

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la A Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

**Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE**
Spécialité : **Entraînements Electriques**
Filière : Génie Electrique

Présenté par

Mm : ACHEGHANE Nassima
Mr : HASSAD Mouloud

Thème

**Modélisation et simulation d'une
machine synchrone à aimant permanent**

*Mémoire soutenu publiquement le 26 septembre 2017 devant le jury
composé de :*

Mr F. HOCINI

Maitre de conférences B, UMMTO, Président

M^r H.MOHELBI

Professeur UMMTO, Encadreur

OULDOUALI Samy Hassani

Maitre assistante B, UMMTO Examineur

MEHADENE Hamid

Doctorant UMMTO Examineur

*On tient tout d'abord à remercier et exprimer notre profonde
gratitude a
notre encadreur Monsieur H .MOHELLBI professeur UMMTO
de nous avoir encadré et accueilli dans son laboratoire, ses
qualités
Humaines nous a permis de réaliser cette thèse dans les
meilleurs conditions.*

On tient à remercier aussi Madame Z. OUDENI pour son aide

On tient à remercier également monsieur A.HAROUZ

nos remerciements vont aussi aux membres de jury qui

Nous feront l'honneur de juger notre travail.

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à :

- ✓ Mes très chers parents à qui je dois tout l'amour et le respect et à qui je souhaite une longue vie.
- ✓ Ma très chère sœur Kahina, son mari et mon adorable Lyes
- ✓ Mes très chers frères Rachid, Hamid, Amrane, Amar, Ferhat, Ahmed, Belkacem et Rabah.
- ✓ Mon cher mari.
- ✓ La lumière de mes yeux mon fils Aylan.
- ✓ Mes cher oncle Boudjemaà, Akli, et sa femme.
- ✓ Mes adorable neveux et nièce : Abderrahmane, Mélina, Nélia, Melissa, Arezki, Laetitia, et ma princesse Céline.
- ✓ Mes belles sœurs et leurs enfants.
- ✓ Mes tantes.
- ✓ Ma chère grande mère.
- ✓ Mes chers beaux parents.
- ✓ Toute ma belle famille.
- ✓ Tous mes amis (es).

Nassima.

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à :

- ✓ Mes très chers parents qui m'ont soutenu et encouragé jusqu'au bout et à qui je dois tout l'amour et le respect.
- ✓ Mes chères sœurs Melissa, Imane.
- ✓ Mes chers frères Nassim, Anis.
- ✓ Mes oncles Hamid, Farid, Kaci.
- ✓ Mes tantes Ouiza, Karima, Nassima.
- ✓ Ma deuxième mère Zedjiga.
- ✓ Mes chères grand-mères et mon grand-père.
- ✓ A mes amis Amar, Thiziri, et Nassima.

Mouloud.

Sommaire

Introduction Générale	1
------------------------------------	---

Chapitre 1 : Généralités sur les machines synchrones

PARTIE 1 : LES MACHINE SYNCHRONE

1.1-Introduction	2
I.1.2-définition	2
I.1.3-description	2
I.1.3-1-le stator (induit)	2
I.1.3-2-le rotor (inducteur)	2
I.1.3-2-a- les machines synchrones à pôles lisses	2
I.1.3-2.b-Les machines synchrones à pôles saillants	4
I.1.3.2.c- les machines synchrones à aimants permanents	4
I.1.3.2.d-les machines synchrones à reluctance variable	4
I.1.4. Modélisation de la MSAP.....	4
I.1.4. a-Equations de tensions et flux	4
I.1.4. b-Transformation de Park.....	8
I.1.4. c .Expression de la puissance et du couple électromagnétique	8
I.1.5-fonctionnement.....	9
I.1.6-conclusion	9

PARTIE 2 : LES MACHINES LINEAIRE

I.2.1-introduction	10
I.2.2-définition	11
I.2.3- particularités de la machine linéaire	11
I.2.4-classification des machines linéaires	11
I.2.4.a-Moteurs linéaires à induction.....	12
I.2.4.b-Moteurs linéaires à commutateur à courant continu	13
I.2.4.c : Moteurs linéaires synchrones	13
I.2. Le schéma électrique équivalent d'une machine linéaire	15
I.2.5-La différence entre les machines linéaires et rotatives	15
I.2.6- Effet spéciaux dans une machine linéaire	15
I.2.7- Les effets d'extrémités de largeur finie-effets transversaux	16
I.2.8- Avantages et inconvénient	17
I.2.9-Conclusion	18

Sommaire

PARTIE 3 : LES AIMANTS PERMANENTS

I.3.1-Introduction	18
I.3.2- Définition	19
I.3.3-Le critère de fabrication d'aimants permanents	19
I.3.4-différents types d'aimants permanents	19
4-1- Les matériaux céramiques(les ferrites)	20
4-2-Les matériaux métalliques.....	20
4.1.a Les Alnicos	20
4.1.b- les terres rares	20
4.b.1- Le samarium-Cobalt(Sm-Co)	21
4.b.2- Le Néodyme-Fer-Bore(Ne-Fe-B)	21
I.3.5-les différents procédés de mise en œuvre des aimants Ne-Fe-B	21
I.3.6-principe d application	22
I.3.7-Aimantation et désaimantation d'un aimant permanent	22
I.3.7.2-Désaimantation	22
I.3.8-les applications des aimants permanents	23
I.3.9-Importance des aimants permanents en électrotechnique	23
I.3.10- conclusion	23

Chapitre II : Notions d'électromagnétismes et les équations de Maxwell

II.1.Introduction	24
II.1. équation de Maxwell	24
II.1.1.Première équation.....	24
II.1.2.Deuxième équation.....	25
II.1.3.Troisième équation.....	26
II.1.4.Quatrième équation	27
II.1.5.Tableau récapitulatif des équations de MAXWELL.....	28
II.2.Loi de comportement des milieux	29
II.3.Loi d'Ohm	30
II.4.Equation de conservation de la charge électrique	31
II.5.Relation de passages.....	31
II.5.1.Conservation de la composante tangentielle du champ électrique.....	32

Sommaire

II.5.2.Conservation de la composante normal de l'induction magnétique	32
II.5.3.Discontinuité de la composante tangentielle de champs magnétique	32
II.5.4.Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique	32
II.5.5.Conservation de la composante normal de la densité de courant.....	32
II.6.Condition aux limites	32
II.6.1.Condition aux limites de type Neumann	32
II.6.2.Condition aux limites de type Dirichlet	32
II.6.3Condition aux limites mixtes (Neumann-Dirichlet).....	32
II.6.4.Condition de périodicité et d'anti-périodicité	33
II.7.Equations électromagnétiques.....	34
II.7.1.Equation électrostatique	34
II.7.2.Equation magnétostatique	34
II.7.3.Equation magnétodynamique	35
II.8.Equation aux dérivées partielles	37
II.8.1.Les différentes types d'équations aux dérivées partielles	37
II.8.1.a. Equation de type elliptique	37
II.8.1.b. Equation de type parabolique	37
II.8.1.c. Equation de type hyperbolique	38
II.9.Conclusion	38

Chapitre III : Méthodes de résolution

III .Introduction.....	39
III.1.Les modèles	40
III .1.1.Modèle analytique.....	40
III.1.2.Modèle intermédiaire	40
III.1.3.Modèle numérique	40
III.1.3.1.Méthode des différences finis	40
III 1.3.2.Méthode des volumes finis	42
III.1.3.3.Méthode des éléments finis	42
III.2.Présentation de la méthode des éléments finis 2D.....	42
III.2.1.Formulation éléments finis des équations Électromagnétiques	43
III.2.1.1.Formulation projective (résidus pondérés)	43
III.2.1.2.Formulation variationnelle.....	34

Sommaire

III.2.2.Discrétisation du domaine d'étude	46
III.2.2.1Eléments de références	46
III.2.2.1.1Eléments a une dimension 1D.....	46
III.2.2.1.2Eléments a deux dimensions 2D	46
III.2.2.1.3Eléments a trois dimensions 3D.....	47
III.2.2.2.Fonction d'interpolations	48
III.2.2.2.1.Principe de l'état complet	48
III.2.2.2.2.Principe de compatibilité	48
III.2.2.2.3.Fonction d'approximation sur un élément	49
III.3.Méthode de Galerkin.....	49
III.3.1.Modèle magnétostatique 2D	49
III 3.2.Modèle magnétodynamique	54
III.3.2.1.Modèle linéaire	55
III.3.2.2.Modèle non linéaire	58
III.4.Avantages et inconvénients de ma méthode des éléments finis	58
III.5.Force magnétique	58
III.5.1.La force déduite à partir de la méthode de L'énergie magnétique total	58
III.5.2.LA Force déduite à partir de la méthode de la Co-énergie	59
III.5.3.La force déduite à partir de la méthode des travaux virtuels	59
III.5.4.La force déduite à partir de la méthode du tenseur de Maxwell.....	60
III.5.5.La force déduite à partir de LORENTZ.....	60
III.6.Conclusion	62

Chapitre IV : Application, validation et résultat

IV.1-Introduction	63
IV.2-Interprétation des résultats obtenus	67

Conclusion générale	69
----------------------------------	-----------

Références bibliographiques.

Les machines synchrones sont des machines tournantes ou linéaire. Elles peuvent fonctionner soit comme génératrice ou moteur.

La transmission de l'effort directement à la charge est l'avantage des machines électriques linéaires, qui commencent de plus en plus à pénétrer les différentes applications des entraînements électriques comme le transport, les divers processus de fabrication, l'automatisation, traitements des matières, soins médicauxOn rencontre également d'autres exemples particuliers qui impliquent les systèmes cryogéniques et les systèmes cardiaques artificiels.

Parmi les matériaux les plus utilisés dans les constructions électriques, on rencontre les aimants permanents, leur intégration dans le domaine des machines électrique présente différents avantages, parmi lesquels on peut citer, la grande facilité de refroidissement ; la grande facilité d'agir sur les propriétés des machines et des pertes magnétique faibles.

L'objet du présent travail est l'étude de la machine synchrone linéaire à aimants permanant .on s'est intéressé à l'allure de la force développée dans les différentes structures considérées.

Notre mémoire s'articule autour de quatre chapitres :

- Dans le premier nous nous intéressons, à travers une étude bibliographique, aux différentes machines synchrone connues, ainsi que les machines linéaire.
- Nous abordons dans le deuxième chapitre, les notions et les lois électromagnétiques qui se résument aux équations de maxwell.
- Le troisième chapitre est consacré à la présentation de la méthode des éléments finis.
- Enfin, le dernier chapitre concerne les applications et interprétation des résultats.

On termine par une conclusion générale

PARTIE 1

LES MACHINE SYNCHRONE

I. 1.1-Introduction :

Les machines synchrones sont généralement des machines tournante. Elles peuvent fonctionner soit comme génératrice ou moteur. La machine synchrone est utilisée dans une large gamme de puissance, à cause de sa synchronisation, l'entraînement à vitesse constante et la traction [5].

A ces nombreux domaines d'emplois correspondent autant de technologies différentes, dont les plus répandues peuvent être scindées en deux grandes familles [3] :

- Machine synchrone à inducteur bobiné (à pôles saillants ou à pôles lisses) [3].
- Machine synchrone à aimant permanent, avec ou sans pièces polaires [3].

I.1.2-définition :

Selon le vocabulaire électrotechnique international, la machine synchrone est une machine à courant alternatif, dans laquelle la fréquence de la tension induite engendrée et la vitesse sont dans un rapport constant [4].

I.1.3-description :

La machine synchrone est constituée essentiellement de deux parties :

I.1.3-1-le stator (induit) :

C'est la partie fixe de la machine qui comporte un circuit magnétique et un enroulement polyphasé à P paires de pôle [5].

I.1.3-2-le rotor (inducteur) :

C'est la partie tournante (mobile) de la machine, elle comporte généralement un bobinage monophasé parcouru par un courant continu.

Selon le rotor on classe les machines synchrones comme suit :

I.1.3-2-a-les machines synchrone à pôles lisses :

Dits turbo alternateurs ou turbo moteurs dont le rotor est cylindrique en acier ferromagnétique dont lequel sont fraisées les encoches qui abritent le bobinage monophasé, celui-ci comporte en général deux ou quatre pôles. Ce type de construction caractérisé par un entrefer constant et utilisé pour des machines de fortes puissances [5].

I.1.3.2.b-Les machines synchrones à pôles saillants :

Dont les pôles sont fixés sur l'axe du rotor [5]. Elle utilise des pièces polaires portées par une culasse avec des enroulements d'excitation constitués par des bobines [1].

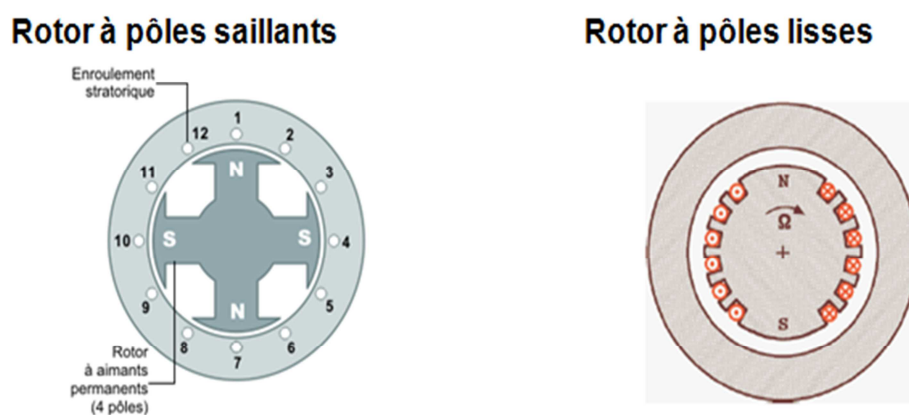


Figure I.1 : rotor à pôle lisse et à pôle saillant

I.1.3.2.c- les machines synchrones à aimants permanents :

Dont les bobinages rotoriques sont remplacés par des aimants permanents pouvant se disposer de plusieurs manières sur le rotor [5].

I.1.3.2.d-les machines synchrones à reluctance variable :

Elles possèdent un rotor à pôles saillants sans bobinage. La culasse sert de support et de circuit de fermeture de flux. Elle joue également le rôle d'enveloppe assurant la protection [5]

I .1.4. Modélisation de la MSAP

Afin d'obtenir une formulation plus simple et de réduire la complexité du modèle de la machine, l'établissement de son modèle mathématique sera développé sur la base des hypothèses à savoir que [12] :

- Le moteur possède une armature symétrique non saturée, les inductances propre et mutuelle sont indépendantes des courants qui circulent dans les différents enroulements.

- La distribution des forces électromotrice, le long de l'entrefer, est supposée sinusoïdale.
- Les pertes fer et l'effet amortisseur sont négligés.
- La perméabilité des aimants est considérée comme voisine de celle de l'air.

L'excitation étant faite par un aimant permanent, telle que le flux d'excitation est considéré comme constant, par ailleurs, l'aimant est considéré comme un enroulement sans résistance ni inductance propre et mutuelle, mais comme source de flux [1,32].

I.1.4. a-Equations de tensions et flux

Les tensions, flux et courants statoriques triphasés, sont écrits avec les notations vectorielles suivantes $[V_s]$, $[\phi_s]$ et $[I_s]$ respectivement.

L'équation tension dans le référentiel du stator S'écrit [1 ,12] :

$$[V_s] = [R_s][I_s] + \frac{d}{dt}[\phi_s]$$

Avec :

$$[V_s] = [V_{as} V_{bs} V_{cs}]^T, [I_s] = [I_{as} I_{bs} I_{cs}]^T, [\phi_s] = [a_{as} \phi_{bs} \phi_{cs}]^T$$

$$[R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix}$$

Les flux statoriques et rotoriques ont pour expression :

R_s : Résistance des enroulements statoriques.

Les flux statoriques et rotoriques ont pour expression :

$$[\phi_s] = [L_{ss}][I_s] + [\phi_f] \quad [I.2]$$

$$\text{et } [\phi_f] = \phi_{sf} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Ou :

ϕ_{sf} : Valeur crête (constante) du flux crée par l'aimant permanent à travers les enroulements statoriques

θ : Position absolue du rotor en degré électrique

$[L_{ss}]$: Étant la matrice des inductances statoriques.

Dans la machine à pôles saillants, la matrice des inductances propres statoriques $[L_{ss}]$ est fonction de la position. Elle contient deux termes : $[L_{s0}]$ qui est constante, et $[L_{s2}(\theta)]$ qui est en fonction de l'angle $\theta = p\theta_m$, θ étant l'angle électrique et θ_m est la position mecanique du rotor par rapport au stator.

$$[L_{ss}] + [L_{s0}] + [L_{s2}(\theta)]$$

Le terme $[L_{s0}]$ à pour expression :

$$[L_{s0}] = \begin{bmatrix} L_{s0} & M_{s0} & M_{s0} \\ M_{s0} & L_{s0} & M_{s0} \\ M_{s0} & M_{s0} & L_{s0} \end{bmatrix}$$

Le terme $[L_{s2}(\theta)]$ s'écrit, dans le cadre de la théorie du premier harmonique :

$$[L_{s2}(\theta)] = L_{s2} \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos 2(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos 2(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(2\theta) \\ \cos 2(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(2\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Les inductances propres et mutuelle M_{s0} , L_{s0} et L_{s2}

$$[V_s] = [R_s][I_s] + \frac{d}{dt}([L_{ss}][I_s] + [\phi_f])$$

On remarque que l'équation (I.6) est non linéaire et couplée pour supprimer ce problème on adopte des changements de variable et des transformations qui réduisent la complexité du système. Dans ce cas nous procédons à la Transformation de Park,

qui consiste à transformer les enroulements immobiles (a, b, c) par des enroulements (d, q) tourne avec le rotor.

I.1.4. b-Transformation de Park

A l'aide de la transformation de Park, on passe des grandeurs statoriques réelles (tension, flux courant) à leurs composantes fictives appelés les composantes d-q

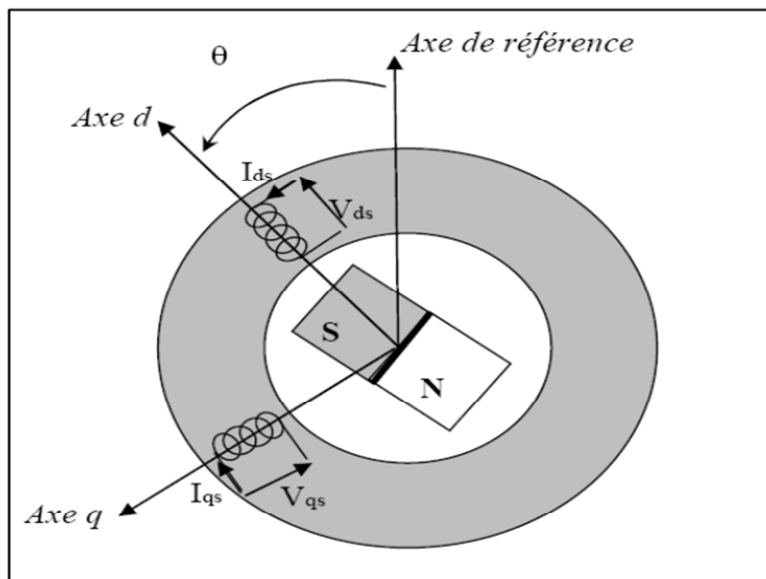


Figure I.2 : Machine équivalente au sens de Park [1,12]

Dans le système d'équations (I.6) effectuons le changement de la variable suivant [1,12]:

$$\begin{cases} [P(\theta)][V_{dqhs}] = [V_s] \\ [P(\theta)][I_{dqhs}] = [I_s] \end{cases}$$

Avec :

$$[P(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$[P(\theta)]$: étant la matrice de la transformation de Park qui permet le passage des grandeurs statorique $[V_s], [I_s], [\phi_s]$ à leur composantes relatives $[V_{dqhs}], [I_{dqhs}]$.

L'application de la transformation de Park à l'équation (I.8) donne :

$$[P(\theta)][V_{dqhs}] = [R_s][P(\theta)][I_{dqhs}] + \frac{d}{dt}([L_{ss}][P(\theta)][I_{dqhs}]) + \frac{d[\phi_f]}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

I.9

Avec : $\frac{d}{dt} = s$

Si on prémultiplie tous ces termes par $[P(\theta)]^{-1}$ et en sachant que :

$$[R_s] = [R_s] \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix}$$

On peut : Écrire les équations simplifiées des tensions :

$$[V_{dqhs}] = [R_s][I_{dqhs}] + [P(\theta)]^{-1} \left\{ \frac{d}{dt}([L_{ss}][P(\theta)][I_{dqhs}]) + \frac{d[\phi_f]}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right\}$$

I.10

Avec :

$$[P(\theta)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad \text{I.11}$$

Les équations électriques dans le repère de Park :

$$\begin{aligned} [V_{ds}] &= R_s I_{ds} + \frac{d}{dt} \phi_{ds} - \omega \phi_{qs} \\ [V_{qs}] &= R_s I_{qs} + \frac{d}{dt} \phi_{qs} - \omega \phi_{ds} \end{aligned} \quad \text{I.12}$$

$$\begin{cases} \phi_{ds} = L_d I_d + \phi_f \\ \phi_{qs} = L_q I_q \end{cases} \quad \text{I.13}$$

En introduisant (I.13) dans (I.12) on aura Le modèle électrique du MSAP sous la forme suivante :

$$\begin{cases} V_{ds} = R_s I_{ds} + L_{ds} \frac{d}{dt} I_{ds} - \omega L_{qs} I_{qs} \\ V_{qs} = R_s I_{qs} + L_{ds} \frac{d}{dt} I_{qs} + \omega L_{ds} I_{ds} + \omega \phi_{ds} \end{cases} \quad \text{I.14}$$

I.1.4. c .Expression de la puissance et du couple électromagnétique

Selon Park, l'expression de la puissance s'écrit comme suit :

$$P(t) = V_{ds} I_{ds} + V_{qs} I_{qs}$$

En remplaçant V_{ds} et V_{qs} par leur expressions il vient :

$$P(t) = \frac{2}{3} [R_s (I_{ds}^2 + I_{qs}^2) - (I_{ds} \frac{d}{dt} \phi_{ds} + I_{qs} \frac{d}{dt} \phi_{qs}) + \frac{d}{dt} (\phi_{qs} I_{ds})]. \quad \text{I.15}$$

D'où :

Le 1^{er} : terme représente la chute de tension Ohmiques (pertes par effet joule).

Le 2^{ème} : terme représente la variation de l'énergie magnétique emmagasinée.

Le 3^{ème} : terme représente la puissance transférée du stator au rotor à travers l'entrefer (puissance électromagnétique).

Sachant que :

$$P_e = C_e \cdot \Omega \quad \text{I.17}$$

D'où :

$$C_e = \frac{3}{2} P [\phi_{ds} I_{qs} - \phi_{qs} I_{ds}] \quad \text{I.18}$$

Entrelacent ϕ_{ds} ϕ_{qs} par leur expressions il vient :

$$C_e = \frac{3}{2} P [(L_{ds} - L_{qs}) I_{ds} I_{qs} + \phi_f I_{qs}] \quad \text{I.19}$$

Avec

p : nombre de paire de pôles.

L'équation de mouvement de la machine est :

$$C_e - C_r = J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega$$

Avec

J : Le couple d'inertie des masses tournantes ;

C_r : Couple résistant (ou statique) imposé par la charge mécanique ;

C_e : Couple électromagnétique ;

Ω : vitesse mécanique de rotation

f : Coefficients des frottements visqueux.

ϕ_f : Flux des aimants permanents.

I.1.5-fonctionnement :

Dans les machines synchrones classiques l'inducteur (rotor) peut être constant (machines à pôles lisses) ou bien variable (machines à pôles saillants), il est alimenté par un courant continue a travers des balais et des bagues de glissement, l'induit (stator) est muni d'un enroulement triphasé.

Dans les machines synchrones à aimant permanent le flux rotorique est généré par des aimants permanents, donc la machine est commandée uniquement par le stator [9].

I.1.6-conclusion :

La machine synchrone a des applications importantes dans les domaines suivants :

- Fonctionnement en moteur.
- Fonctionnement en génératrice.

PARTIE 2

LES MACHINES LINEAIRE

I.2.1-introduction :

Dans les machines électriques rotatives, le mouvement rotatif est produit par un couple électromagnétique. Et dans le cas des machines linéaire les forces électromagnétiques peuvent être utilisées pour produire un mouvement linéaire résultant en un dispositif électrique à mouvement linéaire [2].

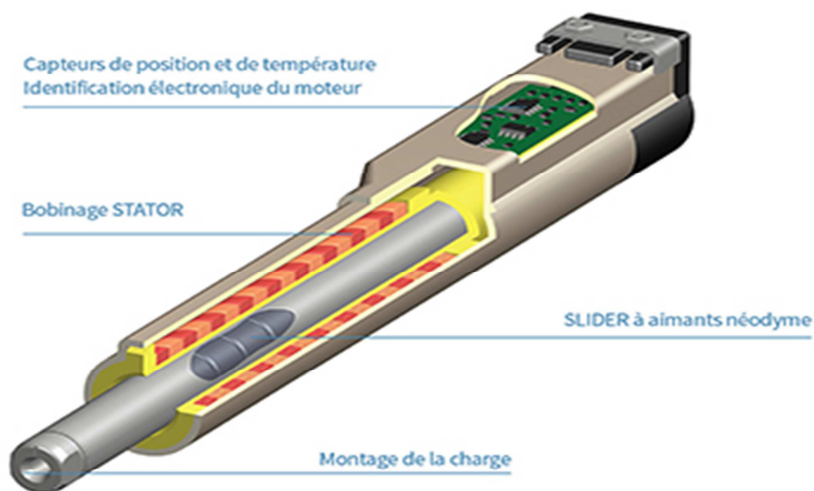


FIGURE 3 : MOTEUR LINEAIRE

Les machines électromagnétiques linéaire peuvent fournir une force de poussée directement à la charge. Elles sont de plus en plus employées dans des applications allant du transport, fabrication et l'automatisation au traitement des matières, soins médicaux et système de génération. Les dispositifs linéaires à conversion d'énergie électromagnétique offrent de nombreux avantages sur leurs équivalents rotatifs. Notamment l'absence de commande mécanique et de système de transmission qui assure une performance dynamique supérieure et une fiabilité améliorée [2] [9].

Dans cette partie, nous allons évoquer les différents types de machines linéaire et leurs structures.

I.2.2-définition :

Les machines linéaires ont presque le même principe que les machines rotatives. En effet, considérons l'exemple classique d'un moteur à inducteur rotatif triphasé. Ce dispositif peut être transformé en un moteur linéaire à induction si le stator et le rotor du moteur rotatif sont coupés sur un plan radial, et déroulés. Pour les moteurs linéaires à induction, on désigne le stator comme le primaire et le rotor comme le secondaire. Chacun des deux peut être statique alors que l'autre est en mouvement [2] [11].

Ces moteurs ont une structure linéaire, ou les enroulements de l'inducteur créent une induction glissante et entraînés en translation le long de l'entrefer.

Comme dans les machines cylindriques le stator de la machine linéaire à aimant, comporte un enroulement biphasé (en général triphasé) et le rotor en mouvement est constitué d'une série d'aimant supraconducteurs ou d'aimants permanents [2].

I.2.3- particularités de la machine linéaire :

Le principe de la machine linéaire est similaire à la machine rotative. Puisque la machine est ouverte à ses extrémités donc on peut y aménager un nombre pair et impair de pôles [2].

La structure linéaire possède un large entrefer et des effets gênants de la longueur finie, dus essentiellement à l'interruption du circuit magnétique aux deux extrémités de la machine. La présence de ces deux conduits a un phénomène d'effet d'extrémités, qui est unique à la machine électrique linéaire, il ne se produit pas dans les machines relatives conventionnelles dont le primaire est cylindrique et fermé dans la direction de mouvement dans les machines les plus communes [2].

Même à part la possibilité de transmettre directement un mouvement linéaire, ce type de machine présente une faible réactance de magnétisation, une faible inertie mécanique et une bonne performance thermique.

I.2.4-classification des machines linéaires :

Il existe trois types de machines linéaires :

- Moteurs linéaire à inductions.
- Moteurs linéaire à commutateur à courant continu.
- Moteurs linéaire synchrone.

I.2.4.a-Moteurs linéaire à induction :

Le moteur linéaire à induction produit est équivalent au moteur rotatif à induction. L'enroulement polyphasé du primaire produit un champ glissant. Aux deux extrémités des machines linéaire, des courants supplémentaires sont induits dans le secondaire, à cause de la variation plutôt rapide des champs magnétiques du primaire dans ces zones. Ces courants produisent ce qu'on appelle des effets d'extrémités, leurs conséquences sont [2] [9] :

- ✓ Force de tirée longitude supplémentaire.
- ✓ Perte joule supplémentaire.
- ✓ Distorsion de la distribution longitudinale de la densité de flux.
- ✓ Réduction du facteur de puissance ainsi que le rendement.

Comparés aux moteurs rotatifs à induction, les moteurs linéaires à induction ont un rendement et un facteur de puissance légèrement inférieur à cause de leurs effets d'extrémité et de leur plus large entrefer [2] [9].

Parmi ces machines nous avons :

- ✓ Les structures tubulaires.
- ✓ Les structures usuelles dites plane.

Les moteurs linéaires à induction de structure plane et tubulaire, appartiennent à la classe des moteurs dans lesquels le flux magnétique reste dans le plan de mouvement comme dans toutes les machines à induction rotatives.

De tel moteurs peuvent être appelés moteurs à flux longitudinaux ou axiaux. Les moteurs linéaires à induction ont montré leur efficacité dans nombreuse applications comme dans les systèmes de propulsion pour les installations de transport urbain et interurbain et des portes coulissantes.

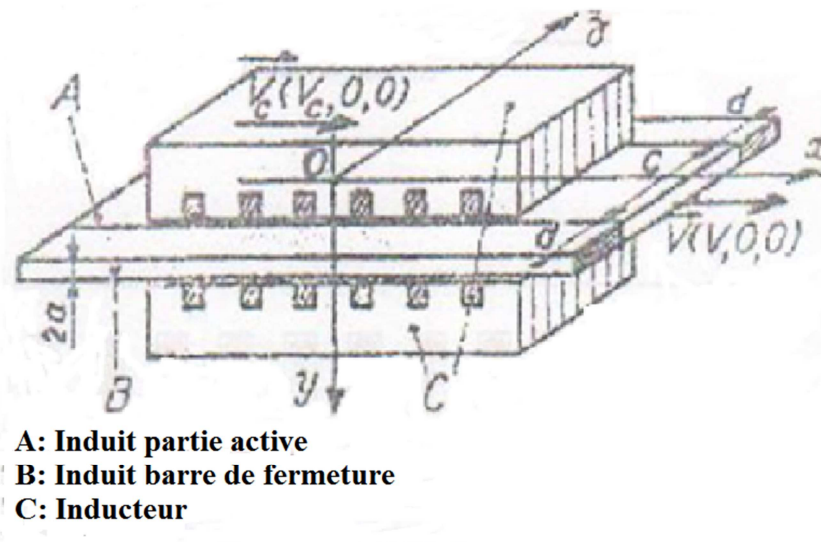


Figure 4 : moteur linéaire à induction

I.2.4.b-Moteurs linéaires à commutateur à courant continu :

Un moteur linéaire à courant continu hétéro- polaire plane avec commutation électrique, a été proposé pour les longues excursions à fortes puissances typiquement nécessaire pour le transport. La commutation électrique rend ce moteur similaire au moteur linéaire synchrone alimenté par un convertisseur à position contrôlée [2] [9].

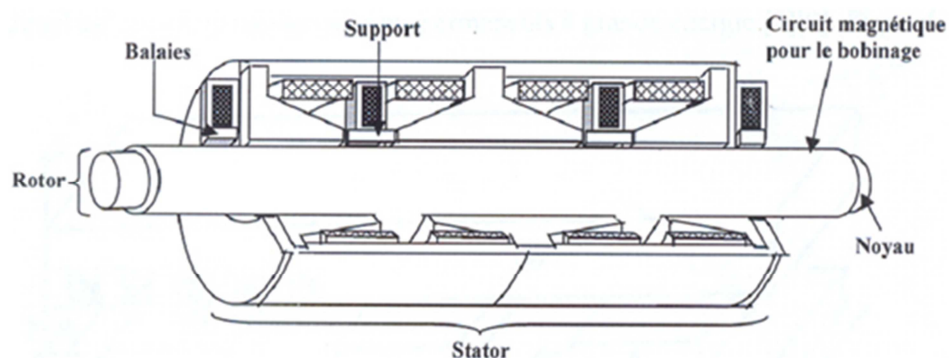


Figure 5 : moteurs linéaire à courant continu

I.2.4.c : Moteurs linéaire synchrones :

Il y un équivalent linéaire pour chaque moteur synchrone rotatif. Il y a un moteur linéaire synchrone hétéro polaire. Le principe de fonctionnement est le même pour les machines synchrone rotatives et linéaire, il existe

quelques différences pour des raisons économiques, seulement quelque topologies sont considérées comme pratiques [2] [9]. :

- ✓ Les moteurs linéaires synchrones à guide actif avec enroulement inducteur.
- ✓ Les moteurs linéaires à guide passif.

L'entrefer d'un moteur linéaire synchrone est presque le même que dans son équivalent topologique à moteur rotatif.

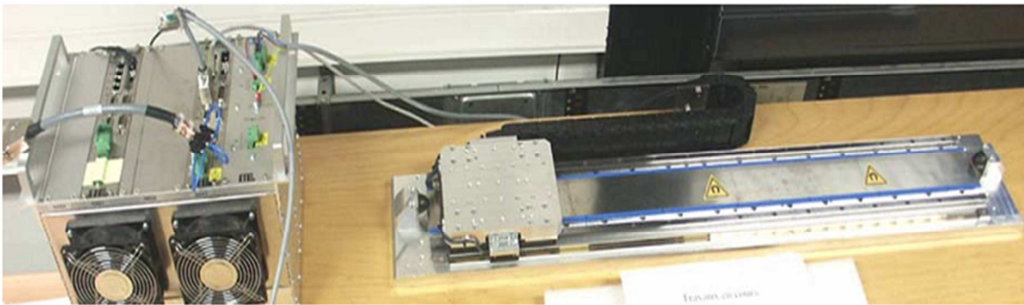


Figure6 : Moteur linéaire synchrone

En plus des moteurs linéaires synchrones de grande et moyenne puissance, il existe des moteurs linéaires synchrones à aimants permanent ou l'enroulement inducteur conventionnel est remplacé par des aimants permanents à grande énergie.

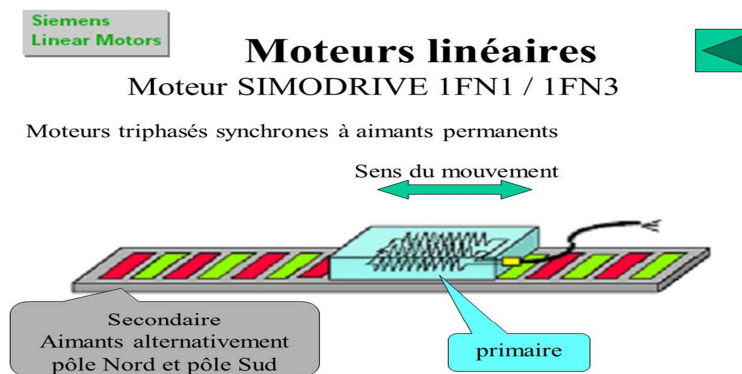


Figure 7 : moteur linéaire synchrone à aimants permanents

Les aimants de terre rare seraient idéaux pour ce but, mais les aimants permanents moins coûteux peuvent être utilisés si des systèmes de concentration de flux sont appliqués pour obtenir de fortes densités de flux dans l'entrefer (0,5 – 0,7) T.

I.2.4.c- Le schéma électrique équivalent d'une machine linéaire

Dans les moteurs linéaires, en négligeant l'effet d'extrémité, le champ d'induction résultant serait sensiblement équivalent au champ des machines rotatives et aurait comme expression : $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\max} e^{j(\omega t-kx)}$

Il est possible de tenir compte des effets spéciaux sur le schéma équivalent monophasé du moteur linéaire, qui est représenté sur la figure I.16 suivante :

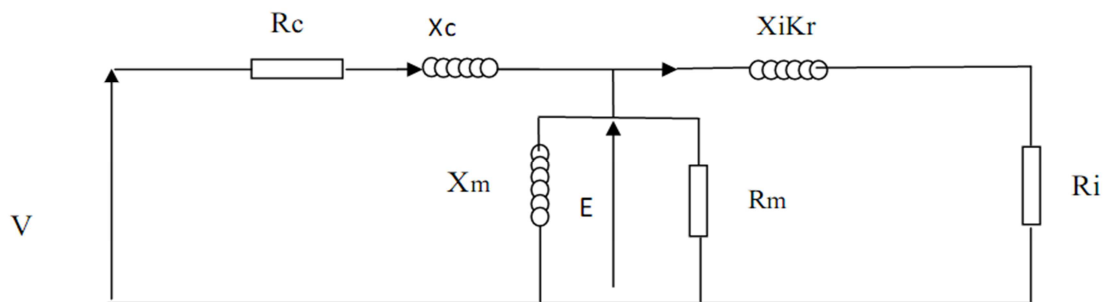


Figure8 : Schéma équivalent relatif à une phase d'une machine linéaire

I.2.5-La différence entre les machines linéaires et rotatives :

Il existe trois différences essentielles :

- Le rotor de la machine rotative est généralement constitué par des conducteurs physiquement séparés, on distingue le rotor à cage d'écureuil ou rotor bobiné. Par contre une machine linéaire peut avoir un rotor constitué d'une simple plaque solide conductrice, les courants induits circulant alors dans la masse même de la plaque [2][9].
- La machine rotative n'a en général qu'un stator inducteur, par contre dans la machine linéaire il est intéressant de disposer deux stators inducteurs se faisant cela d'une part, pour faciliter la fermeture du flux dans le circuit magnétique et d'autre part pour augmenter l'induction dans l'entrefer [2][9].
- La machine rotative possède un stator fixe et un rotor mobile. Par contre, la machine linéaire peut avoir soit un stator fixe et un induit (charge) mobile auquel l'induit sera plus court que le stator. Ou bien un stator mobile et un rotor fixe auquel cas le stator sera plus court que l'induit [2][9][11].

1. **Machines linéaires à stator long double induction** : Similaire à la machine tubulaire, elle est utilisée comme lanceur électromagnétique, appelé aussi lanceur électromagnétique à rails

2. **machines linéaires à stator court double induction** :

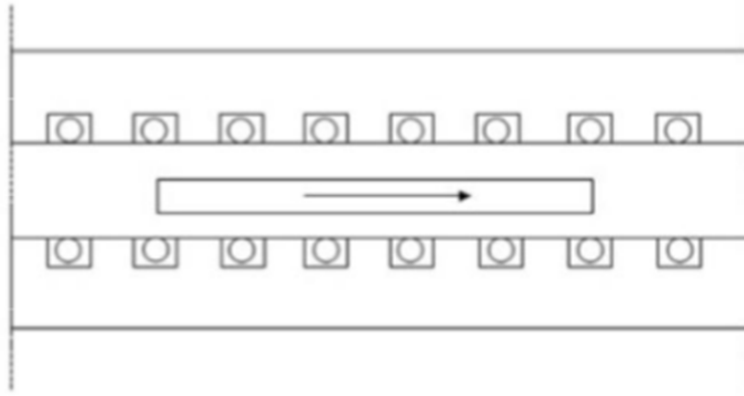


Figure I.9. Machine linéaire a stator long, double induction

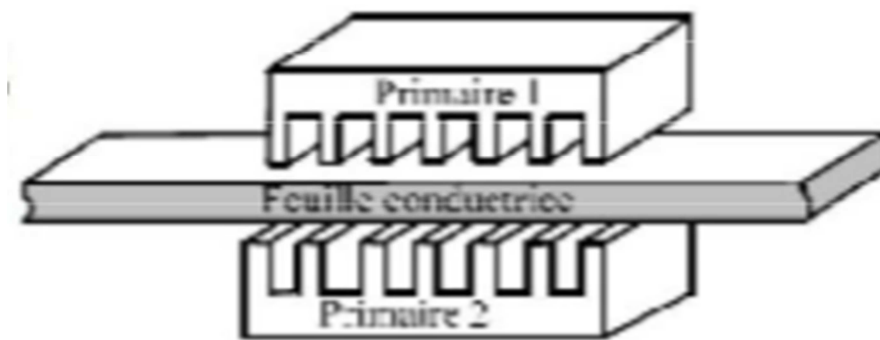


Figure I 10 : machine linéaire a stator court, double inducteur.

1.2.6- Effet spéciaux dans une machine linéaire :

Le circuit magnétique ouvert d'un moteur linéaire donne un effet d'extrémité de longueur finie se décompose en deux types :

- Les effets d'extrémités de longueur finie dynamique

Comme le circuit magnétique est ouvert, des ondes supplémentaires se développent à l'entrée et à la sortie du moteur qui sont modifiées avec le mouvement de moteur, cet effet dépend de la vitesse de moteur, plus la vitesse est grande plus l'effet prend de l'importance, ce phénomène diminue les performances de moteur.

- Les effets d'extrémités de longueur finie statique

Puisque les positions des phases par rapport au centre du dispositif sont différents, les courants sont déséquilibrés dans les primaires courts, les phases

n'ont pas le même circuit magnétique ce qui modifie l'amplitude et le déphasage des courants. [12]

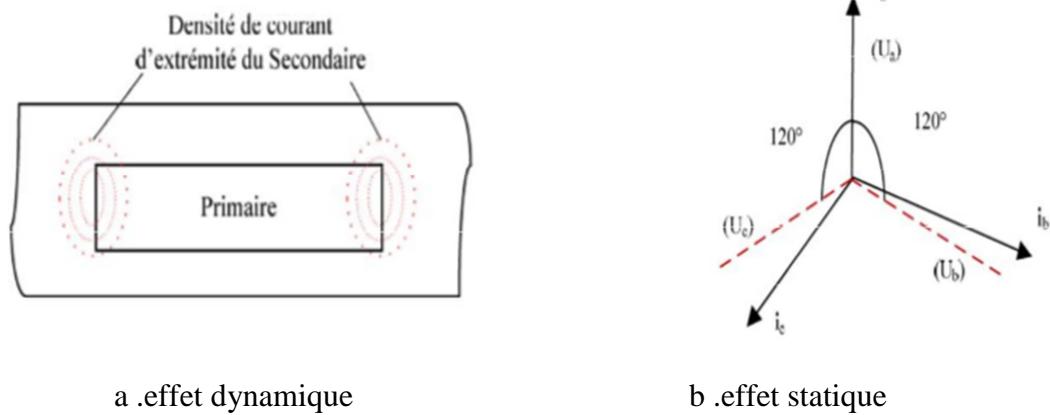


Figure I.11 : Les effets d'extrémités de longueur finie

I.2.7. Les effets d'extrémités de largeur finie-effets transversaux

Les courants induits dans le secondaire ont un parcours fermé contenu dans la zone active. Ce sont courants de Foucault, qui ne sont pas distribués uniformément. Cette distribution modifie les pertes et la répartition du champ qui entraîne une diminution de coefficient de conductivité électrique de secondaire.[5]

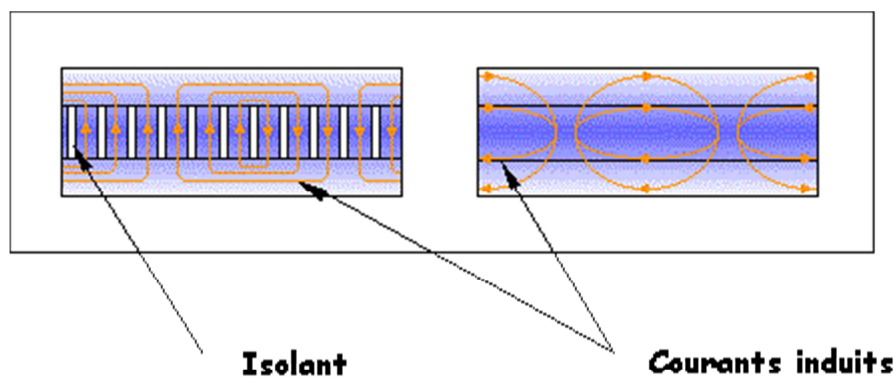


Figure I.12 : Distribution des courants dans le secondaire

I.2.8- Avantages et inconvénient :

★ Avantages

- ✓ Aménagement mécanique simple et un nombre minimum de pièces en mouvement.
- ✓ Une poussée directe, peu d'usure.
- ✓ Grande force de déplacement.
- ✓ Libre accès au moteur pour effectuer la maintenance (pas de pièces internes en mouvement).
- ✓ Faible réactance de magnétisation et faible inertie mécanique.

★ Inconvénients

- ✓ Un faible rendement (entre 30 et 40%).
- ✓ Le jeu mécanique et les difficultés associées de précision de positionnement.
- ✓ Bruit acoustique élevé.
- ✓ Difficultés d'intégration de l'actionneur au système complet (encombrement).
- ✓ Limite de vitesse maximale faible.

I.2.9-Conclusion :

Vu la simplicité et les facilités mécanique qu'apportent la machine linéaire et le développement en parallèle de l'électronique de puissance et de la technologie des aimants permanent , le moteur linéaire à aimant permanent verra sans doute son champ d'application s'accroître .l'utilisation d'aimant permanent qui peut être considéré comme une source d'excitation permet de remédier à l'un des problèmes majeurs de la machine linéaire qui est son large entrefer , qui se produit par une réduction de son champ magnétique , sans provoquer une augmentation des pertes et de l'échauffement.

Partie 3 :

LES AIMANTS PERMANENTS

I.3 .1. -Introduction :

L'aimant permanent a des applications très importantes et très étendues. Ils sont utilisés dans un très grand nombre de dispositifs électromagnétiques de divers domaines : de l'électroménager en passant par l'industrie automobile, l'électroacoustique jusqu'au domaine de la technologie des pointes.

Actuellement on rencontre trois catégories d'aimants permanents :

- ✓ Les ferrites.

- ✓ Les alnicos.
- ✓ Les aimants à base de terre rares.

Ces aimants sont des matériaux ferromagnétiques durs et à large cycle d'hystérésis [2].

Dans la présente partie, nous passerons en revue les différents types d'aimants permanents, tout en citons leurs caractéristiques prépondérantes, ainsi que leur critère de fonctionnement [2].

I.3 .2- Définition :

On appelle aimants permanents les cors qui ont la propriété de conserver une très grande aimantation rémanente et qui désaimantent lorsqu'ils ont été aimantés.

Parmi les fonctions d'un aimant permanent nous avons la création du champ magnétique extérieur, cela implique que l'aimant possède des pôles qui sont des régions dans lesquelles sa polarisation présente une composante normale à la surface [5].

I.3.3-Le critère de fabrication d'aimants permanents :

Le but à atteindre pour tout fabricant d'aimants permanents est le suivant : Obtenir dans un entrefer (volume V) une induction magnétique.

Quand il s'agit d'aimantation, la partie utile de la courbe $B(H)$ est uniquement celle qui est comprise entre les axes de coordonnées après une aimantation à saturation, car le point figuratif de l'état de l'aimant est le point P dont l'abscisse est le champ démagnétisant H_d . Cette portion utile est appelée courbe de démagnétisation.

I.3.4-différents types d'aimants permanents :

Il existe une très grande variété de matériaux pour aimants permanents dont les propriétés et les applications sont diverse. Pour les fabriquer, on recourt à différents alliages de toute sorte de substance : Fer, Aluminium, Nickel, Cuivre, Platine, Carbone....

Selon les trois critères cités au dessus, idéalement, les matériaux utilisés pour la fabrication des aimants permanents doivent donc posséder, à la fois, une induction rémanente(B_r) élevée et un champ coercitif(H_c) de grande intensité de sorte que l'énergie requise pour les désaimanter soit aussi grande que possible.

Les aimants sont classés en deux grandes familles, les matériaux céramiques et métalliques.

❖ A Les matériaux céramiques(les ferrites)

Obtenus par frittage, ces matériaux sont fabriqués à base d'Oxyde de Fer, Baryum et Strontium. Ils possèdent une densité de flux rémanent B_r plus basse mais développent des champs coercitifs très élevés qui peuvent dépasser 350 KA/m pour certaines nuances.

D'ailleurs, lorsqu'ils fonctionnent dans un champ démagnétisant important, ils retrouvent les conditions initiales sans ou avec peu de dégradation de leur induction [1]. De plus leur résistivité est équivalente à celle des bons isolants [6], ce qui réduit les pertes par courant de Foucault lorsque les ferrites opèrent dans un milieu où règne un champ magnétique variable.

Les ferrites sont fragiles mais présentent une stabilité chimique. On les retrouve dans les pièces polaires de certains moteurs de faible puissance et dans les applications électriques de moyenne puissance (automobile, rotorique.....).

❖ Les matériaux métalliques :

La métallurgie moderne a permis de réaliser des alliages qui sont aujourd'hui largement employés dans l'industrie des aimants permanents. Ces matériaux sont classifiés en deux catégories, les Alnicos et les terres rares.

❖ Les Alnicos :

On désigne généralement sous le nom d'Alnicos, les alliages constitués de Fer, Aluminium de Nickel. Ils sont caractérisés par une induction rémanente B_r relativement élevée et un champ coercitif H_c faible. On trouve des aimants ayant une induction B_r proche de 0.7 T pour les alnicos isotropes et 1.2 T pour les anisotropes [7]. Un aimant en Alnicos retient 99% de son aimantation originelle après cent ans d'utilisation [6]. Leur champ coercitif présente un inconvénient majeur pour usage dans les machines électriques. Afin d'y remédier, l'addition du Colbat à des taux de 30% est envisageable tout en gardant une rémanence modérée [1].

Les Alnicos sont appliqués principalement dans les systèmes nécessitant un fonctionnement à haute température (point de Curie élevé), ainsi que dans les moteurs pas à pas hybrides, appareillage de mesure.....

❖ les terres rares :

L'apparition de ces alliages métalliques vers les années 60, représente un énorme progrès dans le domaine des aimants permanents grâce à leur dureté magnétique. En effet, ils réunissent simultanément deux qualités essentielles à savoir une très haute énergie magnétique et une grande résistance à la désaimantation [8].

Essentiellement deux types d'aimants permanents à base de terres rares sont utilisés, à savoir le Samarium-Colbat et Néodyme-Fer-bore.

❖ **Le samarium-Cobalt(Sm-Co) :**

En plus des qualités déjà citées, ces aimants ont une aimantation suffisamment rigide pour considérer, leur perméabilité proche de celle de l'air et autorisant une température de fonctionnement avoisinant les 250°C. Ils sont utilisés là où le critère de puissance volumique est prépondérant, adaptés pour les machines électriques notamment les moteurs de grande puissance.

❖ **Le Néodyme-Fer-Bore(Ne-Fe-B) :**

Plus puissant que les (Sm-Co), ces aimants possèdent une aimantation qui peut atteindre 1.3T et un champ coercitif dépassant 1500 KA/m suivant l'addition du praséodyme ou du dysprosium, ils détiennent de ce fait tous les records de (-BH) max à température ambiante [11].

La faible valeur de la température de Curie des(Ne-Fe-B) limite ses performances.

Des solutions intermédiaires à savoir l'ajout des liants plastiques ou techniques d'usinage particulières, sont portées soit pour améliorer leur rigidité mécanique ou pour réduire leurs prix qui est très cher.

I.3.5-les différents procédés de mise en œuvre des aimants Ne-Fe-B :

Les procédés de fabrication, d'usinage, de protection, de manipulation et de stockage sont :

• **Fabrication :**

Les différentes étapes de sa fabrication sont : Fusion des métaux, alliage, concassage, pré-broyage, mélange, broyage, pressage en champ magnétique, frittage, usinage, traitement de la surface, aimantation. La magnétisation est soit parallèle soit perpendiculaire au sens du pressage.

• **Usinage :**

Mécaniquement, les aimants en Néodyme-Fer-Bore se comportent comme la porcelaine et la céramique : ils sont sensibles aux chocs et à la torsion (meulage

Avec arrosage uniquement). Les aimants ne doivent être usinés qu'avec du matériel adapté. En plus, la poudre qui rentre dans la composition du Ne-Fe-B est inflammable si elle est portée à des températures élevées.

• **Manipulation :**

Le Néodyme-Fer-Bore est un matériau fritté et donc, cassant. Les aimants peuvent se briser ou éclater. Cela se produit le plus souvent lors de collisions incontrôlées ou répétées entre deux aimants ou lors de contrainte s mécaniques. Dans tout les cas, les aimants doivent être manipulés avec précaution et tout choc entre deux aimants doit être évité.

- **Protection de surface-plaquage :**

Les aimants en néodyme sont fortement sensibles à la corrosion et peuvent être protégés par une couche de nickel, de chrome, d'or, d'argent, d'époxy.....etc. cette couche s'use lors de chocs répétés au niveau du point d'impact. Il est conseillé de séparer les aimants les uns des autres à l'aide de plastique, de papier ou de carton.

- **Stockage :**

Les aimants en Néodyme sont très sensibles à l'humidité, à l'acide et à la poussière. Aussi, il faut veiller à les stocker dans des endroits secs, propre et à température ambiante. Ne pas stocker les aimants à proximité de tous matériels électriques ou électroniques.

I.3.6-principe d application :

L'aimant est la plupart de temps un composant d'un ensemble plus vaste, destiné à remplir une fonction, par exemple un moteur électrique, le haut parleur en est un exemple simple. L'aimant est alors une pièce en forme de pot qui crée un champ magnétique radial dans un petit volume annulaire qu'on appelle son entrefer. L'entrefer contient une bobine électrique circulaire solidaire du diaphragme. Quand un courant électrique parcourt la bobine, celle-ci est soumise à une force de Laplace qui sert à actionner le diaphragme.

Comme tout matériau aimanté, l'aimant permanent possède une énergie potentielle magnétique acquise au cours du processus d'aimantation, l'énergie stockée sous différentes formes (anisotropie, magnéto-statique, magnéto-élastique,.....etc.).L'aimant est donc la source du champ magnétique dans son volume propre et dans tout l'espace environnant.

I.3.7-Aimantation et désaimantation d'un aimant permanent :

I.3.7.1-Aimantation :

L'aimantation d'un matériau magnétique est obtenue en le soumettant à l'influence d'un champ magnétique. L'intensité de ce champ doit être suffisamment élevée, pour que l'on atteigne la disparition des parois des domaines et l'alignement convenable des moments magnétiques élémentaires. Pour les substances anisotropes, la direction du champ doit être celle de l'axe d'anisotropie. Le respect de ces conditions est nécessaire pour trouver les caractéristiques de base fournies par le fabricant d'aimants.

I.3.7.2-Désaimantation :

La désaimantation est parfois nécessaire pour rendre l'aimant plus aisément manipulable ou transportable. Dans certaines applications ou dans un entrefer relativement faible, peut se déplacer une bobine (pot de haut parleur, appareil de

mesure,.....etc.) il est indispensable de démagnétiser l'aimant aussi complètement que possible des particules ferreuses qui seraient difficiles à éliminer après montage.

Une désaimantation thermique partielle ou totale reste déconseillée car elle risque toujours d'entraîner des modifications incontrôlées, de nature physico-chimique ou tout simplement, une oxydation dans le cas des aimants de terres rares. L'application d'un champ démagnétisant suffisant ne permet pas de contrôler finement la désaimantation, en particulier dans les aimants modernes les plus performants.

I.3.8-les applications des aimants permanents :

Les premières applications des aimants permanents sont :

- La boussole.
- Le compas magnétique.
- Le galvanomètre.

Les principales applications obtenues avec des aimants modernes sont les suivantes :

- Le moteur et générateur électrique.
- Les appareils de transmission de mouvement et de couple.
- Les appareils de mesure.
- Les appareils de l'enregistrement magnétique.

I.3.9-Importance des aimants permanents en électrotechnique :

Malgré d'intenses activités de recherche, le confinement initial des dispositifs à aimants dans la gamme des faibles densités d'énergie a résisté pendant un demi siècle. Depuis l'utilisation en 1917 d'aciers en colbat d'énergie spécifique de $12\text{kJ}/\text{m}^3$ jusqu'à l'avènement des alliages à base de terres rares en 1965.

Ce n'est qu'à partir du milieu des années soixante qu'a peu se concrétiser l'espoir de caractérisation d'alliages plus performants. Découverte en 1983, la substance la plus prometteuse (FeNDB) évolue de manière spectaculaire à raison de $30\text{kJ}/\text{m}^3$ par an en moyenne, et a ouvert des horizons nouveaux à des multiples applications, notamment dans le type de dispositifs qui fera l'objet de notre étude. Le quasi totalité des aimants permanents produits dans le monde sont utilisés par des constructeurs électriciens dans la fabrication de convertisseurs d'énergie, des moteurs électriques variés, des hauts parleurs, des capteurs de déplacement, des serrures magnétiques.....etc.

I.3.10- conclusion :

Plusieurs types d'aimants permanents sont utilisés dans la technologie. Cependant les alliages à base de terres rares possèdent une très grande valeur d'aimantation avec une grande rigidité. Ils présentent ainsi la solution adéquate pour la machine à large entrefer.

Introduction

L'étude d'un dispositif électromagnétique nécessite la connaissance des champs électromagnétiques dans ce dispositif et donc les valeurs du flux, les forces magnétiques. Le calcul du champ magnétique nécessite une résolution des équations de Maxwell.

II.1 Equations de Maxwell

C'est grâce à James Clerk MAWXELL (1864) que nous possédons depuis de plus de cent cinquante ans, les expressions des équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques. Ces équations de MAXWELL sont l'expression la plus générale des lois de l'électromagnétique classique, qui s'avèrent pleinement compatibles avec la théorie de la relativité moderne, elle n'a jamais été mise en défaut jusqu'à présent.[2]

Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale ou temporelle d'un champ électromagnétique en un point de l'espace entraîne ou est due à l'existence d'un autre champ au même point. Ces équations sont donc locales et sont valables dans n'importe quel système d'axes.[10]

II.1.1 Première équation :

Cette équation c'est la « forme locale » du théorème de GAUSS qui exprime le flux du vecteur champ électrique à travers un volume (v) délimité par une surface est égale à la densité volumique de charge divisée par la permittivité de l'air. D'après le théorème de Gauss [2]:

$$\oiint_s E dS = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \text{III.1}$$

$$\oiint_s D.dS = \sum_{i=1}^n Q_i \quad \text{III.2}$$

D'autre part on à :

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \iiint_v \rho.dv \quad \text{III.3}$$

Donc :

$$\iint_s D \cdot ds = \iiint_v \rho \cdot dv \quad \text{III.4}$$

Avec :

\vec{D} : Vecteur de déplacement électrique [C/m²]

$\sum_{i=1}^n Qi$: La charge totale contenue dans le volume.

dv : élément du volume [m³].

ρ : la densité de la charge volumique [C /m³].

ds : élément de surface [m²].

En appliquant le théorème d'Ostrogradski à l'intégrale de gauche on aura :

$$\iiint_v \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \cdot dv = \iiint_v \rho \cdot dv \quad \text{III.5}$$

D'où l'expression de la première équation de MAXWELL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{III.6}$$

II.1.2 Deuxième équation

Le flux ϕ d'un champ magnétique \vec{B} à travers une surface S est donné par :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad \text{III.7}$$

La circulation du vecteur champ électrique sur le contour \vec{dl} est donnée par :

$$e = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad \text{III.8}$$

e: force électromotrice induite [V]

Si $\frac{d\phi}{dt}$ est la densité du flux magnétique par rapport au temps décrit l'ensemble de cette variation du ϕ , la f.e.m d'induction nous est donnée par la loi de FARADAY :

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad \text{III.9}$$

La combinaison des deux équations II.8 et II.9 nous permet d'écrire :

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\phi}{dt} \quad \text{III.10}$$

On sait que :

$$\phi = \iint \vec{B} d\vec{s} \quad \text{III.11}$$

D'où on aura :

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \iint \text{rot} \vec{E} d\vec{l} \quad \text{III.12}$$

D'où :

$$\iint \text{rot} \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} d\vec{s} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \quad \text{III.13}$$

Donc :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{III.14}$$

Cette équation traduit un champ électrique rotationnel engendré par la variation de l'induction magnétique en fonction du temps, et c'est l'une des lois qui illustre la dépendance du champ magnétique avec le champ électrique.

II.1.3 Troisième équation

De la deuxième équation

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \text{div} (\text{rot} \vec{E}) = \text{div} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad \text{III.15}$$

On sait que :

$$\text{div} (\text{rot} \vec{E}) = 0 \quad \text{III.16}$$

D'où on aura :

$$\text{div} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0 \implies - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{B}) = 0 \quad \text{III.17}$$

Donc :

$$\operatorname{div} \vec{B} = f(r) \quad \text{III.18}$$

$f(r)$ implique l'existence des charges magnétiques, ce qui est incohérent car jusqu'à présent l'existence de ces charges n'a jamais été mise en évidence, donc on peut poser $f(r) = 0$

D'où on aura :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{III.19}$$

Cette équation exprime la conservation du champ \vec{B} , on dit que \vec{B} est à flux conservatif.

II.1.4 Quatrième équation

C'est la généralisation de la loi d'Ampère pour les champs dynamiques [12]

D'après le théorème d'Ampère on a :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \sum_{i=1}^n I \quad \text{III.20}$$

On a dans le cas de l'air

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{III.21}$$

D'où :

$$\int \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{III.22}$$

Avec :

I : l'intensité des courants de conduction enlacés par le contour.

La relation entre l'intensité de courant et la densité de courant est donnée par :

$$\sum I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

En appliquant le théorème de Stokes :

$$\int_{\tau} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\vec{s} = \iint_s \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\vec{s} \quad \text{III.23}$$

D'où :

$$\iint_s \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\vec{s} = \iint \vec{J} d\vec{s} \quad \text{III.24}$$

$$\implies \iint_s \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) d\vec{s} = \iint \vec{J} d\vec{s} \quad \text{III.25}$$

$$\implies \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \quad \text{III.26}$$

Avec : $\vec{J} = \vec{J}_d + \vec{J}_c$ III.27

\vec{J}_d : Vecteur courant de déplacement.

\vec{J}_c : Vecteur courant de conduction.

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{III.28}$$

Donc la quatrième équation de MAXWELL s'écrit comme suit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{III.29}$$

Le rationnel du champ magnétique donne naissance à des courants de conduction et de déplacement, elle est dite MAXWELL-AMPERE, qui est d'une importance capitale pour le calcul du champ magnétique [12]

II.1.5. Tableau récapitulatif des équations de MAXWELL

Equations	Forme locale	Forme intégrale
Première équation	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	$\iint_s D \cdot d\vec{s} = \iiint_v \rho \cdot dv$
Deuxième équation	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$
Troisième équation	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$
Quatrième équation	$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_s \left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$

II.2 Loi de comportement des milieux

Elles expriment les relations qui existent entre le champ magnétique \vec{H} et l'induction magnétique \vec{B} , à travers la perméabilité magnétique μ ainsi que celle entre le déplacement électrique \vec{D} et le champ électrique \vec{E} , à travers la perméabilité électrique ϵ [6].

a) Cas d'un milieu magnétique linéaire

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{III.29}$$

Avec :

μ : Perméabilité magnétique absolue [H/m].

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \quad \text{[H /m]}$$

μ_r : Perméabilité magnétique relative du milieu considéré

b) Cas d'un milieu diélectrique linéaire

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{III.30}$$

Avec : $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

ϵ : Permittivité électrique absolue [F/m].

ϵ_0 : Permittivité électrique du vide $\frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ [F/m].

ϵ_r : Permittivité relative du milieu considéré.

Dans le cas où le milieu considéré à un comportement non linéaire, les relations II.29 et II.30 deviennent respectivement :

$$\vec{B} = \mu(\|\vec{H}\|) \times \vec{H} \quad \text{II.31}$$

$$\vec{D} = \epsilon(\|\vec{E}\|) \times \vec{E} \quad \text{II.32}$$

c) Pour un aimant permanent

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad \text{II.33}$$

\vec{M} : Le vecteur aimantation du milieu magnétique considéré.

II.3. Loi d'Ohm

En appliquant la loi d'Ohm à un conducteur parcouru par un courant I, on peut écrire :

$$V = R \cdot I \quad \text{II.34}$$

V : potentiel électrique [V].

R : résistance [Ω]

$$R = \frac{L}{\sigma S} \quad \text{II.35}$$

Donc :

$$V = \frac{LI}{\sigma S} \quad \text{II.36}$$

σ : Conductivité électrique [A/m^2].

L : longueur du conducteur [m].

S : section du conducteur [m^2].

Aussi elle interprète la relation entre le champ électrique E et la densité de courant J par l'intermédiaire de la conductivité électrique σ . [12]

La loi généralisée s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \vec{j}_s + \vec{j}_{ind} \quad \text{II.37}$$

Avec :

σ : La conductivité électrique.

\vec{j}_s : La densité de courant de source.

\vec{j}_{ind} : La densité de courant induit.

\vec{E}_t : Le champ électrique qui règne dans le milieu considéré.

Et

$$\vec{E}_t = \vec{E} + \vec{E}' = (\vec{E}_s + \vec{E}_{ind}) + \vec{E}' \quad \text{II.38}$$

Avec :

\vec{E}_s : Le champ électrique de source.

\vec{E}' : Électromoteur.

\vec{E}_{ind} : Le champ électrique induit.

Et on a encore :

$$\vec{E}' = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{II.39}$$

Avec :

\vec{v} : La vitesse de déplacement des pièces en mouvement, dans un champ de d'induction B.

II.4 L'équation de conservation de la charge électrique

L'équation de conservation de la charge appelée aussi équation de continuité est donnée par ; [23]

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0 \quad \text{III.40}$$

Avec :

\vec{j} : Densité du courant [A/m]

δ : Densité de charge volumique [C /m³]

Cette équation traduit l'absence de variation discontinue de la charge électrique, donc il ya conservation de charge électrique du système.

II.5 Relations de passages

A l'interface entre deux milieux différents respectivement (1) et (2) les champs de vecteurs doivent vérifier certaines conditions dites relations de passages. Elles s'énoncent comme suit :

II.5.1 Conservation de la composante tangentielle du champ électrique

$$E_{t1} - E_{t2} = 0$$

E_{t1} : la composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 1

E_{t2} : la composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 2

II.5.2 Conservation de la composante normale de l'induction magnétique

$$B_{n1} - B_{n2} = 0$$

B_{n1} : la composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 1

B_{n2} : la composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 2

II.5.3 Discontinuité de la composante tangentielle de champ magnétique

$$H_{n1} - H_{n2} = k$$

K : densité de courant a la surface de séparation

II.5.4 Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma_s$$

σ_s : densité de charge électrique a la surface de séparation.

D_{n1} : la composante normale de déplacement électrique dans le milieu 1

D_{n2} : la composante normale de déplacement électrique dans le milieu 2

II.5.5 La conservation de la composante normale de la densité de courant

$$J_{t1} - J_{t2} = 0$$

J_{t1} : la composante tangentielle de la densité de courant dans le milieu 1

J_{t2} : la composante tangentielle de la densité de courant dans le milieu 2

II.6 Condition aux limites

La résolution du système composé des équations de Maxwell et des lois de comportement admet une infinité de solutions. Par conséquent, pour assurer l'unicité de la solution, des conditions aux limites du domaine sont appliquées [8].

Il existe un $t \rightarrow +\infty$ grand nombre de conditions aux limites possibles, en fonction de la formulation du problème, du nombre de variables en jeu, et (de manière plus importante) de la nature de l'équation.

Les conditions imposées au temps $t = 0$ sont appelée *conditions initiales*. On peut aussi imposer des conditions aux limites, par exemple, dans la limite pour [7].

II.6.1 Conditions aux limites de type Neumann

Elle est appliquée sur la frontière lorsque la valeur de la grandeur calculée n'est pas connue à la frontière de domaine d'étude [6].

$$\frac{\partial A}{\partial n} = A_0$$

II.6.2 Condition aux limites de type Dirichlet

Cette condition nous renseigne sur la valeur de l'inconnue sur la frontière du domaine de résolution [7].

$$A = A_0 = \text{Constante}$$

A_0 : constante

A : la fonction inconnue

II.6.3 Condition aux limites Mixte (Neumann-Dirichlet)

C'est la combinaison de deux types de conditions aux limites, elle s'exprime de la manière suivante :

$$\alpha A + \beta \frac{\partial A}{\partial n} = \gamma$$

Où α, β et γ sont des constantes.

A : l'inconnu de problème.

II.6.4 Condition de périodicité et d'anti-périodicité

Appliquée surtout dans le cas des machines tournantes et linéaires, du fait de la périodicité de la distribution du champ magnétique [6].

Cette condition permet de prendre en considération la périodicité du phénomène physique mis en jeu. Il existe de périodicité et anti-périodicité, dites aussi cyclique ou anticyclique [8].

$$A|_{\Gamma} = K + A|_{\Gamma+d\Gamma}$$

Avec :

$d\Gamma$: Période spatiale suivant le contour Γ

Si : $K=1$ condition périodique

Si $K=-1$ condition anti périodique.

III.7 Equations électromagnétiques

II.7.1 Equation électrostatique

➤ **Formulation en termes de potentiel électrique V**

Dans le cas statique, les équations de Maxwell deviennent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \tag{II.41}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \tag{II.42}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{II.43}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} \tag{II.44}$$

De l'équation(II.42) on a :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists V / \vec{E} = -\vec{\nabla} V \tag{II.45}$$

Des équations (III.41) et (III.30) on a :

$$\vec{\nabla}(\epsilon \cdot \vec{E}) = \rho \tag{II.46}$$

D'où :

$$\vec{\nabla}(\epsilon(-\vec{\nabla}V)) = \rho \tag{II.47}$$

C'est l'équation électromagnétique non linéaire électrique scalaire V.

Dans le cas linéaire on aura :

$$\vec{\nabla}V = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \tag{II.48}$$

C'est l'équation de poisson linéaire

II.7.2 Equation magnétostatique

Elle traduit le comportement des phénomènes magnétiques indépendants du temps

($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), déduire à base des équations de Maxwell, les relations du milieu et la loi d'Ohm [6].

➤ **Formulation en termes de potentiel vecteur magnétique \vec{A}**

De l'équation (III.43) on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} / \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \tag{II.49}$$

De l'équation (III.29) on a :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad \text{II.50}$$

En combinaison (II.50) et (II.43) on aura :

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} \quad \text{II.51}$$

D'où :

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\mu} = \vec{J} \quad \text{II.52}$$

Avec :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_{ind} \quad \text{II.53}$$

Telles que :

\vec{J}_s : Densité de courant de source.

\vec{J}_{ind} : Densité de courants induits : $\vec{J}_{ind} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$

D'où :

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J}_s \quad \text{II.54}$$

II.7.3 Equation magnétodynamique

L'étude des phénomènes magnétiques et dépendants du temps fait de la magnétodynamique.

➤ Formulation en termes de potentiel vecteur magnétique \vec{A}

En combinant (III.49) et (III.15) on aura :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad \text{II.56}$$

D'où :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{II.57}$$

En combinant (III.56) et (III.37) on aura :

$$\vec{J}_s = -\sigma \vec{\nabla} V - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{II.58}$$

On pose :

$$\vec{J}_s = -\sigma \vec{\nabla} V \quad \text{II.59}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_s - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{II.60}$$

De (III.20),(III.49)et (III.59) on peut avoir :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\mu} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad \text{II.61}$$

C'est l'équation magnétodynamique en terme de \vec{A} .

Dans le cas linéaire on aura :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu \vec{J}_s \quad \text{II.62}$$

En régime harmonique on a :

$$\frac{d}{dt} = j\omega \quad \text{II.63}$$

D'où :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) j\mu\omega \vec{A} = \mu \vec{J}_s \quad \text{II.63}$$

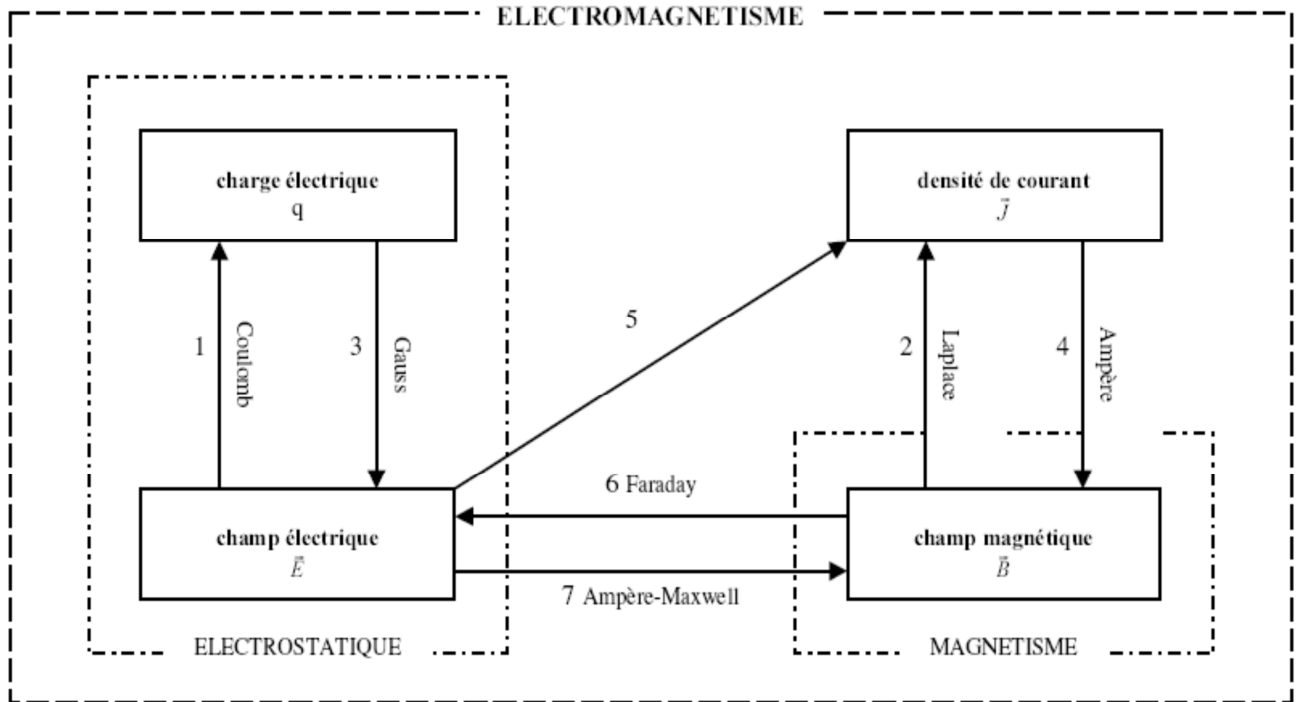


Figure II.1 : Schéma explicatif entre les différentes grandeurs magnétiques et électriques

II.8 Equation aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles ou équation différence partielle (EDP) est une équation dont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante des variables indépendantes [13].

II.8.1 Les différents types d'équations aux dérivées partielles

Les différentes équations aux dérivées partielles régissant la plupart des phénomènes physiques sont de trois types [7] :

II.8.1.a Equations de type elliptique

Ce type d'équations traite les problèmes stationnaires (indépendant du temps), en coordonnées cartésiennes, l'équation peut être représentée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{II.64}$$

$\varphi(x, y, z)$: est la fonction inconnue du phénomène

II.8.1.b Equations de type parabolique

Ce type d'équations est lié à l'étude des régimes transitoires comme l'équation de la pénétration des courants induits ou la diffusion de la chaleur en thermique, elles sont présentées en coordonnées cartésiennes sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{II.65}$$

II.8.1.c Equations de type hyperbolique [16]

Ce type d'équations traite les problèmes de propagation d'onde et il est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{II.66}$$

II.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à développer les équations de MAXWELL et les différents phénomènes magnétiques qui vont nous permettre la modélisation de la machine à étudier.

III.1 Introduction

D'une façon générale on peut classer les méthodes de résolution en trois : les modèles analytiques, les modèles hybrides et les modèles numérique.

III.1 Les modèle

Un modèle est toujours lie a ce que l'on veut en faire. Il permet de décrire les performances d'un dispositif. Il peut aussi représenter une partie plus ou moins importante de performances. Un modèle d'un système est souvent composé d'un assemblage de modèles provenant des éléments de système. D'un autre point de vu, un modèle peut aussi représenter un phénomène physique a simuler, et des modèles de plusieurs phénomènes physiques peuvent être assembles afin d'aboutir a un modèle multi-physique [3].

III.1.1 Modèle analytique

Les premiers travaux sont issus des méthodes analytiques basées sur les modèles à une dimension. Dans ces modèles, la charge est supposée axisymétrique et longue et les grandeurs physiques sont exprimées uniquement en fonction de r .

Ces méthodes ont l'avantage de donner un aperçu de la variation radiale des champs dans les zones particulières de la charge. Elles sont par contre incapables de déterminer précisément et dans tout le domaine la variation de toutes les grandeurs physiques. Donc on fait appel à des méthodes de résolution numérique [15].

III.1.2 Modèle intermédiaire

Les modèles analytiques et numériques peuvent être mixés pour former un modèle hybride. Ce type de modèle a des performances intermédiaires en termes du temps de calcul et de précision. Il existe plusieurs types de modèle hybride, par exemple : les modèles thermiques nodaux, les réseaux de Kirchhoff, etc. ils sont également très populaires et permettent de coupler de nombreux phénomènes physiques [3].

III.1.3 Modèle numérique

Tous les modèles obtenus sont à équations aux dérivées partielles dont la résolution analytique n'est pas souvent évidente, aussi pour s'affranchir de cette difficulté des méthodes numériques ont été développées [16].

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères et pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes, il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système [17].

Il arrive aussi d'associer une solution analytique à une méthode numérique pour réduire le temps de calcul et augmenter la précision des résultats. En effet, une solution analytique est plus précise qu'une solution numérique parce que cette dernière est une approximation de la solution réelle [16]

Les méthodes numérique passent toujours par des discrétisation des problèmes analytiques en des problèmes numérique et qu'il existe une infinité des méthodes de discrétisation d'une équation. Nous ne pouvons jamais les énumérer mais les plus couramment utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont:[14]

- La méthode des différences finis,
- La méthode des volumes finis,
- La méthode des éléments finis,

III.I.3.1 Méthode des différences finies

La méthode de différences finis a été rendue très populaire par l'arrivée de l'ordinateur et il consiste à discrétiser le problème posé et à le résoudre au calculateur numérique (ceci a été réalisé vers 1949).

Cette méthode est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences où chaque dérivé est approché par une différence de valeurs de l'inconnu aux nœuds du domaine de résolution. Soit le réseau carré suivant :

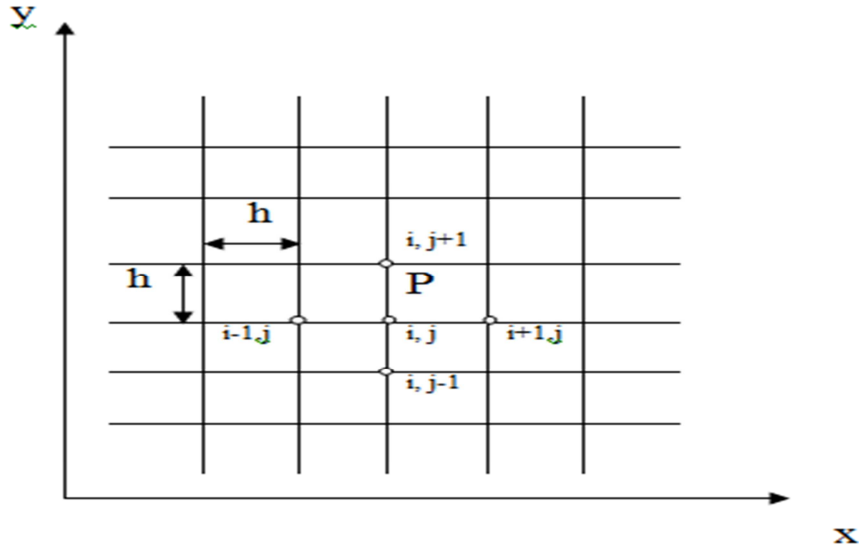


Figure III .1 : Maillage type différences finis

Si on applique un développement limite en série de TAYLOR de la fonction A à déterminer en chaque nœuds du maillage, l'approximation des dérivées (i, j) est : ainsi le Laplacien discrétisé sera alors :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{A_{i+1,j+1} - A_{i-1,j}}{2.h} \quad \text{(III.1)}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2.h} \quad \text{(III.2)}$$

Pour les dérivées d'ordre 2:

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j} - 2.A_{i,j}}{2.h} \quad \text{(III.3)}$$

La forme de cette dernière formule aux différents nœuds du domaine, aboutit au système matriciel suivant :

$$[M][A] = [F] \quad \text{(III.7)}$$

Avec :

[M] : Matrice contenant les données du problème.

[A] : Vecteur des inconnues.

[F] : Terme source.

Dans les cas des dispositifs à géométries complexes, Cette méthode s'adapte difficilement, car elle présente des inconvénients relatifs à la définition des valeurs de l'inconnue sur la frontière du domaine d'étude [18].

III.1.3.2 Méthode des volumes finis (MVF)

La MVF se déduit à partir de la MDF. Le domaine d'étude est subdivisé en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud du maillage (celui des différences finies).

La forme intégrale de l'EDP est discrétisée dans le domaine d'étude et intégrée sur chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire,

La fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle) entre deux nœuds consécutifs.

Grâce à un libre choix de la fonction de liaison entre nœuds consécutifs, la procédure conduite à une solution plus précise que celle fournie par la MDF [19].

III.1.3.3 Méthode des éléments finis [10]

La méthode des éléments finis consiste à subdiviser le volume ou la surface constituant le domaine de résolution en éléments finis interconnectés. D'habitude ce sont des triangles ou des quadrilatères pour les problèmes 2D et des tétraèdres ou des hexaèdres pour les problèmes 3D. Ensuite, le vecteur potentiel magnétique sur chaque sommet ou nœud d'un élément est calculé.

Les méthodes des éléments finis est basée sur une formulation intégral, qui remplace l'équation différentielle aux dérivées partielles qui modélise le dispositif et les conditions aux limites requises par le phénomène. Parmi les formulations intégrales utilisées, on cite l'approche projective appelée aussi la méthode des résidus pondérés et la formulation vibrationnelle qui consiste à construire un fonctionnel représentant l'état énergétique du système.

Quel que soit la méthode utilisée, le résultat est toujours une discrétisation de l'équation différentielle aux dérivées partielles modélisant initialement le dispositif étudié qui permet, après résolution, d'obtenir une approximation de la solution exacte dont la précision dépend du nombre d'éléments utilisées pour mailler le domaine de résolution.

III.2 Présentation de la méthode des éléments finis 2D

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques les plus utilisées actuellement pour résoudre d'une manière efficace les équations différentielles aux dérivées partielles des problèmes physiques.

La grande souplesse d'adaptation de cette méthode à modéliser des phénomènes stationnaires ou non stationnaires, linéaire ou non linéaire, dans des géométries complexes, a permis son utilisation dans la quasi-totalité des problèmes de champs aux dérivées partielles.

Elle s'applique à des domaines très variés de la physique de façon générale et à l'électromagnétisme en particulier. Le moteur linéaire englobe des phénomènes électriques et magnétiques couplés, Par la présence des courants induits. En plus de ce couplage, la géométrie de la machine comprend une zone dentaire anisotrope et composée d'une distribution spatio-temporelle de courants et certains matériaux qui présentent des caractéristiques non linéaires. En tous cas, la méthode des éléments finis est tous a fait adapté pour modéliser et tenir compte de ces phénomènes interdépendants non linéaires [13].

III.2.1 Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

Le principe de la méthode des éléments finis est basée sur la substitution à la forme différentielle que représentent les équations aux dérivées partielles et aux conditions aux limites associées d'une formulation intégrale du phénomène à étudier.[14]

Cette formulation intégrale peut être de deux types :

- formulation projective (résidus pondérés)
- formulation variationnelle.

III.2.1.1. formulation projective (résidus pondérés)

La méthode des résidus pondérés, appelée aussi méthode projective consiste à choisir des fonctions de projection Φ_i de façon à minimiser l'intégrale du résidu dans l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} R\phi_i d\Omega = 0 \quad \text{III-8}$$

$$R = L(A) - F$$

Avec :

R: représente le résidu de l'approximation.

L(A): operateur différentiel.

F : fonction définie sur le domaine d'étude Ω .

A : l'inconnu du problème.

Φ_i : fonction de projection.

Les valeurs de A permettent d'annuler l'intégrale représentant la solution du système algébrique obtenu.

Le choix des fonctions de projection permet de définir plusieurs méthodes, parmi celle-ci, on cite les méthodes suivantes :

- Méthode de collection par points.
- Méthode des moindres carrés.
- Méthode de GALERKINE

La méthode de collocation par points utilise les fonctions de DIRAC comme fonction de pondération (projection). [20]

La méthode des moindres carrés utilise la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites. [20]

Dans ce qui suit, on s'intéressera particulièrement à la méthode de projection de GALERKINE, qui est la plus utilisée en électrotechnique, puisqu'elle conduit à un système matriciel symétrique.

III 2.1.2 Formulation variationnelle

Cette formulation nécessite la connaissance au préalable de la fonction d'énergie du système à étudier.

Cette fonctionnelle est déterminée à partir du principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale. [20]

Elle est définie par

$$F(A) = \int_{\Omega} L.d\Omega \quad \text{III.10}$$

Avec

Ω : domaine d'étude.

L: fonction de LAGRANGE déduite de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie du potentiel du système.

Cas d'un problème électromagnétique

Dans ce cas la fonction L est donnée par l'expression :

$$L = \int_0^B vBdB - JA \quad \text{III.11}$$

Avec :

L:fonction de LAGRANGE.

A:Potentiel vecteur magnétique. [T.m]

J:densité de courant. [A/m²]

v:Reluctivité magnétique. [H/m]⁻¹

B:induction magnétique. [T]

L'expression de la fonctionnelle de l'énergie est donnée par la fonction suivante :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\int_0^B vBdB - JA \right] d\Omega \quad \text{III.12}$$

La résolution du problème variationnelle défini par la fonctionnelle d'énergie F(A) revient à minimiser cette fonctionnelle, la minimisation est effectuée en utilisant le principe de RAYLEIGH-RITZ.[12]

Qui s'énonce comme suite :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad \text{III.13}$$

Et $i= 1, 2,3,\dots\dots\dots n$

Ou :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots\dots\dots \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \quad \text{III.14}$$

Avec :

n : nombre de nœuds du domaine d'étude.

A_i :est l'inconnu aux nœuds i du domaine.

III.2.2 Discrétisation du domaine d'étude

L'approche de base de la méthode des éléments finis est de subdiviser le domaine d'étude en nombre finis de sous domaines appelés éléments [2]. L'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément des fonctions d'interpolation. La fonction d'interpolation est aussi définie en fonction de la géométrie de l'élément qu'on choisit préalablement et coïncide avec les nœuds de cet élément relatifs aux valeurs de l'inconnue. On parle alors d'interpolation nodale [7].

III.2.2.1 Eléments de références

Le maillage consiste a discrétiser le domaine de l'objet analysé, qui peut être, deux ou trois démentions, en un ensemble d'éléments finis de forme simple. Ces éléments peuvent être des segments, des triangles, des quadrilatères, des parallélépipèdes, des prismes....etc, selon le domaine a discrétiser [8].

III.2.2.1.1 Elément a une dimension 1D

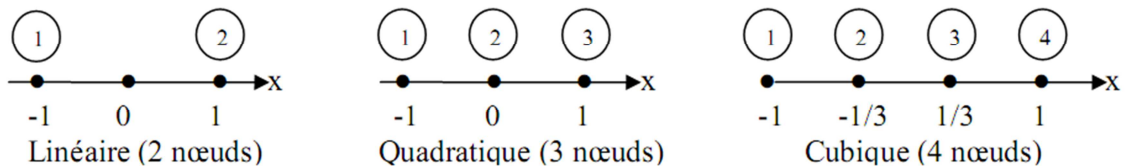


Figure III.2 : Différents éléments 1D

III.2.2.1.2 Elément à deux dimensions 2D

Eléments triangulaires

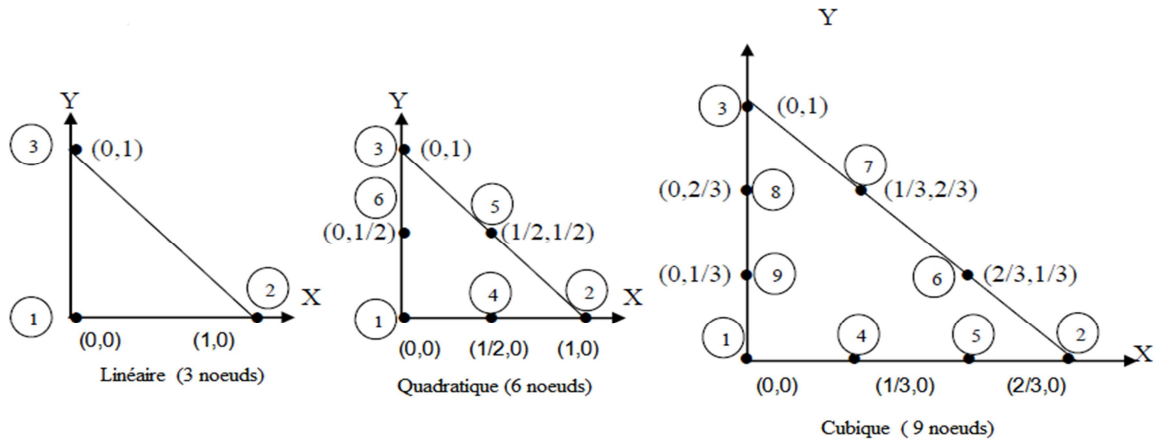


Figure III.3 : Différents éléments 2D triangulaires

Éléments carrés

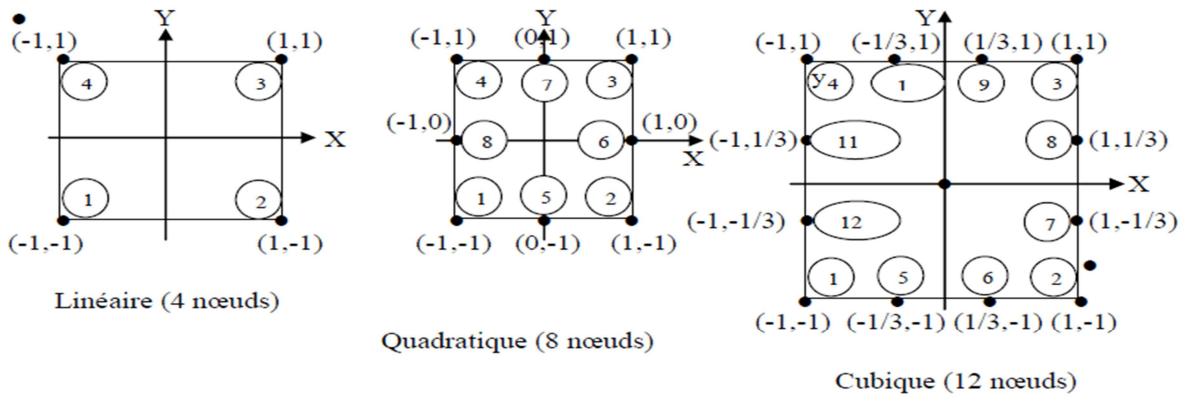


Figure III.4 : Différents éléments 2D carrés

III.2.2.1.3 Éléments a trois dimensions 3D

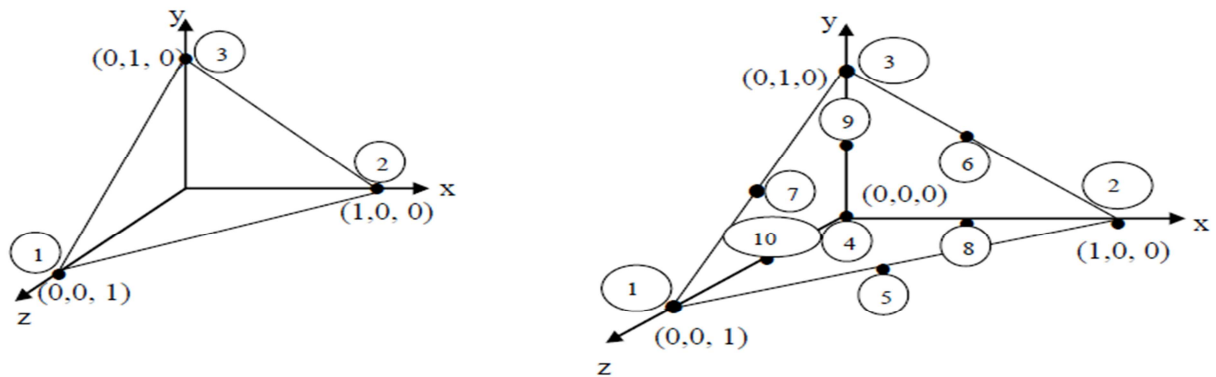


Figure III.5 : Différents éléments 3D

III.2.2.2.3 Fonction d'approximation sur un élément

La construction d'une fonction approchée $U^e(x)$, avec (e) comme indice relatif à l'élément étudié, différente sur chaque élément par la méthode d'approximation nodale.

Donc la fonction d'approximation aura la forme suivant :

$$U(x) = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \Phi \cdot U \quad \text{III.17}$$

Avec :

$U(x)$: c'est la fonction d'approximation qui d'identifie à la fonction exacte.

$\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n$: les fonctions de forme de l'élément.

U_1, U_2, \dots, U_n : les variables associées aux nœuds du domaine.

VI.3 Méthode de Galerkin

Cette méthode consiste à choisir des fonctions de pondérations identiques aux fonctions de forme. On utilise cette méthode dans des problèmes magnéto-statique et magnéto-dynamique avec l'existence d'une source du courant, formulés en terme de potentiel vecteur \vec{A} .

III.3.1. Modèle magnéto-statique 2D

➤ Cas cartésien

On a l'équation magnéto-statique suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{J}_s$$

D'Ou :

III.18

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] = -J_{sz} \quad \text{III.19}$$

Avec :

$$\nu = \frac{1}{\mu} : \text{Réductivité magnétique du milieu [H/m].}$$

\vec{A} : Potentiel vecteur magnétique [T.m].

\vec{J}_{sz} : Vecteur de densité source [A/m^2].

En utilisant la méthode de Galerkin sur l'équation VI.19, on aura :

$$\int R_i \psi_i d\Omega = 0 \quad \text{III.20}$$

Ou :

$$R_i = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] + J_{sz} \quad \text{III.21}$$

On aura :

$$\iint_{\Omega} \psi_i \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] dx dy = \iint_{\Omega} \psi_i J_{sz} dx dy \quad \text{III.22}$$

En appliquant le théorème de Green nous obtenons :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \psi_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right\} dx dy &= C \\ C &= -\iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy + \int \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \psi_i \right) d\Gamma \end{aligned} \quad \text{III.23}$$

Avec :

$$\nu = \frac{1}{\mu} : \text{Réductivité magnétique du milieu [H/m].}$$

\vec{A} : Potentiel vecteur magnétique [T.m].

\vec{J}_{sz} : Vecteur de densité source [A/m^2].

En utilisant la méthode de Galerkin sur l'équation VI.19, on aura :

Avec :

ψ_i : Fonction de forme.

Γ : La frontière du domaine Ω .

En introduisant VI.23 dans VI.22 on aura :

$$-\iint_V \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy + \int \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \psi_i \right) d\Gamma = -\iint_{\Omega} J_{sz} \psi_i dx dy \quad \text{III.24}$$

$$\Rightarrow \iint_V \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy - \int \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \psi_i \right) d\Gamma = \iint_{\Omega} J_{sz} \psi_i dx dy \quad \text{III.25}$$

Lorsque le problème présente une condition aux limite de type Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière sera nul.

$$\int \frac{\partial A_z}{\partial n} \phi_i d\Gamma = 0$$

Avec :

$$\frac{\partial A_z}{\partial n} = 0$$

D'où l'équation VI .25 devient:

$$\iint_V \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} J_{sz} \psi_i dx dy \quad \text{III.26}$$

En écriture condensée de VI.26, on aura :

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} \psi_i \cdot \vec{\nabla} A_z dx dy = \iint_{\Omega} \mu J_{sz} \psi_i dx dy \quad \text{III.27}$$

Avec :

$$\nu = \frac{1}{\mu}$$

Sachant que :

$$A_z(x, y) = \Phi A_z = A_z^T \Phi^T$$

Donc

$$\overline{\nabla A_z} = A_z^T \overline{\nabla \phi^T}$$

Donc l'équation (III -25) devient :

On aura :

$$A_z^T \iint_{\Omega} \nu \overline{\nabla \phi^T} \cdot \overline{\nabla \psi_i} \, dx dy = \iint_{\Omega} J_{S_z} \psi_i \, dx dy \quad \text{III.28}$$

La méthode de Galerkin $\implies \psi_i = \phi_i$

Et on pose : $\Phi_i = \Phi^T$

Donc : $\psi_i = \phi_j = \phi$

Avec :

Φ : fonction de forme

ψ : fonction de projection

Donc l'équation VI.28 devient :

$$[M][A_z^T] = [K] \quad \text{III.29}$$

Avec :

$$M_{i,j} = \iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla \phi_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \phi_j} \, dx dy$$

$$K_j = \iint_{\Omega} J_{S_z} \phi_j \, dx dy$$

$[A_z^T] = [A_1, A_2, \dots]^T$. Vecteur des inconnues du domaine d'étude.

Pour la résolution de ce système, on utilise la méthode de Gauss-Cholesky quand μ dépend du champ magnétique.

➤ *Cas axisymétrique*

L'équation magnétostatique 2D s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial z} \right) = -J_{s\varphi} \quad \text{III.30}$$

En considérant $A = rA_\varphi$, l'équation VI.30 devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = -J_{s\varphi} \quad \text{III.31}$$

La formulation intégrale de l'équation VI-31 donne :

$$\iint_{\Omega} \left[\psi_i \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] dr.dz = - \iint_{\Omega} \psi_i . J_{s\varphi} . dr.dz \quad \text{III.32}$$

Appliquant le théorème de Green au premier terme de l'équation VI.32, on obtient :

$$\iint_{\Omega} \psi_i \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) dr.dz = - \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot \overrightarrow{\nabla \psi_i} drdz + \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \psi_i d\Gamma \quad \text{III.33}$$

On introduit IV.32 dans IV-33 on aura :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \psi_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A} . dr.dz - \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \psi_i . d\Gamma = \iint_{\Omega} \psi_i . J_{s\varphi} . dr.dz \quad \text{III.34}$$

Dans le cas de condition aux limites types Dirichlet ou Neumann homogènes qui annule le terme sur la frontière.

On aura :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \nabla \vec{\psi}_i \cdot \nabla \vec{A} \cdot dr \cdot dz = \iint_{\Omega} \psi_i \cdot J_{s\varphi} \cdot dr \cdot dz \quad \text{III.35}$$

Si en adoptant les mêmes transformations que dans VI.35, on obtient :

$$A^T \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \nabla \vec{\phi}_i \cdot \nabla \vec{\phi}_j \cdot dr \cdot dz = \iint_{\Omega} \phi_i \cdot J_{s\varphi} \cdot dr \cdot dz \quad \text{III.36}$$

Donc finalement VI.36 s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[M][A^T] = [K] \quad \text{III.37}$$

Avec :

$$M_{i,j} = \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \nabla \vec{\phi}_i \cdot \nabla \vec{\phi}_j \cdot dr \cdot dz.$$

$$K_j = \iint_{\Omega} \phi_j \cdot J_{s\varphi} \cdot dr \cdot dz .$$

$$[A] = [A_1, A_{21}, \dots, A_n]^T$$

III.3.2. Modèle magnétodynamique

L'équation obtenue à partir des équations de Maxwell permet l'interprétation des problèmes magnétodynamiques avec le terme source :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad \text{III.38}$$

En tenant compte de la condition de la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$ qui assure l'unicité de la solution, la nature des caractéristiques magnétiques et électriques permettent de définir deux types de modèle magnétodynamique. [20]

- Modèle linéaire.

- Modèle non linéaire.

III.3.2.1 Modèle linéaire

Si la réductivité magnétique ν est indépendante du champ \vec{H} , et que la conductivité électrique σ ne dépend pas de la température (c'est qu'une approximation en réalité), le modèle ainsi défini est linéaire, l'équation magnétodynamique VI.38 devient :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu \cdot \vec{J}_s \quad \text{III -39}$$

➤ Cas cartésien

L'équation magnétodynamique dans le cas comportant une source est donnée sous l'écriture suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] - j\omega\sigma A_z = -J_{sz} \quad \text{III.40}$$

La formulation intégrale de VI.39 est sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - j\omega\sigma A_z \right) \psi_i dx dy = \iint_{\Omega} J_{sz} \psi_i dx dy \quad \text{III.41}$$

En appliquant le théorème de Green, qui nous permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \psi_i dx dy = - \iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla A_z} \cdot \overrightarrow{\nabla \psi_i} dx dy + \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \psi_i d\Gamma \quad \text{III.42}$$

En remplaçant III.41 dans III.40 on aura :

$$\iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla A_z} \cdot \overrightarrow{\nabla \psi_i} dx dy - \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \psi_i d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \sigma A_z \psi_i dx dy = - \iint_{\Omega} J_{sz} \psi_i dx dy \quad \text{III.43}$$

Dans le cas des conditions aux limites de types Dirichlet ou Neumann homogènes, le terme sur la frontière est nul.

On aura : $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$

Donc l'équation VI.42 devient :

$$\iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla A_z} \overrightarrow{\nabla \psi_i} dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma A_z \psi_i dx dy = - \iint_{\Omega} J_{sz} \psi_i dx dy \quad \text{III.44}$$

Avec la même transformation que VI.35 cette équation devient :

$$A_z^T \iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla \phi_i} \overrightarrow{\nabla \phi_j} dx dy + j\omega A_z^T \iint_{\Omega} \sigma \phi_i \phi_j dx dy = - \iint_{\Omega} J_{sz} \phi_j dx dy \quad \text{III.45}$$

Sous la forme matricielle elle devient:

$$\left[A_z^T \right] [M] + j\omega \left[A_z^T \right] [L] = [N] \quad \text{III.46}$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla \phi_i} \overrightarrow{\nabla \phi_j} dx dy$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \phi_i \phi_j dx dy.$$

$$N_{ij} = \iint_{\Omega} J_z \phi_j dx dy.$$

$$A = A_r + j A_i$$

Ou :

A_r : est la partie réelle de A.

A_i : est la partie imaginaire.

➤ **Cas axisymétrique**

Dans ce cas la formulation intégrale est donnée sous forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \frac{\nu}{r} \psi_i dr dz - j\omega \iint_{\Omega} \sigma A \psi_i \frac{dr \cdot dz}{r} = - \iint_{\Omega} \psi_i \cdot J_{s\phi} dr \cdot dz \quad \text{III.47}$$

Avec : $A = r A_{\phi}$

L'application du théorème de Green donne :

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{\nabla A} \cdot \overrightarrow{\nabla \psi_i} \frac{V}{r} dr dz - \int_{\Gamma} \frac{V}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \psi_i d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \sigma A \psi_i \frac{dr \cdot dz}{r} = \iint_{\Omega} \psi_i \cdot J_{s\phi} dr \cdot dz \quad \text{III.48}$$

Dans le cas des conditions aux limites de types Dirichlet ou Neumann homogènes, le terme sur la frontière est nul.

On aura : $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$

Donc l'équation III.47 devient :

$$A^T \iint_{\Omega} \overrightarrow{\nabla \phi_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \phi_j} \frac{V}{r} dr dz + j\omega A^T \iint_{\Omega} \sigma \phi_i \phi_j \frac{dr \cdot dz}{r} = \iint_{\Omega} \psi_i \cdot J_{s\phi} dr \cdot dz \quad \text{III.49}$$

L'écriture sous forme matricielle est la suivante :

$$\left[A^T \right] \left[M \right] + j\omega \left[A^T \right] \left[L \right] = \left[N \right] \quad \text{III.50}$$

Avec :

$$M_{i,j} = \iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla \phi_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \phi_j} dx dy$$

$$L_{i,j} = \iint_{\Omega} \sigma \phi_i \phi_j \frac{dr \cdot dz}{r}$$

$$N_j = \iint_{\Omega} J_{s\phi} \phi_j dr \cdot dz$$

$$A = A_r + j A_i$$

Ou :

A_r : est la partie réelle de A.

A_i : est la partie imaginaire.

III.3.2.2 Modèles non linéaires

Dans le cas où la réductivité magnétique ν dépend de l'induction magnétique \vec{B} , et la conductivité σ dépend de la température alors l'équation magnétodynamique III.38 est non linéaire et l'équation à résoudre sera :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad \text{III.51}$$

Pour résoudre numériquement cette équation non linéaire, il est nécessaire d'utiliser une discrétisation temporelle par la méthode d'Euler implicite. [6]

III.4 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis

a. Les avantages

- Adaptation aux géométries complexes.
- Prise en compte des non linéarités.
- Temps de calcul relativement avantageux.

b. Les inconvénients

- La non-prise en considération des domaines infinis.
Impuissante en présence de singularités dans le domaine d'étude

III.5 Force magnétique

C'est la force électromagnétique et le travail mécanique que cette force exerce sur le dispositif, en termes de déplacement ou de déformation.

Pour calculer la force magnétique on peut utiliser les quatre méthodes suivantes :

- La méthode de la force de Lorentz.
- La méthode du tenseur de Maxwell.
- La méthode des travaux virtuels.
- La méthode de la variation de la Co-énergie ou de l'énergie magnétique.

III.5.1 La force déduite à partir de la méthode de l'énergie magnétique totale

Elle est parmi les méthodes les plus utilisées pour le calcul de la force, basée sur la variation de l'énergie provoquée par un déplacement, en maintenant le courant constant. Elle est déterminée par la formule suivante:

$$F_m = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^B H dB \right) d\Omega \right] \quad \text{III.52}$$

Avec :

x: la variation spatiale de la coordonnée.

III.5.2 La force déduite à partir de la méthode de la Co-énergie

Pour obtenir la force magnétique par cette méthode, on calcul la dérivée de la Co-énergie magnétique par rapport au déplacement, en maintenant le flux constant.

Elle est déterminée par l'expression suivante :

$$F_{co} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^H B dH \right) d\Omega \right] \quad \text{III.53}$$

III.5.3 La force déduite à partir de la méthode des travaux virtuels

Le principe de calcul de la force dans cette méthode consiste à l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Un domaine Ω_d déformé est subdivisé en sous-domaines Ω_e , sur lesquels toutes les intégrales effectués par rapport à un système de coordonnées locales (u,v,w). [20]

Elle est déterminée par l'expression suivante :

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_v \left(\int_0^H B dH \right) dv \right] \quad \text{III.54}$$

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{\Omega_e} \left(\int_0^H B dH \right) d\Omega_e \right] \quad \text{III.55}$$

x: représente la coordonnée liée au déplacement.

Cette méthode présente un avantage, elle s'adapte à la MEF et fournit une bonne précision. [36]

III.5.4 La force déduite à partir de la méthode du tenseur de Maxwell

Dans des milieux non parcourus par des courants, les forces et les couples pouvant être calculés par l'application de cette méthode, alors que la méthode des travaux virtuels est basée sur la variation de l'énergie, le tenseur de Maxwell définit les forces directement en terme de champ magnétique.

Elle est déterminée par l'expression suivante :

$$F = \oiint_s \left[(\vec{B}_n \vec{H}_t) \vec{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\mu_0} B_n^2 - \mu_0 H_t^2 \right) \vec{n} \right] ds \quad \text{III.56}$$

Avec : \vec{B}_n : La composante normale de l'induction magnétique.

\vec{H}_t : La composante tangentielle du champ magnétique.

\vec{n} : La normale extérieure à la surface d'intégration.

\vec{t} : Le vecteur unitaire tangent à la surface d'intégration.

S: La surface d'intégration contenant le milieu où la force doit être calculé.

III.5.5 La force déduite à partir de la méthode de LORENTZ

La force électromagnétique de LORENTZ, résulte de la coexistence d'une induction magnétique résultante d'une source d'excitation et d'une densité de courant induite dans un milieu conducteur.

L'expression de cette force est la suivante :

$$F = \iiint_v (\vec{J} \wedge \vec{B}) dv \quad \text{III.57}$$

$(\vec{J} \wedge \vec{B})$: Densité de force magnétique, qui est souvent utilisée à la place de la force magnétique.

La force de Lorentz dans le cas axisymétrique 2D :

$$F_r = 2\pi \iiint_s J_\varphi B_z r \cdot dr dz \quad \text{III.58}$$

$$F_z = 2\pi \iiint_s J_\varphi B_r r \cdot dr dz \quad \text{III.59}$$

Pour $A = (0, A_\varphi, 0)$

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \quad \text{III.60}$$

$$J_\varphi = -\frac{\sigma}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial t} \quad \text{III.61}$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma A_\varphi)}{\partial r} \quad \text{III.62}$$

La force de Lorentz dans le cas cartésienne 2D :

$$F_x = \iiint_s J_z B_y \cdot dx dy \quad \text{III.63}$$

$$F_y = -\iiint_s J_z B_x \cdot dx dy \quad \text{III.64}$$

Avec :

$$B_z = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad \text{III.65}$$

$$B_z = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad \text{III.66}$$

$$J_z = -\sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad \text{III.67}$$

IV.1. Introduction

Du point de vue technologique, il y a une machine électrique linéaire à chaque machine tournante. Elle présente des avantages par sa simplicité, et avec le développement en parallèle de la technologie des aimants permanents, la machine linéaire à aimant permanent verra son champ d'application s'accroître.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une machine synchrone à aimants permanent, ou on s'intéresse à l'étude des phénomènes électromagnétiques, en procédant à la détermination de la répartition des lignes de champ, le potentiel vecteur magnétique A ainsi que l'induction magnétique B d'une part et d'autre part à la représentation de l'évolution de la force après le déplacement [10].

La structure de dispositif étudié est représentée dans la figure suivante :

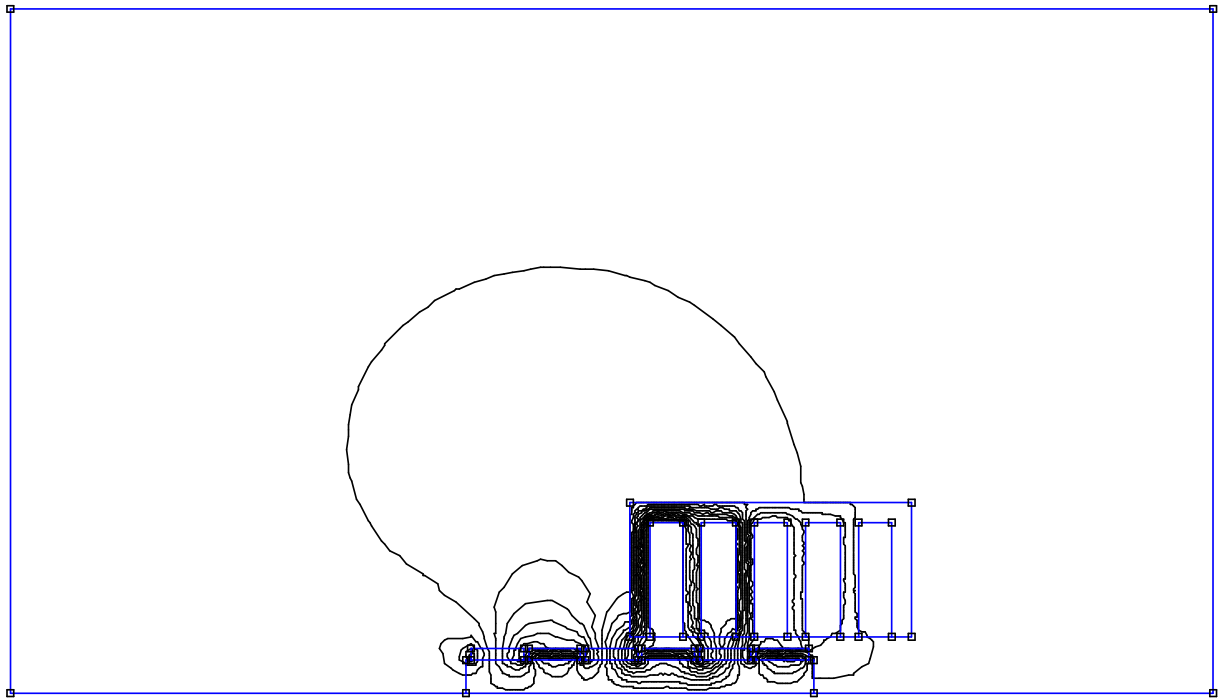


Fig1 : L'induction magnétique au niveau de l'induit et l'inducteur au début de déplacement

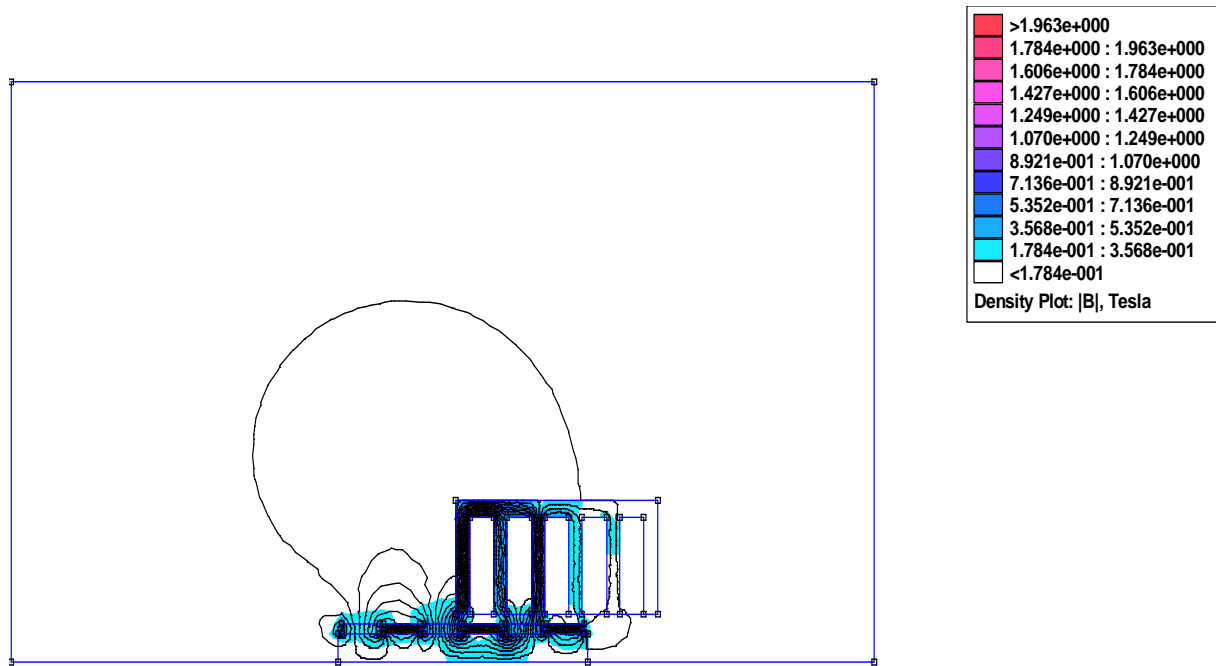


Fig 2 : Maillage de la structure

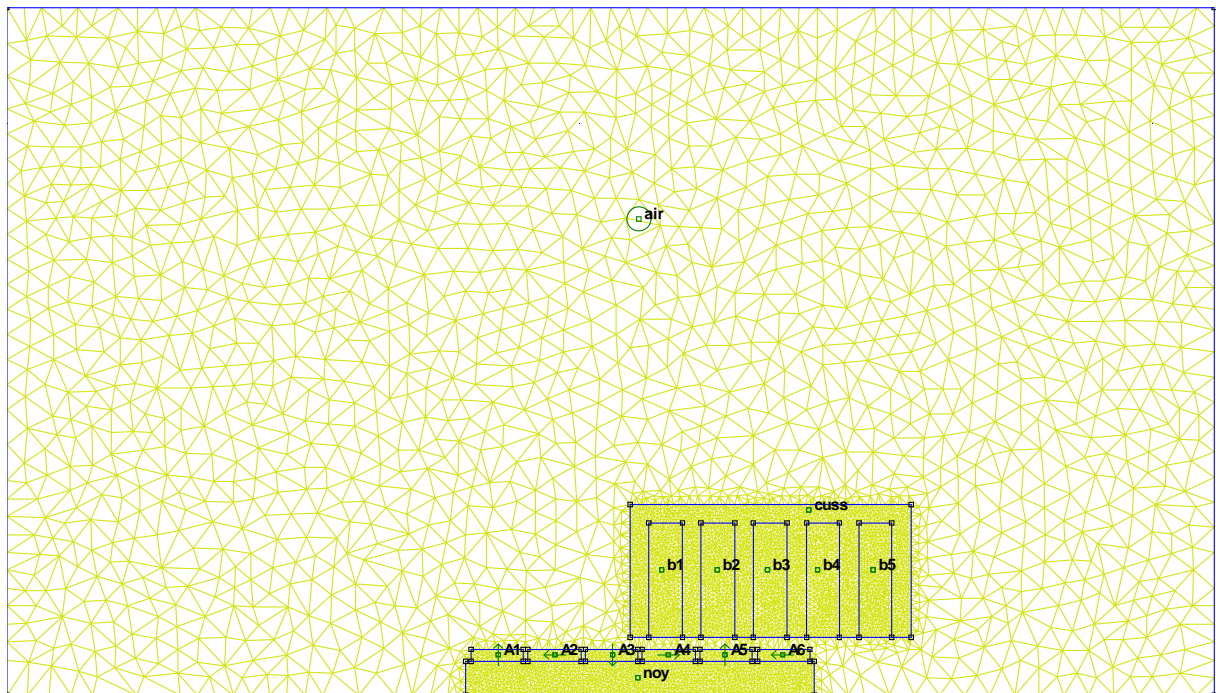


Fig3: L'induction magnétique normale au niveau de l'induit et l'inducteur

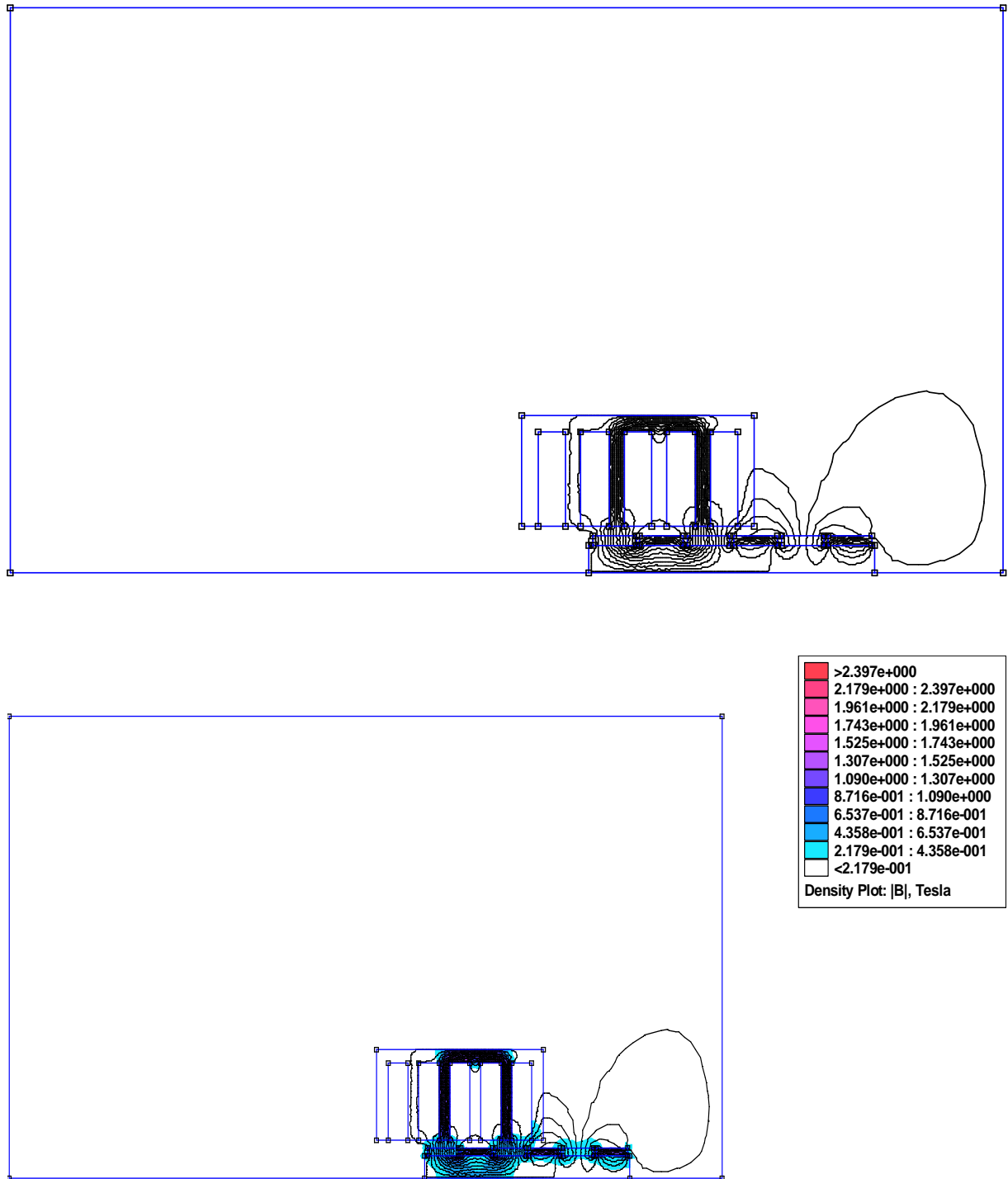


Fig 4 : L'induction magnétique au niveau de l'induit et l'inducteur a la fin de déplacement

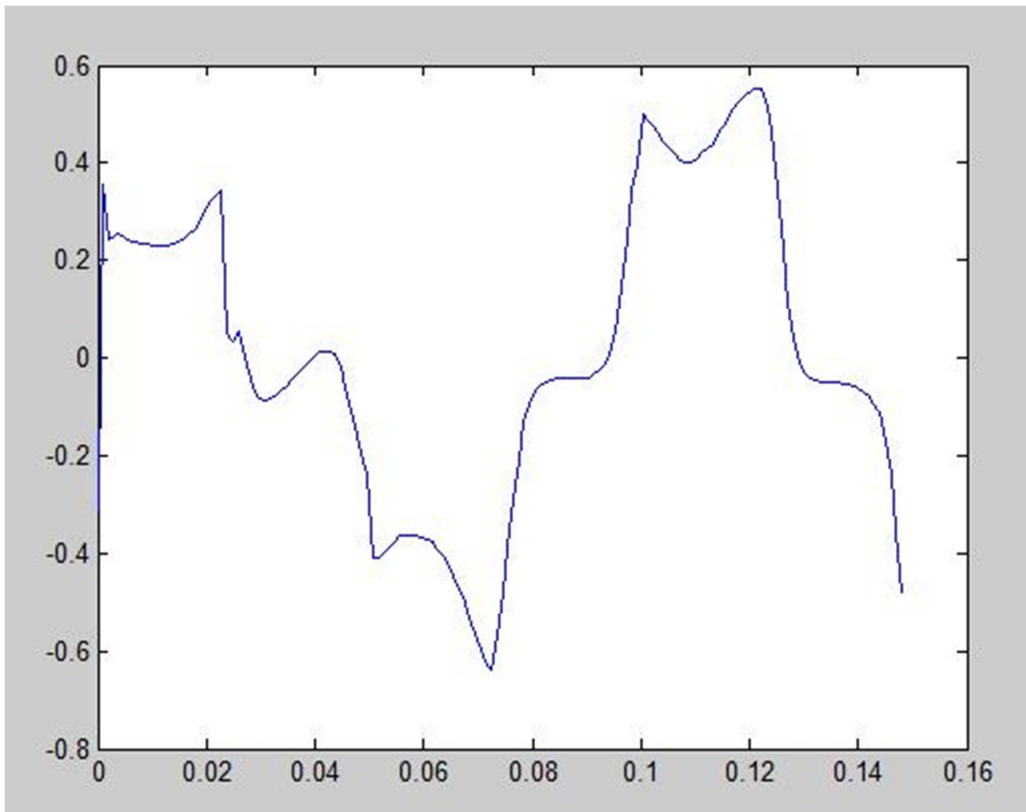


Fig 5 : L'induction magnétique B normale :

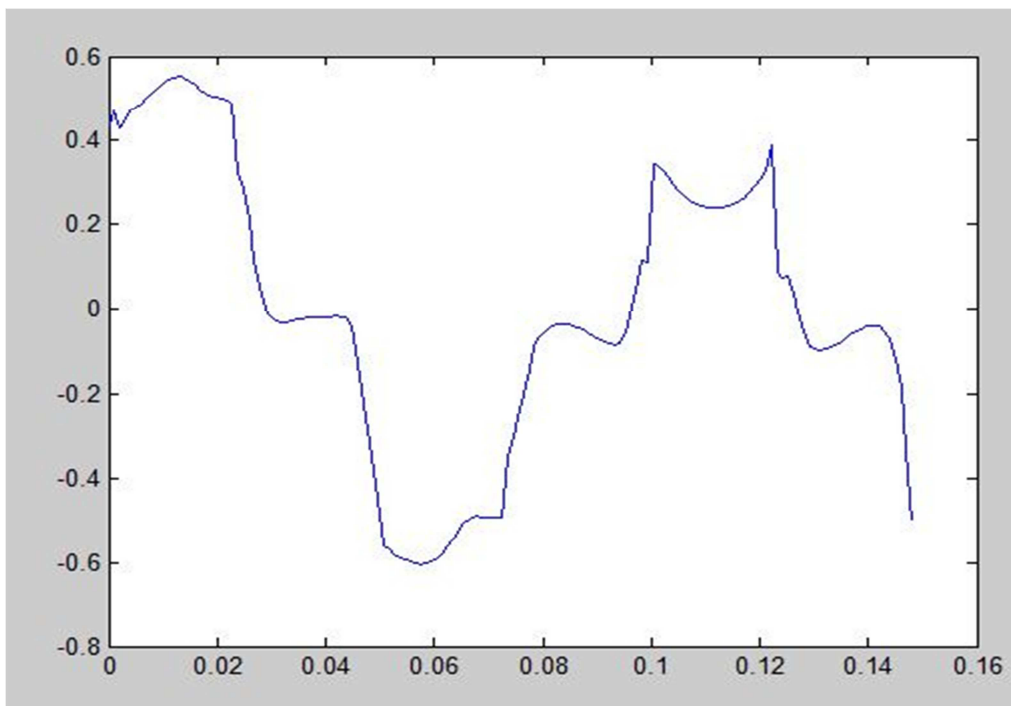


Fig 6 : L'induction magnétique B à fin de déplacement

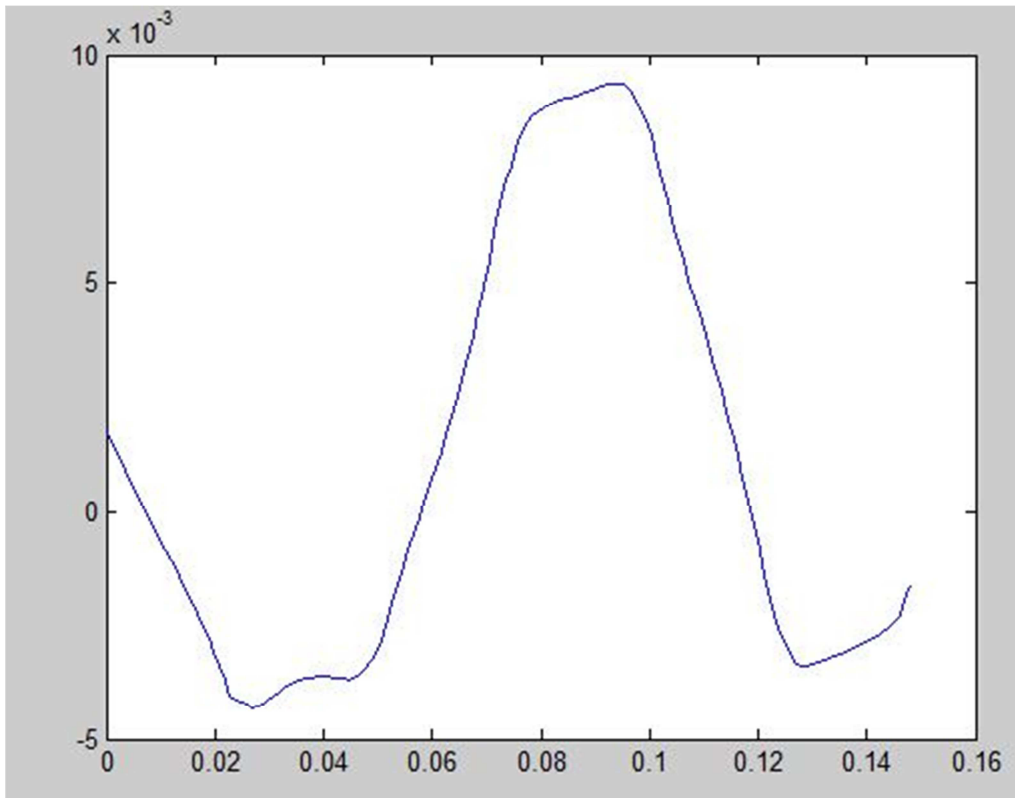


Fig 7 : *Vecteur potentiel A au début de déplacement*

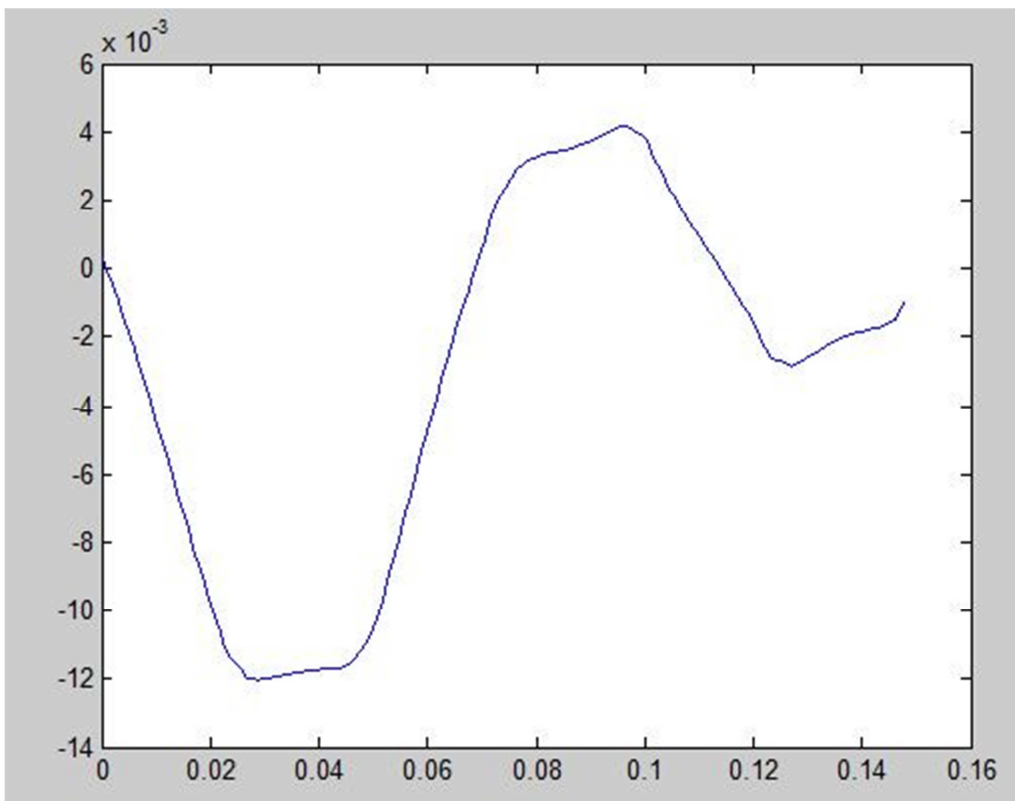


Fig87 : *Vecteur Potentielle A à fin de déplacement*

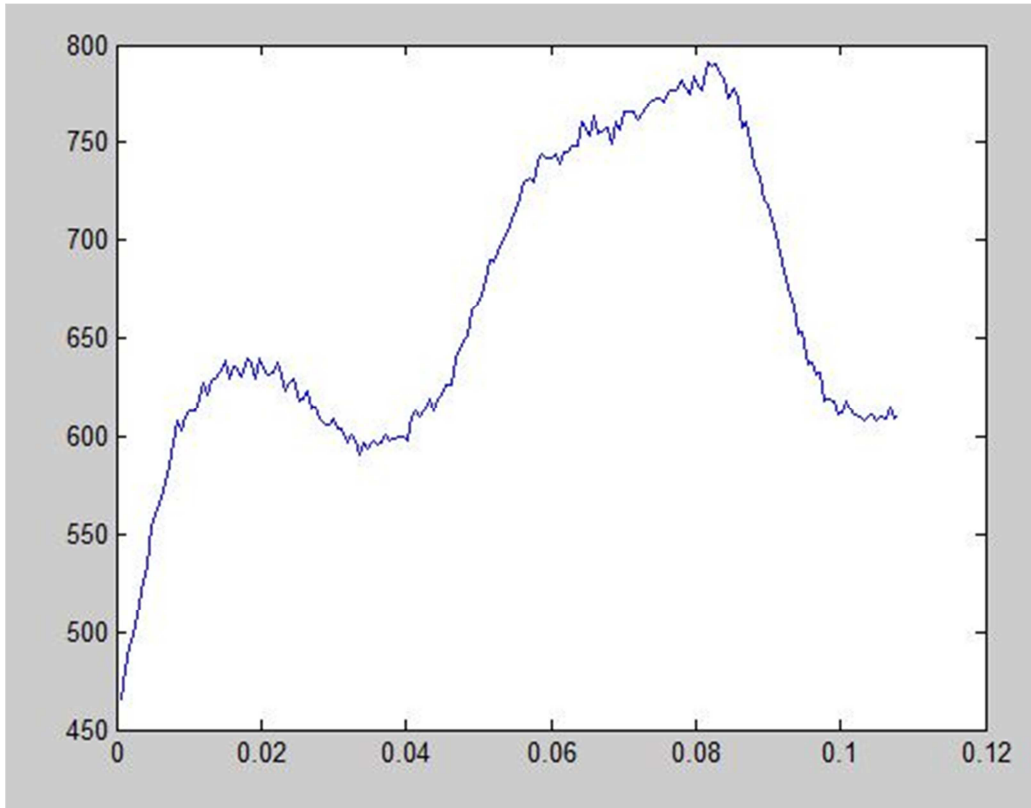


Fig 9 : Evolution de la force magnétique $F(t)$ en fonction du temps

IV.2. Interprétation des résultats obtenus

On montre que la force magnétique $F(t)$ diminue progressivement sous forme d'une courbe presque exponentielle. Cette diminution de la force magnétique F est due au champ d'induction magnétique B créé dans l'induit pour ses différentes positions. Lorsque l'induit est en face de l'inducteur (sa position initiale), il y aura un important flux magnétique (une grande induction magnétique B) dans l'induit et moins de pertes de flux magnétique (flux de fuites faible) donc une forte force magnétique F s'engendra car cette force est proportionnelle à l'induction selon la loi de Laplace ; $\vec{F} = I \cdot \vec{dl} \wedge \vec{B}$. Le fait que l'induit se déplace et prend des nouvelles positions, il y aura beaucoup de flux de fuites donc des inductions magnétiques B moins importantes dans la partie en mouvement (induit) ce qui engendre une diminution progressive de la force magnétique F .

Annexe :

- Hauteur de l'encoche : $h = 10\text{mm}$
- Largeur de l'encoche : $L = 9\text{mm}$
- Hauteur de l'inducteur : $h = 1\text{mm}$
- Largeur de l'inducteur : $L = 1\text{mm}$

- Hauteur de l'inducteur : $h= 30\text{mm}$
- Largeur de l'inducteur : $L=47\text{mm}$
- Longueur entre l'encoche et l'induit : 20mm
- Longueur entre l'induit et l'inducteur (air) : 2mm
- Hauteur de l'induit : $h=2\text{mm}$
- Largeur de l'induit : $L= 47\text{mm}$
- Densité de courant $j=0.2*1e+6$
- Perméabilité relative $\mu_r = 700$
- $M= 883310 \text{ A/m}$ $\mu_r = 1.045$
- Matériau utilisé :
- Aimant : NedFb

L'objectif visé au cours de notre travail est la modélisation par la méthode des éléments finis de structure électromagnétiques à aimants permanents.

Nous nous sommes intéressés à l'étude du champ magnétique, de l'induction ainsi que la force magnétique. Cette étude nous a conduit à procéder à la résolution des équations aux dérivées partielles décrivant les dispositifs de machine linéaire.

La programmation et les calculs ont été effectués en exploitant le logiciel Femm.

- [1] **F.Leprince-Ringuet**, « aimants permanents, matériaux et applications », Technique de L'ingénieur, traité de génie électrique Doc D2100.
- [2] **K.Fekrache, H .Mebtouche**, « modélisation par élément finis d'une machine linéaire linéaire a aimant permanent et simulation de mouvement par la technique du macroélément » .thèse d'ingénieur 2001-U .M.M.T.O.
- [3] **Guy Sturter, Eddie Smigiel**, « Modélisation et commande des moteurs triphasés » .Ellipses édition marketing 2000.Paris.
- [4] **Jean Chatelain** « Machine électrique »Georgi 1983-suisse.
- [5] **L .Ben Mouhoub, M.Belharache** « modélisation d'une machine synchrone à aimant permanent » .thèse d'ingénieur 2005-UMMTO.
- [6] **T.Wildil et G.Sybille**, « électrotechnique »,4 ème édition de Boeck,2005.
- [7] **Y.Boutoura**, « calcul d'une BDCM excitée par des aimants à aimantation parallèle », mémoire de magister, UMMTO, 2000.
- [8] **S.Nait Larbi et H.Gahlouze**, « contribution au diagnostic et à la modélisation 2D par éléments finis des phénomènes électromagnétique et thermique dans les machines synchrones à aimants permanents à flux radial », mémoire d'ingénieur 2006-UMMTO.
- [9]**M.Belkadi** « commande d'une vitesse d'une machine synchrone autopilotée », thèse d'ingénieur 2000-UMMTO.
- [10] **Yacine Sadjia et Saoula Fariza**, « étude d'une machine synchrone linéaire à aimants permanents », mémoire d'ingénieur 2006-UMMTO.
- [11] **R.Amimer, N.Belhanafi** « prise en compte de l'aimantation magnétique dans la modélisation par élément finis en régime dynamique d'une machine synchrone linéaire à aimant permanent », thèse d'ingénieur 2002- UMMTO.
- [12]**M .Bardadi Bendaha** « identification des parametres d'une machine synchrone à aimant permanent en vue d'une integration dans des simulateurs en temps réel ».thèse d'ingénieur 2015-USTO.

Résumé

Les machines synchrones sont des machines tournantes ou linéaire. Elles peuvent fonctionner soit comme génératrice ou moteur.

La transmission de l'effort directement à la charge est l'avantage des machines électriques linéaires, qui commencent de plus en plus à pénétrer les différentes applications des entraînements électriques comme le transport, les divers processus de fabrication, l'automatisation, traitements des matières, soins médicauxOn rencontre également d'autres exemples particuliers qui impliquent les systèmes cryogéniques et les systèmes cardiaques artificiels.

Mots clés : Matériaux ; aimant NdFe-B ; machine linéaire ; magnétodynamique Maxwell ; Femm ; force de Laplace ; couple électromécanique ; Force de Lorentz ; vecteur magnétique ; synchrone ; l'induit ; inducteur ; entraînement électrique ; les transformations de parck ; électrotechnique