

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER
en
MATHEMATIQUES

Spécialité
Probabilité & Statistique

Thème

Sur les modèles de séries chronologiques périodiques

Présenté par
TICHERFATINE Akçil

Devant le jury d'examen composé de :

Fazia BEDOUHENE	Professeur	UMMTO	Présidente
Abdelghani HAMAZ	MCB	UMMTO	Rapporteur
Farida ACHEMINE	MCA	UMMTO	Examinatrice

Soutenu le 08/11 / 2021

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier toutes les personnes qui m'ont suivi et aidé dans mon travail. Avant tout, mon promoteur Hamaz Abdelghani, maitre de conférences à l'Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, pour m'avoir donné les moyens de questionner mes objectifs et la capacité d'aller dans la pertinence de l'enseignement, mais surtout d'avoir été la pour cadrer mon travail et m'avoir explicité les normes de base d'un travail dûment accompli.

Je remercie vivement l'ensemble des membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail.

Je remercie aussi mes parents, pour la patience dont ils ont fait preuve a mon égard et pour toute la confiance qu'ils m'ont accordée le long de mon cursus. Ma soeur, pour son soutien et sa clairvoyance. Ainsi que toute la famille.

Ensuite, merci à tous mes amis, pour leur présence, merci à mes camarades de lutte, aux militants d'Amnesty International, qui ont fait office de deuxième famille, qui m'ont permis de vivre pleinement mes années a l'université.

Enfin, merci à H.maames de m'avoir encouragé, accompagner et soutenu, tout au long de ce projet de fin d'études et durant les deux dernières années.

Table des matières

Introduction	5
1 Généralités sur les séries chronologiques	8
1.1 Généralités	8
1.1.1 Processus Aléatoires	8
1.1.2 Etude des séries chronologiques	9
1.2 Notion de stationnarité	10
1.2.1 Stationnarité stricte	10
1.2.2 Stationnarité faible	10
1.2.3 Bruit Blanc	11
1.2.4 L'opérateur retard	11
1.2.5 L'opérateur différence	11
1.3 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrelation	11
1.3.1 Fonctions d'autocovariance	12
1.3.2 Fonctions d'autocorrelation	12
1.4 Étude des modèles linéaires ARMA	13
1.4.1 Processus AR(p)	13
1.4.2 Processus moyenne mobile d'ordre q MA(q)	15
1.4.3 Processus ARMA	17
1.5 Introduction aux modèles linéaires périodiques PARMA	19
2 Techniques récursives de prédiction	23
2.1 Modèles PARMA	23
2.2 Prédiction récursive	26
2.3 Evaluation de la fonction de vraisemblance	34

Table des matières	2
---------------------------	----------

3 Illustration numérique	39
3.1 Algorithme d'estimation approximative du maximum de vraisemblance . . .	43
3.1.1 Application sur le débit bimensuel du fleuve Caroni	47
Conclusion	54
Bibliographie	55

Liste des tableaux

3.1	Résultats de l'estimation des paramètres par simulations des divers PARMA(1,1)	45
3.2	Rapport des erreurs quadratique moyennes pour l'estimations des paramètres(Méthode des moments/ Méthode du maximum de vraisemblance)	46
3.3	Résultats de l'estimation des paramètres pour 10 simulations du modèle PARMA(1,1)	47
3.4	Moyenne et écart-type des données bimensuelles	49
3.5	Moyennes et écarts types bimensuels des données filtées de Rio carani . . .	52
3.6	Estimations des autocorrélations saisonnières à partir des données filtrées de Rio Caroni	52
3.7	Estimations du maximum de vraisemblance du modèle PARMA(1,1)	52

Table des figures

3.1	Débit bimensuel de janvier à novembre	48
3.2	Estimation du spectre de puissance	50
3.3	Estimation de l'autocorrelation	51
3.4	Estimation des autocorrelations saisonnières, avec les valeurs correspondantes PARMA(1,1) et ARMA (2,1)	53

Introduction

Historiquement, les romains représentés l'inclinaison des orbites des planètes en fonction du temps, et savaient déjà que l'année dure 365 et 1/4 jours. Mais c'est au XVI^e-XVII^e qu'apparaissent les premières séries temporelles dans les écrits scientifiques. L'astronome T.Brahe, 1526-1601, enregistre des données nombreuses et précises sur les orbites des planètes. Son assistant J-Kupler, 1571-1630, astronome et mathématicien a utilisé ces données pour formuler les lois du mouvement des planètes qui portent, ainsi son nom. Ces recherches sont restées dans le cadre de l'analyse astronomique, jusqu'à l'arrivée de W.Playfair 1786, qui publie " the commercial and political atlas ", qui contient plus de 40 graphes de données économiques.

De W.person qui propose une approche globale de décomposition d'une série en quatre composantes, à G.U.Yule qui en 1926 propose un modèle autoregressif (AR), et montre que celui-ci peut conduire à l'apparition des fluctuations cycliques, ou E.Slutsky, qui en 1927 montre qu'en calculant une moyenne mobile (MA) à partir d'un (bruit blanc), on obtient une série dont les observations ne sont pas indépendantes et présentent des cycles apparents. Les modèles n'ont fait qu'évoluer jusqu'en 1938, où le statisticien et économiste, H.Wold, fait une extension vers la classe de modèles ARMA. Qui peut s'énoncer comme suit : tout processus "purement non déterministe", stationnaire au second ordre et tel que $\mathbb{E}(X_t) = 0$, admet une écriture moyenne mobile infinie.

Cette collection de mesures ordonnées dans le temps, peut-être étudiée de différentes manières, suivant les caractéristiques de chaque collection, ces différences ne sont pas anodines, et nécessitent des théories selon la nature du phénomène étudié et le but fixé dans l'étude : les séries temporelles univariées ou multivariées, linéaires ou non linéaires, etc. Les modèles linéaires occupent une place centrale dans la théorie et le traitement des

séries temporelles, ils s'appuient sur des concepts tels que la stationnarité et l'innovation. Néanmoins, les chercheurs se sont souvent confrontés au problème du choix de modèle, et cela, jusqu'en 1970, où les deux statisticiens G.Box et G.jenkins, applique des modèles de moyennes mobiles autoregressives (ARMA) pour trouver le meilleur ajustement d'une série chronologique. Ce modèle se base sur 4 parties : L'identification, Estimation, Validation et prévision. (Esquissés dans le chapitre 1 de ce mémoire).

Dans la pratique, les phénomènes aléatoires peuvent parfois montrer une périodicité, il devient donc nécessaire de recourir aux modèles linéaires autoregressifs et moyenne mobile périodique PARMA, ces derniers sont présentés comme une alternative efficace dans les disciplines de l'environnement, de l'hydrologie et de la météorologie et dans les années 1980, les auteurs comme E.Parzen et M.Pagano les introduisent dans l'économie, pour devenir incontournable dans la modélisation mathématique des phénomènes aléatoires.

Ce travail, intitulé "Sur les modèles de séries chronologiques périodiques", est constitué de trois chapitres :

Chapitre 1 : Généralités sur les séries chronologiques

Ce chapitre introduit les séries chronologiques, avec un rappel des concepts de base, les définitions nécessaires, concernant les modèles autoregressifs et moyenne mobile ARMA et les modèles autoregressifs et moyenne mobile périodiques PARMA.

Chapitre 2 :Techniques récursives de prédiction

Nous allons aborder les techniques récursives de prédiction, à base d'un schéma récursif de calcul des coefficients de prédiction à un pas en avant. En utilisant l'algorithme des innovations nous évaluerons le maximum de vraisemblance des modèles ARMA périodiques.

Chapitre 3 :Illustration numérique

Ce dernier chapitre portera sur l'illustration numérique des résultats précédemment exposés, grâce a des données réelles, exposés sous forme de tableaux ou graphiques, nous étudierons le débit bimensuel (en m^3 par seconde) pour le fleuve Rio Caroni, au Venezuela,

de janvier 1950 à novembre 1978.

En guise de conclusion nous rapportons l'essentiel des résultats, et quelques perspectives futures, principalement accés sur la généralisation des concepts précédemment cités.

Chapitre 1

Généralités sur les séries chronologiques

Ce chapitre se divise en cinq parties, les deux premières exposent de manière générale les séries chronologiques et de façon succincte la notion de stationnarité. La troisième partie traite des deux fonctions d'autovariance et d'autocorrelation, en guise d'initiation à l'apprentissage des éléments clefs de la prévision en matière de series chronologiques. La quatrième et cinquième partie de ce premier chapitre portent, quant à elles, sur l'étude des modèles les plus fréquemment utilisés dans la modélisation des phénomènes aléatoires : le processus autoregressif et moyenne mobile ARMA et le processus autoregressif et moyenne mobiles périodique PARMA.

1.1 Généralités

1.1.1 Processus Aléatoires

Définition 1.1. Un processus aléatoire X indexé par un ensemble T est une famille $\{X_t$ où $t \in T\}$, de vecteurs aléatoires à valeurs dans l'espace d'états.

Remarque 1.1. – Ce processus peut-être unidimensionnel ou multidimensionnel (Univarié ou multivarié) selon l'espace d'état qui le définit : $E=\mathbb{R}^k$ ou $E=\mathbb{C}^k$. Si $k=1$ le processus est dit unidimensionnel ou univarié sinon le processus est dit multidimensionnel ou multivarié.

- Un processus univarié X indexé par $T = \mathbb{Z}$ ou $T = \mathbb{N}$ est également appelé série chronologique.
- Par abus de langage les réalisations dans une durée finie d'un processus discret sont appelés série chronologique.

Il est à noter que les séries chronologiques s'appliquent à de nombreux domaines. Elles s'imposent dans les finances, la sociologie ou encore l'industrie, comme un outil principal dans l'analyse, la compréhension et la prévision des phénomènes évoluant dans le temps, le procédé de modélisation se décrit comme suit :

- Identification : Cette première étape consiste principalement en l'identification des paramètres du modèle choisi, à l'aide de l'analyse des comportements des autocorrélations et autocorrélations partielles.
- Estimation : Une fois le modèle identifié, la deuxième étape consiste à estimer les paramètres inconnus qui interviennent dans le modèle en utilisant les diverses méthodes d'estimation tel que : méthode du maximum vraisemblance, la méthode des moments, les moindres carrés, ...
- Validation : Avant l'application du modèle choisi, une validation par une analyse des résidus s'impose, quand les résidus se comportent comme des bruit blanc gaussien, nous pouvons déduire que le modèle estimé est satisfaisant. A cet effet nous utilisons, le test de Ljung-Box (absence d'autocovariance), le test de Jaque-Bera (normalité), ou le test ARCH(homocédacité).
- Prévision : Application du modèle.

1.1.2 Etude des séries chronologiques

Le long de ce mémoire les séries chronologiques sont des processus aléatoires univariés indexés par $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{T}=\mathbb{N}$.

Aussi, les Composantes d'une série chronologique sont :

- La composante saisonnière (ou stationnarité) : Correspond à un phénomène qui se répète à intervalles de temps réguliers (périodiques). En général, c'est un phénomène saisonnier dans la variation saisonnière.
- La composante résiduelle (ou bruit,ou résidu) : Correspond à des fluctuations régulières, en général de faible intensité, mais de nature aléatoire. On parle aussi d'aléas.
- Des phénomènes accidentels peuvent notamment intervenir (grèves, conditions météorologiques exceptionnelles, crash financier).
- La tendance (ou trend) : Représente l'évolution à long terme de la série étudiée. Elle traduit le comportement moyen de la série.

1.2 Notion de stationnarité

Beaucoup de phénomènes dans la vie réelle montrent une évolution qui se rapproche d'un "état d'équilibre statistique", il en est de même pour la stationnarité, qui est un fondement théorique nécessaire dans la modélisation des processus aléatoires. On distingue deux formes de stationnarité (forte ou au second ordre). Dans la suite la stationnarité signifie faible stationnarité.

1.2.1 Stationnarité stricte

Définition 1.2. Une série temporelle $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est fortement stationnaire si et seulement si :

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = (X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}) \quad (1.1)$$

On dit alors que la loi du vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ est identique à celle de $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k})$ pour tout sous-ensemble $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subseteq T \forall k \in \mathbb{N}$

Remarque 1.2. – Dans le cas de l'existence du moment d'ordre 2 la stationnarité forte implique la stationnarité faible, le cas échéant n'est vraie que si les variables aléatoires sont gaussiennes

- La moyenne, la variance et la covariance sont les identiques le long du processus aléatoire stationnaire.

1.2.2 Stationnarité faible

Définition 1.3. Une série temporelle $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dite faiblement stationnaire si seulement si :

1. $E[X_t^2] < \infty$
2. $E(X_t) = \mu \quad \forall t \in \mathbb{Z}$
3. $Cov(X_s, X_t) = Cov(X_{s+k}, X_{t+k})$

Remarque 1.3. – les deux premiers moments d'un processus faiblement stationnaire sont invariants.

L'exemple le plus connu de processus stationnaire est le bruit blanc. Il intervient dans la construction de plusieurs modèles.

1.2.3 Bruit Blanc

On dit que Z_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 et on note $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ ($Z_t \sim \mathcal{BB}(0, \sigma^2)$) lorsque $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus stationnaire au second ordre de moyenne nulle et de fonction d'auto-covariance définie par :

$$\gamma_z(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Remarque 1.4. – Un bruit blanc fort correspond à une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes et identiquement distribuées.

1.2.4 L'opérateur retard

On note B(backward) ou L(lag), l'opérateur retard qui fait passer de X_t à X_{t-1}

$$BX_t = X_{t-1} \quad (1.3)$$

On a

$$B^i X_t = X_{t-i} \quad (1.4)$$

1.2.5 L'opérateur différence

La différence première est

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t \quad (1.5)$$

$$\Delta X_t^2 = (1 - B)^2 X_t = (1 - 2B + B^2)X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \quad (1.6)$$

cet opérateur permet d'éliminer la composante tendancielle sans la calculer.

1.3 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrelation

Certaines notions de base sur les processus aléatoires, sont nécessaires pour distinguer entre les modèles stationnaires applicables aux rapports annuels et les modèles périodiques permettant la modélisation des apports périodiques et guider notre choix de modèles.

1.3.1 Fonctions d'autocovariance

Définition 1.4. La fonction d'autocovariance représente la mesure de la relation linéaire dans les réalisations d'un même phénomène observé à des temps différents. (t et $t - h$.)

Soit $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ un processus aléatoire centré et $\gamma(h)$ la fonction d'autocovariance qui se présente comme suit :

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h}))]. \quad (1.7)$$

$$\text{Ainsi } \gamma(0) = Var(Y_t) = E[(X_t - E(X_t))^2] = \sigma_\gamma^2.$$

Proposition 1.3.1. *La fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire est une fonction :*

- *Paire* : $\gamma(-h) = \gamma(h) \forall h$.
- *Semi-positive* : $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma(t_j - t_k) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall a_j \in \mathbb{R}, \forall t_j \in \mathbb{Z}$.

1.3.2 Fonctions d'autocorrelation

Définition 1.5. La fonction d'autocorrelation représente la mesure des caractéristiques temporelles d'un processus.

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \quad h \in \mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

Avec $\rho(0) = 1$ et $|\rho(h)| < 1$ (donc $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$).

Proposition 1.1. *On appelle coefficient d'autocorrelation d'ordre 1 (resp. d'ordre k) le coefficient de corrélation linéaire $\rho(1)$ (resp. $\rho(k)$) calculé entre la série et cette série décalée d'une période (resp. k périodes).*

Après avoir défini les principales notions des processus aléatoires en général et des séries chronologiques en particulier, nous allons nous intéresser à la classe des processus ARMA (p,q), stationnaires et non saisonniers, popularisé par la publication du livre de Box et Jenkins en 1970 (Dernière édition : Box et al.,1994), ses processus sont caractérisés par un nombre fini de paramètres, ce qui constitue une propriété fort importante lors de la modélisation d'une série finie. Pour commencer nous allons définir rigoureusement les différents modèles issus de la classe ARMA des processus linéaires.

1.4 Étude des modèles linéaires ARMA

Les processus ARMA (p,q) sont une composition de deux processus linéaires, AR qui signifie autoregressif et MA qui veut dire moyenne ajustée.

1.4.1 Processus AR(p)

Définition 1.6. On appelle processus autoregressif d'ordre $p \geq 0$, noté AR(p), un processus stationnaire au second ordre $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, solution de l'équation de récurrence :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (1.9)$$

où $(Z_t) \sim BB(0, \sigma^2)$ et les ϕ_k sont des nombres réels. Où encore :

$$X_t - \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k} = Z_t. \quad (1.10)$$

On a l'écriture équivalente suivante en utilisant l'opérateur retard $\Phi B X_t = Z_t$:

$$\Phi B = 1 - \Phi_1 B^1 - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p. \quad (1.11)$$

Remarque 1.5. Ce processus est pour l'instant défini sous forme implicite et en particulier il n'est pas certain que cette dernière équation admette toujours une solution stationnaire. Si le polynôme Φ a toutes ses racines de module différent de 1, on peut inverser l'opérateur $\Phi(B)$. On en déduit que l'équation admet une solution unique, avec une écriture MA(∞) :

$$X_t = \Phi(B)^{-1} Z_t = \sum_{-\infty}^{\infty} h_i Z_{t-i}. \quad (1.12)$$

On peut alors montrer que l'on a $\sum_{-\infty}^{\infty} h_i < \infty$ et donc que la représentation est stationnaire. La représentation AR(p) est inversible par définition.

Causalité

Un processus ARMA est dit causal, si et seulement si le polynôme $\phi(z)$ issu de la partie autoregressive à toutes ses racines qui sont strictement supérieurs à 1 en valeur absolue. (c-à-d en-dehors du cercle unité du plan complexe). Autrement dit, il y a causalité des processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ si et seulement si $\phi(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Notons aussi qu'un processus défini par (1.9) qui est stationnaire et aussi causal, c'est-à-dire qu'il admet une représentation de la forme :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \psi(B)Z_t. \quad (1.13)$$

• Si le polynôme Φ a toutes ses racines de module strictement supérieur à 1, l'opérateur inverse $\Phi(B)^{-1}$ admet un développement ne faisant intervenir que les puissances positives de B. On a alors :

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} h_i Z_{t-i}. \quad (1.14)$$

Dans ce cas, on montre que l'on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} |h_i| \neq \infty, \quad h_0 = 1. \quad (1.15)$$

Ainsi, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots sont fonctions linéaires de Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots et en particulier sont non corrélées avec Z_t .

Projetant la relation AR sur le passé de X , on obtient :

$$E(X_t / X_{t-1}, X_{t-2} \dots) = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i}. \quad (1.16)$$

ainsi, le bruit blanc est aussi l'innovation puisque :

$$X_t - E(X_t / X_{t-1}, X_{t-2} \dots) = Z_t. \quad (1.17)$$

• Lorsque les racines de $\Phi(z)$ sont de module différent de 1, on peut montrer que, quitte à changer de bruit blanc, on peut toujours supposer que ces racines sont de module supérieur à 1.

Mais si certaines racines de $\Phi(z) = 0$ sont de module inférieur à 1, alors Z_t n'est pas l'innovation, puisque la forme MA(∞) sera tournée vers le futur (et peut-être aussi vers le passé si certaines racines étaient bien supérieur à 1 en module). Dans ce cas, le passé de X_t dépend du passé et du futur de Z_t : on ne peut plus dire qu'il n'y a pas de corrélation entre le passé de X_t et Z_t . Ainsi, ce n'est pas Z_t qui est l'innovation du processus.

Les fonctions caractéristiques d'un AR(p)

Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus AR(p), défini par :

$$\Phi(L)X_t = X_t + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = \epsilon_t \quad (1.18)$$

Et la fonction d'autocorrelation se déduit facilement par :

$$\rho(h) = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho(h - i). \quad (1.19)$$

La fonction d'autocorrelation partielle quant à elle est définie comme suit :

$$\tau(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } |h| > p \\ \phi_p & \text{si } |h| = p. \end{cases} \quad (1.20)$$

Il est important de se noter que si $|h| > p$ alors la fonction d'autocorrelation partielle s'annule.

1.4.2 Processus moyenne mobile d'ordre q MA(q)

Définition 1.7. Un processus MA $\{X_t, t \in \mathbf{Z}\}$ est dit à moyenne ajustée (moving average) pour un entier $q \geq 0$ noté MA(q) lorsqu'il est du second ordre stationnaire et s'il est solution de l'équation de récurrence :

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} \dots \theta_q Z_{t-q} \quad \forall t \in \mathbf{Z}, \quad (1.21)$$

où $(Z_t) \sim BB(0, \sigma^2)$ et les θ_i sont des nombres réels.

On a l'écriture suivante en utilisant l'opérateur retard B :

$$X_t = \Theta(B)Z_t \quad \text{Avec} \quad \Theta(B) = (1 - \theta_1 B^1 - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q), \theta_j \in \mathbb{R}. \quad (1.22)$$

Remarque 1.4.1. Un processus MA(q) est :

- Parfaitement défini et est automatiquement stationnaire.
- Centré et stationnaire.
- La représentation est causale par définition.

Inversibilité

Un processus ARMA est dit inversible quand X_t s'écrit comme une combinaison linéaire des valeurs passées. En pratique, nous étudions l'inversibilité sur la partie moyenne ajustée du processus.

$\Theta(B)$ est un polynôme en B de degré q , que l'on peut factoriser en ayant calculé ses racines, $z_i = 1/\lambda_i, i = 1 \dots q$:

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q = (1 - \lambda_1 B) \dots (1 - \lambda_q B), \quad (1.23)$$

si $\Theta(z)$ n'a pas de racine de module égal à 1, on peut calculer l'inverse de $\Theta(B)$, qui est alors donné par :

$$\Theta(B)^{-1} = (1 - \lambda_1 B)^{-1} \dots (1 - \lambda_q B)^{-1} = \frac{k_1}{1 - \lambda_1 B} + \dots + \frac{k_q}{1 - \lambda_q B}, \quad (1.24)$$

si toutes les racines de Θ (c-à-d, $1/\lambda_i, i = 1 \dots q$ sont distincts), où k_1, \dots, k_q sont des paramètres qui dépendent de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$

On obtient alors l'expression suivante :

$$\Theta(B)^{-1} X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \pi_i X_{t-i} = Z_t, \quad (1.25)$$

où les π sont en fonctions des paramètres θ_j , et on peut montrer que :

$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\pi_i| < \infty$. Si les racines de $\Theta(z) = 0$ sont toutes de module supérieur à 1, on peut montrer que $\pi_i = 0, \forall i < 0$ et Z_t s'interprète comme l'innovation du processus. On dit que le processus est inversible, si les racines de $\Theta(z) = 0$ sont inférieures à 1 en module, mais qu'il n'y a pas de racines de module égal à 1, on peut inverser les racines, quitte à changer de bruit blanc, et supposer que le processus est inversible.

On a alors la forme AR(∞) suivante :

$$X_t = -\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i X_{t-i} + Z_t, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| \leq \infty \quad (1.26)$$

Les π_i s'obtiennent par division croissante de 1 par Θ (Avec $\pi_0 = 1$)

Ainsi X_t dépends de Z_t et de son passé, X_{t-1} et de son passé. cet ensemble étant indépendant de Z_t (puisque Z_t est un BB), donc le passé de X_t est indépendant de Z_t , donc Z_t est l'innovation de Z .

Fonction d'autocovariance et d'autocorrelation d'un MA(q)

Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus MA(q), la fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ (-\theta_h + \theta_1 \theta_{h+1} + \dots + \theta_{q-h} \theta_q) \sigma^2 & \text{si } 0 \leq h \leq q \\ 0 & \text{si } h > q \end{cases} \quad (1.27)$$

Et la fonction d'autocorrelation se déduit par :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ \frac{-\theta_h + \theta_1 \theta_{h+1} + \dots + \theta_{q-h} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{si } 0 \leq h \leq q \\ 0 & \text{si } h > q \end{cases} \quad (1.28)$$

On remarque que cette fonction s'annule à partir d'un décalage supérieur à q . On peut donc s'en servir pour identifier un processus $MA(q)$.

Fonction d'autocorrelation partielle d'un processus $MA(q)$

Il est généralement admis que le calcul de coefficients d'autocorrelation partielle pour un modèle $MA(q)$ est très compliqué. Ainsi, certains auteurs préconisent d'étudier le cas simple d'un $MA(1)$, pour ensuite donner une idée générale du comportement de la fonction d'autocorrelation pour un modèle $MA(q)$. D'autres par contre préconisent d'exprimer le processus d'innovation (bruit blanc) en fonction du processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et de son passé $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-n}, \dots)$, afin d'en déduire les autocorrelations du processus. Il est connu que le bruit blanc Z_t d'un modèle $MA(q)$ inversible peut s'écrire sous forme de combinaison linéaire infinie (convergente au sens de L^2), de la forme : $Z_t = X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i X_{t-i}$. On peut donc calculer la fonction d'autocorrelation partielle du processus $MA(q)$ à partir de cette forme. Ainsi, on parvient à conclure que, seuls les q premiers termes de la fonction d'autocorrelation partielle d'un modèle $MA(q)$ sont significativement différents de zéro et que la fonction est décroissante.

1.4.3 Processus ARMA

Nous allons nous intéresser aux modèles ARMA appelés aussi ARMA mixtes qui constituent une généralisation des modèles AR et MA.

Définition 1.8. Un processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, tel que $E[X_t^2] < \infty$ et $E[X_t] = 0$ est un processus autoregressif-moyenne mobile d'ordre (p, q) tel que $(p \geq 1$ et $q \geq 1)$, noté ARMA (p, q) , s'il est stationnaire et satisfait la représentation suivante :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_q Z_{t-q} \quad \forall t \quad (1.29)$$

Où $(Z_t) \sim BB(O, \sigma^2)$ et les $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ sont des nombres réels ($\phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$). Ou encore :

$$X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = \sum_{i=1}^q \theta_i Z_{t-i} \quad (1.30)$$

L'équation peut également s'écrire sous la forme :

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t \quad (1.31)$$

Où B est l'opérateur retard vérifiant : $B^m X_t = X_{t-m}$ pour $m \geq 1$ avec $B^0 = 1$, $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ sont respectivement les opérateurs

autoregressif et moyenne mobile. Si $q = 0$, $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus purement autoregressif, noté $AR(p)$. Si $p = 0$, $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus moyenne mobile noté $MA(q)$.

Propriétés 1.1. *Si X est un processus stationnaire de représentation $ARMA(p, q)$ minimale $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$, alors :*

X_t admet la représentation $MA(\infty)$

$$X_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j Z_{t-j}, \quad h_0 = 1 \quad (1.32)$$

X_t admet la représentation $AR(\infty)$

$$\frac{\Phi(B)}{\Theta(B)}X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = Z_t, \quad \pi_0 = 1 \quad (1.33)$$

X_t admet pour innovation Z_t

Théorème 1.1. *Soit un modèle $ARMA(p, q)$ donné par l'équation $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t$. Si $\forall Z \in \mathbb{C}$ tel que $|Z| = 1$, $\Phi(Z) \neq 0$, alors le modèle admet l'unique solution stationnaire :*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Psi_j Z_{t-j} \text{ avec } \Psi(Z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Psi_j z^j = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)}, \quad r^{-1} < |z| < r, \quad r > 1 \quad (1.34)$$

Fonction d'autocorrelation simple d'un $ARMA(p, q)$

On procède comme dans le cas du modèle $AR(p)$ pour calculer les autocorrelations d'un $ARMA(p, q)$. En multipliant l'équation :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_q Z_{t-q} \quad \forall t \quad (1.35)$$

par X_{t-h} , en prenant l'espérance des deux cotés on trouve

$$\begin{aligned} E(X_t, X_{t-h}) - \phi_1 E(X_{t-1}, X_{t-h}) - \dots - \phi_p E(X_{t-p}, X_{t-h}) &= E(Z_t, X_{t-h}) - \theta_1 E(Z_{t-1}, X_{t-h}) \\ &- \dots - \theta_q E(Z_{t-q}, X_{t-h}), \end{aligned} \quad (1.36)$$

or $\{Z_t, t \in \mathbb{T}\}$ est un bruit blanc, donc non corrélé avec le passé du processus $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$, on a donc $E(Z_t X_{t-h}) = 0 \quad \forall h \neq 0$ et $\forall t$. D'où.

$$E(X_t, X_{t-h}) - \phi_1 E(X_{t-1}, X_{t-h}) - \dots - \phi_p E(X_{t-p}, X_{t-h}) = 0. \quad (1.37)$$

$$\gamma(h) - \phi_1 \gamma(h-1) - \phi_2 \gamma(h-2) - \dots - \phi_p \gamma(h-p) = 0. \quad (1.38)$$

Donc la fonction d'autocovariance est telle que :

$$\gamma(h) = \phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2) + \dots + \phi_p\gamma(h-p) = 0, \quad h > p, \quad (1.39)$$

et la fonction d'autocorrelation se déduit facilement :

$$\rho(h) = \sum_{j=1}^p \phi_j \rho(h-j) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) + \dots + \phi_p\rho(h-p), \quad h > p. \quad (1.40)$$

Fonction d'autocorrelation partielle d'un ARMA (p,q)

Il n'est pas fréquent de rencontrer l'expression de la fonction d'autocorrelation partielle d'un $ARMA(p, q)$ (sûrement à cause de la complexité du calcul à effectuer pour la retrouver). Seulement, il est admis que cette expression peut-être calculée à partir de l'écriture autoregressive infinie $AR(1)$ du modèle $ARMA(p, q)$. Par contre, on montre que cette fonction ne s'annule pas contrairement au cas d'un $AR(p)$.

Nous avons abordé dans le chapitre précédent, les modèles autoregressif et moyenne ajustée en insistant sur la notion de stationnarité qui est une condition sinequanon a la modélisation suivant ce processus, néanmoins, dans la pratique nous rencontrons des difficultés dues aux aléas de l'étude des comportements des séries chronologiques et des états naturels des éléments, a cet effet nous allons présenter un autre modèle très souvent utilisé dans l'étude des phénomènes temporels et qui prend en compte la périodicité des réalisations.

1.5 Introduction aux modèles linéaires périodiques PARMA

D'un point de vue intuitif, un processus ($PARMA$) est un processus périodique dans lequel chaque saison est représentée par un processus $ARMA$ stationnaire. comme la fonction moyenne est périodique, nous pouvons écrire :

$$\mu_{m+ks} = \mu_m \quad (1.41)$$

Définition 1.9. Le processus périodique $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de période s et de vecteur moyenne $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)'$ est un processus $ARMA$ périodique d'ordre $(p_1, q_1, \dots, p_s, q_s)$, noté PARMA $(p_1, q_1, \dots, p_s, q_s)$, s'il est solution de l'équation aux différences

$$\begin{aligned} (X_{rs+m} - \mu_m) - \phi_{1,m}(X_{rs+m-1} - \mu_{m1}) &= \dots - \phi_{pm,m}(X_{rs+m-pm} - \mu_{m-pm}) \\ &= \epsilon_{rs+m} - \theta_{1,m}\epsilon_{rs+m-1} - \theta_{qm,m}\epsilon_{rs+m-qm}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

pour $t = r_{s+m} \in \mathbb{Z}$ $m = 1, \dots, s$ et ϵ_t est un bruit blanc périodique $(\sigma_{\epsilon,1}^2, \dots, \sigma_{\epsilon,s}^2)$.

Les coefficients $\phi_{i,m,i} = 1, \dots, p_m$, $\theta_{i,m,i} = 1, \dots, q_m$ sont les paramètres autoregressif et moyennes mobiles respectivement de la $m - i$ eme saison, $m = 1, \dots, s$. En utilisant l'opérateur retard B qui agit comme à l'habitude sur $t = rs + m$ et donc sur m , l'équation (1.42) s'écrit de façon abrégée

$$\phi_m(B)(X_{rs+m} - \mu_m) = \theta_m(B)\epsilon_{rs+m}, \quad (1.43)$$

où

$$\phi_m(B) = 1 - \phi_{1,m}B - \dots - \phi_{p_m,m}B^{p_m} \theta_m(B) = 1 - \theta_{1,m}B - \dots - \theta_{q_m,m}B^{q_m}, \quad (1.44)$$

sont les opérateurs autoregressif et moyennes mobiles respectivement correspondants à la $m - i$ eme saison, $m = 1, \dots, s$.

Posons

$$p^* = \max_{1 \leq j \leq s} \{[(p_j - j)s] + 1\}, \quad (1.45)$$

et

$$q^* = \max_{1 \leq j \leq s} \{[(q_j - j)/s] + 1\}, \quad (1.46)$$

où $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Comme dans le cas des modèles ARMA, deux notions primordiales méritent d'être définies, la causalité et l'inversibilité, nous aborderons donc ces deux principes suivant la même méthode.

Théorème. *La causalité ne concerne que la partie autoregressive du modèle PARMA, un modèle PAR défini par $:Y_t - \sum_{j=1}^{P_t} \phi_{t,j}Y_{t-j} = Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$ est causal s'il peut s'écrire sous forme d'une somme, unique et convergente en moyenne quadratique, du passé et du présent du processus des innovations " Z_t ". Aussi la représentation (1.42) est causale si :*

$$\det \Phi(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tel que } |z| \leq 1, \quad (1.47)$$

Mais encore le problème d'inversibilité est étroitement lié à celui de la causalité puisqu'il engage des techniques mathématiques semblables. Pour la simplicité et sans perte de généralité, nous considérons le modèle moyen mobile $Y_t = Z_t - \sum_{j=1}^{Q_t} \theta_{t,j}Z_{t-j}$ $t \in \mathbb{Z}$ ce modèle est dit inversible, si son processus d'innovation Z_t peut s'écrire sous la forme d'une somme du passé et du présent du processus. C'est à dire, Le modèle donné $Y_t =$

$Z_t - \sum_{j=1}^{Q_t} \theta_{t,j} Z_{t-j}$ $t \in \mathbb{Z}$ est dit inversible, si \exists des fonctions $\beta_{t,i,j}$ de façon que : $Z_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_{t,i,j} Y_{t_j}$, $t \in \mathbb{Z}$ Ou la série est convergente, en moyenne quadratique, cette expression est dite de déconvolution.

$$\det\Theta(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tel que } |z| \leq 1. \quad (1.48)$$

Preuve. Sans perte de généralité, nous pouvons poser $\mu = 0$. Selon le théorème de Brockwell et Davis (1991), le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire causal si $\det \tilde{\phi}(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$. Mais

$$\tilde{\phi}(z) = \phi_0^{-1} \phi(z) \quad \text{et} \quad \det \phi_0^{-1} = (\det \phi_0)^{-1} = 1 \quad (1.49)$$

Par (1.42). Donc, nous avons

$$\det \tilde{\phi}(z) \neq 0 \Leftrightarrow \det \phi(z) \neq 0 \quad (1.50)$$

Et la condition pour la causalité est établie. De façon similaire, par le théorème 11.3.2 de Brockwell et Davis (1991), le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est inversible si

$$\det \tilde{\phi}(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tel que } |z| \leq 1. \quad (1.51)$$

Mais

$$\tilde{\phi}(z) = \phi_0^{-1} \theta(z) \theta_0^{-1} \phi_0 \quad \text{et} \quad \det \tilde{\theta}(z) = \det \theta(z). \quad (1.52)$$

La condition pour l'inversibilité s'ensuit et la démonstration est complétée. Ainsi, nous pouvons déduire de (1.43), les conditions devant s'appliquer aux coefficients du PARMA défini par (1.38) afin qu'il admette une représentation causale de la forme (1.44) et qu'il soit inversible. Shao et Lund (2004) donne la relation entre les coefficients $\psi_{k,m}$ et les paramètres AR et MA. Dans la suite, nous supposons que $p_m=p$, $q_m=q$, $m=1, \dots, s$. Shao et lund (2004) montrent aussi que les autocovariances $\gamma_m(h) = Cov(X_{rs+m}, X_{rs+m-h})$ d'un PARMA défini par (1.42) satisfaisant une relation de récurrence similaire à celle dans le cas ARMA non périodique, à savoir :

$$\gamma(h) = \sum_{k=1}^p \phi_{k,m} \gamma_m - k(k-h) \quad (1.53)$$

Pour $h > \max\{p, q\}$.

Stationnarité du modèle PARMA

la stationnarité périodique est une caractéristique importante dans la modélisation mathématique a base de série chronologique. Il est donc important de définir des approches qui permettent d'obtenir la stationnarité avant de recourir a toutes les étapes de modélisation :

- Périod span lumping : découlent du théorème de Glodyshev et qui consiste à ramener un modèle univarié périodique à un modèle multivarié et l'exploiter.
- Order span lumping : Découlent quant a lui des études plus ressentées et qui consiste en ramenant un modèle moyenne mobile (autorégressif) périodique à un modèle moyenne mobile (autorégressif) mais d'ordre un (bentorzi et hallin 1994).

Chapitre 2

Techniques récursives de prédiction

Cette partie est associée à l'exploration des méthodes récursives de prédiction et les techniques d'évaluation du maximum de vraisemblance des modèles ARMA périodiques, à base de l'algorithme d'innovation. Nous présentons un schéma récursif de calcul des coefficients de prédiction à un pas en avant et son erreur quadratique. La forme asymptotique de sa récursivité est aussi explorée.

Le cas particulier des séries gaussiennes sera étudié en se basant sur les résultats classiques de prédiction et de vraisemblance. Ainsi, nous montrons comment le maximum de vraisemblance de l'ARMA vectoriel peut être évalué et exploité pour la forme PARMA, l'application de cette approche sur le PARMA (1,1) est présentée en explicitant les calculs.

2.1 Modèles PARMA

Nous allons présenter quelques préliminaires sur les modèles des séries temporelles périodiques, ces éléments seront utiles par la suite. Une série temporelle $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ associée à des moments d'ordre 2 finis est dite *PARMA* avec une période $T > 1$ si elle est solution de l'équation différentielle linéaire périodique suivante :

$$X_{nT+\nu} - \mu_\nu - \sum_{k=1}^{p(\nu)} \phi_k(\nu)(X_{nT+\nu-k} - \mu_{\nu-k}) = \epsilon_{nT+\nu} + \sum_{k=1}^{q(\nu)} \theta_k(\nu)\epsilon_{nT+\nu-k}, \quad (2.1)$$

dans cette équation, $X_{nT+\nu}$ représente une série à la $\nu^{\text{ième}}$, ($1 \leq \nu \leq T$), saison de l'année. Notre choix s'est porté sur ce système de notation afin de montrer que (2.1) est une équation différentielle ARMA avec des coefficients variants périodiquement.

Notons que ϵ_t est un bruit blanc, de moyenne nulle et de variance

$$Var(\epsilon_{nT+\nu}) = \sigma^2(\nu).$$

$p(\nu)$ et $q(\nu)$ sont respectivement des modèles autoregressif et moyenne mobile.

$\phi_k(\nu), 1 \leq k \leq p(\nu)$, et $\theta_k(\nu), 1 \leq k \leq q(\nu)$ sont respectivement les coefficients du modèle. La quantité $\mu(\nu) = E(X_{nt+\nu})$ est la moyenne saisonnière de la série, si nécessaire, μ_j est définie dans (2.1) pour tous les entiers j par extension périodique de période T . La période T est prise comme le plus petit entier satisfaisant (2.1) afin que sa définition soit sans ambiguïté. Si $T = 1$, alors (2.1) est une équation de différence ARMA.

En ce qui concerne les notations, nous utilisons $\{X_t\}, \{\epsilon_t\}, \{X_{nT+\nu}\}, \{\epsilon_{nT+\nu}\}..$, Etc. de manière interchangeable, la première série de notation étant préférable lorsque l'accent n'est pas mis sur la saisonnalité. Il n'y a pas de perte de généralités à prendre $p(\nu)$ et/ou $q(\nu)$ changeant avec ν , on peut définir :

$$\begin{aligned} p &= \max_{1 \leq \nu \leq T} p(\nu), \\ q &= \max_{1 \leq \nu \leq T} q(\nu). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Et prendre $\phi_k(\nu) = 0$ pour $p(\nu) < k \leq p$ et $\theta_k(\nu) = 0$ pour $q(\nu) < k \leq q$. En examinant $X_{nT+\nu} - \mu_\nu$, il suffit de considérer le cas où $\mu_\nu = 0$, en pratique, les tendances et les moyennes saisonnières sont d'abord éliminées de la série.

L'équation(2.1) peut être écrite sous la forme ARMA à T-variable :

$$\Phi_0 \vec{X}_n - \sum_{k=1}^{p^*} \Phi_k \vec{X}_{n-k} = \Theta_0 \vec{\epsilon}_0 + \sum_{k=1}^{q^*} \Theta_k \vec{\epsilon}_{n-k}, \tag{2.3}$$

où $\vec{X}_n = (X_{nT+1}, \dots, X_{nT+T})'$ et $\vec{\epsilon}_n = (\epsilon_{nT+1}, \dots, \epsilon_{nT+T})'$ et " ' " représente la transposée. Les ordres ARMA à T-variables p^* et q^* sont $p^* = [p/T]$ et $q^* = [q/T]$, où $[x]$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x . Les coefficients autorégressifs, $T^*T \{\Phi_k, 0 \leq k \leq p^*\}$ on (i, j) ième entrées.

$$\sigma(s, i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i < j \\ \phi_{i-j}(i) & i > j \end{cases} \quad (\Phi_k)_{i,j} = \phi_{kT+i-j}(i) \quad 1 \leq k \leq p^* , \tag{2.4}$$

dans (2.4) , on fait la convention $\phi_k(\nu) = 0$ pour $k > p$.

Les coefficients moyens mobiles, $\{\Theta_k, 0 \leq k \leq q^*\}$ de $T * T$ sont obtenus de la même manière que les coefficients autoregressifs avec $\theta_k(\nu)$ en remplaçant dans (2.4) $\theta_k(\nu)$ par chaque occurrence de $\phi_k(\nu)$.

Fréquemment, les solutions de (2.1) sont uniques (moyenne carrée) et peuvent être exprimées sous la forme causale périodique.

$$X_{nT+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(\nu) \epsilon_{nT+\nu-k}, \quad (2.5)$$

où les poids $\Psi_k(\nu)$ sont absolument sommables :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k(\nu)| < \infty. \quad (2.6)$$

Pour chaque saison $1 \leq \nu \leq T$. La représentation causal (2.5) tient chaque fois :

$$Det \left(\Phi_0 - \sum_{k=1}^{p^*} \Phi_k z^k \right) \neq 0, \quad (2.7)$$

,
pour tout z complexe satisfaisant $|z| \leq 1$. (Vecchia, 1985a) Les coefficients $\psi_k(\nu)$ peuvent être déterminés recursivement en k . En commençant par $\Psi_0(\nu) = 1$ pour $1 \leq \nu \leq T$ et en itérant avec :

$$\psi_k(\nu) = \theta_k(\nu) \mathbf{1}_{k \leq q} + \sum_{j=1}^{\min(k,p)} \phi_j(\nu) \psi_{k-j}(\nu - j). \quad k \geq 1, 1 \leq \nu \leq T \quad (2.8)$$

(Lund and basawa, 1997; Vecchia, 1997). Notez que pour $k > \max(p, q)$, $\psi_k(\nu)$ est calculé à partir de $\psi_{k-1}(\nu - 1), \psi_{k-2}(\nu - 2), \dots, \psi_{k-p}(\nu - p)$.

Par conséquent, cette recursion n'explose pas numériquement lorsque k augmente. De même, la représentation périodique inversible :

$$\epsilon_{nT+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(\nu) X_{nT+\nu-k}, \quad (2.9)$$

où

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\pi_k(\nu)| < \infty. \quad (2.10)$$

Pour chaque saison, nous pouvons établir :

$$Det \left(\Theta_0 + \sum_{k=1}^{q^*} \Theta_k Z^k \right) \neq 0. \quad (2.11)$$

Pour tout nombre complexe Z tel que $|Z| < 1$, En supposant l'inversibilité périodique, le $\pi_k(\nu)$ peut être déterminé récursivement avec $\pi_0(\nu) = 1$ pour $1 \leq \nu \leq T$ et :

$$\pi_k(\nu) = -\phi_k(\nu) \mathbf{1}_{[k \leq p]} - \sum_{j=1}^{\min(k,q)} \theta_j(\nu) \pi_{k-j}(\nu - j) \quad k \geq 1 \quad 1 \leq \nu \leq T. \quad (2.12)$$

Selon Bentarzi et Hallin (1993) les conditions de causalité et d'inversibilité sont équivalentes dans (2.6) et (2.10) .

En supposant la causalité, la solution unique à T-variables $\{\vec{X}_n\}$ dans (2.3) est multivariée et stationnaire.

En utilisant l'équivalence entre la stationnarité multivariée et la corrélation périodique établie par Gladyshev en (1961), il s'ensuit que la série univariée. $\{X_t\}$ est périodiquement corrélée (PC) avec une période T dans le sens où :

$$Cov(X_{n+T}, X_{m+T}) = Cov(X_n, X_m), \quad (2.13)$$

pour tout entier m et n les séries (PC) sont appelées cyclostationnaires ou périodiquement stationnaires.

La fonction de covariance saisonnière :

$$\gamma_\nu(h) = Cov(X_{nT+\nu}, X_{nT+\nu-h}) \quad h \geq 0 \quad 1 \leq \nu \leq T, \quad (2.14)$$

peut dérivée directement de (2.5)

$$\gamma_\nu(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k+h}(\nu) \psi_k(\nu - h) \sigma^2(\nu - k - h). \quad (2.15)$$

Dans (2.14) , $\psi_k(j)$ et $\sigma^2(j)$ sont interprétés périodiquement en j avec une période T .

2.2 Prédiction récursive

Cette section considère le calcul récursif des prédicateurs linéaires et de leurs erreurs quadratiques moyennes dans les modèles PARMA causaux à moyenne nulle. Tout au long

$\phi_k(j)$ pour $1 \leq k \leq p$, $\theta_k(j)$ pour $1 \leq k \leq q$, et $\sigma^2(j)$ sont interprétés périodiquement dans j avec la période T

Définir le prédicateur linéaire à un pas en avant :

$$\hat{X}_{t+1} = P_t(X_{t+1}) \quad t \geq 0, \quad (2.16)$$

où P_t désigne la projection orthogonale sur l'étendue linéaire fermée de X_1, X_2, \dots, X_t , que nous désignons par $\overline{sp}\{X_1, X_2, \dots, X_t\}$. Il est entendu que $\hat{X}_1 = 0$ dénote l'erreur quadratique moyenne inconditionnelle de prédiction par :

$$v_t = E\{(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})^2\} \quad t \geq 0. \quad (2.17)$$

Si $\{X_t\}$ est gaussien, alors le meilleur prédicateur linéaire est aussi le meilleur prédicateur d'erreur quadratique moyenne ou d'espérance conditionnelle, c'est-à-dire $\hat{X}_{t+1} = E(X_{t+1}|X_1, \dots, X_t)$; de plus, les erreurs quadratique, moyennes, inconditionnelles et conditionnelles coïncident dans le sens où : $v_t = E\{(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1})^2|X_1, \dots, X_t\}$ pour tout t . Soit $m = \max(p, q)$. Notre but immédiat est d'établir que :

$$\hat{X}_{nT+\nu} = \sum_{j=1}^{nT+\nu-1} \vartheta_{nT+\nu-1,j}(X_{nT+\nu-j} - \hat{X}_{nT+\nu-j}) \quad 2 \leq nT + \nu \leq m, \quad (2.18)$$

et

$$\hat{X}_{nT+\nu} = \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu)X_{nT+\nu-k} + \sum_{k=1}^q \vartheta_{nT+\nu-1,k}(X_{nT+\nu-k} - \hat{X}_{nT+\nu-k}) \quad nT + \nu \geq m, \quad (2.19)$$

et d'identifier les coefficients $\{\vartheta_{t,j}\}$ dans (2.18) et (2.19). Les équations (2.18) et (2.19) se réduisent à l'équation (5.3.9) de Brockwell et Davis (1991) dans le cas stationnaire où $T = 1$. L'équation (2.19) permet de calculer rapidement les prédicteurs à un pas en avant ; remarquez que le coté droit de (2.19) ne fait intervenir que les valeurs de p de série les plus récentes et les erreurs de q de prédiction les plus récentes.

Dans la section suivante, (2.19) servira de base à un algorithme qui calcule rapidement la vraisemblance gaussienne exacte d'un modèle PARMA.

Pour établir (2.18) et (2.19), nous procédons comme dans Ansley (1979) et Brockwell et Davis (1991). $\{W_t\}$ est défini par :

$$W_{nT+\nu} = \begin{cases} X_{nT+\nu} & nT + \nu \leq m \\ X_{nT+\nu} - \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu)X_{nT+\nu-k} & nT + \nu > m, \end{cases} \quad (2.20)$$

puisque $\bar{s}p\{X_1, \dots, X_2\} = \bar{s}p\{W_1, \dots, W_t\}$ pour chaque $t \geq 1$, il résulte de l'équation précédente $\hat{W} = P_t(W_{t+1})$ satisfait l'équation :

$$\hat{W}_{nT+\nu} = \hat{X}_{nT+\nu} - \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu) X_{nT+\nu-k} \quad nT + \nu > m, \quad (2.21)$$

donc :

$$X_t - \hat{X}_t = W_t - \hat{W}_t \quad t \geq 1, \quad (2.22)$$

et $v_t = E\{(W_{t+1} - \hat{W}_{t+1})^2\}$ pour $t \geq 0$.

En utilisant la notation et en appliquant $k_W(t, s) = Cov(W_t, W_s)$ et en appliquant l'algorithme des innovations, (voir la proposition précédente) à $\{W_t\}$ nous donne $\widehat{W}_1 = 0$, $\nu_0 = k_W(1, 1)$ et :

$$\hat{W}_{t+1} = \sum_{j=1}^t \vartheta_{t,j} (W_{t+1-j} - \hat{W}_{t+1-j}) \quad t \geq 1, \quad (2.23)$$

$$\vartheta_{t,t-k} = v_k^{-1} \left\{ K_W(t+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \vartheta_{k,k-j} \vartheta_{t,t-j} v_j \right\} \quad 0 \leq k \leq t-1, \quad (2.24)$$

et

$$v_t = K_W(t+1, t+1) - \sum_{j=0}^{t-1} \vartheta_{t,t-j}^2 v_j \quad t \geq 1. \quad (2.25)$$

L'inversibilité de la matrice des covariances de $(W_1, \dots, W_t)'$ pour chaque $t \geq 1$, qui est nécessaire pour appliquer l'algorithme des innovations, découle de l'inversibilité de la matrice des covariances de $(X_1, \dots, X_t)'$ pour tous les $t \geq 1$, qui est établie dans la proposition 4.1 pour toute série PARMA causale. L'utilisation de $\hat{W}_j = \hat{X}_j$ pour $j \leq m$ et (2.22) dans (2.23) prouve (2.18). En multipliant les deux cotés de par $W_{k+1} - \hat{W}_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq t-1$ et en prenant les espérances, on obtient :

$$\begin{aligned} v_k \vartheta_{t,t-k} &= E\{\hat{W}_{t+1}(W_{k+1} - \hat{W}_{k+1})\} \\ &= E\{W_{t+1}(W_{k+1} - \hat{W}_{k+1})\} \quad 0 \leq k \leq t-1, \end{aligned} \quad (2.26)$$

lorsque la propriété d'orthogonalité $E\{(W_i - \hat{W}_i)(W_j - \hat{W}_j)\}$ pour $i \neq j$ est appliquée. En réarrangeant les indices dans (2.26) on obtient

$$\vartheta_{t,k} = v_{t-k}^{-1} E\{(W_{t+1-k} - \hat{W}_{t+1-k})\} \quad 1 \leq k \leq t. \quad (2.27)$$

De (2.20) (voir aussi (2.23), il s'ensuit que $K_W(t, j) = 0$ pour $t > m$ et $|t - j| > q$. Maintenant $W_{t+1+k} - \hat{W}_{t+1-k}$ c'est une combinaison linéaire de $X_1, X_2, \dots, X_{t+1-k}$, chacun

d'entre eux est non corrélé avec W_{n+1} par causalité quand $t \geq m$ et $k > q$ en utilisant ça dans (2.27) montrez que :

$$\vartheta_{t,k} = 0 \quad t \geq m, k > q. \quad (2.28)$$

En mettant (2.28) dans (2.23) et en appliquant (2.21) nous terminons la preuve de (2.19).

Quelques manipulations fastidieuses, mais simples montrent que (2.24) et (2.25) se réduisent à :

$$\vartheta_{t,r} = v_{t-r}^{-1} \left\{ K_W(t+1, t-r+1) - \sum_{j=r+1}^q \vartheta_{t-r,j-r} \vartheta_{t-j} v_{t-j} \right\} \quad t \geq m, 1 \leq r \leq q, \quad (2.29)$$

et

$$v_t = K_W(t+1, t+1) - \sum_{j=1}^q \vartheta_{t,j}^2 v_{t,j} \quad t \geq m. \quad (2.30)$$

Pour les calculs, on peut utiliser (2.24) et (2.25) pour obtenir $\{\vartheta_{t,j}\}$ pour $1 \leq t \leq m-1$ et $1 \leq j \leq t$ et $\{v_t\}$ pour $1 \leq t \leq m-1$ dans l'ordre $v_0, \vartheta_{1,1}, v_1, \vartheta_{2,2}, \vartheta_{2,1}, v_2, \dots, \vartheta_{m-1,m-1}, \dots, \vartheta_{m-1,1}, v_{m-1}$.

Puis (2.29) et (2.30) sont utilisés pour calculer $\{\vartheta_{t,j}\}$ et $\{v_t\}$ pour $t \geq m$ et $1 \leq j \leq q$ dans l'ordre $\vartheta_{m,q}, \vartheta_{m,q-1}, \dots, \vartheta_{m,1}, v_m; \vartheta_{m+1,q-1}, \dots, \vartheta_{m+1,1}, v_{m+1}$. Pour utiliser l'algorithme ci-dessus, la structure de covariance de $\{W_t\}$ doit être calculée. Soit $k_X(t, s) = cov(X_t, X_s)$ et notons que K_X est facilement calculé à partir de la fonction d'autocovariance de $\{X_t\}$ dans (2.15). Des calculs simples au cas par cas avec (??) donnent, pour $s \leq t$,

$$K_W(t, s) = \begin{cases} K_X(t, s) & \text{si } t \leq m \\ K_X(t, s) - \sum_{k=1}^p \phi_k(t) K_X(t-k, s) & \text{si } s \leq m < t \leq 2m \\ \sum_{k=0}^q \theta_k(s) \theta_{t-s+k}(t) \sigma^2(s-k) \mathbf{1}_{[0 \leq t-s+k \leq q]} & \text{si } s > m \\ 0 & \text{sinon..} \end{cases} \quad (2.31)$$

Dans (2.31), les conventions $\theta_0 \equiv 1$ et $\theta_k \equiv 0$ pour $k > q$ ont été faites. Les résultats ci-dessus montrent que la prédiction récursive pour les modèles PARMA est similaire à celle des modèles ARMA. Comme dans le cas ARMA, il peut être difficile de calculer explicitement la structure de covariance de $\{X_t\}$. Cependant, pour les travaux numériques, on peut toujours calculer la structure de covariance de $\{X_t\}$ en calculant les poids de

causalité $\psi_k(\nu)$ avec (2.8) et en les additionnant avec (2.15). Le chapitre suivant présente deux exemples où les recursions ci-dessus sont résolues de manière explicite. En explorant les propriétés des erreurs quadratiques moyennes de prédiction et la forme asymptotique de (2.19), nous proposons ce qui suit.

Proposition 2.1.

- (i) Pour une série PARMA inversible causale, $\nu_{nT+\nu} \rightarrow \sigma^2(\nu + 1)$ et ce pour $n \rightarrow \infty$ Pour chaque saison ν .
- (ii) Pour toute série PC avec période T , $\nu_{nT+\nu}$ est non croissant en n pour chaque saison ν .
- (iii) Pour une série PARMA inversible causale, $\vartheta_{nT+\nu-1,k} \rightarrow \theta_k(\nu)$ et ce pour $n \rightarrow \infty$ pour chaque saison ν et $1 \leq k \leq q$.

Preuve. Une modification simple du théorème 5.5.1 de Brockwell et Davis (1991) montre que $E\{(X_{nT+\nu} - \hat{X}_{nT+\nu}^*)^2\} = \sigma^2\nu$ pour chaque $n \geq 1$ et $1 \leq \nu \leq T$, où

$$\hat{X}_{t+1}^* = P_{sp\{X_t, X_{t-1}, \dots\}}(X_{t+1}), \tag{2.32}$$

est la meilleure prédiction linéaire de X_{t+1} à partir de l'étendue fermée du passé infini. En choisissant $n = 0$, on obtient :

$$E\{(X_\nu - \hat{X}_\nu^*)^2\} = \sigma^2(\nu). \tag{2.33}$$

L'application du résultat du problème 5.2 de Brockwell et Davis (1991) donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{nT+\nu-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} E\{(X_{nT+\nu} - \hat{X}_{nT+\nu}^*)^2\} = E\{(X_\nu - \hat{X}_\nu^*)^2\}. \tag{2.34}$$

La combinaison de (2.33) et (2.34) prouve la partie (i). Pour la partie (ii), fixons n et ν et écrivons la meilleure prédiction linéaire $\hat{X}_{nT+\nu-1}$ sous la forme linéaire

$$\hat{X}_{nT+\nu-1} = \sum_{j=1}^{nT+\nu} a_j X_j. \tag{2.35}$$

L'existence d'une telle représentation est garantie par le théorème de projection, bien que les a_j puissent ne pas être uniques. Maintenant, pour tout vecteur de coefficient de prédiction $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{(n+1)T+\nu})'$ et une prédiction linéaire de $X_{(n+1)T+\nu+1}$ sous la forme :

$$\hat{X}_{(n+1)T+\nu+1}^{\vec{\gamma}} = \sum_{j=1}^{(n+1)T+\nu} \gamma_j X_j. \tag{2.36}$$

La minimalité de l'erreur quadratique moyenne de prédiction donne :

$$v_{(n+1)T+\nu} \leq E\{(\hat{X}_{(n+1)T+\nu+1}^{\vec{\gamma}} - X_{(n+1)T+\nu+1})^2\}. \quad (2.37)$$

En choisissant $\vec{\gamma} = (\vec{0}'_T, \vec{a}')$ où $\vec{0}'_T$ désigne un vecteur de zeros à T dimensions, et en utilisant la stationnarité périodique de $\{X_t\}$ (plus précisément, que $(X_1, \dots, X_{nT+\nu})'$ et $(X_{T+1}, \dots, X_{(n+1)T+\nu})'$ ont la même matrice de covariance) donne

$$E\{(\hat{X}_{(n+1)T+\nu+1}^{\vec{\gamma}} - X_{(n+1)T+\nu+1})^2\} = E\{(\hat{X}_{nT+\nu+1} - X_{nT+\nu+1})^2\} = v_{nT+\nu}. \quad (2.38)$$

En combinant (2.37) et (2.38), on obtient $v_{(n+1)T+\nu} \leq v_{nT+\nu}$, ce qui prouve la partie (ii). Pour la partie (iii), on utilise (2.27) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \vartheta_{nT+\nu, j} &= v_{nT+\nu-j}^{-1} E\{W_{nT+\nu+1}(W_{nT+\nu+1-j} - \hat{W}_{nT+\nu+1-j})\} \\ &= v_{nT+\nu-j}^{-1} E(W_{nT+\nu+1}\epsilon_{nT+\nu+1-j}) \\ &- v_{nT+\nu-j}^{-1} E\{W_{nT+\nu+1}(W_{nT+\nu+1-j} - \hat{W}_{nT+\nu+1-j} - \epsilon_{nT+\nu+1-j})\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Puisque W_t a une forme moyenne mobile périodique quand $t > m$,

$$E(W_{nT+\nu+1}\epsilon_{nT+\nu+1-j}) = \theta_j(\nu + 1)\sigma^2(\nu + 1 - j), \quad (2.40)$$

pour un grand n et $1 \leq j \leq q$. En appliquant la partie (i) de cette proposition, on obtient :

$$v_{nT+\nu-j}^{-1} E(W_{nT+\nu+1}\epsilon_{nT+\nu+1-j}) \rightarrow \theta_j(\nu + 1), \quad (2.41)$$

comme $n \rightarrow \infty$ d'où, (2.39) montre que la partie (iii) est prouvé si on peut établir que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{W_{nT+\nu+1}(W_{nT+\nu+1-j} - \hat{W}_{nT+\nu+1-j} - \epsilon_{nT+\nu+1-j})\} = 0. \quad (2.42)$$

Pour toutes les saisons v . Comme W_t a des moments secondaires uniformément bornés en t , l'inégalité de Cauchy-Schwarz réduit cette tâche à prouver que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{(W_{nT+\nu} - \hat{W}_{nT+\nu} - \epsilon_{nT+\nu})^2\} = 0, \quad (2.43)$$

pour toutes les saisons v .

En utilisant (2.22), la stationnarité périodique de X_t , et le résultat du problème 5.2 de Brockwell et Davis (1991), on obtient à nouveau :

$$\begin{aligned} E\{(W_{nT+\nu} - \hat{W}_{nT+\nu} - \epsilon_{nT+\nu})^2\} &= E\{(X_{nT+\nu} - \hat{X}_{nT+\nu} - \epsilon_{nT+\nu})^2\} \\ &= E\{[X_\nu - P_{\overline{sp}\{X_{\nu-1}, \dots, X_{-nT+1}\}}(X_\nu) - \epsilon_\nu]^2\} \\ &\rightarrow E\{[X_\nu - P_{\overline{sp}\{X_{\nu-1}, X_{\nu-2}, \dots\}}(X_\nu) - \epsilon_\nu]^2\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

L'inversibilité PARMA supposée donne $\bar{s}p\{X_{\nu-1, \nu-2, \dots}\} = \bar{s}p\{\epsilon_{\nu-1}, \epsilon_{\nu-2}, \dots\}$ L'équation (2.1) et la causalité supposée montrent que $X_\nu - \epsilon_\nu \in \bar{s}p\{\epsilon_{\nu-1}, \epsilon_{\nu-2}, \dots\}$ Puisque ϵ_ν est non corrélé avec les éléments dans $\bar{s}p\{\epsilon_{\nu-1}, \epsilon_{\nu-2}, \dots\}$ le théorème de projection donne maintenant :

$$P_{\bar{s}p\{X_{\nu-1}, X_{\nu-2}, \dots\}}(X_\nu) = X_\nu - \epsilon_\nu. \quad (2.45)$$

L'utilisation de (2.45) dans (2.44) termine la preuve de la partie (iii)

La partie (iii) de la proposition 3.1 révèle que la forme asymptotique de (2.19) est :

$$\hat{X}_{nT+\nu} = \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu) X_{nT+\nu-k} + \sum_{k=1}^q \theta_k(\nu) (X_{nT+\nu-k} - \hat{X}_{nT+\nu-k}). \quad (2.46)$$

Notez la ressemblance avec (2.1). On peut calculer les prédicteurs h pas en avant pour $h \geq 2$ de manière récursive à partir des prédictions un pas en avant. Soit $P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h})$ et $P_{nT+\nu}(W_{nT+\nu+h})$ les prédicteurs linéaires h pas en avant de $X_{nT+\nu+h}$ et $W_{nT+\nu+h}$ à partir d'éléments dans $\bar{s}p\{X_1, \dots, X_{nT+\nu}\} = \bar{s}p\{W_1, \dots, W_{nT+\nu}\}$; les notations chapeauter $\hat{X}_{nT+\nu+1} = P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+1})$ et $\hat{W}_{nT+\nu+1} = P_{nT+\nu}(W_{nT+\nu+1})$ seront retenues pour les prédictions à un pas en avant. Pour éviter les trivialités, nous supposons que $h + (mT + \nu) > m$ pour le reste de cette section - c'est presque toujours le cas en pratique. La partie (vii) de la proposition 2.3.2 de Brockwell et Davis (1991) donne :

$$P_{nT+\nu}(W_{nT+\nu+h}) = P_{nT+\nu}\{P_{nT+\nu+h-1}(W_{nT+\nu+h})\} = P_{nT+\nu}(\hat{W}_{nT+\nu+h}), \quad (2.47)$$

en utilisant la représentation des innovations

$$\hat{W}_{nT+\nu+h} = \sum_{j=1}^{nT+\nu+h-1} \vartheta_{nT+\nu+h-1, j} (W_{nT+\nu+h-j} - \hat{W}_{nT+\nu+h-j}), \quad (2.48)$$

dans (2.47) donne :

$$P_{nT+\nu}(W_{nT+\nu+h}) = \sum_{j=h}^q \vartheta_{nT+\nu+h-1, j} (X_{nT+\nu+h-j} - \hat{X}_{nT+\nu+h-j}), \quad (2.49)$$

lorsque (2.22), (2.28), et les faits que $X_j - \hat{X}_j$ est orthogonal aux éléments dans $\bar{s}p\{X_1, \dots, X_n\}$ pour $j > n$ et $X_j - \hat{X}_j \in \bar{s}p\{X_1, \dots, X_n\}$ pour $j \leq n$ sont utilisés. En projetant $W_{nT+\nu+h}$ sur $\bar{s}p\{X_1, \dots, X_{nT+\nu}\}$ avec (2.20), on obtient

$$P_{nT+\nu}(W_{nT+\nu+h}) = P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h}) + \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu + h) P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h-k}). \quad (2.50)$$

En mettant en équation (2.49) et (2.50), on obtient la récurrence souhaitée :

$$\begin{aligned}
 P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h}) &= \sum_{j=h}^q \vartheta_{nT+\nu+h-1,j} (X_{nT+\nu+h-j} - \hat{X}_{nT+\nu+h-j}) = \\
 &+ \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu+h) P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h-k}).
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Il est simple d'itérer (2.51), pour $nT + \nu$ fixé, pour obtenir $P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+2}), P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+3}), \dots, P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h})$. La forme asymptotique de (2.51) est

$$\begin{aligned}
 P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h}) &= \sum_{j=h}^q \phi_j(\nu+h) (X_{nT+\nu+h-j} - \hat{X}_{nT+\nu+h-j}) \\
 &+ \sum_{k=h}^p \phi_k(\nu+h) X_{nT+\nu+h-k} + \sum_{k=1}^{h-1} \phi_k(\nu+h) P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h-k}).
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

La matrice de covariance des erreurs de prédiction d'un pas en avant à h pas en avant peut être obtenue comme suit. L'équation (2.19) montre que :

$$\begin{aligned}
 X_{nT+\nu+h} &= \hat{X}_{nT+\nu+h} + (X_{nT+\nu+h} - \hat{X}_{nT+\nu+h}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu+h) X_{nT+\nu+h-k} + \sum_{j=0}^q \vartheta_{nT+\nu+h-1,j} (X_{nT+\nu+h-j} - \hat{X}_{nT+\nu+h-j}),
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

où l'on fait la convention $\vartheta_{t,0} = 1$ pour tout t . En soustrayant (2.51) de (2.53), on obtient

$$\begin{aligned}
 X_{nT+\nu+h} - P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h}) &= \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu+k) \{X_{nT+\nu+h-k} - P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h-k})\} \\
 &+ \sum_{j=0}^{h-1} \vartheta_{nT+\nu+h-1,j} (X_{nT+\nu+h-j} - \hat{X}_{nT+\nu+h-j}).
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Pour chaque $h \geq 2$. L'équation (2.54) peut être écrite sous forme de matrice :

$$M_\nu \begin{pmatrix} X_{nT+\nu+1} - P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+1}) \\ X_{nT+\nu+2} - P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+2}) \\ \vdots \\ X_{nT+\nu+h} - P_{nT+\nu}(X_{nT+\nu+h}) \end{pmatrix} = L_{n,\nu} \begin{pmatrix} X_{nT+\nu+1} - \hat{X}_{nT+\nu+1} \\ X_{nT+\nu+2} - \hat{X}_{nT+\nu+2} \\ \vdots \\ X_{nT+\nu+h} - \hat{X}_{nT+\nu+h} \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

où M_ν et $L_{n,\nu}$ sont des matrices triangulaires inférieures $h * h$ avec les $(i, j)^{eme}$ entrées $(M_\nu)_{i,i} = 1$, $(M_\nu)_{i,j} = -\phi_{i-j}(\nu + i)$ pour $i > j$, et $(L_{n,\nu})_{i,j} = \vartheta_{nT+\nu+i-1, i-j}$ si $i \geq j$. Ici, la convention $\phi_k(\nu) = 0$ pour $k > p$ est faite. Puisque $det(M_\nu) = 1$, M_ν est inversible et (2.55) montre que la matrice de covariance des erreurs de prédiction d'un pas en avant à h pas en avant au temps $nT + \nu$, désigne par $C_{n,\nu}$, est :

$$C_{n,\nu} = M_\nu^{-1} L_{n,\nu} V_{n,\nu} L'_{n,\nu} (M'_\nu)^{-1}, \quad (2.56)$$

où $V_{n,\nu} = diag\{V_{nT+\nu}, \dots, V_{nT+\nu+h-1}\}$ est la matrice diagonale des erreurs de prédiction à un pas en avant. Notons que $E[\{X_{nT+\nu+h} P_{nT+\nu+h}^2\}]$ est la $(h, h)^{eme}$ composante de $C_{n,\nu}$.

2.3 Evaluation de la fonction de vraisemblance

Cette section développe un algorithme efficace pour calculer la vraisemblance gaussienne exacte d'un modèle PARMA causal, inversible, de moyenne nulle, à partir de l'échantillon de données $\vec{X} = (X_1, \dots, X_N)'$. Nous montrons également comment une vraisemblance ARMA vectorielle peut être calculée en écrivant le modèle ARMA vectoriel sous forme PARMA, une idée proposée pour la première fois par Cipra et Tlustý (1987). Le problème de l'évaluation de la vraisemblance PARMA a été étudié précédemment. Vecchia (1985a, 1985b, 1997) dérive une approximation conditionnelle de la vraisemblance PARMA qui est facile à calculer. Li et Hui (1988) dérivent la vraisemblance PARMA exacte; cependant, leurs méthodes nécessitent la décomposition de Cholesky d'une matrice $N * N$, ce qui est indésirable pour les longues séries. Récemment, Adams et Goodwin (1995) ont développé un algorithme de contrôle récursif qui maximise la vraisemblance PARMA dans des conditions de "passivité" du modèle. Notre objectif ici est de développer un algorithme exact et efficace d'évaluation de la vraisemblance PARMA. Un tel algorithme est nécessaire pour plusieurs raisons. Premièrement, pour estimer les paramètres du modèle PARMA par maximum de vraisemblance, on doit optimiser : la fonction de vraisemblance PARMA. Il s'agit généralement d'une tâche numérique nécessitant de nombreuses évaluations de la fonction de vraisemblance. Deuxièmement, le modèle PARMA à moyenne nulle que nous considérons :

$$X_{nT+\nu} - \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu) X_{nT+\nu-k} = \epsilon_{nT+\nu} + \sum_{k=1}^q \theta_k(\nu) \epsilon_{nT+\nu-k}, \quad (2.57)$$

a $(p + q + 1)T$ paramètres totaux. Ce nombre total de paramètres peut être très important même pour des T de tailles modérées. Par exemple, pour une série mensuelle ($T = 12$)

où $p = q = 1$, il y a 36 paramètres PARMA totaux. Pour ajuster des modèles PARMA parcimonieux, on impose fréquemment des contraintes paramétriques sur les paramètres PARMA. Des tactiques telles que la consolidation de Fourier des paramètres (voir Jones et Brelsford, 1967; Bloomfield et al., 1994) et le regroupement de saisons similaires en blocs (Thompstone et al., 1985) ont été examinées. En bref, on doit généralement optimiser les vraisemblances PARMA sous des contraintes paramétriques. Nous ne savons pas exactement comment l'algorithme de contrôle d'Adams et Goodwin (1995) se comporterait sous des contraintes paramétriques PARMA (en supposant que l'on puisse vérifier les conditions de passivité nécessaires). Les résultats ci-dessous sont généraux, analogues à ceux d'Ansley (1979) pour les modèles ARMA, et mettent l'évaluation de la vraisemblance PARMA sur le même plan informatique que l'évaluation de la vraisemblance ARMA. Pour la notation, $\vec{\phi}$ et $\vec{\theta}$, respectivement, désignent les paramètres du modèle autorégressif et de la moyenne mobile dans (2.57) et que $\vec{\sigma}$ désigne tous les écarts types saisonniers du bruit blanc. La vraisemblance gaussienne du modèle PARMA, désignée par :

$L(\vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{\sigma}, \vec{X})$ est de forme normale multivariée.

$$L(\vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{\sigma}, \vec{X}) = (2\pi)^{-N/2} \det(\Sigma_N)^{-1/2} \exp\left(-1/2 \vec{X}' \Sigma_N^{-1} \vec{X}\right), \quad (2.58)$$

où $\Sigma_N = E(\vec{X} \vec{X}')$ Lorsque Σ_N est inversible, la vraisemblance dans (2.58) a la représentation équivalente des innovations (voir l'équation 8.7.4 de Brockwell et Davis, 1991)

$$L(\vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{\sigma}, \vec{X}) = (2\pi)^{-N/2} \left(\prod_{j=0}^{N-1} \nu_j\right)^{-1/2} \exp\left\{-1/2 \sum_{j=1}^N \frac{(X_j - \hat{X}_j)^2}{\nu \nu_{j-1}}\right\}. \quad (2.59)$$

Une expression d'innovations analogues existe pour la vraisemblance lorsqu'il y a des valeurs de séries manquantes. Dans ce cas, des prédicteurs h pas en avant pour $h \geq 2$ apparaîtront. Nous montrons maintenant que Σ_N est inversible pour les modèles PARMA causaux.

Proposition 2.3.1. *Si $\sigma^2(\nu) > 0$ pour chaque $1 \leq \nu \leq T$, alors pour un modèle PARMA causal, Σ_N est inversible pour chaque $N \geq 1$.*

Preuve. Nous utilisons la contradiction et laissons R être le plus petit nombre naturel tel que Σ_R n'est pas inversible. Écrivez R de façon unique comme $R = nT + \nu$ où $n \geq 0$ et $1 \leq \nu \leq T$. En argumentant comme dans la preuve de la proposition 5.1.1 de Brockwell et Davis (1991), on montre que :

$$X_{nT+\nu} = \sum_{i=1}^{nT+\nu-1} \Delta_i X_i, \quad (2.60)$$

pour certains nombres réels $\Delta_1, \dots, \Delta_{nT+\nu-1}$. En soustrayant (2.60) de (2.57), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu) X_{nT+\nu-k} + \epsilon_{nT+\nu} - \sum_{i=1}^{nT+\nu-1} \Delta_i X_i + \sum_{k=1}^q \theta_k(\nu) \epsilon_{nT+\nu-k} \\ &= \sum_{i=1}^{nT+\nu-1} \Delta_i^* X_i + \epsilon_{nT+\nu-k} + \sum_{k=1}^q \theta_k(\nu) \epsilon_{nT+\nu-k}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

où $\Delta_i^* = -\Delta_i$ pour $1 \leq i \leq nT + \nu - p - 1$ et $\Delta_i^* = \phi_{nT+\nu-i}(\nu) - \Delta_i$ pour $nT + \nu - p \leq i \leq nT + \nu - 1$. En prenant la variance des deux cotés de (2.61) et en utilisant l'implication de causalité selon laquelle X_t et ϵ_s ne sont pas corrélés lorsque $s > t$, on obtient la contradiction suivante :

$$0 = \text{var} \left\{ \sum_{i=1}^{nT+\nu-1} \Delta_i^* X_i + \sum_{k=1}^q \theta_k(\nu) \epsilon_{nT+\nu-k} + \epsilon_{nT+\nu} \right\} \geq \text{var}(\epsilon_{nT+\nu}) = \sigma^2(\nu) > 0, \quad (2.62)$$

pour calculer les estimations des paramètres de vraisemblance PARMA, on peut de façon équivalente minimiser la vraisemblance logarithmique négative :

$$-2 \log L(\vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{\sigma}, \vec{X}) = N \log(2\pi) + \sum_{j=0}^{N-1} \log(\nu_j) + \sum_{j=1}^N \frac{(X_j - \hat{X}_j)^2}{\nu_{j-1}}, \quad (2.63)$$

dans les paramètres $\vec{\phi}$, $\vec{\theta}$, et $\vec{\sigma}$. Les techniques de prédiction récursive de la section 3 peuvent maintenant être utilisées pour évaluer rapidement \hat{X}_j et ν_j pour chaque j d'intérêt. Les équations (2.18), (2.19), (2.24), (2.29), (2.25) et (2.30) sont la base d'un algorithme d'évaluation rapide de la vraisemblance. On peut montrer que le nombre d'opérations nécessaires pour calculer le logarithme négatif de la vraisemblance dans (2.63) pour une série de longueur N est linéairement limité en N (on compte les additions, soustractions, multiplications et divisions comme une opération chacune). Par conséquent, les calculs ne sont pas trop lourds pour une longue série. Une caractéristique importante de l'algorithme est qu'il ne nécessite aucune inversion de matrice. Nous discutons maintenant comment la vraisemblance d'une série ARMA à T variables de moyenne nulle $\{\vec{X}_n\}$ peut être évaluée en exprimant ce modèle sous la forme PARMA (voir Cipra et Tlustý, 1987). Les algorithmes d'évaluation de la vraisemblance ARMA vectorielle font encore l'objet

de recherches actuelles (voir Mauricio, 1997). Considérons le modèle ARMA causal et inversible à T variables :

$$\vec{X}_n - \sum_{k=1}^{p^*} A_k \vec{X}_{n-k} = \vec{Z}_n + \sum_{k=1}^{q^*} B_k \vec{Z}_{n-k}, \quad (2.64)$$

où \vec{Z} est un bruit blanc de moyenne nulle à T -variables avec une matrice de covariance inversible Γ .

Ce modèle peut être écrit sous la forme PARMA comme suit. Premièrement, on diagonalise Γ par $\Gamma = PDP'$, où D est une matrice diagonale $T * T$ dont les entrées sont constituées des valeurs propres de Γ et P est une matrice orthogonale $T * T$ avec $P_{i,j} = 0$ pour $j > i$. et $PP' = P'P = I_T$, la matrice identité $T * T$. En définissant la séquence de bruit blanc à T variables $\{\vec{\eta}_n\}$ par $\vec{\eta}_n = P' \vec{Z}_n$, on transforme (2.64) en :

$$\vec{X}_n - \sum_{k=1}^{p^*} A_k \vec{X}_{n-k} = \Theta_0 \vec{\eta}_n + \sum_{k=1}^{q^*} \Theta_k \vec{\eta}_{n-k}, \quad (2.65)$$

où $\Theta_0 = P$ et $\Theta_k = B_k P$ pour $1 \leq k \leq q$. Notez que les Θ_k peuvent facilement être calculée à partir de Γ , B_1, \dots, B_q . L'équation (2.11) montre que la multiplication de tous les coefficients de la matrice moyenne mobile par P' ne modifie pas l'inversibilité du modèle puisque $\det(P) \neq 0$; en particulier, (2.64) est inversible si et seulement si (2.65) est inversible. L'expansion de (2.65) composante par composante révèle la forme PARMA :

$$X_{nT+\nu} - \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu) X_{nT+\nu-k} = \sum_{k=0}^q \theta_k^*(\nu) \eta_{nT+\nu-k}, \quad (2.66)$$

où $p = (p^* + 1)T - 1$, $q = (q^* + 1)T - 1$, $X_{nT+\nu}$ désigne la ν ème composante de \vec{X}_n , et $\eta_{nT+\nu}$ désigne la ν ème composante de $\vec{\eta}_n$.

Les coefficients autorégressifs non nuls de (2.66) peuvent être générés en mettant

$$\theta_{(k-1)T+\nu-1+s}(\nu) = (A_k)_{\nu, T+1-s} \text{ pour } 1 \leq k \leq p^*, 1 \leq s \leq T \text{ et } 1 \leq \nu \leq T.$$

Ici, $(A_k)_{i,j}$ désigne le (i, j) ^{ième} élément de A_k . Certains des coefficients autorégressifs périodiques sont nuls : $\phi_s(\nu) = 0$ pour $2 \leq \nu \leq T$ et $1 \leq s \leq \nu - 1$. De même, les coefficients de moyenne mobile non nuls dans (2.66) sont : $\theta_s^*(\nu) = (\Theta_0)_{\nu, \nu-s}$ pour $1 \leq \nu \leq T$ et $0 \leq s \leq \nu - 1$ et $\theta_{(k-1)T+\nu-1+s}^*(\nu) = (\Theta_k)_{\nu, T+1-s}$ pour $1 \leq k \leq q^*, 1 \leq s \leq T$ et $1 \leq \nu \leq T$.

Ici, $(\Theta_k)_{i,j}$ indique le (i, j) ^{ième} élément de Θ_k . Enfin, les variances du bruit blanc dans (2.66) sont $\text{var}(\eta_{nT+\nu}) = D_{\nu, \nu}$,

où $D_{\nu,\nu}$ est le *vieme* élément diagonal de D . L'équation (2.66) est sous la forme PARMA à l'exception du terme $\theta_0^*(\nu)$ multipliant $\eta_{nT+\nu}$. En définissant $\epsilon_{nT+\nu} = \theta_0^*(\nu)\eta_{nT+\nu}$, on obtient (2.66) avec $\theta_k(\nu) = \theta_0^*(\nu - k)^{-1}\theta_k^*(\nu)$ pour $1 \leq k \leq q$. Ici, $\theta_0^*(j)$ est interprété périodiquement en j avec une période T .

Les calculs ci-dessus montrent qu'un modèle ARMA vectoriel a une représentation PARMA équivalente et que les paramètres du modèle PARMA sont facilement calculables à partir des paramètres du modèle ARMA vectoriel. Par conséquent, en principale, une vraisemblance ARMA vectorielle gaussienne peut également être calculée efficacement. Bien entendu, en pratique, le calcul de la structure de covariance du modèle PARMA dans (2.57) peut être difficile lorsque p^* , q^* ou T sont grands.

En ordres de grandeur de calcul, les résultats ci-dessus montrent que l'évaluation d'une vraisemblance PARMA d'une série de longueur N n'est pas plus difficile que évaluer la vraisemblance d'une série ARMA univariée de longueur N . De même, l'évaluation d'une vraisemblance ARMA à T variables pour une série de longueur N est équivalente (en gros) à l'évaluation d'une vraisemblance PARMA univariée pour une série de longueur NT .

Chapitre 3

Illustration numérique

Ce chapitre présente des exemples afin d'illustrer numériquement les résultats théoriques des chapitres précédent. Bien que les solutions explicites de recursions donnent généralement des résultats assez efficace sur le plan numérique, il est néanmoins satisfaisant d'obtenir des résultats explicites. Toutes les quantités de ce chapitre sont interprétées périodiquement avec une période T . (Ce chapitre a été tiré de l'article de Mohamed Bentarzi et Abdelhakim Aknouche de l'université Houari boumedienne, Algérie sous le nom de " An On-Line Estimation Algorithm for Periodic Autoregressive Models")

Exemple 1. *L'équation de différences pour le modèle PARMA(1,1) avec période T est :*

$$X_{nT+\nu} = \phi_1(\nu)X_{nT+\nu-1} + \epsilon_{nT+\nu} + \theta_1(\nu)\epsilon_{nT+\nu-1}. \quad (3.1)$$

Les calculs avec (2.7) et (2.11) montrent que le modèle PARMA(1,1) est causal lorsque $|\phi_1(1)\phi_1(2)\dots\phi_1(T)| < 1$ et inversible lorsque $|\theta_1(1)\theta_1(2)\dots\theta_1(T)| < 1$.

Nous supposons la causalité dans les calculs ci-dessous. Tout d'abord, nous allons calculer la structure de covariance de X_t . Bien que les expressions obtenues ci-dessous soient de forme complexe, elles se réduisent à leurs homologues stationnaires ARMA(1,1) lorsque les paramètres du modèle sont non saisonniers. En multipliant (3.1) par $X_{nT+\nu}$ et en prenant les espérances, on obtient l'équation de différence périodique : montrons que le modèle PARMA(1,1) est causal lorsque $|\phi_1(1)\phi_1(2)\dots\phi_1(T)| < 1$ et inversible lorsque $|\theta_1(1)\theta_1(2)\dots\theta_1(T)| < 1$.

$$var(X_{nT+\nu}) = \gamma_\nu(0) = \phi_1(\nu)^2\gamma_{\nu-1}(0) + k(\nu), \quad (3.2)$$

où

$$K(\nu) = \sigma^2(\nu) + \theta_1(\nu)^2\sigma^2(\nu-1) + 2\phi_1(\nu)\theta_1(\nu)\sigma^2(\nu-1). \quad (3.3)$$

Ici, nous avons utilisé (2.5) et $\psi_0(\nu) = 1$ pour obtenir $cov(X_{nT+\nu-1}, \epsilon_{nT+\nu-1}) = \sigma^2(\nu - 1)$. La solution de (3.2) peut être obtenue en commençant par $\gamma_T(0)$, en récurant (3.2) T fois, puis en exigeant $\gamma_T(0) = \gamma_0(0)$:

$$\gamma_\nu(0) = \sum_{r=1}^{\nu} \left\{ \sum_{l=r+1}^{\nu} \phi_1(l)^2 \right\} k(r) + \left\{ \prod_{s=1}^{\nu} \phi_1(s)^2 \right\} \frac{\sum_{r=1}^T \left\{ \prod_{l=r+1}^T \phi_1(l)^2 \right\} k(r)}{1 - \prod_{r=1}^T \phi_1(r)^2}. \quad (3.4)$$

Dans (3.4), un produit sur un ensemble vide d'indices est interprété comme l'unité. En multipliant (3.1) par $X_{nT+\nu-1}$ et en prenant les espérances, on obtient les autocovariances lag-one :

$$\gamma_\nu(1) = \phi_1(\nu)\gamma_{\nu-1}(0) + \theta_1(\nu)\sigma^2(\nu - 1). \quad (3.5)$$

Les covariances aux retards de deux ou plus sont trouvés en multipliant (3.1) par $X_{nT+\nu-h}$ pour $h \geq 2$ et en prenant les espérances :

$$\gamma_\nu(h) = \phi_1(\nu)\gamma_{\nu-1}(h - 1). \quad (3.6)$$

Cette équation différentielle a pour solution .

$$\gamma_\nu(h) = \left\{ \prod_{j=0}^{h-2} \phi_1(\nu - j) \right\} \gamma_{\nu-h+1}(1) \quad h \geq 2. \quad (3.7)$$

Les équations de prédiction réursive (2.18) et (2.19) se réduisent à $\hat{X}_1 = 0$ et à :

$$\hat{X}_{nT+\nu} = \phi_1(\nu)X_{nT+\nu-1} + \vartheta_{nT+\nu-1,1}(X_{nT+\nu-1} - \hat{X}_{nT+\nu-1}) \quad nT + \nu \geq 2. \quad (3.8)$$

L'équation (2.29) identifie explicitement les coefficients de prédiction comme étant :

$$\vartheta_{nT+\nu-1,1} = \frac{Cov(W_{nT+\nu}, W_{nT+\nu-1})}{v_{nT+\nu-2}} = \frac{\theta_1(\nu)\sigma^2(\nu - 1)}{v_{nT+\nu-2}}. \quad (3.9)$$

L'utilisation de (3.9) dans (2.30) donne :

$$v_{nT+\nu} = \{\sigma^2(\nu + 1) + \theta_1^2(\nu + 1)\sigma^2(\nu)\} - \frac{\theta_1^2(\nu + 1)\sigma^4(\nu)}{v_{nT+\nu-1}} \quad nT + \nu \geq 1. \quad (3.10)$$

avec la condition initiale $v_0 = \gamma_1(0)$. L'équation (3.10) peut-être résolue explicitement pour $\{ v_t \}$ comme suit. D'abord, on effectue la substitution :

$$y_{nT+\nu} = \frac{\sigma^{-2}(\nu+1)v_{nT+\nu}}{\sigma_1^{-2}(\nu+1)v_{nT+\nu-1}} \quad nT + \nu \geq 0, \quad (3.11)$$

dans (3.10) et simplifier pour obtenir

$$y_{nT+\nu} = 1 + \frac{\sigma^2(\nu+1)}{\theta_1^2(\nu+1)\sigma^2(\nu)} y_{nT+\nu-1} \quad nT + \nu \geq 1. \quad (3.12)$$

La solution de (3.12) est :

$$y_{nT+\nu} = 1 + \left\{ \prod_{r=1}^{nT+\nu} P(r) \right\} y_0 + \sum_{j=2}^{nT+\nu} \left\{ \prod_{r=j}^{nT+\nu} P(r) \right\} \quad nT + \nu \geq 1, \quad (3.13)$$

où la condition initiale est $y_0 = \sigma^{-2}(1)\gamma_1(0)/\{\sigma^{-2}(1)\gamma_1(0) - 1\}$ et :

$$P(nT + \nu) = \frac{\sigma^2(\nu+1)}{\theta^2(\nu+1)\sigma^2(\nu)}, \quad (3.14)$$

les erreurs quadratiques moyennes $\{ \nu_t \}$ sont obtenues en résolvant (3.11) pour :

$$v_{nT+\nu} = \sigma^2(\nu+1) \frac{y_{nT+\nu}}{y_{nT+\nu-1}} \quad nT + \nu \geq 1 \quad (3.15)$$

La vraisemblance du modèle PARMA(1,1) est facilement calculée avec (2.63). Remarquez que $\gamma_1(0)$ est la seule information de covariance nécessaire pour utiliser (2.63).

Exemple 2. *Considérons maintenant l'auto-régression d'ordre 1 de la période causale, PAR(p) :*

$$X_{nT+\nu} = \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu) X_{nT+\nu-k} + \epsilon_{nT+\nu}, \quad (3.16)$$

pour $nT + \nu \geq p + 1$, (2.19) nous donne :

$$\hat{X}_{nT+\nu} = \sum_{k=1}^p \phi_k(\nu) X_{nT+\nu-k}. \quad (3.17)$$

Ainsi, $v_{nT+\nu-1} = \sigma^2(\nu)$ pour $nT + \nu \geq p + 1$. En les utilisant dans (2.59) et en simplifiant, on obtient :

$$L(\vec{\phi}, \vec{\sigma}, \vec{X}) = (2\pi)^{-N/2} \det(\Gamma_p)^{-1/2} \left\{ \prod_{j=p}^{N-1} \sigma^2(j+1) \right\}^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \vec{X}'_p \Gamma_p^{-1} \vec{X}_p \right) S(\vec{\phi}, \vec{\sigma}, \vec{X}), \quad (3.18)$$

$$S(\vec{\phi}, \vec{\sigma}, \vec{X}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^N \frac{\{(X_j - \phi_1(j)X_{j-1} - \dots - \phi_p(j)X_{j-p})^2\}}{\sigma^2(j)} \right], \quad (3.19)$$

et Γ_p désigne la matrice de covariance de $\vec{X}_p = (X_1, \dots, X_p)'$. Par exemple, la vraisemblance exacte de l'autoregressif périodique de premier ordre est :

$$L(\vec{\phi}, \vec{\sigma}, \vec{X}) = (2\pi)^{-N/2} \gamma_1(0)^{-1/2} \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \sigma^2(j+1) \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{X_1^2}{2\gamma_1(0)} \right\} S(\vec{\phi}, \vec{\sigma}, \vec{X}), \quad (3.20)$$

où

$$S(\vec{\phi}, \vec{\sigma}, \vec{X}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=2}^N \frac{\{X_j - \phi_1(j)X_{j-1}\}^2}{\sigma^2(j)} \right]. \quad (3.21)$$

Remarquez qu'il suffit d'évaluer Γ_p pour calculer rapidement la vraisemblance exacte d'une autorégression périodique. Malheureusement, les expressions explicites de Γ_p sont très fastidieuses à obtenir. En multipliant (3.16) par $X_{nT+\nu-h}$ pour $h = 0, 1, 2, \dots, p$ et en prenant les attentes, on obtient une version périodique des équations de Yule-Walker qui, bien que fastidieuse, peut en principe être résolue pour obtenir Γ_p en fonction des paramètres du modèle. Le lecteur est invité à consulter Hallin et Ingenbleek (1983) pour en savoir plus sur les équations de Yule-Walker variables dans le temps. Des approches numériques peuvent également être utilisées pour évaluer Γ_p . La récursion dans (2.8) se réduit à $\psi_\nu(0) \equiv 1$ et :

$$\psi_k(\nu) = \sum_{j=1}^{\min(k,p)} \phi_j(\nu) \psi_{k-j}(\nu-j) \quad k \geq 1, 1 \leq \nu \leq T. \quad (3.22)$$

Une fois les $\psi_k(\nu)$ calculés pour chaque $k \geq 0$ et $1 \leq \nu \leq T$, les $\gamma_\nu(h)$ apparaissant dans Γ_p peuvent être calculés par sommation avec (2.15). Pour un PAR(p) général avec $p \leq T$, une approche vectorielle AR(1) peut être utilisée pour obtenir Γ_p . L'équation (2.3) donne :

$$\Phi_0 \vec{X}_n - \Phi_1 \vec{X}_{n-1} = \vec{\epsilon}_n, \quad (3.23)$$

qui peut s'écrire sous la forme AR(1) à T variables :

$$\vec{X}_n = M \vec{X}_{n-1} + \vec{Z}_n, \quad (3.24)$$

où $M = \Phi_0^{-1}\Phi_1$ et $\{\vec{Z}_n\}$ est un bruit blanc multivarié de moyenne $\vec{0}$ et de matrice de covariance $\Sigma_z = \Phi_0^{-1} \sum_{\epsilon} (\Phi_0^{-1})'$. Ici, $\Sigma_{\epsilon} = \text{diag}\{\sigma^2(1), \dots, \sigma^2(T)\}$ est la matrice de covariance de ϵ_n . L'autocovariance zero du retard $\Gamma_{\vec{X}}(0) = E(\vec{X}_n, \vec{X}'_n)$ satisfait :

$$\Gamma_{\vec{X}}(0) = M\Gamma_{\vec{X}}(0)M' + \Sigma_z. \quad (3.25)$$

L'équation (3.25) est un système linéaire d'équations qui peut être facilement résolu pour obtenir les composantes de $\Gamma_{\vec{X}}(0)$. Les $\gamma_{\nu}(h)$ apparaissant dans γ_p sont alors obtenus à partir de :

$$((\Gamma_{\vec{X}})(0))_{i,j} = \gamma_{\max(i,j)}(|i - j|) \quad 1 \leq i, j \leq T. \quad (3.26)$$

3.1 Algorithme d'estimation approximative du maximum de vraisemblance

Ci-dessous, nous déroulons les diverses étapes de l'algorithme qui permet d'estimer approximativement le maximum de vraisemblance.

1. Commencer par l'estimation des valeurs initiales $\hat{\phi}_0$ de ϕ et $\hat{\theta}_0$ de θ ;
2. Soit $\hat{\epsilon}_j = 0$ de $p + 1 - q \leq j \leq p$ et calculer $\hat{\epsilon}_j, p + 1 \leq j \leq NS$, de

$$\hat{\epsilon}_{p+j} = w_{p+j} + \sum_{k=1}^q \theta_k(p+j)\hat{\epsilon}_{p+j-k}, \quad (3.27)$$

pour $j = 1, 2, \dots, NS - p$

3. Calculer les estimations des variances résiduelles :

$$\hat{\sigma}^2(i) = (N - K_2)^{-1} \sum_{n=1}^{N-K_1} \hat{\epsilon}_{k_1 S + i + (n-1)S}^2, \quad (3.28)$$

où $\hat{\epsilon}_j = 0$ chaque fois que $K_1 S < j \leq p - q$

4. Utiliser une procédure récurrente d'optimisation pour trouver $\hat{\phi}$ and $\hat{\theta}$, qui minimisent $-2 \ln[L(\phi, \theta, \hat{\sigma}|w_p)]$ par rapport a ϕ et θ , où $\hat{\sigma} = [\hat{\sigma}^2(1), \dots, \hat{\sigma}^2(S)]'$.
5. Calculer les estimations actualisées des résidus $\hat{\epsilon}_j, p + 1 - q \leq j \leq NS$ de

$$\hat{\epsilon}_* = [\hat{\epsilon}_{p+1-q}, \hat{\epsilon}_{p+2-q}, \dots, \hat{\epsilon}_p]' = A_{\theta,p}^{-1} F'_{\theta,p} D_{p+1,NS}^{-1} L_{\theta,p}^{-1} W_p. \quad (3.29)$$

et celle de (3.28) avec $\sigma = \hat{\sigma}$, $\phi = \hat{\phi}$, et $\theta = \hat{\theta}$.

6. Répéter les parties 3 à 5 jusqu'à ce qu'il y ait convergence. Le choix du diviseur dans la partie 3 est quelque peu arbitraire. $N - K_2$ est utilisé pour garder les estimations analogues aux estimations de la variance obtenues par Hillmer et Tiao (1979) pour les modèles ARMA multivariés. Un problème qui ne sera pas traité dans ce chapitre mais qui mérite d'être examiné est la détermination d'un diviseur alternatif dans la partie 3 qui minimisera le biais des biais dans les estimations de la variance.

L'algorithme précédent a été testé sur plusieurs modèles $PARMA(1, 1)$ par des études de simulation. Les estimations initiales utilisées dans la partie 1 étaient $\hat{\phi}_0 = \tilde{\phi}$ et $\hat{\theta}_0 = \tilde{\theta}$ où $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\theta}$ sont des estimateurs de la méthode des moments de ϕ et θ obtenus par le biais de la méthode des moments. équations de Yule-Walker :

$$\begin{aligned} c_0(k) &= \tilde{\phi}(k)c_1(k) + \tilde{\sigma}^2(k) - \tilde{\theta}(k)(\tilde{\phi}(k) - \tilde{\theta}(k))\tilde{\sigma}^2(k-1) \\ c_1(k) &= \tilde{\phi}(k)c_0(k-1) - \tilde{\theta}(k)\tilde{\sigma}^2(k-1) \\ c_2(k) &= \tilde{\phi}(k)c_1(k-1), \end{aligned} \quad (3.30)$$

de $1 \leq k \leq S$. dans (3.30), $c_j(k)$ est l'estimateur des moments de $Cov(y_{t(n,k)}, y_{t(n,k)-j})$, l'autocovariance pour la saison k au décalage j (voir Salas et al. 1982). Ces estimateurs de moment des autocovariances saisonnières ne se situent pas nécessairement dans l'espace des structures de covariance possibles pour le modèle $PARMA(1, 1)$. solutions à valeur réelle de (3.30) n'existent souvent pas. En fait, pour de nombreux modèles considérés dans les simulations, les solutions à (3.30) n'existent pas dans plus de la moitié des réalisations générées d'une durée de 50 ans. Il s'agit d'un problème majeur avec l'estimation des moments, et la nature complexe de l'espace de covariance pour les modèles PARMA exclut toute approche gérable pour restreindre l'espace de covariance des modèles PARMA. $c_j(k)$ de façon à ce qu'une solution aux équations de Yule-Walker existe toujours. Dans les cas où solutions à (3.30) n'existent pas, les valeurs initiales utilisées pour la partie 1 sont $\tilde{\phi}(k) = c_2(k)/c_1(k-1)$ et $\tilde{\theta}(k) = 0$ ($1 \leq k \leq S$) Pour apprécier l'utilité des procédures d'estimation ML proposées et de les comparer à l'estimation des moments l'estimation des moments, les résultats de simulations de plusieurs modèles gaussiens $PARMA(1, 1)$ sont présentés dans le tableau 1. Pour chacun des cinq ensembles de paramètres, 150 réalisations d'une durée de 50 ans ont été générées à partir de la modèle $PARMA(1, 1)$ donné.

Les procédures d'estimation décrites précédemment ont été appliquées à chaque réalisation, et certaines statistiques sommaires sont présentées dans le tableau. Les statistiques les plus

Modèle	Pourcentage des Réalizations		Paramètres					
			$\phi(1)$	$\theta(1)$	$\sigma^2(1)$	$\phi(2)$	$\theta(2)$	$\sigma^2(2)$
Simulation 1								
Valeur actuelle			.5	.9	16.0	1.4	-.7	64.0
Méthode des moments	43	Mean	.448	.780	20.576	1.602	-.108	64.82
		RMSE	.121	.198	9.863	.346	.775	17.27
Mamimum de vraisemblance	100	Mean	.464	.865	14.055	1.403	-.799	58.68
		RMSE	.106	.139	3.547	.140	.239	13.56
Simulation 2								
Valeur actuelle			.6	-1.0	1.0	1.2	-.5	16.0
Méthode des moments	43	Mean	.560	-.988	1.698	1.182	-.078	15.507
		RMSE	.076	.099	1.179	.067	.538	3.325
Mamimum de vraisemblance	100	Mean	.573	-1.021	1.045	1.172	-.399	15.500
		RMSE	.065	.067	.286	.072	.226	3.357
Simulation 3								
Valeur actuelle			.8	-5	-4.0	.5	.8	1.0
Méthode des moments	38	Mean	.850	0.28	39.005	.476	.420	2.276
		RMSE	6.536	3.854	85.979	.212	.510	2.015
Mamimum de vraisemblance	99	Mean	.836	-.550	3.771	.449	.751	.924
		RMSE	.277	.322	.814	.180	.187	.210
Simulation 4								
Valeur actuelle			.3	1.0	1.0	.5	1.0	1.0
Méthode des moments	74	Mean	.749	.762	11.503	.735	.662	2.425
		RMSE	4.743	3.357	33.543	1.462	.975	8.259
Mamimum de vraisemblance	96	Mean	.195	.892	1.013	.468	.937	1.000
		RMSE	1.501	1.565	.253	.292	.386	.217
Simulation 5								
Valeur actuelle			.8	.3	1.0	.6	.5	1.0
Méthode des moments	82	Mean	.687	.174	.958	.532	.376	.966
		RMSE	.664	.704	.296	.335	.210	.212
Mamimum de vraisemblance	95	Mean	.714	.213	.933	.516	.408	.938
		RMSE	.825	.842	.199	.351	.386	.217

TAB. 3.1 – Résultats de l'estimation des paramètres par simulations des divers PARMA(1,1)

Simulation number	Paramètre					
	$\phi(1)$	$\theta(1)$	$\sigma^2(1)$	$\phi(2)$	$\theta(2)$	$\sigma^2(2)$
1	1.14	1.42	2.79	2.47	3.24	1.27
2	1.17	1.48	4.12	.93	2.38	1.02
3	23.60	11.97	105.62	1.18	2.73	9.59
4	3.16	2.14	132.58	5.01	2.53	38.06
5	.80	.84	1.49	.95	.54	.98

TAB. 3.2 – Rapport des erreurs quadratique moyennes pour l’estimations des paramètres (Méthode des moments/ Méthode du maximum de vraisemblance)

importantes sont peut-être dans la première colonne (pourcentage de réalisations produisant des estimations). Dans le cas de l’estimation des moments, ces nombres représentent le pourcentage des 150 réalisations pour lesquelles des solutions à (3.30) existent. Pour l’estimation ML (dans la suite, ML, signifie maximum de vraisemblance, de l’anglais Maximum likelihood), les estimations sont considérées comme impossibles à obtenir lorsqu’une réalisation donne une vraisemblance qui est mal conditionnée dans le sens où la partie 4 de l’algorithme d’estimation ML ne peut être utilisée. Notez que l’estimation ML donne des estimations dans beaucoup plus de cas que l’estimation moment. La complexité des estimateurs de moments augmente au fur et à mesure que le nombre de saisons augmente (voir Salas et al. 1982) et ne peut que creuser l’écart entre les deux procédures. Les autres statistiques du tableau 1 sont la moyenne et la racine de l’erreur quadratique moyenne (RMSE) des paramètres à partir des réalisations pour lesquelles les estimations sont obtenues. La RMSE peut-être calculée de :

$$RMSE = \sqrt{(Biais^2 + Variance)}, \quad (3.31)$$

et constitue peut-être le meilleur résumé de la précision des estimations. Le tableau 2 donne la RMSE pour les moment divisée par la RMSE des estimations ML. Les valeurs sont généralement élevées, ce qui indique que les estimations ML sont beaucoup plus précises que les estimations momentanées, sauf pour la simulation 5. Pour voir comment les estimations ML se comportent lorsque plus de saisons (et donc de paramètres) sont ajoutées au modèle, 10 réalisations d’un modèle $PARMA(1, 1)$ ont été générées. Les valeurs des paramètres pour le modèle sont données dans le tableau 3 et ont été choisies pour donner un modèle assez difficile à estimer. De plus, la durée de réalisation a été réduite à 40 ans. Les paramètres pour les 10 réalisations (tableau 3) sont bonnes, compte tenu de la longueur modérée de la série.

Paramètre	valeur actuelle	Estimations à partir de la simulation									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\phi(1)$	1.0	.98	.99	.92	.94	.98	1.09	.98	1.00	.94	1.05
$\theta(1)$.0	-.19	-.21	-1.8	-.12	-.08	.03	.51	.22	-.07	.54
$\sigma^2(1)$	1.0	.95	.79	.77	1.11	1.09	.97	.71	1.29	1.32	.94
$\phi(2)$	1.0	.93	.98	1.02	.99	.96	1.04	1.07	.97	1.03	.98
$\theta(2)$.0	-.20	-.31	.09	.30	.11	-.04	-.43	.30	.04	.26
$\sigma^2(2)$	1.0	.62	.79	.79	.64	.87	.96	1.05	.71	.88	.78
$\phi(3)$.9	1.03	.84	.77	.84	.97	.87	.69	1.13	.90	1.02
$\theta(3)$.5	.76	.39	.71	.41	.94	1.00	-.12	1.29	.18	-.44
$\sigma^2(3)$	8	8.13	6.50	8.30	8.10	5.60	10.80	9.80	4.54	4.80	5.90
$\phi(4)$.8	.75	.64	.93	.55	.82	.97	.89	.65	.79	.71
$\theta(4)$.5	.38	.38	.79	.29	.09	.57	.60	.35	.72	.55
$\sigma^2(4)$	16.0	12.60	18.10	15.80	11.90	7.90	10.60	15.50	11.80	9.40	14.70
$\phi(5)$.7	.79	.54	.75	.24	.76	.71	.74	.49	.67	.75
$\theta(5)$	-.4	-.35	-.44	-.57	-.77	-.22	-.34	-.50	-.36	-.16	-.14
$\sigma^2(5)$	8.0	12	9.10	6.70	10.50	7.19	9.86	5.90	5.50	9.00	6.80
$\phi(6)$.7	.74	.61	.78	.55	.67	.57	.71	.57	.55	.66
$\theta(6)$	-.4	-.35	-.52	-.42	-.63	-.39	-.54	-.49	-.58	-.56	-.44
$\sigma^2(6)$	1.0	.83	.93	.79	.87	.97	.96	.94	.77	.98	.63

TAB. 3.3 – Résultats de l'estimation des paramètres pour 10 simulations du modèle PARMA(1,1)

3.1.1 Application sur le débit bimensuel du fleuve Caroni

Nous passons maintenant à l'analyse d'une série chronologique saisonnière à l'aide de modèles PARMA. La série consiste en débit bimensuel (en m^3 par seconde) pour le fleuve Rio Caroni, au Venezuela, de janvier 1950 à novembre 1978. (données reprises de vacchia 1986). Les valeurs bimestrielles sont des moyennes des relevés quotidiens effectués au cours des mois. Un graphique des données, présenté dans la figure 1, révèle une forte composante saisonnière, et aucune tendance à long terme.

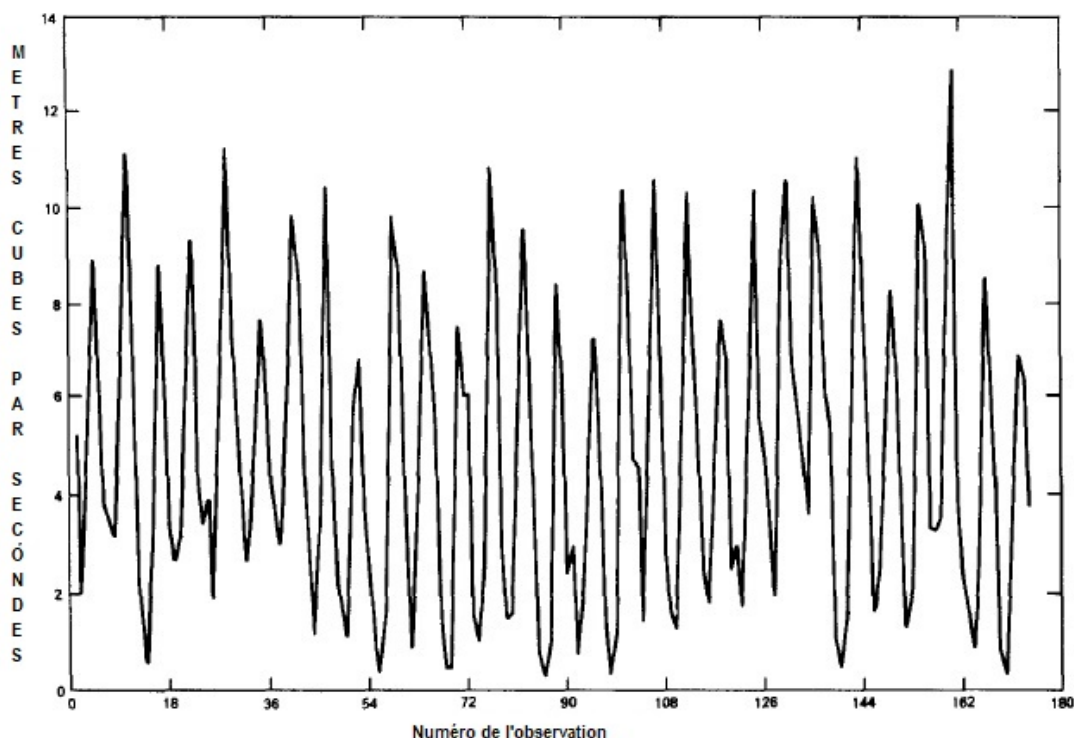


FIG. 3.1 – Débit bimensuel de janvier à novembre

Les moyennes bimensuelles et les écarts types des données (tableau 4) indiquent que de grandes différences saisonnières existent. La première étape d'une analyse PARMA consiste à standardiser les données pour avoir une moyenne nulle. Ceci peut être accompli par l'une des deux méthodes suivantes. La première méthode consiste à supposer une composante moyenne périodique fixe, estime la moyenne à partir des données, et de normaliser les données en soustrayant la moyenne. La deuxième méthode consiste à éliminer toute composante périodique non stationnaire en filtrant les données. Cette deuxième méthode est présentée ici. Les données de Rio Caroni sont désignées par $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \dots, \tilde{Z}_{NS}$ avec $N = 29$ (années) et $S = 6$ (saisons). Une estimation du spectre de puissance à partir des données observées, calculée à partir de la sous-routine FTFREQ de l'IMSL, est présentée à la figure 2. Il y a deux pics prononcés dans le spectre correspondant aux périodes 6 et 3. La série périodique de 6 peut être supprimée en opérant sur \tilde{Z}_t avec $1 - B + B^2$, où B est l'opérateur de décalage arrière défini par $B^k \tilde{Z}_t = \tilde{Z}_{t-k}$. De même, la périodicité de 3 peut être supprimée avec l'opérateur $1 + B + B^2$. Les données brutes ont donc été filtrées pour obtenir $\{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{MS}\}$ où $\tilde{y}_t = (1 + B^2 + B^4)\tilde{Z}_{t+6}$ et $M = N - 1 = 28$ [notez que

<i>Statistique</i>	<i>Janvier</i>	<i>Mars</i>	<i>Mai</i>	<i>Juillet</i>	<i>Septembre</i>	<i>Novembre</i>
Mean (m^3 par second)	2.564	1.501	4.502	9.134	6.833	4.213
Standard Déviation (m^3 par second)	1.199	978	2.553	1.702	1.528	1.259

TAB. 3.4 – Moyenne et écart-type des données bimensuelles

$1 + B^2 + B^4 = (1 - B + B^2)(1 + B + B^2)$]. Les estimations de l'autocorrélation à partir des données qui en résultent (figure 3) montrent que les autocorrélations disparaissent suffisamment. Les moyennes et les écarts standard des données filtrées (tableau 5) montrent que le filtre a réduit efficacement la moyenne de la variation saisonnière, mais qu'il existe encore de grandes variations importantes entre les écarts types. Soit $y_t = \tilde{y}_t - \bar{y}$ où \bar{y} est la moyenne des six moyennes du tableau 5. L'étape suivante de l'analyse consiste à identifier un modèle PARMA particulier pour les données normalisées y_t . Les estimations des autocorrélations de y_t , ventilées par saisons, sont présentées dans le tableau 6. L'estimation de l'autocorrélation de l pour la ν ème saison est donnée par $c_1/(\nu)\sqrt{\{c_0(\nu)c_0(\nu-l)\}}$

$$c_j(k) = M^{-1} \sum_{n=0}^{M-1} y_{nS+k} y_{nS+k-j} \quad (3.32)$$

avec $y_t = 0$ chaque fois que $t < 1$. Il n'y a pas beaucoup de preuve dans le tableau 6 pour indiquer une variation saisonnière dans la structure de corrélation. Mai et juillet, semblent toutefois présenter des corrélations plus faiblement élevés que ceux des autres saisons. En outre, il est démontré par la suite qu'une analyse PARMA apporte une amélioration considérable par rapport à une analyse ARMA standard, qui suppose que les autocorrélations sont constantes au fil des saisons.

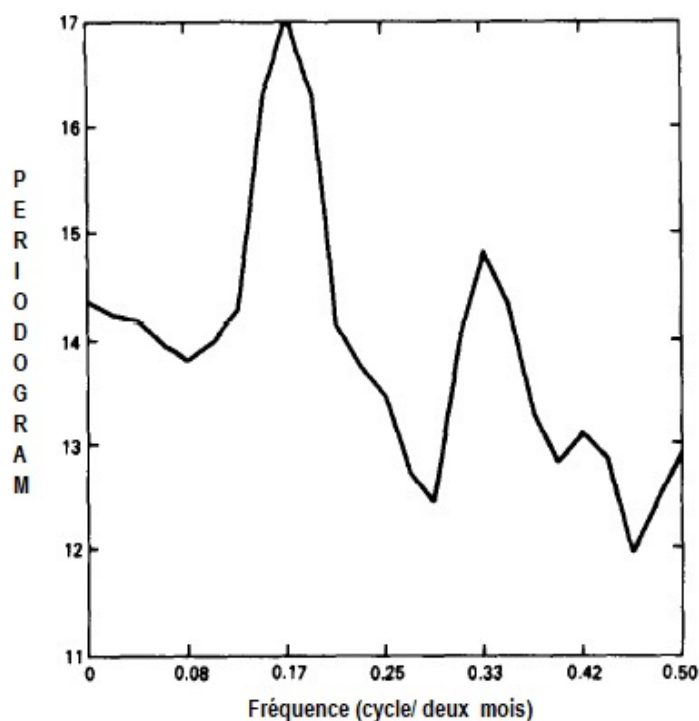


FIG. 3.2 – Estimation du spectre de puissance

L'identification du modèle *PARMA* est une tâche difficile et, contrairement à l'identification du modèle *ARMA*, une méthode systématique n'a pas été développée. L'accent de cette partie est mis sur l'estimation. d'illustration, le modèle *PARMA*(1, 1) est choisi pour l'analyse. l'analyse. Un examen du tableau 6 montre que le modèle *PARMA*(1, 1) devrait fournir une bonne adéquation aux autocorrélations saisonnières. Les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle *PARMA*(1, 1), obtenues à partir de la série filtrée de Rio Caroni, sont présentées dans le tableau 7. Certaines autocorrélations saisonnières du modèle estimé sont comparées aux autocorrélations correspondantes estimées à partir des données dans la figure 4. Il y a un bon accord entre les autocorrélations du modèle et les autocorrélations des données à l'exception de la saison 2. Il est intéressant de comparer l'analyse *PARMA*(1, 1) des données filtrées de Rio Caroni à une analyse plus standard.

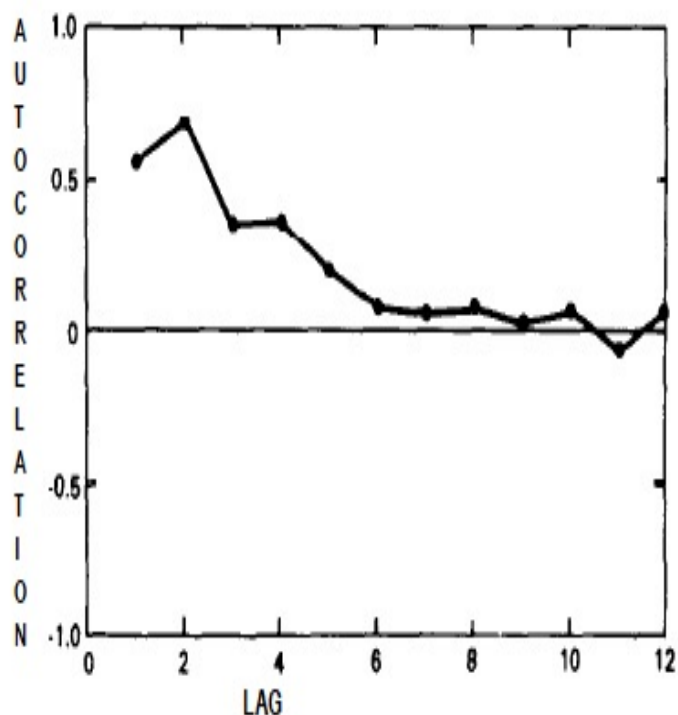


FIG. 3.3 – Estimation de l'autocorrélation

En particulier, on peut envisager d'adapter un modèle ARMA standard à la série filtrée, la traitant ainsi comme une série temporelle stationnaire de second ordre. Les estimations d'autocorrélation (Figure 3) indiquent un modèle AR(2), ARMA(2, 1), ou éventuellement un ARMA(1,1). Les résultats suivants concernent le modèle pour le modèle ARMA(2,1), mais il est démontré que les mêmes conclusions sont valables pour le modèle AR(2) ou ARMA(1,1). On appelle un modèle ARMA(2,1) pour la série filtrée Rio Caroni comme suit :

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} = \eta_t - \theta \eta_{t-1} \quad (3.33)$$

avec $\text{var}(\eta_t) = \sigma^2$. Les estimations du maximum de vraisemblance de ϕ_1, ϕ_2, θ et σ^2 peuvent être obtenues en utilisant l'algorithme de la section 3 pour estimer un modèle *PARMA*(2, 1) avec $\phi_1(\nu) = \phi_1, \phi_2(\nu) = \phi_2, \theta(\nu) = \theta$, et $\sigma^2(\nu) = \sigma^2$ pour tous les $1 \leq \nu \leq 6$. Les estimations ainsi obtenues sont les suivantes sont $\phi_1 = .073, \phi_2 = .667, \theta = -.266$, et $\sigma = 1,957$.

Dans la figure 4, les autocorrélations du modèle ARMA(2, 1) qui en résulte sont superposées à chacun des six graphes d'autocorrélation saisonnière.

<i>Statistique</i>	<i>Janvier</i>	<i>Mars</i>	<i>Mai</i>	<i>Juillet</i>	<i>Septembre</i>	<i>Novembre</i>
Mean (m^3 par second)	13.869	14.930	13.798	14.857	13.808	14.858
Standard Déviation (m^3 par second)	2.740	2.283	3.958	2.568	3.157	2.379

TAB. 3.5 – Moyennes et écarts types bimensuels des données filtrées de Rio carani

Lag	Janvier	Mars	Mai	Juillet	Septembre	Novembre
1	.59	.56	.58	.57	.62	.65
2	.84	.80	.47	.48	.82	.81
3	.52	.38	.18	.28	.47	.49
4	.56	.63	.11	.22	.47	.31
5	.26	.15	.22	.15	.16	.33
6	.31	.09	-.16	.20	.16	.15
12	.18	.08	.18	-.27	.12	-.14

TAB. 3.6 – Estimations des autocorrélations saisonnières à partir des données filtrées de Rio Caroni

Le modèle PARMA(1,1) donne un meilleur ajustement aux autocorrélations saisonnières estimées à l'exception de la saison 2 et peut-être de la la saison 6. Un outil utile pour discriminer entre les modèles de séries est le critère d'information d'Akaike (AIC, voir Priestley 1981, p. 373). Pour le modèle $PARMA(p, q)$ l'AIC est donné par

$$AIC_1 = -2 \ln L(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) + 2S(p + q + 1), \tag{3.34}$$

alors que pour le modèle ARMA(p,q)

$$AIC_2 = -2 \ln L_*(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) + 2(p + q + 1). \tag{3.35}$$

la vraisemblance L_* est contraint d'avoir une constante paramètres saisonniers. Pour les données filtrées de Rio Caroni nous avons, dans une constante additive, $AIC_1 = 2,687$ pour

Paramètres	ν					
	1	2	3	4	5	6
$\phi(\nu)$	1.490	.184	2.127	.444	1.733	.465
$\theta(\nu)$	1.495	-.836	1.674	.160	1.485	-.204
$\sigma(\nu)$	1.237	1.749	2.555	2.020	1.619	1.646

TAB. 3.7 – Estimations du maximum de vraisemblance du modèle PARMA(1,1)

le modèle $PARMA(1, 1)$ et $AIC_2 = 2, 692$ pour le modèle $ARMA(2, 1)$. Par conséquent, le critère AIC sélectionne le modèle $PARMA(1, 1)$. Puisque ni un modèle $ARMA(1,1)$ ni un modèle $AR(2)$ n'ont pu donner lieu à un AIC inférieur à $AIC_2 - 2 = 2, 690$, le modèle $PARMA(1, 1)$ est également préférable à l'un ou l'autre de ces modèles.

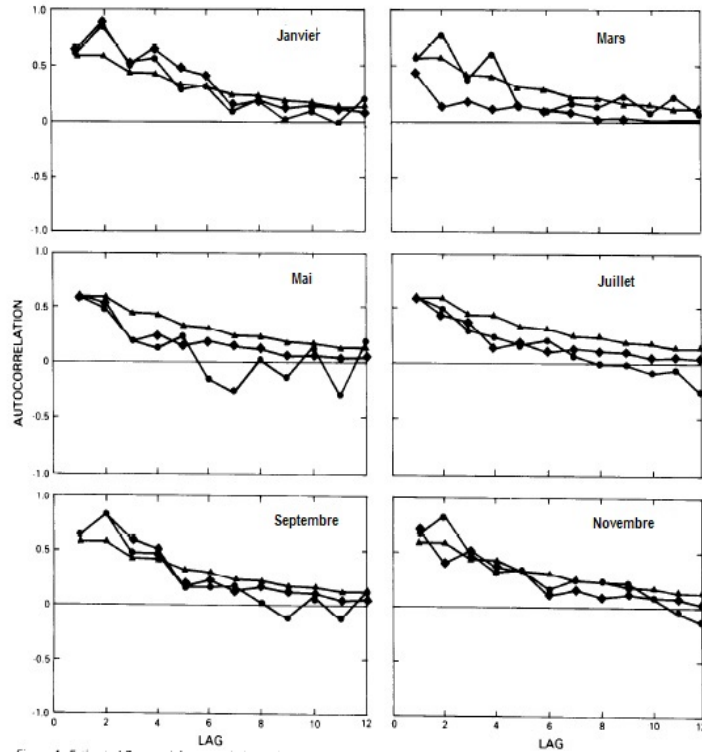


FIG. 3.4 – Estimation des autocorrelations saisonnières, avec les valeurs correspondantes $PARMA(1,1)$ et $ARMA(2,1)$

Conclusion

L'objet de ce mémoire est de fournir une méthode d'estimation alternative des paramètres d'un processus PARMA gaussiens, à l'aide des procédures d'estimation du maximum de vraisemblance. Il offre un moyen d'obtenir des estimateurs de moments adaptés.

L'algorithme proposé pour l'estimation ML approximative des paramètres du modèle est simple et facile à exécuter. Aussi l'expression donnée pour la fonction de vraisemblance est facilement évaluée pour tout processus PARMA(p,q). Néanmoins, cette méthode trouve des contraintes dans le cas des PARMA mixtes, pour cause le nombre de calculs démesurés nécessaires à son application. Il est donc parfois nécessaire d'utiliser la vraisemblance des dernières observations.

Dans le cas du modèle PARMA(1,1), les résultats sont satisfaisants, mais des recherches doivent être menées afin de généraliser l'application aux autres modèles, ce qui permettra certainement une évolution de taille dans le domaine de l'estimation des processus ARMA périodique.

La relaxation des hypothèses gaussiennes peut être réalisée de deux manières :

- Un processus non gaussien pourrait être transformé en un processus quasi gaussien par une technique telle que les transformations de Box-Cox.
- Deuxièmement, les mêmes procédures décrites dans cet article pourraient être appliquées directement aux gaussiens, avec l'interprétation que les estimations ainsi obtenues minimisent approximativement une somme pondérée des carrés des résidus estimés.

Bibliographie

- [1.]Bentarzi, M. Et Aknouche, A. (2006). An on-line estimation algorithm for periodic autoregressive models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 35(8), 1495-1512.
- [2.]Box, G. E., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., Et Ljung, G. M. (2015). *Time series analysis : forecasting and control*. John Wiley and Sons.
- [3.]Brockwell, P. J., Et Davis, R. A. (2009). *Time series : theory and methods*. Springer Science and Business Media.
- [4.]Lund, R. Et Basawa, I. V. (2000). Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic ARMA models. *Journal of Time Series Analysis*, 21(1), 75-93.
- [5.]Lagnoux, A. (2010). *Cours de Séries Chronologiques*. Université de Toulouse
- [6.]Ouhib, L. (2005). *Modélisation des apports naturels de réservoirs*.
- [7.]Perraudin, C. *Chapitre 1 : Les modeles ARMA stationnaires*.
- [8.]Vecchia, A. V. (1985). Periodic Autoregressive-Moving Average (parma) Modeling with Applications to Water Resources. *Journal of the American Water Resources Association*, 21(5), 721-730.

Résumé :

Dans ce mémoire nous nous intéressons principalement aux modèles ARMA périodiques, en définissons une méthode alternative d'estimation des paramètres d'un modèle ARMA périodique, à l'aide des procédures d'estimation du maximum de vraisemblance. Nous proposons un algorithme simple et facile à exécuter, doté d'une expression de la fonction de vraisemblance facilement évaluée pour tout processus PARMA(p,q). Ainsi, nous esquissons des méthodes de modélisation des phénomènes aléatoires périodiques observés dans divers domaines.

Mots-clefs :

Modèle PARMA, Algorithme des innovations, Séries chronologiques, Autorégressif, moyenne ajustée, estimation, maximum de vraisemblance, méthode des moments, modèle ARMA.