République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

*U*niversité*M*ouloud *M*ammeri de *T*izi-*O*uzou
*F*aculté des *S*ciences
*D*épartement de *M*athématiques

THÈSE DE DOCTORAT
ES SCIENCE

Ecole doctorale

Spécialité : ***Mathématiques***
Option **:** ***Analyse***

Etude algébrique et analytique de quelques suites de nombres premiers définies parrécurrence

Présentée par

Sadani Idir

Soutenue devant le jury composé de :

Mme KhellasFazia	**Professeur**	**UMMTO**	**Présidente**
Mr Mohamed Morsli	**Professeur**	**UMMTO**	**Directeur de thèse**
Mr Hernane Mohand Ouamar	**Professeur**	**USTHB**	**Examinateur**
Mr Derbal Abdallah	**Professeur**	**ENS-Kouba**	**Examinateur**
Mr Kessi Arezki	**Professeur**	**USTHB**	**Examinateur**

Année : 2018-2019

Remerciements

*Je veux tout d'abord remercier mon Dieu **ALLAH** qui m'a donné le courage à terminer ce travail.*

*Ma plus grande gratitude va à mon encadreur **Mr Morsli Mohamed** pour sa disponibilité, ses fructueux conseils et critiques scientifiques et sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour.*

*Je tiens à remercier beaucoup **Mme Khellas Fazia** pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury.*

*Mon profond remerciement s'adresse aux professeurs **Mr Hernane Mohand Ouamar**, **Mr Derbal Abdallah** et **Mr Kessi Arezki** qui ont bien voulu être rapporteurs de ma thèse et qui ont accepté de faire partie de mon jury.*

*Je désire témoigner à **Mr Hocini Alaoua** toute ma gratitude pour le temps et l'intérêt qu'il a consacré à nos nombreuses discussions, qui m'ont beaucoup aidé à comprendre les subtilités des objets que je manipulais.*

Je remercie ma famille, mes parents qui m'ont toujours affectueusement soutenu.

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidé à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction générale

Cette thèse se situe à l'interface de deux grands domaines mathématiques : l'analyse mathématique et la théorie des nombres. Plus précisément, nous montrons comment des outils provenant de l'analyse interviennent dans l'étude de problèmes d'arithmétiques. L'introduction de l'analyse réelle et complexe en théorie des nombres, principalement dans l'étude de la distribution des nombres premiers, sera encore le fait de *Gauss* mais aussi de *Euler* qui, avant lui, découvrit la célèbre fonction zêta [1] et qui a eu le mérite de montrer, pour la première fois, que l'Analyse permet de démontrer des résultats sur des nombres entiers [2].

Brève histoire sur la répartition des nombres premiers

À l'image des atomes pour les molécules, les nombres premiers sont les briques élémentaires des nombres entiers. Quantité de problèmes sur les nombres premiers sont aussi simples à énoncer que difficiles à attaquer. Les nombres premiers et leurs propriétés ont été étudiés en détail par les anciens mathématiciens grecs. Les mathématiciens de l'école de *Pythagore* (500 av. J.-C. à 300 av. J.-C.) étaient intéressés aux nombres pour leurs propriétés mystiques et numérologiques . Ils ont compris l'idée de primalité et étaient intéressés aux nombres entiers qui possèdent des propriétés arithmétiques très particulières.
Au moment où les *Éléments d'Euclide* sont apparus vers 300 av. J.-C., plusieurs résultats importants sur les nombres premiers avaient été prouvé. Dans le livre IX des *éléments*,

1. La *fonction zêta de Riemann* nous vient en fait d'*Euler*. Il s'agit de la fonction qui à un exposant s associe : $\xi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.
2. *Euler* établit le théorème d'*Euclide* sous une forme forte :

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathbb{P}}} \frac{1}{p} \geqslant \log_2 x - \log 2, \forall x \geqslant 2.$$

Euclide prouve qu'il existe une infinité de nombres premiers. C'est l'une des premières démonstrations connues qui utilise le raisonnement par l'absurde pour établir ce résultat. *Euclide* donne aussi une preuve du théorème fondamental de l'arithmétique à savoir, tout entier peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une manière essentiellement unique.

A première vue, les nombres premiers semblent être répartis parmi les entiers plutôt d'une façon désordonnée. Par exemple, sur les 100 nombres entiers immédiatement avant 10000000 il y a neuf nombres premiers, tandis que sur les 100 nombres entiers après, il n'y a que deux nombres premiers. Cependant, pour des grandes valeurs, la façon dont les nombres premiers sont distribués est très régulière.

Basé sur les tables de nombres premiers et facteurs premiers des mathématiciens *Anton Felkel* et *Jurij Vega*, *Legendre* et *Gauss* ont tous deux fait de nombreux calculs sur la densité des nombres premiers, autrement dit, cela revient à chercher une formule asymptotique de la distribution des nombres premiers. Ces deux mathématiciens sont parvenus à la conclusion que pour n assez grand, la densité des nombres premiers inférieurs ou égaux à n est d'environ $1/\log n$. *Legendre* donne une estimation pour $\pi(n)$ qui est le nombre des nombres premiers $\leqslant n$ de :

$$\pi(n) = \frac{n}{\log(n) - 1.08366},$$

tandis que l'estimation de *Gauss* en terme de logarithme intégral est :

$$\pi(n) = \int_2^n \frac{1}{\log t} dt.$$

Par ailleurs, dans deux articles de 1848 et 1850, le mathématicien russe *Chebychev* a tenté de prouver la conjecture de *Gauss* sur la répartition des nombres premiers. Son travail est remarquable pour son utilisation de la fonction zêta ζ dans l'attaque de ces problèmes et ouvre la voie aux progrès décisifs que feront *Hadamard* et *Landau*. Cependant, il a réussi seulement à prouver une forme légèrement plus faible de la loi asymptotique, à savoir, que si la limite de $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$ quant x tend vers l'infini existe, alors elle est nécessairement égale à 1. Il était en mesure de prouver de manière inconditionnelle que ce ratio est borné par deux constantes explicitement donnés proche de 1 pour tout x. Bien que le document de *Chebychev* ne démontre pas le théorème des nombres premiers, ses estimations pour $\pi(n)$ étaient assez fortes pour lui permettre de prouver le postulat de *Bertrand* affirmant qu'il existe un nombre premier entre n et $2n$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

D'un autre côté, un document important concernant la répartition des nombres premiers est apparu en 1859 oeuvre du mathématicien Allemand *Riemann*, intitulé *" Sur le nombre* *de nombres premiers inférieurs à une taille donnée"* (cf. [5]), le seul document qu'il a écrit sur le sujet. *Riemann* a introduit de nouvelles idées dans le domaine, la plus importante étant que la répartition des nombres premiers est intimement liée à celle des zéros non triviaux de la fonction ζ dans le plan complexe (cf. [5], [15], [7], [8]). Finalement, s'appuyant sur les travaux de *Riemann*, la conjecture de *Gauss* donne une formule asymptotique pour $\pi(n)$. La fonction qui compte le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée, fût démontrée indépendamment par *Hadamard* (1865-1963) et *de La Vallée Poussin* (1866-1962) en 1896 et devint ainsi le *Théorème des Nombres Premiers* :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \text{ quand } x \to +\infty.$$

Ainsi, durant le 20ème siècle, plusieurs preuves de ce théorème ont été données, y compris les preuves *élémentaires* de *Selberg* (cf. [9]) et *Erdős* (cf. [10]) en 1948 qui ont découvert une voie d'accès à ce résultat fondamental dans le cadre de l'analyse. Nonobstant, l'élémentarité de la preuve de ceux-ci, ce qui signifie qu'il ne nécessite pas d'outils sophistiqués d'analyse complexe sauf pour les propriétés de logarithme népérien et entièrement arithmétique, la preuve de ce résultat semble problématique et est très loin d'être simple.

Un autre problème important concerne la répartition des nombres premiers dans une progression arithmétique. *Dirichlet* a montré que si a et b sont deux entiers positifs premiers entre eux, la progression arithmétique $a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$ contient une infinité de nombres premiers. De même que le théorème des nombres premiers qui affirme que pour une valeur x donné, il existe asymptotiquement $x/\log x$ nombres premiers inférieurs ou égaux à x. De même, il a été prouvé que la suite $a+kb, k=1,2,3,\ldots$ contient asymptotiquement

$$\frac{n}{\phi(b)\log n}$$

nombres premiers inférieurs ou égaux à n, où $\phi(b) := \#\{1 \leqslant a \leqslant b : (a,b)=1\}$ est l'indicatrice d'*Euler*. Cette estimation ne dépend pas du choix de a. Par ailleurs, nombre de mathématiciens ont étudié d'autres suites de nombres premiers et leurs propriétés. Cepandant, les progrès sont souvent partiels et limites, dans bien des cas les questions restent encore ouvertes.

Plan de travail

Dans notre travail, on considère une relation d'équivalence définie dans l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$. Cette relation sera construite en réitérant la fonction qui compte le nombre de nombres premiers $\pi(x)$ et nous avons déterminé ses classes d'équivalence. A l'aide de théorème des nombres premiers, nous avons pu déduire le nombre de classes d'équivalence pour une quantité x donnée sous forme asymptotique. En outre, d'une manière très élémentaire, nous avons obtenu une formule asymptotique de nombre de nombres premiers p avec $\pi(p)$ est aussi premier. Nous avons également défini quelques fonctions arithmétiques et en s'appuyant encore sur le théorème des nombres premiers, nous avons établi la formule asymptotique de chacune.

Cette thèse comprend une introduction générale, trois chapitres et une partie contenant un ensemble (non exhaustif) de problèmes soulevés par notre travail.

Le premier chapitre commence par des rappels de notions élémentaires de théorie des nombres et de l'analyse mathématique, suivie d'une revue d'un ensemble de définitions, notamment les notions de base sur les fonctions arithmétiques (usuelles). Nous donnons quelques théorèmes de majoration les concernant ainsi que d'autres résultats qui relient chacune des ces fonctions avec d'autres.

L'objectif du deuxième chapitre est de rappeler quelques résultats sur la fonction qui compte le nombre de nombres premiers $\pi(x)$ comme par exemple, l'encadrement de la fonction $\pi(x)$ obtenu par *Chebychev* qui est considéré comme la première avancée significative dans ce sens. Deux conséquences du théorème de *Chebychev* seront déduites, le premier est l'encadrement du n'ième nombre premier p_n et l'autre, le postulat de *Bertrand* qui affirme l'existence d'au moins un nombre premier dans l'intervalle $[x, 2x], x \in \mathbb{R}$. Les sections suivantes de ce chapitre sont consacrées au théorème des nombres premiers (TNP) et quelques estimations intéressantes des fonctions $\pi(x), p_n, \psi(x)$ et $\theta(x)$.

Le troisième chapitre reprend notre l'article (cf. [11]) publié dans *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*. Nous avons obtenus des résultats encourageants en esperant qu'il y ait un lien avec les grands problèmes rencontrés actuellement en théorie analytique des nombres. Deux autres articles, considérés comme une suite du premier, ont été soumis et sont en cours de révision. L'un est intitulé *"A generalized type of equivalence relation in the set of primes"* et l'autre est intitulé *"On some partitions related to the set of primes"*. Enfin, la dernière partie présente quelques questions restées ouvertes que nos travaux ont soulevées. Malgré nos tentatives sur certaines, nous ne sommes pas parvenus à des réponses satisfaisantes. D'autres questions n'ont pas encore reçus notre attention, elles constitueront certainement les bases de nos travaux futurs.

□□□□□

1 Les fonctions arithmétiques Λ, ψ et π

Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques définitions et quelques théorèmes fondamentaux qui seront nécessaires pour comprendre les concepts de base de ce travail. Nous introduisons ensuite la notion de fonction arithmétique, notamment la fonction de *Von Mangoldt*, de *Chebyshev*, la fonction π qui compte le nombre des nombres premiers. Quelques résultats élémentaires sont présentés concernant le comportement à l'infini de ces fonctions, et d'autres montrent les relations existantes entre elles.

1. Préliminaires

1.1. Généralités sur les entiers

La lettre $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels $\{1, 2, \cdots\}$ et $\mathbb{P}$ celui des nombres premiers. Les ensembles des entiers relatifs, des nombres réels et des nombres complexes sont désignés respectivement par $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Définition 1.1 (Divisibilité). Si a et b sont des entiers relatifs tel que $a \neq 0$, alors on dit que a divise b s'il existe un entier naturel k tel que $b = ka$.

Notation et exemple. Si a divise b, on dit encore b est un multiple de a et on écrit $a|b$. Si a ne divise pas b, on écrit $a \nmid b$. Par exemple $2|4$ et $7|63$, tandis que $5 \nmid 26$.

Définition 1.2 (PGCD). Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. L'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$ et il existe $\delta \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$. Le nombre δ est appelé "le plus grand diviseur commun" de a et b, on le note $\delta = pgcd(a, b)$.

Exemple 1.1. Dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 15 est $\{1, 3, 5, 15\}$. Dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 12 est $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. L'ensemble des diviseurs communs de 12 et 15 est donc $\{1, 3\}$. On a alors $pgcd(15, 12) = 3$.

Définition 1.3 (PPCM). Soient a et $b \in \mathbb{Z}$, alors il existe $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$. μ est appelé "plus petit commun multiple" de a et b. On le note par $ppcm(a,b)$.

Exemple 1.2. $ppcm(15,12) = 4 \times 3 \times 5 = 60$.

Définition 1.4 (Nombre premier). Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs qui sont 1 et lui-même.

Exemple 1.3. Les quarante-six nombres premiers inférieurs à 200 sont :
$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,$
$107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199.$

De telles listes de nombres premiers inférieur à une borne donnée, ou compris entre deux bornes, peuvent être obtenues grâce à diverses méthodes de calcul (ex. Le crible d'Eratosthène [1]). Mais il n'existe pas de liste exhaustive (finie) de nombres premiers, car on sait depuis l'Antiquité qu'il existe une infinité de nombres premiers comme le prouve *Euclide* dans un théorème célèbre.

Remarque 1.1. 0 et 1 ne sont pas premiers et 2 est le seul nombre pair qui est premier.

Définition 1.5. On dit que des entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si leur plus grand commun diviseur est égal à 1.

Théorème 1.1 (Euclide). *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Remarque 1.2. Nous devons la première démonstration à *Euclide*, il y a plus de 2000 ans maintenant. Depuis beaucoup de mathématiciens se sont amusés à trouver d'autres démonstrations, par diverses méthodes.

Il y a de nombreux résultats qui traitent de l'infinité des nombres premiers dans une progression arithmétique donnée. Le théorème le plus fameux à ce propos est le théorème de *Dirichlet*.

Définition 1.6 (Progression arithmétique). On appelle progression arithmétique (P.A.) une suite de nombres tels que chacun est égal au précédent augmenté d'un nombre constant appelé *raison*.

1. **Crible d'*Eratosthène***. - Algorithme qui permet d'obtenir la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre déterminé. Depuis longtemps, le criblage se fait dans un tableau de nombres en barrant successivement, à la façon d'*Eratosthène*, les multiples de 2, de 3, de 5, de 7, de 11, de 13,... demeurés sur le tableau.

Exemple 1.4. $\{3, 7, 11, 15, 19, 23, \ldots\}$, on ajoute 4 pour obtenir le nombre suivant.

Théorème 1.2 (Dirichlet). *Étant donné une progression arithmétique de terme $an+b$, pour $n = 1, 2, \ldots$. Si a et b sont premiers entre eux, alors il existe une infinité de nombres premiers dans la progression $an+b$.*

En 1785, *Legendre*, dans sa demonstration de la loi de réciprocité quadratique (cf. [12], [14]), introduit ce résultat sans le démontrer. Il essaiera plus tard d'en établir une preuve mais n'y parviendra pas. La première démonstration fut donnée par *Dirichlet* (cf. [13]) dans un mémoire présenté devant l'Académie des Sciences de Berlin en 1837. La méthode de *Dirichlet*, sortant du cadre de la théorie algébrique des nombres pour exploiter des résultats d'analyse, est la première de ce type. Elle repose sur l'étude des fonctions L de *Dirichlet* (cf. [33], [30]), définies au moyen de fonctions arithmétiques particulières, appelées *caractères* (cf. [33], [30]), bien adaptées aux progressions arithmétiques dont il est question.

Définition 1.7 (Nombre composé). tous les nombres entiers supérieurs à 1 et qui ne sont pas premiers sont appelés nombres composés.

La notion de nombre premier est une notion de base en arithmétique élémentaire : le théorème fondamental de l'arithmétique assure qu'un nombre composé est factorisable en un produit de nombres premiers, et que cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs près. Elle admet des généralisations importantes dans des branches des mathématiques plus avancées, comme la théorie algébrique des nombres, qui prennent ainsi à leur tour l'appellation d'arithmétique. Par ailleurs, de nombreuses applications industrielles de l'arithmétique reposent sur la connaissance algorithmique des nombres premiers, et parfois plus précisément sur la difficulté des problèmes algorithmiques qui leur sont liés. C'est le cas de certains systèmes cryptographiques (cf. [31]) et méthodes de transmission de l'information. Les nombres premiers sont aussi utilisés pour construire des tables de hachage (cf. [32]) et pour constituer des générateurs de nombres pseudo-aléatoires (cf. [38], [3], [35]).

Théorème 1.3 (Théorème fondamental de l'arithmétique [2]). *Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose de manière unique sous la forme :*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

2. ***Le théorème fondamental de l'arithmétique*** intervient explicitement dans l'étude des fonctions additives et multiplicatives. En particulier, toute fonction complètement multiplicative est uniquement déterminée par les valeurs prises sur les entiers premiers.

où les p_k sont des nombres premiers vérifiant :

$$2 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_r,$$

et les α_k sont des entiers naturels non nuls.

Exemple 1.5. Par exemple, nous pouvons écrire :

$$6936 = 2^3 \times 3 \times 17^2 \text{ ou encore } 1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2,$$

et il n'existe aucune autre factorisation de 6936 ou 1200 sous forme de produits de nombres premiers, excepté par réarrangement des facteurs ci-dessus.

Remarque 1.3. Par convention, le nombre 1 est le produit de zéro nombre premier (voir produit vide), de sorte que le théorème est aussi vrai pour 1.

Remarque 1.4 (Unicité de factorisation dans des structures algébriques plus générales). On sait que le concept d'un nombre premier peut être défini dans des structures algébriques très générales (polynômes à coefficients entiers). On peut alors se demander si le théorème fondamental de l'arithmétique reste valide dans ces structures. Il s'avère qu'une partie de ce résultat est vraie, c'est-à-dire l'affirmation que tout élément (non-unité) dans la structure donnée a une représentation comme produit des éléments premiers, reste valide dans des conditions très générales. Par contre, l'unicité d'une telle représentation n'est plus garantie et peut échouer, même dans quelques exemples simples.

Définition 1.8 (Partie entière). La partie entière d'un nombre, notée $[x]$, correspond à l'unique nombre entier tel que $[x] \leqslant x < [x]+1$. On appelle aussi ce symbole le plus grand entier inférieur ou égal à x. La partie *fractionnaire* de x, notée $\{x\}$, est alors définie par la formule $\{x\} = x - [x]$.

1.2. Outils d'analyse réelle

Définition 1.9 (Fonction dominée par une autre en un point). Soient f, g deux fonctions de $I - \{a\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est dominée par g quand x tend vers a (ou en a) si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note alors $f = O(g)$.

Définition équivalente. Il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$ au voisinage de a.

Définition 1.10 (fonction négligeable devant une autre en un point). Soient f, g deux fonctions de $I - \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est négligeable devant g quand x tend vers a (ou en a) si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors $f = o(g)$.

Définition équivalente. Pour toute $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a (dépendant bien sûr de ε) sur lequel on a l'inégalité $|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

Définition 1.11 (Fonction équivalente à une autre en un point). Soient f, g deux fonctions de $I - \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est équivalente à g au voisinage de a (ou en a) si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f \sim g$.

Définition équivalente. Dire que $f \sim g$, c'est dire que $f - g$ est négligeable devant g en a.

Voici un exemple qui exprime la valeur d'une intégrale en fonction du symbole O.

Exemple 1.6. Soient α et β des nombres réels, avec $\alpha > -1$. Alors,

$$\int_2^x t^\alpha \log^\beta t dt = O_{\alpha,\beta}\left(x^{\alpha+1} \log^\beta x\right), (x \geqslant 2).$$

1.3. La transformation d'Abel

La transformation d'*Abel* (ou sommation d'*Abel*) est un outil utilisé intensivement en théorie analytique des nombres pour ces résultats intéressants. Etant donnée une somme de la forme $\sum_{n \leqslant x} a(n) f(n)$, où $a(n)$ est une fonction arithmétique avec sa fonction sommatoire $A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n)$ et $f(n)$ est régulière, la sommation par parties permet de supprimer le poids $f(n)$ de la somme ci-dessus et de réduire l'estimation de la somme à celle d'une intégrale sur $A(t)$. Sa formule générale est la suivante :

Proposition 1.1. *Soit $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction arithmétique, soient $0 < y < x$ deux nombres réels et $f : [y, x] \to \mathbb{C}$ une fonction de dérivée continue sur $[y, x]$. Alors on a*

$$\sum_{y < n \leqslant x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) dt, \tag{1.1}$$

où $A(t) = \sum_{n \leqslant t} a(n)$.

En général, dans les applications, les sommes à estimer sont des sommes de la forme $\sum_{n \leqslant x} a(n) f(n)$. Nous donnons la formule dans ce cas particulier séparément.

Proposition 1.2. *Soit $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction arithmétique, soient $x \geqslant 1$ un nombre réel et $f : [1, x] \to \mathbb{C}$ une fonction de dérivée continue sur $[1, x]$. Alors on a*

$$\sum_{n \leqslant x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t) dt. \tag{1.2}$$

2. Les fonctions arithmétiques Λ, ψ, θ et π

Commençons par le premier exemple suivant.

Définition 2.1. La fonction de *Von Mangoldt* Λ est la fonction arithmétique définie en fonction du logarithme log de la manière suivante :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ pour un nombre premier } p \text{ et un entier } k \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.2. On définit les fonctions θ et ψ de *Chebyshev* comme suit :

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant x}} \log p, \end{aligned}$$

c'est la somme du logarithme népérien de tous les nombres premiers p inférieurs ou égaux à x. Et,

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sum_{k \leqslant x} \Lambda(k) = \sum_{\substack{p,k \\ p^k \leqslant x}} \log p, \end{aligned}$$

c'est le logarithme du plus petit multiple commun aux entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux a x.

‘

Remarque 2.1 (Motivation). La principale motivation de l'introduction de la fonction de *von Mangoldt* est que les sommes partielles $\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$ représentent un comptage pondéré des puissances de nombre premier $p^k \leqslant x$, les poids étant $\log p$, les poids réels pour compenser la densité de nombres premiers. En fait, l'étude du comportement asymptotique de la somme ci-dessus est essentiellement équivalente à l'étude du comportement de la fonction qui compte le nombre des nombres premiers $\pi(x)$. Par exemple, le théorème des nombres premiers est équivalent à l'assertion

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = 1.$$

Par conséquent, la plupart des preuves du théorème des nombres premiers procèdent en montrant d'abord cette dernière relation, puis en en déduisant la forme originale du théorème. La raison en est que travailler avec $\Lambda(n)$ est techniquement plus facile que de travailler directement avec la fonction caractéristique des nombres premiers.

Définition 2.3. 1. Pour tout nombre réel $x > 0$, on définit le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x par la fonction π de la manière suivante :

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{N} | p \leqslant x \text{ et } p \text{ est premier}\} = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leqslant x}} 1.$$

2. On appelle logarithme intégral, noté par Li, la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{Li} : [2, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2. La fonction logarithme intégrale ci-dessus est importante car elle représente l'approximation la plus idéale de la fonction $\pi(x)$. Cette intégrale ne peut pas être évaluée exactement (en termes de fonctions élémentaires), mais le théorème suivant donne une d'estimation asymptotique en termes de fonctions élémentaires.

Théorème 2.1. *Pour tout entier positif fixé k, on a*

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{i!}{\log^i x} + O_k\left(\frac{1}{\log^k x}\right)\right), x \geqslant 2.$$

En particulier,

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), x \geqslant 2.$$

Exemple 2.1. Par exemple,

$$\Lambda(9) = \log 3 \ \text{ et } \Lambda(6) = 0,$$

$$\theta(10) = 1og2 \ + \log 3 + \log 5 \ + \log 7,$$

$$\psi(10) = 3 \ \log 2 + 2 \log 3 + \log 5 + \log 7,$$

et, on remarque clairement que,

$$\theta(x) \leqslant \psi(x).$$

$$\pi(1) = 0, \pi(2) = 1, \pi(10) = 4, \pi(100) = 25, \ldots.$$

Remarque 2.3. D'après la définition 2.2, on a

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leqslant x, k \geqslant 1} \log p = \sum_{p \leqslant x} \left(\sum_{k \geqslant 1, p^k \leqslant x} 1 \right) \log p.$$

Maintenant, $p^k \leqslant x, k \in \mathbb{N}$ si et seulement si $1 \leqslant n \leqslant \frac{\log x}{\log p}$. Alors,

$$\psi(x) = \sum_{p \leqslant x} \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant x} 1 \right) \log p = \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p \leqslant \pi(x) \log x.$$

D'autre part,

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \log x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leqslant x^{1/m}} \log x = \sum_{m=1}^{\infty} \theta(x^{1/m}), \tag{1.3}$$

où $m \leqslant \frac{\log x}{\log 2}$. Notons que la somme ci-dessus est finie puisque pour un certain m, on a que $x^{1/m} < 2$ et alors $\theta(x^{1/m}) = 0$.

3. Relations entre les fonctions ψ, θ, π et Li

Dans cette section, nous allons préciser comment les fonctions $\theta(x)$, $\psi(x)$, $\pi(x)$ et Li sont intimement reliées entre elles.
Commençons par la première estimation de produit de nombres premiers suivante.

Proposition 3.1 ([26])**.** *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n \tag{1.4}$$

Une autre estimation est donnée pour la fonction θ suivante.

Proposition 3.2 ([29])**.** *On a*

$$\theta(x) \leqslant (2 \log 2) x.$$

Maintenant, voici un premier résultat qui nous donne un lien entre $\theta(x)$ et $\psi(x)$.

Théorème 3.1 ([29])**.** *Pour tout $x \geqslant 2$, on a*

$$\theta(x) < \psi(x) < \theta(x) + 2\sqrt{x} \log x.$$

On peut maintenant donner le lien entre les fonctions θ et π.

Proposition 3.3 ([29]). *Pour tout $x \geqslant 2$ on a*

$$\frac{\theta(x)}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant \frac{\theta(x)}{\log x - 2\log\log x} + \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Grâce à la formule de sommation d'*Abel*, on peut exprimer les fonctions $\pi(x)$ et $\theta(x)$ en termes d'intégrales.

Théorème 3.2 ([27]). *Pour $x \geqslant 2$, On a*

$$\theta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt$$

et

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t} dt.$$

Le résultat suivant et important qui concerne les deux fonctions *Chebyshev* $\theta(x)$ et $\psi(x)$ affirme que si la limite de l'une des deux fonctions $\theta(x)/x$ ou $\psi(x)/x$ existe alors la limite de l'autre existe aussi bien et les deux limites sont égales.

Théorème 3.3 ([27]). *Pour $x > 0$, on a*

$$0 \leqslant \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \leqslant \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}.$$

Théorème 3.4 ([27]). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1 \tag{1.5}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1 \tag{1.6}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \tag{1.7}$$

Théorème 3.5 ([27]). *On définit*

$$l_1 = \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}, \ L_1 = \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x},$$

$$l_2 = \liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x}, \ L_2 = \limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x},$$

et

$$l_3 = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}, \ L_3 = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x},$$

alors $l_1 = l_2 = l_3$ et $L_1 = L_2 = L_3$.

On termine ce chapitre par le résultat suivant.

Théorème 3.6 (Relation entre ψ, π et Li)**.** *Pour tout $x \geqslant 2$, on a*

$$\psi(x) = (\pi(x) - \mathrm{Li}(x)) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t) - \mathrm{Li}(t)}{t} dt + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x\right).$$

et

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \frac{\psi(x) - x}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(t) - t}{t \log^2 t} dt + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x\right).$$

□□□□□

2 Le théorème des nombres premiers (TNP)

Introduction

Comme on l'a mentionné dans l'introduction générale, c'est depuis que *Legendre* et *Gauss* ont conjecturé une répartition harmonieuse des nombres premiers, alors que leur apparition semblait aléatoire, que les théoriciens des nombres s'intéressent de plus prêt à 1'étude de ces nombres.

Ainsi, quelques dizaines d'années plus tard, *Chebyshev* amène quelques idées sur 1'étude de la répartition des nombres premiers en s'intéressant à la fonction $\pi(x)$, qui donne le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Il essaya d'en trouver des encadrements en cherchant deux constantes c_1 et c_2, les plus proches de 1, telles que

$$c_1 \frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant c_2 \frac{x}{\log x},$$

pour $x \geqslant x_0, x_0$ fixé. Cette recherche montra ainsi l'existence d'un lien fort entre le comportement de la suite $\pi(x)$ et la fonction $\frac{x}{\log x}$, ce qui constitua un argument de plus en faveur de la conjecture de *Gauss* et *Legendre*.

1. Estimations de *Chebychev*

Trouver une borne supérieure et inférieure pour la fonction $\pi(x)$ est extrêmement difficile. Le résultat d'*Euclide* qu'il existe une infinité de nombres premiers montre que $\pi(x)$ tend vers l'infini, mais les preuves standard de l'infinitude de nombres premiers sont indirectes et ne donnent pas des bornes explicites pour $\pi(x)$, ou elles donnent des bornes trop faibles. Par exemple, l'argument d'*Euclide* montre que le n-ième nombre premier p_n vérifie l'inégalité $p_n \leqslant p_1 \cdots p_{n-1} + 1$. Par induction, on obtient $p_n \leqslant e^{e^{n-1}}$ pour tout n, dont on peut déduire la borne $\pi(x) \geqslant \log\log x$ pour x suffisamment grand. Cette borne de $\pi(x)$ est loin d'être optimale, mais c'est essentiellement le meilleur que l'on puisse tirer de l'argument d'*Euclide*. Par ailleurs, obtenir une borne supérieure et inférieure non triviales pour $\pi(x)$ n'est pas facile non plus. Par contre, *Chebychev* a pu montré le résultat suivant.

Théorème 1.1 (Chebychev). *Il existe deux constantes* $c_1 = 0.92\ldots$ *et* $c_2 = 1.11\ldots$, *telles que*

$$c_1 x \leqslant \psi(x) \leqslant c_2 x, \tag{2.1}$$

$$c_1 \frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant c_2 \frac{x}{\log x}, \tag{2.2}$$

pour $x \geqslant x_0, x_0$ *fixé.*

De plus, il a démontré le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Pour tout* $x > 1$

$$\theta(x) < \frac{6}{5} c_1 x - c_1 x^{1/2} + \frac{5}{4\log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 2$$

$$\theta(x) > c_1 x - \frac{12}{5} c_1 x^{1/2} - \frac{5}{8\log 6} \log^2 x - \frac{15}{4} \log x - 3,$$

tel que $c_1 = 0.92\ldots$.

Remarque 1.1. La question naturelle qu'on peut poser est : peut-on obtenir des constantes $c_3, c_4 > 0$ meilleures que les précédentes et telles que, pour tout $x \geqslant x_0$, on ait,

$$c_3 x < \psi(x) < c_4 x?$$

Diamond et *Erdős* (cf. [2]) se sont intéressés à cette question et ont obtenu une réponse affirmative. Ils ont même été plus loin en démontrant que l'on pouvait obtenir des constantes arbitrairement proches de 1, c'est-à-dire démontrer le le théorème des nombres premiers. Est-ce à dire que *Chebychev* était en fait en mesure de prouver le TNP, quarante-cinq ans avant *Hadamard* (cf. [7]) et *de La Vallée Poussin* (cf. [8]), et ce sans utiliser la variable complexe ? - Cela n'est pas le cas, en effet, en démontrant que les constantes peuvent être choisies arbitrairement proches de 1, *Diamond* et *Erdós* ont utilisé le TNP. Ainsi, il n'y avait aucun espoir que *Chebychev* puisse, par ses méthodes, le démontrer. Néanmoins, ses idées ont été utilisées fréquemment dans les années qui ont suivi, et continuent à être étudiées, voire même revisitées, encore à l'heure actuelle. De plus, elles ont permis à *Chebychev* de détenir la première preuve du postulat de *Bertrand*.

2. Conséquences du théorème de Chebychev

Nous allons ici considérer une application de l'encadrement de la fonction $\pi(x)$. En 1845, *Bertrand* énonça la conjecture suivante et démontrée par la suite par *Chebychev*.

Théorème 2.1 (Postulat de Bertrand- théorème de Chebychev). *Pour tout $x \geqslant 2$, il existe toujours au moins un nombre premier p tel que $x < p < 2x$.*

Après avoir trouvé ses encadrements, *Chebychev* alla plus loin dans l'étude de la fonction $\pi(x)$, toujours guidé par la conjecture de *Gauss* et *Lengendre*, et démontra le théorème suivant.

Théorème 2.2 (Chebychev). *S'il existe un réel $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c\frac{n}{\log n}$ alors nécessairement $c = 1$.*

Ce théorème fut une avancée significative dans la recherche sur les nombres premiers, puisqu'il fut un des premiers résultats sur ce sujet. Au fil des ans, il y avait diverses améliorations sur la borne de *Chebychev* et en 1892, *Sylvester* (cf. [39]) a pu montrer le résultat suivant.

Théorème 2.3 (*Sylvester*)**.** *Pour x assez grand, on a*

$$0.956 < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < 1.045.$$

3. Estimations de Mertens

Les estimations de Mertens sont des théorèmes démontrés par *Mertens* en 1874 liés à la densité des nombres premiers.

Théorème 3.1 (Mertens)**.** *On a*

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1),$$

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right),$$

où A est la constante de Meissel-Mertens [1]*, et γ est la constante de Euler-Mascheroni.*

Remarque 3.1. Le théorème des nombres premiers dans sa forme la plus simple est équivalent au théorème de *Mertens* ci-dessus.

4. Théorème des nombres premiers (TNP)

Le théorème des nombres premiers (TNP) est l'énoncé suivant, établi indépendamment par *Hadamard* et *de la Vallée Poussin* en 1896 en utilisant l'analyse complexe [2]

Théorème 4.1 (Théorème des nombres premiers)**.** *Lorsque x tend vers l'infini, on a*

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}.$$

Théorème 4.2 (Formulations équivalentes de TNP). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- $\pi(x)\sim x/\log x$ *lorsque* $x\to+\infty$.
- $\theta(x)\sim x$, *lorsque* $x\to+\infty$.
- $\psi(x)\sim x$ *lorsque* $x\to+\infty$.

1. La constante de *Meissel-Mertens* (également nommée dans la littérature mathématique constante de *Mertens*, constante de *Kronecker*, constante d'*Hadamard-de la Vallée-Poussin* ou constante des inverses des nombres premiers) est reliée à la constante d'*Euler-Mascheroni* γ par la formule suivante :

$$A=\gamma+\sum_{l=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{1}{p_l}\right)+\frac{1}{p_l}\right],$$

où p_l est le l-ième nombre premmier. Cette constante de *Meissel-Mertens* vaut approximativement $0,2614972128476427837554268386086958590$ (La suite $A077761$ (https://oeis.org/A077761) de l'**OEIS** fournit 105 décimales).

2. *Selberg* puis *Erdős* puis *Erdős* et *Selberg* ensemble en 1948 ont développés des preuves élémentaires du théorème des nombres premiers en basant sur les travaux de *Chebyshev*. Toutes ces preuves dépendent des estimations asymptotiques de la fonction *von Mangoldt*. Ces estimations asymptotiques sont maintenant appelés formules de *Selberg*. La découverte de cette preuve élémentaire a mis fin à la discussion de la profondeur relative de l'analyse complexe et de l'analyse réelle. Il y a maintenant beaucoup, soi-disant, de preuves élémentaires et les techniques impliqués sont devenus la standard en théorie analytique des nombres. Il se peut que dans le temps ces méthodes mèneront à une meilleure compréhension des questions fondamentales sur les nombres premiers.

Maintenant, voici un tableau de comparaison entre les valeurs de $\pi(x)$, $\frac{x}{\log x}$, et $\mathrm{Li}(x)$, pour de grandes valeurs de x.

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$	$\mathrm{Li}(x)$
10	4	4.343	5.12
100	25	21.715	29.1
1000	168	144.765	176.6
10000	1229	1085.736	1245.1
100000	9 592	8685.890	9628.8
1000000	78498	72382.414	78626.5
10000000	664579	620420.688	664917.4
100000000	5761455	5428681.024	5762208.3
1000000000	50847534	48254942.43	50849233.9
10000000000	455052511	434294481.9	455055613.5
100000000000	4118054813	3948131654	4118066399.6

Tableau 1. Comparaison des valeurs de $\pi(x)$, $\dfrac{x}{\log x}$ et $\mathrm{Li}(x)$.

Remarque sur le tableau. On remarque clairement que pour de grandes valeurs de x, $\mathrm{Li}(x)$ est beaucoup plus proche de $\pi(x)$ que $\frac{x}{\log x}$.

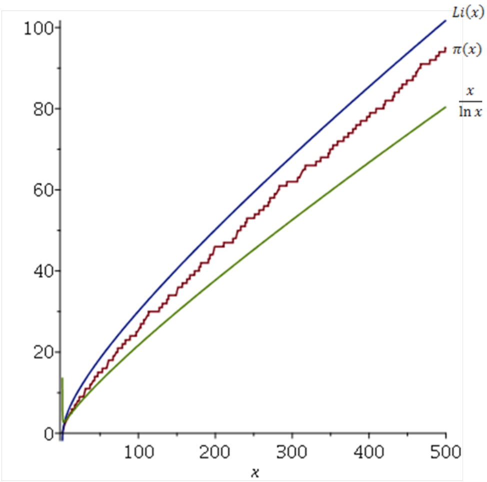

FIGURE 2.1 : Graphe des fonctions $\pi(x)$ (millieu) , $\frac{x}{\log x}$ (dessous) et $\mathrm{Li}(x)$ (dessus).

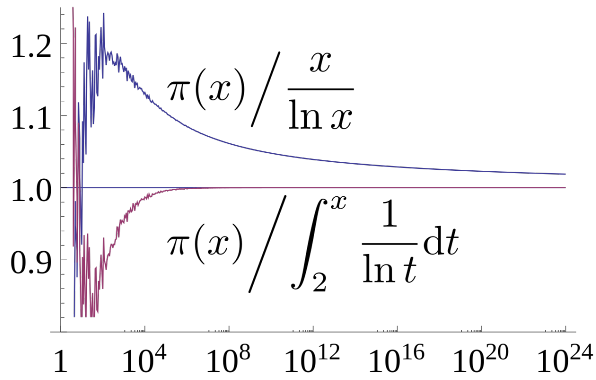

FIGURE 2.2

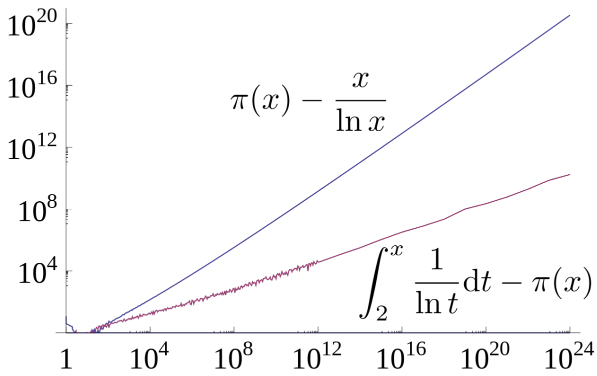

FIGURE 2.3

Le théorème suivant donne une conséquence élémentaire de théorème des nombres premiers.

Théorème 4.3 (Conséquence de théorème des nombres premiers). *Le théorème des nombres premiers implique que,*

$$\textit{Le } n^{\text{ème}} \textit{ nombre premier } p_n \textit{ satisfait } p_n \sim n \log n \textit{ quand } n \to \infty.$$

Démonstration. Puisque $p_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, le théorème des nombres premiers donne

$$n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n} \ (n \to \infty). \tag{2.3}$$

Ce qui implique, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé et n assez grand, on a $p_n^{1-\varepsilon} \leqslant n \leqslant p_n$, et alors $(1-\varepsilon)\log p_n \leqslant \log n \leqslant \log p_n$. La dernière relation montre que $\log p_n \sim \log n$ quand $n \to \infty$, et en substituant cette formule asymptotique dans (2.3) donne $n \sim p_n/\log n$, qui est équivalente à la relation $p_n \sim n \log n$.

□

Des résultats *de La Vallée Poussin* de 1899, on déduit des développements asymptotiques bien plus précis que cet équivalent.

Théorème 4.4 (De la Vallée poussin). *On a*

$$\frac{n}{p_n} = \frac{1}{\log p_n} + \frac{1}{(\log p_n)^2} + \frac{2}{(\log p_n)^3} + \frac{6}{(\log p_n)^4} + o\left(\frac{1}{(\log p_n)^4}\right),$$

qui permet de démontrer le développement asymptotique de p_n suivant (cf. [1]).

Théorème 4.5 (De la Vallée poussin, [1]). *Le développement asymptotique de p_n est donné par,*

$$\frac{p_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 11}{2(\log n)^2} + o\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right).$$

5. Théorème des nombres premiers en progression arithmétique

Soient q, a deux entiers avec $q \geqslant 2, gcd(a,q) = 1$. On définit

$$\pi(x,q,a) = \text{Le nombre des nombres premiers } p \leqslant x \text{ avec } p = a (\text{mod } q).$$

Définition 5.1. Définissons les quantités suivantes :

$$\theta(x,q,a) = \sum_{p \leqslant x, p \equiv a (\text{mod } q)} \log p,$$

$$\psi(x,q,a) = \sum_{p,k,p^k \leqslant x, p^k \equiv a (\text{mod } q)} \log p = \sum_{n \leqslant x, n \equiv a (\text{mod } q)} \Lambda(n).$$

Alors, on a

Théorème 5.1. *On a*

1. $\theta(x,q,a) = O(x), x \to \infty$.
2. $\psi(x,q,a) - \theta(x,q,a) = O(\sqrt{x}), x \to \infty$.
3. $\psi(x,q,a) = O(x), x \to \infty$.

Le théorème de *Mertens* dans les progressions arithmétiques s'énonce comme suit :

Théorème 5.2 (Mertens)**.** *On a pour a,q premiers entre eux et $x \to +\infty$*

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{1}{\phi(q)} \log x + O(1),$$

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a(q)}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\phi(q)} \log x + O(1),$$

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv a(q)}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\phi(q)} \log_2 x + O(1).$$

Le théorème des nombres premiers pour les progressions arithmétiques peut alors être exprimé de la façon suivante :

Théorème 5.3 (TNP pour les PA)**.** *Pour $q,a > 0$ fixés avec $(q,a) = 1$,*

$$\pi(x,q,a) \sim \frac{1}{\phi(q)} \pi(x) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log x} \sim \frac{1}{\phi(q)} \mathrm{Li}(x).$$

Par une constante absolue, le résultat suivant démontré par *Walfisz* en 1936, avec un important travail préliminaire de *Landau* et *Siegel*.

Théorème 5.4. *Il existe une constante C_1, et pour tout nombre réel $A > 0$ il existe un nombre $C_2(A)$ tel que pour tout nombre réel $x \geqslant 3$, pour tout entier q avec $2 \leqslant q \leqslant (\log x)^A$ et pour tout entier a avec $gcd(q,a) = 1$, on a*

$$\left| \pi(x,q,a) - \frac{1}{\phi(q)} \mathrm{Li}(x) \right| \leqslant C_1 x e^{-C_2(A)\sqrt{\log x}}.$$

Il est à noter que les constantes $C_1, C_2(A)$ ne sont pas calculables explicitement mais seulement démontrer qu'elles existent.

6. Quelques estimations explicites

L'avènement des ordinateurs de plus en plus puissants a permis d'affiner les encadrements des fonctions usuelles de nombres premiers $\pi, \theta, \psi, \ldots$. En 1962, deux chercheurs américains, *J. Barkley Rosser* et *L. Schoenfeld* (cf. [37], [36]), ont établi de très bonnes bornes explicites de ces fonctions.

Théorème 6.1 ([36])**.** *On a*

$$\underset{(x \geqslant 59)}{\frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{2\log x}\right)} < \pi(x) < \underset{(x \geqslant 1)}{\frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{3}{2\log x}\right)},$$

Théorème 6.2 ([36]). *On a*

$$\frac{x}{\log x - \frac{1}{2}} < \pi(x) < \frac{x}{\log x - \frac{3}{2}},$$

$$x \geqslant 67 \qquad\qquad x \geqslant e^{\frac{3}{2}}$$

Théorème 6.3 ([36]). *On a*

$$\mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}\left(\sqrt{x}\right) \leqslant \pi(x) \leqslant \mathrm{Li}(x),$$

$$11 \leqslant x \leqslant 10^8 \qquad\qquad 2 \leqslant x \leqslant 10^8$$

Nous donnons aussi quelques estimations de n'ième nombre premier, p_n, la première a été trouvée par *Rosser* et la deuxième par *Robin* (cf. [40]).

Théorème 6.4. *On a*

$$n\left(\log(n\log n) - \frac{3}{2}\right) < p_n < n\left(\log(n\log n) - \frac{1}{2}\right).$$

$$n \geqslant 2 \qquad\qquad n \geqslant 20$$

$$n(\log(n\log n) - 1.0072629) \leqslant p_n < n(\log(n\log n) - 0.9385.$$

$$n \geqslant 2 \qquad\qquad n \geqslant 7022$$

Les inégalités suivantes ont été prouvée pour la fonction $\theta(x)$ de *Chebyshev* (cf. [28]).

Théorème 6.5. *On a*

$$0.998684x < \theta(x) < 1.001102x,$$

$$1319007 \leqslant x \qquad\qquad 0 \leqslant x$$

et pour des petites valeurs de x,

Théorème 6.6. *On a*

$$\theta(x) > 0.985x \ \ si\ x \geqslant 11927, \theta(x) > 0.990x \ \ si\ x \geqslant 32057.$$

$$\theta(x) > 0.995x\ si\ x \geqslant 89387, \theta(x) > 0.998x\ si\ x \geqslant 487381.$$

Enfin, en 1998, *Dusart*, dans sa thèse (cf. [34]), prouve entre autres les résultats suivants.

Théorème 6.7 ([34]). *On a*

$$|\psi(x)-x| \leqslant 0,006409\frac{x}{\log x},\ x \geqslant \exp(22).$$

$$|\theta(x)-x| \leqslant 0,006788\frac{x}{\log x},\ x \geqslant 10544111.$$

$$|\theta(x)-x| \leqslant 3,965\frac{x}{\log^2 x},\ x > 1.$$

$$|\theta(x)-x| \leqslant 515\frac{x}{\log^3 x},\ x > 1,$$

$$|\theta(x)-x| \leqslant 1717433\frac{x}{\log^4 x},\ x > 1.$$

Regroupons les résultats pour p_k et $\theta(p_k)$:

Théorème 6.8 ([34]). *On a*

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - 2,0553}{\log k}\right) \ \textit{pour}\ k \geqslant e^{22}.$$

$$\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k}\right) \ \textit{pour}\ k \geqslant 198.$$

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1) \ \textit{pour}\ k \geqslant 2.$$

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - 0.9484) \ \textit{pour}\ k \geqslant 39017.$$

$$p_k \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - 1.8}{\log k}\right) \ \textit{pour}\ k \geqslant 27076.$$

$$p_k \geqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - 2,25}{\log k}\right) \ \textit{pour}\ k \geqslant 2.$$

Finalement, voici quelques résultats plus précis sur la fonction $\pi(x)$.

Théorème 6.9 ([34]). *On a*

$$\pi(x) \geqslant \frac{x}{\log x - 1}, x \geqslant 5393.$$

$$\pi(x) \leqslant \frac{x}{\log x - 1.1}, x \geqslant 60184.$$

$$\pi(x) \geqslant \frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1}{\log x}+\frac{1.8}{\log^2 x}\right), x \geqslant 32299.$$

$$\pi(x) \leqslant \frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1}{\log x}+\frac{2.51}{\log^2 x}\right), x \geqslant 355991.$$

Remarque finale. Ces inégalités sont utiles quand il s'agit de l'analyse des stratégies pour l'optimisation de divers algorithmes de factorisation et les tests de primalité.

7. Sur la différence $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$

Gauss ne semble pas avoir conjecturé explicitement que $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ vérifié pour tout $x \geqslant 2$, cela est largement considéré comme vrai jusqu'au 1914 lorsque *Littlewood* [41] démontra que

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = \Omega_{\mp}\left(\sqrt{x}\frac{\log_3 x}{\log x}\right)$$

à partir duquelle que la différence change de signe une infinité de fois. Depuis lors, plusieurs études ont porté sur la plus petite valeur de x avec $\pi(x) \geqslant \mathrm{Li}(x)$. La première limite supérieure inconditionnelle sur x a été obtenue par *Skewes* [17] on 1955, qui prouva que $\log_{10}\log_{10}\log_{10}\log_{10} x < 3$. Ceci a été réduit en 1966 par *Lehman* [16] à $x < 1.65 \times 10^{1165}$. En 1987 par *te Riele* [18] à $x < 6.69 \times 10^{370}$, et en 2000 par *Bays* et *Hudson* [19] à $x < 1.4 \times 10^{316}$. La première borne inférieure pour x à savoir $x > 3000000$, obtenue par les calculs faits par *Gauss*. Ceci a été amélioré par *Rosser* et *Schoenfeld* [28] en 1962 à $x > 10^8$, en 1975 par *Brent* [20] à $x > 8 \times 10^{10}$, et en 1993 par *Odlyzko* à $x > 1.59 \times 10^{13}$. Par suite, cette valeur a été amélioré par *Kotnik* [4] à $x > 10^{14}$.

Une autre ligne d'investigation a porté sur l'ordre de magnitude de $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$. A ce jour, la plus forte $O-$borne inconditionnelle est

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O\left(xe^{-0.2098\frac{\log^{3/5} x}{\log\log^{1/5} x}}\right),$$

obtenue en utilisant une méthode développée par *Vinogradov* [21] et *Korobov* [22] en 1958, corrigée en 1963 par *Walfisz* [23], et avec une constante 0.2098 obtenue en 2002 par *Ford* [24]. Sous l'hypothèse de *Riemann*, ceci peut être améliorée considérablement, et déjà dans ce cas en 1901 Von Koch [25] a montré que

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O\left(\sqrt{x}\log x\right),$$

qui reste toujours le meilleur résultat de son genre.

Sans l'hypothèse de *Riemann*, *Dusart* dans sa thèse (1998) a démontré le résultat suivant :

Théorème 7.1 ([34]). *Soient* $R = 9,645908801$ *et* $K = \frac{\sqrt{8/17\pi}}{R^{1/4}} \approx 0,2196$*, alors*

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < 2K \frac{x}{\ln^{3/4} x} e^{-\sqrt{\ln x/R}} \text{ pour } 59 \leqslant x.$$

□□□□□

3 Sur une relation d'équivalence dans $\mathbb{P}$

Introduction

Dans ce chapitre, l'objectif est de définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$. Cette relation nous permet de définir une partition de $\mathbb{P}$ sous la forme suivante :

$$\mathbb{P} = \{p_{11}, p_{12}, \cdots\} \cup \{p_{21}, p_{22}, \cdots\} \cup \cdots \cup \{p_{k1}, p_{k2}, \cdots\} \cup \cdots .$$

Ces sous ensembles ne sont rien d'autres que les classes d'équivalence de cette relation. Les deux questions à lesquelles nous avons répondu sont : comment cette relation est définie et quelles sont les propriétés ou conditions vérifiées par ses classes d'équivalence. Maintenant, l'existence d'autres relations d'équivalence dans $\mathbb{P}$ reste encore une question ouverte. Par ailleurs, l'utilisation du fameux théorème des nombres premiers ou encore la fonction π est une façon de trouver et de prouver d'autres résultats sur les nombres premiers.

Le plan de ce chapitre est comme suit. Dans la première section, on commence par la définition de notre relation d'équivalence et de définir ses classes d'équivalence $\dot{p}$ où p est un nombre premier. Par suite, en s'appuyant sur le théorème des nombres premiers, nous énonçons un résultat qui compte le nombre de nombres de classes d'équivalence $\dot{p}$ tel que $p \leqslant x$. Par ailleurs, comme une extension de ce travail, nous abordons l'étude de nouvelles fonctions arithmétiques en donnant ses formules asymptotiques pour chacune.

Notation. 1. Rappelons que $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\pi(x)$ représente le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Sa formule asymptotique est donnée par :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, x \to \infty, \tag{3.1}$$

c'est le fameux théorème des nombres premiers qui s'énonce de la manière équivalente :

$$p_n \sim n \ln n, n \to +\infty. \tag{3.2}$$

2. Nous définissons la fonction suivante :

$$\pi^k = \begin{cases} \pi^{-1} \circ \cdots \circ \pi^{-1} & \text{si } k < 0 \\ \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*} & \text{si } k = 0 \\ \pi \circ \cdots \circ \pi & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

3. Dans beaucoup de situations, nous cherchons à estimer $\sum_{p \leqslant x} f(p)$, où $p \in \mathbb{P}$. Alors, nous utilisons le résultat suivant :

   Lemme 0.1 ([36]). *On a*

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) \approx \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{\ln n} \approx \int_2^x \frac{f(t)}{\ln t} dt. \tag{3.3}$$

1. Résultats Principaux

1.1. Les classes $\dot{p}$ et ses éléments

Nous commençons par le résultat suivant :

Théorème 1.1 ([11]). *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire définie sur l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ comme suit :*

$$\forall p, q \in \mathbb{P}, p \mathscr{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } p = \pi^n(q).$$

Alors,

1. *$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *La classe d'équivalence d'un nombre premier p est*

$$\dot{p} = \left\{\pi^k(p), k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{3.4}$$

Démonstration. – $\mathscr{R}$ est réflexive car

$$\forall p, q \in \mathbb{P}, \exists n = 0, \text{ tel que } p = \pi^0(p) = p.$$

Donc $\forall p \in \mathbb{P}, p \mathscr{R} p$.

– $\mathscr{R}$ est symétrique car

$$p = \pi^n(q) \Leftrightarrow q = \pi^{-n}(p),$$

donc, il existe un entier $-n \in \mathbb{Z}$ tel que $q = \pi^{-n}(p)$, alors $q\mathscr{R}p$.

– $\mathscr{R}$ est une relation transitive car

$$\begin{aligned}\forall p,q,t \in \mathbb{P}, (p\mathscr{R}q) \wedge (q\mathscr{R}t) &\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}, p = \pi^n(q)) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}, q = \pi^k(t))\\ &\Rightarrow p = \pi^n(q)) = \pi^n(\pi^k(t)))) = \pi^{n+k}(t)\\ &\Rightarrow p = \pi^l(t), l = n+k \in \mathbb{Z}\\ &\Rightarrow p\mathscr{R}t\end{aligned}$$

par conséquent, $\forall p,q,t \in \mathbb{P}, (p\mathscr{R}q) \wedge (q\mathscr{R}t) \Rightarrow p\mathscr{R}t$.

□

Remarque 1.1 (Comment distinguer entre les classes d'équivalence). Les éléments de la classe d'équivalence $\dot{p}$ sont définis par :

$$\dot{p} = \{\ldots, \pi^2(p), \pi(p), p, \pi^{-1}(p), \pi^{-2}(p), \ldots\}.$$

Donc la question qui se pose comment distinguer entre ces classes d'équivalence? On remarque que pour $n < 0$, le nombre $\pi^n(p)$ est toujours premiers et tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Maintenant, pour $n > 0$ la fonction $\pi^n(p)$ est décroissante et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et personne nous garanti que les nombres $\pi^k(p), k = 0\ldots n$ sont premiers. Par exemple, pour $p = 2$ on a $\pi^1(2) = \pi(2) = 1$ et $1 \notin \dot{2}$ et $\pi^n(2) = 0, n = 2\ldots\infty$, dans ce cas la classe de 2 est donnée par l'ensemble suivant :

$$\dot{2} = \left\{\pi^0(2), \pi^{-1}(2), \pi^{-2}(2), \ldots\right\} = \{2, 3, 5, 11, \ldots\}.$$

On remarque que 2 est le plus petit élément de la classe $\dot{2}$. Par suite, les nombres premiers 3 et 5 sont dans la classe $\dot{2}$ donc les classes $\dot{3}, \dot{5}$ et $\dot{2}$ sont confondues. Le plus petit élément de $\dot{3}$ et $\dot{5}$ est le nombre premier 2. Par ailleurs, pour le nombre $7 < 11$, on constate qu'il n'existe pas un nombre premier $p \in \dot{2}$ tel que $\pi(p) = 7$ donc $7 \notin \dot{2}$. Par conséquent, $\dot{7}$ forme une nouvelle classe. Ses éléments sont

$$\dot{7} = \left\{\pi^0(7), \pi^{-1}(7), \ldots\right\} = \{7, 17, \ldots\}.$$

Maintenant, on a $\pi(7) = 4 \notin \dot{7}$ puisque 4 n'est pas premier, donc on ne peut pas continuer le proccesus d'itération puisque $4 \notin \dot{7}$. Finalement, on peut tirer la conclusion que les éléments de la classe d'équivalence d'un nombre premier p sont donnés par l'ensemble suivant

$$\dot{p} = \left\{\pi^k(p), \pi^{k-1}(p), \ldots, p, \pi^{-1}(p), \pi^{-2}(p), \ldots, \infty\right\},$$

tel que pour un entier positif k, $\pi^k(p)$ est premier et $\pi^{k+1}(p)$ n'est pas premier. Ou encore, par commodité, puisque k est arbitraire dans $\mathbb{N}$, on peut prendre $k = 0$, alors l'ensemble $\dot{p}$ se simplifie à

$$\dot{p} = \left\{p, \pi^{-1}(p), \pi^{-2}(p), \ldots, \infty\right\}, \text{tel que } \pi(p) \text{ n'est pas premier.} \tag{3.5}$$

On a alors le résultat suivant qui justifie l'écriture (3.5) ci-dessus de la classe d'équivalence $\dot{p}$ du théorème 1.1.

Proposition 1.1. *Soit p un nombre premier. Alors, $\pi(p)$ n'est pas premier implique que, pour tout nombre premier $q < p$, il n'existe pas un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $p = \pi^{-n}(q)$.*

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{P}$. D'après le théorème des nombres premiers, $\pi^{-1}(p)$ représente le p-ième nombre premier ; notons le par $\mathrm{p}_p = \pi^{-1}(p)$.
Par la suite, $\mathrm{p}_p = \pi^{-1}(p)$, ceci implique que $\pi^{-1}(\mathrm{p}_p) = \pi^{-1}(\pi^{-1}(p))$, qui est le $\pi^{-1}(p)$-ième nombre premier, donc nous obtenons la formule :

$$\pi^{-1}(\mathrm{p}_p) = \pi^{-1}(\pi^{-1}(p)) = \pi^{-2}(p) = \mathrm{p}_{\pi^{-1}(p)}. \tag{3.6}$$

Maintenant, nous utilisons l'équation (3.6) composée par π^{-1} donne :

$$\mathrm{p}_{\pi^{-1}(p)} = \pi^{-2}(p) \Rightarrow \pi^{-1}(\mathrm{p}_{\pi^{-1}(p)}) = \pi^{-1}(\pi^{-2}(p)),$$

ceci est le $\pi^{-2}(p)$-ième nombre premier. On peut écrire

$$\pi^{-1}(\mathrm{p}_{\pi^{-1}(p)}) = \pi^{-1}(\pi^{-2}(p)) = \mathrm{p}_{\pi^{-2}(p)} = \pi^{-3}(p).$$

Par récurrence, nous obtenons la formule générale suivante :

$$\mathrm{p}_{\pi^{-(n-1)}(p)} = \pi^{-n}(p), n \geqslant 1. \tag{3.7}$$

Associons pour chaque nombre premier p, l'ensemble A_p,

$$A_p = \{\pi^{-n}(p), n \geqslant 0\} = \{p, \pi^{-1}(p), \pi^{-2}(p), \ldots\}.$$

Maintenant, supposons que $\pi(p)$ n'est pas un nombre premier, montrons que $\forall q < p, \nexists n \in \mathbb{N}$ et tel que $p = \pi^{-n}(q)$. Pour montrer cela, supposons qu'il existe un entier positif k tel que $\pi^{-k}(q) \in A_p$, i.e., $\pi^{-k}(q) = \pi^{-i}(p), k \geqslant i+1, i \in \mathbb{N}$, montrons que $\pi(p)$ est un nombre premier. Par conséquent, on a,

$$\pi^{-k}(q) = \pi^{-i}(p) \Leftrightarrow p = \pi^{i-k}(q) \Rightarrow \pi(p) = \pi(\pi^{i-k}(q)) = \pi^{(i+1)-k}(q), k \geqslant i+1.$$

Mais, pour tout $k \geqslant i+1, \pi^{(i+1)-k}(q) = \pi(p)$ est un nombre premier, ce qui prouve ce que nous avons voulu. □

On a la définition suivante.

Définition 1.1. Le plus petit élément de $\dot{p}$, qu'on note par p_0 vérifie $\pi(p)$ n'est pas premier. On l'appelle **origine** de la classe $\dot{p}$ et on écrit

$$\dot{p} = \dot{p_0} = \left\{p_0, \pi^{-1}(p_0), \pi^{-2}(p_0), \ldots, \infty\right\}.$$

Définition 1.2. On définit l'ensemble $\mathscr{P}_0$ par

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_0 = &\{p_0 \text{ tel que } p_0 \text{ est une origine}\}\\ = &\{p \text{ est premier et } \pi(p) \text{ n'est pas premier}\}\\ = &\{2, 7, 13, 19, 23, 29, 37, \ldots\}.\end{aligned}$$

On note par $\mathscr{P}_{0,x}$ l'ensemble de tous les origines p_0 inférieures ou égales à x ou bien l'ensemble de tous les nombres premiers $p \leqslant x$ tel que $\pi(p)$ n'est pas premier.

Une question intéressante sur laquelle on a penché est le nombre de nombres de classes d'équivalence $\dot{p}$ pour un nombre premier $p \leqslant x$ inférieur ou égal à une quantité x donnée. Pour faire cela, commençons par la définition suivante.

Définition 1.1 ([11]). 1. Notons par $\pi_c(x)$ le nombre de différentes classes $\dot{p}$ pour des valeurs $2 \leqslant p \leqslant x$. Formellement,

$$\pi_c(x) := \sum_{p_0 \leqslant x} 1 = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \pi(p) \notin \mathbb{P}}} 1,$$

avec $p_0 \in \mathscr{P}_0$.

2. Notons par $\theta_0(x)$ la fonction définie par

$$\theta_0(x) = \sum_{p_0 \leqslant x} \ln p_0$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.2 ([11]). *On a,*

$$\lim_{x\to\infty} \pi_c(x) = +\infty.$$

Pour $p_0 \in [2,x]$*, on a*

$$\pi_c(x) = \pi(x) - \pi^2(x). \tag{3.8}$$

Démonstration. Supposons que le nombre de classes différentes est fini quand $x \to \infty$. On sait que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \infty. \tag{3.9}$$

Par suite, soit $p_i^k \in \dot{p}_k$, où k est fini par hypothèse. On obtient

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \sum_{k \ \text{fini}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k}.$$

Donc, on a $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} < \infty$, puisque la deuxième somme possède un nombre fini de termes, on déduit

$$\sum_{k \ \text{fini}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} < \infty,$$

qui contredit la formule (3.9).

Trouver la valeur de $\pi_c(x)$ signifie le calcul de nombre de nombres premiers p_0, qui constituent chacun l'origine d'une classe $\dot{p}_0$. Clairement, le nombre premier p_0 est une origine signifie que $\pi(p_0)$ n'est pas premier. Alors, soit p_0 appartenant à $[2,x]$, et soit $p_{0,x} \in \mathscr{P}_0$ le plus grand nombre premier dans l'intervalle $[2,x]$, donc $\pi(p_{0,x})$ n'est pas un nombre premier et pour tout entier $l \geqslant 1$, $\pi^{-l}(\pi(p_{0,x})+1) > p_{0,x}$ cela signifie que nous chercherons uniquement les nombres qui ne sont pas premiers et qui sont inférieurs ou égaux à $\pi(p_{0,x})$, par conséquent, on a,

- le nombre de nombres pairs inférieurs ou égaux à $\pi(p_{0,x})$ égal à $\frac{\pi(p_{0,x})}{2}$.
- le nombre de nombres impairs inférieurs ou égaux à $\pi(p_{0,x})$ égal à $\frac{\pi(p_{0,x})}{2} - \pi(\pi(p_{0,x}))$ tel que $\pi(\pi(p_{0,x}))$ est le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\pi(p_{0,x})$.

Par suite, nous sommons les deux quantités ci-dessus, nous obtenons, puisque $p_{0,x} \leqslant x$, la quantité $\pi_c(x)$ qui est égale à

$$\pi_c(x) = \pi(x) - \pi(\pi(x)).$$

Notons que, on a exclut p entre 2 et $\pi(x)$ car $\pi(p)$ n'est pas un nombre premier.

$\square$

Remarque 1.1. 1. Soit $|\dot{p_0}|$ le nombre d'éléments de la classe $\dot{p_0}$ avec un plus grand élément $\leqslant x$. Alors, on a

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \sum_{p_0 \leqslant x} |\dot{p_0}|$$

.

2. Pour $p_0 \in [2, x]$, on a toujours $|\dot{p_0}| \geqslant 1$.

On obtient facilement la conséquence suivante.

Corollaire 1.1 ([11]). Soit p un nombre premier et supposons que $p_0 = \pi^n(p)$. Alors

$$p_0 = \pi(p) - \sum_{i=0}^{n-2} \pi_c\left(\pi^i(p)\right).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
&\pi_c(x) = \pi(x) - \pi(\pi(x)) \\
&\pi_c(\pi(x)) = \pi(\pi(x)) - \pi(\pi^2(x)) \\
&\vdots \\
&\pi_c(\pi^{n-2}(x)) = \pi(\pi^{n-1}(x)) - \pi(\pi^n(x)).
\end{aligned}$$

Maintenant, on additionne ces équations, on obtient le résultat désiré. □

Voici un résultat qui nous donne l'estimation de la fonction θ_0.

Proposition 1.1 ([11]). *On a,*

1.

$$x\left(1 - \frac{1}{\ln x - \ln\ln x} - \frac{\ln\ln x}{\ln x}\right) \leqslant \theta_0(x) \leqslant x\left(1 - \frac{1}{\ln x - \ln\ln x}\right) \tag{3.10}$$

2.

$$\theta_0(x) \sim x, x \to \infty$$

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.1 ([11]). *On a,*

$$\pi_c(x) \leqslant \frac{x \ln\ln x}{\ln^2 x} + \frac{\sum_{p_0 \leqslant x} \ln p_0}{\ln x} = \frac{x \ln\ln x}{\ln^2 x} + \frac{\theta_0(x)}{\ln x},$$

où p_0 représente l'origine de la classe $\dot{p}$.

Démonstration. Puisque pour tout $p = p_n, n > 0$, on a $p > p_0 \ln^n p_0$, alors

$$\sum_{p \leqslant x} \ln\ln p \geqslant \sum_{p_0 \ln^n p_0 \leqslant x, n} \ln\ln p_0 = \sum_{p_0, n \leqslant \frac{\ln x - \ln p_0}{\ln\ln p_0}} \ln\ln p_0 = \sum_{p_0 \leqslant x} \ln\ln p_0 \left[\frac{\ln x - \ln p_0}{\ln\ln p_0}\right]$$
$$\sim \sum_{p_0 \leqslant x} (\ln x - \ln p_0) = (\ln x)\pi_c(x) - \sum_{p_0 \leqslant x} \ln p_0$$

D'après la formule (3.3), on a

$$\sum_{p \leqslant x} \ln\ln p \approx \frac{x \ln\ln x}{\ln x},$$

donc, l'inégalité se découle directement en remplaçant. □

Démonstration de la proposition. 1. On a

$$\pi(x) - \pi^2(x) \leqslant \frac{x \ln\ln x}{\ln^2 x} + \frac{\sum_{p_0 \leqslant x} \ln p_0}{\ln x} \Rightarrow \sum_{p_0 \leqslant x} \ln p_0 \geqslant (\pi(x) - \pi^2(x)) \ln x - \frac{x \ln\ln x}{\ln x}.$$

Par ailleurs, puisque

$$\sum_{p_0 \leqslant x} \ln p_0 \leqslant \ln x \sum_{p_0 \leqslant x} 1 = \pi_c(x) \ln x.$$

Et rappelons que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

On obtient

$$\sum_{p_0 \leqslant x} \ln p_0 \geqslant \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{x}{\ln x(\ln x - \ln\ln x)}\right) \ln x - \frac{x \ln\ln x}{\ln x} = x\left(1 - \frac{1}{\ln x - \ln\ln x} - \frac{\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

La deuxième inégalité est obtenue de la même manière,

$$\sum_{p_0 \leqslant x} \ln p_0 \leqslant \ln x \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{x}{\ln x(\ln x - \ln\ln x)}\right) = x\left(1 - \frac{1}{\ln x - \ln\ln x}\right).$$

2. Soit $x \to +\infty$ dans l'inégalité 3.10 de lemme 1.1.

2. Le nombre de nombres premiers p avec $\pi(p)$ est premier

Dans cette section, en utilisant les idées de notre article précédent [11], nous avons obtenu des partitions simples de l'ensemble des nombres premiers construites avec la fonction $\pi(x)$ et ses itérations $\pi^2(x), \pi^3(x), \cdots$. Ce nouveau concept nous permet de déduire d'une manière élémentaire le nombre de nombres premiers p avec $\pi(p)$ est premier. On a alors le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soit p un nombre premier. Alors*

1. *Le nombre des nombres premiers p inférieurs ou égaux à x tel que p et $\pi^{-1}(p)$ sont simultanément premiers est égal au nombre des nombres premiers p inférieurs ou égaux à x, i.e. ;*

   $$Card\left\{p \leqslant x \mid p \text{ et } \pi^{-1}(p) \text{ sont simultanément premiers}\right\} = Card\{p \leqslant x \mid p \text{ est premier}\}.$$

2. *Le nombre des nombres premiers p inférieurs ou égaux à x tel que p et $\pi(p)$ sont simultanément premiers est donné par :*

   $$Card\{p \leqslant x \mid \pi(p) \text{ est premier }\} = \pi(\pi(x)) \sim \frac{x}{\ln x(\ln x - \ln\ln x)} \sim \frac{x}{\ln^2 x} \text{ quand } x \to +\infty.$$

Démonstration. 1. C'est immédiat puisque $\pi^{-1}(p)$ est toujours premier.

2. Notre nouvelle idée est basée sur la partition de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à x comme

   $$\begin{aligned}\{p \leqslant x | p \text{ est premier}\} = \{p \leqslant x | \pi(p) \ \text{ est premier}\} \cup \\ \cup \{p \leqslant x | \pi(p) \ \text{ n'est pas premier}\}\end{aligned} \quad (3.11)$$

   Par passage au cardinal, nous obtenons

   $$\begin{aligned}\text{Card}\{p \leqslant x | p \text{ est premier }\} = \text{Card}\{p \leqslant x | \pi(p) \text{ est premier }\} + \\ + \text{Card}\{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ n'est pas premier}\}\end{aligned}$$

   Par suite, on a,

   $$\begin{aligned}\text{Card}\{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ est premier }\} = \text{Card}\{p \leqslant x | p \text{ est premier }\} - \\ - \text{Card}\{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ n'est pas premier}\}\end{aligned}$$

   Par conséquent,

   $$\text{Card}\{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ est premier }\} = \pi(x) - (\pi(x) - \pi(\pi(x))) = \pi(\pi(x)).$$

   Finalement, il n'est pas difficile de voir, quand x tend vers $+\infty$,

   $$\pi(\pi(x)) = \pi^2(x) \sim \frac{x}{\ln^2 x}.$$

□

Nous pouvons déduire une conjecture en utilisant une autre partition de $\mathbb{P}$ en utilisant des sous-ensembles particuliers comme nous l'avons vu dans la formule (3.11).

Conjecture 1. Soit p un nombre premier. l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ peut être partitionné comme

$$\begin{aligned}\{p \leqslant x | p \text{ est premier}\} = \{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ et } \pi(\pi(p)) \text{ sont premiers}\} \cup \\ \cup \{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ n'est pas premier et } \pi(\pi(p)) \text{ est premier}\} \cup \\ \cup \{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ est premier et } \pi(\pi(p)) \text{ n'est pas premier}\} \cup \\ \cup \{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ et } \pi(\pi(p)) \text{ ne sont pas premiers}\}\end{aligned}$$

Ensuite, nous obtenons en utilisant les cardinaux

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\{p \leqslant x | p \text{ est premier}\} = \mathrm{Card}\{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ et } \pi(\pi(p)) \text{ sont premiers}\} + \\ + \mathrm{Card}\{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ n'est pas premier et } \pi(\pi(p)) \text{ est premier}\} + \\ + \mathrm{Card}\{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ est premier et } \pi(\pi(p)) \text{ n'est pas premier}\} + \\ + \mathrm{Card}\{p \leqslant x | \ \pi(p) \text{ et } \pi(\pi(p)) \text{ ne sont pas premiers}\}\end{aligned}$$

Nous notons par $\pi(x), \pi_{11}(x), \pi_{01}(x), \pi_{10}(x), \pi_{00}(x)$ ces cardinaux. alors, l'équation est réduite à

$$\pi(x) = \pi_{11}(x) + \pi_{01}(x) + \pi_{10}(x) + \pi_{00}(x).$$

On a conjecturé que

$$\pi_{11}(x)\pi_{00}(x) \approx \pi_{01}(x)\pi_{10}(x) \text{ quand } x \to \infty.$$

Le tableau suivant résume les premières valeurs de $\pi_{11}(x), \pi_{01}(x), \pi_{10}(x), \pi_{00}(x)$ et leur correspondant $\frac{\pi_{11}\pi_{00}}{\pi_{01}\pi_{10}}$, pour les entiers $p = 600$ à 10^8 [1].

1. Les calculs sont faits avec PARI/GP : https://pari.math.u-bordeaux.fr/

p	π_{11}	π_{01}	π_{10}	π_{00}	$\frac{\pi_{11}\pi_{00}}{\pi_{01}\pi_{10}}$
600	10	19	19	61	1.6897
3×10^4	88	551	369	2237	0.9668
2×10^5	310	2580	1752	13342	0.9150
10^6	977	8697	6725	62099	1.0377
2×10^6	1626	15700	12126	119481	1.0204
3×10^6	2191	22293	17158	175174	1.0034
4×10^6	2734	28456	21961	229995	1.0062
5×10^6	3233	33549	26626	230494	0.8342
6×10^6	3717	39197	31116	284208	0.8661
7×10^6	4178	44824	35577	337458	0.8841
8×10^6	4632	50112	39927	390495	0.9040
9×10^6	5065	55575	44225	443013	0.9129
10^7	5492	60846	48419	495211	0.9231
2×10^7	9414	111548	88236	1006498	0.9626
10^8	33666	451908	363591	5257379	1.0772

Tableau 4.

Remarque 2.1. Nous pouvons généraliser ces types de partitions de l'ensemble des nombres premiers en utilisant et en combinant la fonction $\pi(x)$ et ses fonctions d'itération $\pi^n(x), n \in \mathbb{N}$. Par exemple, nous pouvons partitionner l'ensemble des nombres premiers comme suit : pour $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\{p \leqslant x | p \text{ est premier}\} = \left\{p \leqslant x | p \text{ est premier et } \pi^n(p) \text{ est premier}\right\} \cup \\ \cup \left\{p \leqslant x | p \text{ est premier et } \pi^n(p) \text{ n'est pas premier}\right\} \quad (3.12)$$

□

3. Autres résultats

Le résultat suivant nous montre que si on prend une suite de nombres premiers consécutifs finie alors il existe au moins à l'intérieur de cet ensemble des classes d'équivalences $\dot{p}$ qui contient un seul élément.

Théorème 3.1 ([11]). *Soit A un ensemble fini de nombres premiers :*

$$A = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\},$$

tel que $p_i < p_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n$ et p_{i+1} un nombre premier consécutif de p_i. Alors, il existe au moins un ensemble $\dot{p} \subset A$ où $p \in A$, tel que $\dot{p} = \{p\}$.

Avant de donner une démonstration de ce résultat , nous donnons un exemple illustratif.

Démonstration. Supposons que chaque classe $\dot{p_i}, p_1 \leqslant p_i \leqslant p_n$ contient au moins deux éléments i.e., le cardinal de $\dot{p_i}$ est supérieur ou égal à 2, et supposons que $\pi(p_n)$ est un nombre premier (sinon le théorème est démontré). D'après le théorème des nombres premiers, l'intervalle $[\pi(p_n), p_n]$ contient $\pi(p_n) - \pi^2(p_n) = k$ nombres premiers. Ceci nous mène aux deux cas suivants :

- Si $k = 1$, i.e., il existe un seul nombre premier dans $[\pi(p_n), p_n]$, notons le par q, donc, nous obtenons $\pi^{-1}(q) \notin A$ et $\pi(q)$ n'est pas un nombre premier puisque c'est le consécutif de $\pi(p_n)$. Alors, $\dot{q}$ contient uniquement un seul élément dans A qui est le nombre premier q.
- Si $k > 1$, i.e., il existe au moins deux nombres premiers dans $[\pi(p_n), p_n]$, notons les par $q_1, \ldots, q_k$. Supposons que q_t où $t \in \{1, \ldots, k\}$, est un nombre premier. Alors q_{t+1} n'est pas un nombre premier et puisque $\pi^{-1}(q_{t+1}) \notin A$, donc, l'unique élément $\dot{q_{t+1}}$ est q_{t+1}.

CONCLUSION :
Dans les deux cas, il existe au moins une classe $\dot{p}$ où $p \in A$, telle que ($p = q$ dans le premier cas et $p = q_{t+1}$ dans le deuxième) est l'unique élément de cette classe dans A, i.e., $\dot{p} = \{p\}$. □

Exemple 3.1. Soit A un ensemble défini par

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}.$$

- Pour l'entier 2, on a, $\dot{2} = \{2, 3, 5, 11\}$. Le cardinal de $\dot{2}$ est supérieur à 1.
- Notons que $7 \notin \dot{2}$, alors l'entier 7 constitue une origine d'une nouvelle classe qui est $\dot{7} = \{7, 17\}$ et son cardinal est plus grand que 1. Il reste uniquement le nombre premier 13 qui n'appartient ni à $\dot{2}$ ni à $\dot{7}$, par conséquent, le nombre premier 13 constitue une origine d'une nouvelle classe qui est $\dot{13}$ et son cardinal est 1. Alors, on conclut que dans l'ensemble A, il existe une classe $\dot{13}$, telle que son unique élément est 13, i.e., $\dot{13} = \{13\}$.

On a la définition suivante.

Définition 3.1 ([11]). Soit A l'ensemble défini comme dans le théorème 3.1 et p est un nombre premier appartenant à A. On dit que $\dot{p}$ est une classe EXTÉRIEURE par rapport à A, si

$$\pi(p) \text{ n'est pas un nombre premier dans } A \text{ et } \pi^{-1}(p) \notin A \text{ i.e., } |\dot{p}| = 1 \text{ dans } A.$$

si $|\dot{p}| \geqslant 2$ dans A, on dit que $\dot{p}$ est une classe INTÉRIEURE par rapport à A.

Remarque 3.1. 1. D'après la définition ci-dessus, le nombre p est le plus petit élément de classe $\dot{p}$ dans A, par conséquent, c'est une origine de cette classe. i.e., $p = p_0$.
2. D'après le théorème 3.1, pour un nombre premier donné p, il y a toujours au moins une classe extérieure, ce qui signifie l'existence d'une infinité de classes DIFFÉRENTES quand $p \to \infty$.

3.1. Étude de la suite $x_{n+1} = p(x_n) = x_n/\ln x_n$

La fonction $p(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x \in [e, +\infty[$, est une contraction. Alors, la suite x_n définie par

$$x_{n+1} = p(x_n) = \frac{x_n}{\ln x_n},$$

admet un point fixe. Puisque x_n décroissante et minorée par $e \approx 2.7182818$, alors elle converge vers l'unique point fixe e et on a $p(e) = e$.

Notation. $p^k(x) = \overbrace{p \circ p \circ \ldots \circ p(x)}^{k \text{ times}}$, où $\circ$ est la loi de composition des fonctions.

Théorème 3.2 ([11]). *Soit $x_0 \geqslant e$ une donnée initiale. Alors*

$$p(x_0) = e \prod_{i=0}^{\infty} \ln p(x_i) = e \prod_{i=0}^{\infty} \ln p^{i+1}(x_0), \tag{3.13}$$

Démonstration. Nous posons $\ln \ln x = \ln_2 x$ et on a

$$\begin{aligned} x_1 = p(x_0) = \frac{x_0}{\ln x_0} &\Longrightarrow \ln x_1 = \ln x_0 - \ln_2 x_0 \\ x_2 = p(x_1) = \frac{x_1}{\ln x_1} &\Longrightarrow \ln x_2 = \ln x_1 - \ln_2 x_1 \\ &\vdots \\ x_{n+1} = p(x_n) = \frac{x_n}{\ln x_n} &\Longrightarrow \ln x_{n+1} = \ln x_n - \ln_2 x_n. \end{aligned}$$

Et par sommation, nous obtenons

$$\ln x_{n+1} = \ln p(x_n) = \ln x_0 - \sum_{i=0}^{n} \ln_2 x_i. \tag{3.14}$$

Qui est équivalent à

$$\frac{x_0}{x_{n+1}} = \prod_{i=0}^{n} \ln x_i. \tag{3.15}$$

Alors, par passage à la limite, nous obtenons

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{x_0}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{p(x_n)}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\prod_{i=0}^{n}\ln x_i=\lim_{n\to\infty}\ln x_0\prod_{i=0}^{n-1}\ln p(x_i). \tag{3.16}$$

En conséquence,

$$\frac{x_0}{e}=\prod_{i=0}^{\infty}\ln x_i=\ln x_0\prod_{i=0}^{\infty}\ln p(x_i), \tag{3.17}$$

et puisque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}x_n=e.$$

La formule (3.17) est clairement équivalente à

$$p(x_0)=e\prod_{i=0}^{\infty}\ln p(x_i).$$

D'où le résultat désiré. □

Lemme 3.1. *Soit $x_{n+1}=p(x_n)$ une suite décroissante et minorée par e, et soit $\rho>e$ un nombre réel . Alors, le nombre d'itérations tel que $x_n\geqslant\rho$, qu'on note par n_{iter}, est dépend de ρ et de la valeur initiale $x_0=x$, et elle est donnée par :*

$$n_{iter}(x,\rho)\sim-\frac{\ln c}{\ln\ln\xi_0}+\frac{\ln x}{\ln\ln\xi_0},\ as\ x\to+\infty, \tag{3.18}$$

où $c>0$ est une valeur réelle finie, et $\xi_0=\xi_0(x)<x$, i.e., ξ_0 dépend de x.

Démonstration. On a

$$|x_2-x_1|=\left|p'(\xi_1)\right||x_1-x_0|,\xi_1\in[x_1,x_0],\text{ où }p'\text{ est la dérivée de }p.$$

$$|x_3-x_2|=\left|p'(\xi_2)\right||x_2-x_1|=\left|p'(\xi_2)\right|\left|p'(\xi_1)\right||x_1-x_0|,\xi_2\in[x_2,x_1].$$

Par récurrence, on obtient

$$|x_n-x_{n+1}|=\left(\prod_{i=1}^{n}p'(\xi_i)\right).|x_1-x_0|,\xi_n\in[x_n,x_{n-1}].$$

Par suite, il existe un nombre réel $\xi_0\in[\xi_n,\xi_1]$, tel que

$$|x_{n+1}-x_n|=\left|p'(\xi_0)\right|^n.|x_1-x_0|.$$

Ou bien, d'une manière équivalente, puisque, $x_n>x_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}$ et $x>e$.

$$x_n-x_{n+1}=\left(p'(\xi_0)\right)^n.(x_0-x_1).$$

On peut faire sortir n de l'égalité ci-dessus :

$$n = \frac{\ln(x_n - x_{n+1})}{\ln p'(\xi_0)} - \frac{\ln(x_0 - x_1)}{\ln p'(\xi_0)},$$

et remplaçant p' par sa valeur, on obtient

$$n_{iter} = \frac{\ln(x_n - x_{n+1})}{\ln(\ln\xi_0 - 1) - 2\ln\ln\xi_0} - \frac{\ln(x_0 - x_1)}{\ln(\ln\xi_0 - 1) - 2\ln\ln\xi_0}$$

Maintenant, d'après la définition de ρ, les suites x_n et x_{n+1} sont bornées, alors il est de même pour la différence $x_n - x_{n+1}$, notons la par c, et on a, en posant $x_0 = x$ et $n = n_{iter}(x,\rho)$:

$$n_{iter}(x,\rho) = \frac{\ln c}{\ln(\ln\xi_0 - 1) - 2\ln\ln\xi_0} - \frac{\ln(x - x_1)}{\ln(\ln\xi_0 - 1) - 2\ln\ln\xi_0}$$

Finalement, puisque d'après ce qui précède, noton que, $\xi_0 < x$ et dépend de x. Il s'en suit que $\xi_0 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et

$$\ln(\ln\xi_0 - 1) - 2\ln\ln\xi_0 \sim \ln(\ln\xi_0) - 2\ln\ln\xi_0 = -\ln\ln\xi_0 \text{ et } x - x_1 \sim x.$$

□

Remarque 3.2. Dorénavant, nous travaillons avec la variable x au lieu de x_0.

3.2. Définition et estimation des fonctions π_{iter}, η, et ϑ

Posons la définition suivante :

Définition 3.2 ([11]). Soit $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Nous définissons

$$\pi_{iter}(x,p_0) = \sum_{\substack{p_0 \leqslant p \leqslant x \\ p \in C_{p_0}}} 1 = \sum_{\substack{p_0 \leqslant p \leqslant x \\ p = \pi^{-l}(p_0)}} 1, l \in \mathbb{N}.$$

Alors $\pi_{iter}(x,p_0)$ compte le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x appartenant à la classe $\dot{p_0}$.

Lemme 3.2. *Nous avons*

$$\pi_{iter}(x,p_0) \sim n_{iter}(x,\rho) \sim n_{iter}(x,p_0), \text{ quand } x \to +\infty.$$

Démonstration. D'après la définition ρ, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = p^n(x) = \rho$. Par suite, D'après le théorème des nombres premiers, nous avons

$$\pi(x) \sim p(x) = \frac{x}{\ln(x)}, x \to \infty \Rightarrow \pi^n(x) \sim p^n(x), x \to \infty.$$

Par ailleurs, supposons que $\pi^n(x) = p_0$ avec $\pi(p_0)$ n'est pas premier, il s'en suit que :

$$(p_0 = \pi^n(x)) \sim (p^n(x) = \rho), x \to \infty.$$

Et,

$$\begin{aligned} \pi_{iter}(x,p_0) = \sum_{\substack{p_0 \leqslant p \leqslant x \\ p \in \dot{p_0}}} 1 = \sum_{\substack{p_0 \leqslant p \leqslant x \\ p = \pi^{-l}(p_0)}} 1 \sim \sum_{\substack{\rho \leqslant p \leqslant x \\ p \in \dot{p_0}}} 1 \sim \sum_{\substack{\rho \leqslant p \leqslant x \\ p \sim p^{-l}(\rho)}} 1 = \\ = \sum_{l=1}^{n(x,\rho)} 1 = n_{iter}(x,\rho) \sim n_{iter}(x,p_0), x \to \infty. \end{aligned}$$

□

Définition 3.3 ([11])**.** Soit $x > 0$. On définit la fonction $\eta(x,p_0)$ comme suit :

$$\eta(x,p_0) = \sum_{\substack{p_0 \leqslant p \leqslant x, \\ p \in \dot{p_0}}} \ln\ln p.$$

Définition 3.4. Soit $x > 0$. On définit la fonction $\vartheta(x,p_0)$ par :

$$\vartheta(x,p_0) = \sum_{p \leqslant x, p \in \dot{p_0}} \left[\frac{\ln\ln x}{\ln\ln p}\right] \ln\ln p.$$

Théorème 3.3 ([11])**.** *On a*

$$\eta(x,p_0) \sim \ln x + o(\ln x).$$

Démonstration. D'après la preuve du lemme 3.2, nous avons,

$$\rho \sim p_0 = \pi^n(x) \sim p^n(x) \text{ implique que, } \ln x_0 \prod_{i=0}^{n} \ln \pi(x_i) \sim \ln x_0 \prod_{i=0}^{n} \ln p(x_i) \sim \frac{x_0}{p_0} = \frac{x}{p_0},$$

qui est équivalent à

$$\ln\ln x_0 + \sum_{i=0}^{n} \ln\ln \pi(x_i) = \ln\ln x + \sum_{i=0}^{n} \ln\ln \pi(x_i) = \sum_{\substack{p_0 \leqslant p \leqslant x, \\ p \in \dot{p_0}}} \ln\ln p \sim \ln x - \ln p_0.$$

Finalement, pour tout p_0 fixé et $x \longrightarrow \infty$, on a $-\ln p_0 / \ln x \longrightarrow 0$, alors

$$\sum_{\substack{p_0 \leqslant p \leqslant x, \\ p \in \dot{p_0}}} \ln\ln p \sim \ln x + o(\ln x).$$

i.e. $\eta(x,p_0) \sim \ln x + o(\ln x)$. □

Remarque 3.3. Notons que l'équivalence de $\eta(x,p_0)$ quand $x\longrightarrow\infty$ indépendant de p_0, alors on peut écrire

$$\eta(x,p_0)\sim\eta(x), x\longrightarrow\infty.$$

Théorème 3.4 ([11])**.** *On a,*

1.

$$\pi_{iter}(x,p_0)\sim\frac{\eta(x,p_0)}{\ln\ln x}, x\to\infty.$$

2.

$$\pi_{iter}(x,p_0)\sim\pi_{iter}(x)\sim\frac{\ln x}{\ln\ln x}+o(\frac{\ln x}{\ln\ln x}), x\longrightarrow\infty.$$

Démonstration.

1. Pour la preuve de la première formule, on a, d'une part

$$\eta(x,p_0)=\sum_{\substack{p_0\leqslant p\leqslant x,\\ p\in \dot{p_0}}}\ln\ln p\leqslant\ln\ln x\sum_{\substack{p_0\leqslant p\leqslant x,\\ p\in \dot{p_0}}}1=\pi_{iter}(x,p_0)\ln\ln x.$$

Alors on obtient

$$\pi_{iter}(x,p_0)\geqslant\frac{\eta(x,p_0)}{\ln\ln x}.$$

D'autre part, pour tout $x>e, x^{\delta}>p_0$ avec $0<\delta<1$, nous avons

$$\begin{aligned}\eta(x,p_0)&\geqslant\ln\ln x^{\delta}\sum_{\substack{x^{\delta}<p\leqslant x,\\ p\in \dot{p_0}}}1\\ &=(\ln\delta+\ln\ln x)\sum_{\substack{x^{\delta}<p\leqslant x,\\ p\in \dot{p_0}}}1\\ &=(\ln\delta+\ln\ln x)(\pi_{iter}(x,p_0)-\pi_{iter}(x^{\delta},p_0))\\ &\geqslant(\ln\delta+\ln\ln x)(\pi_{iter}(x,p_0)-(\ln x)^{\delta}).\end{aligned}$$

Alors

$$\pi_{iter}(x,p_0)\leqslant(\ln x)^{\delta}+\frac{\eta(x,p_0)}{\ln\delta+\ln\ln x}.$$

Maintenant, d'après le lemme 3.2, $(\ln x)^{\delta}=o(\pi_{iter}(x,p_0))$, et donc pour x suffisamment grand (dépendant de δ), $(\ln x)^{\delta}\leqslant(1-\delta)\pi_{iter}(x,p_0)$, et par conséquent

$$\pi_{iter}(x,p_0)\leqslant\frac{\eta(x,p_0)}{\delta(\ln\delta+\ln\ln x)}.$$

Maintenant, pour tout $\varepsilon>0$, on peut choisir δ plus proche de 1, pour ce δ, de sorte que $1/\delta=1+\varepsilon$, et pour x suffisamment grand, on a

$$\pi_{iter}(x,p_0)<(1+\varepsilon)\frac{\eta(x,p_0)}{\ln\ln x}.$$

2. D'après le théorème 3.3 et la remarque ci-dessus , on a

$$\pi_{iter}(x,p_0) \sim \frac{\eta(x,p_0)}{\ln\ln x} \sim \frac{\eta(x)}{\ln\ln x} \sim \frac{\ln x}{\ln\ln x} + o(\frac{\ln x}{\ln\ln x}) \sim \pi_{iter}(x), x \to \infty.$$

□

Théorème 3.5.

$$\pi_{iter}(x,p_0) = \frac{\vartheta(x,p_0)}{\ln\ln x} + O(\frac{\ln x}{\ln\ln x}), x \to \infty.$$

Démonstration. on a

$$\vartheta(x,p_0) \leqslant \pi_{iter}(x,p_0)\ln\ln x.$$

Estimons maintenant la différence

$$\pi_{iter}(x,p_0)\ln\ln x - \sum_{p\leqslant x, p\in \dot{p_0}} \left[\frac{\ln\ln x}{\ln\ln p}\right]\ln\ln p.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\pi_{iter}(x)\ln\ln x - \sum_{p\leqslant x, p\in \dot{p_0}} \left[\frac{\ln\ln x}{\ln\ln p}\right]\ln\ln p &= \sum_{p\leqslant x, p\in \dot{p_0}} \left(\ln\ln x - \left[\frac{\ln\ln x}{\ln\ln p}\right]\ln\ln p\right) \\
&= \sum_{p\leqslant \sqrt{x}, p\in \dot{p_0}} \left(\ln\ln x - \left[\frac{\ln\ln x}{\ln\ln p}\right]\ln\ln p\right) + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x, p\in \dot{p_0}} \left(\ln\ln x - \left[\frac{\ln\ln x}{\ln\ln p}\right]\ln\ln p\right) \\
&\leqslant \sum_{p\leqslant \sqrt{x}, p\in \dot{p_0}} \left\{\frac{\ln\ln x}{\ln\ln p}\right\}\ln\ln p + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x, p\in \dot{p_0}} (\ln\ln x - \ln\ln p) \\
&\leqslant \vartheta(\sqrt{x},p_0) + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x, p\in \dot{p_0}} \int_p^x \frac{dt}{t\ln t} \\
&\leqslant \vartheta(\sqrt{x},p_0) + \int_{\sqrt{x}}^x \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x, p\in \dot{p_0}} 1_{\{p\leqslant t\}} \frac{dt}{t\ln t}.
\end{aligned}$$

Cependant, pour $t \in [\sqrt{x}, x]$:

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x, p\in \dot{p_0}} 1_{\{p\leqslant t\}} = \sum_{p\leqslant x, p\in \dot{p_0}} 1_{\{p\leqslant t\}} - \sum_{p\leqslant \sqrt{x}, p\in \dot{p_0}} 1_{\{p\leqslant t\}}$$

$$\sum_{p\leqslant t} 1 - \sum_{p\leqslant \sqrt{x}} 1 = \pi_{iter}(t,p_0) - \pi_{iter}(\sqrt{x},p_0) \leqslant \pi_{iter}(t,p_0),$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\pi_{iter}(x,p_0)\ln\ln x - \vartheta(x) &\leqslant \vartheta(\sqrt{x},p_0) + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\pi_{iter}(t,p_0)}{t\ln t}dt \\
&\leqslant \vartheta(\sqrt{x},p_0) + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{2\ln t}{t\ln t\ln\ln t}dt \\
&\leqslant \vartheta(\sqrt{x},p_0) + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{2}{t\ln\ln t}dt.
\end{aligned}$$

En utilisant $\vartheta(x,p_0) \leqslant 2\ln x$ (puisque $\vartheta(x,p_0) \leqslant \pi_{iter}(x,p_0)\ln\ln x \leqslant \vartheta(x,p_0) \leqslant \frac{\ln x}{\ln\ln x}\ln\ln x = \ln x$), on obtient

$$\pi_{iter}(x,p_0)\ln\ln x - \vartheta(x,p_0) \leqslant O(\ln\sqrt{x}) + O\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right).$$

Alors $\pi_{iter}(x,p_0) = \frac{\vartheta(x,p_0)}{\ln\ln x} + O\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)$.

□

4. Généralisation de la relation d'équivalence $\mathscr{R}$

Dans cette section, nous donnons une généralisation de relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie dans la section précédente. Nous présentons quelques exemples et résultats concernant cette relation.
Au début, commençons à donner une généralisation du théorème 1.1.

Théorème 4.1. *Soit ϕ une bijection définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Nous définissons la fonction composée suivante par :*

$$\phi\circ\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

1. *Nous définissons la relation $\mathscr{R}_\phi$ sur l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$ comme : si p et q deux nombres premiers, $p\mathscr{R}_\phi q$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $p = (\phi\circ\pi)^n(q)$. Alors, $\mathscr{R}_\phi$ est une relation d'équivalence.*
2. *Les éléments de la classe d'équivalence $\dot{p}$ sont définis par :*

$$\dot{p} = \{p = (\phi\circ\pi)^0(p), (\phi\circ\pi)^{-1}(p), (\phi\circ\pi)^{-2}(p), \ldots\}.$$

L'élément p de $\dot{p}$ associé à $n = 0$ et satisfait "$(\phi\circ\pi)(p)$ n'est pas un nombre premier" est le plus petit élément (nombre premier) de $\dot{p}$ et est appelé Origine de la classe $\dot{p}$.

3. *L'ensemble quotient $\mathbb{P}/\mathscr{R}_\phi$ est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence $\dot{p}$. En d'autres termes, $\mathbb{P}/\mathscr{R}_\phi$ est l'ensemble des nombres premiers p tel que $(\phi\circ\pi)(p)$ n'est pas un nombre premier.*

Démonstration. 1. $\mathscr{R}_\phi$ est une relation d'équivalence car :

– $\mathscr{R}_\phi$ est une relation symétrique :

$$p = (\phi\circ\pi)^n(q) \Rightarrow q = (\phi\circ\pi)^{-n}(p),$$

et $-n \in \mathbb{Z}$.

- $\mathscr{R}_\phi$ est réflexive car il existe $n = 0$ tel que
$$p = \left(\phi \circ \pi\right)^0 (p).$$
- $\mathscr{R}_\phi$ est transitive car
$$p = \left(\phi \circ \pi\right)^n (q) \text{ et } q = \left(\phi \circ \pi\right)^m (s),$$
alors,
$$p = \left(\phi \circ \pi\right)^n \left(\left(\phi \circ \pi\right)^m (s)\right) = \left(\phi \circ \pi\right)^{n+m} (s),$$
alors, on peut prendre $k = n + m \in \mathbb{Z}$ tel que $p = \left(\phi \circ \pi\right)^k (s)$.

2. (2) et (3) sont les définitions de la classe d'équivalence et l'ensemble quotient.

□

nous obtenons le résultat suivant comme une conséquence immédiate du théorème ci-dessus.

Proposition 4.1. *Soit p un nombre premier. Alors, $\phi \circ \pi(p)$ n'est pas premier implique que, pour tout $q < p$, il n'existe pas d'entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = \left(\pi \circ \phi\right)^{-k} (q)$.*

Remarque 4.1. – Le cas où $\phi(x) = x$ est exactement le résultat de théorème 5.1.
– Il n'est pas difficile de constater que, les éléments de $\dot{p}$ sont les termes de la relation de récurrence :
$$x_{n+1} = \left(\phi \circ \pi\right)^{-1} (x_n) = \pi^{-1} \circ \phi^{-1}(x_n),$$
en choisissant la valeur initiale p_0 vérifiant $\phi \circ \pi(p)$ n'est pas premier. Alors, on déduit que, le nombre d'éléments de chaque classe d'équivalence $\dot{p}$ est $+\infty$.

5. Cas particulier $\phi(x) = 2x + 1$

Nous commençons cette section avec le lemme suivant.

Lemme 5.1. *Soit n un entier positif et soit ψ une bijection définie par :*
$$\begin{aligned} \psi : \ \mathbb{N} &\longrightarrow 2\mathbb{N} + 1 \\ k &\longmapsto 2k + 1. \end{aligned}$$
Soit $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites définies par :
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2\pi(x_n) + 1 \\ x_0 \geqslant 13 \text{ valeur initiale,} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y_{n+1} = \pi^{-1}\left(\frac{y_n-1}{2}\right) \\ y_0 > 13 \textit{ valeur initiale.} \end{cases}$$

Alors,

1. *$\{x_n\}$ est décroissante pour $x > \delta \approx 14$ et admet un seul point fixe $\mathbb{N}$ pour $x_0 \geqslant 13$.*
2. *$\{y_n\}$ est croissante pour tout $y_0 > 13$.*

Démonstration. 1. Il est évident puisque π et ψ sont des bijections.

(a) Premièrement, on a $g(x) \leqslant s(x) = 2\pi(x) + 1 - x \leqslant f(x)$, tel que

$$f(x) = 2\frac{1.25506x}{\ln x} + 1 - x, x > 1 \text{ et } g(x) = \frac{x}{2\ln x} + 1 - x, x \geqslant 3.$$

La solution de $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ sont respectivement $x \approx 3.85$ et $x \approx 14.76$. Alors, la fonction $2\pi(x) + 1 - x \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 14$

Par conséquent, on obtient que la suite x_n est décroissante pout toute valeur initiale $x_0 \geqslant 14$.

Deuxièment, on a $2\pi(x)+1 \geqslant 1$ et est décroissante pour $x \geqslant 14$, alors, $2\pi(x_n)+1 = x_{n+1}$ admet un unique point fixe. Choisissons par exemple $x_0 = 14$, donc, la valeur de ce point fixe est $x = 13$.

(b) La suite $\{y_n\}$ est obtenue en inversant la fonction $y = 2\pi(x) + 1$, et il n'est pas difficile de voir que $x \geqslant 14$, la suite est croissante et tend vers $+\infty$.

□

Le résultat suivant affirme l'existence d'une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathbb{P} - \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ qu'on notera par $\mathbb{P}_{>13}$.

Proposition 5.1. *1. On définit la relation $\mathscr{R}_\psi$ sur l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}_{>13}$ par : si p et q sont deux nombres premiers, $p\mathscr{R}_\psi q$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $p = (\psi \circ \pi)^n(q)$. Alors, $\mathscr{R}_\psi$ est une relation d'équivalence.*

2. Les éléments de la classe d'équivalence $\dot{p}$ sont définie par :

$$\dot{p} = \{p, (\psi \circ \pi)^{-1}(p), (\psi \circ \pi)^{-2}(p), \ldots\}.$$

Et

$$\mathbb{P}_{>13}/\mathscr{R}_\psi = \{\dot{17}, \dot{29}, \dot{37}, \dot{41}, \ldots\}$$

Démonstration. Voir le théorème 4.1 ci-dessus. □

La remarque suivante explique comment obtenir explicitement $\dot{p}$ et $\mathbb{P}_{>13}/\mathscr{R}_\psi$ de l'assertion (2) de la proposition 5.1.

Remarque 5.1. Soit $p > 13$ un nombre premier. Le nombre premier après 13 est 17. On remarque que $\psi \circ \pi(17) = 15$ n'est pas un nombre premier alors, $\dot{17}$ est l'origine de la première classe. Maintenant, on utilise $\{y_n\}$ pour obtenir les éléments :

$$y_0 = 17, y_1 = \pi^{-1}\left(\frac{17-1}{2}\right) = 19, y_2 = \pi^{-1}\left(\frac{19-1}{2}\right) = 23, \ldots$$

Finalement,

$$\dot{17} = \{17, 19, 23, 31, 47, 83, 179, 461\ldots\}.$$

L'origine de cette classe est 17 car $\phi \circ \pi(17) = 15$. Remarquons que $29 \notin \dot{17}$ alors, il constitue une nouvelle classe d'équivalence

$$\dot{29} = \{29, 43, 73, 151, \ldots\ldots\},$$

tel que le nombre premier 29 est l'origine de cette classe car $\phi \circ \pi(29) = 21$. De la même manière, on a $\dot{37}$ forme une nouvelle classe car $37 \notin \left\{\dot{17}, \dot{29}\right\}$ et $\phi \circ \pi(37) = 25$ n'est pas un nombre premier :

$$\dot{37} = \{37, 61, 113, 263, \ldots\}.$$

etc. Par conséquent, il suffit d'organiser les origines de ces classes pour obtenir $\mathbb{P}_{>13}/\mathscr{R}_\psi$.

Définition 5.1. Soit x un nombre réel positif. On note par $\mathcal{V}_\psi(x)$ le nombre de classes $\dot{p}$ tel que $13 < p \leqslant x$ autrement dit, le nombre de nombres premiers tel que $\psi \circ \pi(p)$ n'est pas premier ou bien le cardinal de $\mathbb{P}/\mathscr{R}_\psi$. Précisément,

$$\mathcal{V}_\psi(x) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \psi \circ \pi(p) \notin \mathbb{P}}} 1.$$

On le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Soit $p > 13$ est un nombre premier tel que $13 < p \leqslant x$. Alors,*

$$\mathcal{V}_\psi(x) = \pi(x) - \pi(2\pi(x) + 1).$$

Démonstration. Soit p_x le plus grand nombre premier sur l'intervalle $]13, x]$ tel que $\psi \circ \pi(p_x)$ n'est pas un nombre premier. Alors, pour tout entier $l \geqslant 1$,

$$\pi^{-l}\left(\frac{2\pi(p_x) + 1}{2}\right) > p_x.$$

Alors, pour estimer $\mathcal{V}_\psi$, on a seulement besoin de chercher les nombres impairs et qui ne sont pas premiers inférieurs ou égaux à $2\pi(p_x) + 1$. Donc, on a

- Le nombre des nombres impairs > 13 inférieurs ou égaux à $2\pi(p_x)+1$ égal à $\left[\frac{2\pi(p_x)+1}{2}\right]-6 = \pi(p_x)-6$.
- Le nombre des nombres premiers > 13 inférieurs ou égaux à $2\pi(p_x)+1$ égal à $\pi(2\pi(p_x)+1)-6$.

Finalement, on soustrait les deux formules pour obtenir

$$\mathcal{V}_\psi(p_x) = \mathcal{V}_\psi(x) = \pi(p_x) - \pi(2\pi(p_x)+1).$$

$\square$

On peut généraliser ce théorème pour la fonction $\phi(x) = 2x + b$.

Corollaire 5.1. Soit t le plus grand entier qui vérifie $t = 2\pi(t) + b = \phi(t)$ tel que $(2, b) = 1$ et soit $p > t$ un entier. Alors,

$$\mathcal{V}_\phi(x) = \pi(x) - \pi(2\pi(x) + b).$$

$\square\square\square\square\square$

Conclusion et perspectives

Il existe beaucoup de résultats sur les propriétés des nombres premiers. Il existe d'innombrables idées dans ce domaine concernant le caractère aléatoire des nombres premiers. Cependant, il se trouve que les nombres premiers ne semblent absolument distribuer au hasard, puisque Gauss et d'autres mathématiciens ont donné une relation asymptotique qui calcule le nombre des nombres premiers inférieure à une quantité x donnée.

Dans cet article, nous avons étudié des suites de nombres premiers obtenues par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$, à partir desquelles nous avons associé diverses fonctions arithmétiques. Comme nous l'avons vu dans les sections ci-dessus, de nombreux résultats classiques énoncés dans la théorie élémentaire des nombres peuvent être retraitées avec ces suites. Aussi, il ya beaucoup d'autres formules asymptotiques peuvent être déduites, nous venons de présenter quelques unes à titre d'exemple.

En ce qui concerne la motivation, Les préoccupations sont notamment liées à la tentative de développer de nouvelles idées pour résoudre les problèmes et les conjectures restant ouverts dans ce domaine.

A l'heure actuelle, permettez-moi de vous expliquer et de partager des idées et des questions générales sur mon travail futur. Tout d'abord, les questions soulevées sont de portée très large et ne peuvent être adressées directement. Cela signifie que, il est préférable de recourir à une méthode (le plan par étapes) pour faire face aux grands problèmes de manière structurée.
Enfin, voici quelques questions et conjectures un peu plus directe, je pense sont importants.

Problème 1. Etudier l'infinité des nombres premiers définis par la relation de récurrence

$$\{u_n \leqslant x | u_{n+p} = f(u_{n+p-1}, \ldots, u_n), \text{et } u_n \text{ est premier}\}. \tag{3.19}$$

et f une fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ainsi, étudier la loi de distribution de ces nombres.

Problème 2. Etudier la conjecture 1 obtenue dans le dernier chapitre.

Nous poursuivons ces recherches pour prouver ces conjectures et questions avec rigueur, en utilisant les résultats de cette étude et les techniques avancées dans la théorie des nombres dans le prochain travail.

Bibliographie

[1] E. Cesàro, *Sur une formule empirique de M. Pervouchine* , Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, vol. 119, (1894), pp. 848–849.

[2] Diamond, Harold, Erdős, Pavel, *On sharp elementary prime number estimates*, L'Enseignement mathématique 26 (1980), 313–321.

[3] G. Marsaglia, A. Zaman, *Toward a universal random number generator*, Statistics & Probability Letters, Volume 9, Issue 1, (January 1990).

[4] T. Kotnik, *The prime-counting function and its analytic approximations*, Adv. Comp. Math. Vol. 29, (2008), pp. 55-̋70.

[5] B. Riemann, *Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grosse*, Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachla, 2, (1859), pp. 145–155.

[6] C. J. de la Vallée Poussin, *Rcherche analytique sur la théorie des nombres*, Ann. Soc. Sci. Bruxelle, Vol. 20, (1896), pp. 183–256.

[7] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bull. SOC. Math. France, Vol. 24, (1896), pp. 199–220.

[8] C. J. de la Vallée Poussin, *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*. Mém. Courronnés et Autres Mém. Publ. Acad. Roy. Sci., des Lettres Beaux-Arts Belg. 59 (1899-1900).

[9] A. Selberg, *an elementary proof of the prime-number theorem*, Annals of Mathematics, Vol. 50, (1949), No. 2, pp. 305–313.

[10] P. Erdős, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Nat. Acad. Scis. U.S.A. 35 (1949), pp. 374–384.

[11] I. Sadani, *Study of some equivalence classes of primes*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics 23, no. 2 (2017), pp. 21–29.

[12] C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae* (1801), pp. 125–151 et 262.

[13] P. G. L. Dirichlet, *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enth...*. Abhand. Ak. Wiss. Berlin 48, (1837).

[14] T. J. Stieltjes, *Sur le caractère quadratique du nombre 2* , Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 1e série, vol. 11, no 1, (1897).

[15] C. J. de la Vallée Poussin, *Rcherche analytique sur la théorie des nombres*, Ann. Soc. Sci. Bruxelle, Vol. 20, (1896), pp. 183–256.

[16] R. S. Lehman, *On the difference* $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$. Acta Arith. 11, (1966), 397–410.

[17] S. Skewes, *On the difference* $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$, II. Proc. London Math. Soc. Vol. (3) 5, (1955), pp. 48-̋70.

[18] H. J. J. te Riele, *On the sign of the difference* $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$, Math. Comp. Vol. 48, (1987), pp. 323-Ű328.

[19] C. Bays, R. Hudson, *A new bound for the smallest x with* $\pi(x) > \mathrm{Li}(x)$, Math. Comp. Vol. 69, (2000), pp. 1285–1296.

[20] R. P. Brent, *Irregularities in the Distribution of Primes and Twin Primes*, Math. Of Computation, Vol. 29, Number 129 (January 1975) pp. 43–56.

[21] I. M. Vinogradov, *A new estimate for* $\zeta(1+it)$, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser.Mat. Vol. 22, (1958), pp. 161–164.

[22] N. M. Korobov, *Estimates of trigonometric sums and their applications*, Usp. Mat. Nauk. Vol. 13, (1958), pp. 185–192.

[23] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, VEB Deutscher Verlag, (1963), pp. 175–188. , Berlin.

[24] K. Ford, *Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta function*, Proc. London Math. Soc. Vol. 85, (2000), pp. 565-̋633.

[25] H. Von Koch, *Sur la distribution des nombres premiers*, Acta Math. Vol. 24, (1901),pp. 159–182.

[26] G. Alborghetti, *T.I.P.E La répartition des nombres Premiers*, Printemps, (2011).

[27] W. Raji, *An Introductory Course in Elementary Number Theory*, The Saylor Foundation, (2013).

[28] J. Barkley Rosser, L. Schoenfeld, *Sharper Bounds for the Chebyshev Functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$. Math. Of Computation, Vol. 29, Number 129, (January 1975), 243–269.

[29] E. Fricain, *Arithmétique et combinatoire* (*fascicule de cours et d'exercices*), (2011–2012).

[30] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 2nd edition, Springer-Verlag(New York), (1980).

[31] F. Niels, B. Schneier, *Practical Cryptography*. Wiley, (2003).

[32] J. Haitsma, T. Kalker and J. Oostveen, *Robust Audio Hashing for Content Identification*, Philips Research, International Workshop on Content-Based Multimedia Indexing (CBMI'01), (2001).

[33] J. Steuding, *An Introduction to the Theory of L-functions*, Preprint, 2005/06

[34] P. Dusart , *Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers*, Thèse de doctorat, (1998), Université de Limoges.

[35] D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Volume 2 : *Seminumerical Algorithms*, 3rd edition Addison-Wesley, Boston, (1998).

[36] J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Ill. Journ. Math, 6, (1962), pp. 64–94.

[37] J. Barkley Rosser, *The n-th prime is greater than* $n \log n$, Proc. London Math. Soc. (2), Vol. 45, (1939), pp. 21–44.

[38] J. V. Neumann, *Various techniques used in connection with random digits in A.S. Householder*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 12, Washington, D.C. : U.S. Government Printing Office, pp. 36–38, (1951).

[39] J.J. Sylvester, *On arithmetical series*, Messenger of Math. (2) Vol. 21, (1892), 1–19 and 87–120.

[40] G. Robin, *Estimation de Ia Fonction de Tchebychef* θ *sur le* k*-ieme Nombre Premier et Grandes Valeurs de Ia Fonction* $\omega(n)$ *Nombre de Diviseurs Premiers de* n, Acta Arith. 52 (1983) pp. 367–389.

[41] J. E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*, C. R. Acad. Sci. Paris Vol. 158, (1914), pp. 1869-1̋872.

□□□□□

Résumé

Le théorème des nombres premiers est un résultat en théorie des nombres concernant leur distribution. On sait depuis *Euclide* qu'il en existe une infinité, pour tout réel positif x, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Le théorème des nombres premiers s'énonce de la façon suivante :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, \text{ quand } x \to +\infty.$$

Parmi les mathématiciens ayant travaillé sur ce sujet, on peut citer *Legendre*, *Gauss*, *Hadamard* et *de la Vallée Poussin*, *Landau*, *Erdős* et *Selberg*,...

Dans notre travail, nous nous servirons de ce théorème pour étudier une suite particulière extraite de l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$. Pour cela, nous allons définir une relation d'équivalence notée $\mathscr{R}$ et déterminer l'ensemble de ses classes $\dot{p}$ telle que $\pi(x)$, dans notre cas, est la restriction de cette fonction sur l'ensemble $\mathbb{N}$. Cette relation est la base et l'objet principal de notre modeste étude. Cela nous a permis de concevoir de nouvelles notions mathématiques et de définir un ensemble de fonctions arithmétiques et de les étudier de plus près et d'obtenir des formules asymptotiques de chacune. Pour finir, nous avons proposé quelques problèmes (à les prouver ou à les réfuter) qui seront le but (éventuel) de notre recherche à venir.

Mots clefs. Théorie élémentaire des nombres, fonction arithmétique, théorème des nombres premiers, formule asymptotique, relation d'équivalence, récurrence.

□□□□□

Abstract

The prime number theorem is a result of number theory, it concerns the asymptotic distribution of prime numbers, which we known since *Euclid* that there are an infinite of these numbers. For any real $x > 0$, we note by $\pi(x)$ the number of primes less than or equal to x. The statement of prime number theorem as follows :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, x \to +\infty.$$

Among the mathematicians who worked on this topic include *Legendre*, *Gauss*, *Hadamard* and *de la Vallée Poussin*, *Landau*, *Erdős* and *Selberg*,...

In our work, we will use this theorem to study a sequence extracted from the set of prime numbers $\mathbb{P}$. For this purpose, we will define an equivalence relation denoted by $\mathscr{R}$ and we determine all of its equivalence classes $\dot{p}$, such that $\pi(x)$, in our case, is the restriction of this function to the set $\mathbb{N}$. This relation is the basis and the main purpose of our modest study. This allowed us to develop new mathematical concepts and define a set of arithmetic functions and study them more closely and get asymptotic formulas for each one. Finally, we have proposed some problems (to prove or disprove) that will be the goal (prospective) of our future research.

Key words. Elementary number theory, arithmetic function, prime number theorem, asymptotic formula, equivalence relation, recurrence.

□□□□□