

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU**

**FACULTÉ DU GÉNIE DE LA CONSTRUCTION**



**Mémoire de fin de cycle**

**En vue de l'obtention du diplôme de master en Génie Mécanique**

**Option : Construction Mécanique**

*Comparaison des méthodes d'optimisation et de détection  
d'endommagement dans des structures en treillis part des mesures de  
vibration*

**Réalisé Par :**

- **DJEBRA Boudjema**

**Dirigé Par :**

**Mr. TIACHACHT Samir  
Mr. KAHOUADJI Amar**

**Présenté devant le Jury composé de :**

<b>Président</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Mr. BAHTANI Amar</b>
<b>Examineur</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Mr. SLIMANI Mohand</b>
<b>Rapporteur</b>	<b>UMMTO</b>	<b>Mr. TIACHACHT Samir</b>

**Promotion 2022/2023**

## **Avant-propos**

Parallèlement aux développements des technologies, des moyens et techniques de plus en plus sophistiqués sont mis à la disposition des ingénieurs et chercheurs opérant dans toutes les branches de l'industrie, telle que la mécanique, l'aérospatial, le génie civil, etc...

Un des plus grands atouts actuels de l'ingénieur est l'exploitation de l'outil informatique de plus en plus performant, permettant de stocker et manipuler un volume important d'information en un temps très réduit. Cette capacité peut être mise à profit pour la modélisation et l'analyse de structures plus complexes.

En effet, dans le cadre de ce mémoire relatif au suivi de l'état de structures mécaniques, cet outil nous permet de considérer :

- L'utilisation de la méthode des éléments finis pour la modélisation des structures mécaniques considérées.
- L'implémentation des méthodes de détection et localisation d'endommagements considérées et la simulation des mesures de réponses vibratoires sur les quelles sont basées.
- Mise en œuvre de l'indicateur Cornwell pour la localisation des endommagements.
- L'utilisation de trois algorithmes d'optimisation et quantification des dommages GRO, SABO et YDSE.

Pour cela, le logiciel MATLAB est particulièrement utilisé.

## **Remerciements**

*Avant tout nous remercions Dieu tout puissant qui nous a donné la force et surtout la patience d'arriver au bout de notre travail.*

Suite à la réalisation de ce travail, nous exprimons en premier lieu notre gratitude et notre reconnaissance à Monsieur **TIACHECHT Samir** d'avoir accepté de diriger notre travail, de nous avoir soutenues et encadrées de manière indéfectible et de nous avoir prodiguées de précieux conseils. Nous le remercions également pour sa convivialité et son sens de relations humaines.

Nos sentiments de gratitude s'adressent aussi à tout le personnel et les enseignants des départements de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou qui ont contribué à notre formation durant notre cursus.

Nos remerciements vont également aux membres du jury, pour avoir accepté de consacrer du temps à la lecture de ce mémoire et nous permettre de présenter le fruit de notre travail.

Nous remercions également Monsieur **KAHOUADJI Amar**, pour son aide, son sérieux et pour la documentation mise à notre disposition car sans lui ce travail n'aurait pas pu être réalisé.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidées de près ou de loin à la réalisation de ce travail et que nous n'avons pas pu désigner nommément, qu'ils sachent que nous ne les avons pas oubliés, qu'ils trouvent ici l'expression de notre reconnaissance.

## **Dédicaces**

***Je dédie ce modeste travail à toute personne  
qui nous ont aidés de près ou de loin la  
réalisation de ce travail.***

***DJEBRA Boudjema***

# *Sommaire*

## **Sommaire**

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements .....</b>	<b>3</b>
<b>Chapitre II : Méthodes des éléments finis.....</b>	<b>16</b>
<b>Chapitre III : Localisation des dommages a l'aide de l'indicateur Cornwell...</b>	<b>44</b>
<b>Chapitre IV : Méthodes d'optimisation et quantification .....</b>	<b>55</b>
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE .....</b>	<b>86</b>

# *Nomenclature*

Symboles	Nomenclature
$\bar{U}_e$	Déplacement nodal
$\{\epsilon\}$	Déformation.
$E$	Module de Young.
$D$	Matrice d'élasticité.
$\bar{F}e$	Matrice de force.
$\bar{K}e$	Matrice élémentaire de raideur dans le plan local.
$\bar{M}e$	Matrice élémentaire de masse le plan local.
$N$	Matrice de forme.
$C, C_y$ et $C_z$	Cosinus directeurs.
$T_\beta, T_y$ et $T_\alpha$	Matrice de rotations.
$T$	Matrice de passage.
$K$	Matrice de raideur globale de la structure.
$M$	Matrice de masse globale de la structure.
$\Lambda$	valeur propre.
$\emptyset$	vecteur propre.
$IFM$	Indicateur de forme modale.
$M_i$	Courbure modale de la structure saine.
$M_i^d$	Courbure modale de la structure endommagée.
$X$	Vecteur de déplacement.
$X_u(\mathcal{W})$	Réponse fréquentiel pour la structure saine
$X_d(\mathcal{W})$	Réponse fréquentiel pour la structure endommagée.
$Reu_i^{es}$	Énergie de déformation de structure saine.
$Reu_i^{ed}$	Énergie de déformation de structure endommagée.
$MSEBI$	Indicateur d'endommagement basé sur l'énergie de déformation modale.
$nr$	Nombre de réponse fréquentielle.
$NRU_i^{es}$	Énergie de déformation normalisée de structure saine.
$NRD_i^{ed}$	Énergie de déformation normalisée de structure endommagée.
$RTU_i^{es}$	Énergie de déformation totale de la structure saine.
$RTD_i^{ed}$	Énergie de déformation totale de la structure endommagée.
$indic_{FRF}$	Indice de base la méthode FRF.
$MSE_i^{es}$	Énergie de déformation modale pour une structure saine.
$MSE_i^{ed}$	Énergie de déformation modale pour une structure endommagée.
$m$	Nombre de modes.
$n$	Nombre d'élément de la structure.
$NMSE_i^{es}$	Énergie de déformation modale normalisée pour une structure saine.
$NMSE_i^{ed}$	Énergie de déformation modale normalisée pour une structure endommagée.
$MSEBI^e$	Indice de base d'énergie de déformation modale.
$n_p$	Nombre de modes projection.

$C_0$	Nombre de ddl optimum.
$(a)$	Indice relatif à la structure élément finis.
$(m)$	Indice relatif à la structure mesurée.
$C_v$	Vecteur de projection.
$Y_v$	$V^{\text{ème}}$ Vecteur propre mesuré.
$\Lambda$	Matrice spectrale.
$Y$	Matrice modale.
$(Rang Z)$	Rang de la matrice Z.
$(Cond Z)$	Conditionnement de la matrice Z.
$y_{vb}$	$V^{\text{ème}}$ Vecteur déplacement bruité au $V^{\text{ème}}$ capteur.
$gn$	Pourcentage de bruit aléatoire introduit.
$abs(y_v)$	Valeur absolue de vecteur $y_v$ .
$y_{vbt}$	Vecteur contenant des valeurs aléatoires entre 0 et 1 uniformément distribuées
$nn$	Dimension du vecteur $y_v$ .
$Rand(nn, 1)$	Vecteur de distribution uniforme de nombres aléatoire entre 0 et 1.
<b>d.d.l</b>	Dégré de liberté.

# *Introduction générale*

La surveillance de l'intégrité structurelle est un aspect essentiel et captivant des domaines de la mécanique et du génie civil. Récemment, il y a eu une croissance rapide de la recherche visant à développer des moyens de surveillance en raison des conséquences potentiellement désastreuses d'une défaillance structurelle imprévue, qui peut entraîner des pertes économiques importantes ainsi que des vies humaines.

L'inspection a pour objectif de surveiller en temps réel et régulièrement l'intégrité d'une structure en détectant les fissures et la corrosion de ses éléments. Elle permet également de prédire le comportement dynamique de la structure face à une excitation et d'optimiser ses performances tout en établissant ses limites d'utilisation.

Il existe deux types de techniques de détection d'endommagements : les techniques non destructives et les techniques destructives. Les premières sont souvent utilisées pour surveiller l'intégrité des structures ou des matériaux sans les dégrader, contrairement aux secondes. Certaines méthodes de détection d'endommagement consistent à chercher un indicateur d'endommagement à partir des données mesurées, et l'évaluation de cet indicateur permet de juger de l'état du système.

Cependant, la plupart de ces données nécessitent un modèle d'éléments finis ou au moins des données modales pour corréler l'état endommagé avec l'état initial intact de la structure en tant que référence. Par conséquent, la structure est modélisée par une discrétisation en éléments finis, et le nombre de capteurs placés sur la structure lors des essais est généralement réduit. De ce fait, la réponse dynamique n'est observée que sur un nombre limité de degrés de liberté (ddl), et le nombre de modes mesurés est également réduit.

Cela conduit à des méthodes de reconstitution des ddl non observés afin de compléter les vecteurs propres mesurés de la structure.

Comment comparer efficacement les méthodes d'optimisation d'endommagement dans les barres en utilisant la méthode de vibration et déterminer l'algorithme le plus adaptée ?

La mission assignée est de réaliser une synthèse bibliographique qui se concentre sur la surveillance de l'état des structures. Cette synthèse comprendra une

définition claire et concise du concept, un récapitulatif des travaux antérieurs, ainsi qu'une application pratique.

Cette analyse se basera principalement sur les dernières publications et travaux de recherche qui sont penchés sur le sujet de la surveillance de l'état des structures.

Afin de remplir cette tâche, le mémoire a été organisé de manière à inclure une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale.

— **Au premier chapitre**, nous avons classé les différentes méthodes de détection de dommages selon les types de paramètres utilisés pour formuler un indicateur de dommage. Cela inclut les fréquences, les modes, les vecteurs propres, entre autres.

— **Le deuxième chapitre** traite d'un rappel sur la méthode des éléments finis (EF) et la dynamique des structures (DDS).

— **Le troisième chapitre** comprendra une définition de l'indicateur Cornwell, son fonctionnement et un cas pratique qui démontre sa capacité à localiser un endommagement.

— **Le quatrième chapitre** consiste à faire une étude sur trois algorithmes qui optimisent et quantifient.

Pour conclure, nous finaliserons ce mémoire en présentant une synthèse de notre travail concernant les résultats que nous avons obtenus.

*Chapitre I : Méthodes  
de détection et  
localisation des  
endommagements*

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

## 1. Introduction

Les structures de génie mécanique et génie civil sont soumises à des charges importantes, telles que le poids des équipements, les forces du vent, les tremblements de terre et les vibrations dues au fonctionnement des machines. Cela peut conduire à des endommagements des structures, qui sont des altérations ou des déformations indésirables des matériaux constitutifs, qui peuvent diminuer leur performance et leur durée de vie. Les endommagements peuvent prendre différentes formes, telles que des fissures, des déformations plastiques, des décollements, des délaminages ou des cassures, et peuvent être causés par des facteurs tels que la fatigue, la corrosion, l'usure, les charges excessives ou les erreurs de conception.

La détection précoce des endommagements est donc essentielle pour prévenir les défaillances structurales, réduire les risques pour la sécurité des personnes et des biens, et optimiser la maintenance et la réparation des structures. Cela peut être réalisé grâce à diverses techniques de surveillance, telles que la surveillance des vibrations, la surveillance acoustique, la thermographie, la radiographie, la magnétoscopie, l'ultrason et la tomographie. Les informations recueillies par ces techniques peuvent être analysées pour détecter les signes d'endommagement, identifier leur localisation et leur étendue, et estimer leur gravité.

Dans ce contexte, ce travail vise à explorer les différents types d'endommagements pouvant survenir dans les structures de génie mécanique et génie civil, les mécanismes de leur formation, les facteurs qui les influencent, ainsi que les méthodes de détection et d'évaluation de leur état. Nous discuterons également des avantages et des limites de chaque technique de surveillance, ainsi que de leur applicabilité dans des contextes pratiques. Enfin, nous soulignerons l'importance de la détection précoce des endommagements et de leur gestion efficace pour garantir la fiabilité, la sécurité et la durabilité des structures de génie mécanique et génie civil.

En résumé, les structures de génie mécanique et génie civil peuvent subir des endommagements qui peuvent réduire leur performance et leur durée de vie. Pour éviter les défaillances structurales, il est important de détecter les signes d'endommagement, identifier leur localisation et leur étendue, et estimer leur gravité. Différentes techniques de surveillance peuvent être utilisées pour cela, telles que la surveillance des vibrations, la thermographie et

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

l'ultrason. Ce travail vise à explorer les différents types d'endommagements, les mécanismes de leur formation, les facteurs qui les influencent, ainsi que les méthodes de détection et d'évaluation de leur état. Enfin, la détection précoce des endommagements est cruciale pour garantir la fiabilité, la sécurité et la durabilité des structures de génie mécanique et génie civil.

## 1.1. Vibration des structures mécaniques

L'analyse statique d'une structure donne une indication importante de sa résistance aux sollicitations. Cependant, pour prévenir les défaillances dues à la rupture par fatigue ou dépassement de contrainte élastique et pour détecter les défauts de fabrication, il est essentiel de réaliser une étude du comportement vibratoire de la structure. L'étude des vibrations et des ondes dans les structures mécaniques doit porter sur trois aspects clés : l'environnement vibratoire (*les forces extérieures*), la structure elle-même et la réponse de la structure aux forces extérieures. L'étude du comportement vibratoire d'une structure comporte généralement deux étapes principales : la détermination des caractéristiques dynamiques de la structure (*fréquence et modes propres de vibration*) lors des vibrations libres, et l'analyse de la réponse de la structure à un environnement (*force d'excitation extérieure*) lors des vibrations forcées, soit en fréquence ou en temps.

## 1.2. L'endommagement des structures

L'endommagement des structures fait référence à la détérioration progressive ou soudaine de la performance ou de l'intégrité structurelle d'un composant ou d'un système, qui peut être causée par des facteurs tels que la fatigue, l'usure, la corrosion, les chocs, les vibrations excessives, les contraintes thermiques, ou des erreurs de conception ou de fabrication. Cela peut entraîner une diminution de la capacité portante ou de la résistance aux contraintes de la structure, ainsi qu'une augmentation de la probabilité de défaillance, mettant en danger la sécurité et la durabilité de la structure.

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

## 1.3. Détection de l'endommagement

En général, il existe deux types de techniques pour évaluer l'état des structures : les techniques non destructives et les techniques destructives.

Les techniques non destructives sont souvent préférées car elles permettent de surveiller l'intégrité des structures ou des matériaux sans les dégrader, contrairement aux techniques destructives. et parmi ces techniques nous pouvons citer :

- Les techniques basées sur les caractéristiques mécaniques ;
- Les contrôles par rayons X ;
- Les techniques à base d'ultrasons ;
- Les émissions acoustiques ;
- Les courants de corrosion ;
- La radiographie ;
- Les Micro-ondes.

En général, il existe deux catégories de méthodes pour surveiller l'intégrité des structures (SHM -*Structural Health Monitoring*) : les méthodes locales et globales.

**La première catégorie** de méthodes de surveillance de l'intégrité des structures (SHM) se concentre sur l'analyse de zones restreintes du système en utilisant des mesures locales, où les capteurs doivent être proches de la zone d'endommagement.

**La deuxième catégorie** utilise des mesures de modes de basses fréquences réalisées à partir d'un ensemble de capteurs répartis sur la structure pour obtenir des informations globales sur l'état du système, sans nécessairement être situés à proximité de la zone endommagée.

Les deux approches sont complémentaires, et le choix optimal de la méthode dépend de la nature du problème et du positionnement des capteurs. L'inspection régulière de l'état des structures permet de détecter les défauts potentiels et de garantir leur fiabilité pour une utilisation quotidienne.

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

## 1.4. Classification des méthodes de détection et localisation des endommagements

Cette déclaration indique que ces dernières années, il y a eu un intérêt croissant de la part de la communauté scientifique pour le développement de méthodes précises et efficaces permettant d'identifier l'endommagement et de prédire le comportement dynamique des structures. Cela suggère que la capacité à détecter les dommages et à prédire le comportement futur des structures est une préoccupation importante pour les chercheurs travaillant dans ce domaine. Ces méthodes peuvent avoir des applications pratiques dans diverses industries, notamment l'aérospatiale, la construction, la fabrication et d'autres domaines où des structures complexes doivent être conçues et entretenues.

**RYTTER [1]** a proposé quatre niveaux dans l'identification d'endommagement :

- **Niveau 1** : détermination de l'existence de défaut dans la structure ;
- **Niveau 2** : localisation de l'endommagement ;
- **Niveau 3** : quantification de la sévérité de l'endommagement ;
- **Niveau 4** : prédiction de la durée de vie résiduelle.

Dans leur étude, **SAADAT et ses Collègues [2]** ont divisé les méthodes de détection d'endommagement en deux catégories en fonction de leur amplitude et de leur niveau de détection : les méthodes globales et les méthodes locales.

Les méthodes de détection globales sont conçues pour identifier la présence d'un endommagement, tandis que les méthodes locales visent à localiser l'endommagement. Les méthodes globales évaluent l'état de santé général de la structure, alors que les méthodes locales utilisent des instruments non destructifs pour examiner tous les éléments constitutifs de la structure.

**LEE et ses Collègues [3]** classifient les différentes méthodes de détection d'endommagement selon les catégories suivantes :

- Méthodes utilisant la variation des paramètres modaux : changement en fréquence naturelle et déformée des modes propre.

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

- Méthodes basées sur les matrices de raideur ou la variation de flexibilité.
- Méthodes basées sur le changement de la fonction de réponse fréquentielle.

## 1.5. Méthodes de détection d'endommagement

Plusieurs méthodes de détection et de localisation d'endommagement sont disponibles. Dans notre étude, nous avons évalué une méthode représentant chacune des deux catégories de méthodes de détection d'endommagement.

### 1.5.1. Méthodes de détection d'endommagement basées sur la variation des fréquences

Les méthodes de détection basées sur l'identification des variations de fréquence propres peuvent entraîner des variations dans les matrices de raideur ou de masse. De nombreux articles ont publié des résultats numériques ou expérimentaux démontrant l'utilisation réussie de ces méthodes pour la détection d'endommagement, avec plusieurs applications.

De nombreux auteurs ont étudié le changement de fréquences pour construire un indicateur d'endommagement. Cette approche repose sur l'hypothèse que les fréquences ont un indicateur sensible de l'intégrité structurelle. En effet, les changements des propriétés structurelles causent des modifications sur les fréquences propres de la structure.

Pour un type d'endommagement, l'indicateur permet de comparer les fréquences propres mesurées aux fréquences propres prédites à partir du modèle élément fini (E.F) de la structure saine.

Il convient de noter que le changement des paramètres modaux associés à la détection d'endommagement peut varier d'un mode à l'autre, en fonction de la nature, de la localisation et de la gravité de l'endommagement.

D'après **DUGGAN et ses Collègues [4]** comme l'effet de l'endommagement change suivant l'ordre des modes, pour suivre correctement les changements, il est nécessaire d'identifier les déformées propres associées aux fréquences propres.

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

**KIRMSHER [5]** a illustré l'effet des fissures sur la réponse structurelle en modélisant celles-ci par une simple réduction des sections du modèle en utilisant des méthodes énergétiques.

À l'aide de la modélisation par éléments finis, certains auteurs ont établi une corrélation entre l'endommagement et les changements dans les paramètres modaux. Lorsqu'une structure est endommagée, l'endommagement peut être modélisé par une réduction du module de Young. Ces auteurs ont démontré que les changements dans les solutions propres de la structure sont directement liés à la localisation et à la gravité de l'endommagement.

**Plusieurs Auteurs [5], [6], [7], [8], [9], et [10]** ont utilisé des variations dans les fréquences propres pour détecter et localiser l'endommagement. Une étude de la littérature approfondie sur cette catégorie de méthodes a été réalisée par **SALAWU [11]**. L'un des avantages les plus attrayants de l'utilisation des fréquences propres est leur relative facilité d'obtention et d'extraction, permettant une mesure rapide et une précision souvent atteignable.

Il est important de noter que le décalage de fréquences peut ne pas être sensible aux endommages locaux. Les endommages significatifs peuvent entraîner de très faibles changements dans les fréquences naturelles, en particulier dans le cas de grandes structures. Ces changements peuvent être indétectables dans les mesures réalisées après leur traitement. De plus, les variations des fréquences naturelles peuvent ne pas être suffisantes pour localiser les dommages dans les structures.

## 1.5.2. Méthodes de détection d'endommagement basées sur le changement de forme modale

Le changement de rigidité et/ou de masse causé par l'endommagement entraîne également des modifications des formes modales de la structure. Étant donné que les formes modales représentent le déplacement relatif de différents points de la structure, ces modifications peuvent être utilisées pour la détection et la localisation des dommages. Afin d'évaluer ces changements, deux critères principaux peuvent être trouvés dans la littérature : le critère d'assurance modale (**MAC**) (**ALLEMANG et BROWN, 1982**) [12] et le critère d'assurance modale coordonnée. Si  $\varphi^a$  et  $\varphi^b$  sont deux formes modales mesurées à partir de la structure à des instants différents (a et b), ces deux critères sont définis par :

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

$$\mathbf{MAC}(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = \frac{|\sum_{i=1}^{nd} (\phi_{ij}^a \phi_{ik}^b)^2|}{(\sum_{i=1}^{nd} |\phi_{ij}^a|^2)(\sum_{i=1}^{nd} |\phi_{ik}^b|^2)} \quad (1)$$

Et

$$\mathbf{COMAC}(i) = \frac{|\sum_{i=1}^m (\phi_{ij}^a \phi_{ik}^b)^2|}{(\sum_{i=1}^m |\phi_{ij}^a|^2)(\sum_{i=1}^m |\phi_{ik}^b|^2)} \quad (2)$$

Ces critères mesurent la corrélation entre deux formes modales mesurées et les valeurs diagonales de la matrice MAC permettent de déterminer les modes les plus affectés par les dommages. Une valeur de 1 indique une corrélation parfaite entre deux modes. Toutefois, identifier les formes modales est souvent plus complexe que déterminer les fréquences propres, car cela nécessite un maillage fin de la structure à l'aide de plusieurs capteurs. Bien qu'un nombre limité de capteurs puisse suffire, il est souvent nécessaire d'en utiliser davantage pour obtenir une représentation précise des formes modales.

(PANDEY et BISWAS,) [13] ont conclu que les changements des formes des modes dus à des endommagements sont en général très faibles et fournissent rarement une indication claire sur les endommagements. Par rapport à la forme modale, la courbure de forme modale est plus sensible à un changement de raideur locale de la structure. Quand un endommagement se produit dans une structure, la rigidité en flexion aux endroits des endommagements est réduite tandis qu'en même temps la courbure de forme de modes augmente.

(PANDEY et AL,) [14] ont mis en évidence que la différence absolue entre la courbure des formes modale de la structure saine  $\phi_j''$  et de la structure endommagée  $\phi_j''^*$  peut être un bon indicateur d'endommagement :

$$\mathbf{MSC} = \sum_{i=1}^{nm} |\phi_j''^* - \phi_j''| \quad (3)$$

Lorsque la réduction de la rigidité en flexion est importante (ce qui correspond à un niveau d'endommagement plus élevé), la modification de la courbure est également plus importante. Par conséquent, les valeurs des composantes du critère MSC sont plus élevées dans les zones où se trouve l'endommagement et négligeables dans les autres zones. La position de l'endommagement est identifiée par la zone où la valeur de MSC est maximale.

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

La courbure peut être calculée par intégration numérique de la forme modale, par exemple en utilisant un schéma aux différences centrées :

$$\phi_{ij}'' = \frac{\phi_{(i+1)j} - 2\phi_{ij} + \phi_{(i-1)j}}{h^2} \quad (4)$$

Où,  $i$  est le numéro de nœud,  $j$  est le numéro de la forme modale et  $h_i$  est la distance entre les nœuds  $(i-1)$  et  $(i+1)$ .

Les simulations ont démontré que les méthodes de surveillance des courbures des formes modales pour la **SHM** sont très sensibles au bruit de mesure, limitant ainsi leur utilisation en pratique. Cependant, la précision de la détection des dommages peut être améliorée en mesurant directement les contraintes dynamiques.

**HO et EWINS [15]** ont examiné d'autres variantes des caractéristiques basées sur les formes modales, telles que la pente des formes modales et le carré de la courbure des formes modales. Ils ont conclu que la caractéristique basée sur le carré de la courbure des formes modales offre de meilleures performances.

## 1.5.3. Méthodes de détection d'endommagement basées sur l'énergie de déformation modale

Une autre méthode de détection d'endommagement a été proposée par, (**STUBBS et ses Collègues**) [16]. Celle-ci est basée sur le rapport entre l'énergie de déformation modale des éléments avant et après l'endommagement, les formes modales mesurées ont été d'abord différenciées et ensuite interpolées pour obtenir les courbures des formes des modes afin, de calculer l'énergie de déformation modale.

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de détecter et localiser les dommages en utilisant un nombre limité de modes de vibration.

Lorsque cet indicateur est négatif cela indique l'absence de l'endommagement dans la structure. **HUMAR et AL [17]**.

(**FARRAR et DOEBLING, 1999**) [18] ont réussi à utiliser l'énergie de déformation modale pour localiser les endommagements d'un pont. Ils ont constaté que l'utilisation de cette

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

caractéristique est meilleure que la comparaison directe des courbures des formes des modes pour la localisation des endommagements.

(**CORNWELL et ses Collègues, 1999**) [19] ont adopté cette caractéristique de structure 1-D pour une plaque 2-D, en la divisant en plusieurs bandes et en traitant chaque bande individuellement. L'algorithme qu'ils ont employé est capable de localiser des défauts de rigidité de (10 à 25) % sur la plaque en utilisant un nombre très réduit de mode (1 à 12), cependant l'utilisation de cette méthode nécessite de tracer un seuil de validation (dans le cas de cette plaque, seuil=2) de la localisation et aucune information n'est fournie sur la sévérité de celui-ci.

(**TIACHACHT et BOUZZOUNI, 2007**) [20] ont proposé une nouvelle forme d'écriture de l'indicateur d'endommagement proposé par **CORNWELL**, en second lieu ils ont élargi le concept de l'indicateur basé sur l'énergie de déformation vers l'exploitation de l'énergie cinétique des structures avant et après endommagement pour construire une base pour le recalage du modèle éléments finis.

## 1.5.4. Méthodes de détection d'endommagement basées sur des mesures de fonction de réponse fréquentielle

Les fonctions de réponse fréquentielle sont largement employées en dynamique des structures et dans l'identification des systèmes mécaniques. Elles permettent d'extraire les fréquences de résonance, d'estimer les vecteurs propres et les coefficients d'amortissement, ainsi que de vérifier les matrices de masse, de raideur et d'amortissement.

**WANG et ses Collègues** ont mis au point un algorithme visant à localiser et à évaluer quantitativement les dommages en se basant directement sur les données de réponse fréquentielle (FRF) mesurées. L'emplacement et la gravité des dommages sont déterminés à partir d'un vecteur de différence qui est calculé en comparant les FRF mesurées avec les FRF prédites.

D'autres auteurs (**Références [22], [23], [24]**) ont utilisé les mesures de réponse fréquentielle pour la détection et la localisation de dommages sur des structures mécaniques.

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

## 1.5.4. Méthodes de détection d'endommagement basées sur l'amortissement

La détection de dommages basée uniquement sur le changement des paramètres d'amortissement n'a pas été explorée de manière approfondie, en comparaison avec les méthodes basées sur les fréquences naturelles et les vecteurs propres. Cette situation peut s'expliquer par la présence de différents types d'amortissement et par l'incertitude relativement élevée associée à son estimation.

**A.AMZIANI et BOUAZZOUNI** ont proposé dans leur étude l'utilisation d'une méthode énergétique pour la détection et la localisation des dommages sur des structures. Le principe de cette méthode repose sur l'influence des caractéristiques mécaniques des structures sur le flux d'énergie vibratoire. Les simulations réalisées se basent sur l'impact des dommages sur l'amortissement, car ces derniers ont tendance à augmenter considérablement le taux d'amortissement des structures aux environs de leur emplacement.

**WILLIAMS et SALAWU** ont mené une revue des études en génie civil et ont conclu que l'amortissement seul ne peut pas fournir une information pertinente pour détecter les dommages (localisation et quantification). Cependant, un changement dans l'amortissement peut détecter les dommages là où les méthodes conventionnelles reposent sur les changements de fréquences et de modes propres ne sont pas sensibles.

**MODENA et ses Collaborateur** sont démontré que la présence de microfissures peut causer des changements négligeables dans les fréquences naturelles, mais entraîne une augmentation significative de l'amortissement, ce qui peut être utilisé pour localiser la fissure.

Les techniques de détection basées sur la mesure de l'amortissement ne sont capables de nous informer que de l'existence du dommage.

## 1.5.5. Méthodes de détection d'endommagement basées sur la variation des matrices de flexibilité modale

La présence de l'endommagement ou d'une fissure dans une structure provoque une variation locale de leur rigidité, qui se reporte sur le comportement dynamique global de la structure. La réduction dans la rigidité réduit les fréquences et affecte les déformées modales, c'est-à-dire augmenter la flexibilité (**ULM et AL [28]**).

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

**Li et ses Collaborateurs [29]** ont proposé une nouvelle approche pour la localisation et la quantification d'endommagements, basée sur la modification de la matrice de flexibilité modale généralisée. Cette matrice permet de réduire l'effet de troncature des modes d'ordre supérieur.

**KAZEMI et ses Collègues [30]** ont employé la variation de la flexibilité modale pour détecter des défauts sur des plaques minces de structures. Ils ont formulé un indicateur d'endommagement à partir de la matrice de flexibilité modale et des équations différentielles décrivant la variation des efforts.

Une méthode proposée par **EDWIN R et AL [31]** est basée sur la flexibilité quasi statique. Cette méthode combine la matrice de flexibilité modale avec des forces virtuelles qui entraînent des contraintes non nulles sur des parties de la structure, où des changements de raideur potentiels peuvent être détectés.

Selon eux, il a été démontré que certaines combinaisons de déformations avant et après un dommage causé à un changement de raideur, qui se traduit par une variation de la flexibilité locale.

**(YAN & GOLINVAL, 2005)** ont proposé une méthode de détection et de localisation d'endommagements basée sur la matrice de flexibilité et de rigidité. Pour détecter l'endommagement, ils ont utilisé la matrice de flexibilité qui est calculée à partir des modes propres identifiés et de la masse normalisée. Pour la matrice de rigidité, ils ont utilisé le pseudo-inverse de la matrice de flexibilité. Les valeurs diagonales de la matrice de rigidité indiquent l'emplacement de l'endommagement.

## 1.5.6. Méthode recalage des matrices de masse et de raideur

La méthode de recalage repose sur l'utilisation de l'erreur de comportement pour évaluer la qualité des prédictions. Si l'erreur globale dépasse l'erreur requise par l'utilisateur, un processus itératif de recalage paramétrique est expliqué en deux étapes.

- **L'étape de localisation** permet d'identifier les zones présentant des défauts significatifs dans la structure, responsables de l'écart entre les prédictions initiales et le

# Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements

---

comportement observé. Cette étape repose sur l'utilisation des erreurs locales élémentaires.

- **L'étape de correction** consiste en un processus d'optimisation paramétrique, visant à minimiser la fonction objective en ajustant uniquement les paramètres de conception dans les zones précédemment programmées. Après chaque itération, l'erreur globale est recalculée et comparée à l'erreur tolérée définie par l'utilisateur. Si elle est supérieure, le processus itératif continue jusqu'à ce que l'erreur tolérée soit atteinte.

**FRITZEN et ses Collègues [33]** ont examiné la possibilité de modéliser les erreurs et leur impact sur l'exactitude de la localisation des défauts. Ils ont proposé une approche pour obtenir des résultats plus fiables, avec une attention particulière accordée à la sélection des paramètres pour résoudre les équations de sensibilité inverse mal posées.

**ZANG et IMREGUM [34]** ont adopté la technique de recalage de modèle basée sur la sensibilité pour la détection et la localisation des défauts d'une structure.

**BOUZZOUNI et ses Collaborateurs[35]** ont proposé une méthode de recalage de modèle basée sur la technique des conditions aux limites artificielles. Cette méthode consiste à fournir une base de données plus riche pour le recalage du modèle en utilisant des fonctions de réponse fréquentielle de structures soumises à différentes conditions aux limites artificielles. Ces conditions aux limites sont obtenues sans modifier physiquement la structure, d'où le terme "artificielles". Cette méthode permet d'obtenir éventuellement une meilleure connaissance de la structure.

## 2. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue plusieurs méthodes de contrôle non destructif qui permettent de détecter les dommages sur les structures sans les endommager davantage. Nous avons mis en évidence les avantages et les limites de chaque méthode afin de déterminer leur pertinence pour une donnée d'application. Ensuite, nous avons approfondi l'étude des méthodes de détection d'endommagement basée sur des données vibratoires en les classant en différentes catégories. Nous avons examiné les avantages et les inconvénients de chaque méthode en fonction de leur capacité à détecter et à localiser les dommages. Dans le prochain chapitre, nous allons développer un modèle d'éléments finis qui nous permettra de

# **Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements**

---

calculer les paramètres modaux des structures. Ce modèle sera utilisé pour appliquer les différentes méthodes de détection d'endommagement étudiées précédemment. L'objectif est de vérifier l'efficacité de ces méthodes sur des structures réelles et de déterminer laquelle est la plus appropriée pour chaque situation spécifique. Nous pourrions ainsi proposer une méthode de détection d'endommagement optimale pour les structures échouées.

***Chapitre II :***  
***Méthodes des***  
***éléments finis***

## 1. Généralités

Les éléments finis sont une méthode numérique utilisée pour approximer des solutions de problèmes mathématiques complexes dans différents domaines tels que la mécanique des structures, l'aérodynamique, la thermodynamique, l'électromagnétisme, etc.

La méthode consiste à diviser le domaine d'étude en éléments finis plus petits et plus simples, tels que des triangles, des quadrilatères, des tétraèdres, des hexaèdres, etc., afin de représenter la géométrie et les propriétés physiques du problème.

Les équations gouvernant le comportement du système sont ensuite discrétisées en utilisant des fonctions d'interpolation à base de polynômes, ce qui permet de représenter la solution globale en termes de valeurs nodales inconnues associées à chaque élément fini.

Enfin, ces équations sont résolues numériquement pour obtenir une solution approchée du problème original. Les éléments finis sont largement utilisés dans l'industrie et la recherche en ingénierie pour la conception de nouveaux produits, l'analyse de la performance des produits existants, la simulation de phénomènes physiques, etc.

## 2. Démarche éléments finis

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes :

- **Définition du problème** : La première étape consiste à définir le problème physique à résoudre et à déterminer les conditions aux limites, les propriétés des matériaux, les charges appliquées, etc.
- **Discrétisation du domaine** : Le domaine physique est divisé en éléments finis plus petits et plus simples. Les éléments peuvent être de différents types tels que des triangles, des quadrilatères, des tétraèdres, des hexaèdres, etc.
- **Définition des équations** : Les équations qui gouvernent le comportement du système sont définies en termes de variables inconnues nodales associées à chaque élément fini.
- **Choix des fonctions d'interpolation** : Des fonctions d'interpolation à base de polynômes sont choisies pour approximer les solutions sur chaque élément fini.

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

---

- **Assemblage de la matrice globale** : Les équations des éléments finis sont assemblées pour former une matrice globale qui représente l'ensemble du système.
- **Imposition des conditions aux limites** : Les conditions aux limites sont imposées en modifiant la matrice globale et le vecteur de charge.
- **Résolution numérique** : La solution numérique est obtenue en résolvant la matrice globale pour les valeurs nodales inconnues.
- **Validation et analyse des résultats** : Les résultats sont validés en comparant les résultats numériques avec des résultats expérimentaux ou analytiques connus et en effectuant une analyse de sensibilité pour évaluer l'impact des paramètres sur les résultats.
- **Optimisation** : Si nécessaire, le modèle est optimisé en modifiant les paramètres pour obtenir une meilleure performance.
- **Interprétation et rapport** : Les résultats sont interprétés et un rapport est rédigé pour communiquer les conclusions et les recommandations aux parties prenantes.

### 2.1. Discrétisation géométrique

La discrétisation géométrique est la première étape pour transformer un problème physique continu en un problème discrétisé, qui peut être résolu numériquement à l'aide de la MEF. Elle consiste à diviser le domaine géométrique en éléments finis plus petits et plus simples, qui sont reliés par des fonctions d'interpolation pour approximer les solutions à l'intérieur de chaque élément fini.

$$D_m = \sum_{e=1}^{ne} D_e \text{ tel que } \lim_{e \rightarrow 0} (UD_e) = D_m \quad (1)$$

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

---

### 2.2. Définition de l'approximation nodale

L'approximation nodale est une technique utilisée dans la méthode des éléments finis (MEF) pour estimer les valeurs des variables inconnues du problème en des points spécifiques, appelés nœuds. Les nœuds sont généralement situés aux sommets des éléments finis qui composent le domaine physique.

L'approximation nodale utilise des fonctions d'interpolation pour estimer les valeurs inconnues à l'intérieur de chaque élément fini, en utilisant les valeurs connues aux nœuds. Ces fonctions d'interpolation sont généralement des polynômes de degré bas, tels que les fonctions linéaires ou quadratiques.

L'approximation nodale permet de transformer un problème continu en un problème discrétisé en remplaçant les fonctions continues par des fonctions discrètes, qui sont définies uniquement aux nœuds. Les valeurs inconnues sont calculées aux nœuds et sont ensuite interpolées sur l'ensemble de l'élément fini en utilisant les fonctions d'interpolation.

L'approximation nodale est une approximation locale, qui ne tient compte que des informations disponibles aux nœuds. Plus le nombre de nœuds est grand, plus l'approximation est précise. L'approximation nodale est donc un compromis entre la précision et la complexité du modèle.

#### 2.2.1. Etablissement de la relation entre déformations et déplacements

La relation entre les déformations et les déplacements est un concept important en mécanique des matériaux. En effet, lorsqu'un matériau subit une contrainte, il se déforme. Cette déformation peut être mesurée en termes de changement de longueur, d'angle ou de volume du matériau.

Les déplacements, quant à eux, sont mesurés en termes de la position de points spécifiques dans le matériau. Les déplacements sont généralement exprimés en termes de déplacement linéaire ou angulaire.

La relation entre les déformations et les déplacements peut être élaborée en utilisant des équations mathématiques. Par exemple, la déformation longitudinale d'un matériau peut être définie comme la variation relative de la longueur du matériau par unité de longueur.

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

---

Cette déformation peut être exprimée en termes de déplacement longitudinal en utilisant l'équation suivante :

$$\varepsilon = \Delta L / L = u / L \quad (2)$$

Où  $\varepsilon$  représente la déformation longitudinale,  $\Delta L$  représente la variation de la longueur,  $L$  représente la longueur initiale du matériau, et  $u$  représente le déplacement longitudinal.

De manière générale, la relation entre les déformations et les déplacements dépend du type appliqué de contrainte au matériau et des propriétés élastiques du matériau lui-même. En utilisant des techniques mathématiques appropriées, les ingénieurs peuvent calculer la relation entre les déformations et les déplacements pour différents types de matériaux et de contraintes, ce qui leur permet de concevoir des structures résistantes et durables.

### 2.2.2. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations

La relation entre les contraintes et les déformations est décrite par la loi de Hooke, qui stipule que la déformation d'un matériau est directement proportionnelle à la contrainte appliquée, tant que le matériau reste dans sa plage élastique. Mathématiquement, cette relation peut être exprimée par la formule :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3)$$

Où  $\sigma$  représente la contrainte,  $\varepsilon$  représente la déformation appliquée subie par le matériau, et  $E$  est le module d'élasticité du matériau (également appelé module de Young).

Cette formule indique que plus la contrainte appliquée n'est grande, plus la déformation du matériau ne sera importante. Elle montre également que le module d'élasticité est une mesure de la rigidité du matériau : plus il est élevé, moins le matériau sera déformé pour une même contrainte appliquée.

Il convient de noter que cette relation ne s'applique que dans la plage élastique du matériau. Au-delà de cette plage, le matériau commencera à se déformer de manière permanente (c'est-à-dire à subir une déformation plastique), et la relation entre contraintes et déformations ne sera plus linéaire.

### 2.3. Calcul des matrices élémentaires

Cette étape constitue la partie la plus importante du problème. Les déplacements  $U^e$  aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur  $F^e$ . c'est-à-dire que :

$$K^e U^e = F^e \quad (4)$$

$K^e$  Est la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans le repère local. Elle est

Déduite de l'énergie de déformation de l'élément (ROCKY, 1979)[36] et exprimée par :

$$K^e = \int_0^v B^T D B dv \quad (5)$$

Il faut aussi calculer la matrice de masse  $M^e$  de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément (ROCKY, 1979). Dans le repère local de l'élément, cette matrice est donnée par l'expression :

$$M^e = \int_0^v \rho N^T N dv \quad (6)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du matériau constituant l'élément.

Finalement, on exprime les matrices  $K^e$ ,  $M^e$ ,  $U^e$  et  $F^e$  dans le repère global défini pour toute la structure.

### 2.4. Assemblage des matrices élémentaires

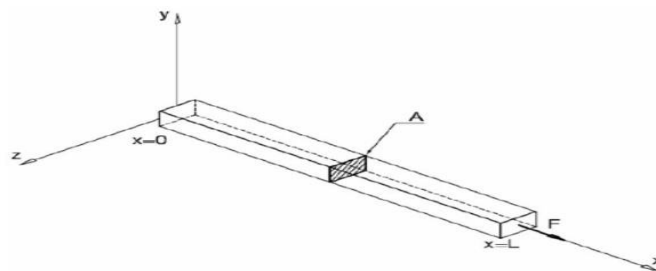
La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices K, M et F de la structure complète à partir des matrices élémentaires  $K^e$ ,  $M^e$ ,  $U^e$  et  $F^e$ , exprimées dans le repère global, des différents éléments en sommant les énergies de déformation et cinétique de chaque élément.

Pour une structure formée de poutres, on ne peut pas sommer les matrices directement. Pour chaque élément, il faut localiser la position des variables nodales dans le vecteur des déplacements de l'ensemble des nœuds de la structure.

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

### 2.5. Élément fini barre

Géométriquement parlant une barre est définie par ses deux extrémités qui sont les nœuds dont le nombre est deux, comportant chaque un, trois degrés de liberté (d.d.l.) et qui représentent les composantes de son déplacement dans l'espace, et dans le repère local la barre est orientée dans la direction  $x$ . Les dimensions dans le plan ( $y - z$ ) normal à  $x$  sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale. Un élément fini barre schématise un composant d'une structure qui travaille uniquement en traction ou compression.



*Figure 1 : Géométrie d'un élément barre.*

Les hypothèses principales pour un élément barre qui travaille qu'en traction compression sont :

- Petit déplacement :

$$U_{(M,T)} = U_{(M,T)} X \quad (7)$$

- Petite déformation :

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (8)$$

Loi de Hooke dans un milieu isotrope homogène et élastique :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (9)$$

$\sigma$  : Est la contrainte dans la barre

$E$  : Est le module de Young de matériau de la barre

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

En intégrant les contraintes sur la section A, on obtient la loi de comportement intégrée des barres :

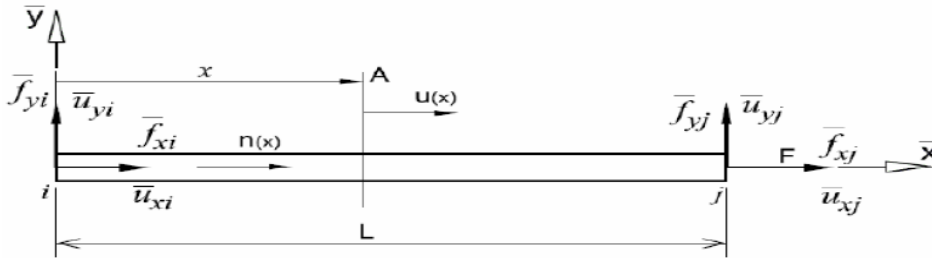
$$n(x) = EA\varepsilon \quad (10)$$

Où  $n(x)$  est l'effort normal dans la barre dû à la force nodale  $F$ .

### 2.5.1. Élément barre dans le plan

Considérons un élément barre dans le plan défini par deux nœuds  $i$  et  $j$ , de longueur  $L$  et de section  $A$ .

*Figure 2 : Modélisation d'un élément barre.*



Dans le repère local  $(i, x, y)$ , on note par  $U_{xi}$  et  $U_{xj}$  les déplacements aux nœuds  $i$  et  $j$ , et par  $f_{xi}$  et  $f_{xj}$  les forces aux nœuds  $i$  et  $j$ .

Le vecteur force relatif à l'élément  $e$  est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi}, \bar{f}_{yi}, \bar{f}_{xj}, \bar{f}_{yj}]^T \quad (11)$$

Le vecteur déplacement relatif à l'élément  $e$  est donné par :

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{xj}, \bar{u}_{yj}]^T \quad (12)$$

Dans le cas qui nous occupe, on travaille avec un élément barre qui subit des sollicitations de traction compression, ce qui veut dire que  $\bar{f}_{xj}, \bar{f}_{yj}, \bar{u}_{xj}$  et  $\bar{u}_{yj}$  sont non nuls.

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

---

### 2.5.2. Fonction d'interpolation

Pour un problème statique, lorsque l'élément est chargé au niveau de ses nœuds, l'effort normal est uniforme. Compte tenu des relations (5) et (7) la solution  $u(x)$  sera linéaire. Pour chercher cette solution, nous utilisons une approximation polynomiale linéaire de la forme :

$$U_{(x)} = N_1 \bar{u}_{xi} + N_2 \bar{u}_{xj} \quad (13)$$

Où  $N_1$  et  $N_2$  sont les coordonner naturelles

Nous identifions aux nœuds  $i$  ( $x=0$ ) et  $j$  ( $x=L$ ) la valeur de l'approximation des déplacements axiaux. Nous en déduisons :

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{ Et } N_2 = \left(\frac{x}{L}\right) \quad (14)$$

Sous forme matriciel

$$U_{(x)} = N^T \bar{U}^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} \quad (15)$$

La matrice d'interpolation  $N$  relie les déplacements d'un point intérieur de la barre aux déplacements nodaux

$$N^T = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (16)$$

### 2.5.3. Relation entre déformation et déplacement

La déformation est déduite des équations (8) et (13)

$$\{\epsilon\} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{L} = [-1 \ 1] \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} \quad (17)$$

La matrice  $B$  relie les déformations de la barre à ces déplacements nodaux :

$$B = \frac{1}{L} [-1 \ 1] \quad (18)$$

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

---

### 2.5.4. Matrice de rigidité de l'élément barre

La matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère local est donné par l'équation (5), après intégration on aura la matrice sous forme :

$$\bar{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

### 2.5.5. Matrice de masse de l'élément barre

La matrice de masse de l'élément barre dans le repère local est donné par l'équation (6), après intégration on aura la matrice de masse sous forme :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

### 2.5.6. Transformation dans le repère global

Les barres composant un treillis ou un portique plan sont positionnés arbitrairement dans l'espace et font des angles différents avec le repère global de la structure.

On note  $\theta$  l'angle entre l'axe  $\vec{X}$ , de repère global et l'axe  $\vec{X}$  de repère local de la barre.

Soit  $u_{xi}, y_i, u_{xj}, y_j$  les déplacements aux nœuds  $i$  et  $j$  exprimés dans le repère global, La relation entre les déplacements exprimés dans le repère local et ceux exprimés dans le repère global est donnée par

$$\bar{u}_{xi} = u_{xi}C + u_{yi}S \quad (21)$$

$$\bar{u}_{yi} = u_{xj}C + u_{yj}S$$

Où :  $C$  et  $S$  sont les cosinus directeurs :  $C = \cos \theta$  et  $S = \sin \theta$

$$C = \frac{1}{L}(x_j - x_i) \quad (22)$$

$$S = \frac{1}{L}(y_j - y_i)$$

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

$L$  est la distance entre les nœuds  $i$  et  $j$ , (longueur de l'élément) :

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (23)$$

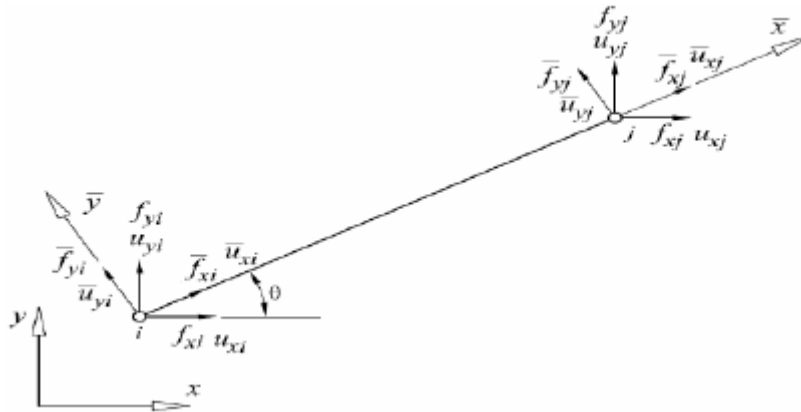
Sous forme Matriciel :

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S0 & 0 \\ 0 & 0C & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ou  $T$  est la matrice de transformation de repère local au repère globale.

$$T = \begin{bmatrix} C & S0 & 0 \\ 0 & 0C & S \end{bmatrix} \quad (25)$$

*Figure 3 : Élément dans le repère global.*



La matrice de rigidité exprimée dans le repère global sera déduite de la matrice de rigidité exprimée dans le repère local par la relation :

$$K^e = T^T \bar{K}^e T \quad (26)$$

De même, pour la matrice de masse de l'élément barre dans le plan exprimé dans le repère global est :

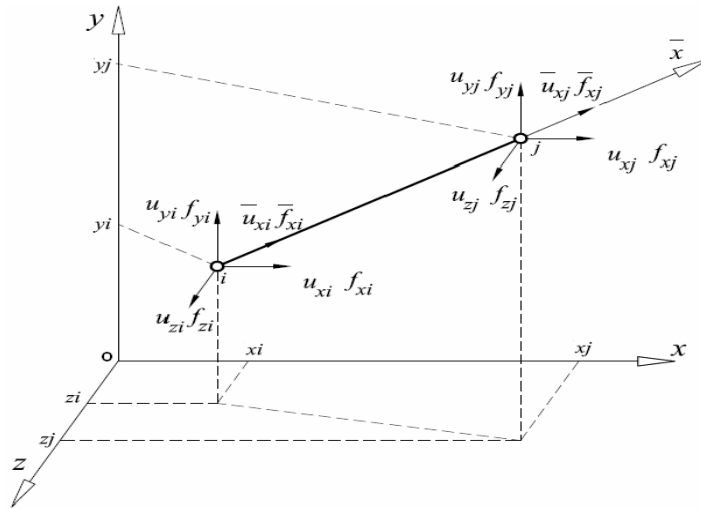
$$M^e = T^T \bar{M}^e T \quad (27)$$

### 2.6. Élément barre tridimensionnelle

L'élément barre tridimensionnelle est représenté dans la (Fig.4) Le vecteur force associé à cet élément, qui est relatif à l'élément e, est spécifié ci-dessous :

$$\bar{\mathbf{F}}^e = [\bar{f}_{xi} \bar{f}_{yi} \bar{f}_{zi} \bar{f}_{xj} \bar{f}_{yj} \bar{f}_{zj}]^T \quad (28)$$

Avec quatre composantes nulles.



*Figure 4 : Élément barre spatiale.*

La spécification du vecteur déplacement est la suivante :

$$\bar{\mathbf{U}}^e = [\bar{u}_{xi} \bar{u}_{yi} \bar{u}_{zi} \bar{u}_{xj} \bar{u}_{yj} \bar{u}_{zj}]^T \quad (29)$$

Avec quatre composantes nulles.

Les relations entre les grandeurs mesurées dans le repère local et celles mesurées dans le repère global pour un élément barre tridimensionnelle sont données de la même manière que pour un élément barre dans le plan :

$$\bar{u}_{xi} = \mathbf{C}u_{xi} + \mathbf{S}u_{yi} + \mathbf{Z}u_{zi} \quad (30)$$

$$\bar{u}_{xj} = \mathbf{C}u_{xj} + \mathbf{S}u_{yj} + \mathbf{Z}u_{zj}$$

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

---

Avec :

$$C = \frac{1}{L}(x_j - x_i) ; S = \frac{1}{L}(y_j - y_i) ; Z = \frac{1}{L}(z_j - z_i) \quad (31)$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (32)$$

On aura alors la matrice de transformation suivante :

$$T = \begin{bmatrix} C & S & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & Z \end{bmatrix} \quad (33)$$

La spécification de la matrice de rigidité d'une barre tridimensionnelle dans le repère global est la suivante :

$$K^e = T^T \bar{K}^e T \quad (34)$$

$K^e$  Est donnée par l'Eq.(19).

La matrice de masse de l'élément barre tridimensionnelle dans le repère global est spécifiée de la manière suivante :

$$M^e = T^T \bar{M}^e T \quad (35)$$

$M^e$  Est donnée par l'Eq. (20).

### 2.7. Élément fini poutre

Un élément fini poutre est une représentation unidimensionnelle utilisée dans l'analyse par éléments finis pour modéliser le comportement des poutres soumises à des charges. La géométrie et les propriétés de la poutre sont simplifiées en utilisant une section transversale constante, et les charges appliquées sont modélisées en utilisant les principes de la mécanique des solides.

Les résultats pour chaque élément fini poutre individuel sont combinés pour fournir une solution globale pour l'ensemble de la poutre. En utilisant des éléments finis poutres pour modéliser les poutres individuelles, il est possible de construire des modèles d'éléments finis

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

plus complexes pour des structures plus grandes en utilisant des éléments finis de type coque ou solide pour modéliser les autres composants de la structure.

### 2.7.1. Élément poutre dans le plan

La (Fig.5) nous illustre un élément poutre dans un plan à 2 dimension orientée suivant son axe locale  $x$ .

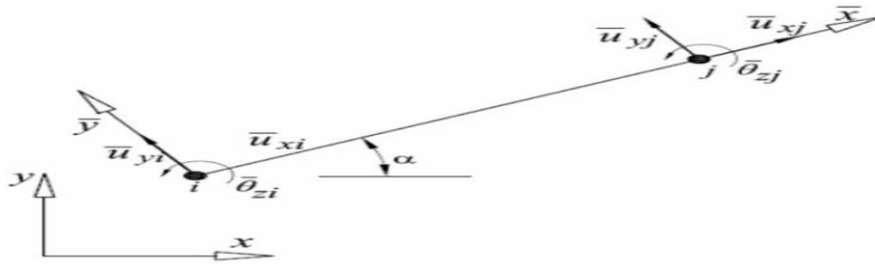


Figure 5 : Élément poutre dans le plan avec 6 degrés de liberté.

Cela correspond au vecteur de déplacement suivant :

Les coefficients de la matrice de rigidité de cet élément qui sont dus aux déplacements axiaux sont ceux définis pour un élément barre et n'influence pas le comportement de l'élément sous l'effet de  $\bar{u}_{xi}$ ,  $\bar{u}_{yi}$ ,  $\bar{\theta}_{zi}$  et  $\bar{\theta}_{zj}$ . Dans la suite nous cherchons à déterminer les coefficients de la matrice de rigidité relatifs aux déplacements  $\bar{u}_{xi}$ ,  $\bar{u}_{yi}$ ,  $\bar{\theta}_{zi}$  et  $\bar{\theta}_{zj}$ .

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi} \bar{u}_{yi} \bar{\theta}_{zi} \bar{u}_{xj} \bar{u}_{yj} \bar{\theta}_{zj}]^T \quad (36)$$

### 2.7.2. Fonction d'interpolation

On choisit une fonction d'interpolation qui définit d'une façon approximative l'état de déplacement de tous les points de l'élément. Puisque l'élément possède quatre degrés de liberté ( $\bar{u}_{xi}$ ,  $\bar{u}_{yi}$ ,  $\bar{\theta}_{zi}$  et  $\bar{\theta}_{zj}$ ) quatre coefficients inconnus doivent apparaître dans le polynôme représentant le modèle du déplacement (Krishnamoorthy, 1987) :

$$\bar{u}^e = a_1 N_1^3 + a_2 N_2^3 + a_3 N_1^2 N_2 + a_4 N_2^2 N_1 \quad (37)$$

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

---

Où  $N_1$  et  $N_2$  sont les coordonnées naturelles données par l'expression  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sont des coefficients à déterminer.

Sous forme matricielles l'Eq s'écrit

$$\bar{u}_y^e = N^T \bar{U}^e \quad (38)$$

La rotation  $\theta$  est liée au déplacement  $\bar{u}_y$  par la relation :

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} = \frac{1}{L} = [3a_2 N_2^2 + a_3 N_1^2 + 2a_4 N_1 N_2 - 3a_1 N_1^2 - 2a_3 N_1 N_3 - N_2^2 a_4] \quad (39)$$

$$N = [N_1^2(3 - 2N_1)N_2^2 N_2 L \quad N_2^2(3 - 2N_2) - N_1 N_2^2 L]^T \quad (40)$$

### 2.7.3. Relation entre déformation et déplacement

La seule déformation à prendre en considération est la courbure autour de l'axe Y. Le vecteur de déformation est donné par :

$$\varepsilon(x, y) = -y \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (41)$$

La contrainte  $\sigma$  et le moment  $m_z$  dus à la flexion dans le plant ( $\bar{x} - \bar{y}$ ) sont (Kerguignas, 1977)[37] :

$$\sigma = -Ey \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (42)$$

$$m_z = -EI_z \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (43)$$

Si E est le module de Young du matériau et  $I_z$  est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $\bar{z}$

Compte tenu des Eqs 38 et 40, on a :

$$m_z = [(6 - 12N_1) L(2N_2 - 4N_1)(6 - 12N_2) L(4N_2 - 2N_1)] \bar{U}^e \quad (44)$$

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

Les contraintes  $\sigma$  et les déformations  $\varepsilon$  correspondant au moment interne dans la poutre sont reliées par la relation :

$$\sigma = D\{\varepsilon\} = DB\bar{U}^e \quad (45)$$

Pour ce cas particulier, la matrice D contient un seul terme correspondant à la rigidité de flexion. La matrice reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux est donc :

$$B = \left[ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} - \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} - \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} - \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right] \quad (46)$$

### 2.7.4. Matrice de rigidité d'un élément poutre dans le plan

Une matrice de rigidité de l'élément poutre à 4 degrés de liberté dans le repère locale est calculée à partir de l'Esq. 5 soit :

$$K^e = \frac{EL}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

En prenant en considération le coefficient relatif au déplacement selon l'axe x, la matrice de rigidité de l'élément poutre dans le plan (avec 6 degrés de liberté) est exprimée dans le repère local de l'élément par :

$$K^e = \frac{EL}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

### 2.7.5. Matrice de masse d'un élément poutre dans un plan

En se basant sur l'équation (6) et en effectuant une intégration, la matrice de masse pour un élément poutre à 4 degrés de liberté, exprimée dans le repère local, peut être définie comme suit :

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

---

$$M^e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

En ce qui concerne un élément poutre avec 6 degrés de liberté, la matrice de masse est obtenue par la combinaison des deux matrices fournies par les équations (20) et (49). Ainsi, on a :

$$M^e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & 13 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

### 2.7.6. Transformation dans le repère global

Le processus de détermination de la matrice de transformation dans le repère global est identique à celui utilisé pour un élément barre tridimensionnelle, et peut être exprimé comme suit :

$$T = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Où  $c_x$  etc  $c_y$  sont les cosinus directeurs définis par l'Eq. (31).

### 2.8. Elément poutre tridimensionnelle

#### 2.8.1. La matrice de rigidité

Prenons l'exemple de l'élément poutre tridimensionnelle représenté sur la (Fig.6). L'axe x de la poutre est aligné avec l'axe neutre de cette dernière, et est orienté positivement de i vers j. Les axes y et z sont sélectionnés de manière à ce que les plans (x-y) et (x-z) soient les plans principaux de flexion.

Les déplacements au nœud i sont notés  $\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{zi}$ , tandis que les rotations autour de x, y et z au même nœud sont respectivement notées  $\bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}$ . Les forces et moments au nœud i sont représentés par  $\bar{f}_{xi}, \bar{f}_{yi}, \bar{f}_{zi}, \bar{m}_{xi}, \bar{m}_{yi}, \bar{m}_{zi}$ .

Le vecteur force est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi}, \bar{f}_{yi}, \bar{f}_{zi}, \bar{m}_{xi}, \bar{m}_{yi}, \bar{m}_{zi}, \bar{f}_{xj}, \bar{f}_{yj}, \bar{f}_{zj}, \bar{m}_{xj}, \bar{m}_{yj}, \bar{m}_{zj}]^T \quad (52)$$

Le vecteur déplacement est donné par :

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{zi}, \bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}, \bar{u}_{xj}, \bar{u}_{yj}, \bar{u}_{zj}, \bar{\theta}_{xj}, \bar{\theta}_{yj}, \bar{\theta}_{zj}]^T \quad (53)$$

L'élément poutre tridimensionnelle est formé par la combinaison de quatre éléments différents, dont les matrices de rigidité ont déjà été déterminées : l'élément barre, l'élément poutre en torsion, l'élément poutre fléchie autour de z dans le plan (x-y), et l'élément poutre fléchie autour de y dans le plan (x-z). Ainsi, la matrice de rigidité d'un élément poutre tridimensionnelle peut être exprimée comme suit :

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

$$\bar{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (54)$$

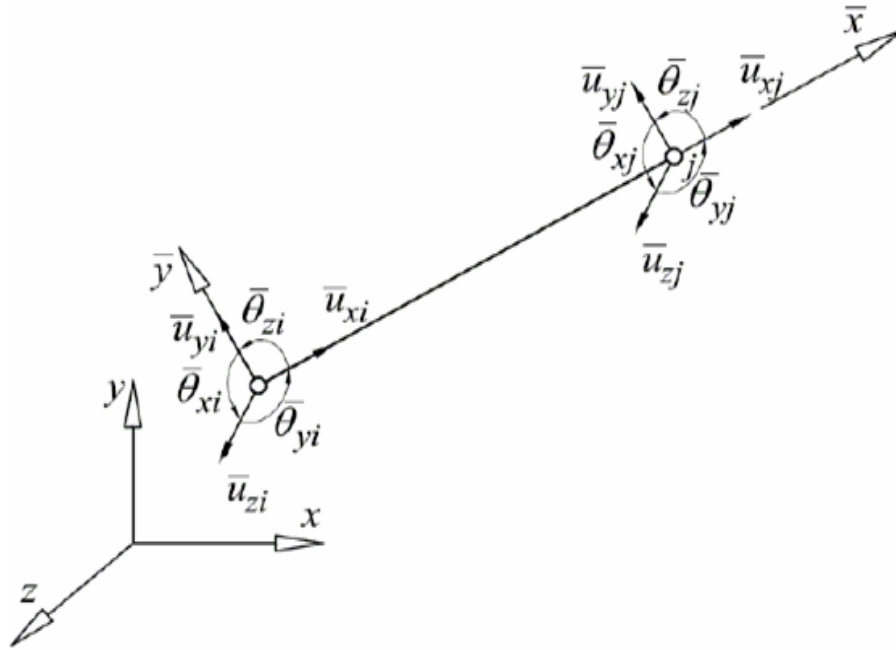


Figure 6 : Elément poutre tridimensionnelle.

## Chapitre II : Méthodes des éléments finis

### 2.8.2. La matrice de masse

La matrice de masse d'un élément poutre tridimensionnelle est calculée en combinant les matrices de masse des éléments poutres en traction, torsion et flexion dans les plans (x-y) et (x-z). Ainsi, la matrice de masse peut être exprimée comme suit :

$$\bar{M}^e = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{140I_t}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70I_t}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{70I_t}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140I_t}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

### 2.8.3. Transformation dans le repère global

Contrairement à l'élément barre tridimensionnelle pour lequel la position des deux nœuds d'extrémités suffit pour définir son orientation dans l'espace, un élément poutre nécessite la présence d'un troisième nœud k pour définir les deux plans principaux de flexion (x-y) et (x-z) (Fig.7). En effet, pour un élément poutre, la ligne reliant les nœuds i et j définit l'axe local x de la poutre.

Afin d'obtenir la matrice de transformation, le repère global est transformé pour coïncider avec le repère local de l'élément poutre. Cette transformation est réalisée par une série de rotations d'angles  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$  respectivement autour des axes y, z et x (Fig.8).

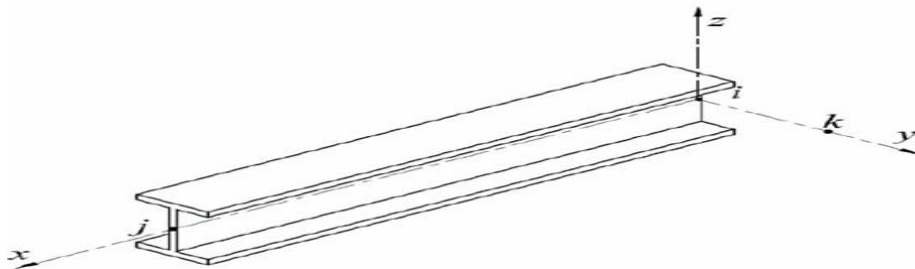


Figure 7 : Axes locaux d'un élément poutre.

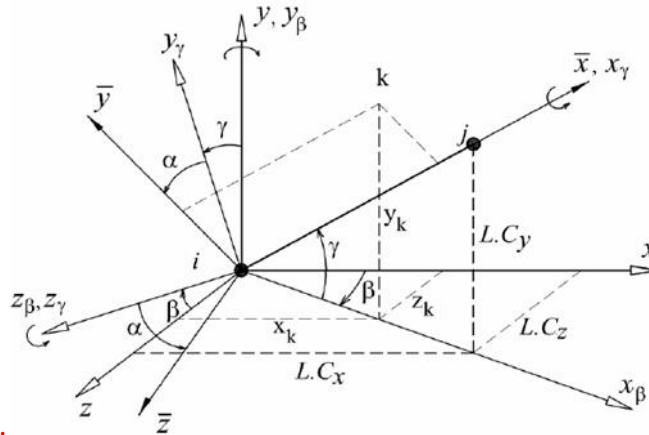
## Chapitre II : Méthode des éléments finis.

La première rotation autour de l'axe y avec un angle  $\beta$  permet de positionner l'axe x en un point  $x_\beta$ , qui correspond à la projection de l'axe x sur le plan (x-z). L'axe z sera quant à lui positionné en un point  $z_\beta$ . La matrice de transformation correspondant à cette rotation peut être exprimée comme suit :

$$T_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\text{Avec } \cos \beta = \frac{c}{\sqrt{c^2+z^2}} \quad \text{ET} \quad \sin \beta = \frac{z}{\sqrt{c^2+z^2}} \quad (57)$$

Les cosinus directeurs,  $c_x$ ,  $c_y$  et  $c_z$ , sont définis selon l'Equation (31)



**Figure 8 :** Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle.

Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle.

La seconde étape de transformation implique la rotation du nouveau système d'axes  $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$  autour de  $z_\beta$ , selon un angle donné, pour aligner l'axe  $x_\beta$  avec l'axe x et les faire coïncider.

Après cette rotation, nous obtenons un nouveau système d'axes de transformation noté  $(X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma)$ . Une matrice est associée à cette transformation.

$$T_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

## Chapitre II : Méthode des éléments finis.

$$\text{Avec } \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{C^2 + Z^2}} \text{ ET } \sin \gamma = \frac{S}{\sqrt{C^2 + Z^2}} \quad (59)$$

Enfin, le système d'axes  $(X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma)$  est tourné d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $X_\gamma$  pour aligner les axes  $Y_\gamma$  et  $Z_\gamma$  avec les axes  $y$  et  $z$ , respectivement. La matrice de transformation correspondante est également déterminée :

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (60)$$

Dans la (Fig.9), le nœud  $k$  est sélectionné sur l'axe principal  $y$  de la section. Les coordonnées de ce nœud par rapport à  $i$ , exprimées dans le repère global, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_{xi} &= x_k - x_i \\ y_{xi} &= y_k - y_i \\ z_{xi} &= z_k - z_i \end{aligned} \quad (61)$$

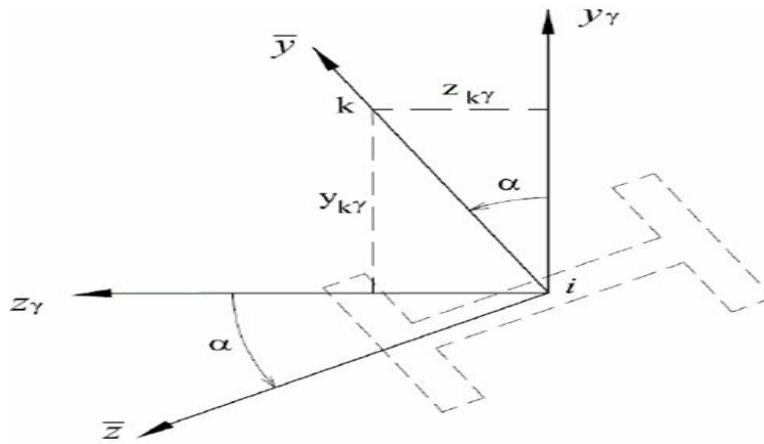


Figure 9 : Axes principaux d'un élément poutre.

Les coordonnées du nœud  $k$  dans le repère  $(i, X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma)$  sont les suivantes :

$$\begin{bmatrix} x_{ky} \\ y_{ky} \\ z_{ky} \end{bmatrix} = T_\gamma T_\beta \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \quad (62)$$

## Chapitre II : Méthode des éléments finis.

Après simplification nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_{ky} &= C_{xki} + S_{yki} + Z_{zki} ; \quad y_{ky} = \frac{-z c}{\sqrt{c^2+z^2}} x_{ki} + \sqrt{C_x^2 + Z_x^2} y_{ki} - \frac{s z}{\sqrt{c^2+z^2}} z_{ki} ; \\ z_{ky} &= -\frac{z}{\sqrt{c^2+z^2}} x_{ki} + \frac{c}{\sqrt{c^2+z^2}} z_{ki} \end{aligned} \quad (63)$$

À partir de ces informations, nous pouvons déduire l'angle, qui peut être calculé à l'aide des fonctions trigonométriques suivantes :

$$\cos \alpha = \frac{y_{ky}}{\sqrt{y_{ky}^2 + z_{ky}^2}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{z_{ky}}{\sqrt{y_{ky}^2 + z_{ky}^2}} \quad (64)$$

Enfin, la transformation globale correspondant à l'ensemble des rotations d'angles  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$  est la suivante :

$$T = T_\alpha T_\beta T_\gamma \quad (65)$$

Il convient de noter que cette transformation ne peut pas être appliquée aux membrures dont l'axe local  $x$  est parallèle à l'axe global  $x$  (avec  $c_x$  et  $c_z$  nuls). Dans ce cas, il n'y a que deux rotations possibles : la première correspond à un angle  $\gamma$  de  $90^\circ$  ou  $270^\circ$  selon que la valeur de  $c_y$  est positive ou négative, respectivement (Fig. 10). La deuxième rotation est autour de l'axe  $x$  avec un angle donné.

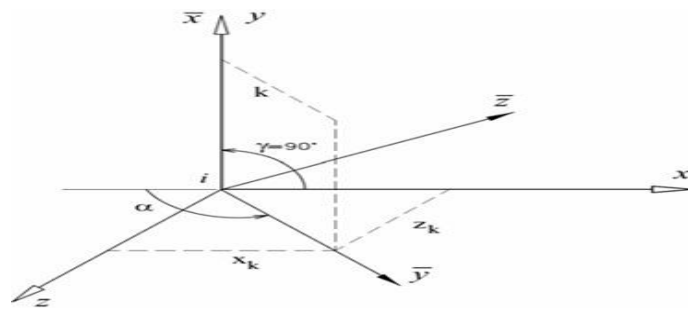


Figure 10 : Rotations correspondant à un élément vertical.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ C_y \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (66)$$

## Chapitre II : Méthode des éléments finis.

---

Les fonctions trigonométriques de l'angle  $\alpha$  peuvent être calculées de la manière suivante :

$$\sin \alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \text{ et } \cos \alpha = -\frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} C_y \quad (67)$$

### 2.9. Charges appliquées sur les éléments

Dans le cas d'une charge répartie  $q$  sur un élément, celle-ci est rapportée aux nœuds d'extrémités (Fig.11). Le vecteur de charge nodale correspondant est :

$$\bar{F}_r^e = \iint N^T q ds \quad (68)$$

Pour une charge uniformément répartie sur un élément de poutre dans le plan (voir Fig.11. (a)), le vecteur de charges nodales équivalent est donné par :

$$\bar{F}_r^e = q \int_0^L N dl \quad (69)$$

En intégrant, on obtient alors :

$$\bar{F}_r^e = \left[ 0 \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL}{12} \quad 0 \quad \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \right]^T \quad (70)$$

Si la charge est répartie de manière linéaire le long de l'élément de poutre (voir Fig.11. (b)), le vecteur de charges nodales équivalent est :

$$\bar{F}_r^e = \left[ 0 \quad \frac{(7q_1+3q_2)L}{20} \quad \frac{(3q_1+2q_2)L^2}{60} \quad 0 \quad \frac{(7q_1+3q_2)L}{20} \quad -\frac{(3q_1+2q_2)L^2}{60} \right]^T \quad (71)$$

Dans le cas d'une charge ponctuelle  $P$  appliquée sur l'élément de poutre (voir Fig.11. C), le vecteur de charges nodales équivalent est :

$$\bar{F}_r^e = \left[ 0 \quad \frac{Pb^2}{L^3} (3a + b) \quad \frac{Pab^2}{L^2} \quad 0 \quad \frac{Pa^2}{L^3} (a + 3b) \quad \frac{Pab}{L^2} \right] \quad (72)$$

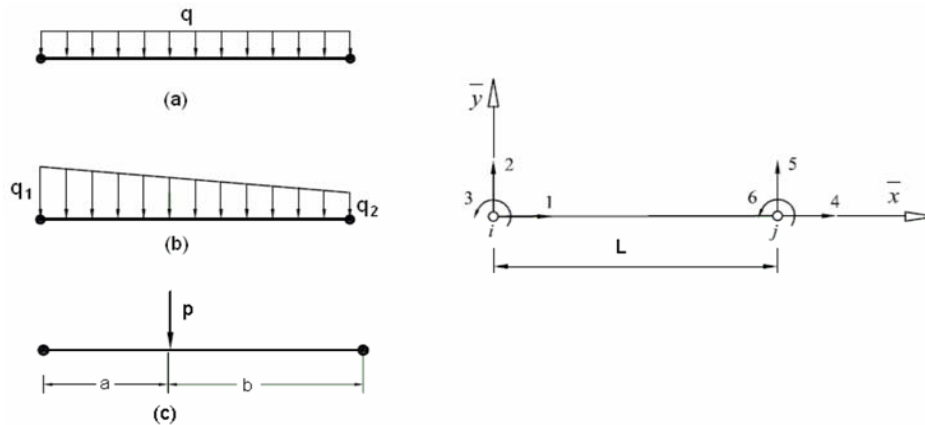


Figure 11 : Charges sur un élément.

Dans le cas d'une barre de treillis, la notion de charge répartie transversale n'est pas applicable car la modélisation de type barre ne prend pas en compte la raideur flexionnelle. Ainsi, le poids propre d'une barre doit être représenté par deux forces, concentrées aux nœuds d'extrémité, qui sont statiquement équivalentes au poids total de la barre (voir Fig.12).

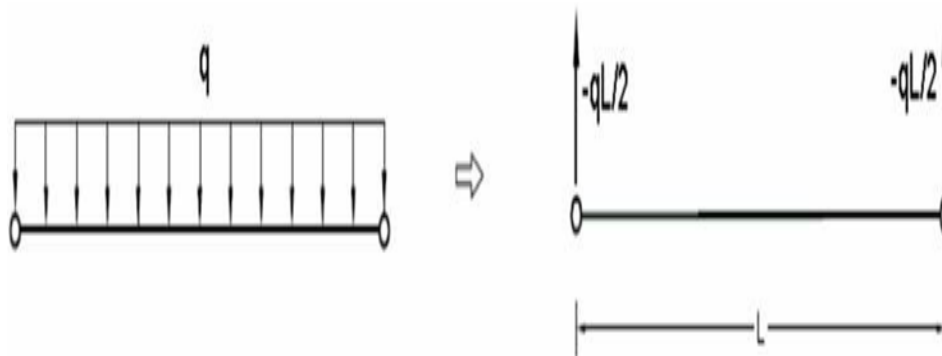


Figure 12 : Cas du poids propre d'une barre d'un treillis.

### 2.10. Assemblage des matrices élémentaires

La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices  $K^G$ ,  $M^G$  et  $F^G$  de la structure complète à partir des matrices  $K^e$ ,  $M^e$  et  $F^e$  des différents éléments tout en respectant la compatibilité des déplacements et l'équilibre des forces aux nœuds. Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de la structure est obtenue par sommation des énergies potentielles des éléments (Imbert, 1979)[38]. Si une structure est constituée de  $n_e$  éléments, l'énergie totale peut être exprimée sous forme matricielle :

## Chapitre II : Méthode des éléments finis.

---

$$\Pi = \sum_1^{ne} \Pi^e = \sum_1^{ne} \left( \frac{1}{2} U^{eT} K^e U^e + \frac{1}{2} U^{eT} M^e \ddot{U}^e - U^{eT} F^e \right) \quad (73)$$

Les termes de cette expression correspondent respectivement à l'énergie de déformation, au travail des forces extérieures et à l'effet de l'inertie. Pour assurer la compatibilité des déplacements nodaux de la structure, une relation matricielle est écrite pour chaque élément, prenant en compte les contraintes et les déformations :

$$U^e = C^e U \quad (74)$$

La matrice de localisation ou de connectivité géométrique est une matrice booléenne d'ordre  $n \times m$ , où  $n$  est le nombre de degrés de liberté (ddl) de l'élément et  $m$  est le nombre de ddl de la structure. Cette matrice permet de localiser les ddl de l'élément dans l'ensemble des ddl de la structure. Elle contient des 0 et des 1, où chaque terme ayant une valeur de 1 indique que le ddl correspondant coïncide avec celui du système. En utilisant cette matrice dans l'Eq.73, (on peut exprimer les forces internes et les déplacements des éléments dans le système global, on aura :

$$\Pi^e = \sum_1^{ne} \left( \frac{1}{2} U^{eT} C^{eT} K^e C^e U^e - U^{eT} C^e F^e + \frac{1}{2} U^{eT} C^{eT} M^e C^e \ddot{U}^e \right) \quad (75)$$

$$\text{Soit : } \Pi = \frac{1}{2} U^T K^G U - U^T F^G + U^T M^G \ddot{U} \quad (76)$$

$$\text{Avec : } K^G = \sum_1^{ne} C^{eT} K^e C^e \quad (77)$$

$$M^G = \sum_1^{ne} C^{eT} M^e C^e \quad (78)$$

$$F^G = \sum_1^{ne} C^{eT} F^e \quad (79)$$

Les matrices  $M^G$  et  $K^G$  ont des propriétés importantes dans la modélisation des structures. Elles sont symétriques et définies positives, et leur valeur dépend du matériau et de la forme de la structure considérée.

### 2.11. Système d'équations aux valeurs propres

L'analyse modale est la procédure utilisée pour déterminer les fréquences et les modes naturels d'une structure. En utilisant l'Eq. (76) et en supposant une absence d'amortissement visqueux, l'énergie potentielle totale de la structure due aux vibrations libres de l'élément est exprimée par :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}^G \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}^G \ddot{\mathbf{U}} \quad (80)$$

La relation donnant les extrémums de cette énergie est :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{M}^G \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^G \mathbf{U} \quad (82)$$

L'équation matricielle qui est utilisée pour l'analyse électrodynamique en régime libre est définie par la suite :

$$\mathbf{M}^G \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^G \mathbf{U} \quad (83)$$

Les solutions recherchées pour l'Eq. (83) sont régies par une loi temporelle et, pour autant que la matrice de rigidité soit non singulière, sont de type harmonique (Gmür, 1997)[39].

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{q} \mathbf{a} \cos(\omega t - \varphi) \quad (84)$$

La relation donnée implique que les nombres réels  $\mathbf{a}$ ,  $\omega$  et  $\theta$  représentent respectivement l'amplitude de référence, la pulsation et la phase de la fonction. Cette expression indique que tous les degrés de liberté de la structure suivent un mouvement en phase les uns avec les autres.

## Chapitre II : Méthode des éléments finis.

---

En considérant l'expression précédente, l'équation (83) associée au régime libre peut être reformulée comme suit :

$$(K^G - \omega^2 M^G)p = 0 \quad (85)$$

Le système homogène de n équations linéaires à n solutions non triviales  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), qui satisfont les équations suivantes :

$$(K^G - \omega_i^2 M^G)q_i = 0 \quad (86)$$

Alors que :

$$u(t) = p_i a_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \quad (87)$$

Est le mode propre élastique de rang  $i$  à l'amplitude de référence  $a_i$  et de déphasage  $\varphi_i$ .

En mécanique des structures, le vecteur  $p_i$  correspond au vecteur modal et la pulsation propre associée est représentée par  $\omega_i$ , exprimée en rad/s. Les valeurs de  $\omega^2$  correspondent aux racines de l'équation algébrique suivante :

$$\det(K^G - \omega^2 M^G) = 0 \quad (88)$$

### Conclusion

Dans ce chapitre, l'accent est mis sur les formulations élémentaires et globales utilisées pour l'analyse statique et modale des structures formées de poutres en utilisant la méthode des éléments finis. Cette méthode permet de résoudre les problèmes complexes de structures en les divisant en éléments plus simples qui peuvent être résolus avec plus de facilité.

La formulation élémentaire consiste à déterminer une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de chaque élément en termes de déplacements nodaux. Ensuite, pour chaque élément, on calcule ses caractéristiques élémentaires, telles que la matrice de rigidité, la matrice de masse et le vecteur des forces.

D'autre part, la formulation globale consiste à rechercher, pour la structure complète, l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus en tous

## **Chapitre II : Méthode des éléments finis.**

---

les nœuds de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité, de masses, vecteurs forces) de tous les éléments.

En utilisant les formulations énergétiques, nous sommes en mesure d'aboutir à un système d'équations linéaires qui gouverne le comportement statique et modal de la structure. Cela nous permet de calculer les fréquences naturelles et les modes propres de vibration de la structure, ainsi que les déformations et les contraintes dans chaque élément. Le code de conception assistée par ordinateur MATLAB est utilisé pour effectuer ces calculs de manière efficace et précise.

***Chapitre III :***  
***Localisation des***  
***dommages à l'aide de***  
***l'indicateur Cornwell***

# Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.

---

## 1. Indicateur Cornwell

Il existe plusieurs méthodes pour localiser les dommages dans les structures en utilisant directement les données modales en considérant l'énergie de déformation modale avant et après les dommages. Parmi ces méthodes, **Cornwell et al. [19]**. Ont proposé un indicateur de dommage basé sur la variation de l'énergie de déformation.

Pour une poutre ayant un module d'élasticité  $E$ , un second moment d'inertie  $I$ , une longueur  $L$  et une déformation  $u$ , l'énergie potentielle est exprimée comme suit :

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (01)$$

Pour la déformation modale appropriée  $x(i)$ , la poutre est subdivisée en  $N$  éléments, et les énergies associées à chaque élément  $j$  en raison du mode  $i$  sont données par :

$$(E_{pot})_i = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (02)$$

En considérant la déformation, l'énergie cinétique et l'énergie de dissipation de chaque élément  $j$ , ainsi que l'énergie totale de déformation de la poutre pour le  $i$ ème mode propre, les fractions d'énergie sont alors données par :

$$FU_{ij} = \frac{(E_{pot})_{ij}}{(E_{pot})_i} \quad (03)$$

Les expressions de ces énergies, analogues aux équations (01) à (03), sont formulées pour une structure présentant des défauts comme suit :

$$(E_{pot})_i^* = \frac{1}{2} \int_0^L (EI)^* \left( \frac{\partial \phi_i^*(x)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (04)$$

$$(E_{pot})_{ij}^* = \frac{1}{2} \int_{a_j}^{a_{j+1}} (EI)^* \left( \frac{\partial \phi_i^*(x)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (05)$$

$$FU_{ij}^* = \frac{(E_{pot})_{ij}^*}{(E_{pot})_i^*} \quad (06)$$

## Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.

---

Le symbole "\*" dans les équations (04) à (06) fait référence à la structure endommagée. Ainsi, l'Indicateur Cornwell (CI) est donné par (**Engineering Structures 177 (2018) 421–430**) [40]. :

$$Ind_{pot} = \frac{ZU_j - \bar{ZU}}{\sigma_{ZU}} \quad (07)$$

Où :

$$ZU_j = \frac{FU_{ij}^*}{FU_{ij}} \quad (08)$$

$FU_{ij}$  : Fraction de l'énergie de déformation de l'état non endommagé.

$FD_{ij}$  : Fraction de l'énergie de déformation de l'état endommagé.

$\bar{ZU}$  : Valeur moyenne de  $ZU$ .

$\sigma_{ZU}$  : L'écart type de  $ZU$ .

# Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.

## 2. Programmation de la méthode

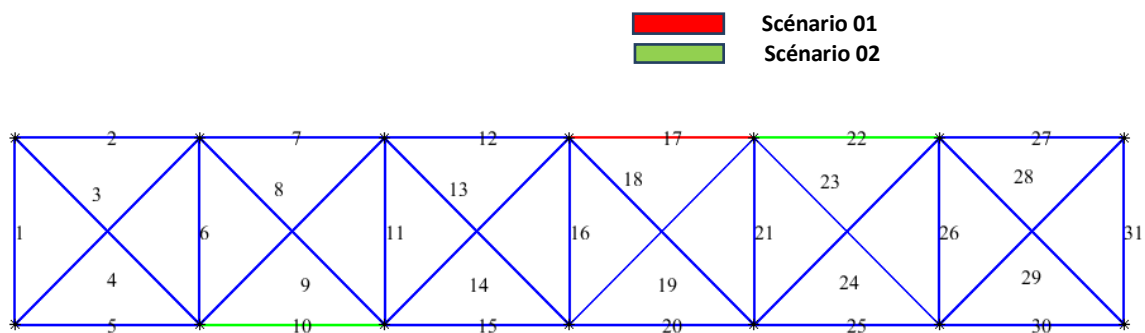
Pour mettre en œuvre la méthode, nous allons commencer par exposer nos composants à des dommages selon (02)deux scénarios distincts. Pour chaque scénario, nous augmenterons progressivement le nombre de composants endommagés afin d'obtenir des fréquences spécifiques. Ensuite, nous comparerons ces dernières aux fréquences de notre structure en état normal.

### 2.1. Structure 2D 31 éléments

À chaque sélection d'élément, nous lui infligeons un certain pourcentage de dommage, comme l'illustre le Tableau 1ci-dessous. À chaque étape, nous augmentons progressivement le nombre d'éléments endommagés.

<b>Module d'élasticité (Gpa)</b>	70 Gpa
<b>Densité du matériau (kg/m³)</b>	2770 kg/m³

*Tableau 1 : Propriétés des matériaux de la structure en treillis planaire à 31 barres.*



*Figure 13 : Structure trilles 2D à 31 éléments.*

## Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.

Scénarios	Éléments	Réduction de la rigidité
Scénario 01	17	20%
Scénario 02	10	15%
	22	30%

*Tableau 2 : Scénarios des dommages pour la structure treillis planaire à 31 barres.*

Fréquences structure intacte	Fréquences structure de références	Fréquences structure endommagées cas 01	Fréquences structure endommagées cas 02
36.4323	36.432	36.4314	35.6996
76.0952	76.095	76.0321	74.2205
133.8103	133.810	133.779	132.3027
223.3793	223.379	222.9770	217.8465
250.1825	250.182	250.1083	250.0861

*Tableau 3: Tableau comparatif des Fréquences des Structures.*

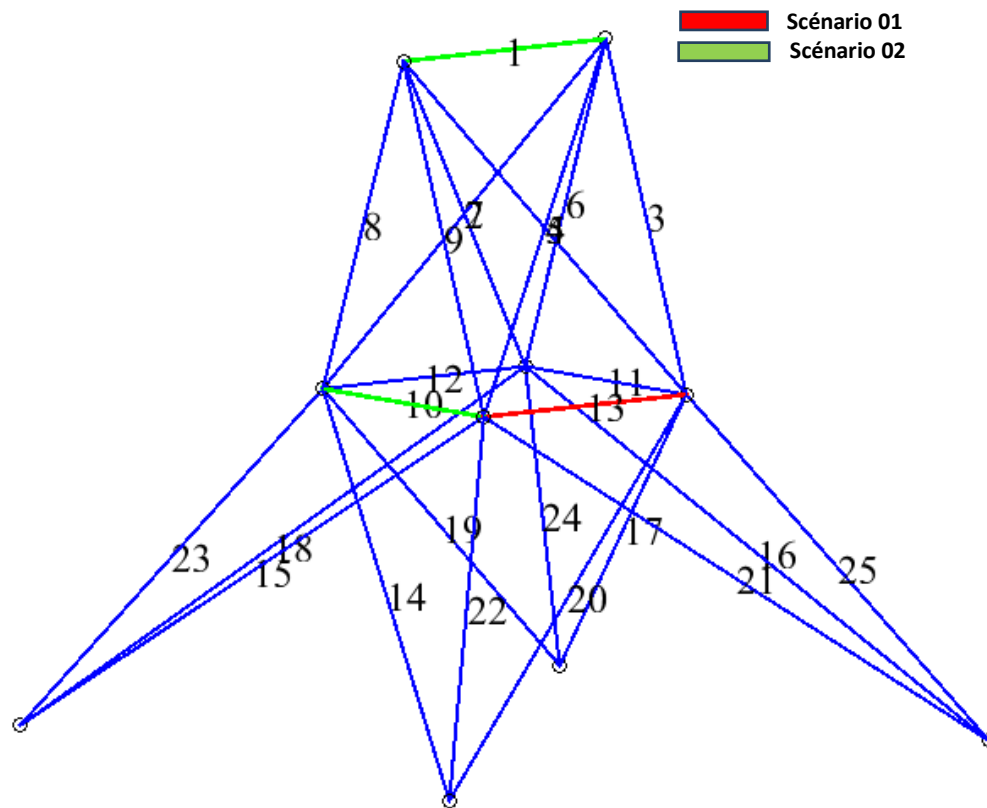
### 1.1. Structure 3D à 25 éléments

Nous suivrons le même processus que la structure précédente, tel qu'indiqué dans le Tableau N° 4ci-dessous :

Module d'élasticité (Gpa)	70 GPa
Densité du matériau (kg/m <sup>3</sup> )	2770 kg/m <sup>3</sup>

*Tableau 4: Propriétés des matériaux de la structure en treillis 3D a 25 éléments.*

## Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.



*Figure 14: Structure en treillis 3D a 25 éléments.*

Scénarios	Éléments	Réduction de rigidité
Scénario 01	13	15%
Scénario 02	01	20%
	10	30%

*Tableau 5: Scénarios des dommages pour la structure en treillis 3d a 25 éléments.*

## Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.

Fréquences structure intacte	Fréquences structure de références	Fréquences structure endommagées Scénario03	Fréquences structure endommagées Scénario04
69.7818	69.782	69.5494	69.7198
72.8217	72.822	72.7054	72.0579
95.8756	95.876	95.7523	93.0564
120.1437	120.14	120.1030	115.7451
121.5017	121.50	121.4973	120.4421

**Tableau 6:** Tableau comparatif des fréquences saines et endommagées de la structure 3D a 25 éléments.

### 2. Localisation des Dommages Basée sur l'indicateur Cornwell

Dans cette section, l'indicateur **Cornwell** est mis en œuvre afin de détecter et de localiser les éléments endommagés dans des structures treillis 2D et 3D présentant des scénarios de dommage uniques et multiples.

#### 2.1. Structures treillis 2D

##### 2.1.1. Scénarios 01

Dans le premier scénario, nous avons infligé un dommage de 20 % à l'élément 17. Un histogramme illustrant les valeurs Cornwell pour chaque élément est présenté sur les Figures ci-dessous.

# Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.

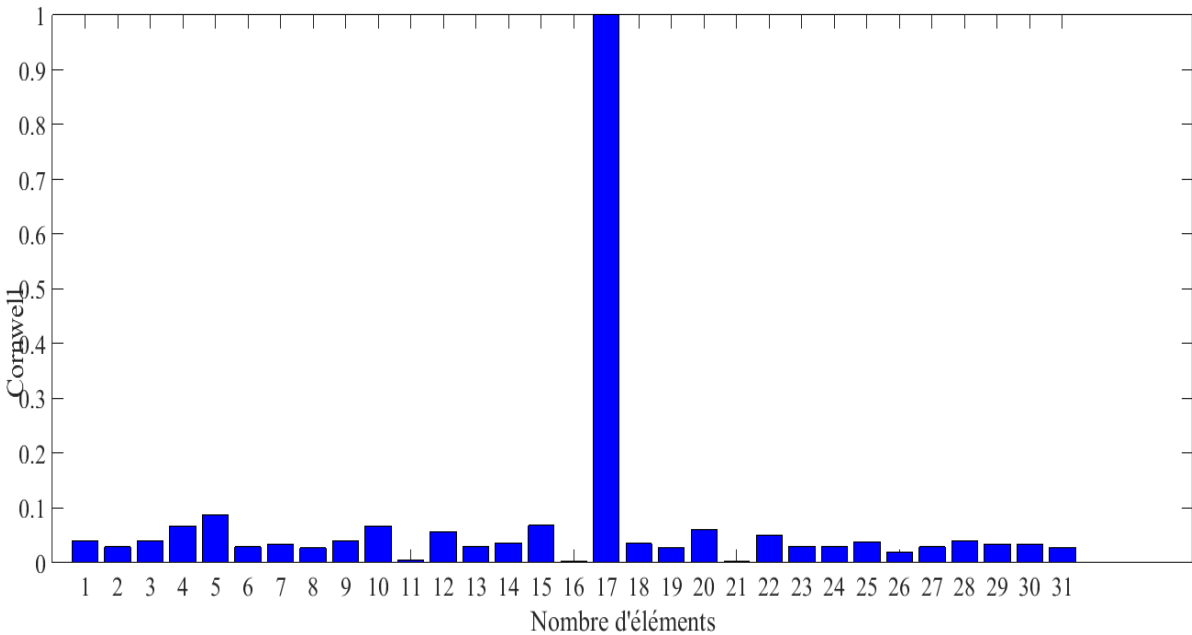


Figure 15: Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement de l'élément 16 avant troncation.

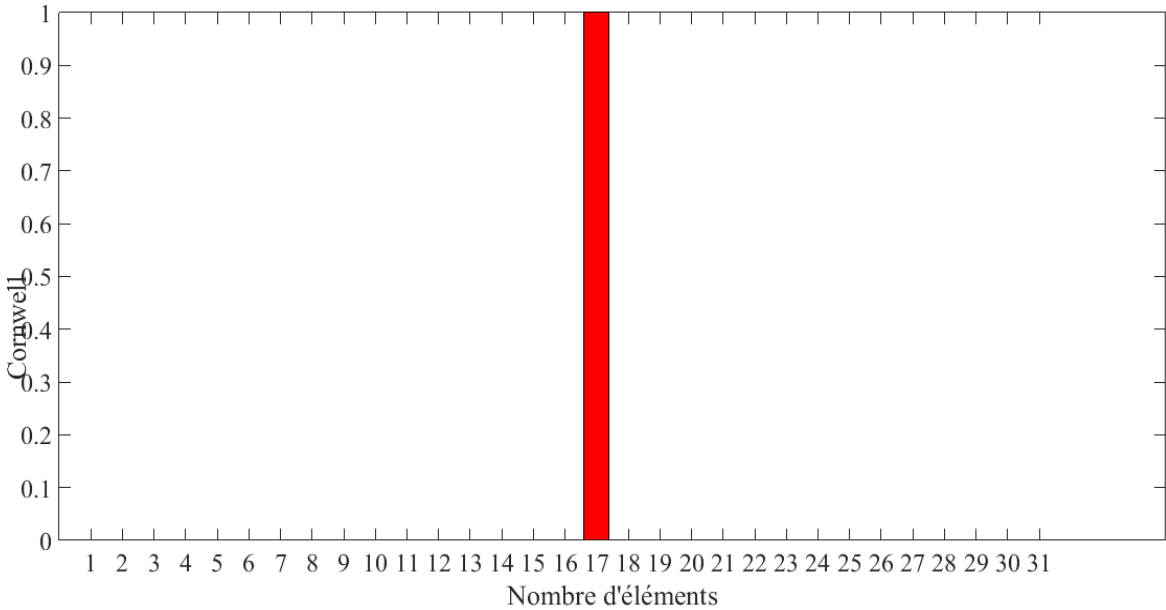


Figure 16: Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement de l'élément 17 après troncation.

# Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.

## 2.1.2. Scénarios 02

Dans le deuxième scénario, nous avons infligé un dommage de 15 % et 30 % aux éléments 10 et 22 respectivement. Un histogramme illustrant les valeurs Cornwell pour chaque élément est présenté sur les figures..

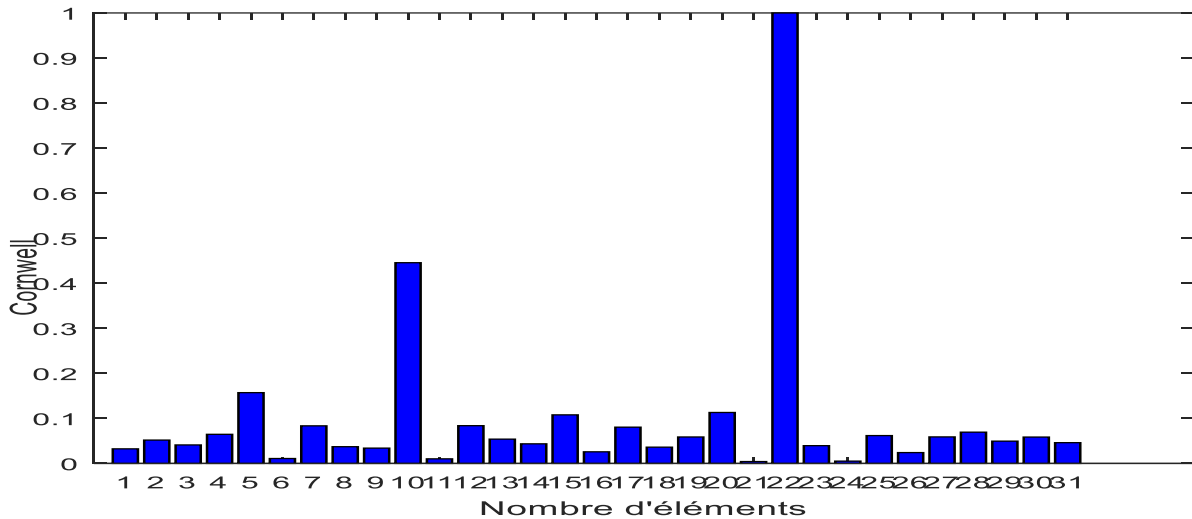


Figure 17: Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement des éléments 10 et 22 avant troncature

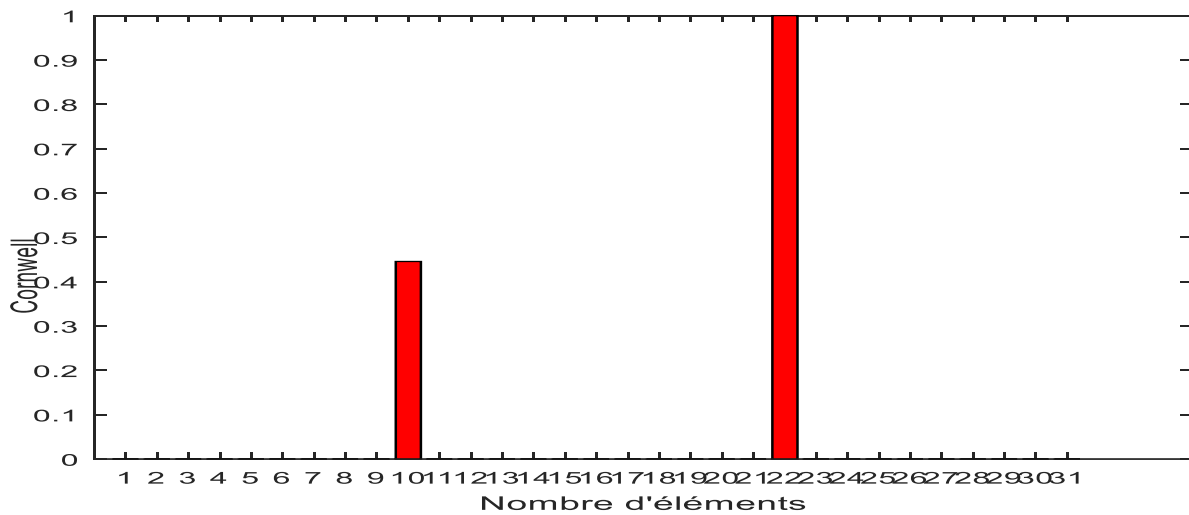


Figure 18: Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement des éléments 10 et 22 après troncature.

# Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.

## 2.2. Structure treillis 3D

### 2.2.1. Scénarios 01

Dans le premier scénario, nous avons infligé un dommage de 15 % à l'élément 13. Un histogramme illustrant les valeurs Cornwell pour chaque élément est présenté sur les figures.

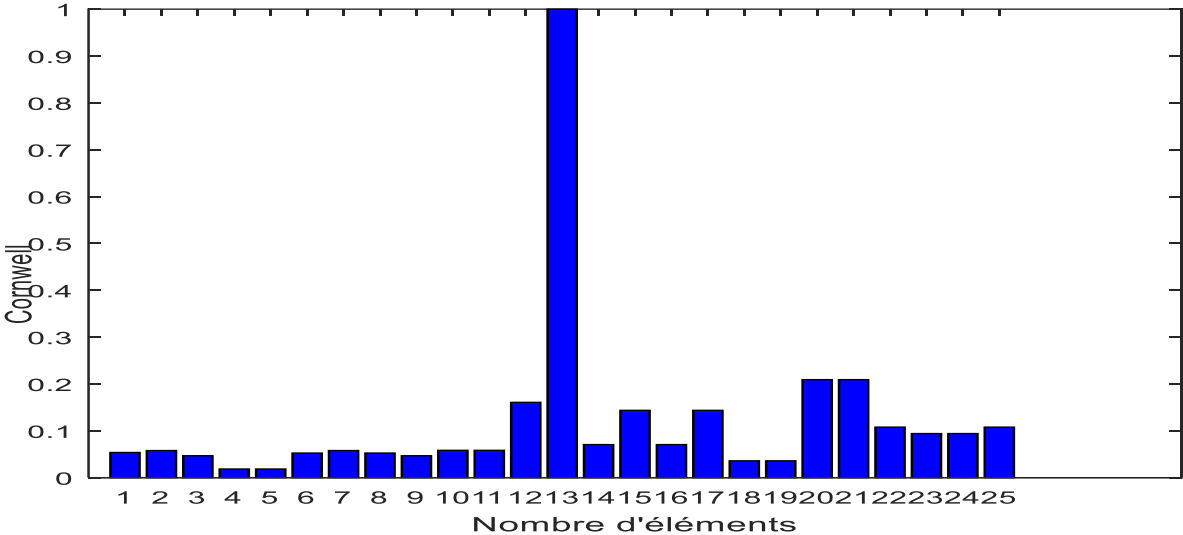


Figure 19: Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement de l'élément 13 avant troncature.

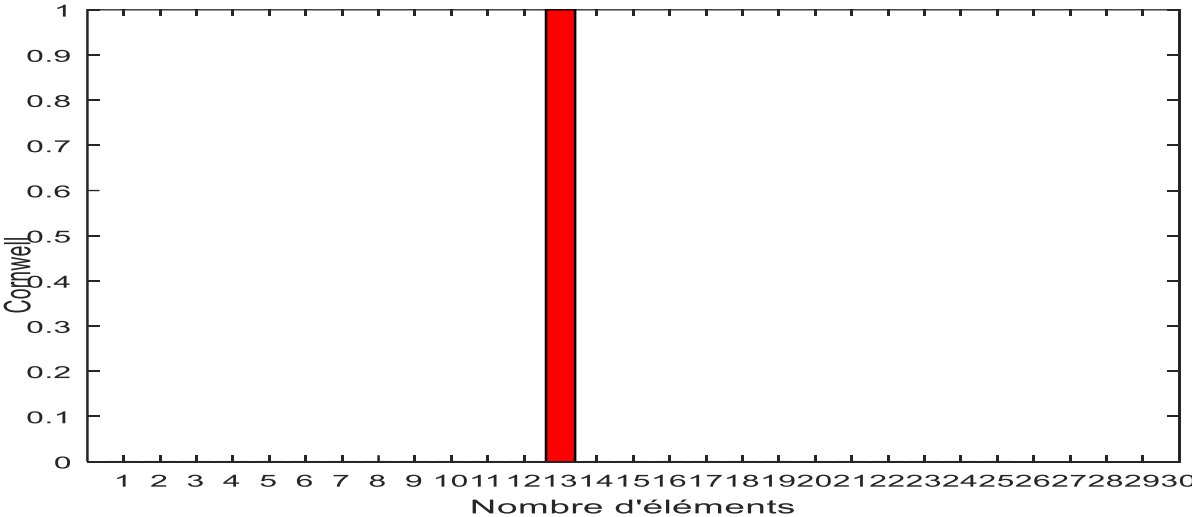


Figure 20: Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement de l'élément 13 après troncature.

# Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.

## 2.2.2. Scénarios 02

Dans le deuxième scénario, nous avons infligé un dommage de 20% et 30 % aux éléments 1 et 10 respectivement. Un histogramme illustrant les valeurs Cornwell pour chaque élément est présenté sur les figures.

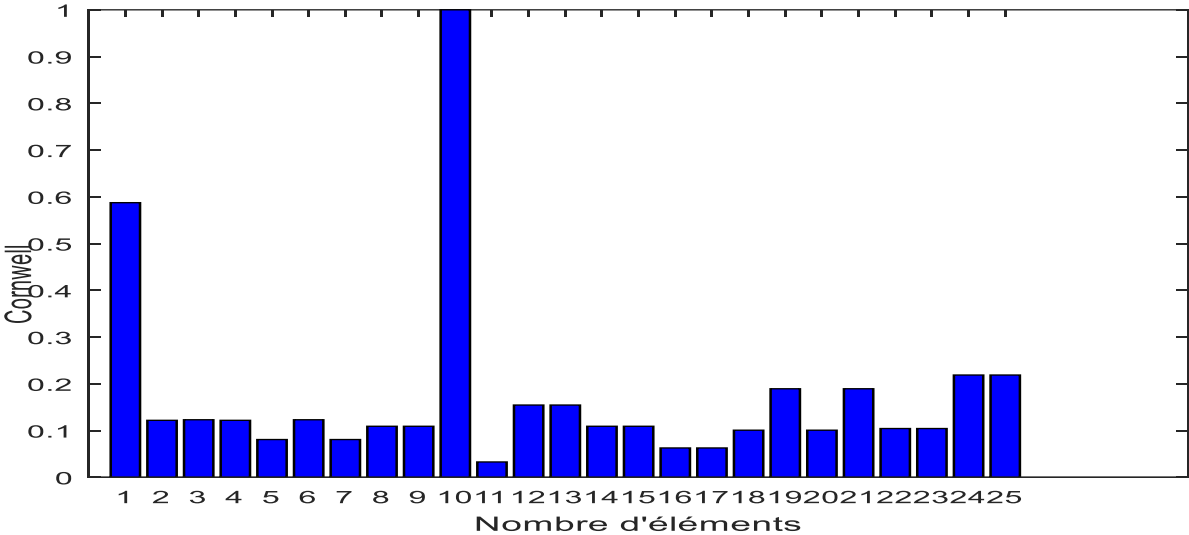


Figure 21: Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement des éléments 1 et 10 avant troncature.

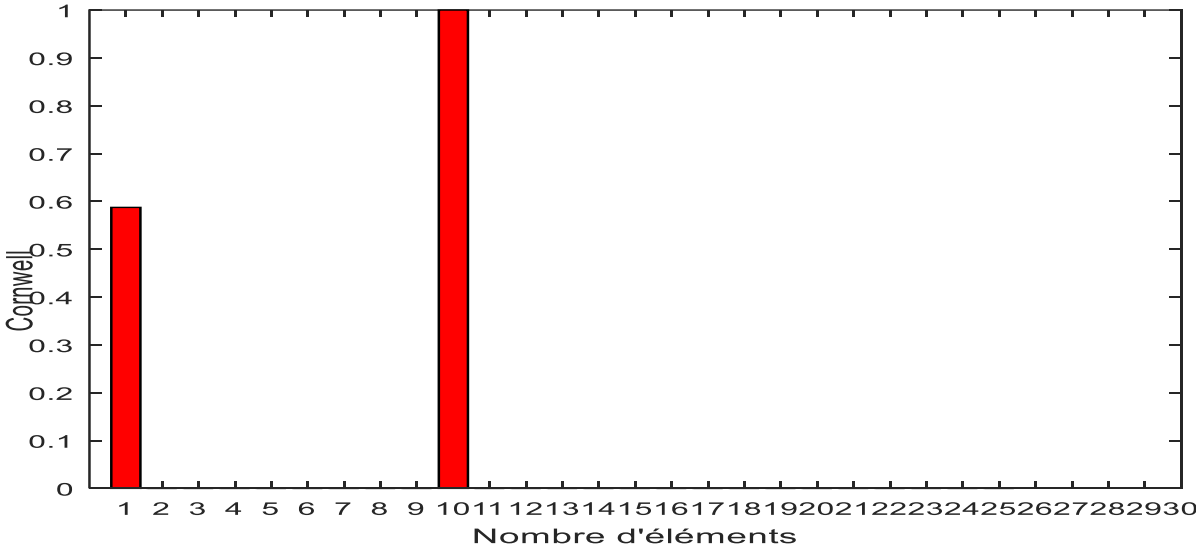


Figure 22: Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement des éléments 1 et 10 après troncature.

## **Chapitre III : Localisation des dommages à l'aide de l'indicateur Cornwell.**

---

### **Conclusion**

En observant les figures, il est clair que, quelle que soit la position de l'élément endommagé sur le treillis et le degré de dommage, l'indicateur Cornwell affiche systématiquement la valeur la plus élevée parmi tous les éléments. Ces graphiques démontrent de manière constante que les éléments endommagés présentent les valeurs les plus élevées de l'indicateur Cornwell. À la lumière de ces résultats, nous pouvons tirer la conclusion que la méthode utilisée pour localiser les dommages dans les structures treillis est satisfaisante.

***Chapitre IV : Méthode  
d'optimisation et  
quantification***

### Introduction

Dans le domaine du génie mécanique, il est impératif de souligner que la Surveillance de la Santé de la Structure (SHM) représente une méthodologie de premier ordre pour l'identification et la classification des dégradations structurelles. L'évaluation de l'intégrité d'une structure composite repose principalement sur deux éléments fondamentaux :

Un ensemble d'accéléromètres.

L'application de techniques de calcul avancées.

Il est essentiel de noter que, bien que ces méthodes permettent de détecter les dégradations, elles peuvent nécessiter un temps considérable.

L'optimisation du temps requis pour évaluer le niveau de dégradation devient donc cruciale, et cela peut être atteint en améliorant la précision et l'efficacité des techniques de calcul employées. Les techniques de calcul revêtent une importance particulière, car elles facilitent la classification, la prédiction et l'optimisation du temps requis pour la détection des dégradations. Parmi ces techniques, les plus couramment utilisées pour l'optimisation sont les réseaux neuronaux, les algorithmes génétiques, l'analyse en composantes principales et les méthodes d'optimisation.

En ingénierie mécanique, les techniques d'évaluation des dommages à partir de données modales reposent souvent sur des méthodes de quantification du modèle. Ces approches se fondent sur un modèle paramétrique de la structure et visent à minimiser une fonction objectif basée sur l'écart entre les données mesurées et les prédictions du modèle. La réussite de la méthode de quantification du modèle par éléments finis (FE) repose sur plusieurs facteurs clés, notamment la précision du modèle FE, la qualité des essais modaux, la formulation précise du problème d'optimisation, et les performances de l'algorithme d'optimisation.

L'optimisation représente une discipline mathématique qui se consacre à l'analyse et à la résolution, que ce soit de manière analytique ou numérique, de problèmes impliquant la recherche de l'élément optimal d'un ensemble, en fonction d'un critère quantitatif spécifié. L'origine de ce terme découle du latin « optimum, » signifiant « le meilleur ».

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

---

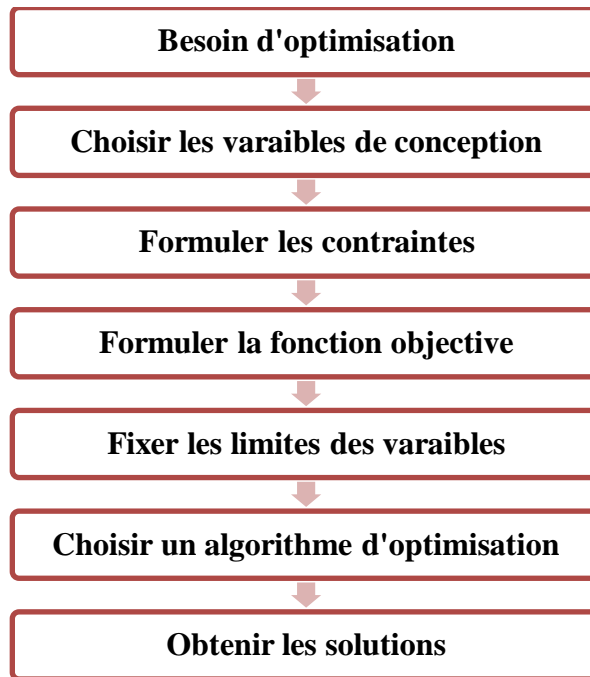
Un algorithme d'optimisation est une méthode mathématique visant à trouver les valeurs minimales ou maximales d'une fonction réelle, appelée fonction objective. De manière similaire, la résolution du problème inverse de détection des dommages dans une structure (c'est-à-dire, identifier la présence, l'emplacement et la taille des dommages) peut être abordée en utilisant des techniques d'optimisation et d'identification des paramètres.

Le problème inverse de détection des dommages consiste à modéliser la localisation des dommages dans la structure en se basant sur certaines informations concernant une quantité spécifique à des emplacements particuliers. Il convient de noter que les problèmes directs et inverses sont intrinsèquement aléatoires, ce qui nécessite la prise en compte de l'incertitude au niveau des variables.

De plus, dans le contexte de la modélisation des problèmes, l'utilisation de méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (FEM) revêt une grande importance pour résoudre efficacement ces problèmes complexes.

### 1. Généralités sur les algorithmes d'optimisation

Une approche de conception optimale simpliste consiste à examiner plusieurs solutions alternatives, généralement jusqu'à une dizaine, qui sont créées en se basant sur une compréhension préalable du problème. Dans un premier temps, on évalue la faisabilité de chaque solution de conception. Ensuite, on compare les estimations de l'objectif sous-jacent, qu'il s'agisse de coûts, de profits, ou autre, pour chaque solution, et on choisit la meilleure solution.



*Figure 23 : Processus de l'algorithme de l'optimisation*

Il n'existe pas de méthode unique pour formuler de manière optimale tous les problèmes de conception technique. En effet, les objectifs et les paramètres de conception varient d'un produit à l'autre, ce qui requiert l'utilisation de différentes techniques pour des problèmes différents. L'objectif de la formulation consiste à créer un modèle mathématique du problème de conception optimale, lequel peut ensuite être résolu en utilisant un algorithme d'optimisation. La Figure 12 illustre généralement les étapes impliquées dans le processus de formulation de la conception optimale.

### 1.1. Variable du problème

Le processus de formulation d'un problème d'optimisation débute en première instance par l'identification des variables de conception fondamentales, celles qui subissent principalement des variations pendant le processus d'optimisation. En règle générale, un problème de conception implique un ensemble considérable de paramètres de conception, parmi lesquels certains jouent un rôle essentiel dans le bon fonctionnement de la conception. On les désigne sous le nom de variables de conception, et elles peuvent être représentées soit par une seule variable, soit par plusieurs.

La première règle fondamentale en matière de formulation d'un problème d'optimisation réside dans la sélection du nombre minimal de variables de conception. Le

résultat de ce processus d'optimisation peut servir de guide pour déterminer s'il convient d'introduire davantage de variables de conception dans une version révisée ou de remplacer certaines des variables de conception précédemment prises en compte par de nouvelles variables de conception.

Nous exposons un ensemble de  $N$  variables réelles, regroupées dans un vecteur  $[x_1, x_2 \dots \dots \dots x_n]$ . Il est important de noter que ces variables ne peuvent pas adopter des valeurs arbitraires, mais doivent respecter des conditions spécifiques.

### 1.2. Contraintes

Les contraintes dans la formulation d'un problème d'optimisation sont des relations fonctionnelles qui lient les variables de conception à d'autres paramètres de conception, en respectant les lois physiques et les contraintes de ressources. Leur nature et leur nombre sont déterminés par l'utilisateur et peuvent être exprimées mathématiquement de manière précise ou non.

Il existe deux types de contraintes couramment rencontrées dans la plupart des considérations :

**a. Les contraintes de type inégalité**, qui imposent des limites supérieures ou inférieures aux valeurs admissibles des variables de conception.

La contrainte  $\sigma(x)$  qui se développe en tout point d'un composant doit respecter la limite de résistance tolérée du matériau, c'est-à-dire qu'elle ne doit pas dépasser cette limite.

$$\sigma(x) \leq S_{\text{Admissible}} \quad (09)$$

Certaines contraintes peuvent prendre la forme supérieure ou égale ( $\geq$ ).

**b. Les contraintes de type égalité**, qui expriment des équations où les valeurs des variables de conception doivent être égales à des paramètres donnés.

Par exemple, la contrainte maximale dans le cas d'une structure peut être formulée de manière exacte si la structure a une forme régulière, tandis que pour une structure de forme

irrégulière, un logiciel de simulation par éléments finis pourrait être nécessaire pour calculer précisément la contrainte maximale.

### 1.3. Fonctions objectives

Les algorithmes d'optimisation peuvent être classés en deux groupes distincts :

- a. Ceux qui visent à rechercher les valeurs optimales de fonctions objectives  $f$ .
- b. Ceux qui optimisent des ensembles  $F$  de fonctions cibles.

### 1.4. Fonctionne unique

Dans le contexte de l'optimisation d'un seul critère  $f$ , un optimum peut être soit un maximum, soit un minimum, selon l'objectif que l'on recherche. Par exemple, dans le cadre de la gestion d'une usine de fabrication, nous chercherons à affecter les commandes entrantes aux machines de manière à minimiser le temps nécessaire pour leur exécution. D'un autre côté, pour des aspects tels que l'achat de matières premières, l'emploi du personnel et la planification des campagnes publicitaires, l'objectif serait de maximiser le profit.

En général, sur les plateformes d'optimisation, il est courant de définir les problèmes d'optimisation comme des minimisations. Si un critère  $f$  doit être maximisé, la pratique habituelle consiste à minimiser la négation de ce critère ( $-f$ ). La formulation mathématique générale du problème peut être représentée par l'équation suivante :

$$f(\mathbf{x}_i) \min \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_i) \max, \forall i \in [1, n] \quad (10)$$

### 1.5. Fonctionne multiple

Les techniques d'optimisation globale ne se limitent pas à la recherche de maximums ou de minimums pour des fonctions  $f$  individuelles. Dans de nombreux problèmes du monde réel liés à la conception ou à la prise de décision, elles sont plutôt appliquées à des ensembles  $F$  composés de  $n = |F|$  fonctions objectives distinctes  $f_i$ , chacune représentant un critère spécifique à optimiser. L'optimisation multi-objectifs implique souvent de parvenir à des compromis entre des objectifs qui peuvent être contradictoires.

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

---

Dans le contexte de l'optimisation multi-objectif, il est courant de définir plusieurs objectifs qui sont tous soumis à l'optimisation. Par exemple, dans le cas d'une usine, nous pouvons spécifier les objectifs suivants :

- Minimiser le temps de production ;
- Maximiser la qualité des produits fabriqués ;
- Minimiser les coûts de production ;
- Maximiser l'utilisation des ressources disponibles ;
- Minimiser l'impact environnemental ;
- Maximiser la satisfaction des clients.

L'objectif en optimisation multi-objectifs est de trouver un ensemble de solutions qui représente un compromis efficace entre ces objectifs, car l'optimisation de l'un peut souvent avoir un impact négatif sur les autres. Cette approche permet de résoudre des problèmes complexes du monde réel où il n'existe pas de solution unique, mais plutôt un ensemble de solutions potentielles, chacune ayant ses propres avantages et inconvénients en fonction des priorités de l'utilisateur.

La manière la plus directe pour déterminer ce qui est optimum est de prendre la somme pondérée ( $x$ ) de toutes les fonctions  $f_i(x)$  appartenant à l'ensemble  $F$ .

Les objectifs individuels, représentés par les fonctions  $f_i$ , sont pondérés en fonction de leur importance en utilisant des poids  $w_i$ . Cette approche permet également de choisir entre la minimisation et la maximisation de certains objectifs. Par exemple, en attribuant un poids positif  $w_a = 1$  à une fonction objective  $f_a$  et un poids négatif  $w_b = -1$  au critère  $f_b$ , nous pouvons minimiser ( $x$ ) pour minimiser  $f_a$  et maximiser  $f_b$ . Si nous cherchons à maximiser ( $x$ ), l'effet serait inverse, avec  $f_b$  minimisé et  $f_a$  maximisé. Dans tous les cas, cette méthode réduit les problèmes multi-objectifs à des problèmes mono-objectifs.

$$(\mathbf{x}) = \sum w_i n_i = \mathbf{1} f_i(\mathbf{x}) = \sum w_i f_i(\mathbf{x}) \forall f_i \in F, \forall i \in [0, 1] \quad (11)$$

### 1.6. Limites des variables

La dernière étape du processus de formulation implique l'établissement des bornes minimales et maximales pour chaque variable de conception. Il est important de noter que certains algorithmes d'optimisation peuvent fonctionner sans nécessiter ces informations. Dans ces types de problèmes, les contraintes définissent entièrement la région réalisable, enveloppant ainsi toutes les valeurs possibles. Cependant, dans d'autres cas, il est crucial que l'algorithme de recherche opère à l'intérieur de ces bornes définies pour les variables.

De manière générale, il est requis que toutes les  $N$  variables de conception demeurent dans les bornes minimales et maximales, comme indiqué ci-dessous :

$$\mathbf{x_i L} \leq \mathbf{x_i} \leq \mathbf{x_i U} \text{ pour } \mathbf{i = 1, 2, 3, \dots, N} \quad (12)$$

Pour résoudre un problème donné, la détermination des valeurs des variables peut être contraignante et complexe. Une méthode pour surmonter cette situation consiste à faire une hypothèse sur le résultat optimale et à définir les bornes minimales et maximales de manière à ce que la solution optimale soit située entre ces bornes.

Si l'une des variables de conception correspondant à la solution optimale se trouve sur la limite minimale ou maximale, il peut être nécessaire de réajuster ces limites dans le processus d'optimisation.

Une fois ces quatre étapes accomplies, le problème d'optimisation peut être formulé mathématiquement dans un format spécial appelé « format de programmation non linéaire » (NLP). Cela signifie que l'ensemble du processus est résumé sous forme de vecteurs pour les variables et de fonctions pour les contraintes.

### 2. Les types des algorithmes d'optimisation

En général, les algorithmes d'optimisation peuvent être classés en deux catégories principales : les algorithmes déterministes et les algorithmes probabilistes.

#### 2.1. Algorithmes Déterministes

Ces algorithmes sont principalement utilisés lorsque le lien entre les caractéristiques des solutions possibles et leur utilité pour un problème est clair. Dans de tels cas, l'exploration de l'espace de recherche peut être efficacement réalisée en utilisant des approches telles que la méthode "diviser pour régner". Cependant, lorsque la relation entre une solution candidate et son adéquation (fitness) est moins évidente, complexe, ou lorsque l'espace de recherche a une dimensionnalité élevée, résoudre le problème de manière déterministe devient plus difficile. Cela peut nécessiter une énumération exhaustive de l'espace de recherche, ce qui est souvent inapplicable, même pour des problèmes relativement petits.

#### 2.2. Algorithmes Probabilistes

Les algorithmes probabilistes interviennent lorsque la relation entre les solutions candidates et leur adéquation est moins évidente, complexe, ou lorsque l'espace de recherche est de grande dimension. Ils sont devenus essentiels dans le domaine de l'optimisation, avec des travaux débutants il y a environ 55 ans. Une catégorie pertinente d'algorithmes probabilistes repose sur la méthode de Monte Carlo. Bien que ces approches ne garantissent pas toujours la solution optimale, elles offrent généralement un temps d'exécution plus court. Cela signifie que les résultats obtenus peuvent ne pas correspondre aux optimaux globaux, mais une solution légèrement moins optimale est souvent préférable à une solution nécessitant une durée de calcul inacceptable.

Dans le cadre de l'optimisation globale, les heuristiques jouent un rôle crucial. Elles aident à déterminer quelle solution parmi un ensemble de solutions possibles doit être examinée ensuite. Les algorithmes déterministes utilisent souvent des heuristiques pour définir l'ordre de traitement des solutions candidates. En revanche, les méthodes probabilistes peuvent se concentrer sur les éléments de l'espace de recherche qui ont été sélectionnés par l'heuristique pour leurs calculs ultérieurs.

### 2.3. Espace de recherche

L'espace de recherche, noté  $G$ , dans un problème d'optimisation représente l'ensemble de tous les éléments  $g$  qui peuvent être soumis aux opérations de recherche. La nature des solutions candidates dépend de la nature spécifique du problème à résoudre.

Étant donné la diversité des applications de l'optimisation, il existe une variété de formes pour les espaces de problèmes. Développer des opérations de recherche sur mesure pour chaque nouvel espace de problème serait complexe, source d'erreurs et compliquerait la création de lois générales ainsi que la consolidation des résultats. Par conséquent, il est courant de réutiliser des espaces de recherche bien établis qui sont pertinents pour de nombreux problèmes différents.

Dans ce cas, il suffit d'établir une correspondance entre l'espace de recherche et l'espace du problème spécifique. Bien que cela ne soit pas toujours réalisable, cela permet d'utiliser des logiciels existants dans de nombreuses situations.

### 2.4. Codage gray

Les fonctions utilisées pour évaluer les performances des algorithmes génétiques sont généralement conçues de manière à posséder des caractéristiques dans l'espace numérique qui rendent difficile la localisation de la solution optimale en utilisant les méthodes d'optimisation traditionnelles. Dans certains cas, l'utilisation du codage Gray<sup>38</sup> a été bénéfique pour améliorer l'efficacité de la recherche génétique. Cependant, il est important de noter que le codage Gray produit une cartographie de fonction différente, ce qui peut entraîner moins de valeurs optimales locales et des relations d'hyperplans relatives différentes par rapport à d'autres approches.

Valeurs décimales	Code binaire	Code gray
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	111
5	101	110
6	110	101

*Tableau 7 : Conversion du code binaire au code gray.*

Le codage Gray peut considérablement altérer le comportement de certaines fonctions de test lorsqu'elles sont utilisées avec des algorithmes génétiques, ce qui conduit souvent à une performance plus élevée des méthodes d'optimisation locale par rapport aux algorithmes génétiques.

Il est essentiel de noter que le codage des variables n'est pas une exigence absolue. Dans certaines études, les algorithmes génétiques sont appliqués directement aux variables elles-mêmes, sans nécessiter de codage intermédiaire.

Les chaînes de caractères codées en binaire, constituées de 1 et de 0, sont les plus couramment utilisées à cet effet. La longueur de la chaîne est généralement déterminée en fonction de la précision souhaitée pour la solution.

### 2.5. Les cinq niveaux d'organisations des algorithmes d'optimisation

- **Gène:** Chaque élément qui compose la solution est symbolisé comme un gène. Les différentes valeurs que ce gène peut avoir sont appelées des allèles ;
- **Chromosome :** Il est possible de regrouper les éléments similaires ou apparentés dans la même unité appelée chromosome. ;
- **Individu :** Chaque entité est représentée par un ensemble de chromosomes, formant ainsi un individu ;

- **Population** : Une population consiste en un groupe d'individus ou d'éléments partageant une ou plusieurs caractéristiques communes qui les rassemblent.

### 3. Les paramètres d'un algorithme d'optimisation

La première étape dans l'application de cet algorithme consiste à obtenir une approximation initiale, notée  $x_0$ , qui servira de point de départ. Le choix d'une approximation initiale de qualité est critique, car il aura un impact direct sur la capacité de l'algorithme à converger vers la solution recherchée.

Ensuite, la taille de la population joue un rôle important :

- Si la population est grande, cela favorise une plus grande diversité parmi les solutions candidates, ce qui réduit la probabilité de convergence vers un optimum local ;
- En revanche, si la population est petite, cela augmente la probabilité de rester piégé dans les minima locaux. Généralement, la taille de la population se situe entre 25 et 100 individus, en fonction des besoins spécifiques.

L'algorithme d'optimisation fonctionne par itérations successives. À chaque itération, une nouvelle approximation de la solution réelle est calculée. Cette itération est réalisée de manière récursive, en utilisant les approximations précédentes comme point de départ. En programmation, cela est généralement implémenté à l'aide d'une boucle de répétition.

Enfin, la vitesse de convergence est un aspect important. Elle fait référence à la rapidité avec laquelle les valeurs de chaque itération convergent vers la solution recherchée. Plus la convergence est rapide, plus l'algorithme est efficace pour se rapprocher de la solution optimale.

Pour conclure les méthodes d'optimisation présentent généralement différents niveaux de convergence, tels que linéaire, quadratique, cubique, quartique, et ainsi de suite. La rapidité de convergence est un facteur essentiel dans le choix d'une méthode d'optimisation, surtout pour des problèmes de taille importante ou avec de multiples paramètres. Une méthode ayant un ordre de convergence élevé permet d'atteindre la solution recherchée en moins d'itérations.

Cependant, il est important de noter que l'absence de convergence d'un algorithme ne signifie pas nécessairement qu'il n'existe pas de solution au problème. En réalité, il n'existe pas d'algorithme universel garantissant la convergence pour tous les types de problèmes. La convergence dépend souvent du choix de la valeur initiale  $x_0$  et des propriétés spécifiques de la fonction à optimiser.

### 3.1. L'algorithme gold rush optimizer

L'algorithme GRO présente un avantage notable : il permet de choisir parmi différentes options de mouvement sans recourir à une force dans le processus de décision. En revanche, d'autres algorithmes, basés sur les lois naturelles ou le comportement instinctif des animaux, impliquent l'utilisation d'une force dans la prise de décision. Dans le cas de l'algorithme GRO, le cerveau analyse les sons et les erreurs pour que l'opérateur puisse choisir la meilleure direction, se rapprochant ainsi au maximum de l'objectif. En utilisant une approche de travail d'équipe, les opérateurs peuvent progressivement s'approcher de l'objectif après seulement quelques mouvements, ce qui se traduit par des économies de temps et d'énergie.

#### 3.1.1. Représentation de « gold rush optimization »

En suivant la procédure hypothétique mentionnée ci-dessus, l'algorithme GRO est exprimé par l'équation suivante. Tout comme d'autres approches méta-heuristiques, l'algorithme proposé est un processus itératif qui commence par l'initialisation des paramètres globaux comme suit :

- Pour la localisation "i",  $lb_i$  et  $ub_i$  définissent les valeurs minimales et maximales autorisées, créant ainsi l'espace de recherche des opérateurs. Rand, dans l'intervalle (0,1), est un nombre aléatoire.

Comme évoqué précédemment, cet algorithme repose sur le travail d'équipe. Par conséquent, pour obtenir les meilleures performances de l'algorithme, plusieurs opérateurs sont sélectionnés. La taille de la population d'opérateurs est définie avec une limite basse de 2 opérateurs. Un opérateur réussi (SOP) est un opérateur qui parvient à trouver l'emplacement optimal.

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

Chacun des opérateurs est soumis à des contraintes de transfert qui correspondent aux contraintes du problème. Par la suite, les principales constantes sont calculées, et les étapes suivantes expliquent les transformations clés impliquées dans le déroulement de l'algorithme.

**Niveau 1 :** Initialisation Initialement, un groupe d'opérateurs pénètre dans l'espace de recherche. Chaque opérateur se trouve au hasard à un endroit quelconque de l'espace de recherche (condition limite), comme décrit dans l'équation (13), en tenant un détecteur de métaux.

$$location_i^0 = lb_i + (ub_i - lb_i) * rand, i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

La variable N représente le nombre de variables - le nombre de dimensions dans l'espace de recherche est égal au nombre de variables. Chaque opérateur peut se déplacer dans N directions et trouver son prochain emplacement. Chaque opérateur détermine le succès des personnes à trouver l'excellent emplacement où ils se tiennent en fonction de l'intensité du son reçue par le détecteur de métaux. Un opérateur peut estimer sa distance à l'or en fonction de l'intensité du son. De cette manière, un opérateur choisit la meilleure direction de déplacement pour s'approcher de l'or, qui est l'objectif de l'ensemble du groupe d'opérateurs.

**Niveau 2 :** Surveillance - Sélection des meilleurs emplacements À cette étape, la SOP (Sélection des Opérateurs Performants) doit être générée. Lors de la première itération, les 10 % meilleurs opérateurs doivent être sélectionnés et enregistrés dans la SOP. Pour la deuxième itération et les suivantes, la SOP des itérations précédentes doit être comparée à la population d'opérateurs, et les 10 % meilleurs opérateurs de l'union des deux groupes doivent être sélectionnés et enregistrés en tant que SOP.

**Niveau 3 :** Aptitude et distance L'évaluation de l'intensité sonore de chaque son (taux), indiquant les personnes ayant une excellente chance de trouver de l'or, est calculée selon l'équation (2) :

$$rate(i) = \frac{D_i}{\rho_i} * \frac{sound(highest\ volume) - sound(i)}{(sound(highest\ volume) - sound(lowest\ volume) + \epsilon)} \quad (14)$$

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

En tenant compte des coefficients  $\rho_i$  et des erreurs provenant de l'environnement, les opérateurs sont pris en compte, et la précision du son entendu est accrue. L'epsilon ( $\varepsilon$ ) est un petit nombre positif visant à éviter les singularités.

En raison des mouvements fréquents des opérateurs, ils se fatiguent progressivement, ce qui affecte leur qualité de recherche. En réalité, à chaque étape de mouvement du groupe, les opérateurs ont moins d'efficacité de mouvement que lors des étapes précédentes, et à chaque étape, leur plage de mouvement est réduite. Pour surmonter ce problème, nous introduisons un paramètre  $\rho_i$  tel que décrit dans l'équation (15) afin de mesurer l'effet de la fatigue, qui est la cause d'une détection de mauvaise qualité. En fait,  $\rho_i$  est un paramètre de contrôle du processus d'exploitation et d'exploration. En utilisant le paramètre  $\rho_i$ , le taux de mouvement de chaque opérateur à chaque étape est calculé.

$$\rho_i = 2 - \frac{iter}{max_{iter}} \quad (15)$$

La distance entre les opérateurs affecte la perception du son entendu par chaque opérateur. En raison de l'atténuation du son dans l'air, celui qui se trouve à la plus grande distance est perçu moins fort que la réalité. Afin de calculer l'atténuation du son, la distance  $D_i$  entre les opérateurs dans l'équation (16) est prise en compte en fonction du coefficient de distance. De cette manière, l'intensité sonore peut être évaluée de manière précise. Les indices  $i$  et  $j$  indiquent la position actuelle des deux opérateurs.

$$D_i = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \dots} \quad (16)$$

**Niveau 4 : Réflexion - Décisions - Déplacement** À cette étape, chaque opérateur peut prendre des décisions différentes en fonction d'une combinaison des sons. Chaque opérateur réfléchit et décide dans quelle direction se déplacer en se basant sur le son reçu de leurs détecteurs de métaux et de ceux des autres. Parfois, des métaux autres que l'or sont détectés, et par conséquent, afin de réduire le risque de capturer des métaux autres que l'or, les opérateurs ne se déplacent pas nécessairement vers le son le plus fort. En d'autres termes, les opérateurs peuvent avoir besoin de se déplacer vers ou loin du son le plus fort. Chaque opérateur peut se déplacer vers ou contre le son le plus fort. Enfin, le résultat final

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

---

(l'emplacement) est multiplié par le Taux (Rate) pour obtenir l'emplacement mis à jour selon l'équation (17).

$$\mathbf{newlocation}(i) = \mathbf{location}(i) + \mathbf{dm} \times [(\mathbf{rate}(j) - \mathbf{rate}(i)) * (\mathbf{location}(j) - \mathbf{location}(i)) * \mathbf{rand}] \quad (17)$$

Par conséquent, un opérateur ne se déplace pas toujours vers le son le plus fort, mais peut parfois s'en éloigner. Pour cela, un nombre aléatoire (compris entre 0,0 et 1,0) est choisi, et ce nombre est comparé aux plages de  $\alpha$  dans l'équation (18).

$$\mathbf{md} = \begin{cases} +1 \Rightarrow \mathbf{towardsaloudestsouda} > \mathbf{rand} \\ -1 \Rightarrow \mathbf{awayfromaloudestsouda} < \mathbf{rand} \end{cases} \quad (18)$$

"md" signifie direction de déplacement. La première plage ( $\mathbf{a} > \mathbf{rand}$ ) correspond au déplacement vers le son le plus fort, tandis que la deuxième plage ( $\mathbf{a} < \mathbf{rand}$ ) correspond au déplacement loin du son le plus fort. En utilisant cette stratégie dans l'algorithme GRO, on évite de rester piégé dans un optimum local et on favorise au contraire la sélection des réponses en se déplaçant vers un optimum global.

**Niveau 5 :** Correction de l'emplacement De plus, le son entendu par l'opérateur est analysé dans le lobe frontal du cerveau, ce qui entraîne des décisions différentes. En tenant compte de la sélection de différents noyaux par le ganglion basal dans le cercle de Papez, une large gamme de décisions est prise pour que l'opérateur se déplace dans une direction spécifique. Les décisions sont finalisées dans le lobe frontal, et le mouvement est effectué dans une direction donnée. Si l'emplacement obtenu dans l'équation (16) enfreint les contraintes du problème, l'équation (18) est utilisée pour créer de nouveaux emplacements. Par conséquent, un nombre aléatoire (compris entre 0,0 et 1,0) est choisi, et ce nombre est comparé aux plages de  $\beta$  et  $\gamma$  où  $0 < \beta < \gamma < 1$ . Chaque opérateur, en fonction des paramètres susmentionnés, choisit l'une des activités suivantes :

$$\mathbf{new\ location}(i) = \begin{cases} \mathbf{choose\ a\ neighboring\ location} & \mathbf{rand} < \beta \\ \mathbf{select\ a\ new\ location\ randomly} & \beta < \mathbf{rand} < \gamma \\ \mathbf{do\ not\ move} & \gamma < \mathbf{rand} \end{cases} \quad (19)$$

L'interpolation est utilisée pour trouver un emplacement dans le voisinage.

**Niveau 6 :** Terminaison En fin de compte, les étapes de 4 à 6 sont répétées en boucle jusqu'à ce que l'un des critères de terminaison suivants soit atteint :

1. Le nombre maximum de tentatives autorisées est atteint, généralement fixé à 400.
2. Aucun changement supplémentaire dans le meilleur emplacement n'est observé (après plusieurs itérations sans amélioration).
3. La différence entre les valeurs de la fonction SOP (Sélection des Opérateurs Performants) et l'optimum global est inférieure à un seuil anticipé préalablement défini.
4. Si la différence entre les valeurs objectives de la meilleure et de la pire position devient inférieure à une précision spécifiée. (INTERNATIONAL JOURNAL OF OPTIMIZATION IN CIVIL ENGINEERING Int. J. Optim. Civil Eng., 2021; 11(2): 291-327) [40]

### 3.2. L'algorithme bonobo

L'optimiseur Bonobo (BO) a été conçu en s'inspirant des stratégies de reproduction et du comportement social de la communauté de bonobos. Le chef de la société des bonobos est appelé l'alpha-bonobo. Il s'agit du meilleur bonobo disponible dans ce groupe de bonobos en termes de force et d'autres qualités. Les bonobos adoptent la technique sociale de fission-fusion dans leur comportement. Pendant la journée, ils se divisent en plusieurs groupes de compositions et de quantités variables et accomplissent diverses tâches, telles que la recherche de sources de nourriture, la recherche de lieux sûrs pour séjourner, etc. On appelle cela le processus de fission. Cependant, après un certain temps, ils se réunissent à nouveau (processus de fusion) pour accomplir certaines activités spécifiques, comme dormir ensemble la nuit, se battre avec l'opposition, etc.

En outre, les bonobos traversent principalement quatre types de processus de reproduction en fonction de la situation. Dans l'algorithme BO, ces situations sont divisées en deux catégories : la phase positive (PP) et la phase négative (NP). Mathématiquement, PP représente une phase où l'amélioration continue de la meilleure forme physique obtenue est observée. Cependant, s'il n'y a pas d'amélioration de la meilleure solution, cela est considéré comme une phase négative (NP).

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

Ce qui est intéressant ici, c'est que BO se comporte totalement différemment en fonction du type de phase. En NP, le processus de recherche tente d'explorer d'autres régions non découvertes de l'espace des variables. Pour ce faire, soit la stratégie de 'consortship' (union) soit la stratégie de reproduction extra-groupe est suivie. En revanche, pendant la phase positive (PP), le mécanisme de recherche se concentre davantage sur les bonnes régions de forme physique qui ont déjà été découvertes par l'algorithme. Pendant la PP, l'alpha-bonobo et un membre sélectionné (appelé bonobo p-ième) participent au processus de reproduction avec le bonobo i-ème. Dans cette phase, il est observé que les bonobos suivent leur leader (alpha-bonobo) pour s'améliorer eux-mêmes.

La sélection du membre choisi ou du bonobo p-ième se fait grâce au schéma social de fission-fusion. Dans ce processus, un sous-groupe temporaire de bonobos, excluant le i-ème, est formé en premier lieu. La taille maximale de ce groupe ( $tsgs_{max}$ ) est déterminée comme suit :

$$tsgs_{max} = \text{maximum} \left( 2, \text{ceil} (tsgs_{factor} \times N) \right), \quad (20)$$

Lors de la phase PP, un bonobo parent est modifié pour créer un nouveau bonobo ( $new\_bonobo_j$ ) en appliquant l'équation (2) de la manière suivante :

$$new\_bonobo_j = bonobo_j^i + r_1 \times scab \times (\alpha_j^{bonobo} - bonobo_j^i) + (1 - r_1) \times scsb \times flag \times (bonobo_j^i - bonobo_j^p), \quad (21)$$

Quand  $bonobo_j^i$ ,  $bonobo_j^p$  et  $bonobo_j^p$  sont les termes j-èmes de l'alpha-bonobo, du bonobo i-ème et du bonobo p-ème, respectivement ; scab et scsb désignent les paramètres de partage pour l'alpha-bonobo et le membre p-ème, respectivement ; flag est un paramètre qui prend une valeur égale à 1 ou -1 en fonction du type de stratégie de reproduction ; r1 est un nombre aléatoire généré dans la plage (0, 1).

Pendant la phase négative (NP), l'activité d'exploration est principalement réalisée. Contrairement à la PP, il est observé que les bonobos ne suivent pas leur leader dans ce cas (voir Fig. 2b). Grâce à soit la stratégie de consortship soit la stratégie de reproduction extra-groupe, un nouveau bonobo est créé. La probabilité pxgm, qui est simplement la probabilité

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

---

de reproduction en dehors du groupe, est responsable de décider de la mise en œuvre de l'une ou l'autre de ces deux stratégies de reproduction.

Équation de la reproduction par « consortship »

$$new\_bonobo_j = \begin{cases} \{bonono_j^i + flag \times e^{-r_2} \times (bonono_j^i - bonono_j^p)\}, & \text{if} \\ (flag = 1 \parallel r_3 \leq p_p) & , \\ bonono_j^p, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

Où  $p_p$  est appelée la phase de probabilité ;  $r_2$  et  $r_3$  sont deux valeurs aléatoires distinctes trouvées dans la plage (0, 1).

Équations de reproduction extra-groupe :

**Condition 1 :** Si  $abonobo_j \geq abonobo_i$

Le nouveau  $bonobo_j$  est généré en appliquant les équations (20) et (21) avec une probabilité d'occurrence égale à  $p_p$ . Sinon, le nouveau  $bonobo_j$  est créé en utilisant les équations (5) et (7).

**Condition 2 :** Si  $abonobo_j < abonobo_i$

Le nouveau  $bonobo_j$  est déterminé en appliquant les équations (25) avec une probabilité d'occurrence égale à  $p_p$ . Sinon, le nouveau  $bonobo_j$  est calculé en utilisant les équations (26) et (28).

$$\beta_1 = e^{(r_4^2 + r_4 - 2/r_4)} \quad (23)$$

$$\beta_2 = e^{(-r_4^2 + r_4 - 2/r_4)} \quad (24)$$

$$new\_bonobo_j = bonobo_j^i + \beta_1 \times (Var\_max_j - bonobo_j^i), \quad (25)$$

$$new\_bonobo_j = bonobo_j^i + \beta_2 \times (bonobo_j^i - Var\_min_j), \quad (26)$$

$$new\_bonobo_j = bonobo_j^i + \beta_1 \times (bonobo_j^i - Var\_min_j), \quad (27)$$

$$new\_bonobo_j = bonobo_j^i + \beta_2 \times (Var\_max_j - bonobo_j^i), \quad (28)$$

Où  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont deux facteurs intermédiaires ;  $Var\_max_j$  et  $Var\_min_j$  sont les limites supérieure et inférieure de la  $j$ -ème dimension ;  $r_4$  est une valeur aléatoire générée dans la plage  $(0, 1)$  et  $r_4 \neq 0$ . (**Journal of Intelligent & Robotic Systems (2023) 107:8 An Improved Design of Knee Orthosis Using Self-Adaptive Bonobo Optimizer (SaBO)**) [41]

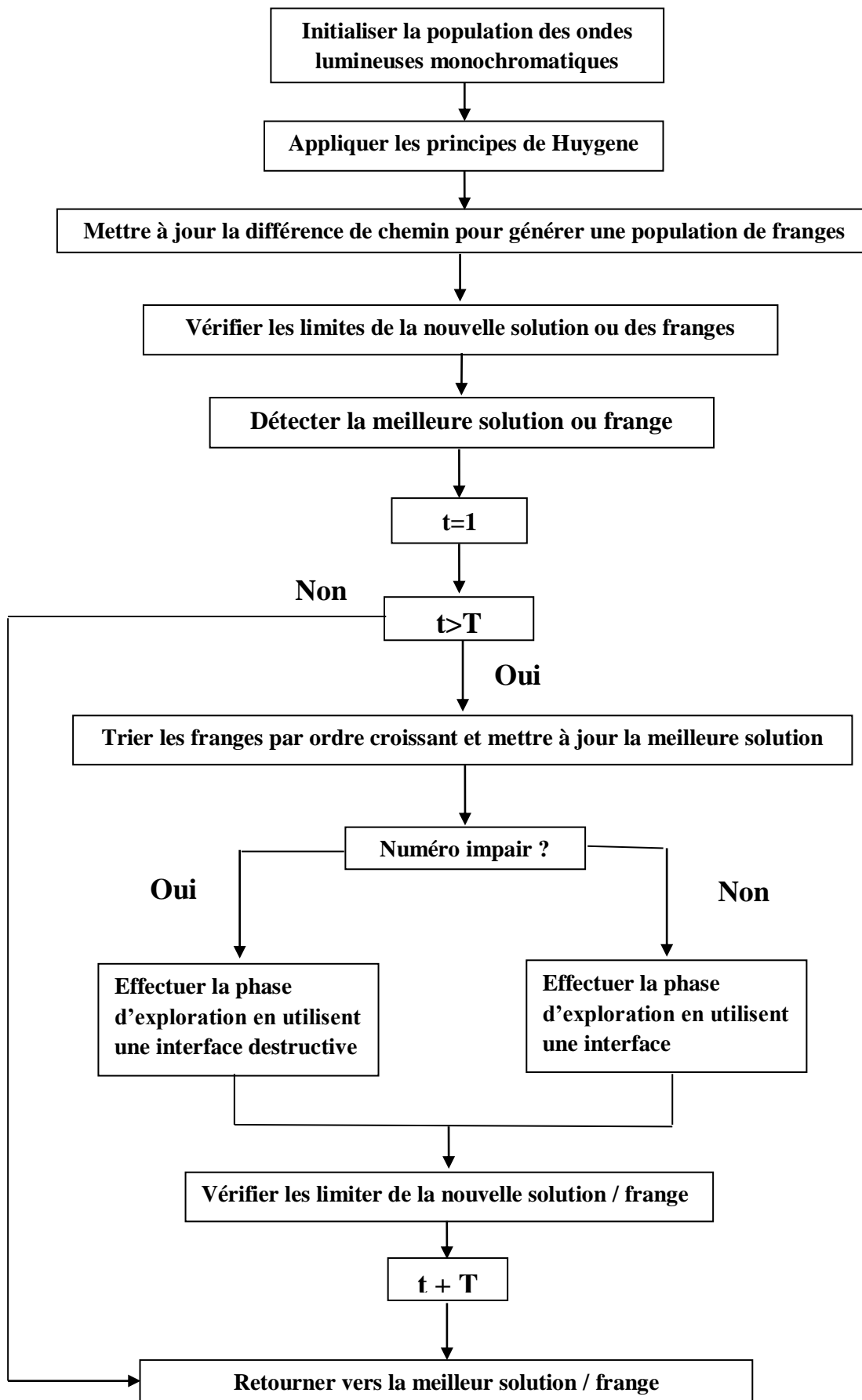
### 3.3. L'algorithme young's double slit experiment

L'optimiseur YDSE est basé sur l'expérience à double fente de Young, qui a montré que la lumière se comporte comme une onde. Cette expérience a révélé des motifs d'interférence lumineuse, créant des franges lumineuses (Interférence de Cohérence - CI) et des franges sombres (Interférence de Dissociation - DI) sur un écran. L'optimiseur YDSE utilise ces principes d'interférence pour développer un algorithme d'optimisation capable de résoudre des problèmes complexes en s'inspirant des phénomènes d'interférence lumineuse. Cette approche novatrice tire parti des concepts d'interférence pour améliorer la recherche de solutions optimales.

- La source de lumière doit être monochromatique ;
- L'application du principe de Huygens ;
- L'interférence se produit entre seulement deux ondes ;
- L'interférence entre les deux ondes est permanente ;
- Chaque frange résultant de la CI ou de la DI représente une solution possible ;
- La taille de la population équivaut au nombre de franges (franges lumineuses et franges sombres) ;
- La qualité d'une solution est calculée en fonction de la fonction objective.

Ensuite, la formulation mathématique détaillée de l'optimiseur YDSE sera discutée. Le schéma ci-dessous représente le diagramme de flux de l'algorithme proposé.

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification



### 3.3.1. Étape d'initialisation

Selon YDSE, une source de lumière monochromatique (S) est d'abord projetée sur une barrière dotée de deux fentes étroitement espacées. Ainsi, nous créons une source de lumière monochromatique initiale S composée de N ondes P comme suit :

$$S_{i,j} = Lb_j + rand \times (Ub_j - Lb_j), \quad (29)$$

$$i = 1, 2, \dots, NP, \quad (30)$$

$$j = 1, 2, \dots, Dim. \quad (31)$$

Si, j représente la j-ème variable de la i-ème onde monochromatique.  $Lb_j$  et  $Ub_j$  sont respectivement les limites inférieures et supérieures de la j-ème variable du problème, et rand est un nombre aléatoire dans la plage [0,1].

## 4. Le principe de Huygens

Après avoir passé à travers les deux fentes, les ondes monochromatiques se propagent dans toutes les directions à partir de chaque fente conformément au principe de Huygens. Chaque point de la frontière d'onde agit comme une source d'une nouvelle onde. Cependant, pour simplifier, on suppose que le nombre de points sur la frontière d'onde provenant des deux fentes est égal à la taille des ondes NP, et chaque point de la frontière d'onde a seulement un faisceau. Ces points sont calculés en utilisant des équations spécifiques pour la frontière d'onde des deux fentes.

$$FS_i = S_i + L \times rand1(-1, 1) \times (S_{mean} - S_i), \quad i = 1, 2, \dots, NP \quad (32)$$

$$SS_i = S_i - L \times rand2(-1, 1) \times (S_{mean} - S_i), \quad i = 1, 2, \dots, NP \quad (33)$$

Où  $FS_i$  est le point i créé sur la frontière d'onde sortant de la première fente FS, et  $SS_i$  est le point i créé sur la frontière d'onde sortant de la deuxième fente SS.  $S_{best}$  est le meilleur individu de la population S.  $S_{mean}$  détermine la moyenne de la population actuelle S et est calculé en utilisant :

$$S_{mean} = \frac{1}{NP} \sum_{i=1}^{NP} S_i \quad (34)$$

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

---

Si indique la  $i$ -ème onde monochromatique qui sera émise à travers les fentes. De plus,  $rand1(-1, 1)$  et  $rand2(-1, 1)$  sont des nombres aléatoires uniformément distribués dans la plage  $[-1,1]$ , et  $L$  est la distance entre la source lumineuse et la barrière.  $rand1(-1, 1)$  et  $rand2(-1, 1)$  simulent la diffusion des rayons lumineux dans différentes directions.

Dans l'optimiseur YDSE, l'état initial de la création de la population simule précisément l'état initial de la création de la première interférence des ondes dans le YDSE. Chaque frange lumineuse (CI) et chaque frange sombre (DI) représente une solution candidate dans l'espace de recherche. Dans le YDSE, la première interférence des ondes se produit après que la lumière monochromatique tombe sur la barrière à deux fentes, FS et SS. Dans l'optimiseur YDSE, simule la chute de la lumière monochromatique sur une barrière à deux fentes. Pour simplifier, chaque onde (ou particule) représente une solution possible, et chaque frange résultant de CI ou de DI représente également une solution possible dans la même itération. En revanche, chaque solution est évaluée en fonction de la fonction objective. **(Young's double-slit experiment optimizer : A novel metaheuristic optimization algorithm for global and constraint optimization problems (2023) [https://www.researchgate.net/publication/364243097\\_YDSE\\_Codes](https://www.researchgate.net/publication/364243097_YDSE_Codes) [42]**

### 5. Quantification des Dommages à l'Aide d'Algorithmes d'Optimisation

Cette méthode d'identification a été implanté dans MATLAB R-2015-a, sur un PC équipé d'un processeur Intel R Core (TM) i3-2310 M CPU cadencé à 2.10 GHZ et doté de 4 Go de Ram.

SABO, GROS et YSDE sont utilisés pour quantifier les dommages dans les éléments localisés par l'indicateur Cornwell.

Le nombre d'itérations est fixé à 500 pour tous les cas en vue de la convergence. La taille de la population est fixée à 30 pour tous les algorithmes et tous les cas étudiés dans cette étude ; cette taille a fourni des résultats de très haute précision dans l'optimisation.

Les résultats obtenus sont illustrés dans les Figures N°24, N°25, N°26, N°27, N°28, N°29, N°30, N°31, N°32, N°33 et N°34.

### 5.1. STRUCTURE 2D

#### 5.1.1. Scénarios 01

Selon laFigure N°24, dans le scénario d'un seul dommage dans le treillis planaire à 31 éléments, on peut constater que les dommages sont quantifiés avec une grande précision par les trois algorithmes d'optimisation : SABO, GRO, YDSE. La convergence est atteinte par les trois techniques. Cependant, SABO et GRO ont convergés en premier, tandis que YDSE a convergé plus tard.

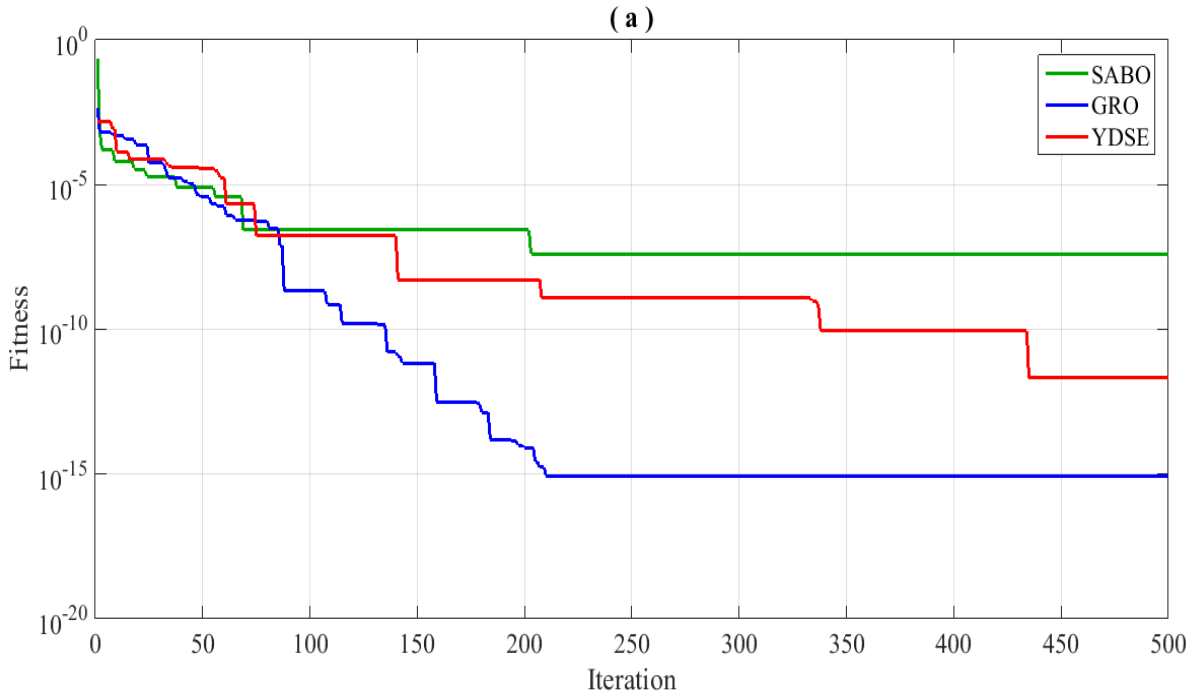


Figure 24 : Courbe de convergence de l'erreur structure 2D-31 éléments scénarios 01.

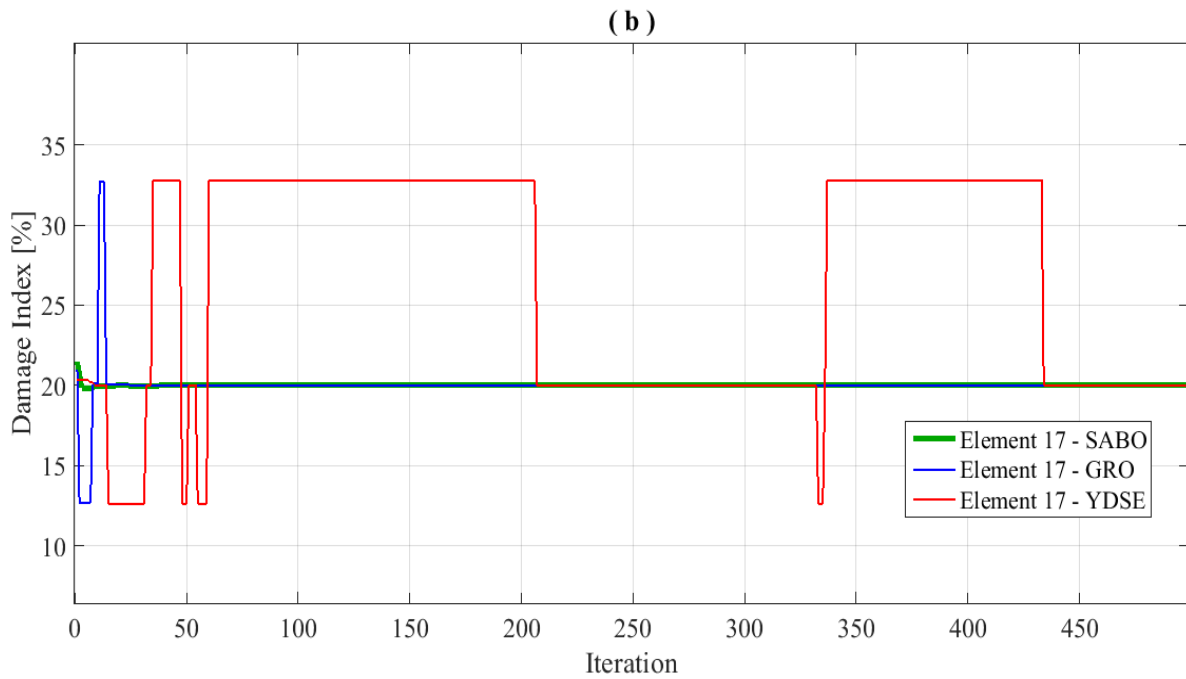


Figure 25 : Taux d'endommagement structure 2D-31 éléments scénarios 01

### 5.1.2. Scénarios 02

Pour le scénario 02 illustré dans la Figure N°26, le niveau de dommage est correctement évalué par tous les algorithmes, mais l'algorithme GRO se distingue par sa convergence plus rapide par rapport aux deux autres algorithmes, ce qui indique sa robustesse.

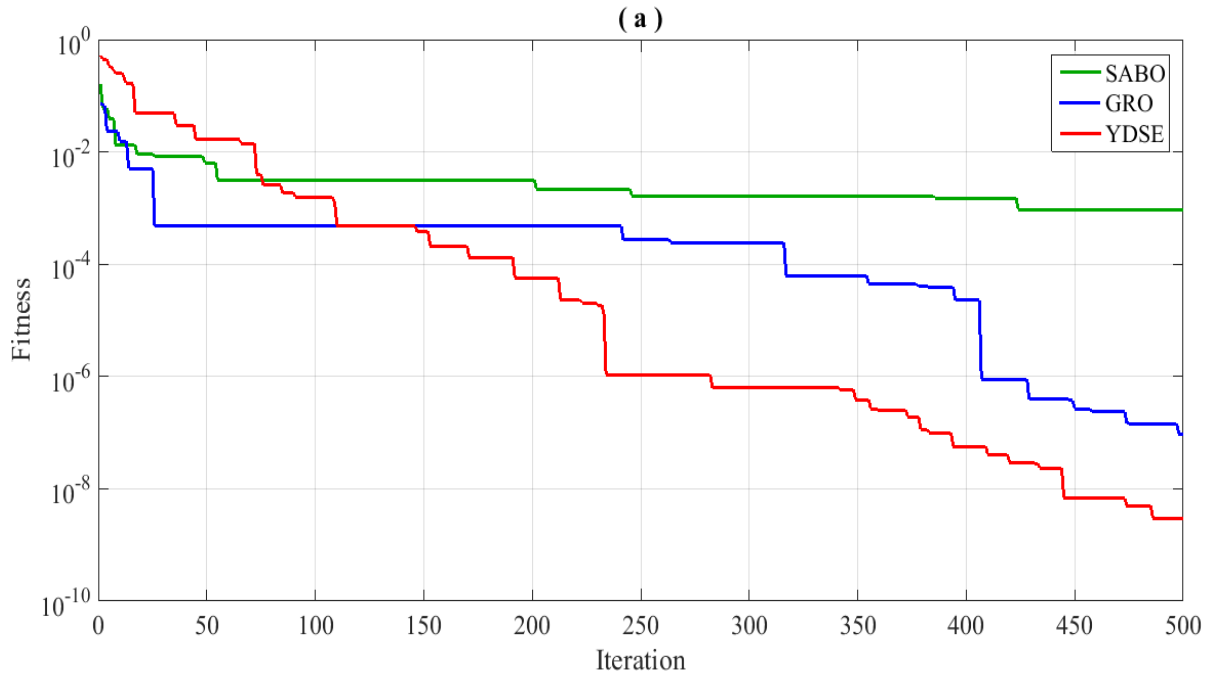


Figure 26 : Courbe de convergence de l'erreur structure 2D-31 éléments scénarios 02.

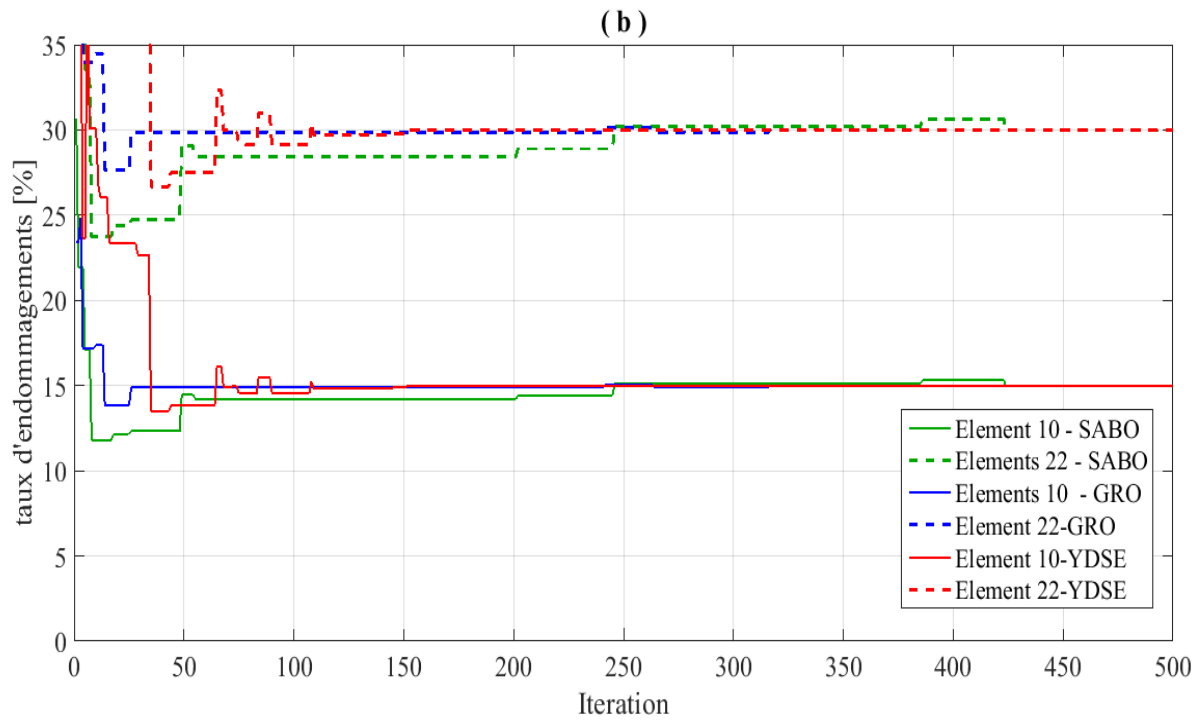


Figure 27 : Localisation et quantification des éléments endommagés structure 2D-31 éléments scénarios 02

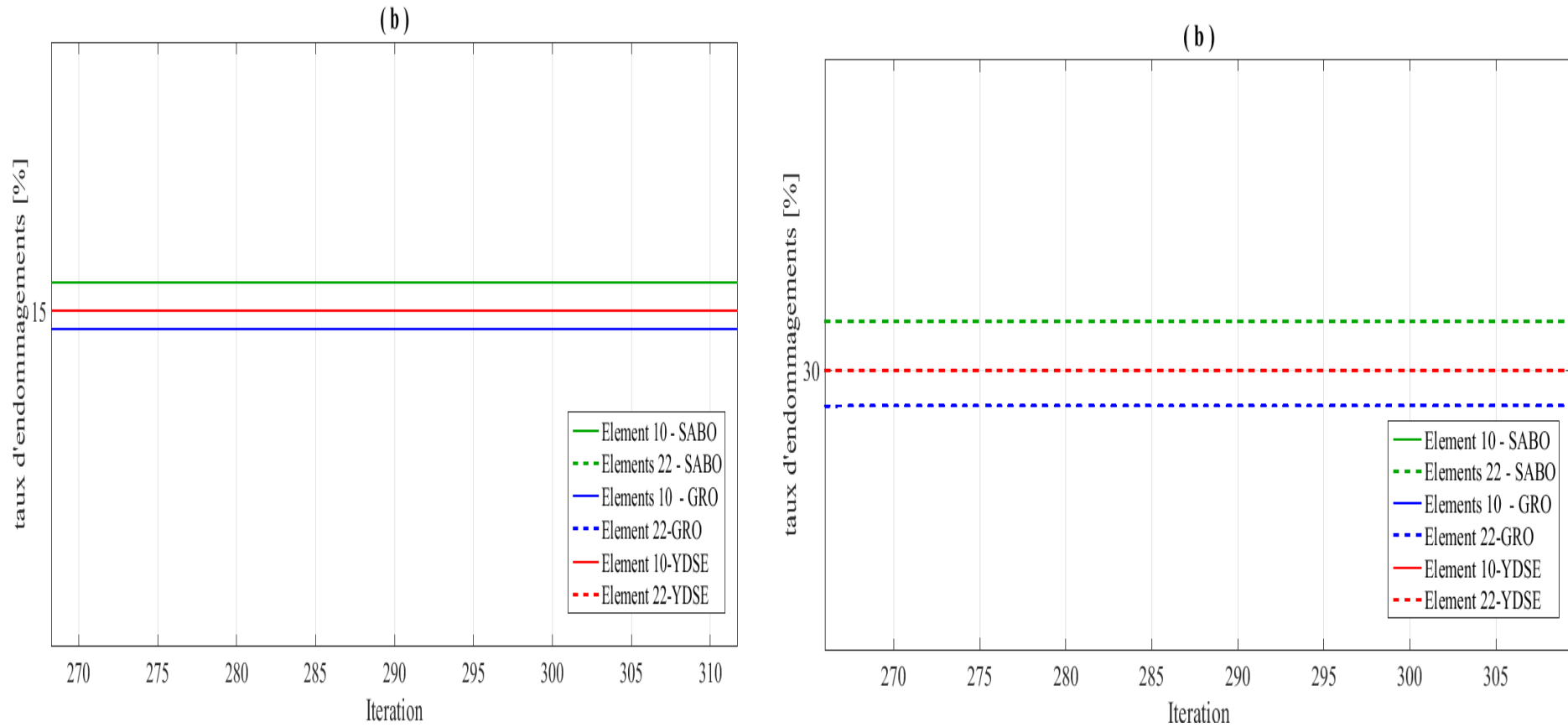


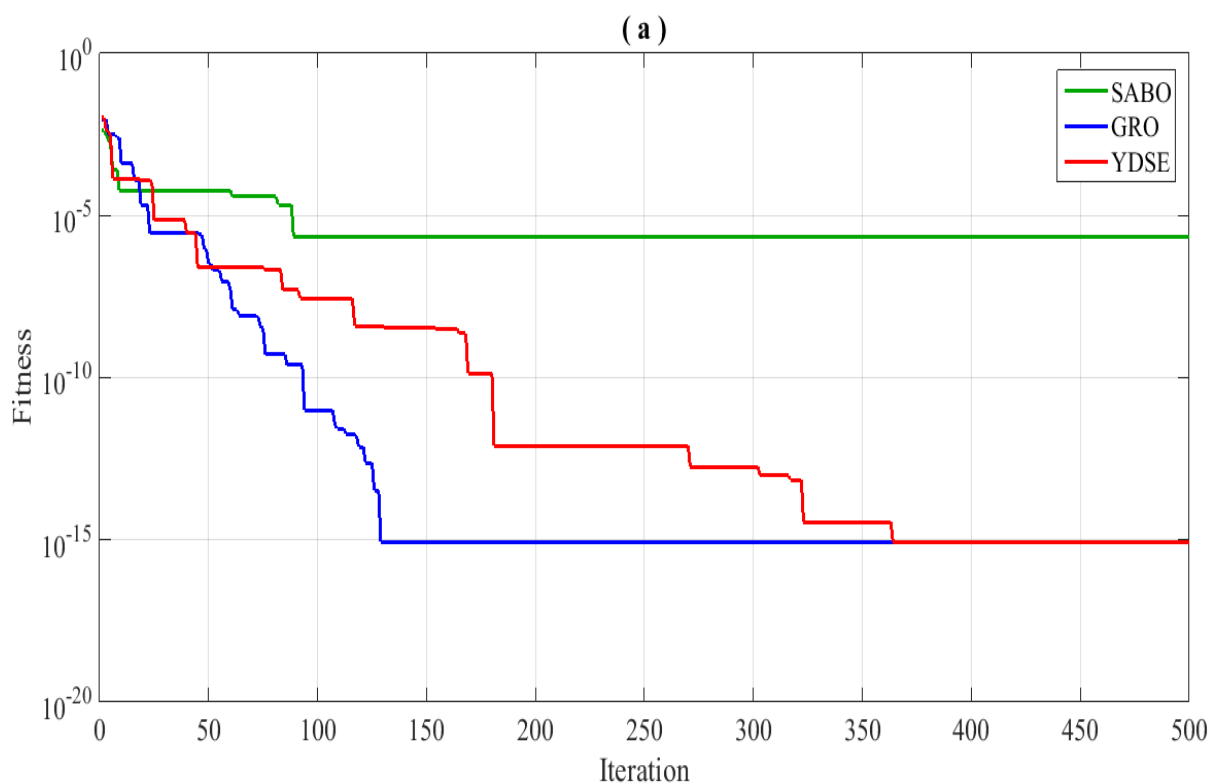
Figure 28 : Zoom de « taux d'endommagement structure 2D-31 éléments scénarios 02 »

### 5.2. STRUCTURE 3D

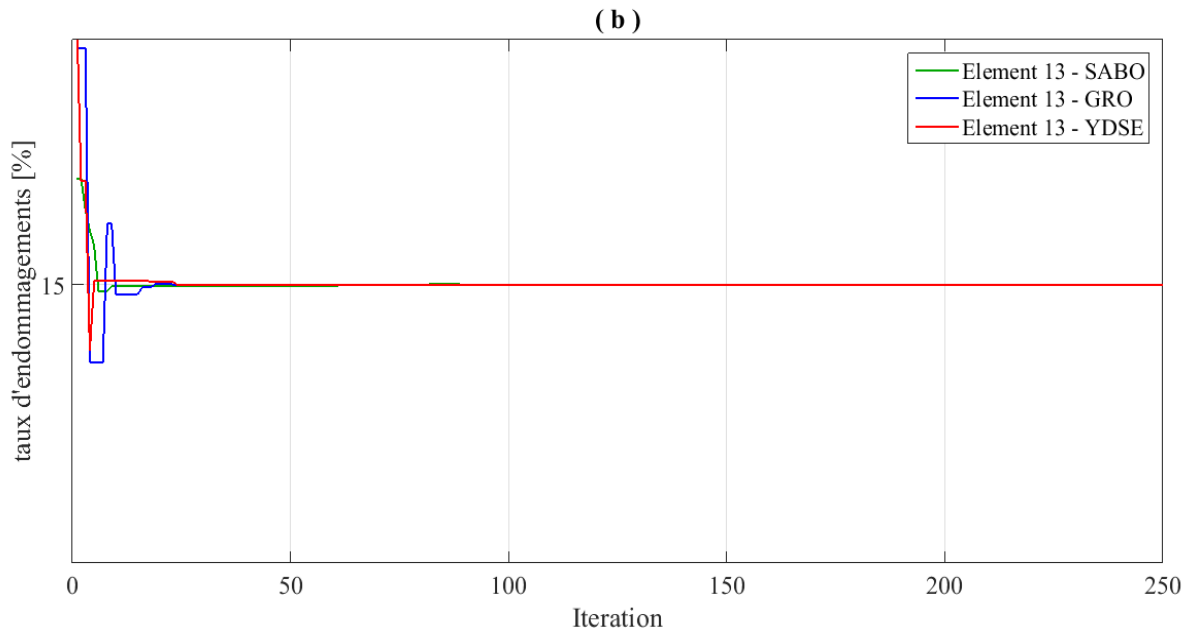
#### 5.2.1. Scénarios 01

Dans le scénario 01, la structure 3D a 25 éléments est soumise à un scénario de dommage unique.

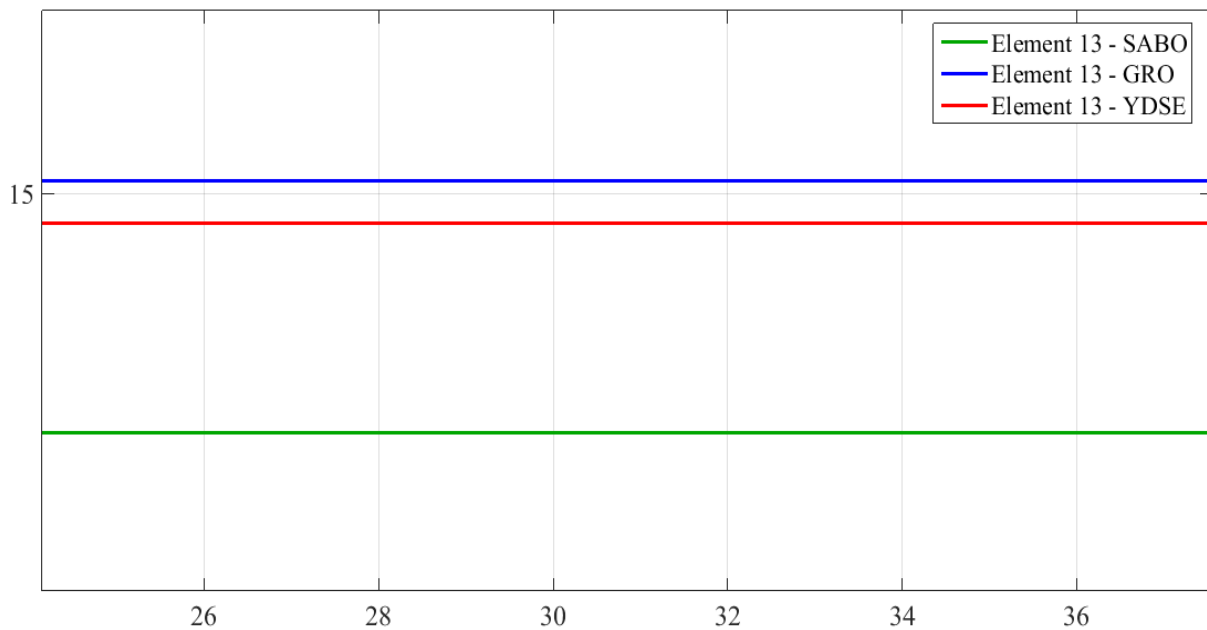
Selon les résultats illustrés dans la Figure N°29, nous pouvons voir que SABO, GRO et YDSE peuvent évaluer avec une grande précision la gravité des dommages. De plus, GRO a convergé en premier après peut d'itérations.



*Figure 29 : Courbe de convergence de l'erreur structure 3D-25 éléments scénarios 01.*



*Figure 30 : Localisation et quantification des éléments endommagés structure 3D-25 éléments scénarios 01*



*Figure 31 : Zoom « Localisation et quantification des éléments endommagés structure 3D-25 éléments scénarios 01 »*

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

### 5.2.2. Scénarios 02

Dans le dernier cas, les dommages multiples dans la structure 3D a 25 éléments sont identifiés avec précision. GRO a montré sa fiabilité en termes de convergence par rapport aux autres approches d'optimisation, comme illustré dans la Figure N°32.

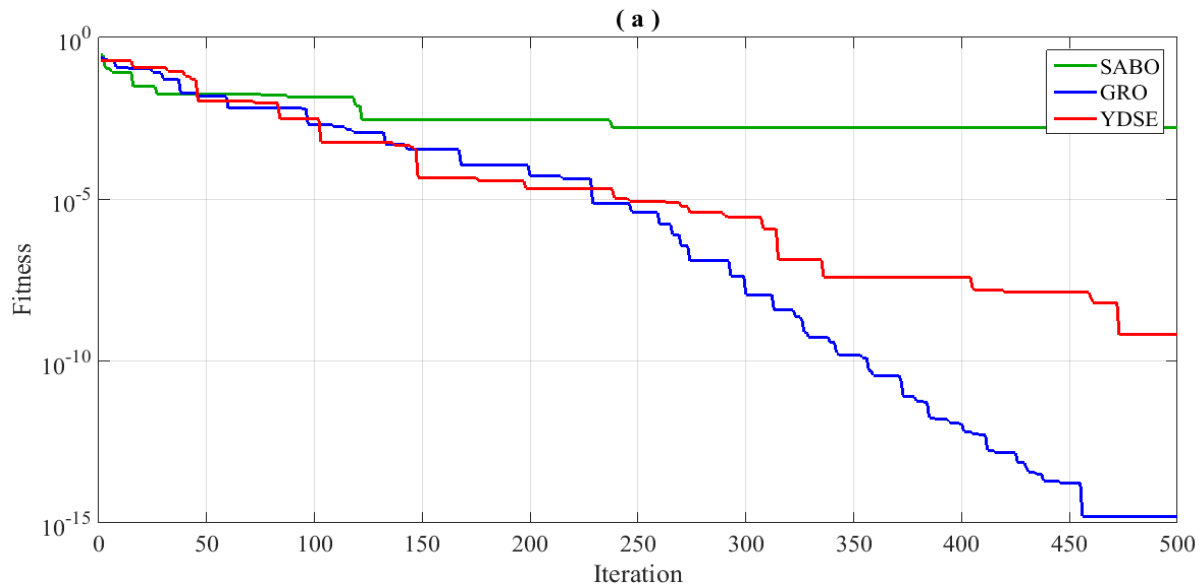


Figure 32 : Courbe de convergence de l'erreur structure 3D-25 éléments scénarios 02.

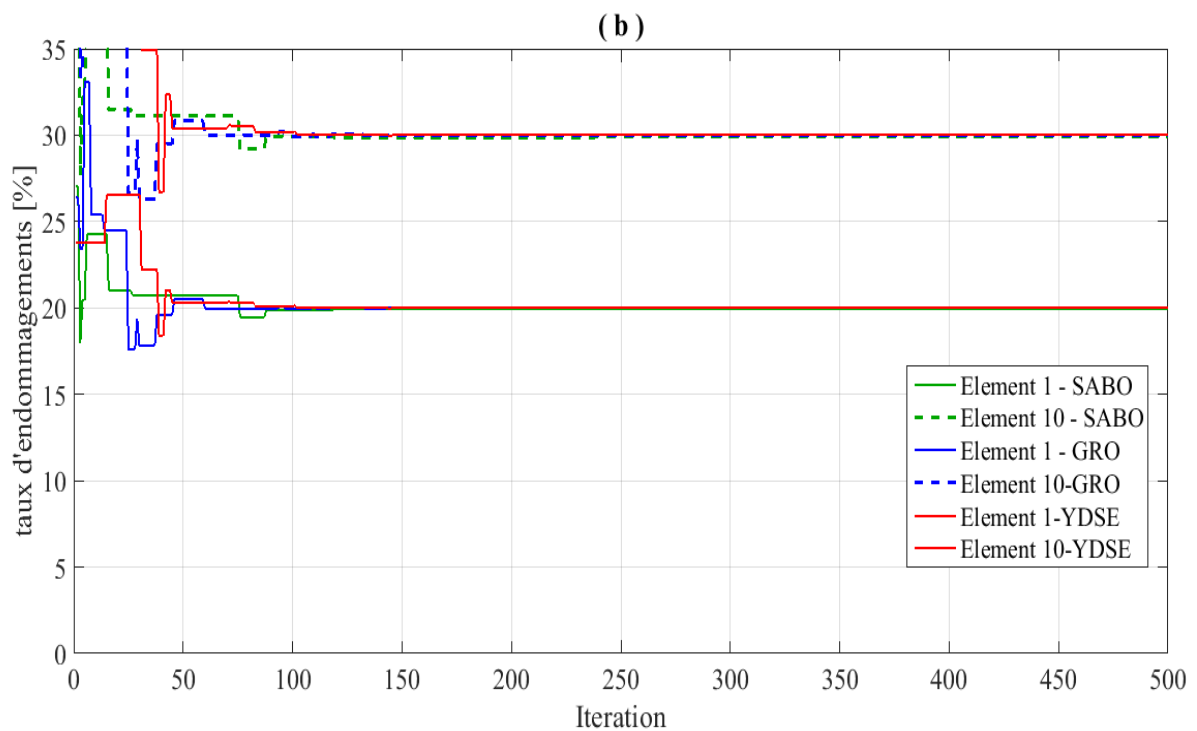


Figure 33 : Localisation et quantification des éléments endommagés structure 3D-25 éléments scénarios 02.

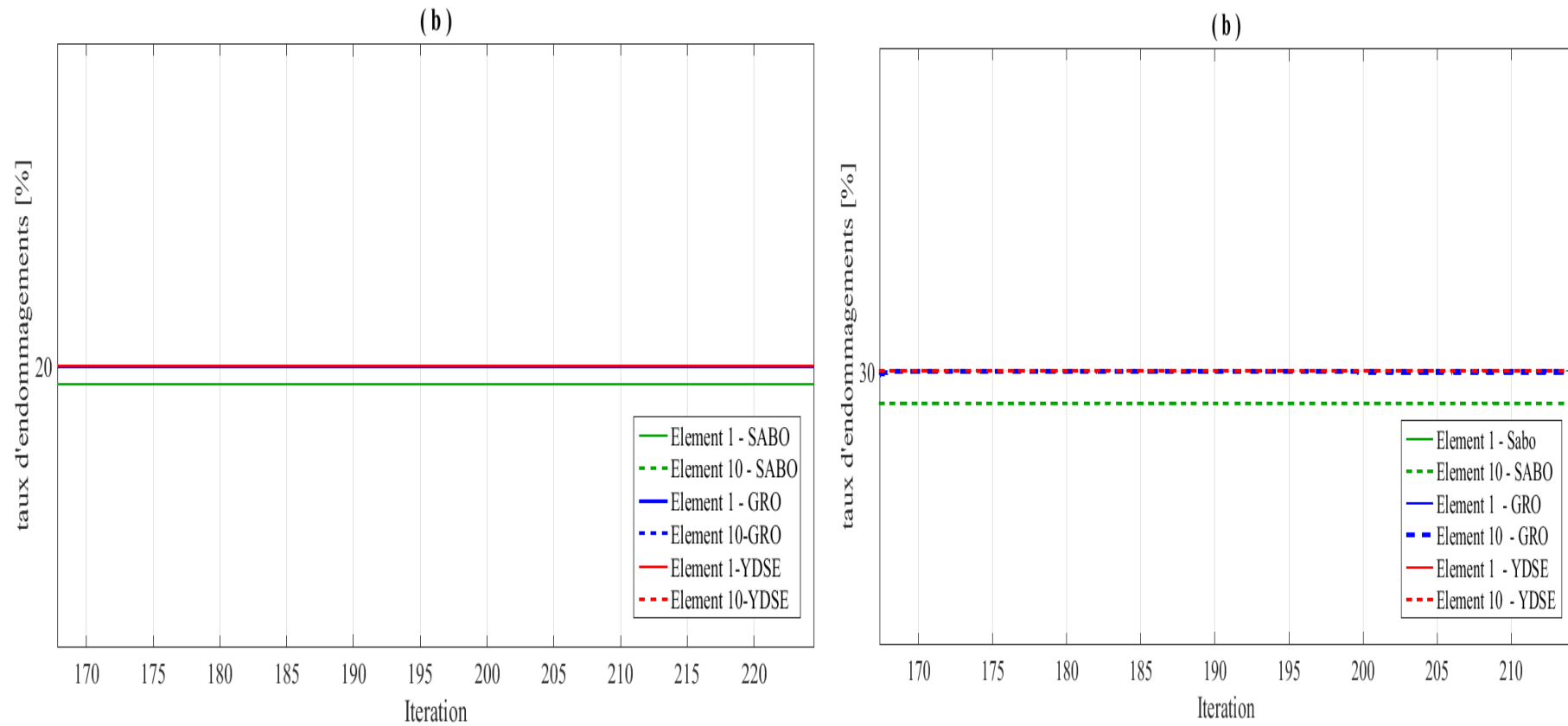


Figure 34 : Zoom « Localisation et quantification des éléments endommagés structure 3D-25 éléments scénarios 02 »

## Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification

Structures	Scénarios	Éléments	Itération					
			Algo .	1	150	300	400	500
Structure 2D -31 éléments	1	17	GRO	0,2096	0,1999	0,2000	0,2000	0,2000
			SABO	0,2145	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000
			YDSE	0,2033	0,3278	0,2000	0,3278	0,2000
	2	10	GRO	0,2340	0,1493	0,1493	0,1499	0,1500
			SABO	0,3868	0,1421	0,1421	0,1532	0,1497
			YDSE	0,3846	0,1990	0,1944	0,1500	0,1500
		22	GRO	0,4693	0,2986	0,2987	0,2999	0,3000
			SABO	0,5616	0,2845	0,2845	0,3061	0,2996
			YDSE	0,6149	0,2980	0,2997	0,3000	0,3000
Structure 3D- 25 éléments	1	13	GRO	0,1670	0,1499	0,1500	0,1500	0,1500
			SABO	0,1576	0,1500	0,1500	0,1500	0,1500
			YDSE	0,1695	0,1499	0,1500	0,1500	0,1500
	2	1	GRO	0,2638	0,1999	0,2000	0,2000	0,2000
			SABO	0,2702	0,1993	0,1993	0,1993	0,1998
			YDSE	0,2377	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000
		10	GRO	0,4496	0,2998	0,3000	0,3000	0,3000
			SABO	0,4715	0,2985	0,2985	0,2989	0,2989
			YDSE	0,3928	0,3000	0,3000	0,3000	0,3000

Tableau 8 : Comparaison des indices d'endommagements pour tous les scénarios.

Structures	Structure 2D-31 éléments		Structure 3D-25 éléments	
Scénarios	Scénario 01	Scénario 02	Scénario 01	Scénario 02
algo.				
GRO	216,9741	217,1449	604,9299	607,9484
SABO	218,5599	218,4757	596,1671	611,4022
YDSE	216,4758	217,4505	601,2626	608,6021

Tableau 9 : Les temps d'exécutions des algorithmes GRO, SABO et YDSE

## **Chapitre IV : Méthode d'optimisation et quantification**

---

### **Conclusion**

D'après les résultats obtenus nous remarquons que l'algorithme GRO donne des résultats très satisfaisant et fiable sur tous les scénarios, comparer aux deux autre algorithmes YDSE et SABO.

## *Conclusion générale*

Dans le cadre de notre travail, nous avons entrepris une étude consacrée à l'examen approfondi des méthodes de contrôle non destructif pour la détection des dommages dans les structures. Dans le premier chapitre, nous avons analysé en détail ces méthodes, mettant en évidence leurs avantages et leurs limites pour diverses applications. Nous avons ensuite poursuivi notre exploration en nous concentrant sur les méthodes de détection d'endommagement basées sur des données vibratoires, en évaluant leur capacité à détecter et à localiser les dommages en fonction de leurs avantages et inconvénients spécifiques.

Notre second chapitre nous a présenté le domaine de la modélisation avec l'introduction d'un modèle d'éléments finis pour le calcul des paramètres modaux des structures. Ce modèle, basé sur des formulations élémentaires et globales, nous a permis de résoudre efficacement des problèmes complexes de structures, en découpant celles-ci en éléments plus simples, rendant ainsi la résolution plus aisée. Les formulations énergétiques ont été utilisées pour aboutir à des systèmes d'équations linéaires modifiant le comportement statique et modal des structures. MATLAB a été l'outil de choix pour effectuer ces calculs avec efficacité et précision.

Le troisième chapitre a mis en avant l'utilisation de l'indicateur Cornwell pour la localisation des dommages, montrant sa capacité à identifier de manière fiable les éléments endommagés, quelle que soit leur position sur la structure en treillis. Enfin, le dernier chapitre a comparé différents algorithmes, en mettant en évidence l'efficacité de l'algorithme GRO par rapport à d'autres YDSE et SABO.

En conclusion, notre mémoire représente une avancée significative dans le domaine de la détection d'endommagement des structures mécaniques. En combinant une compréhension approfondie des méthodes de contrôle non destructif, une modélisation précise par la méthode des éléments finis, et l'utilisation novatrice de l'indicateur Cornwell, nous avons démontré la faisabilité et l'efficacité des méthodes avancées pour la détection de dommages. Nos travaux contribuent de manière significative à l'amélioration de la sécurité et de la durabilité des structures mécaniques, tout en ouvrant de nouvelles perspectives pour la recherche et l'application dans le domaine du génie mécanique.

# *Bibliographie*

- [1] Rytter, A., 1993, Vibration based inspection of civil engineering structures, Ph.D. Dissertation, Aalborg University, Denmark.
- [2] Saadat, S.A, Buckner, and Noori, M, N, Structural system identification and damage detection using the intelligent parameter varying technique : an experimental study, structural health monitoring, 6pp, (3.231-243).2007.
- [3] Lee, L, S, Karbhari, V M, and Sikoosky, C, Investigation of integrity and effectiveness of RC bridge deck rehabilitation with CFRP composition , Department of structural Engineering, University of California.2004.
- [4] Duggan D.M, Wallace E.R, Caldwell S.R, 1980, “ Measured and predicted Vibrational Behavior of Mexico Platforms“ In Proceedings of the 12<sup>th</sup> Annual Offshore Tech , Conf , 92- 100.
- [5] Kirmsher, P, G. 1994. “ The effect of discontinuities on the natural frequency of beams“, Proceeding of American Society of Testing and Materials, Vol. 44, pp.897-904.
- [6] Lifshitz, J.M. and Rotem, 1969. “ Determination of reinforcement unbonding of composites by a vibration technique“, Journal of Composite Materials, Vol. 3, pp. 412-423.
- [7] Cawley, P. and Adams, R.D. 1979. “Location of defects in structures from measurements of natural frequencies“, Journal of Strain Analysis for Engineering Design, Vol. 14, pp.49-57.
- [8] Gudmundson, P. 1982. “ Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes“, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 30, pp. 339.353.
- [9] Yuen, M. M. F, 1985, “ A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever“, Journal of Sound and Vibration, Vol. 103, pp. 301-310.
- [10] Osegueda, R.A., P.D. Dsouza, and Y. Qiang, 1992. “ Damage Evaluation of Offshore Structures Using Resonant Frequency Shifts, “ Serviceability of Petroleum, Process, and Power Equipment, ASME PVP 239/MPC 33,31-37.
- [11] Salawu, O.S.1997. 1997.“ Detection of structural damage through changes in frequency :A review“ Engineering Structures, Vol. 19, PP. 718-723.
- [12] Allemang, R. and Brown, D. (1982). Correlation coefficient for modal vector analysis. In proceedings of the International Modal Analysis Conference & Exhibit, pages 110-116.
- [13] Pandey, A. and Biswas, M. (1994). Damage detection in structures using changes in flexibility. Journal of Sound and Vibration, 169(1):3–17.

[14] Pandey, A., Biswas, M., and Samman, M. (1991). Damage detection from changes in Curvature Mode shapes. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2):321–332.

[15] Ho, Y. and Ewins, D. (2000). On the structural damage identification with mode shapes. In *Proceedings of the european COST F3 conference on system identification & structural health Monitoring*, pages 677–684. Universidad Politecnica de Madrid, Spain.

[16] Stubbs, N, Kim, J, and Topole, K. “An efficient and robust algorithm for damage localization in offshore platform“ *Proc. ASCE Tenth Structures Congress*.1992.

[17] Humar, J, Bagchi, A, and Xu, H. “ Performance of vibration based techniques for the identification of structural damage“ *Structural Health Monitoring* (5 :3), pp. (215-241).2006.

[18] Farrar, C. and Doebling, S. (1999). *Modal analysis and testing, chapter Damage detection II: field applications to large structures*. Nato science series. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherlands.

[19] Cornwell, P., Doebling, S., and Farrar, C. (1999). Application of the strain energy damage Detection method to plate-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2):359-374.

[20] Samir TIACHACHT, Amar BOUAZZOUNI. ” Méthode d’identification d’endommagements dans les structure mécaniques par mesures vibratoires ”.Département de Génie Mécanique Université de Tizi-Ouzou 2007.

[21] Wang, Z, Lin, R, M and Lim, M, K. “ Structural damage using measured FRF data“ *Computer methode in applied mechanics and engineering*, 147(1-2),pp. (187-197).1997.

[22] ALVANDI, Alireza. (2003). *Contribution à l’utilisation pratique de l’évaluation dynamique pour la détection d’endommagements dans les ponts*. Thèse doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, France.

[23] Mottershead, J. E., Kyprianou, A. and Ouyang, H, 2003, “Estimation of rotational frequency responses,” *Mechanical and Corrosion Properties, A – Key Engineering Materials*, 245/246, 157-116.

[24] Vanhoenaker, K., Schoukens, J., Guillaume, P. and Vanlanduit, S., 2004, “The use of multisine excitations to characterize damage in structures,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(1), 43-57.

[25] A.Amziani, A. Bouazzouni, 2006 « Energy flow method applied to the detection of structural damage ». ISMA S.C. Mohan, D.K. Maiti, D. Maity, 2014, "Structural assessment using FRF employing particleswarm optimisation".

[26] Williams, C and Salawu, O.S. “ Damping as a damage indication parameter

proceeding of the 15<sup>th</sup> international modal analysis conference, Orlando .FL,pp. (1531-1536). 1997.

[27] Modena, C, Sonda, D and Zonta, D. “ Damage localization in reinforced concrete structures by using damping measurements “ Mechanical and Corrosion properties, A-Key Engineering Materials. 167, pp. (132-141).1999.

[28] Ulm, F. J, J.L. Clément, and P. Argoul. “ Coefficient de comportement : approche chute identification“. Philosophical Transaction of the Royal Soceity of London Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences (359-1778), pp. (131-149).2001.

[29] Li J, Wu.B Zeng. Q. C and Lim.C.W.“A generalized flexibility matrix approach for structural damage detection“ Journal of Sound and Vibration.2010.

[30] Kazemi S., Fooladi A. and Rahai A.R., 2010, “Implemenntation of the modal flexibility variation to fault identification in thin plates”, Acta Astronautica, 66 (2010), 414-426.

[31] Edwin R and Guido D.R.“ A local flexibility method for vibration-based damage localization and quantification“ Journal of Sound and Vibration pp.(2367-2383).2010.

[32] Yan, A. and Golinval, J. (2005). Structural damage localization by combining flexibility and Stiffness methods. Engineering Structures, 27(12):1752–1761.

[33] Fritzen et al, 1998, “Damage detection based en modal updating methodes”, Mechanical Systems and Signal processing, Vol 12, pp. 163-186.

[34] Zang C. and Imregum M., 2003, “Structural damage detection and localization using FRF- based model updating approch”, Damage assessment of Structures, proceedings of IMAC 12,462-468.

[35] Bouazzouni, A. et Lallement G., 1995, “ Identification de modèles dynamiques dissipatif par addition de contraintes”, MECANIQUE INDUSTRIELLE ET MATERIAUX, Vol. 49, number 5, 99. 233-236

[36] ROCKY, K.C., EVANS, H.R., GRIFFITHS, D.W., NETHERCOT D.A., introduction à laMéthode des éléments finis, Eyrolles, Paris, 1979,228 pages

[37] M. Kerguignas, G, Caignaert. « Résistance des matériaux » Bordas, Paris, 1977-0416770311.

[38] J.-F. IMBERT. « Analyse des structures par éléments finis » CEPAD 1995.3<sup>e</sup> édition.

[39] [Gmür, 1997]. « Introduction à la mécanique des solides et des structures».3<sup>e</sup> édition.

## Bibliographie

---

[40] INTERNATIONAL JOURNAL OF OPTIMIZATION IN CIVIL ENGINEERING Int. J. Optim. Civil Eng., 2021; 11(2): 291-327).

[41] (Journal of Intelligent & Robotic Systems (2023) 107:8 An Improved Design of Knee Orthosis Using Self-Adaptive Bonobo Optimizer (SaBO)).

[42] (Young's double-slit experiment optimizer : A novel meta-heuristic optimization algorithm for global and constraint optimization problems (2023) [https://www.researchgate.net/publication/364243097\\_YDSE\\_Codes](https://www.researchgate.net/publication/364243097_YDSE_Codes))

*Liste des tableaux et  
figures*

### Liste des tableaux

<b>Tableau 1</b> : Propriétés des matériaux de la structure en treillis planaire à 31 barres. ....	46
<b>Tableau 2</b> : Scénarios des dommages pour la structure treillis planaire à 31 barres.....	46
<b>Tableau 3</b> : Tableau comparatif des Fréquences des Structures. ....	47
<b>Tableau 4</b> : Propriétés des matériaux de la structure en treillis 3D a 25 éléments. ....	47
<b>Tableau 5</b> : Scénarios des dommages pour la structure en treillis 3D a 25 éléments. ....	48
<b>Tableau 6</b> : Tableau comparatif des fréquences saines et endommagées de la structure 3D a 25 éléments. ....	49
<b>Tableau 7</b> : Conversion du code binaire au code gray .....	64
<b>Tableau 8</b> : Comparaison des indices d'endommagements pour tous les scénarios. ....	84
<b>Tableau 9</b> : Les temps d'exécutions des algorithmes GRO, SABO et YDSE.....	84

### Liste des figures

<b>Figure 1</b> : Géométrie d'un élément barre. ....	21
<b>Figure 2</b> : Modélisation d'un élément barre.....	22
<b>Figure 3</b> : Elément dans le repère global. ....	25
<b>Figure 4</b> : Elément barre spatiale.....	26
<b>Figure 5</b> : Elément poutre dans le plan avec 6 degrés de liberté.....	28
<b>Figure 6</b> : Elément poutre tridimensionnelle. ....	33
<b>Figure 7</b> : Axes locaux d'un élément poutre. ....	34
<b>Figure 8</b> : Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle.....	35
<b>Figure 9</b> : Axes principaux d'un élément poutre.....	36
<b>Figure 10</b> : Rotations correspondant à un élément vertical. ....	37
<b>Figure 11</b> : Charges sur un élément.....	39
<b>Figure 12</b> : Cas du poids propre d'une barre d'un treillis. ....	39
<b>Figure 13</b> : Structure trilles 2D à 31 éléments. ....	46
<b>Figure 14</b> : Structure en treillis 3D a 25 éléments.....	48

## Liste des tableaux et figures

---

<b>Figure 15:</b> Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement de l'élément 16 avant troncature. ....	50
<b>Figure 16:</b> Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement de l'élément 17 après troncature. ....	50
<b>Figure 17:</b> Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement des éléments 10 et 22 avant troncature. ....	51
<b>Figure 18:</b> Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement des éléments 10 et 22 après troncature. ....	51
<b>Figure 19:</b> Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement de l'élément 13 avant troncature. ....	52
<b>Figure 20:</b> Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement de l'élément 13 après troncature. ....	52
<b>Figure 21:</b> Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement des éléments 1 et 10 avant troncature. ....	53
<b>Figure 22:</b> Histogramme des valeurs Cornwell d'endommagement des éléments 1 et 10 après troncature. ....	53
<b>Figure 23 :</b> Processus de l'algorithme de l'optimisation .....	57
<b>Figure 24 :</b> Convergence des éléments endommagés structure 2D-31 éléments scénarios 01. ....	78
<b>Figure 25 :</b> Localisation et quantification des éléments endommagés structure 2D-31 éléments scénarios 01 .....	78
<b>Figure 26 :</b> Convergence des éléments endommagés structure 2D-31 éléments scénarios 02. ....	80
<b>Figure 27 :</b> Localisation et quantification des éléments endommagés structure 2D-31 éléments scénarios 02 .....	80
<b>Figure 28 :</b> Zoom de « Localisation et quantification des éléments endommagés structure 2D-31 éléments scénarios 02 » .....	79
<b>Figure 29 :</b> Convergence des éléments endommagés structure 3D-25 éléments scénarios 01. ....	83
<b>Figure 30 :</b> Localisation et quantification des éléments endommagés structure 3D-25 éléments scénarios 01 .....	84
<b>Figure 31 :</b> zoom « Localisation et quantification des éléments endommagés structure 3D-25 éléments scénarios 01 » .....	84

## Liste des tableaux et figures

---

<b>Figure 32 :</b> Convergence des éléments endommagés structure 3D-25 éléments scénarios 02. .....	85
<b>Figure 33 :</b> Localisation et quantification des éléments endommagées structure 3D-25 éléments scénarios 02. ....	85
<b>Figure 34 :</b> zoom « Localisation et quantification des éléments endommagées structure 3D- 25 éléments scénarios 02» .....	83

# *Table des matières*

**Table des matières**

**Remerciements ..... 1**

**Dédicaces ..... 1**

**Sommaire ..... 1**

**Nomenclature ..... 2**

**INTRODUCTION GÉNÉRALE.....1**

**Chapitre I : Méthodes de détection et localisation des endommagements .....3**

1. Introduction.....3

1.1. VIBRATION DES STRUCTURES MECANIQUES .....4

1.2. L'ENDOMMAGEMENT DES STRUCTURES.....4

1.3. DETECTION DE L'ENDOMMAGEMENT.....5

1.4. CLASSIFICATION DES METHODES DE DETECTION ET LOCALISATION DES  
ENDOMMAGEMENTS .....6

1.5. METHODES DE DETECTION D'ENDOMMAGEMENT.....7

1.5.1. Méthodes de détection d'endommagement basées sur la variation des fréquences  
7

1.5.2. Méthodes de détection d'endommagement basées sur le changement de forme  
modale 8

1.5.3. Méthodes de détection d'endommagement basées sur l'énergie de déformation  
modale 10

1.5.4. Méthodes de détection d'endommagement basées sur des mesures de fonction  
de réponse fréquentielle .....11

1.5.4. Méthodes de détection d'endommagement basées sur l'amortissement .....12

1.5.5. Méthodes de détection d'endommagement basées sur la variation des matrices  
de flexibilité modale .....12

1.5.6. Méthode recalage des matrices de masse et de raideur .....13

2. Conclusion .....14

**Chapitre II : Méthode des éléments finis .....16**

1. Généralités .....16

2. Démarche éléments finis.....	16
2.1. DISCRETISATION GEOMETRIQUE.....	17
2.2. DEFINITION DE L'APPROXIMATION NODALE.....	18
2.2.1. Etablissement de la relation entre déformations et déplacements.....	18
2.2.2. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations.....	19
2.3. CALCUL DES MATRICES ELEMENTAIRES.....	20
2.4. ASSEMBLAGE DES MATRICES ELEMENTAIRES .....	20
2.5. ELEMENT FINI BARRE .....	21
2.5.1. Élément barre dans le plan.....	22
2.5.2. Fonction d'interpolation .....	23
2.5.3. Relation entre déformation et déplacement .....	23
2.5.4. Matrice de rigidité de l'élément barre .....	24
2.5.5. Matrice de masse de l'élément barre.....	24
2.5.6. Transformation dans le repère global.....	24
2.6. ELEMENT BARRE TRIDIMENSIONNELLE.....	26
2.7. ELEMENT FINI POUTRE.....	27
2.7.1. Élément poutre dans le plan.....	28
2.7.2. Fonction d'interpolation .....	28
2.7.3. Relation entre déformation et déplacement .....	29
2.7.4. Matrice de rigidité d'un élément poutre dans le plan.....	30
2.7.5. Matrice de masse d'un élément poutre dans un plan .....	30
2.7.6. Transformation dans le repère global.....	31
2.8. ELEMENT POUTRE TRIDIMENSIONNELLE .....	32
2.8.1. LA MATRICE DE RIGIDITE .....	32
2.8.2. La matrice de masse .....	34
2.8.3. Transformation dans le repère global.....	34
2.9. CHARGES APPLIQUEES SUR LES ELEMENTS .....	38
2.10. ASSEMBLAGE DES MATRICES ELEMENTAIRES .....	39
2.11. SYSTEME D'EQUATIONS AUX VALEURS PROPRES.....	41
Conclusion .....	42
<b>Chapitre III : Localisation des dommages a l'aide de l'indicateur Cornwell</b> .....	<b>44</b>

## Table des matières

---

1. Indicateur Cornwel .....	44
2. Programmation de la méthode .....	46
2.1. STRUCTURE 2D 31 ELEMENTS .....	46
1.1. STRUCTURE 3D A 25 ELEMENTS .....	47
2. Localisation des dommages basee sur l'indicateur Cornwell .....	49
2.1. STRUCTURES TREILLIS 2D .....	49
2.1.1. Scénarios 01 .....	49
2.1.2. Scénarios 02 .....	51
2.2. STRUCTURE TREILLIS 3D .....	52
2.2.1. Scénarios 01 .....	52
2.2.2. Scénarios 02 .....	53
Conclusion .....	54
<b>Chapitre IV : Méthodes d'optimisation et quantification .....</b>	<b>55</b>
Introduction .....	55
1. Généralites sur les algorithmes d'optimisation .....	56
1.1. VARIABLE DU PROBLEME .....	57
1.2. CONTRAINTES .....	58
1.3. FONCTIONS OBJECTIVES .....	59
1.4. FONCTIONNE UNIQUE .....	59
1.5. FONCTIONNE MULTIPLE .....	59
1.6. LIMITES DES VARIABLES .....	61
2. Les types des algorithmes d'optimisation .....	62
2.1. ALGORITHMES DETERMINISTES .....	62
2.2. ALGORITHMES PROBABILISTES .....	62
2.3. ESPACE DE RECHERCHE .....	63
2.4. CODAGE GRAY .....	63
2.5. LES CINQ NIVEAUX D'ORGANISATIONS DES ALGORITHMES D'OPTIMISATION .....	64
3. Les paramètres d'un algorithme d'optimisation .....	65
3.1. L'ALGORITHME GOLD RUSH OPTIMIZER .....	66
3.1.1. Représentation de « gold rush optimization » .....	66

## Table des matières

---

3.2. L'ALGORITHME BONOBO .....	70
3.3. L'ALGORITHME YOUNG'S DOUBLE SLIT EXPERIMENT .....	73
3.3.1. Étape d'initialisation .....	75
4. Le principe de Huygens .....	75
5. Quantification des dommages à l'aide d'algorithmes d'optimisation .....	76
5.1. STRUCTURE 2D .....	77
5.1.1. Scénarios 01 .....	77
5.1.2. Scénarios 02 .....	79
5.2. STRUCTURE 3D .....	83
5.2.1. Scénarios 01 .....	83
5.2.2. Scénarios 02 .....	85
Conclusion .....	85
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE .....</b>	<b>86</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>87</b>
<b>Liste des tableaux .....</b>	<b>92</b>
<b>Liste des figures .....</b>	<b>92</b>
<b>Table des matières .....</b>	<b>96</b>

