

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **Automatique et Système**

Présenté par
Sabrina BENANE
Hadjila KESSAI

Mémoire proposé et dirigé par **Ahmed MAIDI**

Thème

**Application de l'approche des scénarios
pour la synthèse d'une commande
optimale pour un système incertain**

Mémoire soutenu publiquement le 04 juillet 2018 devant le jury composé de :

M Mouhand Achour TOUAT

Maître de Conférences, Classe B, UMMTO, Président

M Ahmed MAIDI

Professeur, UMMTO, Encadrant

M Farida DORBANE

Maître de conférences, Classe B, UMMTO, Examinatrice

M Ouardia CHILALI

Maître de conférences, Classe A, UMMTO, Examinatrice

Promotion : 2017/2018

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

**Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **Automatique et Système**

Présenté par
Sabrina BENANE
Hadjila KESSAI

Mémoire proposé et dirigé par **Ahmed MAIDI**

Thème

**Application de l'approche des scénarios
pour la synthèse d'une commande
optimale pour un système incertain**

Mémoire soutenu publiquement le 04 juillet 2018 devant le jury composé de :

M Mouhand Achour TOUAT

Maître de Conférences, Classe B, UMMTO, Président

M Ahmed MAIDI

Professeur, UMMTO, Encadrant

M Farida DORBANE

Maître de conférences, Classe B, UMMTO, Examinatrice

M Ouardia CHILALI

Maître de conférences, Classe A, UMMTO, Examinatrice

Promotion : 2017/2018

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu un immense merci à notre encadrant de ce mémoire Mr MAIDI, qui nous a accompagné tout au long de ce parcours. Egalement on lui témoigne notre gratitude pour sa patience et son soutien qui nous a été précieux afin de mener notre travail à bon port.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail, et de l'enrichir par leurs propositions.

A nos familles et nos amis, qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles. .

En fin, on tient à remercier très chaleureusement toutes les personnes que l'on a eu le plaisir de côtoyer au cours de ces cinq dernières années, et qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de notre travail et par l'aide et le soutien qu'elles nous ont apporté.

Dédicace

Je tien a dédicacé ce modeste travail,

Tous d'abord à mes chers parent, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur soutien tous le long de mes études,

A toute ma famille,

A mes amis qui m'ont toujours soutenu,

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infallible,

Merci d'avoir eu toujours foie en moi.

Bien cordialement : BENANE Sabrina

Dédicace

Je tien a dédicacé ce modeste travail avec amour,
sincérité et fierté a :

Mes très chers parents,

Ma famille, mes frères et sœurs,

Mes cousins et cousines,

Mes amis.

Bien cordialement : KESSAI HADJILA

Table des matières

Introduction générale	6
1 Formulation d'un problème de commande optimale	8
1.1 Introduction	8
1.2 Détermination du modèle mathématique de la commande optimale	9
1.2.1 Mise en équations	9
1.2.2 Conditions terminales	9
1.3 Contraintes physiques et critère de performances	10
1.3.1 Contraintes physiques	10
1.3.1.1 Contrainte instantanée	10
1.3.1.2 Contraintes intégrales	11
1.3.2 Critère de performances	11
1.3.2.1 Temps minimal	12
1.3.2.2 Minimiser une consommation	12
1.3.2.3 Minimiser une énergie	12
1.3.2.4 Commande terminale	13
1.3.2.5 Poursuite	13
1.3.2.6 Régulation	14
1.4 Réalisation de la commande optimale	14
1.5 Exemple d'application	15
1.6 Conclusion	18
2 Calcul des variations	19
2.1 Introduction	19
2.2 Conditions d'optimalité	19
2.3 Optimum d'une fonctionnelle	23
2.3.1 État final imposé	23
2.3.2 État final libre	24
2.4 Méthode de résolution d'un problème de commande optimale	24
2.4.1 Méthode directe	24
2.4.2 Méthode de Lagrange	25
2.5 Application du calcul des variations à la commande optimale	26
2.6 Exemple d'application	27

2.7	Conclusion	29
3	Optimisation robuste	30
3.1	Introduction	30
3.2	Généralités sur l'optimisation	30
3.2.1	Outils mathématiques	30
3.2.1.1	Conditions d'optimalité	30
3.2.1.2	Fonctions convexes	31
3.2.1.3	Minima et Maxima d'une fonction mathématique	31
3.2.2	Formulation mathématique d'un problème d'optimisation	32
3.2.3	Résolution d'un problème d'optimisation	33
3.2.3.1	Optimisation sans contraintes	33
3.2.3.2	Optimisation avec contraintes linéaire	33
3.2.3.3	Optimisation avec contraintes non linéaires	33
3.3	Méthodes d'optimisation déterministes	34
3.4	Méthodes d'optimisation stochastique	34
3.4.1	Algorithmes génétiques	35
3.4.1.1	Descriptions des Algorithmes Génétiques	35
3.4.1.2	Le principe de l'algorithme génétique	38
3.4.2	Génération des nombres aléatoires	40
3.4.2.1	Nombre aléatoires	40
3.4.2.2	Une suite pseudo-aléatoire	41
3.4.2.3	Générateur congruent linéaire	41
3.4.3	Algorithme du Recuit Simulé	42
3.4.4	Méthode de Monte-Carlo	42
3.5	Optimisation en présence d'incertitudes	43
3.5.1	C'est quoi l'optimisation Robuste	44
3.5.1.1	Formulation d'un problème d'optimisation robuste	44
3.5.1.2	Problème d'optimisation Semi-Infini	44
3.6	Optimisation par l'approche des scénarios	45
3.6.1	Approche du pire cas	45
3.6.2	Approche des scénarios	45
3.7	Conclusion	46
4	Commande optimale d'un système incertain	47
4.1	Introduction	47
4.2	Formulation du problème de la commande optimale	47
4.3	Formulation sous forme d'un problème d'optimisation	48
4.4	Exemple d'application	49
4.4.1	Exemple 1	49
4.4.2	Exemple 2	51
4.5	Conclusion	53

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	3
Conclusion générale	54
Bibliographie	54

Table des figures

1.1	Principe de Bellman	15
1.2	Système mécanique	16
2.1	État final imposé ($x(t_f) = x_f$).	22
2.2	État final libre $x(t_f)$	23
3.1	Les maxima et les minima d'une fonction.	32
3.2	Croisement en un point d'un individu de 4 bits.	36
3.3	Croisement en deux point d'un individu de 8 bits.	36
3.4	Croisement uniforme d'individu de 11 bits.	36
3.5	La mutation.	37
3.6	Organigramme d'un algorithme génétique.	38
3.7	Croisement en un point.	40
3.8	Mutation d'un individu.	40
3.9	Organigramme de la méthode de Monte-Carlo	43
4.1	La trajectoire du 1 ^{er} ordre d'un système incertaines.	51
4.2	La trajectoire d'un système incertaines du 2 ^{ème} ordre	52

Liste des tableaux

3.1	Calcul de la fonction d'adaptation pour la population initiale	39
3.2	Sélection des individus	39
3.3	Reproduction d'une nouvelle génération.	40

Introduction générale

La commande optimale consiste à concevoir des lois de commande permettant :

- De transférer un système d'état initial vers un état final,
- De respecter un certain nombre de contraintes,
- D'optimiser un certain critère de performances, par exemple l'énergie mise en œuvre, le temps de la consommation.

Un problème de commande optimale est un problème d'optimisation dynamique dont la solution est un ensemble de trajectoires optimales (état et commande).

La résolution d'un problème de commande optimale consiste à déterminer une loi de commande optimale qui répond à certaines conditions.

En général, on distingue deux approches pour la synthèse d'une commande optimale :

L'approche directe : elle consiste à écrire les conditions d'optimalité, souvent c'est un ensemble d'équations différentielles (équation d'Euler-Lagrange, équations d'Hamilton-Pontriaguine et équation de Jacobi-Hamilton-Bellman), puis de les résoudre analytiquement ou numériquement tout dépend de la complexité de ces équations.

L'approche indirecte : elle consiste à convertir le problème de commande optimale en un problème d'optimisation statique, puis la commande optimale est déterminée sous forme d'une séquence de commande à appliquer (commande numérique).

Ces deux approches peuvent être appliquées avec succès pour un système dont les paramètres sont constants. Pour le système à paramètres incertains le problème de synthèse d'une commande optimale reste un problème difficile.

Pour le système incertains, l'approche directe reste difficile à appliquer. Par contre l'approche indirecte peut être appliquée mais elle conduit à un problème d'optimisation robuste dont la solution est très difficile à obtenir.

Dans ce mémoire, on va proposer une approche indirecte pour la synthèse d'une commande optimale pour un système incertain. L'idée consiste à utiliser l'approche des scénarios pour résoudre le problème d'optimisation robuste obtenu à partir de la conversion du problème de commande optimale.

Le mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre présente des généralités sur la commande optimale et les différents étapes à suivre pour la formulation d'un problème de commande optimale d'application.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution d'un problème de commande optimale en utilisant le calcul des variations. Ainsi deux approches ont été présentées : la méthode directe et la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Le troisième chapitre est consacré à l'optimisation robuste. Le chapitre commence par un rappel sur certaines notions de l'optimisation standard, puis aborde l'optimisation robuste, c'est-à-dire l'optimisation en présence des incertitudes.

Dans le dernier chapitre, on développe une approche indirecte pour la résolution d'un problème de commande optimale d'un système incertain. L'idée consiste à convertir le problème de commande optimale en un problème d'optimisation robuste qu'on propose de résoudre par l'approche des scénarios.

Le mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

Formulation d'un problème de commande optimale

1.1 Introduction

La théorie de la commande optimale couvre toutes les activités dynamiques où une performance optimale est exigée. Les systèmes à commander peuvent donc être d'origine diverses : mécanique, électrique, électronique, chimique, économique. Chaque problème de commande nécessite une description des propriétés dynamiques du processus à commander.

Pour introduire la notion de commande optimale, on trouve parmi les commandes admissibles celles qui permettent à la fois [2] :

- De vérifier des conditions initiales et finales donnés.
- De satisfaire diverses contraintes imposées [8].
- D'optimiser un critère choisi.

La théorie de la commande optimale a un champ d'application extrêmement vaste :

- Régulation de la température d'une pièce ou d'un four en utilisant le minimum d'énergie.
- Problème de poursuite : on souhaite que la sortie du système suive le mieux possible la consigne désirée ou prévue. Il s'agit dans ce cas de déterminer la commande qui minimise l'énergie de poursuite.

D'un point de vue formel, le problème de commande optimale est un problème de minimisation ou de maximisation d'une fonctionnelle.

1.2 Détermination du modèle mathématique de la commande optimale

1.2.1 Mise en équations

En commande optimale, on utilise un modèles de procédés Σ qui est défini par trois ensembles de vecteurs et deux fonctions.

- u vecteur d'entrées ou de commandes,
- y vecteur de sorties,
- x vecteur d'état,
- $f : x \times u \rightarrow x$ fonction de mise à jour,
- $h : x \times u \rightarrow y$ fonction de sortie.

Dans une modélisation de l'évolution du système, les vecteurs u , y et x sont liées par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), t) \quad (1.2)$$

Où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $y(t) \in \mathfrak{R}^r$ et $t > 0$.

Les équations (1.1) et (1.2) représentent respectivement l'équation d'état et l'équation de sortie.

Remarque 1.1

Lorsque le système est linéaire, le modèle d'état prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dans l'équation (1.3) nous avons :

$A(t)$: matrice d'état de dimension $(n \times n)$,

$B(t)$: matrice de commande de dimension $(n \times m)$,

$C(t)$: matrice d'observation de dimension $(r \times n)$,

$D(t)$: matrice de transmission directe de dimension $(r \times m)$.

1.2.2 Conditions terminales

Les conditions terminales comportent deux états [2] :

État initiale

C'est l'état du système à l'instant où on commence à agir sur le système, noté t_0 , et l'état initiale $x_0 = x(t_0)$.

État final

C'est l'état du système après application de la commande à l'instant final, noté t_f et l'état final $x_f = x(t_f)$.

Pour l'état final, on distingue deux cas :

- Imposé : toute les états sont spécifiées.
- Libre : pour toute variable non spécifiée, l'état est libre.

En commande optimale le temps $T = t_f - t_0$ est appelé horizon de commande. Il peut être fini si t_f est fini ou infini si t_f est infini.

1.3 Contraintes physiques et critère de performances

1.3.1 Contraintes physiques

En général, une contrainte est une condition que doit satisfaire la solution admissible du problème de commande optimale, on distingue alors deux types de contraintes [1] :

1.3.1.1 Contrainte instantanée

C'est une contrainte qui caractérise dans la plus part des cas les limitations physiques sur la commande ou sur l'état du système. Cette contrainte doit être vérifiée $\forall t \in [t_0, t_f]$.

Ce type de contrainte s'exprime par des inégalités de la forme :

$$q(x(t), u(t), t) \leq 0 ; q \in \mathfrak{R}^{n_q} \quad (1.4)$$

n_q : nombre de contraintes.

Remarque 1.2

On peut changer les contraintes du type inégalités à des contraintes du types égalités par l'ajout d'une fonction auxiliaire $v(t)$,

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

pour avoir :

$$q(x(t), u(t), t) + v^2(t) = 0 \quad (1.6)$$

1.3.1.2 Contraintes intégrales

C'est une contrainte qui est caractérisée par une limitation de ressources. Elle doit être satisfaite sur l'horizon de commande T et ne doit pas dépasser une certaine valeur [1]. Mathématiquement, elle prend la forme suivantes :

$$\int_{t_0}^{t_f} p(x(t), u(t), t) dt \leq 0 ; p \in \mathfrak{R}^{n_p} \quad (1.7)$$

n_p : nombre de contraintes.

Remarque 1.3

On peut aussi remplacer la contrainte inégalité par une contrainte égalité, avec l'ajout d'une fonction auxiliaire $w(t)$.

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Comme suit :

$$p(x(t), u(t), t) dt + w^2 = 0 \quad (1.9)$$

1.3.2 Critère de performances

Les objectifs à optimiser doivent correspondre à un choix d'expressions, qui peut être liée aux valeurs des conditions aux limites du système.

La forme générale du critère est :

$$\underset{u(t)}{\text{opt}} J(u(t)) = \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.10)$$

avec $\psi(x(t_f), t_f)$ est appelée **partie terminale** et $\int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt$ est appelée **partie intégrale**, on peut distinguer trois cas :

– **Problème de Mayer :**

$$J = \psi(x(t_f), t_f) \quad (1.11)$$

– **Problème de Lagrange :**

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.12)$$

– **Problème de Bolza :**

$$J = \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1.13)$$

Remarque 1.4

Généralement la partie terminale est considérée nulle, $\psi(x(t_f), t_f) = 0$ lorsque $x(t_f) = x_f$ est imposé.

Différents critères rencontrés :

1.3.2.1 Temps minimal

L'objectif revient à transférer l'état d'un système d'une valeur initiale $x(t_0)$ vers une valeur finale $x(t_f)$ en minimisant le critère d'optimisation. Dans ce cas le critère à optimiser est de la forme :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \quad (1.14)$$

qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$J = t_f - t_0 = T \quad (1.15)$$

Où T est l'horizon de commande.

1.3.2.2 Minimiser une consommation

L'objectif revient à minimiser le coût de fonctionnements du processus (minimiser l'amplitude de la variable commande). Le critère s'écrit :

$$J = r_1 \int_{t_0}^{t_f} |u_1(t)| dt + r_2 \int_{t_0}^{t_f} |u_2(t)| dt + \dots + r_m \int_{t_0}^{t_f} |u_m(t)| dt \quad (1.16)$$

qu'on peut écrire sous forme :

$$J = \sum_{i=1}^m r_i \int_{t_0}^{t_f} |u_i(t)| dt \quad (1.17)$$

1.3.2.3 Minimiser une énergie

L'objectif revient à minimiser l'énergie mise en œuvre pour transférer le système d'une valeur initiale $x(t_0)$ vers une valeur finale $x(t_f)$.

Mathématiquement, on doit minimiser l'énergie du signal de commande

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

donnée comme suit :

$$J = r_{11} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 dt + r_{22} \int_{t_0}^{t_f} u_2^2 dt + \cdots + r_{mm} \int_{t_0}^{t_f} u_m^2 dt \quad (1.19)$$

qu'on peut écrire :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T R u(t) dt \quad (1.20)$$

Où R est la matrice de pondération :

$$R = R^T = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix} > 0 \quad (1.21)$$

1.3.2.4 Commande terminale

L'objectif revient à minimiser une fonction de variables d'état à l'instant final t_f .

Dans le cas linéaire, la partie terminale $J = \psi(x(t_f), t_f)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \frac{1}{2} (x^d(t_f) - x(t_f))^T H (x^d(t_f) - x(t_f)) \quad (1.22)$$

Où H est une matrice de pondération :

$$H = H^T = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{mm} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.23)$$

1.3.2.5 Poursuite

L'objectif est de maintenir l'état proche d'un état désiré. Mathématiquement $x_i(t) \rightarrow x_i^d(t)$; ($i = 1, \dots, n$).

La forme du critère est :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x(t) - x^d(t)]^T Q (x(t) - x^d(t)) dt \quad (1.24)$$

Où Q est une matrice de pondération :

$$Q = Q^T = \begin{bmatrix} q_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q_{mm} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.25)$$

1.3.2.6 Régulation

L'objectif est de régler l'état du système afin d'avoir un état proche de zéro ($x^d(t) = 0$),
La forme du critère, est :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x(t)^T Q(x(t)) dt \quad (1.26)$$

1.4 Réalisation de la commande optimale

Un problème de commande optimale [3] est décrit comme suit :

$$\underset{u(t)}{\text{opt}} J = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \text{ ou libre} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Remarque 1.5

Pour résoudre le problème de commande optimale, on peut utiliser les méthodes suivantes :

Calcul des variations [4]

Le calcul des variations peut résoudre un problème d'optimisation d'une fonctionnelle sous contraintes du type égalité $f(x, u, t) - \dot{x} = 0$.

Ce problème sera traité dans le 2^{ème} chapitre .

Principes du minimum de Pontriaguine [6]

Dans ce cas, la commande optimale est obtenue en maximisant l'hamiltonien $H = \varphi + \lambda^T f$.

Commande linéaire quadratique

*On parle de commande linéaire quadratique (**L Q**) lorsque le système est linéaire et la commande est quadratique. La commande optimale est un retour d'état.*

Commande linéaire quadratique gaussienne

On parle de commande **Linéaire Quadratique Gaussienne (L Q G)** lorsque la commande présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré.

Le régulateur **(L Q G)** est une combinaison entre un régulateur **(L Q R)** et un estimateur de Kalman [2]. La synthèse du régulateur **(L Q G)** est basée sur le principe de séparation [2].

Programmation dynamique (Principe de Bellman) [7][3, 8]

La programmation dynamique est une commande adaptée aux problèmes d'optimisations séquentielles. Le principe de Bellman s'énonce comme suit :

Si le point C est un point intermédiaire reliant deux états A et B, alors la position C est la trajectoire optimale reliant le point C à B.

Ce principe est exploiter pour développer :

- L'équation fonctionnelle de Bellman.
- L'équation d'Hamilton-Jacobi Bellman

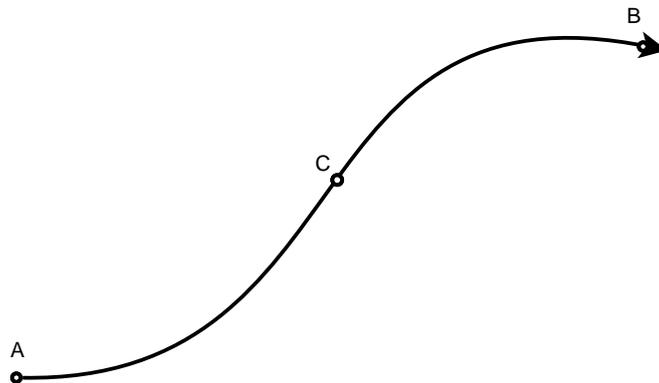


FIGURE 1.1 – Principe de Bellman

1.5 Exemple d'application

Pour le système mécanique de la Figure 1.2. Initialement (à $t = 0$), les longueurs des ressorts k_1 , k_2 et k_3 sont respectivement $l/2$, $l/2$ et l . Les deux masses ont la même largeur a . On désire déterminer la force F permettant de transférer le système d'un état initial à un état final, à l'instant t_f , en minimisant l'énergie potentielle totale du système.

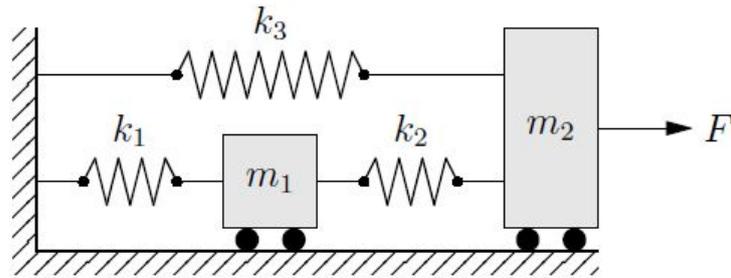


FIGURE 1.2 – Système mécanique

Mise en équation

Pour modéliser ce système, on utilise le **formalisme de Lagrange** comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = \sum f_j^i \quad (1.28)$$

avec :

- E_c est l'énergie cinétique,
- V_i est l'énergie potentielle,
- D_i est l'énergie dissipative.

Pour la Figure (1.2), on a :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2 \quad (1.29)$$

$$D = 0 \text{ (pas d'amortisseurs)}$$

– Masse m_1 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \sum f_j^1 \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_1\dot{x}_1) - 0 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (1.31)$$

donc :

$$m_1\ddot{x}_1 - k_2x_2 + x_1(k_2 + k_1) = 0 \quad (1.32)$$

Ou encore :

$$\ddot{x}_1 = \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{(k_2 + k_1)}{m_1}x_1 \quad (1.33)$$

– Masse m_2 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = \sum f_j^2 \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_2 \dot{x}_2) - 0 + k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = F \quad (1.35)$$

donc :

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_1 - x_2 (k_3 + k_2) = F \quad (1.36)$$

Ou encore :

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{(k_3 + k_2)}{m_2} x_2 + \frac{F}{m_2} \quad (1.37)$$

En utilisant le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 \\ X_2 &= \dot{x}_1 \\ X_3 &= x_2 \\ X_4 &= \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Conditions terminales :

– État initial

$$X(0) = \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \\ X_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l+a}{2} \\ l + \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

– État final n'est pas imposé, donc il est libre.

Contrainte :

Dans ce cas, on a pas de contrainte.

Critère :

L'énergie totale est à instant t_f est :

$$J = \frac{1}{2} k_1 X_1^2(t_f) + \frac{1}{2} k_2 (X_3(t_f) - X_1(t_f))^2 + \frac{1}{2} k_3 X_3^2(t_f) \quad (1.40)$$

Le problème de la commande optimale est donné comme suivant :

$$\min_{F(t)} J = \frac{1}{2} k_1 X_1^2(t_f) + \frac{1}{2} k_2 (X_3(t_f) - X_1(t_f))^2 + \frac{1}{2} k_3 X_3^2(t_f) \quad (1.41)$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= \frac{k_2}{m_1} X_2(t) - \frac{(k_2+k_1)}{m_1} X_1(t) \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\dot{X}_3(t) = X_4(t)$$

$$\dot{X}_4(t) = \frac{k_2}{m_2} X_1(t) - \frac{(k_3+k_2)}{m_2} X_2(t) + \frac{F(t)}{m_2}$$

$$\begin{aligned} X_1(0) &= \frac{l+a}{2} \\ X_2(0) &= l + \frac{a}{2} \\ X_3(0) &= 0 \\ X_4(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.43)$$

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des notions de base de la commande optimale. Nous avons précisé les différents éléments d'un problème de commande optimale (modèle, conditions terminales, contraintes et critère). Puis, nous avons illustré par un exemple d'application comment formuler un problème de commande optimale.

Le prochain chapitre sera consacré au calcul des variations utilisé pour résoudre des problèmes de commande optimale.

Chapitre 2

Calcul des variations

2.1 Introduction

Le calcul des variations est une branche importante des mathématiques. Il a été développé dès le 17^{ème} siècle par plusieurs mathématiciens notamment les frères Bernoulli, Euler, Gauss, etc... Le calcul des variations a été également utilisé pour la résolution des problèmes d'optimisation dont la solution possède une certaine régularité. Le calcul des variations dans le sens le plus large concerne l'étude des problèmes d'extrémum impliquant des fonctionnelles. Il est analogue à la théorie des minima et maxima de l'analyse réelle. La seule difficulté supplémentaire est que les inconnues ne sont pas des nombres mais des fonctions. L'objectif de ce chapitre est de reformuler le problème de commande optimale sous forme d'un problème de calcul des variations sans contrainte, dont le but est de le résoudre en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange.

2.2 Conditions d'optimalité

L'univers de fonctionnalité ou le calcul des variations s'agit de déterminer les optimums d'une fonctionnelle $J : V \rightarrow \mathfrak{R}$ où V est un espace vectoriel. Le problème consiste à déterminer, si elle existe, une fonction $x : V \rightarrow \mathfrak{R}$ vérifiant des conditions terminales et qui optimise une fonctionnelle J .

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la résolution du problème de calcul des variations suivant :

$$\min_{x(t)} J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Sujet à : (2.1)

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = x_f$$

$g : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \longrightarrow \mathfrak{R}$ est une fonction à plusieurs variable.

Définition 1

Si $x(t) + \delta x(t)$ et $x(t)$ sont des fonctions qui définisse J , alors la variation de la fonctionnelle J , noté ΔJ , est donnée comme suit :

$$\Delta J(x(t)) = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \quad (2.2)$$

avec :

$$\delta x(t) = x(t + \delta t) - x(t) \quad (2.3)$$

δt est appelé la variation de la fonction x .

Définition 2

La variation de la fonctionnelle J peut s'écrire comme suit :

$$\Delta Jx(t) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.4)$$

qui peut être écrite sous forme :

$$\Delta Jx(t) = \int_{t_0}^{t_f} (g(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t) - g(x(t), \dot{x}(t), t)) dt \quad (2.5)$$

Exemple 2.1

Par la fonctionnelle J définie comme suit :

$$J(x(t)) = \int_0^2 x^2(t) + 2 dt \quad (2.6)$$

la variation ΔJ est :

$$\Delta J(x(t), \delta x(t)) = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \quad (2.7)$$

$$= \int_0^2 (x(t) + \delta x(t))^2 + 2 dt - \int_0^2 x^2(t) + 2 dt \quad (2.8)$$

$$= \int_0^2 2\delta x(t)x(t) + [\delta x(t)]^2 dt \quad (2.9)$$

Si $x^*(t)$ est un optimum de la fonctionnelle $J(x(t))$, alors ,

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0 \quad (2.10)$$

Où δJ est la partie linéaire en δx de ΔJ .

Par l'exemple précédent :

$$\delta J = 2 \delta x(t) x(t)$$

Le développement de Taylor à l'ordre 2 de $J(x + \delta x)$ autour de $\delta x(t)$, $\delta \dot{x}(t)$ donne :

$$\begin{aligned} \Delta J(x(t), \delta x(t)) = & \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta \dot{x}(t) \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta^2 x(t) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}^2}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta^2 \dot{x}(t) \quad (2.11) \\ & + \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) \delta \dot{x}(t) + o([\delta x(t)]^2, [\delta \dot{x}(t)]^2) dt \end{aligned}$$

En considérant les termes linéaires par rapport à $\delta x(t)$ et $\delta \dot{x}(t)$ dans $\Delta J(x(t), \delta x(t))$, ce qui donne :

$$\delta J = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta \dot{x}(t) \quad (2.12)$$

Sont la première variation de J .

L'intégration par partie de second terme donne :

$$\begin{aligned} \delta J(x(t), \delta x(t)) = & \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \\ & - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour que $x^*(t)$ soit un optimum, la partie linéaire en $x(t)$ doit vérifier $\delta J(x(t), \delta x(t)) =$

0, ce qui implique :

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) dt = 0 \quad (2.14)$$

Remarque 2.1

L'optimum d'une fonctionnelle J donné comme suit :

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.15)$$

Les deux cas possible sont donnés par les Figure 2.1 et 2.2 dépend de la nature de l'état final $x(t_f)$.

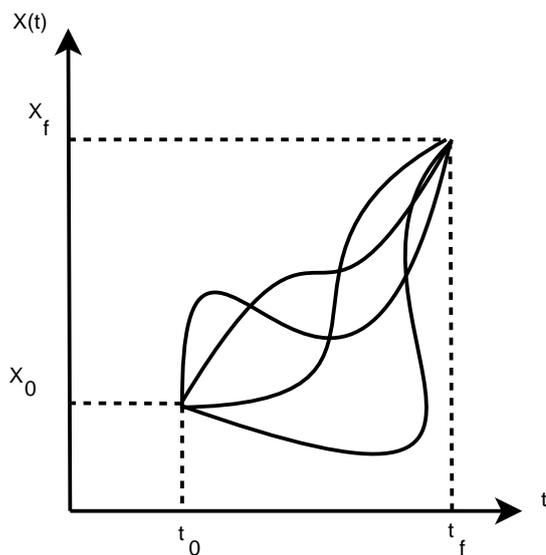


FIGURE 2.1 – État final imposé ($x(t_f) = x_f$).

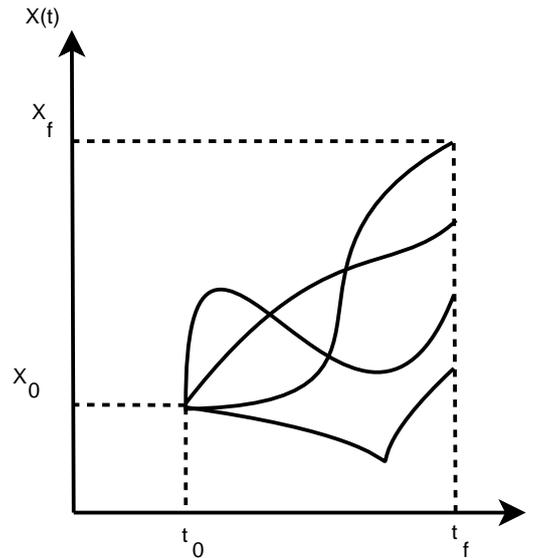


FIGURE 2.2 – État final libre $x(t_f)$.

2.3 Optimum d’une fonctionnelle

2.3.1 État final imposé

Dans ce premier cas, on suppose que les instants t_0 et t_f sont imposés, et l’état initial $x_0 = x(t_0)$ et l’état final $x_f = x(t_f)$ sont donnés [4]. Comme le montre la Figure 2.1.

Le problème peut se mettre sous la forme :

$$\min_{x(t)} J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Sujet à :

(2.16)

$$x_0 = x(t_0)$$

$$x_f = x(t_f)$$

En utilisant l’équation (2.14), toute trajectoire admissible doit vérifier les conditions $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$ et donc d’après (2.13) on doit imposer

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) dt = 0 \quad (2.17)$$

Ce qui donne :

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] = 0 \quad (2.18)$$

2.3.2 État final libre

Dans ce deuxième cas, on suppose que les instants t_0 et t_f sont imposés, l'état initial $x_0 = x(t_0)$ est donné tandis que l'état final x_f est libre. Comme le montre la figure (2.2).

Le problème peut se mettre sous la forme :

$$\min_{x(t)} J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Sujet à :

$$(2.19)$$

$$x_0 = x(t_0)$$

$$x_f = \text{libre}$$

En utilisant toujours la relation (2.13). Pour que cette dernière soit nulle, il faut que les deux termes le soient.

Pour que l'équation (2.20) soit nulle,

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) \right] = 0 \quad (2.20)$$

il faut que $\delta x(t_0) = 0$ pour toutes les trajectoires admissibles. Et comme $x(t_f)$ est libre, alors $\delta x(t_f) \neq 0$. Pour cela, il faut imposer pour $t = t_f$.

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) = 0 \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) est appelée condition à la limite.

Pour annuler l'équation (2.17), il suffit de vérifier l'équation d'Euler Lagrange (2.18) associé au problème avec des conditions aux limites à définir selon la nature de l'état final.

2.4 Méthode de résolution d'un problème de commande optimale

On distingue deux méthodes [9] : la méthode directe et la méthode de **lagrange** comme suit :

2.4.1 Méthode directe

La méthode directe est une méthode qui sert à convertir le problème de commande optimale en un problème de calcul des variations.

Théorème 2.1

Si h est une fonction continue sur $[t_0, t_f]$ et si $\int_{t_0}^{t_f} h(t)\delta x(t) dt = 0$, alors pour toute fonction δx continue sur $[t_0, t_f]$, h est identiquement nulle sur $[t_0, t_f]$.

En appliquant ce résultat à (2.17), une condition pour que x^* soit un extrémum ce résume en équation appelée **Équation d'Euler** explicité sous la forme suivante :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] = 0 \quad (2.22)$$

Remarque 2.3

- L'équation d'Euler doit être satisfaite pour les deux cas de l'état final.
- Lorsque la conversion du problème de commande optimale en un problème de calcul de variations n'est pas possible, la méthode de **Lagrange** est la méthode la plus adéquate.

2.4.2 Méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange, est une méthode qui s'applique à la recherche du minimum en présence de contraintes. Généralement, on ajoute le multiplicateur de Lagrange $\lambda(t)$ pour insérer la contrainte modèle dans le critère de manière à résoudre un problème de calcul des variations à plusieurs variables.

Ainsi, le problème de commande optimale est reformulé comme suit :

$$\underset{u(t)}{\text{opt}} J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)(\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)) dt \quad (2.23)$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \text{ ou libre} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dans ce cas, $g = \varphi(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) [x(t) - f(x(t), u(t), t)]$ et les conditions d'optimalité sont données sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{u}} \right) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\lambda}} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

La résolution de ce système d'équations permet de déterminer la solution optimale $x^*(t)$ et $u^*(t)$.

2.5 Application du calcul des variations à la commande optimale

Notre objectif est de reformuler le problème de commande optimale sous contraintes vu dans 1^{er} chapitre en un problème de calcul des variations sans contraintes pour utiliser les outils mathématiques classiques du calcul des variations. L'idée principale consiste à incorporer toutes les contraintes à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. S'il n'y a pas de contraintes, le problème est un problème de commande optimale simple. La solution du problème doit satisfaire l'équation d'Euler-Lagrange.

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t), u(t), t) dt \quad (2.26)$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \text{ ou libre} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Pour transformer ce problème de la commande optimale en un problème de calcul des variations, il faut tout d'abord exprimer $u(t)$ en fonction de $x(t)$ et de $\dot{x}(t)$, c'est-à-dire :

$$u(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (2.28)$$

Ensuite, on remplace l'équation (2.28) dans le critère pour avoir :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), F(x(t), \dot{x}(t), t), t) dt \quad (2.29)$$

Et qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\hat{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.30)$$

Au final, le problème de commande optimale (2.26) se ramène au problème de calcul des variations suivant :

$$\hat{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (2.31)$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \quad \text{ou libre} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Puis, on utilise l'équation d'Euler-Lagrange pour déterminer la solution.

2.6 Exemple d'application

Un problème de commande optimale est formulé comme suit :

$$J(x(t)) = \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt \quad (2.33)$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \\ x(0) &= \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ x(2) &= \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

En appliquant la méthode directe, le problème de commande optimale prend la forme suivante :

$$J(x(t)) = \frac{1}{2} \int_0^2 \dot{x}_2^2(t) dt$$

Sujet à :

$$\dot{x}_1(t) - x_2(t) = 0$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le problème possède la contrainte ($\dot{x}_1(t) - x_2(t) = 0$), alors on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ainsi, en introduisant la contrainte dans le critère en utilisant le multiplicateur de Lagrange $\lambda(t)$, le problème de commande optimale prend la forme suivante :

$$J(x(t)) = \frac{1}{2} \int_0^2 \dot{x}_2^2(t) + \lambda(t) [\dot{x}_1(t) - x_2(t)] dt \quad (2.36)$$

Sujet à :

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$g(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \lambda(t)) = \dot{x}_2^2(t) + \lambda(t) [\dot{x}_1(t) - x_2(t)] \quad (2.38)$$

Les conditions d'optimalités sont :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_2} \right) = 0 \Rightarrow -\lambda(t) - 2\ddot{x}_2(t) = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\lambda}} \right) = 0 \Rightarrow \dot{x}_1(t) - x_2(t) = 0 \quad (2.41)$$

L'équation (2.39) donne :

$$\lambda(t) = C_1$$

Et l'équation (2.40), il vient :

$$\ddot{x}_2(t) = -\frac{\lambda(t)}{2} = -\frac{C_1}{2} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -\frac{C_1}{2}t + C_2 \Rightarrow x_2(t) = -\frac{C_1}{4}t^2 + C_2t + C_3$$

L'équation (2.41), donne :

$$x_1(t) = -\frac{C_1}{12}t^3 + \frac{C_2}{2}t^2 + C_3t + C_4$$

Pour calculer le $x^*(t)$, il faut déterminer les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 .

– Pour $t = 0$, on a :

$$x_1(0) = 1 \Rightarrow C_4 = 1$$

$$\text{et } x_2(0) = 1 \Rightarrow C_3 = 1$$

– Pour $t = 2$:

$$x_1(2) = 0 \Rightarrow -\frac{2C_1}{3} + 2C_2 + 3 = 0$$

$$\text{et } x_2(2) = 0 \Rightarrow -C_1 + 2C_2 + 1 = 0 \Rightarrow C_1 = -6$$

$$\text{et } C_2 = -7/2$$

La solutions du problème est :

$$x_1^*(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{7}{4}t^2 + t + 1 \quad (2.42)$$

$$x_2^*(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1 \quad (2.43)$$

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'équation d'Euler-Lagrange qui permet de résoudre un problème calcul des variations. Puis, nous avons utilisé cette équation pour résoudre un problème de commande optimale soit en utilisant la méthode directe ou la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Un exemple d'application est donné pour illustrer ces deux méthodes.

Le chapitre qui suit sera consacré aux généralités d'optimisation et on se focalisera sur l'optimisation robuste pour résoudre des systèmes basé sur l'incertitude.

Chapitre 3

Optimisation robuste

3.1 Introduction

Ce chapitre porte sur une méthodologie spécifique et relativement nouvelle pour le traitement mathématique d'un problème d'optimisation avec des données incertaines.

Nous rappelons d'abord quelques bases de l'optimisation. Puis, nous présentons quelques méthodes numériques d'optimisation statique, avec et sans contraintes, et les méthodes évolutionnistes. La fin du chapitre aborde l'optimisation robuste et particulièrement l'approche des scénarios.

3.2 Généralités sur l'optimisation

L'optimisation est une branche des mathématiques qui s'intéresse à la détermination de certains points particuliers, d'une fonction à plusieurs variables, appelés optimums (maximums et minimums).

3.2.1 Outils mathématiques

Avant de développer les méthodes d'optimisation, il est nécessaire de présenter quelques outils mathématiques relatifs au calcul différentiel.

3.2.1.1 Conditions d'optimalité

Soient X une partie de \mathfrak{R}^n , $a \in X$ et $f : X \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction numérique. On dit que f admet en a un minimum global si $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in X$.

On dit que f admet en a un minimum local s'il existe un voisinage V de a dans \mathfrak{R}^n tel que $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in V \cap X$.

On dit que f admet en a un minimum strict si les inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq a$.

Les définitions correspondantes pour maximum s'en déduites en inversant les inégalités. Le terme optimum signifie maximum ou minimum.

3.2.1.2 Fonctions convexes

Définition 3.1

Un ensemble $U \subset \mathfrak{R}^n$ est dit convexe si $\forall x; y \in U$ on a $[x; y] \subset U$ (quelque soit deux points dans U , tous les points du segment qui les unit sont dans U).

Définition 3.2

Soit $U \subset \mathfrak{R}^n$ un ensemble convexe et $f : U \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction.

1. On dit que f est convexe sur U si

$$f(lx + (1-l)y) \leq lf(x) + (1-l)f(y), \quad \forall x; y \in U; \forall l \in [0; 1] \quad (3.1)$$

2. On dit que f est strictement convexe sur U si

$$f(lx + (1-l)y) < lf(x) + (1-l)f(y), \quad \forall x; y \in U; \forall l \in [0; 1] \quad (3.2)$$

avec $x \neq y$,

3. On dit que f est concave (respectivement strictement concave) si $-f$ est convexe (respectivement strictement convexe).

3.2.1.3 Minima et Maxima d'une fonction mathématique

Minimum et maximum local

Un point x^* est un minimum local (respectivement maximum locale) de la fonction f si et seulement si : $f(x^*) < f(x)$ (respectivement $f(x^*) > f(x)$), $\forall x \in V(x^*)$ et $x^* \neq x$. D'où $V(x^*)$ définit un voisinage de x^* .

Un minimum local et un maximum local sont illustrés par la figure 3.1 respectivement par les points M1 et M2.

Minimum et maximum global

Un point x^* est un minimum global (respectivement maximum global) de la fonction f pour : $f(x^*) \leq f(x)$ (respectivement $f(x^*) \geq f(x)$), $\forall x \in V(x^*)$ et si les inégalités sont strictes, on obtient la définition d'un minimum (ou d'un maximum) global strict.

Un minimum global et un maximum global sont illustrés par la figure 3.1 respectivement par les points M3 et M4.

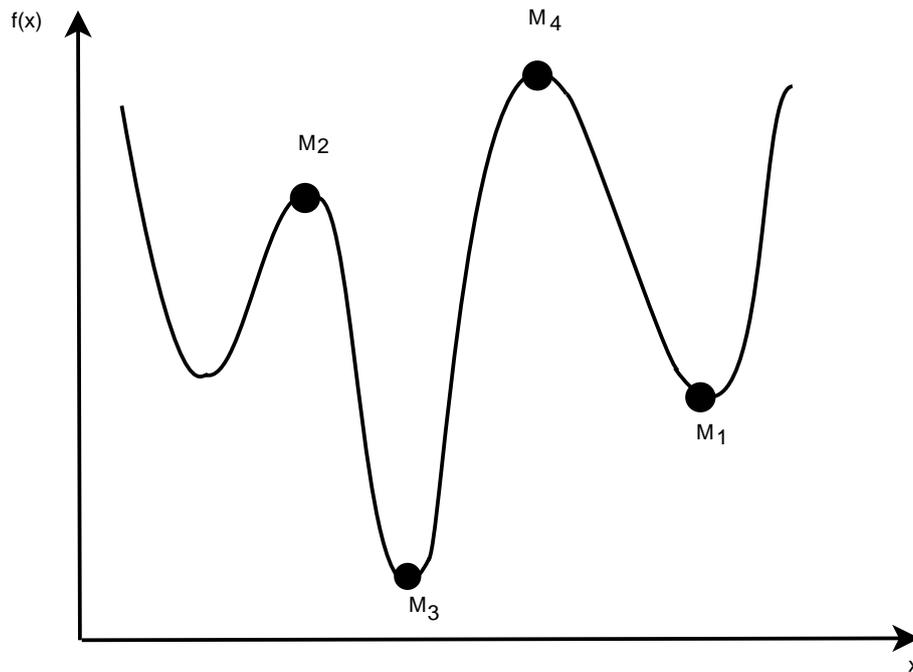


FIGURE 3.1 – Les maxima et les minima d'une fonction.

3.2.2 Formulation mathématique d'un problème d'optimisation

Un problème d'optimisation prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \underset{x \in C}{\text{opt}} f(x) \\ \text{Sujet à :} & \\ & g_i(x) = 0 \quad ; i = \{1, 2, \dots, p\} \\ & h_i(x) \geq 0 \quad ; i = \{1, 2, \dots, q\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec : $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $g : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$ et $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^q$, $f(x)$ est appelée **fonction de coût**, **fonction objectif**, ou **critère d'optimisation** et C est le domaine admissible (ensemble des solutions possibles) défini par les contraintes.

3.2.3 Résolution d'un problème d'optimisation

On peut résoudre un problème d'optimisation par différents algorithmes. Ces derniers, peuvent localiser la solution adéquate de manière itératives.

3.2.3.1 Optimisation sans contraintes

Cette classe de méthodes est la plus simple. Sa résolution peut être effectuée par application de différentes méthodes qui se divisent en deux grandes familles : les méthodes déterministes (méthode des gradients, méthodes quasi-Newton, ...) et les méthodes non déterministes ou stochastiques (méthodes Monte-Carlo, algorithmes évolutionnistes, ...).

Remarque 3.1

Les méthodes déterministes possèdent les propriétés suivantes : elles conduisent toujours à la même solution finale et elles nécessitent relativement peu d'évaluations de la fonction objectif. Mais elles peuvent se bloquer sur un optimum local.

Par contre, les méthodes stochastique nécessitent un grand nombre d'évaluations de la fonction objectif. Mais elles possèdent la capacité de converger vers le voisinage de l'optimum global.

3.2.3.2 Optimisation avec contraintes linéaire

La programmation linéaire est un problème d'optimisation dont la fonction objectif et les contraintes sont des fonctions linéaires.

La forme canonique d'un programme linéaire est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} \min_x f(x) &= c^T x \\ \text{sujet à} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec c et $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $b \in \mathbb{R}^q$.

On peut résoudre ce type de problème en utilisant par exemple la méthode graphique et la méthode de simplexe.

3.2.3.3 Optimisation avec contraintes non linéaires

Dans cette section, on cherche à énoncer des conditions d'optimalité au premier ordre pour des problèmes d'optimisation avec contraintes du type égalité, inégalité et mixte.

Il existe plusieurs méthodes de résolutions d'un problème d'optimisation avec contraintes non linéaires comme la méthode du Multiplicateurs de **Lagrange**, Méthodes de pénalités et conditions de **Karush-Kuhn-Tucker**.

3.3 Méthodes d'optimisation déterministes

Les méthodes déterministes permettent de résoudre les problèmes de manière exacte en un temps fini. Généralement, la fonction objectif doit être strictement convexe et continue. Les problèmes d'optimisations peuvent être résolus avec différents algorithmes. Dans ce qui suit, on s'intéressera aux méthodes qui exploitent des conditions d'optimalités pour trouver un minimum local d'une fonction.

Parmi ces différents algorithmes, on peut citer ;

- **Méthodes de recherche unidimensionnelle** : elles sont utilisées dans le cas d'une fonction mono-variable. Elles sont basées sur des techniques qui permettent de localiser le point minimal de la fonction à partir de réductions successives de l'intervalle de recherche. Parmi ces méthodes, citons la méthode de **Dichotomie**, la méthode du Nombre d'Or.
- **Méthodes déterministes multidimensionnelles** : elles sont utilisées à l'optimisation de fonction à un paramètre ou plus. Elles peuvent être classées selon l'information qu'elles utilisent sur la fonction. Elles sont dites d'ordre 0 si elles n'utilisent que la valeur de la fonction. Elles sont dites d'ordre 1 si elles nécessitent en plus le gradient de la fonction. Ces méthodes utilisent la notion de la direction de recherche, souvent donnée par le gradient de la fonction. La plupart de ces méthodes sont d'ordre 1 et exécutent successivement des recherches linéaires en faisant appel à une méthode unidimensionnelle. Les exemples les plus significatifs de méthodes analytiques sont la méthode du **Gradient Conjugué** et les méthodes **Quasi-Newton**.

3.4 Méthodes d'optimisation stochastique

Les méthodes d'optimisation stochastique s'appuient sur des mécanismes de transitions probabilistes et aléatoires. Cette caractéristique indique que plusieurs exécutions successives de ces méthodes peuvent conduire à des résultats différents pour une même configuration initiale d'un problème d'optimisation.

On peut classer ces méthodes en méthodes heuristiques (la plupart de ces méthodes utilisent des processus aléatoires, ...) et méthodes méta-heuristiques (comme les algorithmes génétique, la méthode de Monte-Carlo et ...).

3.4.1 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques [13], introduits en 1975 par Jean Holland, sont relativement récents et en cours de développement. De ce fait, ces derniers appartiennent à la famille des algorithmes évolutionnistes (un sous-ensemble des méta-heuristiques). Leur but est d'obtenir une solution approchée, en un temps correct, à un problème d'optimisation .

Un algorithme génétique va reproduire ce modèle d'évolution dans le but de trouver des solutions pour un problème donné. On fera usage, alors, de termes empruntés au monde des biologistes et des généticiens et ceci afin de mieux représenter chacun des concepts abordés :

- 1- Un individu (chromosome) sera une solution potentielle à un problème donné,
- 2- Une population sera un ensemble d'individus ou de points de l'espace de recherche,
- 3- Un gène sera une partie d'une réponse au problème donc d'un individu,
- 4- Une génération est une itération de l'algorithme.

Un algorithme génétique va faire évoluer une population dans le but d'en améliorer les individus. Et c'est donc, à chaque génération, un ensemble d'individus qui sera mis en avant et non un individu particulier. Nous obtiendrons donc un ensemble de solutions pour un problème. Ces dernières solutions trouvées seront différentes mais de qualité remarquable.

3.4.1.1 Descriptions des Algorithmes Génétiques

– Codages des données

Le codage des données c'est l'une des astuces qui assure l'utilisation des techniques de la génétique. Chaque variable ou caractère est codée sous forme d'une chaîne élémentaire selon le codage informatique.

Les codages binaires ont été très utilisés à l'origine ou alors que les codages réels sont largement utilisés notamment dans les domaines applicatifs pour l'optimisation de problèmes à variables réelles.

– Génération de la population initiale

La génération de la population initiale produit une population d'individus non homogène qui servira de base pour les générations futures. Le choix de la population initiale est important pour assurer la convergence vers l'optimum global plus rapidement. La population initiale est répartie sur tout le domaine de recherche.

– Opérateur de croisement

Le croisement c'est la reformulation des nouveaux chromosomes. Cette opérateur est subdiviser en trois croisement :

1. **Croisement en un point** : il est tout à fait possible de faire des croisements aléatoires. Illustré par la Figure suivante :

$$\text{Parent : } \left[\begin{array}{c|c} 01 & 10 \\ \hline 11 & 01 \end{array} \right] \longrightarrow \text{Enfant : } \left[\begin{array}{c|c} 01 & 01 \\ \hline 11 & 10 \end{array} \right]$$

FIGURE 3.2 – Croisement en un point d'un individu de 4 bits.

2. **Croisement en deux point** : une solution largement utilisée pour effectuer des croisements multi-points. Illustré par la Figure suivante :

$$\text{Parent : } \left[\begin{array}{c|c|c} 01 & 10 & 0111 \\ \hline 11 & 01 & 0101 \end{array} \right] \longrightarrow \text{Enfant : } \left[\begin{array}{c|c|c} 01 & 01 & 0111 \\ \hline 11 & 10 & 0101 \end{array} \right]$$

FIGURE 3.3 – Croisement en deux point d'un individu de 8 bits.

3. **Croisement uniforme** : les bits de la chaîne sont comparées entre les deux parents. Les bits sont échangés avec une probabilité qui est en général de 0.5. Sa probabilité d'apparition est un paramètre de l'algorithme génétique et dépend du problème et de la technique de recombinaison. La probabilité d'un croisement est alors comprise entre 0 et 1 strictement. Illustré par la Figure suivante :

$$\text{Parent : } \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 01 & 10 & 011 & 11 & 10 \\ \hline 11 & 01 & 010 & 00 & 01 \end{array} \right] \longrightarrow \text{Enfant : } \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 01 & 01 & 011 & 00 & 11 \\ \hline 11 & 10 & 010 & 11 & 00 \end{array} \right]$$

FIGURE 3.4 – Croisement uniforme d'individu de 11 bits.

– Opérateur de mutation

La mutation est un changement aléatoire qui introduit des variations dans une chaîne d'un chromosome qui est codée en binaire. La représentation se fait en changement réciproque

des bits selon la probabilité afin d'avoir la diversité des individus dans la population. Lorsque le taux de mutation est élevé, on se rapproche d'une recherche purement heuristique. Alors, chaque bit a une probabilité de mutation Pm (taux de mutation).

$$\text{Parent : } [000\underline{1}01\underline{0}1] \longrightarrow \text{Parent : } [000\underline{0}01\underline{1}1]$$

FIGURE 3.5 – La mutation.

– Principes de sélection

L'opérateur de sélection se base sur ces probabilités pour créer une nouvelle population où les individus les mieux adaptés possèdent un nombre plus important de descendants (ou copies). Cet opérateur est une version artificielle de la sélection naturelle (c'est à dire, les individus les mieux adaptés ont tendance à se reproduire plus fréquemment).

Ainsi, pour un individu x d'évaluation $f(x)$, la probabilité d'avoir un descendant est :

$$p(x, t) = \frac{f(x)}{\sum_{k=1}^{\mathbf{N}} f(x^k)} \quad (3.5)$$

où \mathbf{N} est la taille de la population, $(x^k)_{k=1, \mathbf{N}}$ est l'ensemble des individus et t est la génération courante. Cette sélection est nommée sélection proportionnelle puisque la probabilité d'avoir un descendant est proportionnelle à la valeur de l'adaptation de l'individu.

Quelques exemples d'utilisation de l'opérateur de sélection :

1. **La roue de loterie** : La roue est divisée en secteurs et chaque secteur est associé à un individu. La superficie du secteur étant proportionnelle à la valeur de l'adaptation de l'individu. Les meilleurs individus auront une probabilité plus grande d'être choisis.
1. **L'élitisme basée sur la mémorisation** : c'est la sélection des meilleurs individus qui seront systématiquement conservés dans la prochaine génération et que les plus mauvais individus seront éliminés.
1. **Le tournoi** : un tournoi est organisé entre deux (ou plus) individus et le meilleur sera introduit dans le mating-pool. Une variante consiste à introduire une probabilité p sur la victoire du meilleur dans le cas de tournoi binaire. Une valeur peu élevée de p peut réduire la chance de la sélection.

3.4.1.2 Le principe de l'algorithme génétique

Le principe de l'algorithme génétique est le suivant : simuler l'évolution d'une population d'individus jusqu'à un critère d'arrêt. On génère initialement un grand nombre d'individus (ou solutions) et l'algorithme les fait évoluer en trois phases : reproduction, croisement et mutation.

Le processus de sélection est basé sur une fonction d'évaluation (ou fonction objectif) qui correspond à une performance de l'individu. On en déduit une probabilité pour chaque individu de se reproduire ou de générer des clones (cette probabilité s'appelle fitness).

Finalement, ce processus contribue à produire une population ayant une meilleure adaptabilité (convergence vers l'optimum).

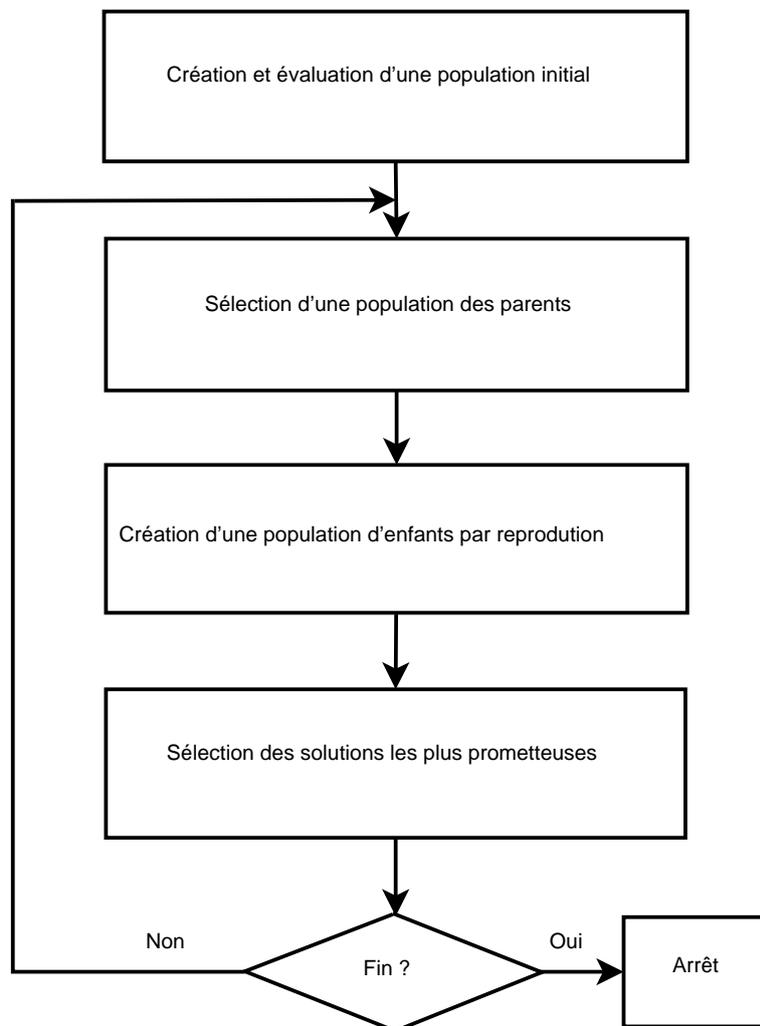


FIGURE 3.6 – Organigramme d'un algorithme génétique.

La Figure 3.6 représente l'organigramme d'un algorithme génétique qui résume les différents étapes.

Exemple 3.2

Le problème posé est de trouver le minimum de la fonction $f(x) = x + 2$ sur l'intervalle $[0, 40]$:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) = x + 2 \\ \text{sujet à :} \quad & 0 \leq x \leq 40 \end{aligned} \tag{3.6}$$

On fixe la taille de la population à $N = 4$, puis le tirage des chromosomes se fait aléatoirement sachant que chaque chromosome à 5 bits.

– **Tirage et évaluation de la population initiale :**

L'évaluation consiste à calculer l'adaptation pour chaque individu retirée, on utilise la fonction d'adaptation (3.5).

Numéro	Séquence	Individu	P(i) en %
1	01011	11	18.84
2	10000	16	26.08
3	11001	25	39.13
4	01001	9	15.94

TABLE 3.1 – Calcul de la fonction d'adaptation pour la population initiale

– **Sélection de parents :**

A partir de la population initiale, on sélectionne les quatre nouveaux individus en prenant en compte de la valeur de répartition. Par exemple, on prend deux fois 16, une seule fois 11 et 25.

Numéro	Séquence	individu
1	10000	16
2	11001	25
3	00111	11
4	10000	16

TABLE 3.2 – Sélection des individus

– **croisement :**

Le croisement coupe au hasard les chromosomes (individus-parents) en deux parties et le croisement entre les parties obtenues permet d'avoir les individus descendants.

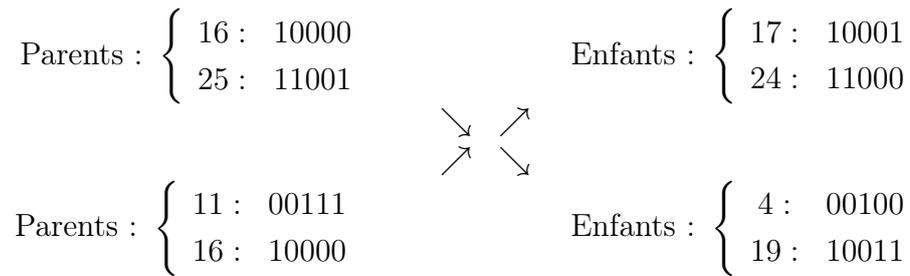


FIGURE 3.7 – Croisement en un point.

– **Mutation :**

C'est la modification de la valeur d'un bit dans un chromosome d'une manière aléatoire :

$$19 : 10\underline{0}11 \quad \longrightarrow \quad 23 : 10\underline{1}11$$

FIGURE 3.8 – Mutation d'un individu.

- La nouvelle génération est résumée dans le tableau 3.3.
- Le minimum obtenu est le nombre 4, nous sommes passé de 9 à 4 après une seule génération (itération). L'exécution de l'algorithme continue jusqu'à satisfaire la condition d'arrêt.

Numéro	Séquence	Individus	P(i) en %
1	10001	17	25
2	11000	24	34.27
3	00100	4	78.94
4	10111	23	32.89

TABLE 3.3 – Reproduction d'une nouvelle génération.

3.4.2 Génération des nombres aléatoires

3.4.2.1 Nombre aléatoires

Théoriquement, un nombre aléatoire est un nombre imprévisible, autrement dit tiré au sort parmi un ensemble de nombres. Les nombres aléatoires sont très utilisés en mathématiques dans les processus d'optimisation, mais aussi en physique, pour simuler numériquement des phénomènes très complexes. Toutefois, le problème est qu'un ordinateur est incapable de tirer un nombre au sort. Il est donc impossible de générer une suite vraiment aléatoire : tout ce que l'on peut espérer, c'est de générer des suites qui vérifient les théorèmes de probabilité.

3.4.2.2 Une suite pseudo-aléatoire

Une suite pseudo-aléatoire est une suite utilisable pour tout problème de simulation, c'est-à-dire qu'elle doit vérifier tous les théorèmes connus du calcul des probabilités. Une telle suite est généraliste, et on peut l'appliquer à tout problème avec la certitude qu'elle fournira lentement mais sûrement la solution recherchée. Par contre, si on ne désire vérifier qu'un petit nombre de théorèmes de probabilité, on peut construire une suite spécialisée qui donnera une solution rapide au problème étudié, mais qui pourra totalement échouer à d'autres pour lesquels elle n'est pas conçue. Une telle suite est appelée quasi-aléatoire.

3.4.2.3 Générateur congruent linéaire

Le générateur congruent linéaire est un des générateurs de nombres aléatoires les plus courants, certainement grâce à sa grande simplicité. Depuis qu'il a été inventé en 1948 par D. H. Lehmer. Il est défini de la manière suivante :

On choisit un entier m et on travaille dans le groupe Z_m des entiers modulo m . Soient $(a, b) \in Z_m$. Le générateur congruent linéaire est défini par la relation de récurrence suivante :

$$y_{n+1} = (a y_n + b) \bmod m \quad , n > 0 \quad (3.7)$$

On dit que :

- m est le module du générateur, a est son multiplicateur, b est son incrément et y_0 est le germe du générateur.
- $\bmod m$ est le reste de division de $a y_n + b$ par m .
- y_0 est initialisé avec une valeur différente à chaque génération, il est compris entre 0 et $m - 1$.

On obtient alors une suite z_i de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1[$ en posant :

$$z_i = \frac{y_i}{m} \quad , \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Théorème 3.1

Dans le cas où $m = 2^n$, la période du Générateur congruent linéaire est maximale (vaut m) si et seulement si b est impair et $a = 1 \bmod 4$

Théorème 3.2

Dans le cas où le module n'est plus nécessairement une puissance de 2. Nous avons le résultat suivant :

Soit la suite y_n produite par l'algorithme de l'équation (3.7), alors le cycle maximale est de longueur m si seulement si les trois hypothèses suivantes sont vérifiées :

- Si m est premier, il existe une racine primitive pour m .
- a et m , c et m doivent être premiers entre eux.
- Si 4 divise m , alors 4 divise $a - 1$.

Exemple 3.3

Choisissons les paramètres a , b et m comme suit 422, 987 et 2^{16} , le générateur congruent linéaire suivant ;

$$y_{n+1} = (422 y_n + 987) \text{ mod } 2^{16} \quad (3.9)$$

génère les nombres aléatoires 9345, 12417, 63617, 43137, 51329, 34945, 2177 à partir de $y_0 = 641$.

3.4.3 Algorithme du Recuit Simulé

L'algorithme du recuit simulé permet de résoudre le problème d'optimisation. En effet, son acceptation sera déterminée aléatoirement en tenant compte de la différence entre les coûts. Ainsi, cet algorithme est très utilisé sur la base d'une analogie thermodynamique. Le recuit simulé est une méthode d'optimisation importante historiquement. Grâce à son implémentation simple et ses propriétés de convergence intéressantes, elle trouve son application dans de nombreux domaines dans lesquels on doit résoudre des problèmes d'optimisation difficiles.

3.4.4 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo [11][12] a été fondée en 1947 par **Nicholas Metropolis** et publié pour la première fois en 1949.

D'une manière générale, la méthode de Monte-Carlo est une méthode d'approximation par l'introduction de procédés aléatoires. Cela permet d'estimer des valeurs numériques et de caractériser des systèmes complexes. Cette méthode est lente, mais il existe des cas où c'est la seule technique accessible.

– Principe de la méthode de Monte-Carlo

Un algorithme d'optimisation concrétise également un choix entre l'exploration de l'espace, nécessaire à la recherche de l'optimum global, et l'exploitation des résultats obtenus pour réduire le coût de la recherche de l'optimum local. Par exemple, la méthode de

Monte-Carlo permet une bonne exploration de l'espace, puisque tout point a une probabilité identique d'être atteint, mais il n'y a pas d'exploitations des résultats déjà obtenus. La méthode se base sur un tirage aléatoire de solutions. L'algorithme a d'autant plus de chance de trouver la solution optimale globale que le tirage est élevé.

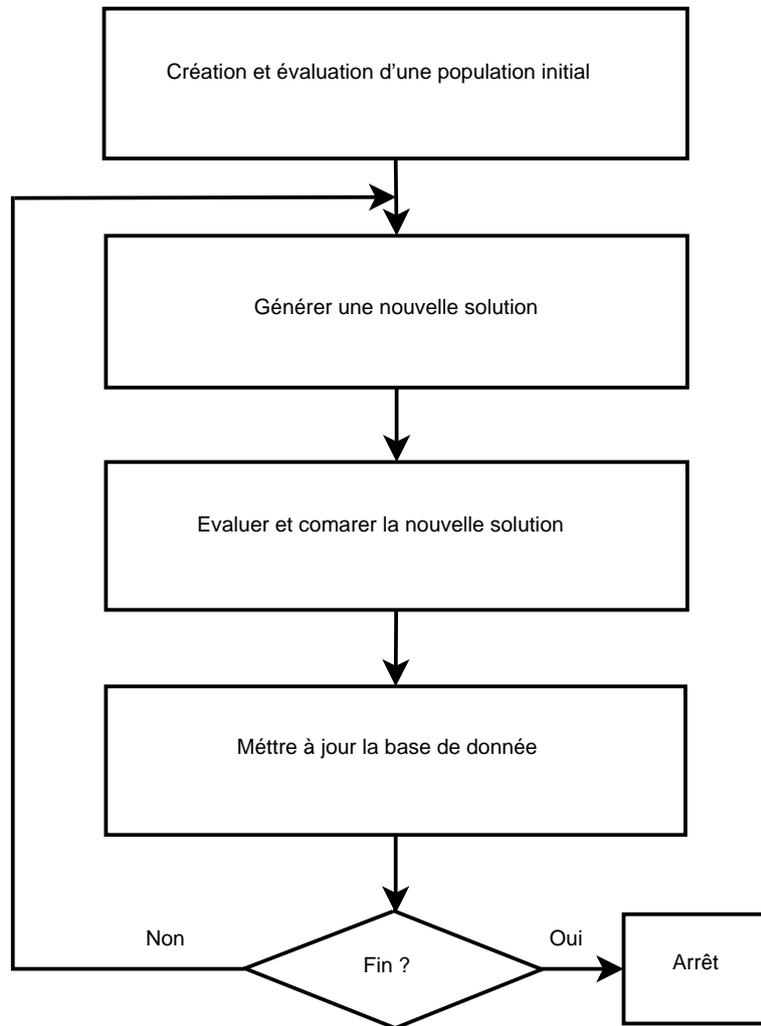


FIGURE 3.9 – Organigramme de la méthode de Monte-Carlo

3.5 Optimisation en présence d'incertitudes

Souvent on a besoin d'un ensemble d'outils qu'on pourrait utiliser dans des situations où on connaît quelque chose sur l'incertitude. Mais une distribution n'est pas connue car une approximation du vrai problème stochastique peut être relativement plus simple à définir et à résoudre qu'un programme stochastique. Une approximation peut être meilleure qu'une formulation déterministe.

L'optimisation sous incertitudes comporte deux catégories de problèmes :

Les problèmes d'optimisation robuste et le problème d'optimisation semi-infini. Ces deux catégories se différencient par la formulation des problèmes.

3.5.1 C'est quoi l'optimisation Robuste

L'optimisation robuste consiste à rechercher l'optimum d'une fonction objectif dont les paramètres sont incertains. Dans ce cas, l'optimum dépend des incertitudes.

3.5.1.1 Formulation d'un problème d'optimisation robuste

La formulation générale d'un problème d'optimisation robuste est de la forme :

$$\min_x \max_a f(a, x) \quad (3.10)$$

avec a un paramètre incertain borné comme suit : $a_{min} \leq a \leq a_{max}$.

Dans ce cas, on minimise la fonction $f(a, x)$ par rapport à x lorsque l'incertitude a maximise la fonction $f(a, x)$, le pire cas de l'incertitude.

3.5.1.2 Problème d'optimisation Semi-Infini

Un problème d'optimisation semi-infini [10] est dit en anglais Semi-Infinite Programming, c'est un problème d'optimisation dont le nombre de variable de décisions est infini et le nombre de contraintes est infini.

Ainsi, en considérant un ensemble de valeur pour l'incertitude a soit :

$$\{a^{(i)} ; i = 1, \dots, +\infty\}$$

Cette ensemble doit être infini pour se rapprocher de la réalité.

Le problème $min\ max$ de (3.10) peut s'écrire sous la forme suivantes :

$$\begin{aligned} & \min_x h \\ \text{Sujet à} & \\ & f(a^{(i)}, x) \leq h, i = 1, \dots, +\infty \end{aligned} \quad (3.11)$$

On constate que le problème d'optimisation possède x et h comme variables d'optimisation et une infinité de contraintes $f(a^{(i)}, x)$ pour $(i = 1, \dots, +\infty)$.

3.6 Optimisation par l'approche des scénarios

Pour résoudre un problème d'optimisation, on utilise deux approches :

3.6.1 Approche du pire cas

Dans ce cas, on essaie de prendre en considérations la totalité du domaine de l'incertitude. Cette approche consiste à résoudre un problème d'optimisation semi-infini qui est en général très difficile à résoudre.

3.6.2 Approche des scénarios

Dans ce cas, on essaie de sélectionner un ensemble d'échantillons de l'incertitude pour avoir un nombre fini de contraintes. Cette approche représente une relation de l'approche du pire cas. Ainsi en choisissant N échantillons $a^{(i)}$, on obtient le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min_x h \\ \text{Sujet à :} & \\ & f(a^{(1)}, x) \leq h \\ & f(a^{(2)}, x) \leq h \\ & \vdots \\ & f(a^{(N)}, x) \leq h \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ainsi, pour avoir une solution avec une probabilité de succès Pr , le nombre N doit être choisit tel qu'il est spécifié par le théorème suivant :

Théorème 3.1

Pour déterminer le nombre d'échantillons N . Ainsi, si on choisit un paramètre de risque $\epsilon \in [0, 1]$ et un paramètre de confiance $\beta \in [0, 1]$. Si :

$$N \geq \frac{2}{\epsilon} \left(\ln \frac{1}{\beta} + d \right) \tag{3.13}$$

avec d nombre de variables de décisions,
alors la probabilité $Pr \geq 1 - \beta$.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé des notions élémentaires de l'optimisation. Nous avons, aussi, présenté quelques méthodes de résolutions. Ensuite, nous avons introduit l'optimisation robuste et la méthode des scénarios.

Dans le chapitre qui suit, on s'intéressera à l'utilisation de la méthode des scénarios par la résolution d'un problème de commande optimale incertain.

Chapitre 4

Commande optimale d'un système incertain

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution d'un problème de commande optimale d'un système incertain. L'idée consiste à transformer le problème de commande optimale en un problème d'optimisation robuste. Puis, en utilisant l'approche des scénarios on détermine la commande optimale.

4.2 Formulation du problème de la commande optimale

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} J(u(t)) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x(t)^T Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \\ \text{Sujet à :} & \\ \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \end{aligned} \tag{4.1}$$

L'objectif consiste à déterminer $u(t)$ lorsque les matrices A et B sont incertaines. Comme le critère est quadratique et le modèle est linéaire, alors la loi de commande est sous forme d'état :

$$u(t) = -kx(t) \tag{4.2}$$

avec $A_{min} \leq A \leq A_{max}$ et $B_{min} \leq B \leq B_{max}$.

Ainsi le problème de commande optimale peut s'écrire comme suit :

$$\min_k \max_{A,B} J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x(t)^T Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt$$

Sujet à :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.3 Formulation sous forme d'un problème d'optimisation

En remplaçant la commande (4.2) dans le modèle et le critère, on obtient :

$$\dot{x}(t) = (A - Bk) x(t) \tag{4.4}$$

donc,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x(t)^T Q x(t) + x^T k^T(t) R k x(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x(t)^T [Q + k^T R k] x(t) dt \end{aligned} \tag{4.5}$$

La résolution de l'équation (4.4) conduit à la solution suivante :

$$x(t) = e^{(A-Bk)t} x(0) \tag{4.6}$$

qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = \Phi(A, B, k, t) x(0) \tag{4.7}$$

Où Φ représente la matrice de transition.

On remarque pour $t = t_f$, on a :

$$\Phi(A, B, k, t_f) x(0) = x_f \tag{4.8}$$

On remplace la solution (4.7) dans le critère (4.5), il vient :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(0) \Phi^T(A, B, k, t) [Q + k^T R k] \Phi(A, B, k, t) x(0) dt \tag{4.9}$$

Cette intégrale est facile à évaluer pour avoir :

$$J = f(A, B, k) \tag{4.10}$$

Ainsi, le problème d'optimisation robuste est donné comme suit :

$$\begin{aligned} & \min_k \max_{A,B} f(A, B, k) \\ \text{Sujet à :} & \\ & \Phi(A, B, k, t_f)x(0) = x_f \end{aligned} \quad (4.11)$$

Où k est la variable d'optimisation, A et B sont des incertitudes.

Alors, en utilisant l'approche des scénarios présentée dans le chapitre précédent, on sélectionne N échantillon $A^{(i)}$ et $B^{(i)}$ ($i = 1, \dots, N$) pour relaxer le problème d'optimisation comme suit :

$$\begin{aligned} & \min_k h \\ \text{sujet à :} & \\ & f(A^{(i)}, B^{(i)}, k) \leq h \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.12)$$

Pour la résolution de ce problème d'optimisation, on utilise les algorithmes génétiques.

4.4 Exemple d'application

4.4.1 Exemple 1

Soit le problème de la commande optimale suivant :

$$\begin{aligned} & J = \int_0^2 x^2 + u^2 dt \\ \text{Sujet à :} & \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a x + b u \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

Où $1 \leq a \leq 2$ et $2 \leq b \leq 3$. On doit concevoir une commande de la forme $u = -kx$.

En remplaçant cette commande dans le modèle, on obtient :

$$\dot{x} = -(a + bk)x(t) \quad (4.14)$$

La solution de cette équation est :

$$x(t) = e^{-(a+bk)t} \quad (4.15)$$

En remplaçant cette dernière dans le critère, on obtient :

$$J = \int_0^2 e^{-2(a+bk)t} + k^2 e^{-2(a+bk)t} dt \quad (4.16)$$

L'évaluation de l'intégrale donne :

$$J(a, b, k) = -(x^2(0) (1/exp(4a + 4bk) - 1) (k^2 + 1))/(2(a + bk)) \quad (4.17)$$

Donc le problème *min max* (problème d'optimisation robuste) à résoudre est :

$$\min_k \max_{a,b} J \quad (4.18)$$

Le nombre d'échantillons donné par la relation (3.13) est : $N = 1782$ pour un facteur de risque $\varepsilon = 0.01$ et un paramètre de confiance $\beta = 10^{-3}$ et un nombre de variables de décision $d = 2$.

Donc pour avoir un correcteur robuste, on considère 1782 valeurs aléatoires pour les incertitudes, c'est-à-dire 1782 contraintes.

Alors le problème d'optimisation standard à résoudre est :

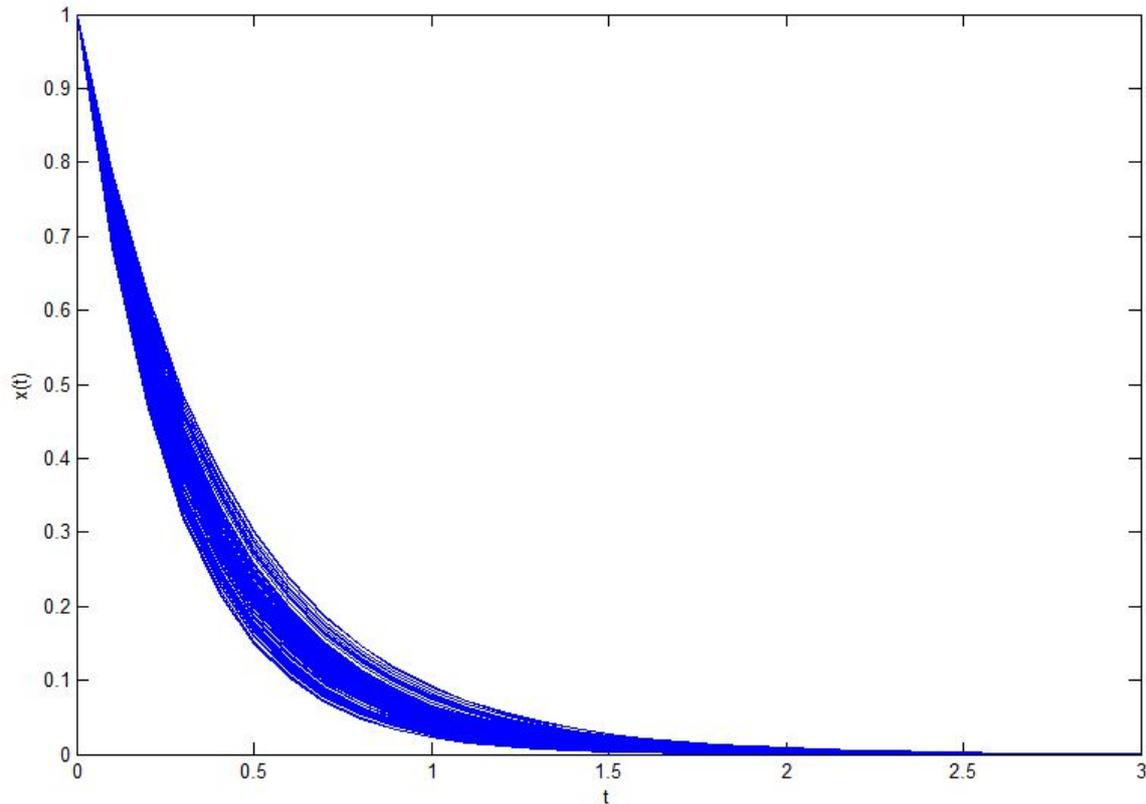
$$\begin{aligned} & \min_k h \\ \text{Sujet à :} & \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$J(a_i, b_i, k) - h \leq 0 \quad i = 1, \dots, 1782$$

La résolution de ce problème d'optimisation en utilisant les algorithmes génétiques conduit au résultat suivant :

$$x^* = [h^* \ k^*] = [0.3121 \ 0.6303] \quad (4.20)$$

L'évaluation de l'état du système pour 1782 autres incertitudes générées aléatoirement est données par la Figure 4.1

FIGURE 4.1 – La trajectoire du 1^{er} ordre d'un système incertaines.

4.4.2 Exemple 2

Soit un problème de commande optimale suivant :

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^2 x^2 dt \\
 \text{sujet à :} & \\
 \ddot{x} &= -ax - bx + u \\
 x(0) &= 1
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Où $1 \leq a \leq 2$ et $2 \leq b \leq 3$. On doit concevoir une commande de la forme $u = k_1x + k_2\dot{x}$. Le problème *min max* d'optimisation robuste à résoudre est :

$$\min_{k_1, k_2} \max_{a, b} J \tag{4.22}$$

Le nombre d'échantillons donné par la relation (3.13) donne : $N = 5206$ pour un facteur de risque $\varepsilon = 0.01$ et un paramètre de confiance $\beta = 10^{-3}$ et un nombre de variables de décision $d = 3$.

Donc pour avoir un correcteur robuste, on considère 5206 valeurs aléatoires pour les incertitudes, c'est-à-dire 5206 contraintes.

Alors le problème d'optimisation standard à résoudre est :

$$\begin{aligned} & \min_k h \\ \text{Sujet à :} & \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$J(a_i, b_i, k_1, k_2) - h \leq 0 \quad i = 1, \dots, 5206$$

La résolution de ce problème d'optimisation en utilisant les algorithmes génétiques conduit au résultat suivant :

$$x^* = [h^* \ k_1^* \ k_2^*] = [0.2349 \ -21.8473 \ -6.4552] \tag{4.24}$$

L'évaluation de l'état du système pour 5206 autres incertitudes générées aléatoirement est donnée par la Figure 4.2

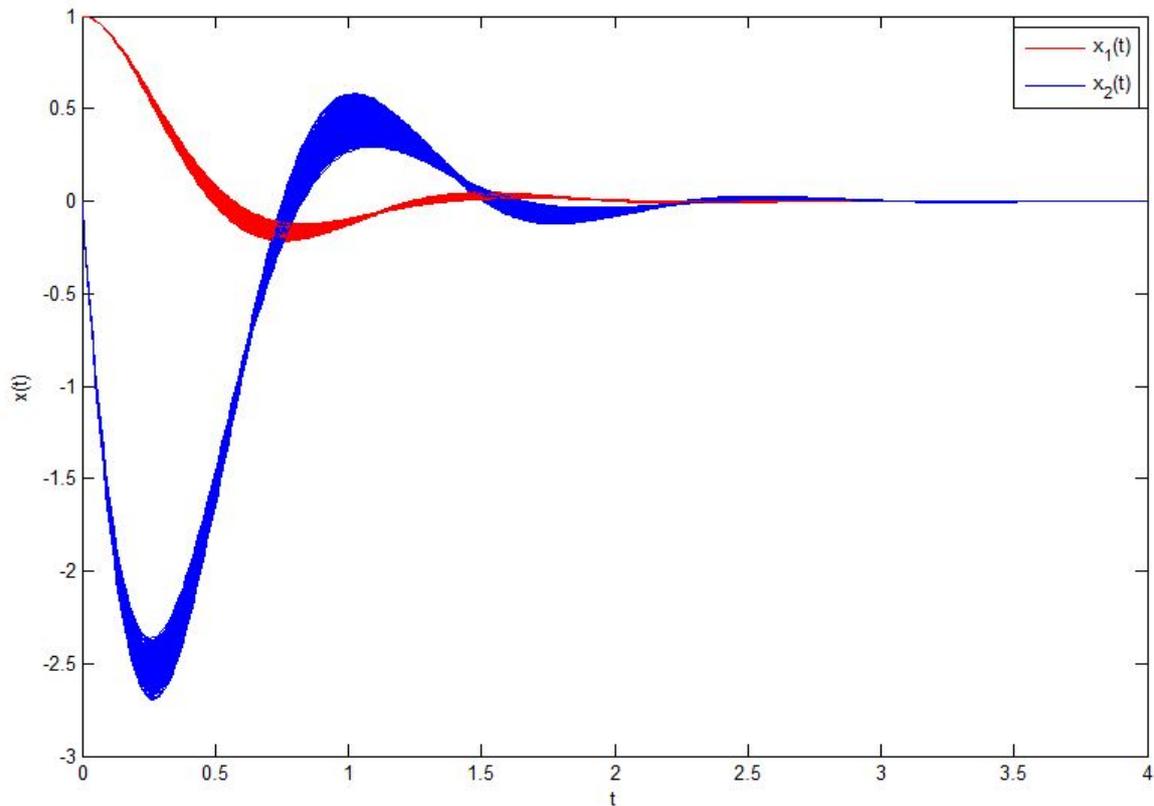


FIGURE 4.2 – La trajectoire d'un système incertaines du 2^{ème} ordre

Remarque

On remarque que l'évaluation de l'état est presque la même par les différents incertitudes. On note une légère différence dans le régime transitoire du à l'influence des paramètres a et b .

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué l'approche des scénarios par la résolution d'un problème de commande optimale d'un système à paramètre incertain.

Nous avons considéré le cas de la commande linéaire quadratique. Pour ce problème, on a montré facilement comment concevoir le problème linéaire quadratique en un problème d'optimisation robuste. Pour la résolution de ce dernier, nous avons adopté l'approche des scénarios. Deux exemples illustratifs ont été présentés.

Les résultats de simulation obtenus ont montré l'apport du correcteur robuste.

Conclusion générale

Le problème traité dans ce mémoire concerne la commande optimale d'un système incertain. On s'est intéressé au problème de commande linéaire quadratique. L'objectif consiste à proposer une approche pour la détermination de la commande optimale pour un système dont les paramètres sont incertains.

Après avoir expliqué les différentes étapes de formulation d'un problème de commande optimale, nous avons présenté la méthode de calcul des variations utilisée pour la détermination de la commande optimale. Ensuite, nous avons présenté l'approche des scénarios utilisée pour la résolution d'un problème d'optimisation robuste. A la fin, nous avons proposé une approche indirecte, basée sur l'approche des scénarios, permettant de résoudre un problème de commande optimale en présence des incertitudes. L'approche a été illustrée par deux exemples d'application.

L'approche proposée consiste à convertir un problème de commande linéaire quadratique en un problème d'optimisation robuste.

L'objectif est d'utiliser les méthodes d'optimisation classique pour déterminer les gains optimaux d'un retour d'état. Ainsi, le problème d'optimisation classique est obtenu en relaxant le problème d'optimisation robuste en utilisant l'approche des scénarios. Deux exemples ont été développés et les résultats obtenus montrent clairement la robustesse de retour d'état.

Dans ce mémoire, on s'est intéressé au cas de la commande linéaire quadratique, alors il est intéressant de l'étendre à d'autres problèmes plus compliqués en utilisant d'autres techniques indirectes.

Bibliographie

- [1] P. BORNE et F. ROTELLA. *Régulations et systèmes asservis*, (R 7427), techniques de l'ingénieur : paris, 1996.
- [2] P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY. *commande et optimisations des processus*, commande optimal. tome 1. Éditions TECHNIP. Paris,1990.
- [3] P. NASLIN. *Théorie de la commande et conduite optimale*. Dunod : Paris, 1969.
- [4] A. EL JAÏ, E. ZERRIK et K. ZTOT, *Système dynamique*. IN : *Analyse et contrôle des systèmes localisés*. France : Presses Universitaire de Perpignan, 2008.
- [5] Michel. BIERLLAIRE, *Introduction à l'optimisation différentiable*. Presse polytechnique, 2006.
- [6] L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE, and E.F. MISHCHENKO. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, New York, 1962.
- [7] R. E. BELLMAN. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, New Jersey, 1957.
- [8] P. DYER and S. R. McReynolds. *The Computation and Theory of Optimal Control*. Academic Press, New York, 1970.
- [9] D. S. NAIDU. *Optimal Control Systems*. CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [10] A. T. JONGEN, F. TWILT, AND G. W. WEBER. *Semi-Infinite Optimization*. V.136 n-1, p.133-154, December 2012
- [11] L. E BERNARD LAPEYRE. *Introduction aux Méthodes de Monte-Carlo*. cermics, 2001
- [12] R. Y. Rubinstein. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley and Sons, 1981.
- [13] T. Vallée et M. Yildizoglu. *Thèse de doctorat : Présentation des algorithmes génétiques et de leurs applications en économie*. Université de Nantes,2001
- [14] I. YANIKOGLU , *Robust optimization methods for chance constrained, simulation-based, and bilevel problems*, te Izmir, Turquie, augustus 1985.
- [15] L. Saludjian. *Thèse de doctorat : Optimisations en Electrotechnique par Algorithmes Génétiques*. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1997.

Résumé

La résolution des problèmes de commande optimale pour les systèmes incertains est très difficile en utilisant les méthodes directes (Equation d'Euler-Lagrange, Principe du minimum et programmation dynamique). Une alternative intéressante consiste à utiliser les méthodes indirectes dont le principe consiste à convertir le problème de commande optimale en un problème d'optimisation statique.

Néanmoins, le problème d'optimisation est du type minmax qui de complexité NP. Dans ce mémoire, on propose d'utiliser l'approche des scénarios pour résoudre un problème de commande linéaire quadratique d'un système incertain.

Mot clé :

Commande optimale, Optimisation robuste, Approche des scénarios, Algorithmes génétique et Système incertains.