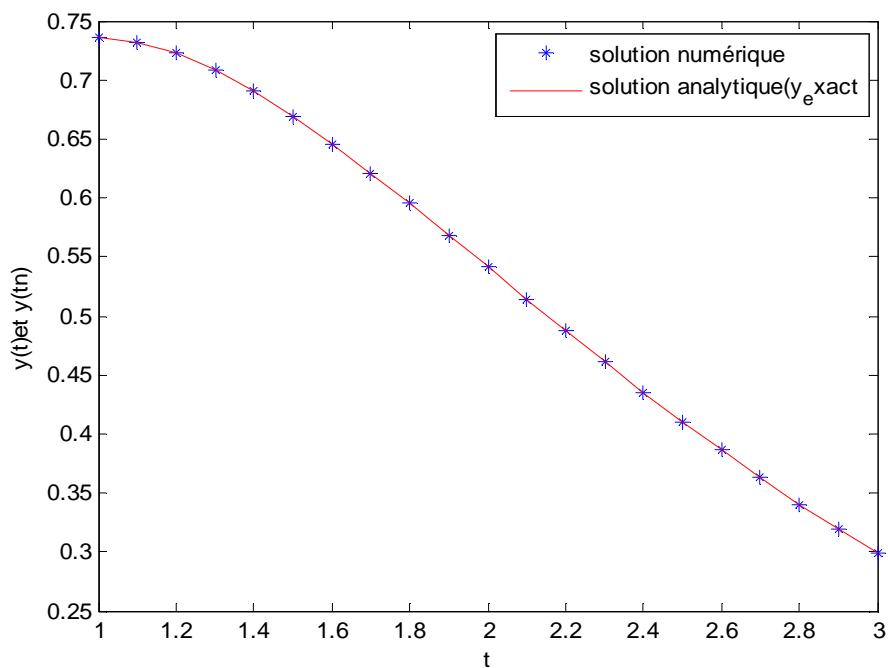


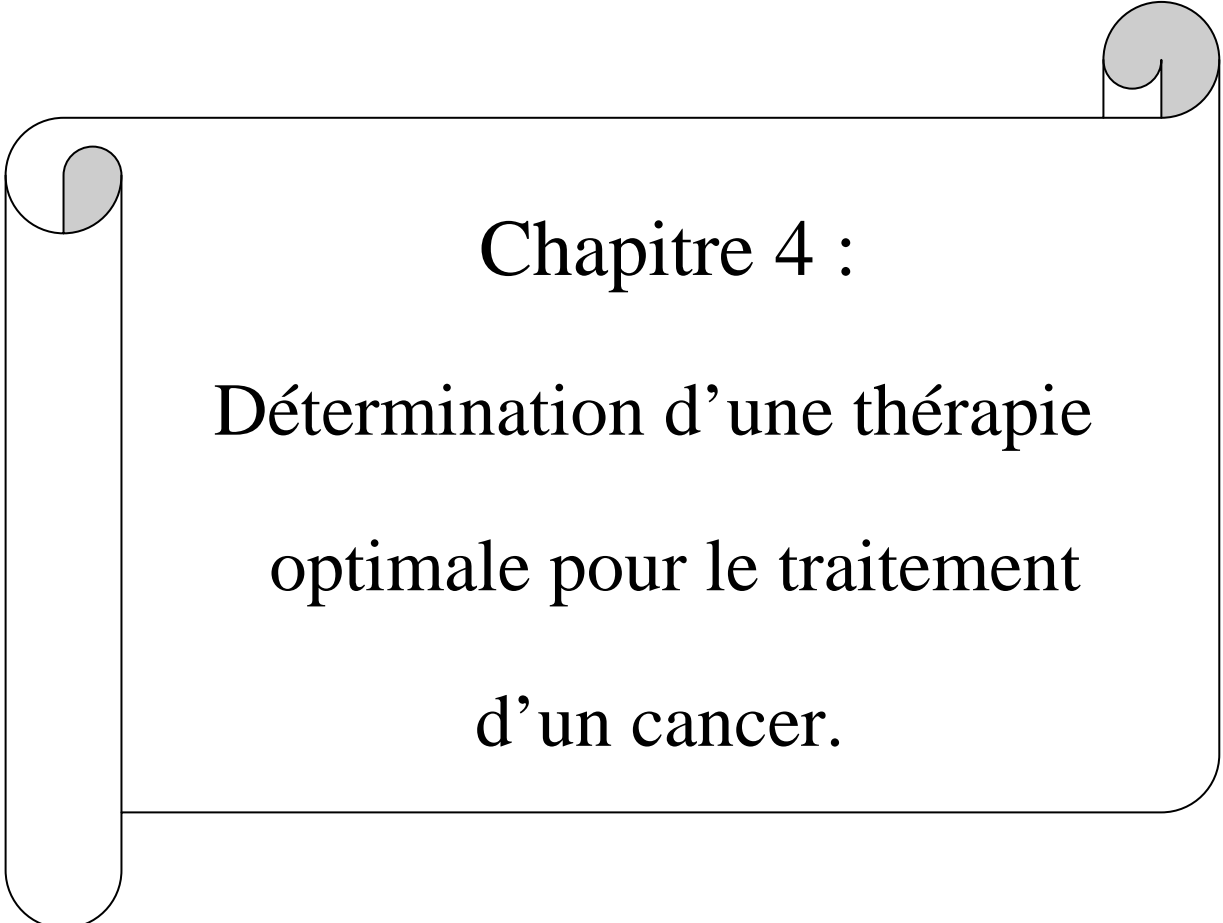
Figure (3.2) : Solution numérique avec la méthode de tir et solution analytique.

Nous remarquons que la solution donnée par la méthode de tir se compare avec la solution analytique .

### **3.7 Conclusion :**

Dans ce chapitre on a exposé quelques méthodes numériques, dites méthodes à un pas pour la résolution numérique des équations différentielles ordinaires. On a constaté que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est la plus performante pour résoudre ces dernières. La méthode d'Euler explicite est faible en précision, la méthode d'Euler implicite est précise mais elle présente l'inconvénient de résoudre à chaque itération une équation algébrique. Les méthodes de Taylor malgré qu'elles sont précises mais nécessitent d'évaluer des dérivées d'ordre supérieures ce qui rends les méthodes difficiles à appliquer.

On exposé aussi la méthode de tir pour la résolution des problèmes aux limites qu'on va utiliser dans le chapitre suivant pour résoudre un problème de commande optimale concernant la minimisation de la densité d'une tumeur et les effets secondaires éventuels du médicament.

A decorative graphic of a scroll with a grey shadow, framing the text. The scroll is positioned in the center of the page, with its top edge slightly curved and its bottom edge also curved. The text is centered within the scroll's frame.

**Chapitre 4 :**  
**Détermination d'une thérapie  
optimale pour le traitement  
d'un cancer.**

### **4.1 Introduction**

Après avoir consacré les chapitres précédents à présenter les outils mathématiques nécessaires pour la formulation et à la résolution d'un problème de commande optimale, dans ce chapitre on s'intéresse à concevoir une commande optimale qui permet de minimiser la densité d'une tumeur tout en minimisant les effets secondaires éventuels du médicament.

### **4.2 Généralité sur le cancer**

Le corps est composé de millions de cellules vivantes. Les cellules normales du corps croissent, se divisent et meurent d'une façon ordonnée. Pendant les premières années de vie d'une personne, les cellules normales se divisent plus rapidement pour permettre à la personne de se développer et grandir, après que la personne devient adulte, la plupart de ces cellules se divisent seulement pour remplacer les cellules qui meurent, réparer les dommages, assurer la continuité de vie.

#### **4.2.1 Définition du cancer**

Un cancer est une maladie liée à un dérèglement de certaines cellules du corps : certaines cellules deviennent anormales et se mettent à se diviser et à se multiplier de façon anarchique et sans contrôle. Un cancer peut apparaître dans n'importe quel organe ou tissu (ensemble de cellules) du corps. Il existe divers cancer : cancer de la peau, de l'estomac, du sein, d'ovaires.

#### **4.2.2 Croissance d'un cancer [7]**

La croissance des cellules cancéreuses est différente de la croissance des cellules normales. Au lieu de mourir, les cellules cancéreuses continuent à se développer et de former de nouvelles cellules anormales. Les cellules cancéreuses peuvent aussi envahir d'autres tissus, quelque chose que les cellules normales ne peuvent pas faire. Les cellules deviennent des cellules cancéreuses à cause de l'endommagement de l'ADN. Ce dernier se trouve dans chaque cellule et dirige ces actions, dans une cellule normale lorsque il est endommagé soit la cellule répare les dommages soit meurt par contre la cellule cancéreuse continue à se développer et donner autant de cellules anormales.

### **4.2.3 Méthodes de traitement du cancer [7]**

Les méthodes de traitement traditionnelles du cancer incluent la chirurgie, la radiothérapie, la chimiothérapie, mais il existe aussi d'autres techniques.

#### **4.2.3.1 Chirurgie**

La principale approche pour ce type de traitement consiste à retirer chirurgicalement la tumeur, autrefois cela implique également l'ablation de tous tissus et organes qui risquaient d'être atteints, y compris les tissus adjacents et les ganglions de la région.

Malheureusement, de nombreux cancers sont découverts à des stades trop avancés pour être opérable, c'est le cas lorsque l'extension atteint des organes vitaux ou que les métastases sont déjà apparues. Il arrive cependant dans tel cas que les chirurgiens choisissent d'interventions afin de diminuer les symptômes, de réduire la taille de la tumeur et de faciliter l'action pour d'autres traitements.

#### **4.2.3.2 Radiothérapie**

Les rayonnements ionisants, électromagnétiques ou particuliers détruisent les tissus. Les rayonnements électromagnétiques comprennent les rayons gamma émis par la désintégration de noyau ou de particules radioactifs et les rayons X résultants du choc entre un faisceau d'électrons et d'une surface métallique. Les rayonnements particuliers incluent les électrons, les protons, les neutrons et les particules alpha. La sensibilité des tumeurs aux rayonnements est très variable mais elle est généralement plus importante que celle des tissus sains normaux environnants. Cette technique donc est peu nocive pour les tissus sains, à condition que le rayonnement soit bien dosé. On a recours à la radiothérapie dans les cas de tumeur de l'utérus, de cancer de peau, de larynx ou de tissus lymphoïde et en particuliers contre les métastases. La radiothérapie est complémentaire de la chirurgie notamment lorsque celle-ci risque de léser les tissus voisins.

#### **4.2.3.3 Chimiothérapie**

La chimiothérapie est le traitement du cancer par des substances chimiques. Les médicaments sont véhiculés dans tous l'organisme par l'intermédiaire de la circulation sanguine. Il existe un très grand nombre de médicament anticancéreux, mais presque tous fonctionnent selon le même mécanisme : ils interfèrent avec les synthèses ou l'expression de l'ADN ou avec le même mécanisme de division cellulaires. Les cellules les plus sensibles à

ces substances sont celles qui se divisent le plus fréquemment ou les tumeurs possèdent une plus forte proportion de cellules en cours de division que les cellules saines. Ces dernières sont donc plus résistantes au traitement, mais certains d'entre eux, dont les cellules prolifèrent rapidement (moelles osseuses, tissus du tube digestif...etc.). Restent relativement sensibles.

Les risques d'effets secondaires indésirables liés à ces tissus et organes limitent les doses que l'on peut administrer au cours de la chimiothérapie. Notons que pour que le traitement soit efficace, il faut que la tumeur soit sensible au traitement que la plus part de cellules saines. Certains types de tumeurs sont très sensibles aux molécules anticancéreuses sont particulièrement désignées pour le traitement chimiothérapique. Il s'agit notamment du cancer de l'utérus, des leucémies aiguës, surtout chez les enfants. Ces types de tumeurs ne peuvent être traités autrement que par la chimiothérapie. Mais il existe deux principaux problèmes qui limitent l'utilisation de la chimiothérapie : qui sont la toxicité sur les tissus sains et l'apparition d'une résistance des cellules cancéreuses. Pour cela, il est nécessaires de commencer le traitement aussi tôt que possible et de déterminer les doses optimales nécessaires.

### **4.2.4 Effets secondaires de la chimiothérapie [8]**

L'existence des cellules saines qui prolifèrent rapidement (divisent) permet à la chimiothérapie d'entraîner des effets secondaires indésirables sur la santé de l'être humain. D'une manière générale, la fréquence de survenue de ces effets secondaires est variable en fonction du type de protocole de la chimiothérapie et des informations peuvent être obtenues auprès des médecins. Il existe par ailleurs une grande variabilité entre les individus en ce qui concerne la tolérance de la chimiothérapie donnée de telle sorte qu'il n'est pas possible de prédire de façon fiable sa tolérance pour un individu donné et parmi les effets secondaires qui peuvent être survenir on peut citer :

1. Les troubles digestives : parmi les effets liés aux troubles digestifs, on peut citer les nausées et les vomissements, les modifications du goût ....etc.
2. La modification des cellules sanguines : la chimiothérapie peut altérer la production des globules blancs, des globules rouges et des plaquettes ce qui provoque une anémie chez le patient en cas de chute des globules rouge, une faible défense du corps vis-à-vis des infections dans le cas du chute des globules blancs, la faiblesse et les troubles de températures en cas de chute des plaquettes.

3. Les troubles de la peau, des marqueuses, des cheveux, des ongles.
4. Des troubles neurologiques.
5. Des troubles rénaux.
6. Des troubles cardiaques.
7. La fatigue.
8. Les diminutions de la fertilité.
9. La toxicité hépatique.

Comme nous voyons les effets de la chimiothérapie sont divers, donc il faut toujours essayer de trouver une dose optimale du médicament qui garantie des bon résultats et qui contourne ces effets indésirables.

### **4.3 Commande optimale et la chimiothérapie [9]**

Les techniques de commande optimale sont d'une grande utilité dans l'élaboration de stratégie optimale pour la chimiothérapie. Ainsi un traitement optimal permettant de minimiser la densité d'une tumeur et les effets secondaires du médicament sur un intervalle de temps donné peut être élaboré. Cette technique a été employée par Fister et Panetta dans les années 60. Plusieurs modèles ont été développés pour l'évolution des cellules tumorales sous l'effet d'un traitement. Parmi ces modèles on retrouve le modèle de Fister-Panetta dont la tumeur est supposée avoir une densité Gompertzian.

### **4.4 Modèles mathématique de Fister et Panetta pour le traitement du cancer : [9]**

Pour mettre un traitement optimal et stratégique, Fister et Panetta ont développé un modèle général décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = r N(t) F(N) - G(N(t), t) \quad (4.1)$$

Où :

$r$  : est le taux de croissance de la tumeur.

$N(t)$  : est le volume ou la densité de la tumeur (Cancer).

$G(N(t), t)$  : décrit la pharmacocinétique et les effets pharmaco-médicales du médicament sur le système.

$F(N)$  : est la fonction de croissance généralisée.

Fister et Panetta ont supposé que  $F(N)$  croit selon une croissance Gompertzian définie comme suit :

$$F(N) = \ln \left( \frac{\theta}{N} \right) \quad (4.2)$$

Dans leur étude Fister et Panetta ont développé l'équation en considérant trois problèmes parmi eux celui qu'on va considérer dans notre application. Ils ont mis en échelle l'équation en considérant que  $N = \frac{N}{\theta}$ . Ils ont considéré les hypothèses de skipper (log-kill skipper) pour définir la pharmacocinétique et les effets pharmaco-médicale du médicament sur le système comme suit :

$$G(N(t),t) = \rho u(t) N(t) \quad (4.3)$$

Avec :

$\rho$  : la dose du médicament

$u(t)$  : décrit la pharmacocinétique du médicament notons que  $u(t) = 0$  implique aucun effet du médicament sur le cancer et  $u(t) > 0$  signifie l'efficacité du médicament.

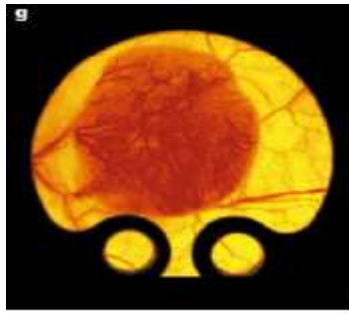
D'où le modèle suivant :

$$\frac{dN(t)}{dt} = r N(t) \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) - u(t) \rho N(t) \quad (4.4)$$

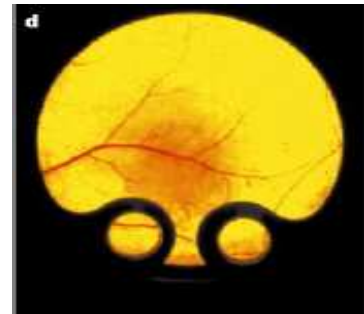
#### **4.5 Application numérique [10]**

Notre objectif dans cette application est de résoudre un problème de commande optimale qui consiste à trouver une commande optimale (traitement) qui minimise la densité d'une tumeur et les effets secondaires du traitement (trouver une commande qui peut ramener la densité d'une tumeur d'une densité initial  $N_0 = 0,975$  à une densité plus petite bien défini  $N_f = 0,35$ ) dont le model de l'évolution de la densité est celui de Fister - Panetta. Sachant que la période de traitement suggéré est 20 jours. Les paramètres du modèle sont :

$$\varepsilon = 3, \quad \rho = 0,45, \quad r = 0,1.$$



Densité initiale d'un cancer



Densité finale d'un cancer

### 4.5.1 Formulation du problème

Selon les données et les exigences du cahier des charges, le problème de commande optimale est donné comme suit :

$$\min_{u(t)} \int_0^T (\varepsilon N(t)^2 + u(t)^2) dt \quad (4.5)$$

Sujet à :

$$\dot{N}(t) = r N(t) \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) - u(t) \rho N(t) \quad (4.6)$$

$$N(0) = N_0 = 0,975 \quad (4.7)$$

$$N(t_f = 20) = 0,35 . \quad (4.8)$$

$$u(t) \geq 0 \quad (4.9)$$

#### Remarque

Pour résoudre ce problème et déterminer la commande optimale, on utilise la méthode de calcul des variations présentée au chapitre 2.

### 4.5.2 Résolution du problème en utilisant le calcul des variations

#### 4.5.2.1 Transformation de problème de commande optimale en un problème de calcul des variations

De l'équation (4.6) nous avons :

$$u(t) = \frac{r}{\rho} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) - \frac{1}{\rho N(t)} \dot{N}(t) \quad (4.10)$$

Calcul de  $(u(t))^2$  :

$$u(t)^2 = \frac{r^2}{\rho^2} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right)^2 - \frac{2r}{\rho^2 N(t)} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) \dot{N}(t) + \frac{1}{\rho^2 N(t)^2} \dot{N}(t)^2 \quad (4.11)$$

On remplace (4.11) dans (4.5), le problème devient un problème de calcul des variations qu'on définit comme suit :

$$\min_{N(t)} \int_0^T (\varepsilon N(t)^2 + \frac{r^2}{\rho^2} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right)^2 - \frac{2r}{\rho^2 N(t)} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) \dot{N}(t) + \frac{1}{\rho^2 N(t)^2} \dot{N}(t)^2) dt \quad (4.12)$$

Sujet à

$$N(0) = 0,975 \quad (4.13)$$

$$N(20) = 0,35 \quad (4.14)$$

#### 4.5.2.2 Calcul de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\text{On pose } G(t) = \varepsilon N(t)^2 + \frac{r^2}{\rho^2} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right)^2 - \frac{2r}{\rho^2 N(t)} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) \dot{N}(t) + \frac{1}{\rho^2 N(t)^2} \dot{N}(t)^2 \quad (4.15)$$

L'équation d'Euler-Lagrange est donnée comme suit :

$$\frac{\partial G(t)}{\partial N(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G(t)}{\partial \dot{N}(t)} = 0 \quad (4.16)$$

➤ **Calcul de  $\frac{\partial G(t)}{\partial N(t)}$  :**

$$\frac{\partial G(t)}{\partial N(t)} = 2\varepsilon N(t) - \frac{2r^2}{\rho^2 N(t)} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) + \frac{2r}{\rho^2 N(t)^2} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) \dot{N}(t) + \frac{2r}{\rho^2 N(t)^2} \dot{N}(t) - \frac{2}{\rho^2 N(t)^3} \dot{N}(t)^2 \quad (4.17)$$

➤ **Calcul de  $\frac{d}{dt} \frac{\partial G(t)}{\partial \dot{N}(t)}$  :**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G(t)}{\partial \dot{N}(t)} = -\frac{2r}{\rho^2 \dot{N}(t)} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) + \frac{2}{\rho^2 \dot{N}(t)^2} \ddot{N}(t) \quad (4.18)$$

En remplaçant (4.17), (4.18) dans (4.16), on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t)}{\partial N(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G(t)}{\partial \dot{N}(t)} &= 2\varepsilon N(t) - \frac{2r^2}{\rho^2 N(t)} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) + \frac{2r}{\rho^2 N(t)^2} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) \dot{N}(t) + \frac{2r}{\rho^2 N(t)^2} \dot{N}(t) \\ &\quad - \frac{2}{\rho^2 N(t)^3} \dot{N}(t)^2 + \frac{2r}{\rho^2 \dot{N}(t)} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) - \frac{2}{\rho^2 \dot{N}(t)^2} \ddot{N}(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Pour résoudre l'équation d'Euler-Lagrange, on doit imposer :

$$\frac{\partial G(t)}{\partial N(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G(t)}{\partial \dot{N}(t)} = 0 \quad (4.20)$$

Ce qui donne l'équation suivante :

$$\ddot{N}(t) = -\frac{1}{N(t)^3} \dot{N}(t)^4 + \left( \frac{r}{N(t)^2} + \frac{r}{N(t)^2} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) \right) \dot{N}(t)^3 + \left( \varepsilon N(t) \rho^2 - \frac{r^2}{N(t)} \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) \right) \dot{N}(t)^2$$

$$+ r \ln \left( \frac{1}{N(t)} \right) \dot{N}(t) . \quad (4.21)$$

Nous remarquons bien que l'équation différentielle est non linéaire et d'ordre 2, donc notre problème revient à résoudre cette équation avec conditions aux limites suivantes :

$$N(0) = 0,975 \quad (4.22)$$

$$N(20) = 0,35 \quad (4.23)$$

Pour résoudre le problème on utilise la méthode de tir :

#### 4.5.2.3 Transformation de l'équation différentielle d'ordre 2 en un système d'équations d'ordre 1

Pour transformer l'équation (4.21) en un système d'équations d'ordre 1, on considère le changement de variable suivant :

$$y_1(t) = N(t) \quad (4.24)$$

$$y_2(t) = \dot{N}(t) \quad (4.25)$$

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2(t) = & -\frac{1}{y_1(t)^3} y_2(t)^4 + \left( \frac{r}{y_1(t)^2} + \frac{r}{y_1(t)^2} \ln \left( \frac{1}{y_1(t)} \right) \right) y_2(t)^3 \\ & + \left( \varepsilon y_1(t) \rho^2 - \frac{r^2}{y_1(t)} \ln \left( \frac{1}{y_1(t)} \right) \right) y_2(t)^2 + r \ln \left( \frac{1}{y_2(t)} \right) y_2(t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Avec :  $N(0) = 0,975 \quad (4.28)$

$$N(20) = 0,35 \quad (4.29)$$

La résolution du système conduit aux résultats des figures suivantes :

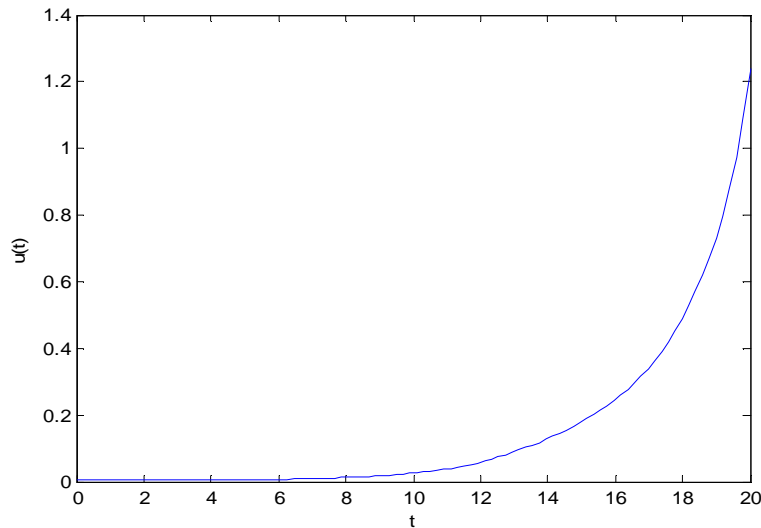


Figure (4.1) : Évolution de la commande.

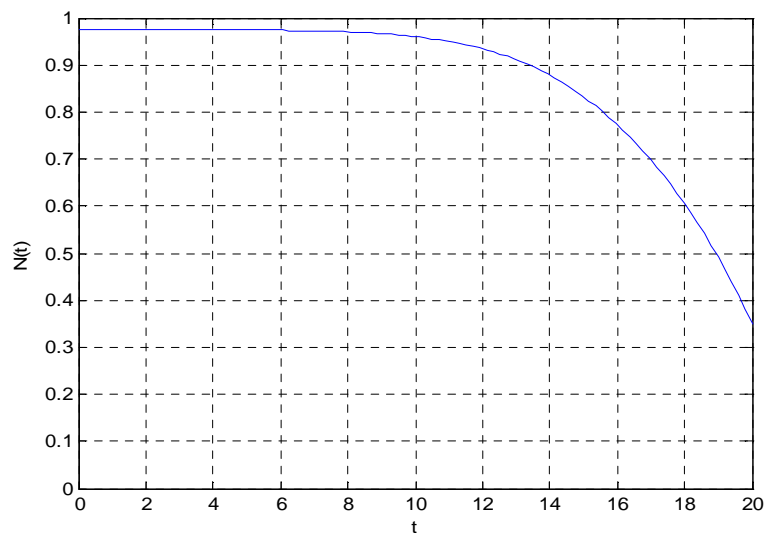


Figure (4.2) Évolution de la densité de la tumeur au cours du traitement chimiothérapique.

Nous remarquons que la quantité du médicament est constituée entre  $5,10^{-3}$  et 1,24. Notons aussi que la quantité du médicament est faible et constante pendant les 5 premiers jours et que nous devons commencer à l'augmenter légèrement à partir du 6<sup>ème</sup> jour (la commande croit d'une manière exponentielle).

## Chapitre 4 : Détermination d'une thérapie optimale pour le traitement d'un cancer

Nous remarquons aussi que la densité du cancer commence à diminuer à partir du 6<sup>ème</sup> (une légère diminution) et continue à diminuer d'une manière exponentielle jusqu'à atteindre au 20<sup>ème</sup> jour la densité minimale souhaitée.

**Essais 2 :** on garde les mêmes valeurs pour  $\varepsilon$ ,  $r$ , mais on augmente la dose du médicament, on la prend  $\rho = 0,85$  :

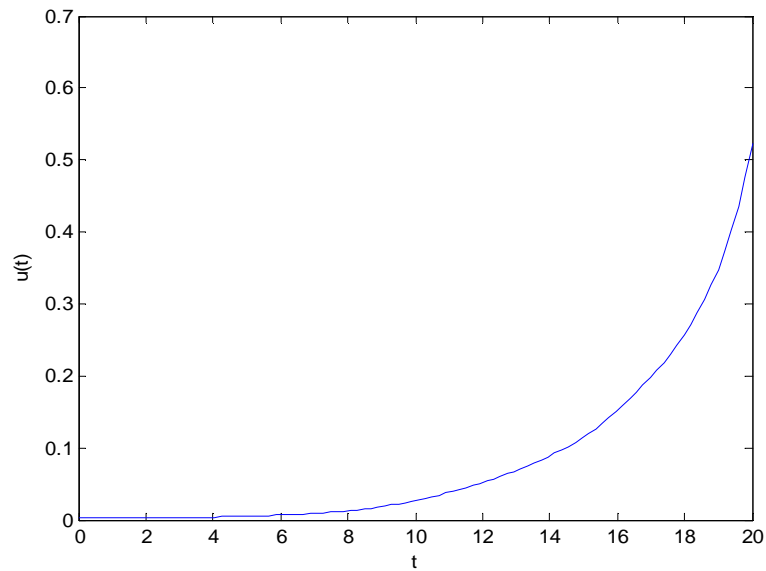


Figure (4.3) : Évolution de la commande pour  $\rho = 0,85$ .

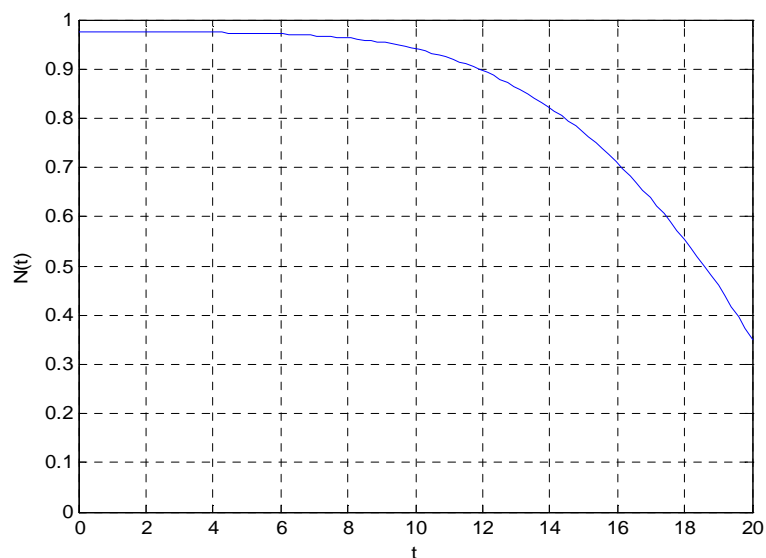


Figure (4.4) Évolution de la densité de la tumeur au cours du traitement chimiothérapique avec  $\rho = 0,85$ .

Nous remarquons que l'augmentation de la dose du médicament jusqu'à  $\rho = 0,85$  entraîne la diminution de la quantité du médicament à utiliser au cours de la chimiothérapie de 1,24 à 0,52 au 20<sup>ème</sup> jour. Nous remarquons aussi que nous devons commencer à augmenter la quantité du médicament à partir du 4<sup>ème</sup> jour, on peut expliquer tout cela par le fait que la dose a été augmentée deux fois plus.

Pour la densité nous remarquons qu'elle commence à diminuer à partir de 4<sup>ème</sup> jour d'une manière exponentielle.

**Essai 3 :** on garde  $\varepsilon = 3$ ,  $\rho = 0,45$  et on essaye d'augmenter le taux de croissance en prenant  $r = 0,2$ .

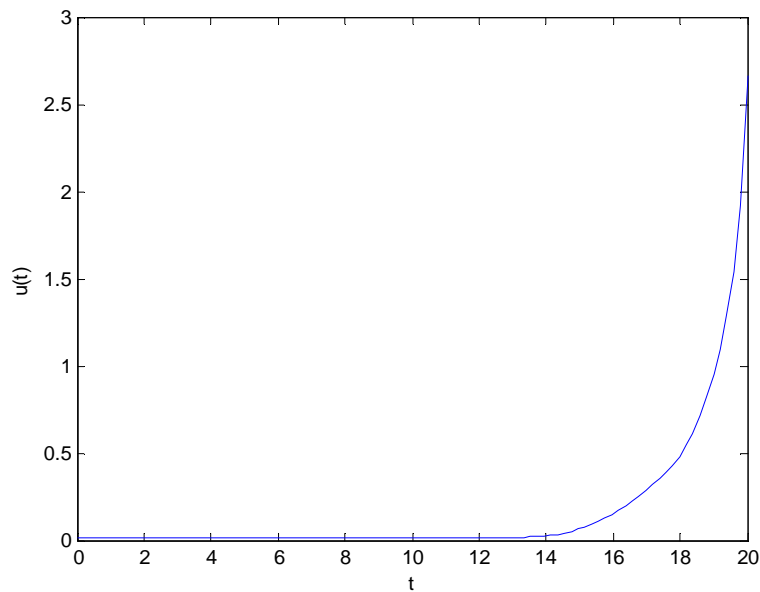


Figure (4.5) Évolution de la commande pour  $r = 0,2$ .

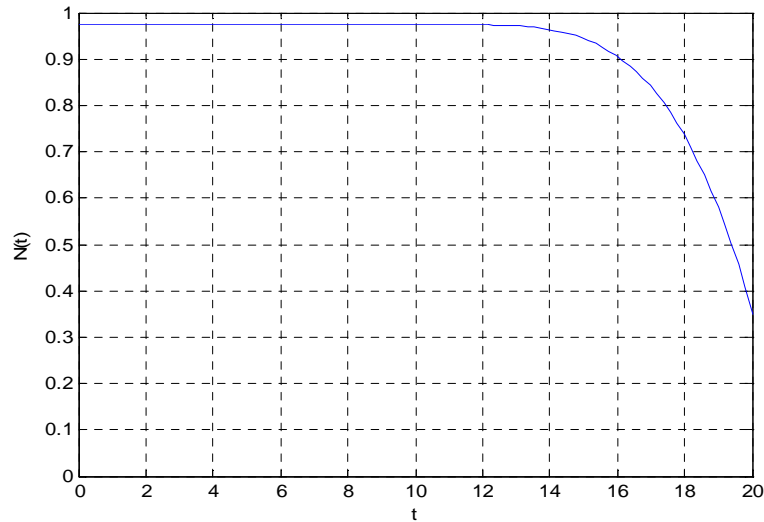


Figure (4.6) Évolution de la densité de la tumeur au cours du traitement chimiothérapique avec  $r = 0,2$ .

Nous remarquons que l'augmentation du taux de croissance de la tumeur entraîne une augmentation de la quantité du médicament à utiliser pendant le traitement jusqu'à 2,52 au 20<sup>ème</sup> jour comme nous remarquons que l'augmentation du taux de croissance du cancer ralentit le traitement jusqu'au 13<sup>ème</sup> jour.

**Essai 4** : on garde  $\varepsilon = 3$ ,  $\rho = 0,45$ ,  $r = 0,1$ , mais on diminue la durée du traitement jusqu'à 10 jours ( $T = 10$ )

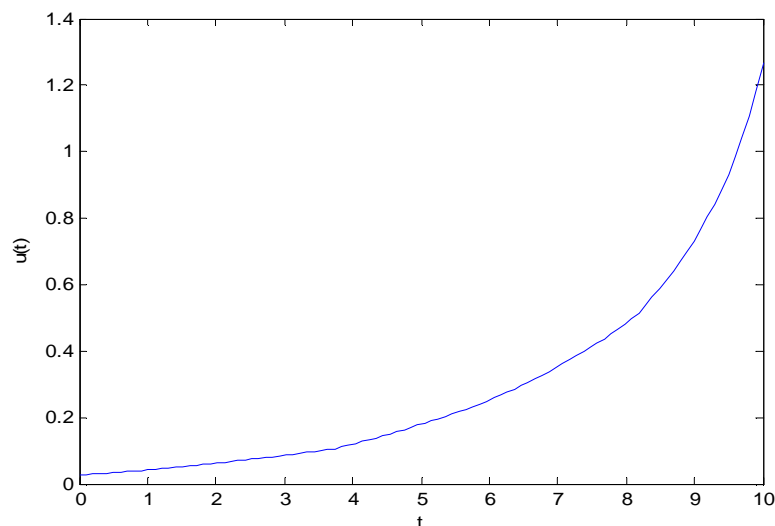


Figure (4.7) : Évolution de la commande pour  $T = 10$ .

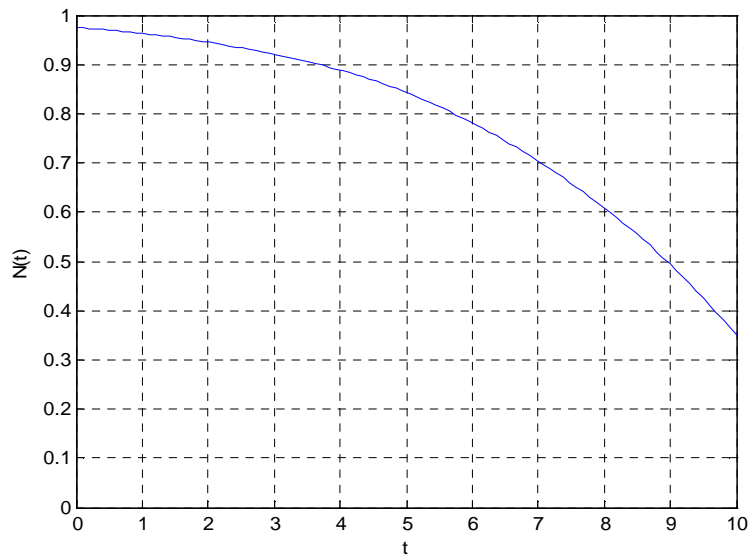


Figure (4.6) : Évolution de la densité de la tumeur au cours du traitement chimiothérapique avec  $T = 10$ .

Nous remarquons que la quantité du médicament qui doit être utilisée au cours de la chimiothérapie reste la même mais cette fois ci comme la durée du traitement est réduite à 10 jours donc on doit commencer l'augmentation du médicament des les premiers jours et la densité commence à diminuer aussi très tôt.

**Essais 5 :** on essaye de pousser la densité à diminuer à des niveaux encore plus bas, on prend  $N_f = 0,25$ .

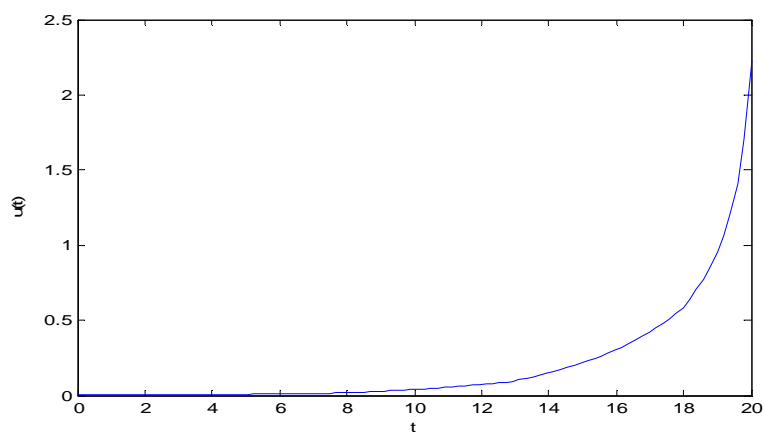


Figure (4.9) : Évolution de la commande pour  $N_f = 0,25$ .

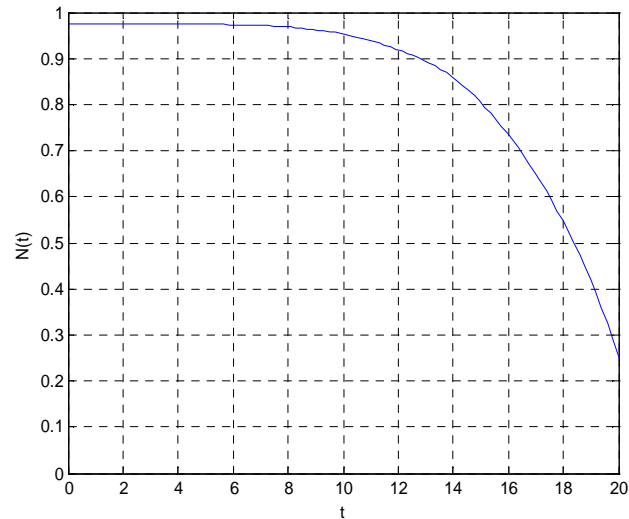


Figure (4.10) : Evolution de la densité de la tumeur au cours du traitement chimiothérapique avec  $N_f = 0,25$ .

Nous remarquons que :

- La densité peut être tirée à un niveau encore plus bas.
- La valeur de la quantité du médicament utilisée augmente jusqu'à 2,22 au 20<sup>ème</sup> jour et la densité de la tumeur commence à diminuer à partir du 5<sup>ème</sup> jour.

**Essais 6 :** on garde les même valeurs des paramètres mais, on augmente la dose du médicament, on prend  $\rho = 0,85$ .

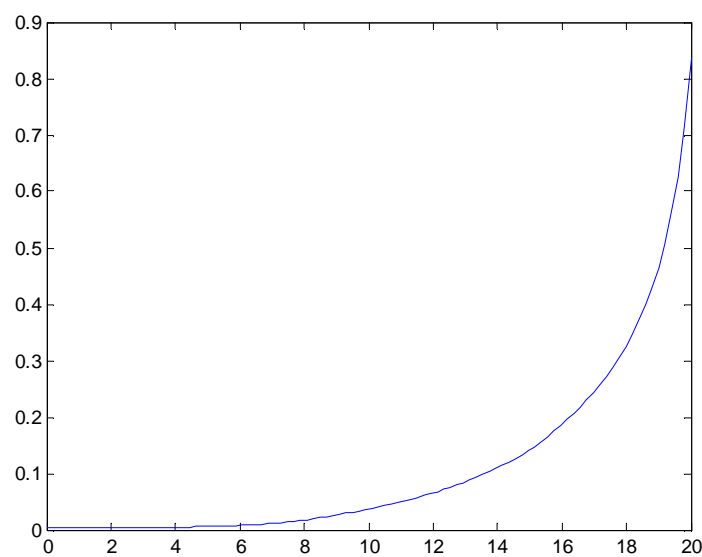


Figure (4.9) : Évolution de la commande pour  $N_f = 0,25$  et  $\rho = 0,85$ .

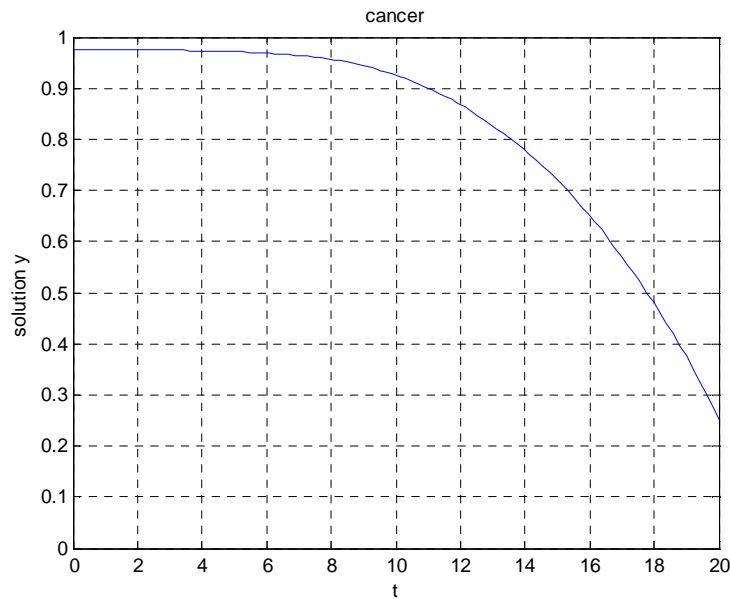


Figure (4.10) : Évolution de la densité de la tumeur au cours du traitement chimiothérapique avec  $N_f = 0,25$  et  $\rho = 0,85$ .

Nous remarquons cette fois ci que la valeur de la quantité du médicament diminue jusqu'à 0,9 au 20<sup>ème</sup> jour par rapport aux résultats obtenu précédemment et la densité de la tumeur commence à diminuer rapidement.

#### 4.6 Conclusion

Dans le but de montrer l'utilisation de la méthode de tir pour la résolution d'un problème de commande optimale, une application portant sur la minimisation de la densité d'une tumeur et les effets secondaires du traitement est étudiée .

En effet, pour déterminer la loi de commande optimale on a transformé tout d'abord le problème de commande optimale en un problème de calcul des variations pour lequel on a calculé l'équation d'Euler-Lagrange avec les conditions aux limites. Cette dernière a été transformée en un système de deux équations d'ordre 1 pour les quels on a utilisé la méthode de tir pour trouver leur solutions .

Les résultats de simulation obtenus montrent l'intérêt de la commande optimale et l'efficacité de la méthode de tir pour la détermination d'une thérapie optimale pour un cancer.



# Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la résolution d'un problème de commande optimale par l'approche indirecte. L'objectif est d'étudier la méthode de tir utilisée pour résoudre des problèmes aux limites. En effet, la résolution d'un problème de commande optimale se ramène à résoudre des équations aux dérivées ordinaires avec des conditions aux limites.

Ainsi en premier, on a présenté les étapes principales de formulation d'un problème de commande optimale en définissant l'ensemble des éléments qui le constituent expliquées par un exemple. Puis, deux méthodes de résolution d'un problème de commande optimale ont été présentées : la méthode du principe de minimum et celle de calcul des variations. Pour les deux méthodes, la résolution d'un problème de commande optimale revient à résoudre des équations différentielles ordinaires. Dans le cas de la méthode de principe de minimum, on aura un système d'équations différentielles ordinaires. Dans le cas de la méthode de calcul des variations, on a une équation différentielle du second ordre avec des conditions aux limites. Puis par la suite, on a présenté la méthode de tir utilisée pour la résolution des problèmes aux limites et quelques méthodes numériques dites méthodes à un pas de résolution numérique des équations différentielles qui contournent les difficultés de la résolution analytique et à la fin nous avons montré l'utilité de la méthode de tir pour la résolution d'un problème de commande optimale. Une application portant sur la synthèse d'une loi de commande optimale, qui minimise la densité d'une tumeur en prenant en considération les effets secondaires éventuels du médicament, en utilisant la méthode de tir a été réalisée.

L'étude réalisée montre l'utilité de la méthode de tir pour la résolution d'un problème de commande optimale.

Comme nous dans notre travail on s'est intéressé à programmer la méthode de tir pour la résolution d'un problème de commande optimale pour un système linéaire et que la majorité des systèmes qui existent dans la réalité sont des systèmes non linéaires, il est intéressant de penser à programmer la méthode de tir pour la résolution des problèmes de commande optimale pour les systèmes non linéaires.



# Bibliographie

## *Bibliographie*

---

- [1] D.OUIDJA. Principe du maximum et la méthode de tir. Mémoire de Magister en Mathématique, Département Mathématique, Université Mouloud Mammeri de tizi-ouzou 2011.
- [2] J-P.BABARY et W. PELCZEWSKI. Commande optimale des systèmes continus déterministes. Edition MASSON, Saint-Germain, France, janvier1985.
- [3] A. EL JAI, E.Zerrik et K. Ztot. Systèmes Dynamiques: Analyse et Contrôle des Systèmes Localisés. Edition Collection Etudes, Presses Universitaires de Perpignan, 2008.
- [4] A. MAIDI. Cours de commande optimale. Département Automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Année universitaire 2015-2016.
- [5] A. Fortin. Analyse Numérique pour Ingénieurs .Troisième édition, Presses Internationales Polytechnique, 2008.
- [6] C. Harold. Numerical Approximation Methods. Springer, New York, 2011.
- [7] "cancer (médecine)." Microsoft® Encarta® 2009 [DVD]. Microsoft Corporation, 2008.
- [8] B.Bueche et R.Faroux. Generalites sur les Effets Secondaires Indésirables de la Chimiotherapie. <http://www.ffcd.fr> (Fédération Francophone de Cancérologie Digestive). Date de la dernière consultation : 03 juillet 2016.
- [9] R.Bocu, S.Tabirca and Y.Jie Chen. Fister-Panetta Upper Bound for Cancer Growth. Some Computational Remarks. International Conference on Biocomputation, Bioinformatics, and Biomedical Technologies (BIOTECHNO '08), June 29 2008-July 5 2008, Bucharest, Romania, 2008.
- [10] S. Lenhart and John T. Workman. Optimal Contrôle Applied to Biological Models. CRC Press, 2007.