



UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À LA GESTION
Par Ghiles, ARHAB

THÉORIE DES JEUX

Application : Duopole de Cournot

Sous la direction de ACHEMINE, Farida

Membres du jury :

Mme. ZERDANI, Ouiza MCA UMMTO Présidente
Mme. FAHEM, Karima MCB UMMTO Examinatrice
Mme. ACHEMINE, Farida MCA UMMTO Encadreur

Remerciements

Ce mémoire est l'aboutissement d'un long parcours que je n'aurais pas pu réaliser seul.

Je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'accomplissement de ce cheminement.

Un merci tout particulier à mes amis et à ma famille pour leur soutien moral.

Je dédie ce mémoire à mes parents pour m'avoir encouragé et permis d'entreprendre cette formation. Sans eux, je n'en serais pas là.

« *Le monde devrait remercier cette étonnante cohorte de gens qui font toujours preuve d'une insolente et illogique gentillesse* ». (Hélène Thomas)

Table des matières

Introduction	6
1 Notions de base de la théorie des jeux	7
1.1 Généralités	7
1.1.1 Définition d'un jeu	7
1.1.2 Définition d'un joueur	7
1.1.3 Définition d'une stratégie	7
1.1.4 Définition d'une utilité (gain)	8
1.2 Classification des jeux	8
1.2.1 Jeux coopératifs	8
1.2.2 Jeux non coopératifs	8
1.2.3 jeux à information complète	9
1.2.4 jeux à information parfaite	9
1.3 Jeux sous forme normale (stratégique)	9
1.3.1 Définition d'un jeu sous forme normale	9
1.3.2 Définition d'un jeu fini à n joueurs	10
1.3.3 Définition d'un jeu bi-matriciel	10
1.4 Quelques concepts de solutions pour les jeux sous forme normale	11
1.4.1 Équilibre en stratégie dominante	12
1.4.2 Équilibre en stratégie maxmin	14
1.4.3 Équilibre de Nash	14
2 Quelques résultats sur l'équilibre de Nash	16
2.1 Introduction	16
2.2 Équilibre de Nash et meilleures réponses	16
2.2.1 Correspondance des meilleures réponses	16
2.2.2 Conditions d'existence de l'équilibre de Nash	18
2.3 Résolution d'un jeu matriciel par la programmation linéaire	24

2.3.1	Définition du point selle en stratégies pures	24
2.3.2	Définition du point selle en stratégies mixtes	27
2.3.3	Résolution par la programmation linéaire	28
2.3.4	La méthode du Pivot pour la résolution des jeux matriciels	32
3	Duopole de Cournot	36
3.1	Introduction	36
3.2	Le duopole de Cournot	36
3.2.1	Modèle mathématique	37
	Conclusion générale	40
	Bibliographie	41

Introduction

La théorie des jeux est un champ des mathématiques qui a pour objet d'établir un ensemble d'outils analytiques et de les étudier afin de comprendre et de modéliser différents types d'interactions stratégiques entre plusieurs preneurs (appelés agents en économie ou bien joueurs en théorie des jeux), rationnels et sous l'hypothèse que les choix et les bénéfices d'un joueur dépendent non seulement de sa décision, mais également des décisions des autres joueurs.

La théorie des jeux englobe une large gamme de domaines d'application tels que les sciences sociales, les sciences politiques, l'analyse stratégique comme en relations internationales ou en théorie des organisations ainsi qu'en biologie évolutionniste, mais c'est en économie que la théorie des jeux a le plus brillé grâce notamment aux travaux de Oskar Morgenstern et John von Neumann en 1944 dans leur ouvrage *Theory of Games and Economic Behavior* qui est considéré jusqu'à nos jours comme le fondement de la théorie des jeux moderne, et comme étant un outil théorique très important pour la microéconomie. Ainsi Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux.

Chapitre 1

Notions de base de la théorie des jeux

1.1 Généralités

Cette partie est consacrée aux définitions de base de la théorie des jeux.

1.1.1 Définition d'un jeu

Un jeu est une activité encadrée par des règles définies à l'avance : Les règles du jeu, la plupart des jeux de société décrivent en détail comment le jeu évolue et ce que tout joueur peut et ne peut pas faire à chaque étape, où les participants (les joueurs) doivent faire des choix et dont les derniers dépend l'issue du jeu, à la quelle est associé un gain positif, négatif ou nulle.

1.1.2 Définition d'un joueur

Un joueur est un acteur participant au jeu l'ensemble des parties prenantes au jeu (joueurs) est noté n , un joueur quelconque est noté i et donc $i = 1, 2, \dots, n$

1.1.3 Définition d'une stratégie

Une stratégie est une description complète du comportement d'un joueur à chaque circonstance possible du jeu, à ne pas confondre avec un coup, un coup est une action prise par un joueur à un moment donnée du jeu (par exemple au échec déplacer le cavalier blanc de la case b1 vers c3). Une Stratégie s'apparenterait donc beaucoup plus à un Algorithme complet pour jouer au jeu plutôt qu'à une action distincte.

On distingue deux types de stratégies : *Stratégies pures* et *stratégies mixtes*, Les *stratégies pures* déterminent pour chaque situation donnée une action bien déterminée, alors que les stratégies mixtes intègrent des choix aléatoires.

Les ensembles des stratégies possibles pour chacun des n joueurs est noté S_i . Une stratégie du joueur i est notée s_i avec $s_i \in S_i$.

Les stratégies possibles s_i sont appelées *Stratégie pures*. Une issue $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ est une combinaison possible de stratégies des n joueurs.

1.1.4 Définition d'une utilité (gain)

C'est le paiement obtenu par le joueur i lorsque les n joueurs choisissent l'issue $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$. On considère explicitement que le résultat obtenu par l'agent i (utilité, profit, ...) est fonction non seulement de sa propre stratégie mais également de l'ensemble des stratégies choisies par tous les autres joueurs.

1.2 Classification des jeux

1.2.1 Jeux coopératifs

Un jeu est dit coopératif lorsque les joueurs peuvent former une coalition (s'engager de façon contractuelle), communiquer entre eux et chercher l'intérêt général pour leur équipe afin de se partager les gains qui sont plus important qu'en cas de statu quo, sans quoi la coopération n'aurait pas lieu d'être, ainsi, la plupart des interactions socioéconomiques sont des jeux coopératifs (jeux de négociations).

Exemples :

- Négociation salariale.
- Négociation commerciale.
- Etablissement d'un accord de coopération.

1.2.2 Jeux non coopératifs

Dans un contexte non coopératif, les joueurs sont entièrement libres de leurs décisions au moment où ils font leurs choix et agissent selon le principe de rationalité économique : chacun cherche à prendre les meilleures décisions pour lui-même (c'est à dire à maximiser égoïstement ses gains individuels).

Exemple :

Prenons l'exemple de notre fournisseur d'accès internet national 'Algérie Télécom (AT)', qui propose plusieurs classes de services qui se distinguent par la qualité de chaque service (le débit offert, les délais etc.) mais aussi par le coût du service. On peut alors identifier une situation de jeux non-coopératif entre les abonnés. En effet, la qualité de service perçue par un abonné peut dépendre des choix de chaque autre abonné. L'équilibre qui décrit les décisions prises par les abonnés va déterminer les gains du fournisseur de service. Ce dernier a donc intérêt à choisir les qualités de service qu'il offre ainsi que leurs coûts d'une manière à maximiser ses profits, et cela en tenant compte de l'équilibre entre les abonnés qui sera engendré par ses décisions (La répartition générale des abonnés sur les différentes offres). Les choix de qualité de service imposent bien sûr des choix d'architecture du réseau ainsi que des politiques de gestion de ce dernier, ce qui rend le problème pertinent pour l'ingénierie de réseau.

1.2.3 jeux à information complète

On dit qu'un jeu est à information complète si tous les joueurs connaissent parfaitement les données du jeu. Dans le cas contraire on dit que le jeu est à information incomplète.

1.2.4 jeux à information parfaite

On dit qu'un jeu est à information parfaite si chaque joueur est informé des actions passées des autres joueurs et de leurs conséquences sur le déroulement du jeu, dans le cas contraire on parle de jeu à information imparfaite .

1.3 Jeux sous forme normale (stratégique)

1.3.1 Définition d'un jeu sous forme normale

Ce concept est né du génie des mathématiciens **Emile Borel** et **John von Neumann** aux années 1920 et qui n'est autre qu'une abstraction du problème concret à une description générale de ce dernier (jeu, interaction...), un certain nombre de facettes de ce problème doit donc être négligé et réduit à un minimum absolu afin de pouvoir se concentrer sur les aspects essentiels de l'interaction.

- Il s'agit d'un jeu à information complète.
- Il s'agit d'un jeu simultané (statique) où chaque joueur choisit une stratégie indépendamment du choix de l'autre joueur et le jeu ne se répète pas.

- On suppose aussi que chaque joueur est rationnel et cherche donc à maximiser son paiement, et donc chercher les stratégies avec le plus de probabilité être adopter, ce qui est une question difficile car le paiement d'un joueur ne dépend pas uniquement de son choix, mais aussi de celui des autres.

Un jeu sous forme normale est donné par

- Un nombre fini de joueurs I ;
- Un ensemble de stratégies (dites pures, ou actions) $S^{n_i} \subset \mathbb{R}^{n_i}, n \in \mathbb{N}$, pour chaque joueur $i \in I$;
- Une fonction de paiement du joueur i , $U_i : S = \prod_{j=1}^n S_j \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$.

À l'effet de différencier entre la stratégie du joueur i et celle des autres joueurs, U_i peut s'écrire sous la forme suivante

$$U_i = U_i(s) = U_i(s_i, s_{-i})$$

avec $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

S_{-i} désigne le sous-ensemble des stratégies choisies par les joueurs autre que le joueur i .

Nous utiliserons donc la formulation suivante pour représenter un jeu statique sous forme normale

$$G = \langle I, S, U = (U_1, U_2, \dots, U_n) \rangle.$$

1.3.2 Définition d'un jeu fini à n joueurs

Un jeu est dit fini si chaque joueur a un nombre fini de stratégies, c'est à dire le cardinal de S_i est fini : $|S_i| < \infty$, pour $i \in I$.

1.3.3 Définition d'un jeu bi-matriciel

Dans le cas d'un jeu bi-matriciel (à deux joueurs), le jeu est défini par une paire de matrices réelles $m \times n$ dites matrices de paiements, soit (A, B) où $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. On fait correspondre les lignes au joueur 1 et les colonnes au joueur 2. Ainsi, le paiement du joueur 1 dans la situation où il choisit la stratégie i et son adversaire la stratégie j est a_{ij} , celui du joueur 2 est b_{ij} .

On distingue deux types de jeux bi-matriciels : les jeux à somme nulle et les jeux à somme non nulle. Les jeux à somme nulle sont tels que les paiements de chacun des joueurs sont opposés, c'est à dire $A = -B$. Ces jeux sont donc strictement compétitifs.

1.4. QUELQUES CONCEPTS DE SOLUTIONS POUR LES JEUX SOUS FORME NORMALE

L'autre classe de jeux que l'on peut donc définir comme non strictement compétitifs, ne vérifie donc pas cette condition.

Exemple :

Nous allons illustrer les jeux non strictement compétitifs par un exemple qui est devenue aujourd'hui un classique en théorie des jeux et qui est dû à **A.W. Tucker** (Ce jeu existe en de nombreuses variantes) appelé **Le dilemme du prisonnier** .

	ne pas avouer	avouer
ne pas avouer	(-1,-1)	(-10,0)
avouer	(0,-10)	(-5,-5)

La formalisation matricielle du jeu est donnée dans le tableau ci-dessus. On peut interpréter le jeu comme suit : deux suspects sont arrêtés par la police et interrogés séparément. Le procureur est persuadé de leurs culpabilité. Mais n'a pas de preuves suffisantes pour les inculper. Il va donc dire à chacun des suspects qu'il a deux alternatives possibles : avouer ou ne pas avouer. Si les deux suspects n'avouent pas, ils seront incarcérés chacun pour un an. Si l'un des deux avoue et l'autre non. Celui qui avoue sera libéré et l'autre sera incarcéré pour dix ans. Enfin si les deux avouent ils seront incarcérés tous les deux pour trois ans. Dans ces conditions un suspect a donc tout intérêt à avouer quoi que son complice fasse. On voit ici que l'issue du jeu serait complètement différente si les deux complices pouvaient communiquer. Ils choisiraient alors conjointement de ne pas avouer.

1.4 Quelques concepts de solutions pour les jeux sous forme normale

En théorie des jeux, le concept de solution est un processus par lequel les équilibres d'un jeu sont identifiés. Ils sont donc employés comme des prédictions de jeu, suggérant quel sera le résultat du jeu, c'est-à-dire quelles stratégies seront ou pourront être employées par les joueurs.

Résoudre un jeu : prédire une issue probable, "logique".

Pour cela, il convient de définir un concept de solution.

Dans ce qui suit, on suppose que les joueurs sont rationnels et cherchent à maximiser leurs gains.

1.4.1 Équilibre en stratégie dominante

En théorie des jeux, on appelle concept de solution un ensemble de conditions que doivent vérifier les combinaisons (ou profils) de stratégies choisies par les joueurs pour qu'elles soient considérées comme des "solutions" du jeu.

On peut définir un concept de solution (un équilibre) comme un ensemble de lois (aboutissant à des équations mathématiques) qui permettent de sélectionner parmi toutes les issues possibles, un sous ensemble d'issues satisfaisant certaines propriétés, jugées désirables.

Une fois l'équilibre atteint par un joueur dans un jeu, il n'a pas d'intérêt à le quitter.

Définition 1. (*Définition d'une stratégie dominée*) Une stratégie s_i est dite strictement dominée dans le jeu G si il existe une stratégie t_i de i telle que

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, U_i(s_i, s_{-i}) < U_i(t_i, s_{-i}).$$

On dira dans ce cas que t_i domine strictement s_i .

Si s_i est strictement dominée par t_i alors, face à n'importe quelle stratégie des autres joueurs, en jouant t_i , le joueur i gagne strictement plus que ce qu'il aurait gagné en jouant s_i .

Il paraît donc naturel et logique de supposer qu'un joueur rationnel (qui cherche à maximiser son gain), ne va jamais jouer une stratégie strictement dominée.

Sous les hypothèses

H_1 : Un joueur rationnel ne joue jamais une stratégie dominée.

H_2 : Les joueurs sont rationnels.

Définition 2. Une situation $s = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^*) \in S$ est appelée équilibre en stratégie dominante, si chaque composante $s_i^* \in S_i$ est une stratégie dominante pour le joueur i , $\forall i \in N$.

Exemple 3. On considère le jeu à deux joueurs représenté par la matrice de paiement suivante :

	b_1	b_2	b_3
a_1	(11,11)	(5,10)	(5,12)
a_2	(6,7)	(9,4)	(4,5)
a_3	(5,5)	(9,2)	(6,8)

Ce tableau indique que l'ensemble des stratégies du joueurs ligne est $S_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ et celui du joueur colonne est $S_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$.

1.4. QUELQUES CONCEPTS DE SOLUTIONS POUR LES JEUX SOUS FORME NORMALE

Au niveau de chaque cellule de la matrice, le nombre de gauche représente l'utilité du joueur 1 (joueur ligne), et le celui de droite l'utilité du joueur 2 (joueur colonne).

On suppose que les joueurs sont rationnels et chacun cherche à maximiser son gain. cherchons donc à déterminer l'équilibre par :

Elimination répétées des stratégies strictement dominées :

- On remarque que b_1 procure un gain plus grand au joueur 2 que celui que lui procure la stratégie b_2 et ce quelle que soit la stratégie choisie par le joueur 1.

b_2 est strictement dominée par b_1 . Un joueur rationnel ne jouera jamais cette stratégie (b_2), elle peut donc être éliminée du jeu.

	b_1	b_3
a_1	(11,11)	(5,12)
a_2	(6,7)	(4,5)
a_3	(5,5)	(6,8)

Le joueur 2 élimine la stratégie b_2 du jeu et comme le joueur 1 est rationnel, il sait que le joueur 2 a éliminé la stratégie b_2 du jeu. L'examen de la matrice des paiements montre que la stratégie a_2 est strictement dominée par a_1 . Donc la stratégie a_2 est éliminée du jeu et on obtient la matrice des paiements

	b_1	b_3
a_1	(11,11)	(5,12)
a_3	(5,5)	(6,8)

On a la stratégie b_1 est strictement dominée par b_3 , donc b_1 est éliminée du jeu.

	b_3
a_1	(5,12)
a_3	(5,8)

La stratégie a_1 est strictement dominée par la stratégie a_3 , donc la stratégie a_1 est éliminée.

Ainsi, l'issue finale du jeu est (a_3, b_3) appelée équilibre en stratégie strictement dominante.

1.4.2 Équilibre en stratégie maxmin

Le joueur i est prudent ou pessimiste, il croit qu'en utilisant la stratégie s_i , les autres joueurs vont choisir le vecteur de stratégie s_{-i} qu'il redoute le plus.

$$U_i(s_i, s_{-i}) = \min_{t_{-i} \in S_{-i}} U_i(s_i, t_{-i})$$

Dans ce cas, si il est rationnel, alors il va jouer la stratégie s_i^* qui maximise son paiement étant donné sa croyance.

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} U_i(s_i^*, s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} \inf_{s_{-i} \in S_{-i}} U_i(s_i, s_{-i}) = \underline{v}_i.$$

Donc, si le joueur i , joue la stratégie s_i^* alors il est sûr, qu'au pire des cas, d'obtenir le paiement : \underline{v}_i

Définition 4. s_i est appelée stratégie maxmin (appelée aussi stratégie prudente ou de garantie) du $i^{\text{ème}}$ joueur. Et v_i est appelée la valeur maxmin (le gain minimal garanti) du joueur i . Un vecteur de stratégies où tous les joueurs utilisent une stratégie maxmin est appelé : vecteur de stratégie maxmin.

le gain minimal garanti du joueur i , est aussi appelé niveau de sécurité (i.e ce qu'obtient le joueur i quand ses adversaires jouent le profil qui lui est le plus défavorable).

Exemple 5. Soit la bi-matrice de jeu suivante :

	L	R
T	(3,0)	(0,4)
B	(2,3)	(1,1)

Le vecteur de stratégie maxmin est : $((B, R))$.

1.4.3 Équilibre de Nash

Le concept de solution, pour le jeu sous forme normale G , le plus communément admis est sans conteste celui proposé par John Nash.

L'équilibre de Nash est un type de solution proposé par John Forbes Nash en 1950 couramment utilisé en théorie des jeux, dont la définition même souligne le caractère autoréalisateur. Un équilibre de Nash est en effet, une combinaison de stratégies où chacun anticipe correctement les choix des autres, il y a autoréalisation, puisque l'issue réalisée est le fruit de décisions prises en pensant qu'elle va se réaliser. En fait, la grande et seule

1.4. QUELQUES CONCEPTS DE SOLUTIONS POUR LES JEUX SOUS FORME NORMALE

question que se pose un joueur au moment de faire son choix est, en théorie des jeux : que va faire l'autre ? Ses croyances concernant le comportement des autres ont donc un rôle essentiel au moment de la décision. Un équilibre de Nash est un profil de stratégies où aucun joueur n'a intérêt à dévier individuellement de sa stratégie.

On peut le définir aussi de la façon suivante : C'est un profil de stratégies avec lequel les joueurs n'ont pas de regrets après avoir vu les stratégies des autres joueurs.

Définition 6. Un profil de stratégies $(s^* = (s_i^*)_{i \in I})$ est un équilibre de Nash du jeu sous forme normale G si et seulement si,

$$\forall i \in I, \forall s_i \in S_i : U_i(s_i, s_{-i}^*) \leq U_i(s_i^*, s_{-i}^*)$$

Exemple 7. (La bataille des sexes Dont voici l'énoncer) Une femme et son mari cherchent une idée de sortie, le mari propose d'aller voir le match de foot de son équipe préférée et la femme propose elle d'aller à un concert de son chanteur préféré. Chacun essaie donc de convaincre son partenaire mais il est sûr que aucun des deux ne veut sortir non accompagné de son époux ou de son épouse. On peut donc représenter ce jeu sous la forme de la matrice suivante :

	<i>Femme</i>	
	<i>Foot</i>	<i>Concert</i>
<i>Homme</i>	<i>Foot</i>	<i>Concert</i>
	$(4,2)$	$(1,1)$
	$(0,0)$	$(2,4)$

si chacun pense à la fois à son intérêt et à l'intérêt du couple, on aboutirait à un gain de $(4,2)$ ou $(2,4)$ (cela dépend de la personne qui "céderait" la première). Ces deux situations sont des **équilibres de Nash**.

Chapitre 2

Quelques résultats sur l'équilibre de Nash

2.1 Introduction

L'équilibre de Nash est un élément important de la théorie des jeux. Il a été développé par John Forbes Nash en 1950, au vue de la lutte concurrentielle qui oppose les entreprises en présence. Chacune des entreprises rationnelles conçoit sa propre stratégie en suivant le principe que celle-ci constituera la meilleure réponse possible à celles des autres.

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques résultats sur l'équilibre de Nash : la notion de meilleure réponse le théorème d'existence de l'équilibre de Nash, la notion du point selle, et la résolution par la programmation linéaire d'un jeu matriciel.

2.2 Équilibre de Nash et meilleures réponses

2.2.1 Correspondance des meilleures réponses

On considère un jeu à n joueurs sous forme normale

$$G = \langle I, S, U = (U_1, U_2, \dots, U_n) \rangle.$$

où $S_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}$, est l'ensemble des stratégies pures du joueur $i \in I$;
la fonction de paiement du joueur i , $U_i : S = \prod_{j=1}^n S_j \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I$.

Définition 8. $s_i \in S_i$ est la meilleure réponse du joueur i contre $s_{-i} \in S_{-i}$, si

$$\forall t_i \in S_i, U_i(s_i, s_{-i}) \geq U_i(t_i, s_{-i}).$$

L'ensemble des meilleures réponses du joueur i contre s_{-i} est noté $BR_i(s_{-i})$.

Définition 9. On appelle correspondance de meilleures réponses du joueur i l'application : $C_i : S_{-i} \rightarrow 2^{S_i}$ qui associe à s_{-i} l'ensemble des meilleures réponses du joueur i . On note

$$C_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i, U_i(s_i, s_{-i}) \geq U_i(t_i, s_{-i}), \forall t_i \in S_i\},$$

autrement dit, si le joueur i anticipe que les autres participants au jeu vont choisir les stratégies associées au vecteur s_{-i} , il ne peut que maximiser son gain en choisissant la stratégie s_i . Celle-ci est en fait la meilleure réponse de i à s_{-i} .

Définition 10. On appelle correspondance de meilleures réponses du jeu G , l'application multivoque $C : S \rightarrow 2^S$ qui à $s \in S$ associe l'ensemble $C(x) = \prod_{i \in I} (BR_i(s_{-i}))$.

Proposition 11. On a l'équivalence

Un profil de stratégies $s_i \in S$ est un équilibre de Nash si et seulement si

$$\forall i \in I, s_i \in BR_i(s_{-i}) \iff (s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in C(s))$$

Exemple 12. Soit la matrice de jeux suivante :

	B_1	B_2	B_3
A_1	$(6, 7)$	$(9, 6)$	$(0, 6)$
A_2	$(5, 2)$	$(8, 2)$	$(4, 5)$
A_3	$(7, 7)$	$(7, 9)$	$(0, 9)$

Pour trouver l'équilibre de Nash, il faut déterminer pour chacun des deux joueurs sa (ses) meilleure(s) réponse(s) à chaque stratégie de l'autre joueur. Ainsi, pour le joueur 1, on a :

- L'action A_3 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit B_1 ;
- L'action A_1 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit B_2 ;
- L'action A_2 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit B_3 ;

En utilisant le concept de fonction de meilleure réponse $BR_i(\cdot)$,

On a pour le joueur 1 :

$$BR_1(B_1) = A_3, BR_1(B_2) = A_1, BR_1(B_3) = A_2$$

De même pour le joueur 2 :

- L'action B_1 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit A_1 ;
- L'action B_3 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit A_2 ;
- L'action B_3 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit A_3 ;

En utilisant le concept de fonction de meilleure réponse $BR_i(\cdot)$,

On a pour le joueur 2 :

$$BR_2(A_1) = B_1, BR_2(A_2) = B_3, BR_2(A_3) = B_3$$

Des fonctions de meilleures réponses on observe que $BR_1(B_3) = A_2$ et $BR_2(A_2) = B_3$ ainsi, le jeu admet un équilibre de Nash qui n'est autre que l'issue (A_2, B_3) car :

- La stratégie A_2 est la meilleure réponse du joueur 1 si le joueur 2 choisit la stratégie B_3 ;
- La stratégie B_3 est la meilleure réponse du joueur 2 si le joueur 1 choisit la stratégie A_2 .

2.2.2 Conditions d'existence de l'équilibre de Nash

En stratégies pures

Un résultat qui donne des conditions suffisantes garantissant l'existence de l'équilibre de Nash est donné par le Théorème ci-dessous. La preuve de ce théorème est basée sur la relation donnée dans proposition 11.

Théorème 13. (En stratégies pures)

Si le jeu G vérifie les conditions suivantes

1. $\forall i \in I$, l'ensemble des stratégies S_i est un ensemble, non vide, compact et convexe ;
2. La fonction d'utilité $U_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $\forall i \in N$;
3. La fonction $S_i \rightarrow U_i(s_i, s_{-i})$ est quasi-concave, $\forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall i \in I$

alors il existe un équilibre de Nash en stratégies pures.

En stratégies mixtes

Définition 14. Soit S_i l'ensemble fini des stratégies pures du joueur i . Une stratégie mixte du joueur i est une distribution de probabilité $\sigma_i : S_i \rightarrow [0, 1]$ assignant à chaque stratégie pure $s_i \in S_i$ une probabilité d'être choisie $\sigma_i(s_i)$ avec $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$

Supposons que le joueur i possède K stratégies pures c'est-à-dire $S_i = \{s_1, s_2, \dots, s_K\}$.

On notera

$$\Delta(S_i) = \left\{ (\sigma_1, \dots, \sigma_K) \in \mathbb{R}^K / \sum_K \sigma_i = 1, k = 1, \dots, K \right\}$$

2.2. ÉQUILIBRE DE NASH ET MEILLEURES RÉPONSES

Si chaque joueur j joue la stratégie mixte $\sigma_j \in \Delta(S_j)$, alors la probabilité que $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ soit le profil joué est $\prod_{j=1}^n \sigma_j(s_j)$. On définit le paiement espéré du joueur i par :

$$\sum_{s \in S} \left[\prod_{j=1}^n \sigma_j(s_j) \right] U_i(s)$$

Remarque 15. Une stratégie pure est un cas particulier de stratégie mixte. Soit $S_i = (s_1, s_2, \dots, s_k)$, l'ensemble des stratégies pures du joueur i . La stratégie pure s_1 est alors la stratégie mixte $(1, 0, \dots, 0, 0), \dots$, la stratégie pure s_k est la stratégie mixte $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Lorsqu'on introduit les stratégies mixtes, le calcul de paiement prend donc la forme l'espérance de paiement, pour illustrer ce mode de calcul prenons la matrice de paiement suivante comme exemple :

		Joueur 2		
		A	B	C
Joueur 1	D	(4,3)	(5,1)	(6,2)
	E	(2,1)	(8,4)	(3,6)
	F	(3,0)	(9,6)	(2,5)

Le paiement des joueurs 1 et 2 pour, par exemple, les profils de stratégies $\sigma_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $\sigma_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sont :

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{3} (0 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times 6) + \frac{1}{3} (0 \times 2 + \frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 3) + \frac{1}{3} (0 \times 3 + \frac{1}{2} \times 9 + \frac{1}{2} \times 2)$$

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{11}{2}$$

$$U_2(\sigma_2, \sigma_1) = \frac{1}{2} (\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 6) + \frac{1}{2} (\frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times 5) = \frac{24}{6} = 4$$

On peut également déterminer pour un joueur quelconque, le paiement procuré par une stratégie pure contre une stratégie mixte donnée par exemple si le joueur 1 choisit la stratégie mixte $\sigma = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et le joueur 2 choisit la stratégie pure B alors l'utilité du joueur 2 est :

$$U_2(B, \sigma_1) = (\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 6) = \frac{11}{3}$$

Définition 16. Un profil de stratégies mixtes s^* est un équilibre de Nash en stratégie mixte si, pour tout joueur i et pour toute stratégie mixte s_i

$$E(U_i(s_i^*, s_{-i}^*)) \geq E(U_i(s_i, s_{-i}^*))$$

Théorème 17. Tout jeu sous forme normale, fini (c.à.d avec un nombre fini de joueurs et de stratégies) admet au moins un équilibre de Nash en Stratégie mixtes.[2]

Remarque 18. *Ce qui sous-entend qu'un jeu peut avoir plusieurs équilibres de Nash tout comme le jeu de "la bataille des sexes" qui en admet deux, Mais également qu'un jeu peut ne pas avoir d'équilibre de Nash en stratégie pure, c'est ce que nous allons voir dans la partie suivante.*

Détermination de l'équilibre de Nash en stratégie mixtes

Pour montrer comment obtenir un équilibre de Nash en stratégies mixtes, considérons le jeu « Apparié les sous » qui est un parfait exemple de jeux n'admettant pas d'équilibre de Nash en stratégie pure Ce jeu consiste pour les deux joueurs à annoncer simultanément Pile (P) ou Face (F). Si les deux joueurs font une annonce identique (resp. différente), le joueur 1 obtient une utilité de 1 (resp. -1) et le joueur 2 une utilité de -1 (resp. 1). La matrice des paiements de ce jeu se présente donc comme suit :

		Joueur 2	
		Pile (P)	Face (F)
Joueur 1	Pile (P)	(1,-1)	(-1,1)
	Face (F)	(-1,1)	(1,-1)

Ce jeu, qui est **un jeu à somme nulle**, n'admet aucun équilibre de Nash en stratégies pures. En effet, pour des annonces identiques, le joueur 2 est incité à dévier. De même, si les deux annonces sont différentes, c'est le joueur 1 qui est incité à dévier.

Remarque 19. *On dit qu'un jeu à 2 joueurs est à somme nulle si :*

$$\forall x_1; x_2; U_1(x_1; x_2) + U_2(x_1; x_2) = 0.$$

De ce fait une matrice de gain pour les jeux à somme nulle peut être représenté comme suit :

		Joueur 2	
		Pile (P)	Face (F)
Joueur 1	Pile (P)	1	-1
	Face (F)	-1	1

Une caractéristique de ce type de jeu est que d'une part chaque joueur va tenter de deviner la stratégie adoptée par l'autre joueur et d'autre part, de bluffer afin de perturber l'autre joueur.

En raison de l'incertitude concernant la stratégie de chaque joueur, l'équilibre (en stratégie pure) ne peut être déterminé. Le tir au but (penalty) dans un match de football est une situation similaire à celle du jeu « Apparié les sous ».

En effet, les spécialistes de cette discipline sportive soutiennent que le gardien de but et le tireur choisissent chacun, indépendamment l'un de l'autre, une direction pour plonger pour le premier et pour tirer pour le second. La situation favorable (sans pour autant que l'issue ne soit certaine) au gardien de but est celle où les deux joueurs choisissent la même direction. Par contre, la situation favorable pour le tireur au but est celle où les deux directions sont opposées.

Soit maintenant $(r, 1 - r)$ la stratégie mixte du joueur 1 avec r représentant la probabilité que le joueur 1 joue Pile et $1 - r$ la probabilité que le joueur 1 joue Face et soit $(q, 1 - q)$ la stratégie mixte du joueur 2 avec q représentant la probabilité que le joueur 2 joue Pile et $1 - q$ la probabilité que le joueur 2 joue Face.

		Joueur 2		
		σ_1	q	$1 - q$
Joueur 1	σ_1		Pile (P)	Face (F)
	r	Pile (P)	(1,-1)	(-1,1)
	$1 - r$	Face (F)	(-1,1)	(1,-1)

Rappelons que l'équilibre de Nash est obtenu lorsque pour chacun des joueurs, la stratégie choisie est une meilleure réponse aux meilleurs choix des autres joueurs. Pour cela, la recherche de l'équilibre de Nash commence par la détermination de la fonction (ou correspondance) de meilleure réponse de chaque joueur.

Commençons par déterminer la correspondance $r(q)$ du joueur 1 pour que sa stratégie mixte $\sigma_1 = (r, 1 - r)$ soit la meilleure réponse à la stratégie mixte $\sigma_2 = (q, 1 - q)$ du joueur 2. Le paiement espéré du joueur 1 en adoptant la stratégie mixte $(r, 1 - r)$ étant donné que le joueur 2 adopte la stratégie mixte $(q, 1 - q)$ est :

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) = rq(+1) + r(1-q)(-1) + (1-r)q(-1) + (1-r)(1-q)(+1) = (1-2q) + r(4q-2)$$

On remarque que le paiement espéré du joueur 1 étant donné que le joueur 2 joue la stratégie mixte $(q, 1 - q)$ est croissant par rapport à r si $(4q - 2) > 0$ et décroissant par rapport à r si $(4q - 2) < 0$. En d'autres termes, si $q > \frac{1}{2}$. Le paiement espéré du joueur 1 est à son maximum lorsque la probabilité r prend sa valeur maximale. Dans ce cas, nous avons donc $r = 1$, c'est à dire que le joueur 1 choisit Pile. De même si $q < \frac{1}{2}$, nous avons $r = 0$, donc que le joueur 1 choisit Face. Lorsque $q = \frac{1}{2}$, le paiement espéré du joueur 1 est indépendant de la valeur de r . Le joueur 1 est donc indifférent entre Pile et Face. Dans ce cas, la stratégie mixte $(r, 1 - r)$ est la meilleure réponse à la stratégie mixte $(q, 1 - q)$ pour toutes les valeurs de r comprises entre 0 et 1 incluses. Notons que pour $q = \frac{1}{2}$, $r(q)$ prend plus d'une valeur. On dira dans ce cas que $r(q)$ est une correspondance de meilleure réponse. La correspondance de meilleure réponse $r(q)$ du joueur 1 est donc de la forme suivante :

$$r(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q > \frac{1}{2} \\ [0, 1] & \text{si } q = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } q < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sa représentation graphique est donnée par la figure ci-dessous :

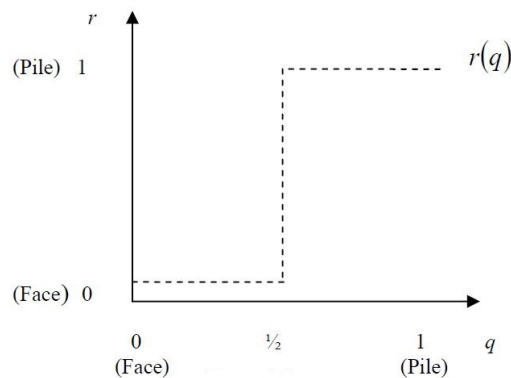


FIGURE 2.1 – Correspondance de meilleures réponses $r(q)$

Après avoir obtenu $r(q)$, la correspondance de meilleure réponse du joueur 1, il faut déterminer $q(r)$, la correspondance de meilleure réponse du joueur 2. La correspondance $q(r)$ est déterminée de telle sorte que la stratégie mixte $(q, 1 - q)$ du joueur 2 soit sa meilleure réponse à la stratégie mixte $(r, 1 - r)$ du joueur 1. Le paiement espéré du joueur 2 en adoptant la stratégie mixte $(q, 1 - q)$ étant donné que le joueur 1 adopte la stratégie mixte $(r, 1 - r)$ est :

$$U_2(\sigma_2, \sigma_1) = qr(-1) + q(1-r)(+1) + (1-q)r(+1) + (1-q)(1-r)(-1) = (2r-1) + q(4r-2)$$

En utilisant la même démarche que celle utilisée pour le joueur 1, on obtient la correspondance de meilleure réponse $q(r)$ du joueur 2.

$$q(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < \frac{1}{2} \\ [0, 1] & \text{si } r = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } r > \frac{1}{2} \end{cases}$$

La représentation graphique de la correspondance de meilleure réponse $q(r)$ 2.2 la figure 2.3 est obtenue après avoir effectué une rotation à la figure 2.2

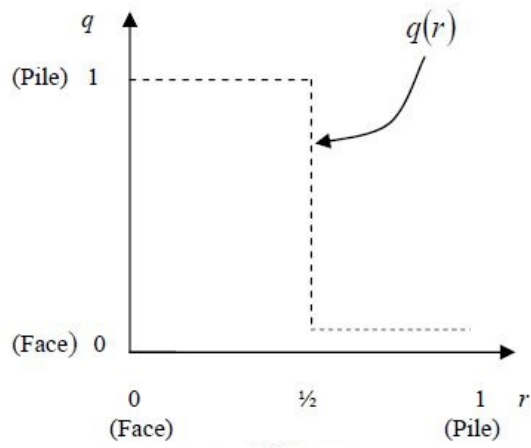


FIGURE 2.2 – Correspondance de meilleures réponses $q(r)$

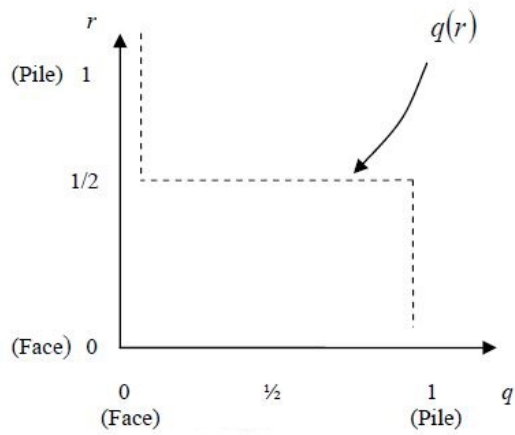


FIGURE 2.3 – Correspondance de meilleures réponses $q(r)$

En combinant les figures 2.1 et 2.3, on obtient la figure suivante :

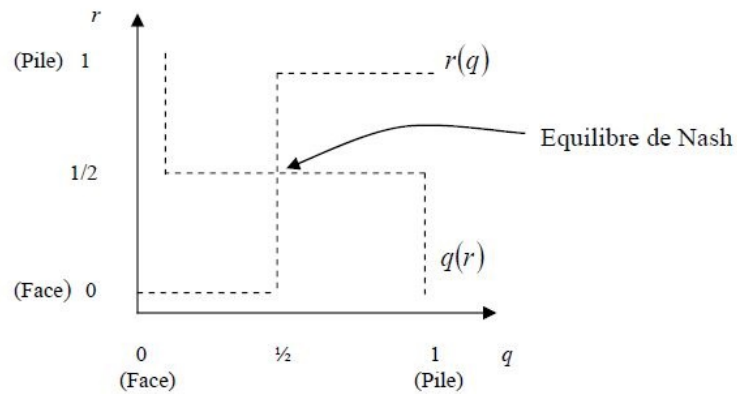


FIGURE 2.4

L'équilibre de Nash est obtenu lorsqu'on a simultanément $r^* = r(q^*)$ et $q^* = q(r^*)$, il est donc représenté par le point d'intersection des courbes $r(q)$ et $q(r)$ de la figure 2.4

2.3 Résolution d'un jeu matriciel par la programmation linéaire

Notation

Jeu matriciel Un jeu sous forme normal, fini et à somme nulle (X, Y, A) est aussi appelée jeu matriciel, car sa fonction d'utilité peut être représenté sous la forme d'une matrice.

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ l'ensemble des stratégies pures du joueur 1 et 2 respectivement. Alors la matrice de paiement (ou matrice du jeu) est sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

ou $\forall i \in m$ et $\forall j \in n, a_{i,j} = A(x_i, y_j) = U_1(x_i, y_j) = -U_2(y_j, x_i)$

Une stratégie mixte du joueur 1 peut être représenté par un vecteur $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)^T$
De même pour le joueur 2 avec : $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$

Si le joueur 1 choisit la stratégie mixte P et le joueur 2 la stratégie mixte Q par conséquent l'espérance de paiement du joueur 1 est obtenue par :

$$P^T A Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j$$

Résoudre un jeu signifie trouver sa valeur (la valeur du jeu) et au moins une stratégie optimale pour chaque joueur

2.3.1 Définition du point selle en stratégies pures

Définition 20. On définit par

1. la valeur inférieure du jeu (niveau de sécurité du joueur 2)

$$\bar{V}(A) = \min_j \max_i a_{ij}$$

La stratégie assurant au joueur 2 son niveau de sécurité est dite minmax, ou stratégie de sécurité, ou stratégie prudente, ou bien niveau de sécurité du joueur 2.

2.3. RÉOLUTION D'UN JEU MATRICIEL PAR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

2. la valeur supérieure du jeu (niveau de sécurité du joueur 1)

$$\underline{V}(A) = \max_i \min_j a_{ij}$$

La stratégie assurant au joueur 1 son niveau de sécurité est dite *maxmin*, ou *stratégie prudente*, ou encore *stratégie de sécurité*.

Ces valeurs vérifient :

- $\underline{V}(A) \leq \bar{V}(A)$
- Si $V(A) = \underline{V}(A) = \bar{V}(A)$, alors V est la valeur du jeu.

Définition 21. Si dans un jeu matriciel de matrice A , il existe une paire (i^*, j^*) telle que

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}, \forall i, j$$

On dit que (i^*, j^*) est un point selle en stratégies pures pour le jeu matriciel.

La stratégie i^* est appelée optimale pour le joueur 1 et j^* est dite optimale pour le joueur 2. Et la valeur du jeu $V(A) = a_{i^*j^*}$.

Remarque 22. L'élément de la matrice A , $a_{i^*j^*}$ possède les propriétés suivantes :

- $a_{i^*j^*}$ est le minimum de la ligne i ;
- $a_{i^*j^*}$ est le maximum de la colonne j ;

Dans ce cas le joueur 1 est sûr de gagner au moins $a_{i^*j^*}$ en choisissant la ligne i^* . Et le joueur 2 de minimiser ses pertes à $a_{i^*j^*}$ en choisissant la colonne j^* par conséquent $a_{i^*j^*}$ est la valeur du jeu.

Remarque 23. La définition du point selle correspond exactement à la notion d'équilibre de Nash définie précédemment, étant donné que la fonction de gain du joueur 2 est $U_2 = -U_1$.

Exemple 24. soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

L'élément central, 2, est à la fois le minimum des ligne et le maximum de sa colonne. Il est donc optimal pour le joueur 1 de choisir la ligne 2, et pour le joueur 2 de choisir la deuxième colonne. La valeur du jeu est donc 2.

2.3. RÉOLUTION D'UN JEU MATRICIEL PAR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

Remarque 25. Il faut noter qu'un jeu peut avoir plusieurs points selles. En effet, considérons l'exemple suivant :

Exemple 26.

	C_1	C_2	C_3	C_4	min ligne
L_1	4	2	5	2	2 ← maximin
L_2	2	1	-1	-20	-20
L_3	3	2	4	2	2 ← maximin
L_4	-16	0	16	1	-16
$col. max$	4	2	16	2	
		↑ minimax		↑ minimax	

On peut voir que (L_1, C_2) , (L_1, C_4) , (L_3, C_2) et (L_3, C_4) sont tous des points selles. Dans ce cas quelle stratégie choisir ?

En réalité cela importe peu, en effet tant que le joueur 1 joue R_1 ou R_3 et le joueur 2 C_1 ou C_3 , la valeur du jeu reste la même $V = 2$.

Remarque 27. Malheureusement, tous les jeux ne possèdent pas un point selle en stratégie pure comme on peut le voir dans l'exemple suivant :

Exemple 28.

	C_1	C_2	min ligne
L_1	2	-3	-3
L_2	0	2	0 ← maximin
L_3	-5	10	-5
$col. max$	2	10	
	↑ minimax		

On constate que le $minmax = 2 \neq 0 = maxmin$ donc ce jeu ne possède aucun point selle. Le joueur L peut s'assurer de gagner au moins 0, et le joueur C s'assure que le joueur L ne gagne pas plus de 2, et l'intervalle entre 0 et 2 reste ouvert à la négociation car l'intersection des deux stratégies $maxmin$ et $minmax$ $(R_2, C_1) = 0$ n'est pas un équilibre.

Dans ce cas nous devons définir le théorème du minmax en stratégie mixte afin de résoudre le jeu, ce que nous allons voir dans la prochaine section.

2.3.2 Définition du point selle en stratégies mixtes

Définition 29. (valeurs du jeu en stratégies mixtes)

- Une stratégie $p^* \in P$ sera appelée stratégie mixte de garantie du joueur 1 si

$$\underline{V}_m(A) = \max_P \min_Q p^T Aq = \min_Q p^{*T} Aq \geq \min_P p^T Aq, \forall p \in P.$$

$\underline{V}_m(A)$ est dite Valeur inférieur mixte du jeu.

- Une stratégie $q^* \in Q$ sera appelée stratégie mixte de garantie du joueur 2 si

$$\bar{V}_m(A) = \min_Q \max_P p^T Aq = \max_P p^T Aq^* \leq p^T Aq, \forall q \in Q.$$

$\bar{V}_m(A)$ est dite Valeur supérieur mixte du jeu.

Théorème 30. (Théorème du minmax- [3])

Dans tout jeu matriciel A , la valeur inférieure $\underline{V}(A)$ et la valeur supérieure $\bar{V}_m(A)$ en stratégie mixte existent et sont égales.

Définition 31. Une paire de stratégies mixtes $(p^*, q^*) \in P \times Q$ est appelée **point selle** du jeu A si :

$$p^T Aq^* \leq p^{*T} Aq^* \leq p^{*T} Aq, \forall p \in P, \forall q \in Q$$

$V_m(A) = p^* Aq^*$ est appelée **valeur mixte** du jeu .

Définition 32. Une paire de stratégies mixtes $(p^*, q^*) \in P \times Q$ est appelé **point selle** du jeu A si

$$p^T Aq^* \leq p^{*T} Aq^* \leq p^{*T} Aq, \forall p \in P, \forall q \in Q$$

$V_m(A) = \bar{V}_m(A) = \underline{V}_m(A) = p^* Aq^*$ est appelée **valeur mixte** du jeu .

2.3.3 Résolution par la programmation linéaire

Rappels sur la programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire est présenté par :

$$\text{maximiser } Z = c^T x$$

sous les contraintes :

$$PL_0 = \begin{cases} A^T x \leq b \\ x_j \geq 0 \quad \forall j \in [1, m]. \end{cases}$$

(PL_0) est appelé **problème primal**, son **dual** est donné par :

$$\text{minimiser } W = b^T y$$

sous les contraintes :

$$PD_0 = \begin{cases} A^T y \geq c \\ y_j \geq 0 \quad \forall j \in [1, n]. \end{cases}$$

On a les résultats suivants :

1. Si x est une solution admissible pour (PL_0) et y une solution admissible pour (PD_0) alors :

$$C^T x \leq b^T y$$

2. Si x^* une solution admissible pour (PL_0) et y^* une solution admissible pour (PD_0) tel que $c^T x^* = b^T y^*$ alors :
 x^* (resp. y^*) est une **Solution optimal** pour (PL_0) et (PD_0) (resp.).

Réduction d'un jeu a un problème de programmation linéaire

Considérons le jeu du point de vue du premier joueur, il cherche a choisir p_1, \dots, p_m de sorte a maximiser :

$$\min_j \sum_i p_i a_{ij}$$

sous les contraintes

$$P = \begin{cases} p_1 + \dots + p_m = 1 \\ p_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, m]. \end{cases}$$

2.3. RÉOLUTION D'UN JEU MATRICIEL PAR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

Une relation d'équivalence a été établie entre une solution du jeu matriciel et une paire de problème de programmation linéaire (primal et dual) PL_1 et PL_2 . Cette relation facilite la recherche de la solution optimale.

Pour le joueur 1 on a :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } Z \\ PL_1 = & \left\{ \begin{array}{l} Z \leq \sum_{i=1}^m p_i a_{i1} \\ \vdots \\ Z \leq \sum_{i=1}^m p_i a_{in} \\ p_1 + \cdots + p_m = 1 \\ p_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, m]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Et pour le joueur 2 :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } w \\ PL_2 = & \left\{ \begin{array}{l} w \geq \sum_{j=1}^n a_{1j} q_j \\ \vdots \\ w \geq \sum_{j=1}^n a_{mj} q_j \\ q_1 + \cdots + q_n = 1 \\ q_j \geq 0 \quad \forall j \in [1, n]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Qui n'est autre que le problème dual de (PL_1) et selon le théorème de la dualité le maximum que peut atteindre le joueur 1 avec (PL_1) est égale au minimum que peut atteindre le joueur 2 avec (PL_2) , et c'est exactement ce que dit le théorème du minmax.

Exemples

Exemple 33. soit le jeu matriciel suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce jeu, tout d'abord on doit vérifier s'il n'y a pas de point selle en stratégie pure

2.3. RÉOLUTION D'UN JEU MATRICIEL PAR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

	C_1	C_2	C_3	\min ligne	
L_1	3	-1	4	-1	
L_2	2	3	1	1	
L_3	5	2	6	2	\leftarrow maximin
col. max	5	3	6		
		\uparrow minimax			

$\maximin = 2 \neq 3 = \minimax \implies$ pas de point selle en stratégie pure .

On passe aux stratégies mixtes .

Ensuite nous devons vérifier qu'il n'y a pas de stratégies dominées. On remarque que la stratégie L_1 est dominée par L_3 pour le joueur 1.

On admet donc le jeu réduit :

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Pour le joueur 1 :

$$\begin{aligned} & \max \rightarrow Z \\ & \begin{cases} Z \leq 2p + 5(1-p) \\ Z \leq 3p + 2(1-p) \\ Z \leq p + 6(1-p) \\ p \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max \rightarrow Z \\ & = \begin{cases} Z \leq -3p + 5 \\ Z \leq p + 2 \\ Z \leq -5p + 6 \\ p \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.3. RÉOLUTION D'UN JEU MATRICIEL PAR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

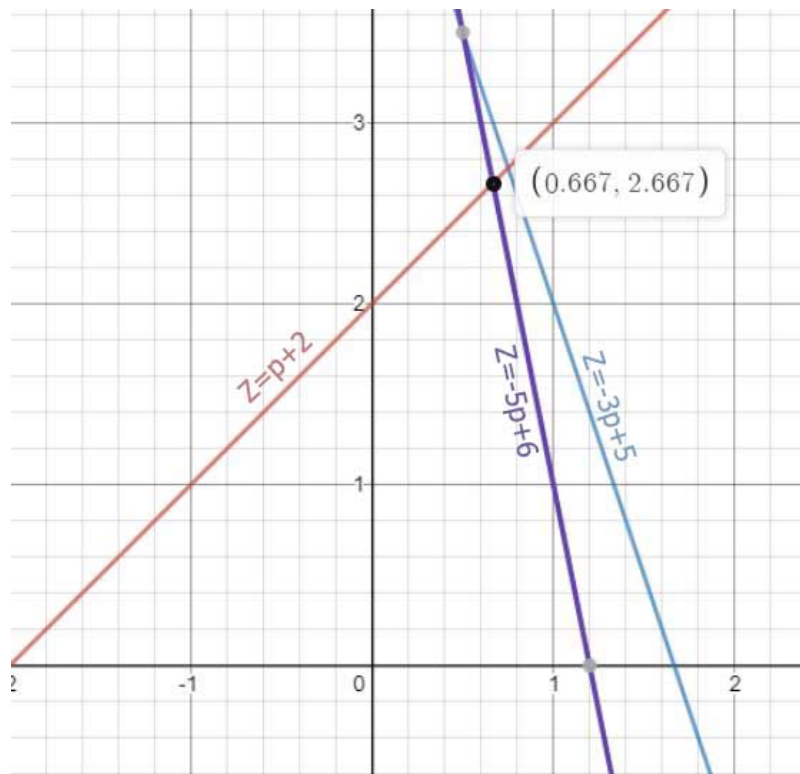


FIGURE 2.5 – Représentation graphique du système

La solution optimale du système $(P, Z) = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3}) = (0.6667, 2.667)$

Pour le joueur 2 : Résoudre le problème linéaire suivant :

$$\min \rightarrow w$$

$$\begin{cases} w \geq 2q_1 + 3q_2 + q_3 \\ w \geq 5q_1 + 2q_2 + 6q_3 \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_j \geq 0, j = \overline{1, 3} \end{cases}$$

On remarque à partir de la figure 2.5 que pour $j = 1$, $\sum_{i=1}^2 a_{i1}p_i > Z$ donc $q_1 = 0$, de plus on a $Z = w = \frac{8}{3}$ donc q_2 et q_3 sont les solutions du système.

$$\begin{cases} w = 3q_2 + (1 - q_2) \\ w = 2q_2 + 6(1 - q_2) \\ q_2 \geq 0. \end{cases} \implies q_2 = \frac{5}{6}, q_3 = \frac{1}{6}$$

La solution du jeu est donc :

$$\begin{aligned} P^* &= (p_1^*, p_2^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \\ Q^* &= (q_1^*, q_2^*, q_3^*) = \left(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right), \\ V_m &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

2.3.4 La méthode du Pivot pour la résolution des jeux matriciels

Il existe une autre façon de transformer le programme linéaire, (PL_1) , en un programme linéaire un peu plus simple à calculer quand on sait que la valeur du jeu est positive. Supposons donc $V > 0$ et soit $x_i = p_i/v$. Alors la contrainte $p_1 + \dots + p_m = 1$ devient $x_1 + \dots + x_m = \frac{1}{V}$, ce qui semble non linéaire. Mais maximiser V équivaut à minimiser $\frac{1}{V}$, nous pouvons donc supprimer V du problème en minimisant $x_1 + \dots + x_m$ à la place. Le problème, PL_1 , devient : choisir x_1, \dots, x_m tel que :

$$PL_2 = \begin{cases} \min \rightarrow x_1 + \dots + x_m \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq \sum_{i=1}^m x_i a_i \\ \vdots \\ 1 \leq \sum_{i=1}^m x_i a_i \\ x_i \geq 0 \text{ pour } i = \overline{1, \dots, m}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Une fois ce problème résolu, la solution du jeu original peut être facilement trouvée. La valeur sera $V = \frac{1}{(x_1 + \dots + x_m)}$ et la stratégie optimale pour le joueur 1 $p_i = V x_i$ pour $i = \overline{1, \dots, m}$.

L'algorithme suivant pour résoudre des jeux finis est essentiellement la méthode simplexe pour résoudre (PL_2) comme décrit dans Williams (1966) [1]

1. Ajouter une constante à tous les éléments de la matrice de jeu si nécessaire pour s'assurer que toutes ses valeurs soit positives. (Si c'est le cas, il faut soustraire à la fin cette constante de la valeur du nouveau jeu pour obtenir la valeur du jeu de la matrice d'origine.)
2. Poser le premier tableau du simplexe comme suit :

2.3. RÉOLUTION D'UN JEU MATRICIEL PAR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

	y_1	\dots	y_n	b
x_1	a_{11}	\dots	a_{1n}	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	a_{1m}	\dots	a_{nm}	1
$-C_j$	-1	\dots	-1	0

3. Sélectionner un Pivot tel que :

- La colonne q du pivot a un $-C_j < 0$.
- Le Pivot en lui même doit être positif ($a(p, q) > 0$).
- La ligne pivot, p , doit être choisie pour donner le plus petit des rapports $\frac{b_i}{a(i, q)}$, parmi tous les éléments positifs de la colonne du pivot.

4. pivoter comme suit :

- Remplacer chaque entrée, $a(i, j)$, qui n'est pas sur la ligne ou la colonne du pivot par

$$a(i, j) - \frac{a(p, j) \cdot a(i, q)}{a(p, q)}$$

- Remplacer chaque entrée de la ligne du pivot, à l'exception du pivot, par sa valeur divisée par la valeur du pivot.
- Remplacer chaque entrée de la colonne du pivot, à l'exception du pivot, par $-1 \times \frac{a(i, q)}{a(p, q)}$.
- Remplacer le pivot par son inverse.

Cela peut être représenté symboliquement par :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \textcircled{p} & r \\ \hline c & q \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1/p & r/p \\ \hline -c/p & q - (rc/p) \\ \hline \end{array}$$

Où p représente le pivot, r représente n'importe quel nombre sur la même ligne que le pivot, c représente n'importe quel nombre sur la même colonne que le pivot, et q est une entrée arbitraire qui n'est pas sur la même ligne ou colonne que le pivot.

5. Remplacer l'indice situé à gauche de la ligne du pivot avec l'indice situé en haut de la colonne du pivot.
6. S'il reste des nombres négatifs sur la ligne $-C_j$, revenir à l'étape 3.
7. Sinon, une solution peut maintenant être lue :

2.3. RÉOLUTION D'UN JEU MATRICIEL PAR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

- La valeur, V , est la réciproque de la valeur au coin bas droit du tableau. (si un nombre a été ajouté à chaque entrée de la matrice à la première étape, on doit le soustraire)
- La stratégie optimale du joueur 1 est construite comme suit : Les x_i restés à gauche du tableau reçoivent la probabilité 0, et ceux qui ce sont retrouvés en haut du tableau reçoivent la probabilité $-C_j$ correspondante divisé par la valeur au coin bas droit du tableau.
- La stratégie optimale du joueur 2 est construite comme suit : Les y_j restés en haut du tableau reçoivent la probabilité 0, et celles qui ce sont retrouvés à gauche du tableau reçoivent la probabilité b_i correspondante divisé par la valeur au coin bas droit du tableau.

Exemple 34. Pour illustrer ces étapes prenons comme exemple la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pourrions vérifier si elle possède un point selle (elle n'en a pas) et nous pourrions vérifier s'il y a des stratégies dominantes (il n'y en a pas).

On rajoute 2 pour que tout les éléments de la matrice B soit positifs.

$$B' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

A l'étape 2, on pose le tableau pour la matrice B' comme suit :

	y_1	y_2	y_3	b
x_1	4	1	8	1
x_2	2	3	1	1
x_3	0	4	3	1
$-C_j$	-1	-1	-1	0

à la troisième étape, on doit choisir un pivot, puisque tout les $-C_j$ sont négatifs on choisit une colonne de façon arbitraire, par exemple la colonne 1. Pour le choix de la ligne du pivot on exclut la troisième car le pivot doit être strictement positif, on calcule donc les

2.3. RÉSOLUTION D'UN JEU MATRICIEL PAR LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

ratios pour les deux premières lignes en divisant leur b_i sur le pivot potentiel et on choisit le plus petit des ratios, pour la première ligne on obtient $\frac{1}{4}$ et pour la deuxième $\frac{1}{2}$, Le pivot est donc sur la première ligne.

La quatrième étape nous apprend comment pivoter :

	y_1	y_2	y_3	b
x_1	4	1	8	1
x_2	2	3	1	1
x_3	0	4	3	1
$-C_j$	-1	-1	-1	0

→

	x_1	y_2	y_3	b
y_1	1/4	1/4	2	1/4
x_2	-1/2	5/2	-3	1/2
x_3	0	4	3	1
$-C_j$	1/4	-3/4	1	1/4

À la cinquième étape, on échange de place les indices x_1 et y_1 ce qui est déjà fait ci-dessus.

À la sixième étape, on vérifie si il reste des $-C_j$ négatifs, c'est le cas pour la deuxième colonne, on retourne donc à l'étape 3 .

Cette fois, on doit pivoter à partir de la colonne 2, et les ratios des ligne 1,2 et 3 sont respectivement 1, $1/5$ et $1/4$, la plus petite valeur est celle de la ligne 2, par conséquent le pivot est $5/2$.

Après avoir complété les étapes 4 et 5 on obtient :

	x_1	y_2	y_3	b
y_1	1/4	1/4	2	1/4
x_2	-1/2	5/2	-3	1/2
x_3	0	4	3	1
$-C_j$	1/4	-3/4	1	1/4

→

	x_1	x_2	y_3	b
y_1	3	-1	2.3	2
y_2	-2	4	-1.2	2
x_3	8	-1.6	3	2
$-C_j$	1	3	1	4

Cette fois tout les $-C_j$ sont positifs, on peut donc passer à l'étape 7.

Septième étape, lecture de la solution du jeu avec la matrice B' :

La valeur du jeu est la réciproque de la valeur en bas à droite du tableau, c'est à dire la réciproque de $4 = 5/2$.

x_3 est a gauche du tableau $\implies p_3 = 0$.

$p_1 = 1/4$ et $p_2 = 3/4$ donc $P^* = (0, 1/4, 3/4)$.

y_3 est en haut du tableau donc $q_3 = 0$

$q_1 = 2/4$ et $q_2 = 2/4$ donc $Q^* = (1/2, 1/2, 0)$.

Le jeu avec la matrice B a les mêmes stratégies mixtes optimales que B' mais sa valeur est : $5/2 - 2 = 1/2$.

Chapitre 3

Duopole de Cournot

3.1 Introduction

Le duopole désigne une structure de marché dans laquelle seulement deux entreprises dominent. Dans un duopole, la concurrence est limitée aux deux offreurs. Les marchés en situation de duopole sont particulièrement exposés aux risques de pratiques anticoncurrentielles, comme les abus de position dominante.

Les caractéristiques d'un duopole

Sur un marché en situation de duopole, seules deux entreprises vendent un bien ou service en particulier tout en maximisant leurs profits. À elles deux, ces entreprises possèdent la totalité ou la quasi totalité des parts de marché.

Un duopole implique une concurrence souvent acharnée entre les deux entreprises dominantes du marché. De plus, un marché en situation de duopole présente des barrières à l'entrée importantes, ce qui réduit les chances de réussite de nouvelles entreprises sur ce marché. On parle alors de concurrence imparfaite.

Il existe plusieurs types de duopoles, les deux plus connus étant le duopole de Cournot et le duopole de Bertrand.

On s'intéresse dans ce mémoire au Duopole de Cournot.

3.2 Le duopole de Cournot

Le duopole de Cournot désigne une structure de marché dans laquelle les deux entreprises qui dominent le marché vendent des biens ou services similaires.

Ce modèle repose sur l'hypothèse que les deux entreprises sont identiques et ne concluent pas d'accord pour harmoniser leurs prix, et sur l'hypothèse que les deux entreprises supposent que l'entreprise rivale cherche à maximiser son profit.

Dans un duopole de Cournot, les entreprises sont en compétition quant à la quantité produite, et elles décident quelle quantité produire simultanément.

Ainsi, les entreprises décident de leurs quantités produite en fonction de ce quelles pensent être la quantité produite par l'entreprise rivale et de manière à maximiser leurs profits.

Son nom vient d'Antoine-Augustin Cournot (1801-1877), un mathématicien qui le théorisa en observant le comportement d'entreprises au sein d'un duopole vendant de l'eau de source [4].

3.2.1 Modèle mathématique

Dans le cadre de ce modèle les deux firmes (joueurs) 1 et 2 choisissent simultanément leurs quantités à produire $q_1 \in \mathbb{R}^+$ et $q_2 \in \mathbb{R}^+$. L'offre totale du marché est simplement donné par $Q = q_1 + q_2$, le prix du marché p est une fonction décroissante par rapport à Q , en d'autres termes plus la quantité de ce produit augmente plus son prix diminue, soit $p = p(Q)$ avec $p'(Q) < 0$, cette fonction est aussi appelée **Fonction de demande inverse**. Chaque firme supporte un coût de production c_i , en fonction de la quantité produite $c_i : \mathbb{R}^+ \leftarrow \mathbb{R}^+$ tel que : $c_i = c_i(q_i)$. Le profit (utilité) de la firme $i = 1, 2$ est donc :

$$\pi_i(q_i, q_{-i}) = q_i \cdot p - c_i = q_i \cdot p(Q) - c_i(q_i)$$

Les éléments ci-dessus définissent un jeu sous forme normale (stratégique) entre les deux entreprises, où chacune d'elles dispose d'un espace de stratégie $S_i = \mathbb{R}^+$ (C.a.d, l'ensemble des décisions possibles de production), dont la fonction d'utilité $\pi_i(q_i, q_{-i})$ est défini plus haut .

L'équilibre de Cournot (q_1^*, q_2^*) représente l'équilibre de Nash de ce duopole (parfois appelé équilibre Cournot-Nash). cette approche est formalisée dans la notion de fonction de réaction de Cournot :

$$r_i = \underset{q_i}{Max} \pi_i(q_i, q_{-i}) = q_i \cdot p(q_i, q_{-i}) - c_i(q_i)$$

Cette fonction indique la quantité optimale q_i^* choisie par la firme i pour toute quantité q_j choisie par la firme $j, \forall j \neq i$, on a donc pour la firme 1 :

$$q_1^* = r_1(q_2) = \underset{q_1}{Max} \pi_1(q_1, q_2) = q_1 \cdot p(q_1, q_2) - c_1(q_1)$$

Si la fonction π_i est différentiable et concave, la condition du premier ordre implique que q_1^* est déterminé par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dq_1}\pi_1(q_1, q_2) = p(q_1^* + q_2) + q_1^* \cdot \frac{d}{dq_1}p(q_1^* + q_2) - \frac{d}{dq_1}c_1(q_1^*) = 0$$

De la même façon, la quantité q_2^* satisfait l'équation suivante :

$$\frac{d}{dq_2}\pi_2(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2^*) + q_2^* \cdot \frac{d}{dq_2}p(q_1 + q_2^*) - \frac{d}{dq_2}c_2(q_2^*) = 0$$

Dans certaines version du modèle. On considère que la fonction de demande inverse et la fonction de coût sont linéaires, soit :

$$p(q_1 + q_2) = a - b \cdot (q_1 + q_2) \text{ avec } b > 0$$

$$c_i(q_i) = c \cdot q_i \text{ avec } 0 \leq c \leq a$$

Dans cette version, le coût marginal est constant. On pose ici l'hypothèse que les coûts fixes sont nuls. Les équations donnant les conditions du premier ordre des deux firmes s'écrivent dans ce cas :

$$a - 2b \cdot r_1(q_2) - b \cdot q_2 - c = 0$$

$$a - 2b \cdot r_2(q_1) - b \cdot q_1 - c = 0$$

Les fonctions de meilleure réaction (ou bien meilleure réponse) de Cournot des firmes 1 et 2 sont sous la forme :

$$q_1^* = r_1(q_2) = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

$$q_2^* = r_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

Les équations caractérisant l'équilibre de Cournot (équilibre de Nash) impliquent que :

$$q_1^* = r_1(q_2) = \frac{a - bq_2^* - c}{2b}$$

$$q_2^* = r_2(q_1) = \frac{a - bq_1^* - c}{2b}$$

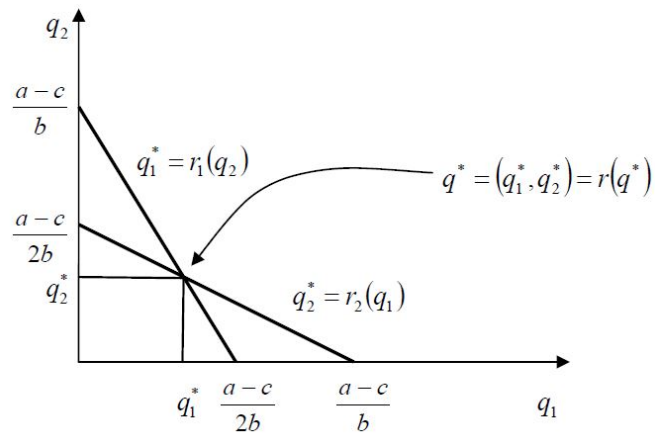
L'équilibre de Nash (de Cournot) obtenu après résolution de ces deux équations est :

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3b}$$

La recherche de l'équilibre peut également ce faire graphiquement en représentant dans des coordonnées cartésiennes (q_1, q_2) la fonction des meilleures réponses de la firme 1 (resp. 2) en fonction de q_2 (resp. 2 q_1) soit $r_1(q_2) = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$ et $r_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$ (resp.)

3.2. LE DUOPOLE DE COURNOT

ce qui nous donne la figure suivante :



$r(q^*)$ représente l'équilibre de Nash, et la quantité totale offerte est : $q_1^* + q_2^* = \frac{2(a-c)}{3b}$ et le prix de marché

$$p(q_1 + q_2) = a - b \frac{2(a-c)}{3b} = a - \frac{2}{3}(a-c) = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c$$

comme $a > c$, alors $p(q_1 + q_2) = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c > \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}c = c$ par conséquent, l'équilibre de Cournot est tel que le prix de marché est plus grand que le coût marginal.

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons abordé les concepts de base de la théorie des jeux, tout comme le concept d'équilibre, en particulier l'équilibre de Nash qui est devenu un classique de cette discipline, dans le deuxième chapitre nous avons présenté quelques-uns des concepts de solution, principalement pour les jeux à somme nulle introduit par Oskar Morgenstern et John von Neumann, afin de pouvoir introduire la théorie du duopole de Cournot ainsi que son résultat.

L'objectif de notre travail est de mettre en évidence l'utilité de la théorie des jeux non-coopératifs comme cadre conceptuel pour approcher les problèmes liés à la prise de décision principalement en économie.

Bibliographie

- [1] J. D. Williams, *The Compleat Strategyst*. McGraw-Hill, New York, 2nd Edition, 1966.
- [2] John Nash, *Equilibrium points in n-person games*. PNAS, New York, vol. 36, no 1, p. 48-49, 1950.
- [3] Oskar Morgenstern et John von Neumann, *Theory of Games and Economic Behavior*. PUP, 1944, 1st éd., 1944.
- [4] Antoine Augustin Cournot, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. L.HACHETTE, 1838.