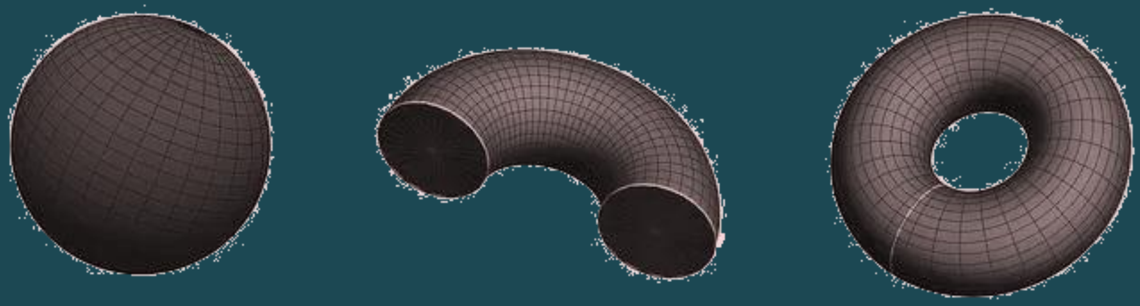
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

INTRODUCTION A LA TOPOLOGIE



M.Youcef IBAOUENE

Unité d'enseignement: Fondamentale

Table des matières

INTRODUCTION

Ce polycopie de cours est conforme au programme officiel du module **"Introduction à la Topologie"**, qui s'adresse aux étudiants de L2 mathématiques, enseigné par l'auteur pendant deux ans à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Le cours a pour objectif de donner les bases indispensables à toute formation en mathématiques. Les notions abordées dans ce document sont largement utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques modernes, pures et appliquées. Les universités intègrent désormais l'étude de la topologie dans leurs programmes de mathématiques, car cette discipline est devenue incontournable pour acquérir une solide culture mathématique.

Cinq chapitres composent ce cours. À la fin de chaque chapitre, l'étudiant trouvera des exercices d'applications dans le but de maîtriser toutes les notions principales du cours.

- Le premier chapitre est consacré aux notions fondamentales d'espace topologique et d'espace métrique. Toutes les notions induites dans ce chapitre sont indispensables pour la suite.
- Le second chapitre est consacré à la notion de compacité qui joue un rôle très important en analyse mathématique.
- Dans le troisième chapitre nous exposons la notion de la complétude des espaces métriques. Des propriétés fondamentales seront étudiées dans ce chapitre.
- Le quatrième chapitre traite la notion de connexité qui est très importante en topologie.
- Le dernier chapitre introduit quelques notions fondamentales des espaces vectoriels normés.

Pour que l'étudiant puisse facilement suivre ce cours, il faut qu'il ait une bonne maîtrise de l'analyse réelle et d'algèbre linéaire.

Ce cours a plusieurs sources d'inspiration, dont principalement [Has], [Ava96], [KF74], [Bou58] et [Sch70].

Conseil important : Un cours ne s'apprend pas nécessairement de façon linéaire. Après une première lecture, on peut commencer à faire des exercices puis revenir sur le cours pour l'approfondir puis retourner vers les exercices et ainsi de suite. Il ne faut jamais perdre de vue que faire des mathématiques c'est poser et résoudre des problèmes ([Rob05]).

CHAPITRE 1

ESPACES TOPOLOGIQUES

Les notions de limite, de convergence et de continuité sur $\mathbb{R}$ font intervenir essentiellement la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, un peu plus subtilement les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Par exemple une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réels l on sait que cela revient à écrire, formellement,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon.$$

Cette dernière est équivalente à $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$, à partir d'un certain rang et pour un ε donné, montre qu'on peut écrire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow x_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[.$$

En somme, le comportement de la suite est entièrement déterminé par les voisinages, au sens le plus intuitif de l.

À partir des propriétés de la distance usuelle de $\mathbb{R}$, on a introduit une distance sur un ensemble quelconque $\mathbb{X}$. Cette approche permet de définir des parties, dites ouverts, pour caractériser les notions sus citées sur $\mathbb{R}$ à des espaces de dimension supérieure. Cependant, il existe des ensembles pour lesquels aucune distance ne peut exprimer ces notions. Dans tels cas, en abstrayant les propriétés des voisinage de $\mathbb{R}$, on peut inférer axiomatiquement, une structure sur un sous-ensemble de parties de l'ensemble considéré. Cette démarche, axiomatique, est introduite pour l'étude des espaces topologiques.

1.1 Ensembles ouverts, ensembles fermés

Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque. On désigne par $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{X}$.

Définition 1.1.1 On appelle **topologie** sur $\mathbb{X}$ toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ vérifiant

(A1) : $\mathcal{T}$ contient $\emptyset$ et $\mathbb{X}$,

(A2) : la réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$ est encore dans $\mathcal{T}$,

(A3) : l'intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est encore dans $\mathcal{T}$.

Définition 1.1.2
1. Le couple $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, où $\mathcal{T}$ vérifie les axiomes (A1), (A2) et (A3), est appelé **espace topologique**. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés **ouverts** et les complémentaires des ouverts sont appelés **fermés**.
2. Une partie F de $\mathbb{X}$, où $\mathbb{X}$ est muni de la topologie $\mathcal{T}$, est dite fermée si $F^C = \mathbb{X} \backslash F$ est un ouvert, c'est-à-dire, $F^C \in \mathcal{T}$. On note par $\mathcal{F}$ la famille de tous les fermés. Alors
$$F \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow F^C \in \mathcal{T}.$$

En transformant par passage aux complémentaires les axiomes (A1), (A2) et (A3) des ouverts, on en déduit des propriétés pour les parties fermées.

Proposition 1.1.3 *Soit* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Alors*

(F1) $\emptyset$ *et* $\mathbb{X}$ *sont des fermés,*

(F2) *toute réunion finie des fermés est un fermé,*

(F3) *toute intersection d'une famille finie ou infinie des fermés est un fermé.*

Démonstration 1.1.4
1. Les complémentaire $\emptyset^C = \mathbb{X}$ et $\mathbb{X}^C = \emptyset$ sont ouverts. Alors $\emptyset$ et $\mathbb{X}$ sont fermés.
2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ (où $I \subseteq \mathbb{N}$) une famille quelconque des fermés. On a
$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^C = \bigcup_{i \in I} F_i^C \quad (F_i^C \textbf{ est un ouvert}).$$
Comme la réunion quelconque des ouverts est un ouvert, on déduit que $\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^C$ est un ouvert. Ce qui prouve que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé.
3. Soit $(F_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ une famille finie des fermés de $\mathbb{X}$. On a
$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^C \quad (F_i^C \textbf{ est un ouvert}).$$
Comme l'intersection finie des ouverts est un ouvert, on déduit que $(\bigcup_{i=1}^{n} F_i)^C$ est un ouvert. Donc $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé.

Exemple 1.1.5
1. Soit $\mathbb{X}$ un ensemble. Alors $\{\emptyset, \mathbb{X}\}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$, appelée **topologie grossière**. Dans cette topologie les seuls ouverts sont $\emptyset$ et $\mathbb{X}$ et comme $\emptyset^C = \mathbb{X}$ et $\mathbb{X}^C = \emptyset$, on déduit que $\emptyset$ et $\mathbb{X}$ sont aussi des fermés.
2. Soit $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{X})$ l'ensemble de parties de $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$, appelée **topologie discrète**. Pour cette topologie toute partie de $\mathbb{X}$ est à la fois ouverte et fermée.
3. Soit $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$. On a
$$\mathcal{P}(\mathbb{X}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a, b\}, \mathbb{X}\}.$$
Alors $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \mathbb{X}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \mathbb{X}\}$ et $\mathcal{T}_3 = \mathcal{P}(\mathbb{X})$ sont des topologies sur $\mathbb{X}$.
Dans la topologie $\mathcal{T}_1$ les ouverts sont $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$ et $\mathbb{X}$. Les fermés sont $\emptyset^C = \mathbb{X}$, $\{a\}^C = \{b, c\}$, $\{b\}^C = \{a, c\}$, $\{a, b\}^C = \{c\}$ et $\mathbb{X}^C = \emptyset$, *i.e.*, les fermés de la topologie $\mathcal{T}_1$ sont
$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \mathbb{X}\}.$$
Dans cet exemple on remarque que l'ensemble $\{b, c\}$ est un fermé pour la topologie $\mathcal{T}_1$ cependant, c'est un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}_2$ (*i.e.*, $\{b, c\} \in \mathcal{F}_1$ et $\{b, c\} \in \mathcal{T}_2$). On peut déduire qu'un ensemble peut être un ouvert pour une topologie et en même temps un fermé pour une autre.

4. La famille de partie de $\mathbb{R}$ qui est un sous ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ qui contient toutes les réunions d'intervalles ouverts et l'ensemble vide est une topologie sur $\mathbb{R}$. On l'appelle **topologie usuelle** sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.6 Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées.
2. Une réunion quelconque de fermés n'est pas nécessairement un fermé. En effet, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] =]-1, 1[$$
n'est pas fermé.
3. L'intersection quelconque des ouverts n'est pas toujours un ouvert. En effet, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$
n'est pas un ouvert (dans la suite on montre que le singleton $\{x\}$, dans un espace topologique séparé, est un fermé pour tout x).

Définition 1.1.7 Soit $\mathbb{X}$ un ensemble et soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur $\mathbb{X}$.

- On dit que $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont **comparables** si l'une des deux est contenue dans l'autre.
- On dit que $\mathcal{T}_1$ est **plus fine** que $\mathcal{T}_2$ ou $\mathcal{T}_2$ est **moins fine** que $\mathcal{T}_1$ si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.
- Les topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont égales si et seulement si, chacune est plus fine que l'autre.

Exemple 1.1.8 La topologie discrète est la plus fine et la topologie grossière, la moins fine de toutes les topologies.

1.2 Voisinages et base de voisinages

Définition 1.2.1 Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Soient $x \in \mathbb{X}$ et $V \subset \mathbb{X}$. On dit que V est un **voisinage** de x si V contient un ouvert $\mathcal{O}$ (*i.e.*, $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$) contenant x (c'est-à-dire, $x \in \mathcal{O} \subset V$). L'ensemble de tous les voisinages de x est noté par $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$. Plus précisément,
$$\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x) = \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{X}), \exists \mathcal{O} \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{O} \subset V\}.$$
Il est clair que $\mathbb{X} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ et $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on a $x \in V$.
2. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ est une **base de voisinage** (ou **système fondamental des voisinages**) de x si tout élément de $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ contient un élément de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire
$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)\ \exists V' \in \mathcal{V} \textbf{ tel que } V' \subset V.$$

Exemple 1.2.2 1. Dans un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, tous les ouverts qui contiennent $x \in \mathbb{X}$ sont des voisinages de x

2. Soit $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$. On a
$$\mathcal{P}(\mathbb{X}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a, b\}, \mathbb{X}\}.$$
La partie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \mathbb{X}\}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.

- Dans l'espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, l'ensemble $\{a, b\}$ est un voisinage de a et l'ensemble $\{b, c\}$ est un voisinage de c car il existe deux ouverts $\{a\}$ et $\{c\}$ tels que
$$a \in \{a\} \subset \{a, b\} \quad \textbf{et} \quad c \in \{c\} \subset \{b, c\}.$$
- Les voisinages de a sont
$$\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \mathbb{X}\}.$$
- Les voisinages de c sont
$$\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(c) = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \mathbb{X}\}.$$
- Le sous ensemble $\mathcal{V} = \{\{a\}, \mathbb{X}\}$ de $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(a)$ est une base de voisinage de a et le sous ensemble $\mathcal{V}' = \{\{c\}, \mathbb{X}\}$ de $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(c)$ est une base de voisinage de c.

La proposition qui suit donne une caractérisation d'un ouvert par les voisinages.

Proposition 1.2.3 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{A}$ est un ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire,*
$$(\mathcal{A} \in \mathcal{T}) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)).$$

Démonstration 1.2.4
- Si $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ (ouvert), on a pour tout $x \in \mathcal{A}$,
$$x \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}.$$
Donc
$$\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$
- Inversement, Si $\mathcal{A}$ est un voisinage de chacun de ses points, alors pour tout $x \in \mathcal{A}$ il existe un ouvert $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{A}$ tel que
$$x \in \mathcal{O}_x \subset \mathcal{A}.$$
Ce qui donne
$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_x \subset \mathcal{A}.$$
On trouve donc
$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_x.$$
Comme la réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, on déduit que $\mathcal{A} = \cup_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_x$ est un ouvert.

Proposition 1.2.5 *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique. L'ensemble $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ de voisinages de x possède les propriétés suivantes*

1. $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ *et* $\forall W \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ *tel que* $V \subset W$, *on a* $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$.
2. $\forall V, W \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ *on a* $V \cap W \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$.

Démonstration 1.2.6 1. Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$. Alors par définition, il existe un ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \mathcal{O} \subset V$ et comme $V \subset W$, on déduit que
$$x \in \mathcal{O} \subset W.$$
Donc
$$W \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

2. Par définition il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ tels que
$$\{x\} \subset \mathcal{O}_1 \subset V \quad \textbf{et} \quad \{x\} \subset \mathcal{O}_2 \subset W.$$
Alors
$$x \in \{x\} \subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \subset V \cap W.$$
Comme $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ est un ouvert, on déduit que
$$V \cap W \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

1.3 Intérieur, adhérence, frontière

Définition 1.3.1 Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$.

1. Un point $x \in \mathbb{X}$ est dit **intérieur** à $\mathcal{A}$ si et seulement si, $\mathcal{A}$ est un voisinage de x, c'est-à-dire, $\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$.
2. **L'intérieur** de $\mathcal{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\mathcal{A}$, *i.e.*,
$$\mathring{\mathcal{A}} = \bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}, \mathcal{O} \subset \mathcal{A}} \mathcal{O}.$$
3. **L'adhérence** $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ c'est l'intersection de tous les fermés contenant $\mathcal{A}$.
4. On dit que $\mathcal{A}$ est **dense** dans $\mathbb{X}$ si $\overline{\mathcal{A}} = \mathbb{X}$.
5. L'ensemble $\overline{\mathcal{A}} \backslash \mathring{\mathcal{A}}$ est appelé **frontière** de $\mathcal{A}$.

Proposition 1.3.2 *Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. Alors l'intérieur de $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les points intérieurs à $\mathcal{A}$ i.e.,*
$$\mathring{\mathcal{A}} = \{x \in \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)\}.$$

Démonstration 1.3.3 En utilisant la définition de voisinage, on obtient
$$\mathring{\mathcal{A}} = \bigcup_{\mathcal{O} \in \mathcal{T}, \mathcal{O} \subset \mathcal{A}} \mathcal{O} = \{x \in \mathcal{A}, \exists \mathcal{O} \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{O} \subset \mathcal{A}\} = \{x \in \mathcal{A}, \mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)\}.$$
Ce qui conclut la démonstration.

Proposition 1.3.4 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$. Alors*

1. *$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est un fermé.*
2. *$\mathcal{A} = \mathring{\mathcal{A}}$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est un ouvert.*

Démonstration 1.3.5
1.
   - Si $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$, alors d'après la définition de l'adhérence, on a $\overline{\mathcal{A}}$ est le plus petit fermé contenant $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est un fermé.
   - Réciproquement, supposons que $\mathcal{A}$ est un fermé de $\mathbb{X}$. Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, on déduit, d'après la définition de l'adhérence, que $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Or on a toujours $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Donc
$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}.$$
2.
   - Si $\mathcal{A} = \mathring{\mathcal{A}}$, alors d'après la définition de l'intérieur, on a $\mathring{\mathcal{A}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est un ouvert.

- Réciproquement, supposons que $\mathcal{A}$ est un ouvert de $\mathbb{X}$. Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, on déduit, d'après la définition de l'intérieur, que $\mathcal{A} \subset \mathring{\mathcal{A}}$. Or on a toujours $\mathring{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Donc

$$\mathring{\mathcal{A}} = \mathcal{A}.$$

Retenons la caractérisation suivante de l'adhérence et de la densité.

Proposition 1.3.6 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$. Alors*

1. *Un point x de $\mathbb{X}$ est dans $\overline{\mathcal{A}}$ si et seulement si $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ on a $\mathcal{A} \cap V \neq \emptyset$ i.e.,*

$$\overline{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{X},\ \ \forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)\ \ \mathcal{A} \cap V \neq \emptyset\}.$$

2. *$\mathcal{A}$ est dense de $\mathbb{X}$ (i.e., $\overline{\mathcal{A}} = \mathbb{X}$) si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{X}$ non vide on a $\mathcal{A} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$.*

Démonstration 1.3.7 1. • Soit $x \in \overline{\mathcal{A}}$. On montre que $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on a $V \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant x (alors $\mathcal{O} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$) et disjoint de $\mathcal{A}$ (*i.e.*, $x \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \cap \mathcal{A} = \emptyset$). Ceci implique

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{O}^C \ \textbf{et}\ \ \mathcal{O} \subset \mathcal{A}^C.$$

Puisque $\mathcal{O}$ est un ouvert, on déduit que $\mathcal{O}^C$ est un fermé ($x \notin \mathcal{O}^C$) contenant $\mathcal{A}$ (*i.e.*, $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}^C$). Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est le plus petit fermé contenant $\mathcal{A}$, on déduit que

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{O}^C.$$

Alors

$$x \notin \overline{\mathcal{A}}.$$

Ce qui constitue une contradiction avec l'hypothèse.

- Réciproquement, pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on suppose que $V \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ et on montre que $x \in \overline{\mathcal{A}}$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $x \notin \overline{\mathcal{A}}$, alors x appartient à l'ouvert $\overline{\mathcal{A}}^C$. Ceci implique que $\overline{\mathcal{A}}^C \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$. Comme $\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{A}}^C = \emptyset$ et $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$, on déduit que

$$\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{A}}^C = \emptyset.$$

Cela contredit l'hypothèse faite.

2. • Soient $\mathcal{A}$ une partie dense dans $\mathbb{X}$ (*i.e.*, $\overline{\mathcal{A}} = \mathbb{X}$) et $x \in \mathbb{X}$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert contenant x. Alors $x \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{O}$ est un voisinage de x (*i.e.*, $\mathcal{O} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$). D'après le premier point de cette proposition, on conclut que

$$\mathcal{O} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

- Réciproquement, on suppose que tout ouvert non vide rencontre $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire, tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{X}$ non vide, on a $\mathcal{O} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$). Soient $x \in \mathbb{X}$ et $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ un voisinage de x. Comme V contient toujours un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $x \in \mathcal{O} \subset V$, on déduit que

$$V \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

D'après le premier point de cette proposition, on conclut que $x \in \overline{\mathcal{A}}$. Alors

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathbb{X}.$$

Donc $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{X}$.

Remarque 1.3.8 1. Tout point x de $\mathcal{A}$ est adhérent à $\mathcal{A}$, c'est-à-dire, $x \in \overline{\mathcal{A}}$ (car tout voisinage V de x contient x, alors $V \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$), donc $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$.

2. On a toujours l'inclusion $\mathring{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$.

Dans ce qui suit, on définit les notions des points d'accumulations et de points isolés.

Définition 1.3.9 Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$.

1. Un point $x \in \mathbb{X}$ est un **point d'accumulation** de $\mathcal{A}$ si tout voisinage V de x dans $\mathbb{X}$ contient un point de $\mathcal{A}$ différent de x *i.e.*,
$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x), (V \backslash \{x\}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$
2. Un point $x \in \mathbb{X}$ est un **point isolé** de $\mathcal{A}$ s'il existe un voisinage V de x tel que
$$V \cap \mathcal{A} = \{x\}.$$

Remarque 1.3.10 L'adhérence de $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les points d'accumulations et les points isolés de $\mathcal{A}$.

Exemple 1.3.11 1. Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.

(a) L'intérieur d'un intervalle est un intervalle ouvert et l'adhérence d'un intervalle est un intervalle fermé. Par exemple
- $\overset{\circ}{\widehat{[0,1]}} =]0,1[$ et $\overline{[0,1[} = [0,1]$
- $\overset{\circ}{\widehat{]1,+\infty[}} =]1,+\infty[$ et $\overline{]1,+\infty[} = [1,+\infty[$

(b) Soit l'ensemble $\mathcal{A} =]0,2] \cup \{3\}$
- Les points d'accumulations de $\mathcal{A}$ sont tous les points qui appartiennent à $[0,2]$. En effet, pour chaque $x \in [0,2]$ et pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$, on a
$$(V \backslash \{x\} \cap [0,2]) \neq \emptyset.$$
- 3 est le seul point isolé de $\mathcal{A}$. En effet, pour $V =]2,4[$ (il est clair que$V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(3)$), on a
$$A \cap V = \{3\}.$$
- $\overline{\mathcal{A}} = [0,2] \cup \{3\}$ et $\mathring{\mathcal{A}} =]0,2[$.

2. Soit $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$. On a
$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c,d\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \mathbb{X}\}$$
est une topologie sur $\mathbb{X}$. Les fermés de cette topologie sont
$$\mathcal{F} = \{\mathbb{X}, \{b,c,d\}, \{a\}, \{a,d\}, \{d\}, \emptyset\}.$$
Alors
- $\overline{\{b,c\}} = \{b,c,d\}$ (Le plus petit fermé contenant $\{b,c\}$) et $\overset{\circ}{\widehat{\{b,c\}}} = \{b,c\}$ (Le plus grand ouvert continu dans $\{b,c\}$).
- $\overline{\{b\}} = \{b,c,d\}$, $\{\mathring{b}\} = \emptyset$ et $\overline{\{a\}} = \{\mathring{a}\} = \{a\}$.
- Les points d'accumulations de $\mathcal{A} = \{b,c,d\}$ sont b, c et d. En effet, on a
$$\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(b) = \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(c) = \{\{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \mathbb{X}\} \ \textbf{et} \ \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(d) = \{\{b,c,d\}, \mathbb{X}\}.$$
Alors pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(b)$, $V' \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(c)$ et $V'' \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(d)$ on a
$$V \backslash \{b\} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset, \ V' \backslash \{c\} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset \ \textbf{et} \ V'' \backslash \{d\} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$
- Les points isolés de $\mathcal{B} = \{a,b,c\}$ est a car $\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(a)$ tel que $V \cap \mathcal{B} = \{a\}$ (par exemple $V = \{a\}$).

1.4 Espace séparé

Définition 1.4.1 On dit qu'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est **séparé** (ou de **Hausdorff**) si pour tout couple (x, y) de points distincts de $\mathbb{X}$ il existe un voisinage V de x et un voisinage V' de y tels que $V \cap V' = \emptyset$.

Théorème 1.4.2 *Soient* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique séparé et* x *un point de* $\mathbb{X}$*. Alors l'ensemble* $\{x\}$ *est un fermé de* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$*.*

Démonstration 1.4.3 Pour montrer que $\{x\}$ est un fermé il suffit de montrer que son complémentaire $\mathbb{X}\backslash\{x\}$ est un ouvert (*i.e.*, $\forall y \in \mathbb{X}\backslash\{x\} \Longrightarrow \mathbb{X}\backslash\{x\} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(y)$ (voir proposition 1.2.3)). Soit $y \in \mathbb{X}\backslash\{x\}$, alors $y \neq x$ et ceci implique qu'il existe deux voisinages $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(y)$ et $V' \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ tels que

$$V \cap V' = \emptyset.$$

Comme $x \in V'$, on déduit que

$$x \notin V.$$

Ce qui montre

$$V \subset \mathbb{X}\backslash\{x\}.$$

Alors d'après la proposition 1.2.5, on a

$$\mathbb{X}\backslash\{x\} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(y).$$

Donc $\mathbb{X}\backslash\{x\}$ est un ouvert.

Exemple 1.4.4 Soit $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$

1. Si $\mathbb{X}$ est muni de la topologie grossière $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{X}\}$, alors $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ n'est pas séparé, car $\mathbb{X}$ est le seul voisinage de ses points.
2. Si $\mathbb{X}$ est muni de la topologie discrète $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{X}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a, b\}, \mathbb{X}\}$, alors $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est séparé.
3. Si $\mathbb{X}$ est muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \mathbb{X}\}$, alors $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ n'est pas séparé, car pour le couple (a, c), $\mathbb{X}$ est le seul voisinage de c et quelque soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(a)$, on a $V \cap \mathbb{X} \neq \emptyset$.

1.5 Topologie induite

Définition 1.5.1 Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$. L'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ des parties $\mathcal{O}$ de $\mathcal{A}$ telles qu'il existe $\mathcal{O}' \in \mathcal{T}$ vérifiant $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap \mathcal{A}$ *i.e.*,

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap \mathcal{A}, \mathcal{O}' \in \mathcal{T}\}$$

est une topologie sur $\mathcal{A}$. On l'appelle **topologie induite** par $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{A}$.

Le couple $(\mathcal{A}, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ est un **sous espace topologique** de $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$.

Exemple 1.5.2 Soient $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{X}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \mathbb{X}\}$ une topologie sur $\mathbb{X}$. On suppose $\mathcal{A} = \{a, b\}$. Alors la topologie induite est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathcal{A}} =& \{\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap \mathcal{T}, \mathcal{O}' \in \mathcal{T}\} \\
=& \{\emptyset \cap \{a, b\}, \{a\} \cap \{a, b\}, \{b\} \cap \{a, b\}, \{c\} \cap \{a, b\}, \{a, b\} \cap \{a, b\}, \\
& \{a, c\} \cap \{a, b\}, \{b, c\} \cap \{a, b\}, \mathbb{X} \cap \{a, b\}\} \\
=& \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}.
\end{aligned}$$

Proposition 1.5.3 *Soient* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux parties de* $\mathbb{X}$ *telles que* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. *La topologie induite sur* $\mathcal{B}$ *par celle de* $\mathbb{X}$ *et la même que la topologie induite sur* $\mathcal{B}$ *par la topologie induite sur* $\mathcal{A}$ *par celle de* $\mathbb{X}$.

Démonstration 1.5.4 Par définition on a

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \{\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap \mathcal{A}, \mathcal{O}' \in \mathcal{T}\}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathcal{B}} &= \{\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}'_1 \cap \mathcal{B}, \mathcal{O}'_1 \in \mathcal{T}\} \\
&= \{\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}'_1 \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{B}, \mathcal{O}'_1 \in \mathcal{T}\} \ \textbf{(car } \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\textbf{)} \\
&= \{\mathcal{O}_1 = (\mathcal{O}'_1 \cap \mathcal{A}) \cap \mathcal{B}, \mathcal{O}'_1 \in \mathcal{T}\} \\
&= \{\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \cap \mathcal{B}, \mathcal{O} = \mathcal{O}'_1 \cap \mathcal{A} \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\} \ \textbf{(car pour tout } \mathcal{O}'_1 \in \mathcal{T} \textbf{ on a } \mathcal{O}'_1 \cap \mathcal{A} \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\textbf{)} \\
&= \{\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \cap \mathcal{B}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\}.
\end{aligned}$$

1.6 Applications continues

Soient $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques. On note par $\mathcal{F}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ l'ensemble de toutes les applications définies sur $\mathbb{X}_1$ à valeur dans $\mathbb{X}_2$.

Définition 1.6.1 Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}_1$, $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathbb{X}_2)$, $x_0 \in \overline{\mathcal{A}}$ et $l \in \mathbb{X}_2$. On dit que f a pour limite l en x_0 si

$$\forall V' \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(l), \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x_0), \forall x \in V \cap \mathcal{A} \Longrightarrow f(x) \in V'.$$

Proposition 1.6.2 *Si* $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ *est séparé alors la limite est unique.*

Démonstration 1.6.3 Supposons par l'absurde qu'il existe deux limites l_1 et l_2 de f quand x tend vers x_0 telles que

$$l_1 \neq l_2.$$

Comme $\mathbb{X}_2$ est séparé, il existe un voisinage V'_1 de l_1 et un voisinage V'_2 de l_2 tels que

$$V'_1 \cap V'_2 = \emptyset.$$

D'après la définition de la limite d'une fonction, on déduit que

$$\exists V_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x_0), \forall x \in V_1 \cap \mathcal{A} \Longrightarrow f(x) \in V'_1$$

et

$$\exists V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x_0), \forall x \in V_2 \cap \mathcal{A} \Longrightarrow f(x) \in V'_2.$$

Posons $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x_0)$. Alors pour tout $x \in V \cap \mathcal{A}$ on a

$$f(x) \in V'_1 \quad \textbf{et} \quad f(x) \in V'_2.$$

Ce qui constitue une contradiction avec $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$.

Remarque 1.6.4 Dans le cas d'un espace topologique non séparé la limite n'est pas toujours unique.

Définition 1.6.5 Soient $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}_1$. La fonction f est dite **continue** en un point $x \in \mathcal{A}$ si et seulement si

$$\forall V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(x)), \exists V_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x), f(V_1 \cap \mathcal{A}) \subset V_2.$$

Si f est continue en tout point de $\mathcal{A}$, on dit que f est continue sur $\mathcal{A}$.

Remarque 1.6.6 Sous les hypothèses de la définition 1.6.1, si de plus $x_0 \in \mathcal{A}$ et $f(x_0) = l$, on dit que f est continue en x_0.

Proposition 1.6.7 *Soient* $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$, $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces topologiques et* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *La fonction f est continue sur $\mathbb{X}_1$,*

(ii) *l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{X}_2$ pour la topologie $\mathcal{T}_2$ est un ouvert de $\mathbb{X}_1$ pour la topologie $\mathcal{T}_1$,*

(iii) *l'image réciproque par f de tout fermé de $\mathbb{X}_2$ pour la topologie $\mathcal{T}_2$ est un fermé de $\mathbb{X}_1$ pour la topologie $\mathcal{T}_1$.*

Démonstration 1.6.8

1. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{X}_2$ (*i.e.*, $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_2$). Soit $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Alors
$$f(x) \in f(f^{-1}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{O}.$$
Ceci implique
$$\mathcal{O} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(x)).$$
Comme f est une application continue sur $\mathbb{X}_1$ (alors elle est continue en x) et $\mathcal{O} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(x))$, il existe $V_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x)$ tel que
$$f(V_1) \subset \mathcal{O}.$$
On a donc
$$V_1 \subset f^{-1}(f(V_1)) \subset f^{-1}(\mathcal{O}).$$
Ce qui prouve
$$f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x) \quad (\textbf{car } V_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x) \textbf{ et } V_1 \subset f^{-1}(\mathcal{O})).$$
Puisque x est quelconque dans $f^{-1}(\mathcal{O})$, on déduit que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un voisinage de chacun de ses points. Alors, d'après la proposition 1.2.3, $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{X}_1$ (*i.e.*, $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T}_1$).
2. $(ii) \Longrightarrow (i)$ Supposons que (ii) est vérifiée. Soit $x \in \mathbb{X}_1$ et $V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(x))$. Alors il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{X}_2$ tel que
$$f(x) \in \mathcal{O} \subset V.$$
Ceci implique
$$f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(\mathcal{O}) \subset f^{-1}(V).$$
Comme $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{X}_1$ (d'après (ii)), on déduit que
$$f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x).$$
Puisque on a toujours
$$f(f^{-1}(V_2)) \subset V_2,$$
on conclut que
$$\forall V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(x)), \exists V_1 = f^{-1}(V_2) \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x), f(V_1 \cap \mathbb{X}_1) = f(V_1) = f\left(f^{-1}(V_2)\right) \subset V_2.$$
Donc f est continue sur $\mathbb{X}_1$.

3. $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$ Par passage aux complémentaires.
   (a) Pour $(ii) \Longrightarrow (iii)$, on utilise
$$\left(f^{-1}(\mathcal{O})\right)^c = f^{-1}(\mathcal{O}^c) \textbf{ pour tout ouvert } \mathcal{O} \textbf{ de } \mathbb{X}_2.$$
   (b) Pour $(iii) \Longrightarrow (ii)$, on utilise
$$\left(f^{-1}(F)\right)^c = f^{-1}(F^c) \textbf{ pour tout fermé } F \textbf{ de } \mathbb{X}_2.$$

Théorème 1.6.9 *Soient* $((\mathbb{X}, \mathcal{T}_i))_{i\in I}$, $(\mathbb{X}', \mathcal{T}')$ *des espaces topologiques* ($(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *une famille quelconque de topologies définies sur un ensemble* $\mathbb{X}$) *et* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}'$ *une application continue pour chaque* $\mathcal{T}_i$. *Alors* f *est continue pour la topologie intersection* $\mathcal{T} := \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$.

Démonstration 1.6.10 Soit $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{T}'$. Alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ appartient à chaque $\mathcal{T}_i$. Ainsi $f^{-1}(\mathcal{O})$ appartient à l'intersection, c'est-à-dire,
$$f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{T} = \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i.$$
Donc f est continue pour la topologie $\mathcal{T}$.

Théorème 1.6.11 *Soient* $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$, $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ *et* $(\mathbb{X}_3, \mathcal{T}_3)$ *trois espaces topologiques. La fonction composée* $fog : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_3$ *d'une fonction continue* $g : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ *et d'une fonction continue* $f : \mathbb{X}_2 \longrightarrow \mathbb{X}_3$ *est continue.*

Démonstration 1.6.12 Soit $\mathcal{O}_3$ un ouvert de $\mathbb{X}_3$. Alors par continuité de $f : \mathbb{X}_2 \longrightarrow \mathbb{X}_3$, l'ensemble $\mathcal{O}_2 := f^{-1}(\mathcal{O}_3)$ est un ouvert de $\mathbb{X}_2$, puis par la continuité de $g : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$, l'ensemble $\mathcal{O}_1 := g^{-1}(\mathcal{O}_2) = g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O}_3))$ est un ouvert de $\mathbb{X}_1$. En plus on a, pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{X}_3$,
$$(fog)^{-1}(\mathcal{O}) = g^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O})).$$
Alors pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{X}_3$ on a $(fog)^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{X}_1$. Donc la fonction $fog : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_3$ est continue.

Définition 1.6.13 Soient $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques. On appelle **homéomorphisme** toute application bijective $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ telle que f et f^{-1} soient continues.

Proposition 1.6.14 *Soient* $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$, $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces topologiques et* $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ *une application homéomorphisme. Si* $\mathcal{O}$ *est un ouvert de* $\mathbb{X}_1$, *alors* $f(\mathcal{O})$ *est un ouvert de* $\mathbb{X}_2$.

Démonstration 1.6.15 On a $f^{-1} : \mathbb{X}_2 \longrightarrow \mathbb{X}_1$ est continue. Alors pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{X}_1$, $\left(f^{-1}\right)^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{X}_2$. Comme $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$, on déduit $\left(f^{-1}\right)^{-1}(\mathcal{O}) = f(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{X}_2$.

Remarque 1.6.16 L'image d'une partie ouverte dans $\mathbb{X}_1$ par une application continue $f : (\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ entre deux espaces topologique $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ n'est pas nécessairement ouverte dans $\mathbb{X}_2$. Cependant, si f est homéomorphisme, alors elle transporte les parties ouvertes de $\mathbb{X}_1$ en parties ouvertes en $\mathbb{X}_2$.

1.7 Topologie initiale

Soient $((\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i))_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques, $\mathbb{X}$ un ensemble et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications $f_i : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}_i$. On désire munir l'ensemble $\mathbb{X}$ d'une topologie qui rend continues toutes les applications f_i.

Définition 1.7.1 On considère une famille constitue par les images réciproque de chaque ouvert de chaque espace topologique $(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i)$, c'est-à-dire,

$$\Theta = \bigcup_{i\in I} \left\{ f^{-1}(\mathcal{O}),\ \ \mathcal{O} \in \mathcal{T}_i \right\}.$$

La topologie sur $\mathbb{X}$ engendrée par Θ est appelée **topologie initiale**.

Les principales propriétés de la topologie initiale $\mathcal{T}$ sont énoncées dans le théorème suivant.

Théorème 1.7.2 *(i) Toutes les applications f_i sont continues pour $\mathcal{T}$.*

(ii) $\mathcal{T}$ est l'intersection de toutes les topologies sur $\mathbb{X}$ rendant continues toutes les applications f_i.

(iii) $\mathcal{T}$ est la moins fines des topologies sur $\mathbb{X}$ pour lesquelles les applications f_i sont continues.

Démonstration 1.7.3 (i) Pour toute application $f_i : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}_i$ si $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_i$ alors

$$f^{-1}(\mathcal{O}) \in \Theta \subset \mathcal{T}.$$

Donc toutes les f_i sont contenues pour $\mathcal{T}$.

(ii) Soit $\mathcal{T}'$ l'intersection de toutes les topologies sur $\mathbb{X}$ rendant continues toutes les applications f_i. D'après le théorème 1.6.9, toutes les applications f_i sont continues pour $\mathcal{T}'$. Alors $\Theta \subset \mathcal{T}'$. Comme $\mathcal{T}$ est la topologie engendrée par Θ, on a

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'.$$

Réciproquement, $\mathcal{T}$ est l'une des topologie pour lesquelles les f_i sont continues. Alors

$$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}.$$

Donc

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}'.$$

(iii) Soit $(\mathcal{T}_j)_{j\in J}$ une famille de topologies sur $\mathbb{X}$ rendant continues toutes les applications f_i. D'après (ii), on a

$$\mathcal{T} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j.$$

Alors pour tout $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ on a

$$\mathcal{O} \in \mathcal{T}_j, \qquad \forall j \in J.$$

Ce qui donne

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_j, \qquad \forall j \in J.$$

Donc $\mathcal{T}$ est la moins fines des topologies sur $\mathbb{X}$ pour lesquelles les applications f_i sont continues.

1.8 Topologie produit

Soit $(\mathbb{X}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ensembles et soit $\mathbb{X} = \prod_{i\in I} \mathbb{X}_i$ le produit cartésien des ces ensembles. Notons que $\mathbb{X}$ est formé des points $X = (x_i)_{i\in I}$ où $x_i \in \mathbb{X}_i$. Rappelons que pour tout $j \in I$ la projection canonique p_j définie par

$$p_j : \begin{cases} \prod_{i\in I} \mathbb{X}_i \longrightarrow \mathbb{X}_j \\ (x_i)_{i\in I} \longmapsto x_j \end{cases}$$

Ce sont ces projections qu'on utilise pour définir la topologie produit.

Définition 1.8.1 Soient $(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques et $\mathbb{X} = \prod_{i\in I} \mathbb{X}_i$ le produit cartésien de $\mathbb{X}\ _i$. La topologie la moins fine $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{X}$ rendant continues toutes les projections $p_j : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}_j$ est appelée la **topologie produit** des $\mathcal{T}_i$. Le couple $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est appelé **espace topologique produit**.

Remarquons que pour toute partie $\mathcal{A}_j$ de $\mathbb{X}_j$ on a

$$p_j^{-1}(\mathcal{A}_j) = \mathcal{A}_j \times \prod_{i\in I, i\neq j} \mathbb{X}_i. \tag{1.8.1}$$

Si J est une partie de I, on a alors

$$\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(\mathcal{A}_j) = \prod_{j\in J} \mathcal{A}_j \times \prod_{i\in I\setminus J} \mathbb{X}_i.$$

Si J est une partie finie de I, de tels ensembles seront appelés des **ensembles élémentaires**.

Définition 1.8.2 1. On appelle **ouvert élémentaire** de la topologie produit tout ensemble sous forme

$$\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(\mathcal{O}_j),$$

où J est une partie finie de I et $\mathcal{O}_j$ est un élément de $\mathcal{T}_j$.

2. Une base de la topologie produit est formée par l'ensembles des ouverts élémentaires.

Remarque 1.8.3 Si on a une famille finie d'espaces topologiques $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (\mathbb{X}_n, \mathcal{T}_n)$, un ouvert élémentaire dans l'espace topologique produit $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \ldots \times \mathbb{X}_n$ est un produit $\mathcal{O}_1 \times \ldots \times \mathcal{O}_n$, où $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_i$.

Proposition 1.8.4 *Soit $(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces topologiques séparés. Alors l'espace topologique produit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est séparé.*

Démonstration 1.8.5 Soient $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $X' = (x_1', \ldots, x_n')$ deux points de $\mathbb{X}$ tels que $X \neq X'$. Alors il existe un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ pour lequel $x_i \neq x_i'$. Comme $(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i)$ est séparé, il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_i}(x_i)$ et $V' \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_i}(x_i')$ tels que

$$V \cap V' = \emptyset.$$

Alors

$$U = \mathbb{X}_1 \times \ldots \times \mathbb{X}_{i-1} \times V \times \mathbb{X}_{i+1} \times \ldots \times \mathbb{X}_n$$

est un voisinage de X et

$$U' = \mathbb{X}_1 \times \ldots \times \mathbb{X}_{i-1} \times V' \times \mathbb{X}_{i+1} \times \ldots \times \mathbb{X}_n$$

est un voisinage de X'. En plus

$$U \cap U' = \emptyset \quad \textbf{(car } V \cap V' = \emptyset\textbf{)}.$$

Donc $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est séparé.

Proposition 1.8.6 *Soient $(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille des espaces topologiques et $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique produit de ces espaces. Pour tout $i \in I$, soit $\mathcal{A}_i$ une partie de $\mathbb{X}_i$. Alors*

(i) $\overline{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i} = \prod_{i\in I} \overline{\mathcal{A}_i}$.

(ii) Si I est fini, on a $\widehat{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i}^{\circ} = \prod_{i\in I} \mathring{\mathcal{A}}_i$.

Démonstration 1.8.7 *(i)* Comme p_j est continue pour tout $j \in I$, on déduit que

$$p_j\left(\overline{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i}\right) \subset \overline{p_j\left(\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i\right)} \subset \overline{\mathcal{A}_j} \quad \textbf{(voir la solution de l'exercice 1.11.7)}.$$

Alors

$$\overline{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i} \subset p_j^{-1}\left(p_j\left(\overline{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i}\right)\right) \subset p_j^{-1}\left(\overline{\mathcal{A}_j}\right).$$

Ce qui donne

$$\overline{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i} \subset \bigcap_{j\in I} p_j^{-1}\left(\overline{\mathcal{A}_j}\right).$$

En utilisant (1.8.1), on obtient

$$\overline{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i} \subset \bigcap_{j\in I} p_j^{-1}\left(\overline{\mathcal{A}_j}\right) = \prod_{j\in I} \overline{\mathcal{A}_j} = \prod_{i\in I} \overline{\mathcal{A}_i}.$$

Donc

$$\overline{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i} \subset \prod_{i\in I} \overline{\mathcal{A}_i}.$$

Réciproquement, soient $X = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{\mathcal{A}_i}$ (*i.e.*, pour tout $i \in I$, on a $x_i \in \overline{\mathcal{A}_i}$) et $\mathcal{O} = \prod_{i\in I} \mathcal{O}_i$ un ouvert élémentaire de $\mathbb{X}$ contenant X (*i.e.*, pour tout $i \in I$, on a $x_i \in \mathcal{O}_i$) tel qu'il existe un sous ensemble fini J de I, tel que pour tout $i \in I/J$, on suppose $\mathcal{O}_i = \mathbb{X}_i$. On a

$$\left(\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} \mathcal{O}_i\right) = \prod_{i\in I} \left(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{O}_i\right).$$

Comme $x_i \in \overline{\mathcal{A}_i}$ et $\mathcal{O}_i$ est un ouvert contenant ce point, on déduit que

$$x_i \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{O}_i.$$

Ce qui donne

$$\left(\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} \mathcal{O}_i\right) = \prod_{i\in I} \left(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{O}_i\right) \neq \emptyset.$$

Ce qui prouve que le point X est adhérent à $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$, *i.e.*,

$$X \in \overline{\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i}.$$

Donc

$$\prod_{i\in I}\overline{\mathcal{A}}_i \subset \overline{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i}.$$

Ce qui prouve

$$\overline{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i} = \prod_{i\in I}\overline{\mathcal{A}}_i.$$

(*ii*) Soit $X = (x_i)_{i\in I} \in \overset{\circ}{\widehat{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i}}$. Alors il existe un ouvert élémentaire $\mathcal{O} = \prod_{i\in I}\mathcal{O}_i$ de $\mathbb{X}$ contenant X et contenu dans $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$. D'où

$$x_i \in \mathcal{O}_i \subset \mathcal{A}_i.$$

Ceci implique que $x_i \in \mathring{\mathcal{A}}_i$ et par conséquence $X \in \prod_{i\in I}\mathring{\mathcal{A}}_i$. Donc

$$\overset{\circ}{\widehat{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i}} \subset \prod_{i\in I}\mathring{\mathcal{A}}_i.$$

Réciproquement, on remarque que $\prod_{i\in I}\mathring{\mathcal{A}}_i$ est un ouvert (produit cartésien fini des ouverts est un ouvert) contenu dans $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Comme $\overset{\circ}{\widehat{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$, on déduit que

$$\prod_{i\in I}\mathring{\mathcal{A}}_i \subset \overset{\circ}{\widehat{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i}}.$$

Donc

$$\overset{\circ}{\widehat{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i}} = \prod_{i\in I}\mathring{\mathcal{A}}_i.$$

1.9 Suites convergentes

Définition 1.9.1 On appelle une **suite** d'un espace topologique $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ toute application x de $\mathbb{N}$ (où $\mathbb{N}\cap[p,+\infty[$, $p\in\mathbb{N}$) dans $\mathbb{X}$. Elle est notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.9.2 Soient $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique, $l\in\mathbb{X}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si pour tout voisinage V de l il existe $N_V\in\mathbb{N}$ tel que $x_n\in V$ pour tout $n\geq N_V$ *i.e.*,

$$\forall V\in\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(l)\ \exists N_V\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N_V \Longrightarrow x_n\in V$$

Proposition 1.9.3 *Soient $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}$. Si x_n converge alors la limite est unique.*

Démonstration 1.9.4 On suppose par l'absurde qu'il existe deux limites l_1 et l_2 de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$l_1\neq l_2.$$

Comme $\mathbb{X}$ est séparé, il existe deux voisinages $V_1\in\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(l_1)$ et $V_2\in\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(l_2)$ tels que

$$V_1\cap V_2=\emptyset.$$

D'après la définition d'une limite, on conclut qu'il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N_1$ on ait

$$x_n\in V_1$$

et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait

$$x_n \in V_2.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors pour tout $n \geq N$, on a

$$x_n \in V_1 \ \textbf{et} \ x_n \in V_2.$$

Ce qui constitue une contradiction avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Remarque 1.9.5 Dans le cas d'un espace topologique non séparé la limite n'est pas toujours unique. En effet, pour un ensemble $\mathbb{X}$ contenant au moins deux éléments et muni de la topologie grossière $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{X}\}$, les limites de toutes les suites convergentes de $\mathbb{X}$ ne sont pas uniques.

Proposition 1.9.6 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique, F un fermé de $\mathbb{X}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de F. Alors la limite de cette suite est encore dans F.*

Démonstration 1.9.7 On suppose par l'absurde que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l dans le complémentaire $F^C = \mathcal{O}$. Alors $\mathcal{O}$ est un voisinage de l. D'après la définition d'une limite, on déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait

$$x_n \in \mathcal{O}.$$

Ce qui est contraire aux hypothèses car $x_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.9.8 *Soit $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques, $x \in \mathbb{X}_1$ et $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ une application continue sur $\mathbb{X}_1$. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathbb{X}_1$ converge vers x, on a $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration 1.9.9 Soit $V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(x))$. Alors il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{X}_2$ tel que

$$f(x) \in \mathcal{O} \subset V_2.$$

Alors

$$x = f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(\mathcal{O}) \subset f^{-1}(V_2).$$

Comme f est continue, on déduit que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{X}_1$. Alors

$$V_1 := f^{-1}(V_2) \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x).$$

. Comme x_n converge vers x et d'après la définition de la convergence d'une suite, on déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $x_n \in V_1$. Alors

$$f(x_n) \in f(V_1) = f\left(f^{-1}(V_2)\right) \subset V_2.$$

Ce qui donne

$$f(x_n) \in V_2.$$

Donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Proposition 1.9.10 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$. Si pour tout $x \in \mathbb{X}$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ qui converge vers x, alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{X}$.*

Démonstration 1.9.11 Par définition d'une suite convergente, on a

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x) \ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \Longrightarrow x_n \in V.$$

Ce qui implique

$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T}, \ x \in \mathcal{O} \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \Longrightarrow x_n \in \mathcal{O}.$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, on déduit que

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset.$$

D'après la proposition 1.3.6, on conclut que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{X}$.

Définition 1.9.12 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique. On appelle **sous-suite extraite** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Remarque 1.9.13 Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\phi(n) \geq n$. En effet, pour $n = 0$, on a $\phi(0) \geq 0$ car $\phi(n) \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\phi(n) \geq n$ et montrons que $\phi(n+1) \geq n+1$. Comme ϕ est strictement croissante, on déduit que

$$\phi(n+1) > \phi(n) \geq n.$$

Puisque $\phi(n+1) \in \mathbb{N}$, on déduit que

$$\phi(n+1) \geq n+1.$$

Alors on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\phi(n) \geq n$.

Proposition 1.9.14 *Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace topologique séparé $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ converge vers une limite $l \in \mathbb{X}$. Alors toute sous-suite de (x_n) converge vers l.*

Démonstration 1.9.15 Soit $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite quelconque de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(l)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait

$$x_n \in V.$$

Comme $\phi(n) \geq n$, on déduit que pour tout $n \geq N$, on a

$$x_{\phi(n)} \in V.$$

Donc $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.

Définition 1.9.16 Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\mathbb{X}$. On dit que a est une **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout voisinage de a et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un $n \geq N$ tel que $x_n \in V$ *i.e.*,

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(a), \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N, \quad x_n \in V.$$

Plus exactement, pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(a)$, V contient une infinité d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, non nécessairement distincts.

Théorème 1.9.17 *Soit (x_n) une suite d'éléments de l'espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. Pour que a soit une valeur d'adhérence de (x_n), il faut et il suffit qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ de x_n qui converge vers a.*

Démonstration 1.9.18 Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(a)$ et $N \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ de (x_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{\phi(n)} = a$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$x_{\phi(n)} \in V.$$

Posons $n_1 = \max\{N, n_0\}$ et $n_2 = \phi(n_1) \geq n_1$. Alors, pour tout $n \geq n_2$, on a

$$x_{\phi(n)} \in V.$$

Ceci implique qu'il existe $n_2 \geq N$ tel que

$$x_{n_2} \in V.$$

Corollaire 1.9.19 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors l est unique valeur d'adhérence de cette suite.*

Proposition 1.9.20 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \{x_p/p \geq n\}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite x_n. Alors*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n.$$

Démonstration 1.9.21

- Soient $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n$ et V un voisinage de a dans $\mathbb{X}$ (*i.e.*, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(a)$). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a \in \overline{S}_n$. Ce qui donne

$$V \cap S_n \neq \emptyset.$$

Alors il existe $p \geq n$ tel que

$$x_p \in V \cap S_n.$$

Ceci implique

$$x_p \in V.$$

Alors a est une valeur d'adhérence de x_n. Donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n \subset \mathcal{A}.$$

- Réciproquement, soit $a \in \mathcal{A}$. Alors pour tout voisinage V de a dans $\mathbb{X}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x_p \in V$. Ce qui implique

$$x_p \in V \cap S_n.$$

Il s'en suit

$$V \cap S_n \neq \emptyset.$$

Alors, d'après la proposition 1.3.6, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a \in \overline{S}_n$. Ceci implique

$$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n.$$

Donc

$$\mathcal{A} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n.$$

Ce qui prouve

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n.$$

1.10 Espace métrique

Les exemples les plus intéressants de topologie sur un ensemble $\mathbb{X}$ sont donnés par des métriques. Dans cette section nous donnons les notions des espaces métriques qui sont importantes dans la pratique.

Définition 1.10.1 Soit $\mathbb{X}$ un ensemble non vide. On appelle **distance** sur $\mathbb{X}$ toute application $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (**Axiome de séparation**).
2. Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, $d(x, y) = d(y, x)$ (**Symétrie**).
3. Pour tout $x, y, z \in \mathbb{X}$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**Inégalité triangulaire**).

Si $\mathbb{X}$ est muni d'une distance d, on dit que $(\mathbb{X}, d)$ est un **espace métrique**.

De la définition d'une distance, on peut déduire la deuxième inégalité triangulaire donnée par

$$\forall x, y, z \in \mathbb{X} \quad |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

En effet, d'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $x, y, z \in \mathbb{X}$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

alors

$$d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z) \tag{1.10.1}$$

et

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z) \quad (\text{car } d(x, y) = d(y, x)),$$

alors

$$d(y, z) - d(x, y) = -(d(x, y) - d(y, z)) \leq d(x, z). \tag{1.10.2}$$

D'après (1.10.1) et (1.10.2), on a

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

On peut déduire aussi que la distance est toujours positive ou nulle. En effet, pour tout $x, y \in \mathbb{X}$

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Exemple 1.10.2

1. Sur $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d(x, y) = |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$ (appelée distance usuelle). En effet
   (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow |x - y| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.
   (c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, on a
   $$d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z).$$
2. Sur $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ est une distance. En effet,
   (a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a
   $$d\left(x, y\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = 0 \Longleftrightarrow |x - y| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

(b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d(y,x).$$

(c) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$|x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|.$$

En utilisant la croissance de la fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, F(X) = \dfrac{X}{X+1}$ $\big($*i.e.*, si $X \leq Y$, alors $F(X) \leq F(Y)\big)$ et en supposant $X = |x-z|$, $Y = |x-y| + |y-z|$, on obtient

$$\begin{aligned} d(x,z) = F(|x-z|) &= \frac{|x-z|}{1+|x-z|} \\ &\leq F(|x-y|+|y-z|) = \frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \\ &\leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|} + \frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \\ &\leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|} = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

(Car si $a, b, c > 0$, on a $\dfrac{a}{b+c} \leq \frac{a}{b}$).

Donc d est une distance.

3. Sur $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$

$$d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|, \quad d_2(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_3(X,Y) = \max_{i \in \{1,2\}} |x_i - y_i|$$

(où $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$) sont des distances dites trois distances usuelles de $\mathbb{R}^2$. En effet,

(a) Pour d_1.

i. Pour tout $X, Y, \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} d_1(X,Y) = 0 &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| = 0 \Longleftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \\ &\Longleftrightarrow |x_1 - y_1| = 0 \text{ et } |x_2 - y_2| = 0 \Longleftrightarrow x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2 \Longleftrightarrow X = Y. \end{aligned}$$

ii. Pour tout $X, Y, \in \mathbb{R}^2$, on a

$$d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{2} |y_i - x_i| = d_1(Y,X) \quad (\text{car } |x-y| = |y-x|).$$

iii. Pour tout $X, Y, Z \in \mathbb{R}^2$ $(Z = (z_1, z_2))$, on a

$$d_1(X,Z) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - z_i| = |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}
d_1(X,Z) &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \\
&\le |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\
&\le (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) + (|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|) \\
&\le \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{2} |y_i - z_i| = d_1(X,Y) + d_1(Y,Z).
\end{aligned}$$

(b) Pour d_2.

i. Pour tout $X, Y, \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
d_2(X,Y) = 0 &\Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 = 0 \Longleftrightarrow |x_1 - y_1| = 0 \text{ et } |x_2 - y_2| = 0 \\
&\Longleftrightarrow x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2 \Longleftrightarrow X = Y.
\end{aligned}$$

ii. Pour tout $X, Y, \in \mathbb{R}^2$, on a

$$d_2(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{2} |y_i - x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d_2(Y,X) \quad (\text{car } |x - y| = |y - x|\,).$$

iii. Pour montrer l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante

$$\sum_{1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $X, Y, Z \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
d_2^2(X,Z) &= \sum_{i=1}^{2} |x_i - z_i|^2 = |x_1 - z_1|^2 + |x_2 - z_2|^2 = (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 \\
&= (x_1 - y_1 + y_1 - z_1)^2 + (x_2 - y_2 + y_2 - z_2)^2 \\
&= (x_1 - y_1)^2 + (y_1 - z_1)^2 + 2\,(x_1 - y_1)(y_1 - z_1) \\
&\quad + (x_2 - y_2)^2 + (y_2 - z_2)^2 + 2\,(x_2 - y_2)\,(y_2 - z_2) \\
&= \Big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \Big) + \Big((y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 \Big) \\
&\quad + 2\,((x_1 - y_1)\,(y_1 - z_1) + (x_2 - y_2)\,(y_2 - z_2)) \\
&\le \Big(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 \Big) + \Big(|y_1 - z_1|^2 + |y_2 - z_2|^2 \Big) \\
&\quad + 2\,(|x_1 - y_1|\,|y_1 - z_1| + |x_2 - y_2|\,|y_2 - z_2|) \\
&\le \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2 + \sum_{i=1}^{2} |y_i - z_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|\,|y_i - z_i|\,.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, en prenant $a_i = |x_i - y_i|$ et $b_i = |y_i - z_i|$, on obtient

$$\begin{aligned} d_2^2\left(X,Z\right) &\leq \sum_{i=1}^{2}\left|x_i-y_i\right|^2+\sum_{i=1}^{2}\left|y_i-z_i\right|^2+2\sum_{i=1}^{2}\left|x_i-y_i\right|\left|y_i-z_i\right| \\ &\leq \left(\left(\sum_{i=1}^{2}\left|x_i-y_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\left(\sum_{i=1}^{2}\left|y_i-z_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\quad +2\left(\sum_{i=1}^{2}\left|x_i-y_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\left|y_i-z_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{2}\left|x_i-y_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{2}\left|y_i-z_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(d_2\left(X,Y\right)+d_2\left(Y,Z\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Alors

$$d_2^2\left(X,Z\right)\leq\left(d_2\left(X,Y\right)+d_2\left(Y,Z\right)\right)^2.$$

Ceci implique

$$d_2\left(X,Z\right)\leq d_2\left(X,Y\right)+d_2\left(Y,Z\right).$$

(c) Pour d_3.

i. Pour tout $X,Y\in\mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} d_3\left(X,Y\right)=0 &\Longleftrightarrow \max_{i=1,2}\left|x_i-y_i\right|=0\Longleftrightarrow\left|x_1-y_1\right|=0\quad\text{et}\quad\left|x_2-y_2\right|=0 \\ &\Longleftrightarrow x_1=y_1\quad\text{et}\quad x_2=y_2\Longleftrightarrow X=Y. \end{aligned}$$

ii. Pour tout $X,Y\in\mathbb{X}$, on a

$$d_3\left(X,Y\right)=\max_{i=1,2}\left|x_i-y_i\right|=\max_{i=1,2}\left|y_i-x_i\right|=d_3\left(Y,X\right).$$

iii. Pour tout X,Y et $Z=(z_1,z_2)$ dans $\mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} d_3\left(X,Z\right)&=\max_{i=1,2}\left|x_i-z_i\right|=\max_{i=1,2}\left|x_i-y_i+y_i-z_i\right|\leq\max_{i=1,2}\left(\left|x_i-y_i\right|+\left|y_i-z_i\right|\right) \\ &\leq\max_{i=1,2}\left|x_i-y_i\right|+\max_{i=1,2}\left|y_i-z_i\right|=d_3\left(X,Y\right)+d_3\left(Y,Z\right). \end{aligned}$$

4. Soit $\mathbb{X}$ un ensemble non vide. En posant pour tout $x,y\in\mathbb{X}$

$$d(x,y)=\begin{cases} 1 \text{ si } x\neq y, \\ 0 \text{ si } x=y \end{cases}$$

on obtient une distance sur $\mathbb{X}$.

Définition 1.10.3 Soient $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique, x un point de $\mathbb{X}$ et $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{X}$. le nombre positif

$$d(x,\mathcal{A})=\inf_{y\in\mathcal{A}}d(x,y)$$

est appelé distance de x à $\mathcal{A}$.

Définition 1.10.4 Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties non vides de l'espace métrique $(\mathbb{X}, d)$. On appelle distance de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$ le nombre positif

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{(x,y)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(x, y).$$

Exemple 1.10.5 Supposons $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d = |.|$. Soient $\mathcal{A} = [0, 1]$ et $\mathcal{B} =]3, 5]$ deux parties de $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathcal{A}$ et $y \in \mathcal{B}$ (*i.e.*, $(x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$)

$$d(x, y) \in]2, 5].$$

Alors

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{(x,y)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} d(x, y) = \inf_{(x,y)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} |x - y| = 2.$$

Définition 1.10.6 Soit $\mathcal{A}$ une partie de l'espace métrique $(\mathbb{X}, d)$. Le diamètre de $\mathcal{A}$ est définie par

$$\delta(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{A} = \emptyset, \\ \\ \sup_{(x,y)\in\mathcal{A}^2} d(x, y) \text{ si } \mathcal{A} \neq \emptyset \end{cases}$$

On dit que $\mathcal{A}$ est bornée de $\mathbb{X}$ lorsque $\delta(\mathcal{A}) < +\infty$.

Définition 1.10.7 Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{X}$. On appelle **distance induite** par d sur $\mathcal{A}$ la distance $d_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d_{\mathcal{A}}(x, y) = d(x, y) \;\; \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

On dit que $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$ est un **sous-espace métrique** de $(\mathbb{X}, d)$.

1.10.1 Topologie des espaces métriques

Dans cette partie nous donnons les notions fondamentales de la topologie sur un espace métrique

Définition 1.10.8 Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique, x_0 un élément de $\mathbb{X}$ et r un réel strictement positif.

- On appelle **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X}, d(x_0, x) < r\}.$$

- On appelle **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X}, d(x_0, x) \leq r\}.$$

- On appelle **sphère** de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X}, d(x_0, x) = r\}.$$

On a évidement

$$(x \in B(x_0, r) \Longleftrightarrow d(x_0, x) < r) \text{ et } \left(x \in \overline{B}(x_0, r) \Longleftrightarrow d(x_0, x) \leq r\right).$$

Exemple 1.10.9 1. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d = |.|$, les boules ouvertes (respectivement les boules fermées) sont des intervalles ouverts (respectivement intervalles fermés).

2. Dans $\mathbb{R}^2$, les boules ouvertes de centre 0 et de rayon 1 pour les distances d_1, d_2 et d_3 sont définies par

$$\begin{aligned}B_1(0_{\mathbb{R}^2},1)=&\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, d_1(0_{\mathbb{R}^2},X)<1\}=\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|+|y|<1\}\\=&\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, x+y<1\}\cap\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, x-y<1\}\\&\cap\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, -x+y<1\}\cap\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, -x-y<1\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2(0_{\mathbb{R}^2},1)=&\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, d_2(0_{\mathbb{R}^2},X)<1\}=\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2<1\}\\=&\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x-0)^2+(y-0)^2<1\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}B_\infty(0_{\mathbb{R}^2},1)=&\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, d_\infty(0_{\mathbb{R}^2},X)<1\}=\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, \max(|x|,|y|)<1\}\\=&\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|<1 \text{ et } |y|<1\}\\=&\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|<1\}\cap\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, |y|<1\}\\=&\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, -1<x<1\}\cap\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, -1<y<1\}\end{aligned}$$

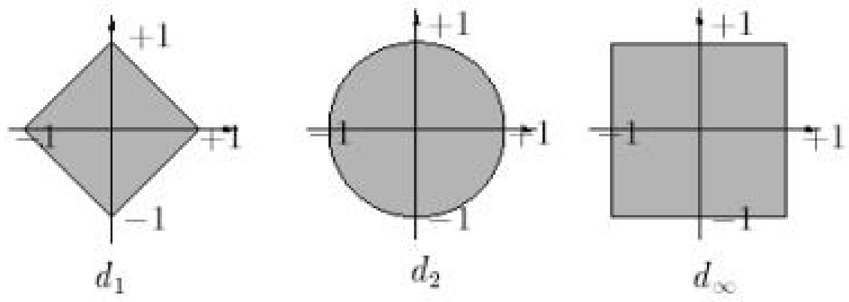


FIGURE 1.1 – Les boules unités dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.10.10 On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ d'un espace métrique $(\mathbb{X},d)$ est une **partie ouverte** (ou est un **ouvert** de $\mathbb{X}$) si $\mathcal{A}$ est vide ou si pour tout point x de $\mathcal{A}$ il existe un réel $r_x>0$ tel que

$$B(x_x,r)\subset\mathcal{A}.$$

Exemple 1.10.11 $\mathcal{A}=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; 2y>x\Big\}$ dans $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est un ouvert. En effet, soit $X_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{A}$, alors $2y_0>x_0$ et ceci implique que $2y_0-x_0>0$.

Posons $\varepsilon=\dfrac{2y_0-x_0}{3}$. Alors

$$\begin{aligned}B(X_0,\varepsilon)&=\Big\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; d_1(X_0,X)<\varepsilon\Big\}\\&=\Big\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; |x-x_0|+|y-y_0|<\varepsilon\Big\}\\&\subset\Big\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; |x-x_0|<\varepsilon \quad\text{et}\quad |y-y_0|<\varepsilon\Big\}\\&=\Big\{X=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon \quad\text{et}\quad y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon\Big\}\\&=]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[\times]y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon[\\&=\left]\frac{4x_0-2y_0}{3},\frac{2x_0+2y_0}{3}\right[\times\left]\frac{y_0+x_0}{3},\frac{5y_0-x_0}{3}\right[.\end{aligned}$$

On remarque que $\forall x_* \in \left]\dfrac{4x_0-2y_0}{3}, \dfrac{2x_0+2y_0}{3}\right[$ et $\forall y_* \in \left]\dfrac{y_0+x_0}{3}, \dfrac{5y_0-x_0}{3}\right[$, on a

$$2y_* > x_*.$$

Alors

$$X_* = (x_*, y_*) \in \mathcal{A}$$

Comme X_* est quelconque dans $\left]\dfrac{4x_0-2y_0}{3}, \dfrac{2x_0+2y_0}{3}\right[\times \left]\dfrac{y_0+x_0}{3}, \dfrac{5y_0-x_0}{3}\right[$, on déduit que

$$B(X_0, \varepsilon) \subset \left]\frac{4x_0-2y_0}{3}, \frac{2x_0+2y_0}{3}\right[\times \left]\frac{y_0+x_0}{3}, \frac{5y_0-x_0}{3}\right[\subset \mathcal{A}.$$

Donc $\mathcal{A}$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.10.12 *Dans un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$, toute boule ouverte c'est un ouvert.*

Démonstration 1.10.13 Soient $x_0 \in \mathbb{X}$ et $r > 0$. Notre objectif est de montrer que pour tout $x \in B(x_0, r)$ il existe un réel $\rho > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, \rho)$ incluse dans $B(x_0, r)$.

Soit $x \in B(x_0, r)$. Alors

$$d(x_0, x) < r.$$

Ceci implique

$$r - d(x_0, x) > 0.$$

On pose $\rho = r - d(x_0, x) > 0$. Alors pour tout $y \in B(x, \rho)$, on a

$$d(x, y) < \rho = r - d(x_0, x).$$

Ce qui donne

$$d(x_0, x) + d(x, y) < r.$$

Comme $d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y)$ (l'inégalité triangulaire), on déduit que

$$d(x_0, y) < r.$$

Alors

$$y \in B(x_0, r).$$

Donc

$$B(x, \rho) \subset B(x_0, r).$$

Théorème 1.10.14 *Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $\mathcal{O}$ une partie de $\mathbb{X}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *$\mathcal{O}$ est réunion de boules ouvertes.*

(ii) *$\forall x \in \mathcal{O}$, $\exists r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$.*

Démonstration 1.10.15 1. $i) \Longrightarrow ii)$ Soit $(B(x_i, r_i))_{i \in I}$ une famille des boules ouvertes et $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$. Soit $x \in \mathcal{O}$. Alors il existe $i \in I$ tel que $x \in B(x_i, r_i)$, c'est-à-dire,

$$d(x, x_i) < r_i.$$

Posons $r_x = r_i - d(x, x_i) > 0$ et montrons que

$$B(x, r) \subset B(x_i, r_i) \subset \mathcal{O}.$$

Pour tout $y \in B(x, r_x)$, on a

$$d(y, x) < r_x = r_i - d(x, x_i).$$

Alors

$$d(y, x) + d(x, x_i) < r_i.$$

Comme $d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i)$ (l'inégalité triangulaire), on déduit que

$$d(y, x_i) < r_i.$$

Ceci implique que $y \in B(x_i, r_i)$. Alors

$$B(x, r_x) \subset B(x_i, r_i) \subset \mathcal{O}.$$

2. *ii)* $\Longrightarrow$ *i)* Soit $\mathcal{O}$ une partie de $\mathbb{X}$ vérifiant (ii), c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$. Ceci implique

$$\bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x, r_x) \subset \mathcal{O}.$$

D'un autre côté, on a

$$x \in B(x, r_x).$$

Alors

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x, r_x).$$

Donc

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x, r_x).$$

Définition 1.10.16 Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique. L'ensemble $\mathcal{T}_d$ des parties $\mathcal{O}$ de $\mathbb{X}$ vérifiant l'une de deux assertions du théorème 1.10.14 est une topologie sur $\mathbb{X}$, dite **topologie associée à la distance** d (ou **topologie induite par** d). Le couple $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_d)$ est un espace topologique.

Lorsqu'on parlera de la topologie d'un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ il s'agira toujours de la topologie associée à la distance d. Un espace métrique est donc un espace topologique particulier.

Théorème 1.10.17 *Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique. Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *$\mathbb{X}$ et $\emptyset$ sont des ouverts.*
2. *Toute réunion d'ouverts est un ouvert.*
3. *L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration 1.10.18 1. D'après la définition 1.10.10, on a l'ensemble $\emptyset$ est un ouvert. Pour tout $x \in \mathbb{X}$ et pour tout $r > 0$, on a (la définition d'une boule ouverte)

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{X}, d(x, y) < r\} \subset \mathbb{X}.$$

Alors $\mathbb{X}$ est un ouvert.

2. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ (où $I \subseteq \mathbb{N}$) une famille quelconque d'ouverts. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Alors il existe au moins un ouvert $\mathcal{O}_j$ de la famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ ($j \in I$, $\mathcal{O}_j \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$) tel que $x \in \mathcal{O}_j$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que
$$B(x,r) \subset \mathcal{O}_j.$$
Alors
$$B(x,r) \subset \mathcal{O}_j \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i.$$
Donc $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ est un ouvert
3. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille finie d'ouverts de $\mathbb{X}$. Soit $x \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{O}_j$. Alors $\forall j \in \{1,\dots,n\}$, on a $x \in \mathcal{O}_j$. Ce qui implique qu'il existe des réels strictement positifs $r_1, r_2, \dots, r_n$ tels que
$$B(x,r_1) \subset \mathcal{O}_1,\ B(x,r_2) \subset \mathcal{O}_2, \dots, B(x,r_n) \subset \mathcal{O}_n.$$
Posons $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n)$. Alors
$$B(x,r) \subset B(x,r_1) \subset \mathcal{O}_1,\ B(x,r) \subset B(x,r_2) \subset \mathcal{O}_2, \dots, B(x,r) \subset B(x,r_n) \subset \mathcal{O}_n.$$
Ce qui donne
$$B(x,r) \subset \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{O}_j.$$
Donc $\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{O}_j$ est un ouvert.

Remarque 1.10.19 L'intersection quelconque des ouverts n'est pas toujours un ouvert. En effet, Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ est un ouvert mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ n'est pas un ouvert.

Remarque 1.10.20 Dans un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$, on a

1. une partie V de $\mathbb{X}$ est un **voisinage** de x s'il existe un réel strictement positif r tel que
$$x \in B(x,r) \subset V,$$
2. tout ouvert de $\mathbb{X}$ qui contient $x \in \mathbb{X}$ est un voisinage de x. Alors la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{X}$ et de rayon $r > 0$ est un voisinage de x,
3. l'ensemble des boules ouvertes $B(x,r), (r > 0)$ est une base de voisinage de x, c 'est-à-dire,
$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x), \exists r > 0, B(x,r) \subset V,$$
4. pour définir l'adhérence, l'intérieur et les frontières on peut remplacer les voisinages par les boules ouvertes.

Exemple 1.10.21 Soient $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d = |.|$ et $\mathcal{A} = [0,1[$ une partie de $\mathbb{R}$.

1. On a
$$\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad \forall r > 0, B(1,r) \cap \mathcal{A} =]1-r, 1+r[\cap \mathcal{A} =]1-r, 1+r[\cap [0,1[\neq \emptyset.$$
Donc
$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{1\} = [0,1[\cup \{1\} = [0,1].$$

2. On a aussi
$$\mathring{\mathcal{A}} = \widehat{[0,1[}^{\circ} = \{x \in [0,1[, [0,1[\in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)\} =]0,1[.$$
Ici $0 \notin \mathring{\mathcal{A}}$ parce que
$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0) = \{B(0,r), r > 0\} = \{]-r,r[, r > 0\}.$$
Et ce qui implique
$$[0,1[\notin \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0).$$
3. $Fr(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}}/\mathring{\mathcal{A}} = [0,1]/]0,1[= \{0,1\}$.

Proposition 1.10.22 *Tout espace métrique est un espace topologique séparé.*

Démonstration 1.10.23 Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et x, y deux points distincts de $\mathbb{X}$ (*i.e.*, $x \neq y$). Alors
$$d(x,y) > 0.$$
Posons $r = \frac{d(x,y)}{2}$ et montrons que
$$B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset.$$
Supposons par l'absurde que $B(x,r) \cap B(y,r) \neq \emptyset$. Soit $z \in B(x,r) \cap B(y,r)$. Alors $z \in B(x,r)$ et $z \in B(y,r)$. Ce qui donne
$$d(x,z) < r \text{ et } d(y,z) = d(z,y) < r.$$
En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r + r = 2r = d(x,y).$$
Alors
$$d(x,y) < d(x,y) \quad \textbf{(Impossible !)}.$$
Donc
$$B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset.$$
Comme la boule ouverte est un ouvert (voisinage de ce centre), on déduit que $(\mathbb{X}, d)$ est séparé.

Corollaire 1.10.24 *Le singleton d'un espace métrique est un fermé.*

Démonstration 1.10.25 Découle du théorème 1.4.2 et la proposition 1.10.22.

On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de $\mathbb{X}$. On a donc
$$F \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow F^C \in \mathcal{T}_d.$$

Proposition 1.10.26 *Dans un espace métrique* $(\mathbb{X}, d)$*, toute boule fermée est un fermé.*

Démonstration 1.10.27 Soient $x \in \mathbb{X}$ et $r > 0$. Pour montrer que $\overline{B}(x,r)$ est un fermé il suffit de montrer que $\overline{B}^C(x,r)$ est un ouvert (*i.e.*, $\forall y \in B_f^C(x,r)$, $\overline{B}^C(x,r) \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(y)$). Soit $y \in \overline{B}^C(x,r)$. Alors $y \notin B_f(x,r)$. Ceci implique
$$d(x,y) > r.$$

Posons $\rho = d(x,y) - r$ et montrons que $B(y,\rho) \subset \overline{B}^C(x,r)$. Pour tout $z \in B(y,\rho)$ on a

$$d(y,z) < \rho = d(x,y) - r.$$

Ce qui donne

$$r < d(x,y) - d(y,z).$$

Comme $d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$ (deuxième inégalité triangulaire), on déduit que

$$z \notin \overline{B}(x,r).$$

Alors

$$z \in \overline{B}^C(x,r).$$

Ceci implique

$$B(y,\rho) \subset \overline{B}^C(x,r).$$

Conclusion. $\overline{B}^C(x,r)$ est un ouvert, Donc $\overline{B}(x,r)$ est un fermé.

Théorème 1.10.28 *Dans un espace métrique* $(\mathbb{X}, d)$*, les assertions suivantes sont vérifiées*

1. $\mathbb{X}$ *et* $\emptyset$ *sont des fermés.*
2. *Toute réunion finie de fermés est un fermé.*
3. *L'intersection quelconque de fermés est un fermé.*

Démonstration 1.10.29 Voir la démonstration 1.1.4.

Remarque 1.10.30 La réunion quelconque des fermés n'est pas toujours un fermé. En effet, Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{B}\left(\frac{1}{n}, 1\right) = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ est un fermé mais $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{B}\left(\frac{1}{n}, 1\right) =]-1, 1[$ n'est pas un fermé.

Corollaire 1.10.31 *Toute partie finie d'un espace métrique est un fermé.*

Démonstration 1.10.32 Toute partie finie F d'un espace métrique est la réunion finie des singleton. Comme le singleton est un fermé dans un espace métrique, on déduit, d'après (3) de théorème 1.10.28, que F est un fermé.

Définition 1.10.33 Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique, x un élément de $\mathbb{X}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers x si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on ait

$$x_n \in B(x, \varepsilon).$$

Définition 1.10.34 Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** s'il existe $x_* \in \mathbb{X}$ et $r > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$x_n \in B(x_*, r).$$

Proposition 1.10.35 *Soient* $(\mathbb{X}, d)$ *un espace métrique et* $\mathcal{A}$ *une partie de* $\mathbb{X}$*. Alors* $\mathcal{A}$ *est fermée dans* $\mathbb{X}$ *si et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de* $\mathcal{A}$ *appartient à* A*.*

Démonstration 1.10.36 Seule la réciproque est à montrer, l'implication directe étant vraie dans n'importe quel espace topologique (voir proposition 1.9.6).

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{A}$ converge vers une limite appartenant à $\mathcal{A}$. Montrons que $\mathcal{A}$ est un fermé. Supposons par l'absurde que $\mathcal{A}$ n'est pas un fermé. Alors

$$\mathcal{A} \subsetneq \overline{\mathcal{A}}.$$

Ceci implique qu'il existe au moins $x \in \overline{\mathcal{A}}\backslash\mathcal{A}$. Alors on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ converge vers x. En effet, on a $x \in \overline{\mathcal{A}}$, ce qui implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B(x, 2^{-n}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

Donc

- Pour $n = 0$, on a $B(x, 1) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, alors il existe $x_0 \in B(x, 1) \cap \mathcal{A}$.
- Pour $n = 1$, on a $B(x, \frac{1}{2}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, alors il existe $x_1 \in B(x, \frac{1}{2}) \cap \mathcal{A}$.
  Ainsi de suite
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B(x, 2^{-n}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, alors il existe $x_n \in B(x, 2^{-n}) \cap \mathcal{A}$.

Alors on a construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$x_n \in B(x, 2^{-n}).$$

Pour n tend vers $+\infty$, x_n converge vers x. Ce qui constitue une contradiction avec les hypothèses.

Exemple 1.10.37 On munit $\mathbb{R}^2$ par la distance d_1 définie par

$$d_1(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

où $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ deux points quelconque de $\mathbb{R}^2$. Alors l'ensemble $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = y\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $X_n = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{A}$ (alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n^2 = y_n$) qui converge vers $X^* = (x_*, y_*)$ de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} d_1(X_n, X^*) = \lim_{n\to\infty} (|x_n - x^*| + |y_n - y^*|) = 0.$$

Ceci implique

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_* \quad \textbf{et} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_*.$$

En utilisant la continuité de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$ et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n^2 = y_n$, on obtient

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} y_n \Rightarrow x_*^2 = y_*.$$

Donc $X^* = (x_*, y_*) \in \mathbb{A}$.

Définition 1.10.38 Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}$. On dit que a est une **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N :\ d(a, x_n) < \varepsilon \quad (i.e.,\ x_n \in B(a, \varepsilon)).$$

Plus exactement, toute boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ contient une infinité d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, non nécessairement distincts.

Proposition 1.10.39 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique $(\mathbb{X}, d)$. Alors a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*

Démonstration 1.10.40 Seule l'implication directe à justifier, l'implication réciproque étant vraie dans n'importe quel espace topologique (voir théorème 1.9.17).

Supposons que a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N :\ d(a, x_n) < \frac{1}{2^k}, \quad \left(\varepsilon = \frac{1}{2^k}\right).$$

Fixons $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \geq N :\ d(a, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

Donc

- Pour $k = 0$, $\exists n_0 \geq N : d(a, x_{n_0}) < \frac{1}{2^0} = 1$.
- Pour $k = 1$, $\exists n_1 > n_0 : d(a, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$.
- Pour $k = 2$, $\exists n_2 > n_1 : d(a, x_{n_2}) < \frac{1}{4}$.

  ...
- Pour $k = m$, $\exists n_m > n_{m-1} : d(a, x_{n_m}) < \frac{1}{2^m}$.

Alors on peut construire par récurrence une sous-suite $x_{\phi(m)}$, telle que $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une suite strictement croissante définie par $\phi(m) = n_m$, converge vers a.

1.10.2 Distances équivalentes, distances topologiquement équivalentes

Définition 1.10.41 Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et d_1, d_2 deux distances sur $\mathbb{X}$. On dit que d_1 et d_2 sont **équivalente** si et seulement s'il existe des réels strictement positifs C et C' tels que, $\forall x, y \in \mathbb{X}$, on a

$$Cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C'd_1(x, y).$$

Définition 1.10.42 Soit $\mathbb{X}$ un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2. On dit que d_1 et d_2 sont **topologiquement équivalentes** si et seulement si elles induisent la même topologie, c'est-à-dire, si et seulement si elles vérifient les deux conditions suivantes

(i) $\forall x \in \mathbb{X}\ \forall r > 0\ \exists r' > 0, \quad B_{d_2}(x, r') \subset B_{d_1}(x, r)$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{X}\ \forall \rho > 0\ \exists \rho' > 0, \quad B_{d_1}(x, \rho') \subset B_{d_1}(x, \rho)$.

Proposition 1.10.43 *Deux distances équivalentes engendrent la même topologie.*

Démonstration 1.10.44 Soient d et d' deux distances équivalentes sur l'ensemble $\mathbb{X}$. Par définition il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que, $\forall x, y \in \mathbb{X}$, on a

$$C_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C_2 d(x, y). \tag{1.10.3}$$

- Soient $x \in \mathbb{X}$ et $r > 0$. Notre objectif est de trouver $r' > 0$ tel que

  $$B_{d'}(x, r') \subset B_d(x, r).$$

  Prenons $r' > 0$. Alors pour tout $y \in B_{d'}(x, r')$ on a

  $$d'(x, y) < r'.$$

D'après (1.10.3), on a
$$C_1 d(x,y) \leq d'(x,y) < r'.$$
Pour que $y \in B_d(x,r)$ il suffit de supposer que $r' \leq C_1 r$. Alors pour $r' = C_1 r$ on a
$$B_{d'}(x,r') \subset B_d(x,r).$$

- Soient $x \in \mathbb{X}$ et $\rho > 0$. Notre objectif est de trouver $\rho' > 0$ tel que
$$B_d(x,\rho') \subset B_{d'}(x,\rho).$$
Prenons $\rho' > 0$. Alors pour tout $y \in B_d(x,\rho')$ on a
$$d(x,y) < \rho'.$$
D'après (1.10.3), on a
$$d'(x,y) \leq C_2 d(x,y) < C_2\rho'.$$
Pour que $y \in B_{d'}(x,\rho)$ il suffit de supposer que $\rho' \leq \frac{\rho}{C_2}$. Alors pour $\rho' = \frac{\rho}{C_2}$ on a
$$B_d(x,\rho') \subset B_{d'}(x,\rho).$$

Donc d et d' sont topologiquement équivalentes.

Remarque 1.10.45 La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse. En effet, considérons les distances d_1 et d_2 sur $\mathbb{R}$ définies par
$$d_1(x,y) = |x-y| \quad \text{et} \quad d_2(x,y) = \frac{d_1(x,y)}{1+d_1(x,y)} = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Posons $r' = \frac{r}{r+1}$. Alors pour tout $y \in B_{d_2}(x,r')$ on a
$$d_2(x,y) < r' \Longrightarrow \frac{d_1(x,y)}{1+d_1(x,y)} < r' = \frac{r}{r+1}.$$
Comme la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow [0,1[,\ x \longmapsto f(x) = \frac{x}{1+x}$ est croissante (car $f' > 0$), on déduit que
$$d_1(x,y) < r.$$
Alors $y \in B_{d_1}(x,y)$. Donc
$$B_{d_2}(x,r') \subset B_{d_1}(x,r).$$
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \rho < 1$. Supposons $\rho' = \frac{\rho}{1-\rho}$. Alors pour tout $y \in B_{d_1}(x,\rho')$ on a
$$d_1(x,y) < \rho' = \frac{\rho}{1-\rho} \Longrightarrow d_1(x,y)(1-\rho) < \rho \Longrightarrow d_1(x,y) < \rho + \rho d_1(x,y).$$
Ceci implique
$$d_1(x,y) < \rho\,(1+d_1(x,y)) \Longrightarrow \frac{d_1(x,y)}{1+d_1(x,y)} < \rho \Longrightarrow d_2(x,y) < \rho.$$
Alors $y \in B_{d_2}(x,\rho)$ Donc
$$B_{d_1}(x,\rho') \subset B_{d_2}(x,\rho).$$
D'où
$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall r > 0, \exists r' = \frac{r}{r+1}, \quad B_{d_2}(x,r') \subset B_{d_1}(x,r)$$
et
$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \rho > 0, \exists \rho' = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad B_{d_1}(x,\rho') \subset B_{d_2}(x,r\rho).$$
Donc les topologies associées aux distances d_1 et d_2 sur $\mathbb{R}$ sont les mêmes.

- Bien que ces deux distances ne soient pas équivalentes car pour y fixé, on a

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} d_1(x,y) = +\infty \ \textbf{ et } \ \lim_{x\longrightarrow+\infty} d_2(x,y) = 1.$$

Alors il n'existe pas une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d_1(x,y) \leq C d_2(x,y).$$

1.10.3 Continuité dans les espaces métriques

Définition 1.10.46 Soient $(\mathbb{X}_1, d_1)$, $(\mathbb{X}_2, d_2)$ deux espaces métriques et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}_1$. Une application $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{X}_2$ est **continue** en $x \in \mathcal{A}$ si et seulement si on a

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta_{\varepsilon,x}, \forall y \in \mathcal{A}, d_1(x,y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

D'une manière équivalente

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta_{\varepsilon,x}, \forall y \in B_{d_1}(x,\delta) \cap \mathcal{A} \Longrightarrow f(y) \in B_{d_2}(f(x), \varepsilon).$$

Si f est continue en tout point de $\mathcal{A}$, on dit que f est continue sur $\mathcal{A}$.

Exemple 1.10.47 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d = |.|$, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue. En effet, soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Notre objectif est de trouver $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$d(x,y) = |x-y| < \delta_{x,\varepsilon},$$

implique

$$d(f(x), f(y)) = \left|x^2 - y^2\right| < \varepsilon.$$

C'est-à-dire

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad x - \delta_{x,\varepsilon} < y < x + \delta_{x,\varepsilon},$$

on ait

$$x^2 - \varepsilon < y^2 < x^2 + \varepsilon.$$

D'après cette dernière inégalité, on a

$$|y| < \sqrt{x^2+\varepsilon}.$$

Alors il suffit de poser $\delta_{x,\varepsilon} + |x| = \sqrt{x^2+\varepsilon}$, c'est-à-dire, $\delta_{x,\varepsilon} = \sqrt{x^2+\varepsilon} - |x|$ pour avoir la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.10.48 *Soient $(\mathbb{X}_1, d_1)$, $(\mathbb{X}_2, d_2)$ deux espaces métriques et $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ une application. Alors f est continue en un point $x \in \mathbb{X}_1$ si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{X}$ convergeant vers x, on a $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration 1.10.49 Seule la réciproque est à montrer, l'implication directe étant vraie dans n'importe que espace topologique (voir proposition 1.9.8).

Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas continue en x. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\delta > 0$, $\exists y_\delta \in B_{d_1}(x,\delta)$ vérifiant $f(y_\delta) \notin B_{d_2}(f(x), \varepsilon)$, c'est-à-dire, $d_2(f(x), f(y_\delta)) \geq \varepsilon$. Prenons $\delta = \frac{1}{2^n}$. Nous construisons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B_{d_1}(x, \frac{1}{2^n}) \ \textbf{ et } \ f(x_n) \notin B_{d_2}(f(x), \varepsilon).$$

En conséquence, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$ bien que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x. Ce qui constitue une contradiction.

On peut définir une notion plus forte de continuité, appelée **continuité uniforme**.

Définition 1.10.50 Soient $(\mathbb{X}_1, d_1)$ et $(\mathbb{X}_2, d_2)$ deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ est **uniformément continue** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon, \forall (x, y) \in \mathbb{X}_1^2, d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.10.51 Il est clair que la continuité uniforme entraîne la continuité. La réciproque est fausse en général (mais vraie dans le cas d'espace métrique compact (voir chapitre 2)). En effet, soient $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d = |.|$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = x^2$ (continue sur $\mathbb{R}$). Supposons $0 < \varepsilon < 1$ et $\delta > 0$ quelconque. Posons $x = y + \frac{\delta}{2}$. Alors

$$d(x, y) = |x - y| = \left| y + \frac{\delta}{2} - y \right| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Néanmoins

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| x^2 - y^2 \right| = \left| \left(y + \frac{\delta}{2} \right)^2 - y^2 \right| = \left| y\delta + \frac{\delta^2}{4} \right|.$$

Prenant $y = \frac{1}{\delta}$, on obtient

$$d(f(x), f(y)) = \left| 1 + \frac{\delta^2}{4} \right| > 1 > \varepsilon.$$

Donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.10.52 Soient $(\mathbb{X}_1, d_1)$ et $(\mathbb{X}_2, d_2)$ deux espaces métriques. Une application $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ est dite **lipschitzienne de rapport** $k > 0$ si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X}_1^2, d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y).$$

Remarque 1.10.53 Toute application lipschitzienne est uniformément continue. En effet, il suffit de supposer $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ dans la définition de la continuité uniforme. la réciproque est fausse en général.

Exemple 1.10.54 Soit $\mathbb{R}_+$ muni de la distance usuelle $d = |.|$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

- Montrons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a

  $$\left| \sqrt{x} - \sqrt{y} \right| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

  Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \varepsilon^2$ tel que quelque soit $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $d(x, y) = |x - y| < \delta$, on a

  $$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| \sqrt{x} - \sqrt{y} \right| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

- Montrons que f n'est pas lipschitzienne. Supposons $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y = 0$, alors on a

  $$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

  Pour x tend vers 0, on a $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$. Alors

  $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = +\infty.$$

On déduit que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, il n'existe aucune constante strictement positive k telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Donc la fonction f n'est pas lipschitzienne.

Définition 1.10.55 Soient $(\mathbb{X}_1, d_1)$ et $(\mathbb{X}_2, d_2)$ deux espaces métriques. On appelle **isométrie** de $\mathbb{X}_1$ sur $\mathbb{X}_2$ toute application $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{X}_1, d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

Proposition 1.10.56 *Toute isométrie surjective* $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ *entre deux espaces métriques* $(\mathbb{X}_1, d_1)$ *et* $(\mathbb{X}_2, d_2)$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration 1.10.57 Il est clair qu'une isométrie est injective. En effet, si $f(x) = f(y)$, alors

$$d_2(f(x), f(y)) = 0.$$

Comme $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$, on trouve

$$d_1(x, y).$$

Ce qui donne

$$x = y.$$

Puisque f est surjective, on déduit qu'elle est bijective. Il en résulte que f et f^{-1} existent qui sont continues car elles sont k-lipschitzienne $(k = 1)$. Ce qui montre que f est un homéomorphisme.

1.10.4 Espaces métriques séparables

Définition 1.10.58 Une partie $\mathcal{A}$ de l'espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ est **dense** dans $\mathbb{X}$ si $\overline{\mathcal{A}} = \mathbb{X}$, *i.e.*,

$$\forall x \in \mathbb{X}, \forall r > 0, B(x, r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

Proposition 1.10.59 *Une partie* $\mathcal{A}$ *d'un espace métrique* $(\mathbb{X}, d)$ *est dense si et seulement si tout élément de* $\mathbb{X}$ *est une limite d'une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$.

Démonstration 1.10.60

- Supposons que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{X}$ et x un élément arbitraire de $\mathbb{X}$. Alors, d'après la proposition 1.3.6, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B(x, 2^{-n}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

  Il s'en suit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un élément x_n tel que

$$x_n \in B(x, 2^{-n}) \cap \mathcal{A}.$$

  Alors on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathcal{A}$ qui converge vers x.

- Réciproquement, soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$, x un élément quelconque de $\mathbb{X}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ qui converge vers x. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que quelque soit $n \geq N_\varepsilon$ on ait

$$x_n \in B(x, \varepsilon).$$

  Ceci implique

$$B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

  Alors d'après la proposition 1.3.6, on a $x \in \overline{\mathcal{A}}$. Ce qui donne

$$\mathbb{X} = \overline{\mathcal{A}}.$$

  Donc $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{X}$.

Définition 1.10.61 Un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ est **séparable** s'il contient une partie au plus dénombrable (fini ou dénombrable) qui est dense dans $\mathbb{X}$.

Exemple 1.10.62
1. L'ensemble $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle est séparable car $\mathbb{Q}$ est un sous ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'une des trois distances usuelles est un espace métrique séparable car le sous ensemble $\mathbb{Q}^2$ dénombrable est dense dans $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathbb{R}^n$ est aussi séparable, avec $\mathbb{Q}^n$ dense.

1.11 Exercices

Exercice 1.11.1
1. *Soit $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$. Déterminer toutes les topologies sur $\mathbb{X}$ qui contiennent 4 éléments au maximum.*
2. *$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant deux sous-ensembles propres (c'est-à-dire, $\mathcal{A} \subsetneq \mathbb{X}$, $\mathcal{B} \subsetneq \mathbb{X}$) non vide de $\mathbb{X}$. Sous quelles hypothèses la famille $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{X}\}$ définit-elle une topologie sur $\mathbb{X}$?*
3. *Soit $\mathbb{X}$ un ensemble non vide. Montrer que $\mathcal{T} = \{\mathcal{A} \subset \mathbb{X}/\mathcal{A}^C$ est fini$\} \cup \{\emptyset\}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.*

Exercice 1.11.2 *Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de topologies sur $\mathbb{X}$. Montrer que l'intersection quelconque $\mathcal{T} = \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.*

Exercice 1.11.3 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux parties de $\mathbb{X}$. Montrer les propriétés suivantes*
1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Longrightarrow \mathring{\mathcal{A}} \subset \mathring{\mathcal{B}}$ *et* $\overline{\mathcal{A}} \subset \overline{\mathcal{B}}$.
2. $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}} = \mathring{\mathcal{A}} \cap \mathring{\mathcal{B}}$ *et* $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$.
3. $\mathring{\mathcal{A}} \cup \mathring{\mathcal{B}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}}$ *et* $\overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}$.
4. $\mathbb{X}/\overline{\mathcal{A}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{X}/\mathcal{A}}}$ *et* $\mathbb{X}/\mathring{\mathcal{A}} = \overline{\mathbb{X}/\mathcal{A}}$.

Exercice 1.11.4 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie ouverte de $\mathbb{X}$. Montrer que pour toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathbb{X}$, on a*

$$\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}.$$

Exercice 1.11.5 *Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur $\mathbb{X}$ telles que $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$. Montrer que si $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_2)$ est séparé alors $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_1)$ est aussi séparé.*

Exercice 1.11.6 *Soient $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}_2$ deux ensembles et $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ une application. Montrer que si $\mathcal{T}_2$ est une topologie sur $\mathbb{X}_2$, alors l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{T}_2) = \{f^{-1}(\mathcal{O}')\backslash\mathcal{O}' \in \mathcal{T}_2\}$ est une topologie sur $\mathbb{X}_1$.*

Exercice 1.11.7 *Soient $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$, $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ une application continue. Montrer que*
1. *Pour tout partie A de $\mathbb{X}_1$, on a $f(\overline{\mathcal{A}}) \subset \overline{f(\mathcal{A})}$.*
2. *Pour tout partie $\mathcal{B}$ de $\mathbb{X}_2$, on a*

$$f^{-1}(\mathring{\mathcal{B}}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(\mathcal{B})}} \quad \textit{\textbf{et}} \quad \overline{f^{-1}(\mathcal{B})} \subset f^{-1}(\overline{\mathcal{B}}).$$

Exercice 1.11.8 *Soient* $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$, $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces topologiques,* $\mathcal{A}$ *une partie de* $\mathbb{X}_1$ *et* $\mathcal{B}$ *une partie de* $\mathbb{X}_2$*. Montrer que*

1. $\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}}$.
2. *Si* $\mathcal{A}$ *est dense dans* $\mathbb{X}_1$ *et* $\mathcal{B}$ *est dense dans* $\mathbb{X}_2$*, alors* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *est dense dans* $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$.
3. *Si* $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ *et* $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ *sont séparé, alors* $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ *est séparé.*

Exercice 1.11.9 *Soient* $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ *et* $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces topologiques tels que* $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ *est séparé. Supposons que pour tout* $x, y \in \mathbb{X}_1$*, tels que* $x \neq y$*, il existe une application continue* $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ *telle que* $f(x) \neq f(y)$*. Montrer que* $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ *est séparé.*

Exercice 1.11.10 *Soient* $(\mathbb{X}, d)$ *un espace métrique et* $d^* : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une application définie par*

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

1. *Étudier la variation de la fonction* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par*
$$f(x) = \frac{x}{1 + x}.$$
2. *Vérifier que* d^* *est une distance sur* $\mathbb{X}$.

Exercice 1.11.11 *Dans* $\mathbb{R}^n$ *on considère les applications* d_1, d_2 *et* d_3 *définies par*

$$d_1(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\,, \quad d_2(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_3(X, Y) = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} |x_i - y_i|$$

où $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $Y = (y_1, \ldots, y_n)$.

1. *Vérifier que* d_1, d_2 *et* d_3 *sont des distances sur* $\mathbb{R}^n$.
2. *Montrer que ces distances sont équivalentes.*

Exercice 1.11.12 *Soient* $\mathbb{X}$ *un ensemble et* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application injective.*

1. *Montrer que l'application*
$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$$
est une distance sur $\mathbb{X}$.
2. *Déduire que l'application* $d^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $d^*(x, y) = \left|x^3 - y^3\right|$ *est une distance sur* $\mathbb{R}$.
3. *Pour* $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+^*$ *et* $f(x) = \frac{1}{x}$*, définir les boules de centre 2 et de rayon* r.

Exercice 1.11.13 *Soient* $\mathbb{X} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ *et* d_1, d_2, d_3 *trois applications définies sur* $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx, \quad d_2(f, g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\text{et} \quad d_3(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|\,.$$

1. *Vérifier que les applications* d_1, d_2 *et* d_3 *sont des distances sur* $\mathbb{X}$.

2. *On considère la suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & si \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & si \quad \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{2}{n} \\ 0 & si \quad \dfrac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

   (a) *Vérifier que* $f_n \in \mathbb{X}$.

   (b) *Calculer pour* $g = 0$, $d_1(f_n, g)$, $d_2(f_n, g)$ *et* $d_\infty(f_n, g)$.

   (c) *Déduire que* d_1, d_2 *et* d_3 *ne sont pas équivalentes.*

Exercice 1.11.14 *Soient* $(\mathbb{X}, d_i)_{1\le i\le n}$, $(n \in \mathbb{N})$, *une famille d'espaces métriques. On considère le produit cartésien* $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \ldots \times \mathbb{X}_n$.

1. *Montrer que les applications suivantes sont des distances sur* $\mathbb{X}$

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i \quad et \quad D_\infty = \max_{1\le i\le n} d_i.$$

   Que peut-on dire si $n = \infty$ *?*

2. *Montrer que dans ce dernier cas on peut prendre comme distance sur* $\mathbb{X}$

$$D_1' = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i}{1+d_i} \quad et \quad D_\infty' = \max_{i\ge 1}\left(\min\left(\frac{1}{2^i}, d_i\right)\right).$$

Exercice 1.11.15 *Soient* $(\mathbb{X}, d)$ *un espace métrique et* $\mathcal{A}$ *une partie de* $\mathbb{X}$. *Montrer que*

$$|d(x, \mathcal{A}) - d(y, \mathcal{A})| \le d(x, y).$$

Exercice 1.11.16 *Soient* $(\mathbb{X}, d)$ *un espace métrique et* $\mathcal{A}$ *une partie de* $\mathbb{X}$.

1. *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes*

   (a) $x \in \overline{\mathcal{A}}$.

   (b) *Pour tout* $r > 0$, *la boule* $B(x, r) \cap \mathcal{A} \ne \emptyset$.

   (c) *Il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *converge vers* x.

2. *Montrer que*

   (a) $x \in \overline{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow d(\mathcal{A}, x) = 0$.

   (b) $x \in \mathring{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow d(x, \mathbb{X}/\mathcal{A}) > 0$.

Exercice 1.11.17 *Dans* $\mathbb{R}$, *muni de la distance usuelle, donner l'adhérence, l'intérieur, les points d'accumulations et les points isolés des parties suivantes*

$$\mathbb{A} = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$\mathbb{B} =]-\infty, -1[\cup \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 1.11.18 *1. Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. Les parties suivantes sont ouvertes ? fermées ? (dans $\mathbb{R}$)*

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{A} =]0,1], \quad \mathbb{B} =]-\infty, 1] \quad \mathbb{C} = \left\{ \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \mathbb{D} = \left\{ \frac{1}{n+1}, 0 \right\}.$$

2. *On munie $\mathbb{R}^2$ de l'une des trois distances usuelles. Les parties suivantes sont ouvertes ? fermées ? (dans $\mathbb{R}^2$)*
   (a) $\mathbb{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + 1 < y\}$.
   (b) $\mathbb{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 1 \geq e^{2y}\}$.
   (c) $\mathbb{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x > y^2, y \leq 0\}$.

Exercice 1.11.19 *Soient $\mathbb{R}_+$ muni de la distance usuelle ($d = |\ .\ |$) et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par*

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \qquad (n \geq 2).$$

1. *Vérifier que l'application $d_1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$: définie par*

$$d_1(x,y) = (| x - y |)^{\frac{1}{n}}, \quad n \geq 2$$

   est une distance sur $\mathbb{R}_+$.
2. *Montrer que $| d_1(x,0) - d_1(0,y) | \leq d_1(x,y)$.*
3. *Déduire que $| x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}} | \leq | x - y |^{\frac{1}{n}}$.*
4. *Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais qu'elle n'est pas lipschitzienne.*

CHAPITRE 2

ESPACES COMPACTS

La notion de compacité joue un rôle très important en analyse mathématique. Son intérêt réside dans le fait que certaines études globales peuvent être remplacées par des études locales.

Nous étudions dans ce chapitre quelques notions de base et les propriétés élémentaires des espaces compacts.

2.1 Espace topologique compact

Définition 2.1.1 Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\{\mathcal{O}_i, i \in I\}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{X}$ et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$.

1. On dit que la famille $\{\mathcal{O}_i, i \in I\}$ est un **recouvrement** de $\mathbb{X}$ si $\mathbb{X} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.
2. On dit que la famille $\{\mathcal{O}_i, i \in I\}$ est un **recouvrement** de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.

Définition 2.1.2
1. Un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est **compact** s'il est séparé et si tout recouvrement de $\mathbb{X}$ par des ouverts admet un sous-recouvrement fini, *i.e.*,
$$\left(\mathbb{X} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i\right) \Longrightarrow \left(\exists J \subset I \ (J \textbf{ fini}),\ \mathbb{X} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j\right).$$
2. Une partie $\mathcal{A}$ d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est **compacte** si, munie de la topologie induite, est un espace topologique compact.

Proposition 2.1.3 *Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Alors $\mathbb{X}$ est compact si et seulement si de toute famille de fermés d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide, c'est-à-dire, pour toute famille de fermés $\{F_i, i \in I\}$ $(I \subset \mathbb{N})$ telle que*
$$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset,$$
il existe un sous-ensemble fini J de I tel que
$$\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset.$$

Démonstration 2.1.4 • Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille des fermés de $\mathbb{X}$ telle que

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset.$$

Alors

$$\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^C = \emptyset^C.$$

Ceci implique

$$\bigcup_{i\in I} F_i^C = \mathbb{X}.$$

Comme F_i est un fermé de $\mathbb{X}$ pour tout $i \in I$, on déduit que F_i^C est un ouvert. Alors la famille des ouverts $(F_i^C)_{i\in I}$ est un recouvrement de $\mathbb{X}$. Puisque $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est compact, il existe un sous-recouvrement fini de $\mathbb{X}$, c'est-à-dire, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que

$$\bigcup_{j\in J} F_j^C = \mathbb{X}.$$

En passant au complémentaire, on obtient

$$\left(\bigcup_{j\in J} F_j^C\right)^C = \bigcap_{j\in J}(F_j^C)^C = \bigcap_{j\in J} F_j = \mathbb{X}^C.$$

Donc

$$\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset.$$

• Réciproquement, soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{X}$ telle que

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i = \mathbb{X}.$$

Alors

$$\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i\right)^C = \mathbb{X}^C.$$

Ceci implique

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i^C = \emptyset.$$

Comme O_i est un ouvert de $\mathbb{X}$ pour tout $i \in \mathbb{X}$, on déduit que O_i^C est un fermé de $\mathbb{X}$. Alors $(O_i^C)_{i\in I}$ est une famille des fermés d'intersection vide. Donc on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide, c'est-à-dire, il existe $J \subset I$ (J fini) tel que

$$\bigcap_{j\in J} O_j^C = \emptyset.$$

En passant au complémentaire, on obtient

$$\left(\bigcap_{j\in J} \mathcal{O}_j^C\right)^C = \bigcup_{j\in J}(O_j^C)^C = \bigcup_{j\in J} O_j = \emptyset^C.$$

Alors
$$\bigcup_{j\in J} O_j = \mathbb{X}.$$
Donc $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ est compact.

Proposition 2.1.5 *Soient* $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ *un espace topologique séparé et* $\mathcal{A}$ *une partie de* $\mathbb{X}$. *Alors* $\mathcal{A}$ *est compacte si et seulement si de toute famille d'ouverts de* $\mathbb{X}$ *recouvrant* $\mathcal{A}$ *on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e.,*
$$\left(\mathcal{A}\subset\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}'_i\right)\Longrightarrow\left(\exists J\subset I\ \ (J\ \textbf{fini}),\ \mathcal{A}\subset\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}'_j\right).$$

Démonstration 2.1.6 • Soit $(\mathcal{O}'_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{X}$ (*i.e.*, $\mathcal{O}'_i\in\mathcal{T}$) telle que
$$\mathcal{A}\subset\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}'_i.$$
Alors $\mathcal{O}_i=\mathcal{O}'_i\cap\mathcal{A}$ est un ouvert de $\mathcal{A}$ (*i.e.*, $\mathcal{O}_i\in\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$) et
$$\mathcal{A}=\mathcal{A}\cap\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}'_i\right)=\bigcup_{i\in I}(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}'_i)=\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i.$$
Comme $\mathcal{A}$ est compacte, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que
$$\mathcal{A}=\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}_j.$$
Alors
$$\mathcal{A}=\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}_j=\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}'_j\cap\mathcal{A}\subset\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}'_j\qquad(\textbf{car }\mathcal{O}'_j\cap\mathcal{A}\subset\mathcal{O}'_j).$$

- Réciproquement, soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathcal{A}$ (*i.e.*, $\mathcal{O}_i\in\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$) telle que
$$\mathcal{A}=\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i.$$
Par définition de la topologie induite, pour tout $i\in I$, il existe $\mathcal{O}'_i\in\mathcal{T}$ (ouvert de $\mathbb{X}$) tel que
$$\mathcal{O}_i=\mathcal{O}'_i\cap\mathcal{A}.$$
Ceci implique
$$\mathcal{A}=\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i=\bigcup_{i\in I}(\mathcal{O}'_i\cap\mathcal{A})\subset\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}'_i\qquad(\textbf{car }\mathcal{O}'_i\cap\mathcal{A}\subset\mathcal{O}'_i).$$
Donc il existe un sous-ensemble fini J de I tel que
$$\mathcal{A}\subset\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}'_j.$$
Ce qui donne
$$\mathcal{A}=\mathcal{A}\cap\left(\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}'_j\right)=\bigcup_{j\in J}(\mathcal{O}'_j\cap\mathcal{A})=\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}_j.$$

Maintenant, on montre que $(\mathcal{A}, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ est séparé. Soit $x, y \in \mathcal{A}$ tels que $x \neq y$. Comme $\mathcal{A} \subset \mathbb{X}$, on a $x, y \in \mathbb{X}$. Puisque $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est séparé, il existe deux ouverts $\mathcal{O}'_1$ et $\mathcal{O}'_2$ de $\mathbb{X}$ tels que

$$x \in \mathcal{O}'_1, \quad y \in \mathcal{O}'_2 \quad \textbf{et} \quad \mathcal{O}'_1 \cap \mathcal{O}'_2 = \emptyset.$$

Ceci implique

$$\mathcal{A} \cap (\mathcal{O}'_1 \cap \mathcal{O}'_2) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}'_1) \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}'_2) = \emptyset.$$

On a $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}'_1$, $y \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}'_2$ et $(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}'_1), (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}'_2) \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Alors $(\mathcal{A}, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ est séparé.
Donc $(\mathcal{A}, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ est compact.

Exemple 2.1.7 1. Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $\mathcal{A} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une partie fini de $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{A}$ est compacte. En effet, soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{X}$ telle que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Alors pour tout $m \in \{1, \ldots, n\}$ il existe $i_m \in I$ tel que

$$x_m \in \mathcal{O}_{i_m}.$$

Ceci implique

$$\mathcal{A} = \bigcup_{m=1}^{n} \{x_m\} \subset \bigcup_{m=1}^{n} \mathcal{O}_{i_m}.$$

Donc $\mathcal{A}$ est compacte.

2. Un espace topologique discret $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est compact si et seulement si $\mathbb{X}$ est fini. En effet, on rappelle que la topologie discret est toujours séparé.
   - Si $\mathbb{X}$ est compact, alors la famille d'ouverts $(\{x\})_{x\in\mathbb{X}}$ de $\mathbb{X}$ recouvre $\mathbb{X}$ (*i.e.*, $\mathbb{X} = \bigcup_{x\in\mathbb{X}}\{x\}$) n'admet que la famille $(\{x\})_{x\in\mathbb{X}}$ comme un sous-recouvrement de $\mathbb{X}$. Comme $\mathbb{X}$ est compact, on déduit que la famille $(\{x\})_{x\in\mathbb{X}}$ est fini. Donc $\mathbb{X} = \bigcup_{x\in\mathbb{X}}\{x\}$ est fini.
   - Réciproquement, si $\mathbb{X}$ est fini, alors d'après l'exemple ci-dessus on déduit que $\mathbb{X}$ est compact.
3. Pour $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, l'intervalle $\mathcal{A} = [0, 1[$ de $\mathbb{R}$ n'est pas compact. En effet, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on considère $\mathcal{O}_x =]x - \frac{1}{2}, \frac{x+1}{2}[$. Il est clair que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{x\in\mathcal{A}} \mathcal{O}_x$. Alors $(\mathcal{O}_x)_{x\in\mathcal{A}}$ est un recouvrement de $\mathcal{A}$. Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un sous ensemble finie de $\mathcal{A}$. Alors $(\frac{x_1+1}{2}, \frac{x_2+1}{2}, \ldots, \frac{x_n+1}{2})$ est aussi un sous-ensemble de $\mathcal{A}$. Posons $a = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{\frac{x_i+1}{2}\}$. Alors $a \in \mathcal{A}$ et $]a, 1[\subset \mathcal{A}$. On plus, on a

$$]a, 1[\cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{x_i}\right) = \emptyset.$$

Alors $(\mathcal{O}_x)_{x\in\mathcal{A}}$ n'admet aucun sous recouvrement fini contenant $\mathcal{A}$.
Donc $\mathcal{A}$ n'est pas un compact.

Théorème 2.1.8 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$.*

1. *Si $\mathcal{A}$ est compacte, alors $\mathcal{A}$ est fermée.*
2. *Si $\mathcal{A}$ est fermée, et si de plus $\mathbb{X}$ est compact alors $\mathcal{A}$ est compacte.*

Démonstration 2.1.9 1. Pour montrer que $\mathcal{A}$ est fermée, on montre que son complémentaire $\mathcal{A}^C = \mathbb{X} \backslash \mathcal{A}$ est un ouvert ou est un voisinage de tout ses points, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathcal{A}^C$ il existe un ouvert $\mathcal{O}_x$ de $\mathbb{X}$ tel que

$$x \in \mathcal{O}_x \subset \mathcal{A}^C.$$

Soit $x \in \mathcal{A}^C$. Alors

$$x \notin \mathcal{A}.$$

Comme $\mathbb{X}$ est séparé, on déduit que pour tout $a \in \mathcal{A}$ il existe deux voisinages disjoints V_a et V'_a ($i.e.$, $V_a \cap V'_a = \emptyset$) tels que

$$x \in V_a, \quad \textbf{et} \quad a \in V'_a.$$

Alors il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_a \subset V_a$ et $\mathcal{O}'_a \subset V'_a$ tels que

$$x \in \mathcal{O}_a, \quad a \in \mathcal{O}'_a \quad \textbf{et} \quad \mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}'_a = \emptyset.$$

Il est clair que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{a\} \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{O}'_a.$$

Alors la famille d'ouverts $(\mathcal{O}'_a)_{a\in\mathcal{A}}$ constitue un recouvrement de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini $(\mathcal{O}'_{a_i})_{1\leq i\leq n}$ de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}'_{a_i}.$$

D'un autre côté, il est clair que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{a_i}$ est un ouvert tel que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{a_i} \quad \textbf{et} \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{a_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}'_{a_i}\right) = \emptyset.$$

Alors

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{a_i} \quad \textbf{et} \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{a_i}\right) \cap \mathcal{A} = \emptyset \quad (\textbf{car } \mathcal{A} \subset \cup_{i=1}^{n} \mathcal{O}'_i).$$

Ce qui donne

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{a_i} \subset \mathcal{A}^C.$$

Donc

$$\mathcal{A}^C \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

Ce qui prouve que $\mathcal{A}$ est un fermé.

2. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{X}$ telle que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Comme $\mathcal{A}$ est fermée, on déduit que $\mathcal{A}^C = \mathbb{X}\backslash\mathcal{A}$ est un ouvert. Puisque $\mathbb{X} = \mathcal{A}^C \cup \mathcal{A}$, on a

$$\mathbb{X} = \mathcal{A}^C \cup \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i\right) = \bigcup_{i\in I} \left(\mathcal{O}_i \cup \mathcal{A}^C\right).$$

Pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{O}_i \cup \mathcal{A}^C \in \mathcal{T}$. Alors la famille $\left(\mathcal{O}_i \cup \mathcal{A}^C\right)_{i\in I}$ est un recouvrement de $\mathbb{X}$ et comme $\mathbb{X}$ est compact, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{j\in J} \left(\mathcal{O}_j \cap \mathcal{A}^C\right) = \mathcal{A}^C \cup \left(\bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j\right).$$

Puisque $\mathbb{X} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^C$, on déduit que

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j.$$

Donc $\mathcal{A}$ est compacte.

Exemple 2.1.10 Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. L'intervalle $]0,1]$ n'est pas fermé. D'après le théorème 2.1.8 cet intervalle n'est pas compact.

Proposition 2.1.11 *Dans un espace topologique séparé* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, *on a*

1. *Toute réunion finie des compacts est un compact.*
2. *Toute intersection quelconque des compacts est un compact.*
3. *L'intersection d'un fermé et d'un compact est un compact.*

Démonstration 2.1.12

1. Soit $(\mathcal{A}_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille des parties compactes de $\mathbb{X}$. Montrons que $\mathcal{A} := \bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k$ est un compact. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que
$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i.$$
Alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a
$$\mathcal{A}_k \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i.$$
Comme $\mathcal{A}_k$ est compact, il existe une sous-ensemble fini J_k de I tel que
$$\mathcal{A}_k \subset \bigcup_{j\in J_k} \mathcal{O}_j.$$
On pose $J = \bigcup_{k=1}^n J_k$ (J est la réunion des sous-ensembles finis alors il est fini). Alors
$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k \subset \left(\left(\bigcup_{j\in J_1} \mathcal{O}_j\right) \cup \ldots \cup \left(\bigcup_{j\in J_n} \mathcal{O}_j\right)\right) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j.$$
Donc $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k$ est un compact.
2. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque des compactes. On montre que $\mathcal{A} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est un compact. D'après le théorème 2.1.8, on a, pour tout $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ est un fermé (un compact est fermé). Alors $\mathcal{A}$ est un fermé (l'intersection quelconque des fermés est un fermé). D'un autre côté, on a, pour tout $i \in I$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_i$. Comme $\mathcal{A}_i$ est compacte et $\mathcal{A}$ est une partie fermée de $\mathcal{A}_i$ et d'après le théorème 2.1.8, on déduit que $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est un compact.
3. Soient $\mathcal{A}_1$ est un fermé de $\mathbb{X}$ et $\mathcal{A}_2$ est un compact de $\mathbb{X}$. D'après le théorème 2.1.8 la partie $\mathcal{A}_2$ est un fermé. Ceci implique que $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est un fermé. Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_2$ compact) et d'après le théorème 2.1.8, on déduit que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est un compact.

Proposition 2.1.13 *Soient* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique compact et* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante (au sens d'inclusion) des fermés non vides de* $\mathbb{X}$. *Alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *n'est pas vide.*

Démonstration 2.1.14 Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (au sens d'inclusion) de fermés non vides de $\mathbb{X}$. Montrons par l'absurde et supposons que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset.$$
Comme $\mathbb{X}$ est compact, d'après la proposition 2.1.3 il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\bigcap_{n=1}^{N} F_n = \emptyset.$$

Ceci implique

$$\bigcap_{n=1}^{N} F_n = F_N = \emptyset \quad \textbf{(car } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ est une suite décroissante au sens d'inclusion de } \mathbb{X}).$$

Ce qui constitue une contradiction avec le fait que les F_n sont tous non vides.

Proposition 2.1.15 *Dans un espace topologique compact, toute suite a au moins une valeur d'adhérence. En plus s'elle est unique alors la suite est convergente.*

Démonstration 2.1.16

- Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $S_n = \{x_p/p \geq n\}$ et par $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la proposition 1.9.20, on a

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n.$$

La famille $(\overline{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de l'espace compact $\mathbb{X}$, alors, d'après la proposition 2.1.13,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n \neq \emptyset.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au moins une valeur d'adhérence.

- Supposons $\mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n = \{x\}$, c'est-à-dire, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence et montrons que (x_n) converge vers x. Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{X}$ contenant x ($\mathcal{O}$ est un voisinage de x). Alors $F := \mathcal{O}^C$ est un fermé de $\mathbb{X}$ et ne contient pas x. Ce qui implique

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}_n\right) \cap F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{S}_n \cap F\right) = \emptyset.$$

Comme l'espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est compact et $\left(\overline{S}_n \cap F\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille quelconque des fermés de $\mathbb{X}$, d'après la proposition 2.1.3, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bigcap_{n=0}^{N} \left(\overline{S}_n \cap F\right) = \emptyset.$$

Puisque $(\overline{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés, on déduit que

$$\bigcap_{n=0}^{N} \left(\overline{S}_n \cap F\right) = \overline{S}_N \cap F = \emptyset.$$

Alors

$$\overline{S}_N = \overline{\{x_p/p \geq N\}} \subset F^C = \mathcal{O}.$$

Ce qui donne

$$\{x_p/p \geq N\} \subset \overline{\{x_p/p \geq N\}} \subset \mathcal{O}.$$

Donc

$$\exists N \in \mathbb{N}/ \ \forall p \geq N, \ \ x_p \in \mathcal{O}.$$

D'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Proposition 2.1.17 *Soient* $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ *un espace topologique compact et* $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ *un espace topologique séparé. Alors l'image de* $\mathbb{X}_1$ *par toute application continue de* $\mathbb{X}_1$ *dans* $\mathbb{X}_2$ *est compacte.*

Démonstration 2.1.18 Soient $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ une application continue et $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{X}_2$ telle que

$$f(\mathbb{X}_1) \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i.$$

Alors

$$\mathbb{X}_1 = f^{-1}\left(f(\mathbb{X}_1)\right) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(\mathcal{O}_i\right).$$

Par continuité de f, pour chaque $i \in I$, on a $f^{-1}(\mathcal{O}_i) \in \mathcal{T}$. Alors $\left(f^{-1}(\mathcal{O}_i)\right)_{i\in I}$ est un recouvrement de $\mathbb{X}_1$. Comme $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ est un compact, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que

$$\mathbb{X}_1 = \bigcup_{j\in J} f^{-1}\left(\mathcal{O}_j\right).$$

Alors

$$f\left(\mathbb{X}_1\right) = f\left(\bigcup_{j\in J} f^{-1}\left(\mathcal{O}_j\right)\right) = \bigcup_{j\in J} f\left(f^{-1}\left(\mathcal{O}_j\right)\right) \subset \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j \quad \textbf{(car } f^{-1}\left(\mathcal{O}_j\right) \subset \mathcal{O}_j \ \forall j \in J\textbf{)}.$$

Donc $f(\mathbb{X}_1)$ est compacte.

2.2 Espace métrique compact

La définition de compacité des espaces métriques est la même avec celle des espaces topologiques, sauf que les espaces métriques sont toujours séparés.

Définition 2.2.1 Un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ est **compact** si tout recouvrement de $\mathbb{X}$ admet un sous-recouvrement fini *i.e.*,

$$\left(\forall (\mathcal{O}_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_d^I,\ \mathbb{X} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i\right) \Longrightarrow \left(\exists J \subset I\ (J\ \textbf{fini}),\ \mathbb{X} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j\right),$$

où $\mathcal{T}_d$ est la topologie associée à d.

Définition 2.2.2 Une partie A dans espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ est **compacte** si toute famille d'ouverts de $\mathbb{X}$ recouvrant A on peut extraire un sous-recouvrement fini, *i.e.*,

$$\left(\forall (\mathcal{O}_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_d^I,\ \mathcal{A} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i\right) \Longrightarrow \left(\exists J \subset I\ (J\ \textbf{fini}),\ \mathcal{A} \subset \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j\right).$$

Dans un espace métrique, on peut caractériser la compacité avec des suites. C'est l'objectif de théorème de Bolzano-Weierstrass suivant.

Théorème 2.2.3 *Un espace métrique* $(\mathbb{X}, d)$ *est compact si et seulement si toute suite d'éléments de* $\mathbb{X}$ *admet une sous-suite convergente.*

Démonstration 2.2.4 1. Supposons que l'espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ est compact. Alors, d'après la proposition 2.1.15, chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathbb{X}$ admet une valeur d'adhérence et d'après la proposition 1.10.39, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. D'où l'implication directe est établie.

2. Réciproquement, soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique tel que chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathbb{X}$ admet une sous-suite convergente et $(\mathcal{O}_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_d^I$ un recouvrement de $\mathbb{X}$.
   (a) Montrons d'abord qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon ε soit contenue dans l'un des $\mathcal{O}_i$ (**Lemme de la maille**) *i.e.*,

   $$\forall x \in \mathbb{X},\ \exists i_x \in I /\ B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_{i_x}.$$

   Montrons par l'absurde qu'un tel ε n'existe pas. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{X}$ tel que $B(x_n, 2^{-n})$ ne soit contenue dans aucun $\mathcal{O}_i$, *i.e.*,

   $$\forall i \in I,\ B(x_n, 2^{-n}) \not\subset \mathcal{O}_i. \tag{2.2.1}$$

   Alors on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

   $$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall i \in I,\ \ B(x_n, 2^{-n}) \not\subset \mathcal{O}_i.$$

   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x de $\mathbb{X}$ (d'après la proposition 2.1.15 x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Comme $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ recouvre $\mathbb{X}$, il existe $i_0 \in I$ tel que O_{i_0} contient x et comme $\mathcal{O}_{i_0}$ est un ouvert contient x, par définition,

   $$\exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_{i_0}.$$

   Puisque x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq [\frac{\ln(2)-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}]+1$) tel que

   $$x_n \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \ \ \textbf{et} \ \ 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   D'un autre côté, pour tout $y \in B(x_n, 2^{-n})$, on a

   $$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Alors

   $$y \in B(x, \varepsilon).$$

   Ceci implique

   $$B(x_n, 2^{-n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_{i_0}.$$

   Ce qui constitue une contradiction avec (2.2.1).

   (b) Montrons maintenant que $\mathbb{X}$ est recouvert par une famille finie $(B(x_i, \varepsilon))_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ de boules ouvertes de rayon ε. Si c'est pas le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x_0, \ldots, x_n$ de $\mathbb{X}$, on a

   $$\bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon) \subsetneq \mathbb{X}.$$

   Alors il existe $x_{n+1} \in \mathbb{X}$ tel que

   $$x_{n+1} \notin \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Ce qui donne
$$\forall i \in \{0 \ldots, n\}, \quad x_{n+1} \notin B(x_i, \varepsilon).$$
Alors
$$\forall m \in \{0, \ldots, n\}, \ d(x_m, x_{n+1}) \geq \varepsilon.$$
Donc on peut construire un suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon) \subsetneq \mathbb{X} \ \textbf{ et } \ \forall m \in \{0, \ldots, n\}, \ d(x_m, x_{n+1}) \geq \varepsilon.$$
Pour tout sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a
$$\forall m \in \{0, \ldots, n\}, \ d(x_{\phi(m)}, x_{\phi(n+1)}) \geq \varepsilon \quad \textbf{(car } \phi \textbf{ est bijective)}.$$
Alors $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente (car elle n'est pas de Cauchy), en contradiction avec l'hypothèse.

(c) **Conclusion.** Dans la première étape on a montré qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon ε soit contenue dans un ouvert $\mathcal{O}_i$ *i.e.*,
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{X}, \ \exists i_x \in I, \ B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_{i_x}.$$
Dans la deuxième étape, on a montré que
$$\mathbb{X} = \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$
Alors
$$\mathbb{X} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{O}_i.$$
Donc $\mathbb{X}$ est compact.

Proposition 2.2.5 *Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $\mathcal{A}$ une partie compacte de $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{A}$ est fermée bornée.*

Démonstration 2.2.6 Soit $\mathcal{A}$ une partie compact de $\mathbb{X}$. D'après le théorème 2.1.8, $\mathcal{A}$ est fermée. Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est bornée. Soit $(B(x_i, r))_{i\in I}$, où $r > 0$, une famille d'ouverts de $\mathbb{X}$ recouvrant $\mathcal{A}$, c'est-à-dire,
$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i\in I} B(x_i, r).$$
Comme $\mathcal{A}$ est compacte, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que
$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{j\in J} B(x_j, r).$$
On a pour tout $j \in J$, $B(x_j, r)$ est bornée. Puisque la réunion finie des partie bornées est bornée, on déduit que $\mathcal{A}$ est aussi bornée.

2.3 Produits d'espaces métriques compacts

Proposition 2.3.1 *L'espace métrique $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \ldots \times \mathbb{X}_n$ (muni de la distance produit) est compact si et seulement si chaque $\mathbb{X}_i$ est compact pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Démonstration 2.3.2 Le produit $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \mathbb{X}_3$ est homéomorphe à $(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2) \times \mathbb{X}_3$. Alors nous limitons au produit de deux espaces métriques compacts $(\mathbb{X}_1, d_1)$ et $(\mathbb{X}_2, d_2)$.

- Supposons que le produit $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ est compact. Comme les projections canoniques $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \longrightarrow \mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ sont continues, on déduit, d'après la proposition 2.1.17, que $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ sont compacts.
- Réciproquement, supposons que $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ sont compacts. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($X_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$) une suite d'élément de $\mathbb{X}$. Par compacité de $\mathbb{X}_1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Par compacité de $\mathbb{X}_2$, la suite $(y_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente $(y_{\psi(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\phi(n) \geq n$ et $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une suite strictement croissante, on déduit que $(x_{\psi(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite convergente de $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (alors de$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Alors la sous-suite $(X_{\psi(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}} = \left(x_{\psi(\phi(n))}, y_{\psi(\phi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. D'après le théorème 2.2.3, on déduit que le produit $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ est compact.

Remarque 2.3.3 Le résultat de théorème ci-dessus reste vrai même dans le cas des espaces topologiques compacts. En effet, supposons que $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ sont compacts. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$. Soit $x \in \mathbb{X}_1$. Alors pour tout $y \in \mathbb{X}_2$ il existe $i_{(x,y)} \in I$ tel que

$$(x, y) \in \mathcal{O}_{i(x,y)}.$$

Alors il existe un ouvert $\mathcal{O}'_{(x,y)}$ de $\mathbb{X}_1$ contenant x et un ouvert $\mathcal{O}''_{(x,y)}$ de $\mathbb{X}_2$ contenant y tels que

$$(x, y) \in \mathcal{O}'_{(x,y)} \times \mathcal{O}''_{(x,y)} \subset \mathcal{O}_{i(x,y)}.$$

Il est clair que $\mathcal{O}''_{(x,y)}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{X}_2$ et comme il est compact, il existe une partie finie V_x de $\mathbb{X}_2$ telle que

$$\mathbb{X}_2 = \bigcup_{y\in V_x} \mathcal{O}''_{(x,y)}.$$

Supposons $\mathcal{O}'_x = \bigcap_{y\in V_x} \mathcal{O}'_{(x,y)}$. Alors $\mathcal{O}'_x$ est un ouvert de $\mathbb{X}_1$ contenant x (l'intersection finie d'ouverts). Il est aussi clair que $(\mathcal{O}'_x)_{x\in\mathbb{X}_1}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{X}_1$ et comme il est compact, il existe une partie finie U de $\mathbb{X}_1$ telle que

$$\mathbb{X}_1 = \bigcup_{x\in U} \mathcal{O}'_x.$$

Puisque pour tout $y \in V_x$ on a $\mathcal{O}'_x \subset \mathcal{O}'_{(x,y)}$, on déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 &= \bigcup_{x\in U} \mathcal{O}'_x \times \bigcup_{y\in V_x} \mathcal{O}''_{(x,y)} = \bigcup_{x\in U} \bigcup_{y\in V_x} \left(\mathcal{O}'_x \times \mathcal{O}''_{(x,y)}\right) \\ &\subset \bigcup_{x\in U} \bigcup_{y\in V_x} \left(\mathcal{O}'_{(x,y)} \times \mathcal{O}''_{(x,y)}\right) \subset \bigcup_{x\in U} \bigcup_{y\in V_x} \mathcal{O}_{(x,y)}.\end{aligned}$$

Soit $W = \{(x, y) \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2; x \in U \textbf{ et } y \in V_x\}$. Alors W est finie de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ et

$$\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \subset \bigcup_{(x,y)\in W} \mathcal{O}_{(x,y)}.$$

Donc $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ est compact.

2.4 Parties compactes de la droites réelle

Proposition 2.4.1 *L'intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration 2.4.2 Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est séparé, alors $[a,b]$ est séparé. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que

$$[a,b] \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i.$$

Montrons qu'il existe un sous-ensemble fini J de I tel que

$$[a,b] \subset \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j.$$

Soit $\mathbb{X}$ l'ensemble des points x de $[a,b]$ tels qu'il existe une partie fini J_1 de I vérifiant

$$[a,x] \subset \bigcup_{j\in J_1} \mathcal{O}_j.$$

L'ensemble $\mathbb{X}$ n'est pas vide car $a \in \mathbb{X}$ et majoré par b, alors il admet une borne supérieure $y \in [a,b]$. Comme $y \in [a,b]$, il existe un indice $i_y \in I$ tel que $y \in \mathcal{O}_{i_y}$. Puisque $\mathcal{O}_{i_y}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\subset \mathcal{O}_{i_y}.$$

Comme y est la borne supérieure de $\mathbb{X}$, il existe x de $\mathbb{X}$ tel que

$$y-\varepsilon < x \leq y.$$

Alors

$$[x,y] \subset [y-\varepsilon, y+\varepsilon] \subset \mathcal{O}_{i_y}.$$

Supposons $J = J_1 \cup \{i_y\}$. Alors J est un sous-ensemble fini de I et on a

$$[a,y] = [a,x] \cup [x,y] \subset \left(\bigcup_{j\in J_1} \mathcal{O}_j\right) \cup \mathcal{O}_{i_y} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j.$$

Donc $y \in \mathbb{X}$.

Maintenant montrons que $y = b$. Supposons que $y < b$. Alors pour tout $z \in]y, y+\varepsilon[\cap]y,b[$ on a

$$[y,z] \subset \mathcal{O}_{i_y}.$$

Ceci implique

$$[a,z] = [a,y] \cup [y,z] \subset \bigcup_{i\in J} \mathcal{O}_i.$$

Alors $z \in \mathbb{X}$, ce qui est impossible car y est la borne supérieure de $\mathbb{X}$ et $z > y$. Ce qui donne $y = b$, *i.e.*,

$$b \in \mathbb{X}, \quad [a,b] \subset \bigcup_{i\in J} \mathcal{O}_i.$$

D'où tout intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.

Remarque 2.4.3 Pour montrer la proposition ci-dessus on peut aussi utiliser le théorème 2.1.8. Plus exactement, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$, on peut extraire une sous-suite convergente en utilisant la méthode de dichotomie.

2.5 Applications continues sur un compact

La continuité uniforme c'est une notion plus forte que la continuité. La proposition suivante établit que dans un espace métrique compact, les deux notions sont équivalentes.

Proposition 2.5.1 *Soient* $(\mathbb{X}_1, d_1)$ *et* $(\mathbb{X}_2, d_2)$ *deux espaces métriques, le premier étant compact. Alors toute fonction continue de* $\mathbb{X}_1$ *vers* $\mathbb{X}_2$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{X}_1$.

Démonstration 2.5.2 Par définition de la continuité, pour chaque $x \in \mathbb{X}_1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_{\varepsilon,x} > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{X}_1,\ d_1(x,y) < \delta_{\varepsilon,x} \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5.1}$$

Par la compacité de $\mathbb{X}_1$, on peut trouver un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$\mathbb{X}_1 = \bigcup_{k=1}^{n} B_{d_1}\left(x_k, \frac{\delta_{\varepsilon,x_k}}{2}\right).$$

Posons $\delta_\varepsilon = \min_{1\leq k\leq n} \delta_{\varepsilon,x_k}$. Pour tout couple (x,y) tel que $d_1(x,y) < \delta_\varepsilon$, il existe $x^* \in \mathbb{X}$ tel que

$$x, y \in B_{d_1}\left(x^*, \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right).$$

Comme $x^* \in \mathbb{X}$ et $\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{n} B_{d_1}\left(x_k, \frac{\delta_{\varepsilon,x_k}}{2}\right)$ on peut trouver un indice k tel que

$$x^* \in B_{d_1}\left(x_k, \frac{\delta_{\varepsilon,x_k}}{2}\right).$$

D'un autre côté, pour tout $z \in B_{d_1}\left(x^*, \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)$, on a

$$d(z,x_k) \leq d(z,x^*) + d(x^*,x_k) < \frac{\delta_\varepsilon}{2} + \frac{\delta_{\varepsilon,x_k}}{2} \leq \frac{\delta_{\varepsilon,x_k}}{2} + \frac{\delta_{\varepsilon,x_k}}{2} = \delta_{\varepsilon,x_k}\ \ (\textbf{car}\ \delta_\varepsilon \leq \delta_{\varepsilon,x_k}\textbf{,}\ \forall k \in \{1,\ldots,n\}\,).$$

Ceci implique que $z \in B_{d_1}(x_k, \delta_{\varepsilon,x_k})$. Alors

$$B_{d_1}\left(x^*, \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right) \subset B_{d_1}(x_k, \delta_{\varepsilon,x_k}).$$

Comme $x, y \in B_{d_1}\left(x^*, \frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)$, on déduit que x et y soient dans $B_{d_1}(x_k, \delta_{\varepsilon,x_k})$. Ce qui donne

$$d_1(x,x_k) < \delta_{\varepsilon,x_k} \quad \textbf{et} \quad d_1(y,x_k) < \delta_{\varepsilon,x_k}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité (2.5.1), on obtient

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_k)) + d_2(f(x_k), f(y)) < \varepsilon.$$

D'où l'uniforme continuité.

Proposition 2.5.3 *Soient* $(\mathbb{X}, d)$ *un espace métrique compact et* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue. Alors* f *est bornée et atteint sur* $\mathbb{X}$ *ses bornes (inférieure et supérieure), c'est-à-dire, il existe* $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ *tels que*

$$f(x_1) = \sup_{x\in\mathbb{X}} f(x) \quad \textit{et} \quad f(x_2) = \inf_{x\in\mathbb{X}} f(x).$$

Démonstration 2.5.4 D'après la proposition 2.1.17, $f(\mathbb{X})$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. D'après la proposition 2.2.5, $f(\mathbb{X})$ est fermée bornée. Alors il existe $m, M \in f(\mathbb{X})$ tels que

$$\inf_{x\in\mathbb{X}} f(x) = m \quad \textbf{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{X}} f(x) = M.$$

Comme $m, M \in f(\mathbb{X})$, il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, tels que

$$\sup_{x\in\mathbb{X}} f(x) = f(x_1) \quad \textbf{et} \quad \inf_{x\in\mathbb{X}} f(x) = f(x_2).$$

2.6 Espaces localement compacts

Définition 2.6.1 Un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est localement compact s'il est séparé et si tout point de $\mathbb{X}$ admet un voisinage compact.

Exemple 2.6.2 1. Tout espace topologique compact est localement compact

2. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est localement compact. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intervalle fermé borné $[x-1, x+1]$ est un voisinage compact de x, car il existe un ouvert $\left]x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right[$ tel que
$$x \in \left]x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right[\subset [x-1, x+1].$$

Proposition 2.6.3 *Soient $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ un espace topologique localement compact, $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ un espace topologique séparé et $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ une application continue, surjective et ouverte (i.e., l'image de f de tout ouvert de $\mathbb{X}_1$ est un ouvert de $\mathbb{X}_2$). Alors l'espace $\mathbb{X}_2$ est localement compact.*

Démonstration 2.6.4 Soit $y \in \mathbb{X}_2$. Comme f est surjective il existe au moins $x \in \mathbb{X}_1$ tel que $f(x) = y$. Soit V un voisinage compact de x. Alors il existe un ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_1$ tel que
$$x \in \mathcal{O} \subset V.$$
Comme f une application ouverte, on déduit que $f(\mathcal{O})$ est un ouvert de $\mathbb{X}_2$ contient $y = f(x)$. D'après la proposition 2.1.17, $f(V)$ est un compact contenant $f(\mathcal{O})$. Alors
$$y \in f(\mathcal{O}) \subset f(V).$$
Donc $f(V)$ est un voisinage compact de y. D'où l'espace $\mathbb{X}_2$ est localement compact.

2.7 Exercices

Exercice 2.7.1 *1. Pour $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, montrer que l'intervalle $I =]0,1]$ de $\mathbb{R}$ n'est pas compact.*

2. Soit $\mathbb{N}$ muni de la topologie discret. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas compact.

3. Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\mathbb{X}$ vers la limite $l \in \mathbb{X}$. Montrer que $\mathcal{A} = \{x_n, n \geq 0\} \bigcup \{l\}$ est un compact.

Exercice 2.7.2 *Soient $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$, $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques séparés et $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ une application homéomorphisme. Montrer que si l'un de deux espace est compact alors l'autre est compact.*

Exercice 2.7.3 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties compactes disjoints de $\mathbb{X}$.*

1. Montrer que si $x \in \mathbb{X} \backslash \mathcal{B}$, alors il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $\mathcal{B} \subset V$.

2. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $\mathcal{A} \subset V$ et $\mathcal{B} \subset U$.

Exercice 2.7.4 *Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ deux parties de $\mathbb{X}$.*

1. Montrer que si $\mathcal{A}$ est compacte, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(a, \mathcal{B})$.

2. Montrer que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont compactes, il existe $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$ tels que $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(a, b)$.

3. *Montrer que si $\mathcal{A}$ est compacte et $\mathcal{B}$ est fermée de $\mathbb{X}$ tels que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, alors $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 0$.*

Exercice 2.7.5 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (i.e., $K_{n+1} \subset K_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$) de compactes non vides de $\mathbb{X}$*

1. *Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ et déduire que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est compact.*
2. *Montrer que si Ω est un ouvert contenant K, alors il existe un indice n_0 tel que*

$$K_n \subset \Omega, \quad \forall n \geq n_0.$$

Exercice 2.7.6 *Montrer qu'un espace produit d'une famille finie d'espaces $((\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i))_{i=\{1,\ \ldots,n\}}$ est localement compact si et seulement si chacun des espaces $(\mathbb{X}_i, \mathcal{T}_i)$ l'est.*

CHAPITRE 3

ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

Les espaces métriques complets jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines, tels que l'analyse fonctionnelle, la géométrie et bien d'autre. Ils ont de nombreuses propriétés importantes ; parmi les application, signalons le théorème de prolongement des applications uniformément continues et le théorème du point fixe.

3.1 Suites de Cauchy

Les suites de Cauchy c'est un outil essentiel pour étudier la complétude des espaces métriques. En effet, dans un espace métrique complet, toute suite de Cauchy converge vers un élément de l'espace.

Sauf mention contraire, pour la suite $(\mathbb{X}, d)$ désignera un espace métrique.

Définition 3.1.1 On appelle une **suite de Cauchy** toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{X}$ vérifiant

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n > m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Exemple 3.1.2 On muni $\mathbb{R}$ de la distance de valeur absolut $|.|$.

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, et $n > m$. Cherchons $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que
$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \quad \forall n > m \geq N_\varepsilon.$$
On a
$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{m}.$$
Pour que $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$ soit inférieure à ε, il suffit que $\frac{2}{m}$ soit inférieur à ε, c'est-à dire, $m > \frac{2}{\varepsilon}$. En prenant $N_\varepsilon = [\frac{2}{\varepsilon}] + 1$ on aura pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$, c'est-à-dire,
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ (N_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1)\ /\ \forall n, m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

2. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $y_n = \exp(-n^2)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $0 < \varepsilon < 2$ (pour $\varepsilon \geq 2$ on a, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $|y_n - y_m| < \varepsilon$) et $n > m$. Cherchons $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que
$$|y_n - y_m| < \varepsilon, \quad \forall n > m \geq N_\varepsilon.$$
On a
$$|y_n - y_m| = \left|\exp(-n^2) - \exp(-m^2)\right| \leq \exp(-n^2) + \exp(-m^2) < 2\exp(-m^2).$$
Alors pour que $|y_n - y_m| < \varepsilon$ soit inférieure à ε, il suffit que $2\exp(-m^2)$ soit inférieur à ε, c'est-à-dire, $m > \sqrt{-\ln(\frac{\varepsilon}{2})}$.
En prenant $N_\varepsilon = [\sqrt{-\ln(\frac{\varepsilon}{2})}] + 1$ on aura pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$, $|y_n - y_m| < \varepsilon$.

Proposition 3.1.3 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Démonstration 3.1.4 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers x dans $\mathbb{X}$. Alors
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N_\varepsilon) \Longrightarrow d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
En utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité ci-dessus, on obtient, pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$,
$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Remarque 3.1.5 Une suite de Cauchy n'est pas toujours convergente. En effet, soient $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels muni de la distance de la valeur absolue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$
On a
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$$
Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ vers la limite irrationnelle $\exp(1)$. Ceci implique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (car sa limite est irrationnelle). Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$, on déduit qu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$, on ait
$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$
Il s'en suit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 3.1.6 *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*

Démonstration 3.1.7 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{X}$ et $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors par définition d'une suite de Cauchy on a
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n > m \geq N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$
Comme $\phi(n) \geq n$ et $\phi(m) \geq m$, d'après la remarque 1.9.13, on a
$$\phi(n) > \phi(m) \geq N_\varepsilon.$$
Alors
$$d(x_{\phi(n)}, x_{\phi(m)}) < \varepsilon.$$
Donc $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Proposition 3.1.8 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration 3.1.9 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{X}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > m \geq N_\varepsilon$, on ait $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Pour $m = N_\varepsilon$, on a

$$d(x_n, x_{N_\varepsilon}) < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon.$$

Posons $r = \max\left(d(x_{N_\varepsilon}, x_0), d(x_{N_\varepsilon}, x_1), \ldots, d(x_{N_\varepsilon}, x_{N_\varepsilon - 1}), \varepsilon\right)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$x_n \in B_f(x_{N_\varepsilon}, r).$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition 3.1.10 *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est convergente.*

Démonstration 3.1.11 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{X}$ admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément x dans $\mathbb{X}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ n > m \geq N'_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\exists N''_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > N''_\varepsilon \Longrightarrow d(x_{\phi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N_\varepsilon = \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$. Comme $\phi(n) \geq n$, on déduit que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$d(x_n, x_{\phi(n)}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \textbf{et} \qquad d(x_{\phi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient, pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Théorème 3.1.12 *Soient $(\mathbb{X}_1, d_1)$, $(\mathbb{X}_2, d_2)$ deux espaces métriques et $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ une application uniformément continue de $\mathbb{X}_1$ dans $\mathbb{X}_2$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_1$, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_2$.*

Démonstration 3.1.13 Comme f est uniformément continue, par définition,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}_1,\ d_1(x, y) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_1$, pour δ_ε, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (N dépend de δ_ε et comme δ_ε dépend de ε alors N dépend de ε) tel que pour tout $n > m \geq N_\varepsilon$ on ait

$$d_1(x_n, x_m) < \delta_\varepsilon.$$

D'après (3.1.1), on a

$$d_2\left(f(x_n), f(x_m)\right) < \varepsilon.$$

Donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_2$.

3.2 Complétude

Définition 3.2.1 1. L'espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ est dit **complet** si toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{X}$ converge.

2. Une partie $\mathcal{A}$ d'un espace métrique est dite **complète** si, munie de la métrique induite, c'est un espace métrique complet.

Exemple 3.2.2 1. $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle (*i.e.*, la distance de la valeur absolue) est complet. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. D'après la proposition 3.1.8, cette suite est bornée, c'est-à-dire, il existe une constante positive $M > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n| \leq M.$$

Ce qui donne

$$x_n \in [-M, M] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $[-M, M]$ est compact, d'après le théorème 2.2.3, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente et d'après la proposition 3.1.10, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge.
Donc $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet.

2. Pour $\mathbb{X} =]0, 1[$ muni de la distance usuelle $d = |.|$, la suite $x_n = \frac{1}{n}$, $(n \geq 2)$, est une suite de Cauchy et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = 0$ $(0 \notin \mathbb{X})$, alors non convergente. Donc $(\mathbb{X}, d)$ non complet.

3. D'après la remarque 3.1.5, l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ muni de la distance de la valeur absolue n'est pas complet.

Proposition 3.2.3 *Un espace métrique compact est complet.*

Démonstration 3.2.4 Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{X}$. D'après le théorème 2.2.3, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Et d'après la proposition 3.1.10, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge. Donc $(\mathbb{X}, d)$ est complet.

Proposition 3.2.5 *Soient* $(\mathbb{X}_1, d_1)$ *et* $(\mathbb{X}_2, d_2)$ *deux espaces métriques. Supposons qu'il existe une application bijective* $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ *telle que* f *et* f^{-1} *soient uniformément continues. Alors* $(\mathbb{X}_1, d_1)$ *est complet si et seulement si* $(\mathbb{X}_2, d_2)$ *est complet.*

Démonstration 3.2.6 • Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_2$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x, x' \in \mathbb{X}_1$, $d_1(x, x') < \delta_\varepsilon$, on ait

$$d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon. \tag{3.2.1}$$

Comme f^{-1} est uniformément continue, d'après le théorème 3.1.12, on déduit que $(f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_1$ et comme $(\mathbb{X}_1, d_1)$ est complet, la suite $(f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $f^{-1}(y)$ de $\mathbb{X}_1$. Alors pour δ_ε, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon$ on ait

$$d_1(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y)) < \delta_\varepsilon.$$

D'après (3.2.1), on a

$$d_2\left(f(f^{-1}(y_n)), f(f^{-1}(y))\right) < \varepsilon.$$

Comme f est bijective, on a $f(f^{-1}(y_n)) = y_n$, $f(f^{-1}(y)) = y$ et $y \in \mathbb{X}_2$. Alors

$$d_2\left(y_n, y\right) < \varepsilon.$$

Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. D'où $(\mathbb{X}_2, d_2)$ est complet.

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_1$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f^{-1} est uniformément continue, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y, y' \in \mathbb{X}_2$, $d_2(y, y') < \delta_\varepsilon$, on ait
$$d_1(f^{-1}(y), f^{-1}(y')) < \varepsilon. \tag{3.2.2}$$
Comme f est uniformément continue, d'après le théorème 3.1.12, on déduit que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_2$ et comme $(\mathbb{X}_2, d_2)$ est complet, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $f(x)$ de $\mathbb{X}_2$. Alors pour δ_ε, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon$ on ait
$$d_2(f(x_n), f(x)) < \delta_\varepsilon.$$
D'après (3.2.2), on a
$$d_1\left(f^{-1}(f(x_n)), f^{-1}(f(x))\right) < \varepsilon.$$
Comme f est bijective, on a $f^{-1}(f(x_n)) = x_n$, $f^{-1}(f(x)) = x$ et $x \in \mathbb{X}_1$. Alors
$$d_1\left(x_n, x\right) < \varepsilon.$$
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. D'où $(\mathbb{X}_1, d_1)$ est complet.

Proposition 3.2.7 *Toute partie fermée munie de la distance induite d'un espace métrique complet est complète.*

Démonstration 3.2.8 Soient $\mathcal{A}$ une partie fermée de l'espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{X}$, on déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy de $\mathbb{X}$. Puisque $(\mathbb{X}, d)$ est complet, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge dans $\mathbb{X}$. Comme $\mathcal{A}$ est fermée, la limite de cette suite est dans $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est complète.

Proposition 3.2.9 *Toute partie complète est fermée.*

Démonstration 3.2.10 Soient $\mathcal{A}$ une partie complète de l'espace métrique $(\mathbb{X}, d)$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de $\mathcal{A}$ convergente. Alors c'est une suite de Cauchy. Comme $\mathcal{A}$ est complète, la limite de cette suite est dans $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est fermée.

Proposition 3.2.11 *Le produit cartésien d'un nombre fini d'espaces métriques complets $((\mathbb{X}_i, d_i))_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ est un espace métrique complet pour la métrique produit*
$$d_\infty(X, Y) = \sup_{i\in\{1,\ldots,p\}} d_i(x_i, y_i),$$
où $X, Y \in \prod_{i=1}^p \mathbb{X}_i$.

Démonstration 3.2.12 Soient $(X_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{p,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^p \mathbb{X}_i$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que quelque soient $n, m \geq N_\varepsilon$ on ait
$$d_\infty(X_n, X_m) < \varepsilon.$$
On a aussi, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,
$$d_i(x_{i,n}, x_{i,m}) \leq d_\infty(X_n, X_m) < \varepsilon.$$
Alors la suite coordonnée $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{X}_i, d_i)$. Comme $(\mathbb{X}_i, d_i)$ est complet, on déduit que $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément x_i dans $\mathbb{X}_i$. Montrons maintenant que $(X_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{p,n}))_{n\in\mathbb{N}}$

converge vers $X = (x_1, \ldots, x_p)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe $N_{i,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que quelque soit $n \geq N_{i,\varepsilon}$ ($n \in \mathbb{N}$), on ait

$$d_i(x_{i,n}, x_i) < \varepsilon.$$

Posons $N_\varepsilon = \sup_{i\in\{1,\ldots,p\}}\{N_{i,\varepsilon}\}$. Ceci implique que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$

$$d_i(x_{i,n}, x_i) < \varepsilon.$$

Alors

$$d_\infty(X_n, X) = \sup_{i\in\{1,\ldots,p\}} d_i(x_{i,n}, x_i) < \varepsilon.$$

Donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X. D'où (X, d_∞) est complet.

3.3 Prolongement d'une application uniformément continue

Proposition 3.3.1 *Soient $(\mathbb{X}_1, d_1)$ et $(\mathbb{X}_2, d_2)$ deux espaces métriques. Supposons $(\mathbb{X}_2, d_2)$ complet. Soit $\mathcal{A}$ une partie dense dans $\mathbb{X}_1$ et $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{X}_1$ uniformément continue. Alors il existe une unique application $\widetilde{f} : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ continue sur $\mathbb{X}_1$ qui prolonge f sur $\mathbb{X}_1$. De plus ce prolongement est uniformément continu sur $\mathbb{X}_1$.*

Démonstration 3.3.2 Montrons l'existence de prolongement. Soit $x \in \mathbb{X}_1$ arbitraire. Comme $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{X}_1$, d'après la proposition 1.10.59, il existe au moins une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ converge vers x. Alors cette suite est de Cauchy de $\mathcal{A}$. Comme $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{X}_1$ uniformément continue, d'après le théorème 3.1.12, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{X}_2$. Puisque $(\mathbb{X}_2, d_2)$ est complet, on déduit que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{X}_2$. Posons alors

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \textbf{si } x \in \mathcal{A} \\ l & \textbf{si } x \in \mathbb{X}_1 \backslash \mathcal{A}. \end{cases}$$

Il est clair que $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathbb{X}_1$. Montrons maintenant que $\widetilde{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, f est uniformément continue sur $\mathcal{A}$. Alors il existe $\delta > 0$, tel que quelque soient $x, y \in \mathcal{A}$ vérifiant $d_1(x, y) < \delta$ on ait

$$d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3.1}$$

Soient $x, y \in \mathbb{X}_1$ tels que $d_1(x, y) < \delta$. Comme $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{X}_1$, il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{A}$ telles que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d_1(x_n, x) = 0 \;\; \textbf{et} \;\; \lim_{n\longrightarrow\infty} d_1(y_n, y) = 0.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$d_1(x_n, y_n) \leq d_1(x_n, x) + d_1(x, y) + d_1(y, y_n).$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on aura

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} d_1(x_n, y_n) &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} d_1(x_n, y_n)\left(d_1(x_n, x) + d_1(x, y) + d_1(y, y_n)\right) \\ &\leq d_1(x, y) < \delta. \end{aligned}$$

Ce qui montre l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$,

$$d_1(x_n, y_n) < \delta.$$

Alors, d'après (3.3.1), pour tout $n \geq N_1$, on a

$$d_2(\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(y_n)) = d_2(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \textbf{(car } x_n, y_n \in \mathcal{A}\textbf{, alors } f(x_n) = \widetilde{f}(x_n) \textbf{ et } f(y_n) = \widetilde{f}(y_n)\textbf{)}.$$

Comme $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathbb{X}_1$, on déduit qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que quelque soit $n \geq N_2$ on ait

$$d_2(\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \textbf{et} \quad d_2(\widetilde{f}(y_n), \widetilde{f}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ et en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} d_2(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(y)) &\leq d_2(\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(x)) + d_2(\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(y_n)) + d_2(\widetilde{f}(y), \widetilde{f}(y_n)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\widetilde{f}$ est uniformément continue.

Finalement, montrons l'unicité. Soient $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$ deux prolongement de f. Alors par définition, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{cases} \widetilde{f_1}(x) = f(x) \\ \widetilde{f_2}(x) = f(x). \end{cases}$$

Alors

$$\widetilde{f_1}(x) = \widetilde{f_2}(x) \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

On a aussi pour tout $x \in \mathbb{X}_1 \backslash \mathcal{A}$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ converge vers x. Alors

$$\widetilde{f_1}(x_n) = \widetilde{f_2}(x_n).$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ (en utilisant la continuité de $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$), on obtient

$$l_1 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \widetilde{f_1}(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \widetilde{f_2}(x_n) = l_2.$$

Donc

$$\widetilde{f_1}(x) = \widetilde{f_2}(x).$$

3.4 Points fixes des contractions

De nombreuses questions, liées à l'existence et l'unicité des solutions de certains types d'équations peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une applications de l'espace métrique complet correspondant dans lui-même.

Définition 3.4.1 Soient $(\mathbb{X}_1, d_1)$ et $(\mathbb{X}_2, d_2)$ deux espaces métriques. Une application $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ est dite **contractante de rapport** $0 < k < 1$ si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{X}_1 \quad d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y).$$

Théorème 3.4.2 *Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ une application contractante. Supposons $(\mathbb{X}, d)$ complet. Alors f admet un et un seul point fixe i.e., il existe $x \in \mathbb{X}$ unique tel que $f(x) = x$.*

Démonstration 3.4.3 Soit $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y). \tag{3.4.1}$$

- Montrons d'abord l'unicité. Soient $x, y \in \mathbb{X}$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Alors l'inégalité (3.4.1), assure que
$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$
Ceci implique
$$(1-k)d(x, y) \leq 0.$$
Comme $k < 1$, on déduit que $(1-k) > 0$. Alors
$$d(x, y) = 0.$$
Or d est une distance sur $\mathbb{X}$, alors
$$x = y.$$

- Montrons maintenant l'existence. Soit $x_0 \in \mathbb{X}$. Nous partons de x_0 et définissons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. En utilisant (3.4.1), on obtient
$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\
&\leq kd(x_n, x_{n-1}) = kd(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \\
&\leq k.kd(x_{n-1}, x_{n-2}) = k^2 d(f(x_{n-2}), f(x_{n-3})) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\leq k^n d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$
En utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité ci-dessus et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient
$$\begin{aligned}
d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq k^{n+p-1}d(x_1, x_0) + k^{n+p-2}d(x_1, x_0) + \ldots + k^n d(x_1, x_0) \\
&\leq \left(k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \ldots + k^n\right) d(x_1, x_0) \\
&\leq k^n \frac{1-k^p}{1-k} d(x_1, x_0) \quad \textbf{(la somme de terme d'une suite géométrique } k^n\textbf{)} \\
&\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \qquad \textbf{(car } (1-k^p) < 1\textbf{)}
\end{aligned}$$
Puisque $0 < k < 1$, on déduit que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} k^n = 0.$$
Alors
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} d(x_{n+p}, x_n) \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) = 0.$$
Il s'en suit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait
$$d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{X}$ est complet, cette suite converge vers un point x dans $\mathbb{X}$. En utilisant l'inégalité (3.4.1),on obtient
$$0 \leq d(f(x), x_n) = d(f(x), f(x_{n-1})) \leq kd(x, x_n).$$

En passant à la limite quand n tend vers à $+\infty$, on aura

$$0 \leq d(f(x), x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} d(f(x), x_n) \leq k \lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x, x_{n-1}) = d(x, x) = 0.$$

Alors $d(f(x), x) = 0$ et ce qui donne $f(x) = x$.

Remarque 3.4.4 1. Si $(\mathbb{X}, d)$ n'est pas complet, alors le théorème précédent n'est pas vrai. en effet, soit $\mathbb{X} = \mathbb{Q}_+^*$, muni de la distance de la valeur absolue. Alors $(\mathbb{Q}_+^*, |.|)$ n'est pas complet (voir la remarque 3.1.5 et l'exemple 3.2.2). Soit $f : \mathbb{Q}_+^* \longrightarrow \mathbb{Q}_+^*$ une application définie par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

On a, pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$,

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}\right| = \left|\frac{y-x}{(x+1)(y+1)}\right| < |x - y| \quad (\text{car } (x+1)(y+1) > 1).$$

Alors

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y| \quad \textbf{(avec } 0 < k < 1\textbf{)}.$$

Donc f est contractante de rapport $0 < k < 1$. On a aussi

$$f(x) = x \Longrightarrow \frac{1}{x+1} = x \Longrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \notin \mathbb{Q}_+^*.$$

Alors f n'admet pas un point fixe.

2. Si f n'est pas contractante, alors le théorème ci-dessus n'est pas vrai. En effet, soit $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle. Alors $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = x + 1.$$

On a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| = |x + 1 - (y + 1)| = |x - y|\,.$$

Alors f n'est pas contractante. Supposons maintenant que f admet un point fixe, c'est-à-dire, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = x \Longrightarrow x + 1 = x \Longrightarrow 1 = 0 \quad \textbf{(Impossible !!)}.$$

Alors f n'admet pas un point fixe.

3.5 Exercice

Exercice 3.5.1 *Soit d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur $\mathbb{X}$. Montrer que une suite (x_n) d'élément de $\mathbb{X}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{X}, d_1)$ si et seulement si elle est de Cauchy dans $(\mathbb{X}, d_2)$.*

Exercice 3.5.2 *Soient l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle $|.|$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres rationnels définie par*

$$x_0 = 1 \quad \textbf{\textit{et}} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n} \quad \forall n \geq 1.$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq x_n \leq 1$.*

2. *Supposant que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, calculer sa limite.*
3. *Déduire que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{Q}$.
4. *Déduire que* $(\mathbb{Q}, |.|)$ *n'est pas complet.*

Exercice 3.5.3 *Soient* $(\mathbb{X}, d)$ *un espace métrique et* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille quelconque des parties complètes de* $\mathbb{X}$. *Montrer que l'intersection* $\bigcap_{i\in I} F_i$ *est complète.*

Exercice 3.5.4 *Soient* $\mathbb{X}$ *un ensemble,* $(\mathbb{Y}, d)$ *un espace métrique complet et* $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *l'ensemble des applications bornées définies sur* $\mathbb{X}$ *à valeur dans* $\mathbb{Y}$. *Considérons la distance de la convergence uniforme définie par*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in\mathbb{X}} d(f(x), g(x)) \quad \forall f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

1. *Montrer que* $(\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), d_\infty)$ *est complet.*
2. *Supposons que* $\mathbb{X}$ *est muni de la distance* d^*. *Soit* $\mathcal{C}_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *l'ensemble des fonctions continues bornées de* $\mathbb{X}$ *dans* $\mathbb{Y}$. *Montrer que* $(\mathcal{C}_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), d_\infty)$ *est complet.*
3. *Déduire que* $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{Y}), d_\infty)$ *est complet, où* $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{Y})$ *l'ensemble des fonctions continues sur* $[0, 1]$ *dans* $\mathbb{Y}$.

Exercice 3.5.5 *Soient* $\mathbb{X} = \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ *et* d_∞ *une application définie sur* $\mathbb{X}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|\,.$$

Soit aussi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{X}$ *définie par*

$$f_n(x) = \sqrt{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

1. *Vérifier que* d_∞ *c'est une distance sur* $\mathbb{X}$
2. *Montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de Cauchy de* $(\mathbb{X}, d_\infty)$.
3. *Pour tout* $x \in [a, b]$ *Calculer la limite de* $f_n(x)$.
4. *Supposons que cette limite c'est* f. *Montrer que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d_\infty(f_n, f) = 0.$$

5. *Montrer que* $f \notin \mathbb{X}$.
6. *Déduire que* $(\mathbb{X}, d_\infty)$ *n'est pas complet.*

CHAPITRE 4

ESPACES CONNEXES

La notion de connexité est très importante en topologie. Si l'on cherche à s'en faire une représentation intuitive, on retiendra qu'une partie connexe ne comporte qu'un seul morceau.

4.1 Connexité

4.1.1 Cadre général

Définition 4.1.1 On dit que un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est **connexe** si $\mathbb{X}$ et $\emptyset$ sont les seules parties ouvertes et fermées à la fois de $\mathbb{X}$.

Définition 4.1.2 On dit que une partie $\mathcal{A}$ dans espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est **connexe** si $\mathcal{A}$ et $\emptyset$ sont les seules parties ouvertes et fermées de $\mathcal{A}$ (ici les ouverts et le fermés au sens de la topologie induite sur $\mathcal{A}$).

Proposition 4.1.3 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *L'espace $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est connexe.*

(ii) *$\mathbb{X}$ et $\emptyset$ sont les seuls ouverts et fermés de $\mathbb{X}$.*

(iii) *Il n'existe pas de couple d'ouverts non vides de $\mathbb{X}$, disjoints et de réunion égale à $\mathbb{X}$,*

(iv) *il n'existe pas de couple de fermés non vides de $\mathbb{X}$, disjoints et de réunion égale à $\mathbb{X}$.*

Démonstration 4.1.4 • $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Découle de la définition 4.1.1.

- $(ii) \Rightarrow (iii)$ On suppose par l'absurde qu'il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ non vides, disjoints tels que
$$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = \mathbb{X}.$$
Alors $\mathcal{O}_1 = \mathbb{X} \backslash \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_2 = \mathbb{X} \backslash \mathcal{O}_1$ sont des fermés de $\mathbb{X}$. Donc $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont des ouverts et fermés de $\mathbb{X}$. Cela contredit la propriété (ii).

- $(iii) \Rightarrow (ii)$ Soit $\mathcal{O}$ une partie ouverte et fermée de $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{O}^C$ est un ouvert et fermé de $\mathbb{X}$ ($\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^C$ sont disjoints) et $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}^C = \mathbb{X}$. D'après la propriété (iii), il n'existe pas deux ouverts non vides, disjoints et de réunion égale à $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{O}$ peut être l'ensemble vide, donc $\mathcal{O}^C = \mathbb{X}$, ou $\mathcal{O}^C$ doit être l'ensemble vide, donc $\mathcal{O} = \mathbb{X}$. D'où $\mathbb{X}$ et $\emptyset$ les seules parties ouvertes et fermées de $\mathbb{X}$.
- $(iii) \Rightarrow (iv)$ On suppose par l'absurde qu'il existe deux fermés F_1 et F_2 de $\mathbb{X}$ non vides, disjoints et de réunion égale à $\mathbb{X}$. Alors $F_1^C = \mathbb{X} \backslash F_1$ et $F_2^C = \mathbb{X} \backslash F_2$ sont des ouverts non vides de $\mathbb{X}$, disjoints tels que $F_1^C \cup F_2^C = \mathbb{X}$. Cela contredit la propriété (iii).
- $(iv) \Rightarrow (iii)$ On suppose par l'absurde qu'il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de $\mathbb{X}$ non vides, disjoints et de réunion égale à $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{O}_1^C = \mathbb{X} \backslash \mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2^C = \mathbb{X} \backslash \mathcal{O}_2$ sont des fermés non vides de $\mathbb{X}$, disjoints tels que $\mathcal{O}_1^C \cup \mathcal{O}_2^C = \mathbb{X}$. Cela contredit la propriété (iv).

Exemple 4.1.5 1. Soit $\mathbb{X} = \{a, b\}$. Si

(i) $\mathbb{X}$ est muni de la topologie discrète $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \mathbb{X}\}$, alors la partie $\mathbb{X}$ n'est pas connexe. En effet, il existe deux ouverts (aussi sont des fermés) $\{a\}$ et $\{b\}$ disjoints et non vide de $\mathbb{X}$ tels que

$$\{a\} \cup \{b\} = \mathbb{X}.$$

(ii) $\mathbb{X}$ est muni de la topologie $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \{a\}, \mathbb{X}\}$, alors $\mathbb{X}$ est connexe. En effet, $\mathbb{X}$ et $\emptyset$ sont les seules parties ouvertes et fermées de $\mathbb{X}$.

2. Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Alors toute partie finie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{X}$ ayant au moins deux éléments de $\mathbb{X}$ n'est pas connexe. En effet, on suppose que $\mathcal{A} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ contient n éléments de $\mathbb{X}$, alors il existe des voisinages $(V_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ disjoints de tous les éléments de $\mathcal{A}$. Ceci implique qu'il existe des ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ disjoints et non vides de $\mathbb{X}$ tels que

$$\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_i) = \mathcal{A}.$$

On a $(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1)$ et $(\cup_{i \in \{2,\ldots,n\}} (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_i))$ (la réunion des ouverts est un ouvert) sont deux ouverts disjoints et non vides de $\mathcal{A}$ tels que

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1) \cup \left(\bigcup_{i \in \{2,\ldots,n\}} (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_i) \right) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_i) = \mathcal{A}.$$

Donc $\mathcal{A}$ n'est pas connexe.

3. Tout espace muni de la topologie grossière est connexe.

Proposition 4.1.6 *Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes telle que*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \neq \emptyset.$$

Alors la réunion de cette familles est connexe.

Démonstration 4.1.7 Raisonnons par l'absurde et supposons que $\cup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ n'est pas connexe. Alors il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de $\cup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ non vide, disjoints tels que

$$\cup_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2.$$

Pour tout $i \in I$, on a

$$\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_i \cap \mathcal{O}_1) \cup (\mathcal{A}_i \cap \mathcal{O}_2).$$

Les parties $A_i \cap \mathcal{O}_1$ et $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{O}_2$ sont des ouverts disjoints dans $\mathcal{A}_i$ (topologie induite). Comme $\mathcal{A}_i$ est connexe l'un de ces ouvert est vide. Puisque $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont disjoints, on déduit que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{O}_1$ ou $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{O}_2$. Posons $I = I_1 \cup I_2$ tels que

$$\mathcal{A}_i \subset \mathcal{O}_1 \textbf{ si } i \in I_1 \textbf{ et } \mathcal{A}_i \subset \mathcal{O}_2 \textbf{ si } i \in I_2.$$

Alors

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i = \left(\bigcap_{i\in I_1} \mathcal{A}_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{i\in I_2} \mathcal{A}_i\right) \subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset.$$

Ce qui contredit l'hypothèse.

Proposition 4.1.8 *L'adhérence de toute partie connexe est connexe.*

Démonstration 4.1.9 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie connexe de $\mathbb{X}$. Montrons par l'absurde que $\overline{\mathcal{A}}$ n'est pas connexe. Alors il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ disjoints et non vides de $\overline{\mathcal{A}}$ tels que*

$$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = \overline{\mathcal{A}}.$$

Comme $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts non vides de $\overline{\mathcal{A}}$, on a $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ et $\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. On a aussi $(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{A})$ et $(\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{A})$ deux ouverts disjoints $\mathcal{A}$ (topologie induite). En plus on a

$$(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{A}) \cup (\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

Donc $\mathcal{A}$ n'est pas connexe. Ce qui constitue une contradiction avec l'hypothèse.

Théorème 4.1.10 *(de Bolzano) Soient $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$, $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologies et $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ une l'application continue. Alors l'image de toute partie connexe de $\mathbb{X}_1$ est une partie connexe de $\mathbb{X}_2$.*

Démonstration 4.1.11 Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}_1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(\mathcal{A})$ n'est pas connexe. Alors il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ disjoints et non vides de $f(\mathcal{A})$ tels que

$$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = f(\mathcal{A}).$$

Comme $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ sont des ouverts et f est une application continue, on déduit que $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ sont des ouverts disjoints et non vides de $\mathbb{X}_1$ tels que

$$\mathcal{A} \subset f^{-1}(f(\mathcal{A})) = f^{-1}(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) = f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{O}_2).$$

Alors $\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ deux ouverts disjoints et non vides de $\mathcal{A}$ tels que

$$\mathcal{A} = \left(\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1)\right) \cup \left(\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)\right).$$

Donc $\mathcal{A}$ n'est pas connexe. Ce qui contredit l'hypothèse.

Il est fréquent d'utiliser la caractérisation suivante pour établir la connexité d'une partie, car elle offre une approche pratique et efficace pour démontrer ce type de résultat.

Proposition 4.1.12 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{A}$ est connexe si et seulement si toute application continue de $\mathcal{A}$ dans $\{0, 1\}$ est constante où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(\{0, 1\})$.*

Démonstration 4.1.13 • Soient $\mathcal{A}$ est connexe et f une application continue de $\mathcal{A}$ dans $\{0,1\}$. Alors $f(\mathcal{A})$ est connexe. Puisque $\{0,1\}$ n'est pas connexe (voir l'exemple 4.1.5), la partie $f(\mathcal{A})$ ne doit comporter qu'un seul élément 0 ou 1.

- Réciproquement, procédons par contraposition. Supposons que $\mathcal{A}$ n'est pas connexe. Alors il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ disjoints et non vides de $\mathcal{A}$ tels que
$$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_1 = \mathcal{A}.$$
On définit la fonction f sur $\mathcal{A}$ par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } x \in \mathcal{O}_1 \\ 1 & \text{pour tout } x \in \mathcal{O}_2 \end{cases}$$
Il est clair que
$$\begin{cases} f^{-1}(0) = \mathcal{O}_1, \qquad f^{-1}(1) = \mathcal{O}_2 \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\ f^{-1}(\{0,1\}) = f^{-1}(\{0\} \cup \{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}) = \mathcal{A} \end{cases}$$
Alors f est continue et non constante.

Ce que conclut la démonstration.

Corollaire 4.1.14 *Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille des parties connexes d'un espace topologique telle que*
$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \neq \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$
Alors la réunion de cette famille est connexe.

Démonstration 4.1.15 Soient $f : \cup_{i\in I}\mathcal{A}_i \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue et $x, y \in \cup_{i\in I}\mathcal{A}_i$ tels que $x \neq y$. Alors il existe $i, j \in I$ tels que
$$x \in \mathcal{A}_i \ \ \textbf{et} \ \ y \in \mathcal{A}_j.$$
Comme les restrictions $f_{|\mathcal{A}_i}$ et $f_{|\mathcal{A}_j}$ sont continues et comme $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_j$ sont connexes, on déduit que $f_{|\mathcal{A}_i}$ et $f_{|\mathcal{A}_j}$ sont constantes. Notons par $a_i \in \{0,1\}$ la valeur de cette constante pour $f_{|\mathcal{A}_i}$ et par $a_j \in \{0,1\}$ la valeur de cette constante pour $f_{|\mathcal{A}_j}$. Alors
$$\forall x' \in \mathcal{A}_i,\ f_{|\mathcal{A}_i}(x') = f(x') = a_i \ \ \textbf{et} \ \ \forall y' \in \mathcal{A}_j,\ f_{|\mathcal{A}_j}(y') = f(y') = a_j.$$
Comme $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \neq \emptyset$, il existe au moins $a^* \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$. Alors
$$a_i = f_{|\mathcal{A}_i}(a^*) = f_{|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j}(a^*) = f_{|\mathcal{A}_j}(a^*) = a_j.$$
Ceci implique que, pour tout $x' \in \mathcal{A}_i$ et $y' \in \mathcal{A}_j$, on a
$$f(x') = f_{|\mathcal{A}_i}(x') = f_{|\mathcal{A}_j}(y') = f(y').$$
Comme $x \in \mathcal{A}_i$ et $y \in \mathcal{A}_j$ on déduit que
$$f(x) = f_{|\mathcal{A}_i}(x) = f_{|\mathcal{A}_j}(y) = f(y).$$
Ce qui prouve que f est constante sur $\cup_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Donc $\cup_{i\in I}\mathcal{A}_i$ est connexe.

Corollaire 4.1.16 *Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie connexe de $\mathbb{X}$. Alors toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathbb{X}$ telle que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$ est connexe.*

Démonstration 4.1.17 Soient $f : \mathcal{B} \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue et b un point de $\mathcal{B}$. Alors f restreinte à $\mathcal{A}$ est continue. Comme $\mathcal{A}$ est connexe, on déduit que $f_{|\mathcal{A}}$ est constante. Supposons par exemple que $f(\mathcal{A}) = \{0\}$. Puisque $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$, on a $b \in \overline{\mathcal{A}}$. Alors
$$f(b) = \lim_{a \to b,\ a \in \mathcal{A}} f(a) = 0.$$
Ce qui prouve que f est nulle sur $\mathcal{B}$. Donc f est constante sur $\mathcal{B}$. D'où $\mathcal{B}$ est connexe.

4.1.2 Parties connexes de $\mathbb{R}$

Proposition 4.1.18 *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration 4.1.19 (i) Supposons que $\mathcal{A}$ est une partie connexe non vide de $\mathbb{R}$ et montrons que c'est un intervalle de $\mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{A}$ n'est pas un intervalle. Alors il existe deux points x et y de $\mathcal{A}$ tels que $x < y$ et $[x, y] \not\subset \mathcal{A}$. Ceci implique qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que

$$z \in [x, y] \backslash \mathcal{A}.$$

On remarque que $\mathcal{A} \cap]-\infty, z[$ et $\mathcal{A} \cap]z, +\infty[$ sont deux ouverts disjoints et non vides de $\mathcal{A}$ tels que

$$(\mathcal{A} \cap]-\infty, z[) \cup (\mathcal{A} \cap]z, +\infty[) = \mathcal{A}.$$

Alors $\mathcal{A}$ n'est pas connexe. Ce qui constitue une contradiction avec les hypothèses.

(ii) Soit $\mathcal{A}$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathcal{A}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$. L'intervalle $\mathcal{A}$ peut s'écrire comme une réunion d'une famille de la forme $[a_i, b_i]$, $i \in I$ dont l'intersection est non vide, *i.e.*,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i],$$

où $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset$, $\forall i \neq j$. Montrons d'abord que, pour tout $i \in I$, l'intervalle $[a_i, b_i]$ est connexe. Raisonnons par l'absurde et supposons que $[a_i, b_i]$ n'est pas connexe. Alors il existe deux fermés K_1 et K_2 (donc deux compacts) disjoints et non vides tels que

$$[a_i, b_i] = K_1 \cup K_2.$$

Ceci implique qu'il existe deux point $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que

$$d(K_1, k_2) = |x_1 - x_2|, \quad \text{(voir l'exercice 2.7.4).}$$

Comme $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, on a $x_1 \neq x_2$ et l'intervalle non vide $]x_1, x_2[$ si $x_1 < x_2$ ou $]x_2, x_1[$ si $x_2 < x_1$ n'appartient pas à $K_1 \cup K_2 = [a_i, b_i]$. Ce qui est absurde. Alors $[a_i, b_i]$ est connexe.
D'après la proposition 4.1.14, on déduit que $\mathcal{A} = \cup_{i \in I} [a_i, b_i]$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$.

Théorème 4.1.20 *Soient $\mathcal{A}$ une partie connexe d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ et $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(\mathcal{A})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Démonstration 4.1.21 D'après la proposition 4.1.10, $f(\mathcal{A})$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$. Et d'après la proposition 4.1.18, $f(\mathcal{A})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

4.1.3 La connexité par arcs

Définition 4.1.22 Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{X}$. Soit (a, b) un couple de points de $\mathcal{A}$. on dit qu'une application $\psi : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{A}$ est un **chemin de $\mathcal{A}$ allant de a vers b** si elle est continue et vérifie $\psi(0) = a$ et $\psi(1) = b$.

Définition 4.1.23 On dit que la partie $\mathcal{A}$ de l'espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est **connexe par arcs** si pour tout couple (a, b) de points de $\mathcal{A}$ il existe un chemin de $\mathcal{A}$ allant de a vers b.

Proposition 4.1.24 *Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Démonstration 4.1.25 Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{X}$, connexe par arcs et $f : \mathcal{A} \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Soient (a,b) un couple de points de $\mathcal{A}$. Alors il existe un chemin $\psi \in \mathcal{C}([0,1], \mathcal{A})$ tel que $\psi(0) = a$ et $\psi(1) = b$. L'application composée $fo\psi : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$ est continue. Puisque l'intervalle $[0,1]$ est connexe, on déduit que $fo\psi$ est constante. Alors

$$fo\psi(0) = fo\psi(1).$$

Comme $fo\psi(0) = f(a)$ et $fo\psi(1) = f(b)$, on déduit que

$$f(a) = fo\psi(0) = fo\psi(1) = f(b).$$

Alors f est constante. D'après la proposition 4.1.12, la partie $\mathcal{A}$ est connexe.

4.2 Composantes connexes

Définition 4.2.1 Une **relation d'équivalence** sur un ensemble $\mathbb{X}$ est une relation binaire $\sim$ sur $\mathbb{X}$ qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Définition 4.2.2 On dit que deux points x et y d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ sont **connectés**, s'il existe une partie connexe de $\mathbb{X}$ contenant à la fois x et y.

Proposition 4.2.3 *La relation x et y sont connectés dans $\mathbb{X}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{X}$.*

Démonstration 4.2.4 On a toute partie réduite à un élément est connexe, alors cette relation est réflexive. Il est clair qu'elle est symétrique. Elle est aussi transitive. En effet, si x et y sont connectés dans $\mathbb{X}$ et si y et z sont connectés dans $\mathbb{X}$, alors il existe deux connexes C et C' tels que $x, y \in C$ et $y, z \in C'$. La réunion $C \cup C'$ est nécessairement connexe (car C et C' deux connexes dont leur intersection n'est pas vide, contenant y, alors $C \cup C'$ est connexe (voir proposition 4.1.14)). Alors x et z sont contenus dans le même connexe, par conséquent, connectés. Ce qui la démonstration.

Définition 4.2.5 Une classe d'équivalence de $\mathbb{X}$ par rapport à la relation d'équivalence $\sim$ s'appelle une composante connexe de $\mathbb{X}$. On la note par $C(x)$.

Proposition 4.2.6 *La composante connexe $C(x)$ d'un point x d'un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est la réunion de tous les connexes contenant x ; c'est aussi le plus grand connexe contenant x.*

Démonstration 4.2.7 Soit $\mathcal{B}$ la réunion de tous les connexes contenant x. D'après la proposition (4.1.14), $\mathcal{B}$ est connexe. Alors $y \in \mathcal{B}$ entraîne $y \sim x$. Ceci implique que l'inclusion de $\mathcal{B}$ dans $C(x)$. Réciproquement, $y \in C(x)$ entraîne l'existence d'un connexe C contenant x et y. Comme $\mathcal{B}$ est la réunion de tous les connexes contenant x, on déduit que $C(x)$ est contenue dans $\mathcal{B}$. Donc

$$C(x) = \mathcal{B}.$$

Corollaire 4.2.8 *Un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est connexe si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{X}$, on a $C(x) = \mathbb{X}$.*

Démonstration 4.2.9 Soient $\mathbb{X}$ est connexe et $x \in \mathbb{X}$. Il est clair que $\mathbb{X}$ est le plus grand connexe contenant x. D'après la proposition 4.2.6, $C(x)$ est le plus grand connexe contenant x. Alors

$$\mathbb{X} = C(x).$$

La réciproque est évidente.

Proposition 4.2.10 *Une composante connexe de $\mathbb{X}$ est fermé dans $\mathbb{X}$.*

Démonstration 4.2.11 Nous montrons que $\overline{C(x)} = C(x)$. Il est clair que

$$C(x) \subset \overline{C(x)}.$$

D'après la proposition 4.1.8, l'adhérence $\overline{C(x)}$ de $C(x)$ dans $\mathbb{X}$ est encore connexe contenant x. Comme $C(x)$ est le plus grand connexe contenant x, on a nécessairement $\overline{C(x)} \subset C(x)$. Ce qui donne

$$\overline{C(x)} = C(x).$$

Donc $C(x)$ est fermé.

4.3 Espaces localement connexes

Définition 4.3.1 Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que $\mathbb{X}$ est **localement connexe** si tout point de $\mathbb{X}$ possède un système fondamental (ou base) de voisinage connexes. Autrement dit, quel que soit le point x de $\mathbb{X}$ et le voisinage V de x, il existe un voisinage connexe V' de x, contenu dans V.

Exemple 4.3.2

1. L'espace $\mathbb{R}$ est localement connexe. En effet, l'ensemble des intervalles

$$]x - r, x + r[, \qquad \textbf{où } r > 0$$

constitue un système fondamental de voisinages connexes du x.

2. Soit $\mathbb{X} = \{a, b, c, d\}$ muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \mathbb{X}\}$.
   - Les voisinages de a sont $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$ et $\mathbb{X}$ qui sont connexes. En effet, pour $\mathcal{A} = \{a, c\}$, on a $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \{\emptyset, \mathcal{A}, \{c\}\}$. Alors les seules parties fermées et ouvertes de $\mathcal{A}$ sont $\emptyset$ et $\mathcal{A}$. Donc $(\mathcal{A}, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})$ est compact.
   - Les voisinages de b sont $\{a, b, c\}$ et $\mathbb{X}$ qui sont connexes.
   - Les voisinages de c sont $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$ et $\mathbb{X}$ qui sont connexes.
   - Le seul voisinage de d est $\mathbb{X}$ qui est connexes.

   Alors $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est localement connexe.

Proposition 4.3.3 *Si un espace topologique $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est localement connexe, alors toute composante connexe est à la fois ouverte et fermée dans $\mathbb{X}$.*

Démonstration 4.3.4 Soit $C(x)$ une composantes connexe de x dans $\mathbb{X}$ et soit $y \in C(x)$ (alors $y \in \mathbb{X}$). Comme $\mathbb{X}$ est localement connexe, le point y possède un voisinage connexe. Alors tous les points de ce voisinage sont connectés à y, et par conséquent aussi à x. Ceci implique que $C(x)$ contient tout ce voisinage. Donc $C(x)$ est ouverte. Elle est aussi fermée d'après la proposition 4.2.10.

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1

1. *Soient $\mathbb{X} = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c, d\}, \mathbb{X}\}$ une topologie sur $\mathbb{X}$.*
   (a) *$\mathbb{X}$ est-il connexe ?*
   (b) *Les parties $\{a, c\}$ et $\{b, d\}$ sont-elles connexes ?*

2. *Démontrer qu'un espace topologique discret* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *est connexe si et seulement s'il est réduit à un point.*

Exercice 4.4.2 *Soient* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{A}$ *une partie connexe de* $\mathbb{X}$.

1. *Soient* $\mathcal{O}_1$ *et* $\mathcal{O}_2$ *deux ouverts disjoints de* $\mathbb{X}$ *tels que* $\mathbb{X} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. *Monter qu'on a*
$$\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_1 \ \ \textbf{\textit{ou bien}} \ \ \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_2.$$
2. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux fermés disjoints de* $\mathbb{X}$ *tels que* $\mathbb{X} = F_1 \cup F_2$. *Monter qu'on a*
$$\mathcal{A} \subset F_1 \ \ \textbf{\textit{ou bien}} \ \ \mathcal{A} \subset F_2.$$
3. *Soit* $\mathcal{O}$ *une partie ouverte et fermée de* $\mathbb{X}$ *telle que* $\mathcal{O} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. *Montrer que* $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$.

Exercice 4.4.3 *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux parties d'un espace topologique. Montrer que*

1. *Si* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont deux fermées et si* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *et* $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ *sont connexes, alors* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont connexes.*
2. *Si* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont connexes et si* $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}}$ *ou* $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B}$ *est non vide, alors* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *est connexe.*

Exercice 4.4.4 *Soient* $\mathbb{X} = \{a, b, c, d, e\}$ *et* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \mathbb{X}\}$ *une topologie sur* $\mathbb{X}$. *Montrer que* $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ *est connexe et localement connexe.*

Exercice 4.4.5

1. *Montrer qu'un espace discret ayant plus d'un point est localement connexe.*
2. *Montrer que tout sous-ensemble ouvert d'un espace localement connexe est localement connexe.*

CHAPITRE 5

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Ce chapitre expose un cas particulier et fondamental d'espace métrique. Un espace métrique peut être un ensemble quelconque, alors qu'un espace vectoriel normé possède une structure algébrique.

5.1 Normes

Définition 5.1.1 Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{C}$. Une fonction $\|.\| : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée **norme** sur $\mathbb{E}$ si elle vérifie les conditions suivantes

(i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_{\mathbb{E}}$, où $0_{\mathbb{E}}$ est le vecteur nul de $\mathbb{E}$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathbb{E},\ \ \|\lambda x\| \, |\lambda| \, \|x\|$.

(iii) $\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

À partir de l'inégalité triangulaire, on peut déduire l'inégalité suivante

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \,.$$

En effet, on a

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \,.$$

Ce qui donne

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \,. \tag{5.1.1}$$

On a aussi

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\| \,.$$

Alors

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \,.$$

Ceci implique

$$-\left(\|x\| - \|y\|\right) \leq \|x - y\| \,. \tag{5.1.2}$$

D'après (5.1.1) et (5.1.2), on trouve

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \,.$$

Définition 5.1.2 Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Exemple 5.1.3
1. La valeur absolue c'est une norme sur $\mathbb{R}$. Le couple $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace vectoriel normé.
2. Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$. Les applications suivantes

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|X\|_3 = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|,$$

où $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les applications suivantes

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

où $f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ sont des normes sur $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.
4. Soit $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions définie sur $\mathbb{X}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui sont bornées sur $\mathbb{X}$. L'application

$$f \longmapsto \|f\| = \sup_{x\in\mathbb{X}} |f(x)|$$

est une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$.

5.2 Distance associée à une norme

Proposition 5.2.1 *Si $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, alors la fonction $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur $\mathbb{E}$ (On l'appelle distance associée à la norme).

Démonstration 5.2.2 On a,

(i) pour tout $x, y \in \mathbb{E}$,

$$d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y,$$

(ii) pour tout $x, y \in \mathbb{E}$,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-1(y - x)\| = |-1|\, \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x),$$

(iii) pour tout $x, y, z \in \mathbb{E}$,

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Alors d c'est une distance de $\mathbb{E}$.

Définition 5.2.3 Un espace vectoriel normé complet est appelé un **espace de Banach**.

5.3 Normes équivalentes

Définition 5.3.1 Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. On dit que ces deux normes sont **équivalentes** s'il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que

$$\forall x \in \mathbb{E},\ C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_2 .$$

Exemple 5.3.2 Dans $\mathbb{R}^2$ les normes

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| \quad \textbf{et} \quad \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

où $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, sont équivalentes. En effet, pour tout $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| \leq 2\max(|x_1|, |x_2|) = 2\|X\|_\infty$$

et

$$\|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) \leq |x_1| + |x_2| = \|X\|_1 .$$

Alors

$$\|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq 2\|X\|_\infty .$$

Donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1 *1. Montrer que les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^n$*

(a) $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,

(b) $\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

(c) $\|X\|_\infty = \sup_{i=\{1,\ldots,n\}} (|x_i|)$,

où $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

2. Établir que ces normes sont équivalentes.

Exercice 5.4.2 *Fixons un réel $p \geq 1$. Soit $\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application définie par*

$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^p|\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (\textbf{\textit{où}}\ X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ).$$

1. Montrer les inégalités suivantes

(a) (Inégalité de Young) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

où p et q sont des conjugués (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

(b) (Inégalité de Hölder)

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \|X\|_p \|Y\|_q$$

où q est l'exposant conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

(c) (*Inégalité de Minkowski*) *Pour tout* $X, Y \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p .$$

2. *Vérifier que* $\|.\|_p$ *est une norme.*

Exercice 5.4.3 *Soit* $\mathbb{E} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$.

1. *Monter que les applications suivantes de* $\mathbb{E}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *sont des normes sur* $\mathbb{E}$.
   (a) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$.
   (b) $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
   (c) $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
2. *Comparer ces distances.*
3. *On considère la suite de fonction* $(f_n)_{n\geq 1}$ *définie sur* $[0,1]$ *par*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & si \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n} \\ 0 & si \quad \dfrac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) *Calculer* $\|f_n\|_1$, $\|f_n\|_2$ *et* $\|f_n\|_\infty$.
   (b) *Déduire que les normes* $\|f_n\|_1$, $\|f_n\|_2$ *et* $\|f_n\|_\infty$ *ne sont pas équivalentes.*

Exercice 5.4.4 *Soit* $(\mathbb{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Montrer que les applications suivantes*

$$\mathbb{E}\times\mathbb{E} \to \mathbb{E}, (x,y) \mapsto x+y \quad \textbf{\textit{et}} \quad \mathbb{K}\times\mathbb{E} \to \mathbb{E}, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

sont continues.

CHAPITRE 6

CORRIGÉS DES EXERCICES

6.1 Exercices du Chapitre 1

Exercice 1.11.1

1.
   - Les topologies qui contiennent 2 éléments est seulement la topologie grossière, c'est-à-dire, la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{X}\}$.
   - Les topologies qui contiennent 3 éléments sont

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \mathbb{X}\},\ \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \mathbb{X}\},\ \mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{c\}, \mathbb{X}\},\ \mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{a,b\}, \mathbb{X}\},$$
$$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{a,c\}, \mathbb{X}\},\ \mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{b,c\}, \mathbb{X}\}.$$

   - Les topologies qui contiennent 4 éléments sont

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \mathbb{X}\},\ \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,c\}, \mathbb{X}\},\ \mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \mathbb{X}\},$$
$$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \mathbb{X}\},\ \mathcal{T}_5 = \{\emptyset, \{b\}, \{a,c\}, \mathbb{X}\}, \mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{b\}, \{b,c\}, \mathbb{X}\},$$
$$\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, \{c\}, \{a,b\}, \mathbb{X}\},\ \mathcal{T}_8 = \{\emptyset, \{c\}, \{a,c\}, \mathbb{X}\}, \mathcal{T}_9 = \{\emptyset, \{c\}, \{b,c\}, \mathbb{X}\},$$

2. Les hypothèses nécessaires pour que la famille $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{X}\}$ définisse une topologie sur $\mathbb{X}$ sont
   - $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{X}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.
   - $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ou $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.
3. (i) On a $\mathbb{X} \in \mathcal{T}$, car $\mathbb{X}^C = \emptyset$ est fini. Alors $\emptyset, \mathbb{X} \in \mathcal{T}$.

   (ii) Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$. Montrons que $\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$, c'est-à-dire, $(\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i)^C$ est fini.
   Pour tout $i \in I$, on a $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$, alors $\mathcal{O}_i^C$ est fini. D'un autre côté on a

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i\right)^C = \bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_i^C.$$

   Puisque l'intersection quelconque des ensembles finis est finie, on déduit que $(\cup_{i\in I}\mathcal{O}_i)^C$ est fini.

(iii) Soit $(\mathcal{O}_i)_{1\leq i\leq n}$, $(n \in \mathbb{N})$ une famille fini d'éléments de $\mathcal{T}$. Montrons que $\cap_{i=1}^n \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$, c'est-à-dire, $(\cap_{i=1}^n \mathcal{O}_i)^C$ est fini.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$, alors $\mathcal{O}_i^C$ est fini. D'un autre côté on a

$$\left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i^C.$$

Puisque la réunion finie des ensembles finis est finie, on déduit que $(\cap_{i=1}^n \mathcal{O}_i)^C$ est fini.
Donc $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.

Exercice 1.11.2

(i) Pour tout $i \in I$, on a $\emptyset, \mathbb{X} \in \mathcal{T}_i$. Alors $\emptyset, \mathbb{X} \in \mathcal{T}$.

(ii) Soit $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$ une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$. Alors pour tout $i \in I$, $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{T}_i$. Comme $\mathcal{T}_i$ est une topologie sur $\mathbb{X}$, on déduit que pour tout $i \in I$, on a

$$\bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j \in \mathcal{T}_i.$$

Alors

$$\bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j \in \bigcap_{i\in i} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}.$$

(iii) Soit $(\mathcal{O}_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$, $(n \in \mathbb{N})$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$. Alors pour tout $i \in I$, $(\mathcal{O}_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}_i$. Comme $\mathcal{T}_i$ est une topologie sur $\mathbb{X}$, on déduit que pour tout $i \in I$, on a

$$\bigcap_{j=1}^n \mathcal{O}_j \in \mathcal{T}_i.$$

Alors

$$\bigcap_{j=1}^n \mathcal{O}_j \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}.$$

Donc $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.

Exercice 1.11.3

1. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
   (a) Par définition $\mathring{\mathcal{A}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\mathcal{A}$. Alors $\mathring{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$. Comme $\mathring{\mathcal{B}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\mathcal{B}$, on déduit que $\mathring{\mathcal{A}} \subset \mathring{\mathcal{B}}$.
   (b) Par définition $\overline{\mathcal{B}}$ est le plus petit fermé contenant $\mathcal{B}$. Alors $\overline{\mathcal{B}}$ contenant aussi $\mathcal{A}$. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est le plus fermé contenant $\mathcal{A}$, on déduit que $\overline{\mathcal{A}} \subset \overline{\mathcal{B}}$.
2. (a)
   - Premièrement, montrons que $\widehat{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}^{\circ} \subset \mathring{\mathcal{A}} \cap \mathring{\mathcal{B}}$. Soit $x \in \widehat{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}^{\circ}$. Alors d'après la proposition 1.3.2, on a

     $$\mathcal{A}\cap\mathcal{B} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

     Ceci implique

     $$\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x) \ \ \textbf{et} \ \ \mathcal{B} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

Alors $x \in \mathring{\mathcal{A}}$ et $x \in \mathring{\mathcal{B}}$. Ce qui donne

$$x \in \mathring{\mathcal{A}} \cap \mathring{\mathcal{B}}.$$

Donc

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}} \subset \mathring{\mathcal{A}} \cap \mathring{\mathcal{B}}.$$

- Maintenant, montrons que $\mathring{\mathcal{A}} \cap \mathring{\mathcal{B}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}}$. Soit $x \in \mathring{\mathcal{A}} \cap \mathring{\mathcal{B}}$. Alors $x \in \mathring{\mathcal{A}}$ et $x \in \mathring{\mathcal{B}}$. il s'en suit que $\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$. Alors

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

Ce qui implique

$$x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}}.$$

Donc

$$\mathring{\mathcal{A}} \cap \mathring{\mathcal{B}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}}.$$

Ce qui prouve

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}} = \mathring{\mathcal{A}} \cap \mathring{\mathcal{B}}.$$

(b)
- Premièrement, montrons que $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$. Soit $x \in \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$. Alors pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on a

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap V \neq \emptyset.$$

Ceci implique

$$(\mathcal{A} \cap V) \cup (\mathcal{B} \cap V) \neq \emptyset.$$

Alors $(\mathcal{A} \cap V) \neq \emptyset$ ou $(\mathcal{B} \cap V) \neq \emptyset$. Il s'en suit que $x \in \overline{\mathcal{A}}$ ou $x \in \overline{\mathcal{B}}$. Ce qui donne

$$x \in \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}.$$

Donc

$$\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}.$$

- Maintenant, montrons que $\overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$. Soit $x \in \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}$. Alors $x \in \overline{\mathcal{A}}$ ou $x \in \overline{\mathcal{B}}$. Ceci implique que pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on a $\mathcal{A} \cap V \neq \emptyset$ ou $\mathcal{B} \cap V \neq \emptyset$. Alors

$$(\mathcal{A} \cap V) \cup (\mathcal{B} \cap V) \neq \emptyset.$$

Ce qui implique

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap V \neq \emptyset.$$

Il s'en suit

$$x \in \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}.$$

Ce qui donne

$$\overline{\mathcal{A}} \cup \overline{B} \subset \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}.$$

Donc

$$\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}.$$

3. (a) Soit $x \in \mathring{\mathcal{A}} \cup \mathring{\mathcal{B}}$. Alors $x \in \mathring{\mathcal{A}}$ ou $x \in \mathring{\mathcal{B}}$. Ceci implique que $\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ ou $\mathcal{B} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$. Alors

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

Donc

$$x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}}.$$

Ce qui prouve

$$\mathring{\mathcal{A}} \cup \mathring{\mathcal{B}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}}.$$

(b) Soit $x \in \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$. Alors pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on a

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap V \neq \emptyset.$$

Ceci implique

$$(\mathcal{A} \cap V) \cap (\mathcal{B} \cap V) \neq \emptyset.$$

Alors $\mathcal{A} \cap V \neq \emptyset$ et $\mathcal{B} \cap V \neq \emptyset$. Ce qui donne $x \in \overline{\mathcal{A}}$ et $x \in \overline{\mathcal{B}}$. Donc

$$x \in \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}.$$

Ce qui montre

$$\overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}.$$

4. (a)
- Premièrement, montrons que $\mathbb{X}\backslash\overline{\mathcal{A}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}}$. On a $A \subset \overline{\mathcal{A}}$, alors $\mathbb{X}\backslash\overline{\mathcal{A}} \subset \mathbb{X}\backslash\mathcal{A}$. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est un fermé, on déduit que $\mathbb{X}\backslash\overline{\mathcal{A}}$ est un ouvert contenu dans $\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}$. Puisque $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}$, on déduit que

$$\mathbb{X}/\overline{\mathcal{A}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}}.$$

- Maintenant, montrons que $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}} \subset \mathbb{X}\backslash\overline{\mathcal{A}}$. On rappelle que si $x \notin \overline{\mathcal{A}}$, alors il existe un voisinage V de x tel que

$$\mathcal{A} \cap V = \emptyset.$$

Soit $x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}}$. Alors $\mathbb{X}\backslash\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$. Ceci implique qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{X}$ tel que

$$x \in \mathcal{O} \subset \mathbb{X}\backslash\mathcal{A}.$$

Alors

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset.$$

Comme $\mathcal{O}$ est un voisinage de x (ouvert contient x est un voisinage de x), on déduit que $x \notin \overline{\mathcal{A}}$. Alors

$$x \in \mathbb{X}/\overline{\mathcal{A}}.$$

Donc

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}} \subset \mathbb{X}\backslash\overline{\mathcal{A}}.$$

Ce qui montre

$$\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}} = \mathbb{X}\backslash\overline{\mathcal{A}}.$$

(b)
- Premièrement, montrons que $\overline{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}} \subset \mathbb{X}\backslash\mathring{\mathcal{A}}$. On a $\mathring{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, alors $\mathbb{X}\backslash\mathcal{A} \subset \mathbb{X}\backslash\mathring{\mathcal{A}}$. Comme $\mathring{\mathcal{A}}$ est un ouvert, on déduit que $\mathbb{X}\backslash\mathring{\mathcal{A}}$ est un fermé contenant $\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}$. Puisque $\overline{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}$ est le plus petit fermé contenant $\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}$, on a

$$\overline{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}} \subset \mathbb{X}\backslash\mathring{\mathcal{A}}$$

- Maintenant, montrons que $\mathbb{X}\backslash\mathring{\mathcal{A}} \subset \overline{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}$. Soit $x \in \mathbb{X}\backslash\mathring{\mathcal{A}}$. Alors $x \notin \mathring{\mathcal{A}}$. Ceci implique

$$\mathcal{A} \notin \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

Alors

$$\mathbb{X}\backslash\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

Il s'en suit que $x \in \overline{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}$. Donc

$$\mathbb{X}\backslash\mathring{\mathcal{A}} \subset \overline{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}.$$

Ce qui montre

$$\mathbb{X}\backslash\mathring{\mathcal{A}} = \overline{\mathbb{X}\backslash\mathcal{A}}.$$

Exercice 1.11.4

Soit $x \in \mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}}$. Alors $x \in \mathcal{A}$ et $x \in \overline{\mathcal{B}}$. Ceci implique que pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on a

$$\mathcal{B} \cap V \neq \emptyset.$$

Comme $\mathcal{A}$ est un ouvert contenant x, on déduit que $\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$. Alors

$$\mathcal{A} \cap V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x).$$

Ce qui donne

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{A} \cap V \neq \emptyset.$$

Donc

$$x \in \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}.$$

Ce qui prouve

$$\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}.$$

Exercice 1.11.5

Soit $x, y \in \mathbb{X}$ tels que $x \neq y$. Comme $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_2)$ est séparé, il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de $\mathcal{T}_2$ tels que $x \in \mathcal{O}_1$ et $y \in \mathcal{O}_2$. Puisque $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$, on déduit que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont aussi des ouverts de $\mathcal{T}_1$. Donc $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_1)$ est séparé.

Exercice 1.11.6

(i) On a $\mathbb{X}_2 \in \mathcal{T}_2$ et $\emptyset \in \mathcal{T}_2$. Alors

$$\mathbb{X}_1 = f^{-1}(\mathbb{X}_2) \in \mathcal{T}_1 \ \ \textbf{et} \ \ \emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{T}_1.$$

(ii) Soit $(f^{-1}(\mathcal{O}'_i))_{i\in I}$ une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{T}_1$ où $(\mathcal{O}'_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathcal{T}_2$. Comme $\mathcal{T}_2$ est une topologie sur $\mathbb{X}_2$, on a

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}'_i \in \mathcal{T}_2.$$

Alors

$$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{O}'_i) = f^{-1}(\cup_{i\in I}\mathcal{O}'_i) \in \mathcal{T}_1.$$

(*ii*) Soit $(f^{-1}(\mathcal{O}'_i))_{1\leq i\leq n}$, $(n \in \mathbb{N})$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}_1$ où $(\mathcal{O}'_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'ouverts de $\mathcal{T}_2$. Comme $\mathcal{T}_2$ est une topologie sur $\mathbb{X}_2$, on a

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}'_i \in \mathcal{T}_2.$$

Comme $\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(\mathcal{O}'_i) = f^{-1}(\cap_{i=1}^{n}\mathcal{O}'_i) \in \mathcal{T}_1$, on a

$$\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(\mathcal{O}'_i) \in \mathcal{T}_1.$$

Alors l'ensemble $\mathcal{T}_1 = f^{-1}(\mathcal{T}_2)$ des $f^{-1}(\mathcal{O}')$ lorsque $\mathcal{O}'$ parcourt $\mathcal{T}_2$ est une topologie sur $\mathbb{X}_1$.

Exercice 1.11.7

1. Pour montrer que $f(\overline{\mathcal{A}}) \subset \overline{f(\mathcal{A})}$ il suffit de montrer que pour tout $x \in \overline{\mathcal{A}}$ on a $f(x) \in \overline{f(\mathcal{A})}$. Pour montrer cette dernière il suffit de montrer que $\forall V' \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(x))$ on a
$$f(\mathcal{A}) \cap V' \neq \emptyset.$$
Soit $x \in \overline{\mathcal{A}}$. Alors pour tout voisinage V de x dans $\mathbb{X}_1$ (*i.e.*, $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x)$) on a
$$\mathcal{A} \cap V \neq \emptyset. \tag{6.1.1}$$
Soit V' un voisinage de $f(x)$ dans $\mathbb{X}_2$ (*i.e.*, $V' \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(x))$). Comme f est continue en x, $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x dans $\mathbb{X}_1$. D'après (6.1.1), on a
$$\mathcal{A} \cap f^{-1}(V') \neq \emptyset.$$
Ceci implique qu'il existe $y \in \mathcal{A} \cap f^{-1}(V')$. Il s'en suit $y \in \mathcal{A}$ et $y \in f^{-1}(V')$. Alors
$$f(y) \in f(\mathcal{A}) \quad \textbf{et} \quad f(y) \in f(f^{-1}(V')) \subset V'.$$
Par conséquence
$$f(\mathcal{A}) \cap V' \neq \emptyset.$$
Donc
$$f(x) \in \overline{f(\mathcal{A})}.$$
Ce qui prouve
$$f(\overline{\mathcal{A}}) \in \overline{f(\mathcal{A})}.$$

2. (a) On rappelle que l'image réciproque par une application continue d'une partie ouverte de $\mathbb{X}_2$ est une partie ouverte de $\mathbb{X}_1$.
   On a $\mathring{\mathcal{B}}$ et le plus grand ouvert contenu dans $\mathcal{B}$. Alors $f^{-1}(\mathring{\mathcal{B}})$ est une partie ouverte contenu dans $f^{-1}(\mathcal{B})$. Comme $\widehat{f^{-1}(\mathcal{B})}^{\circ}$ est le plus ouvert contenu dans $f^{-1}(\mathcal{B})$, on déduit que
   $$f^{-1}(\mathring{\mathcal{B}}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(\mathcal{B})}}.$$
   (b) On rappelle que une image réciproque par une application continue d'une partie fermée de $\mathbb{X}_2$ est une partie fermée de $\mathbb{X}_1$.
   On a $\overline{\mathcal{B}}$ est le plus petit fermé contenant $\mathcal{B}$. Alors $f^{-1}(\overline{\mathcal{B}})$ est un fermé contenant $f^{-1}(\mathcal{B})$. Comme $\overline{f^{-1}(\mathcal{B})}$ est le plus petit fermé contenant $f^{-1}(\mathcal{B})$, on déduit que
   $$\overline{f^{-1}(\mathcal{B})} \subset f^{-1}(\overline{\mathcal{B}}).$$

Exercice 1.11.8

1. • Comme les projections canoniques p_1 et p_2 associées à $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ sont contenues, on déduit que
$$p_1\left(\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}\right) \subset \overline{p_1\left(\mathcal{A} \times \mathcal{B}\right)} \subset \overline{\mathcal{A}} \;\; \textbf{et} \;\; p_2\left(\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}\right) \subset \overline{p_2\left(\mathcal{A} \times \mathcal{B}\right)} \subset \overline{\mathcal{B}}.$$
Alors
$$\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \subset p_1^{-1}\left(p_1\left(\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}\right)\right) \subset p_1^{-1}\left(\overline{\mathcal{A}}\right) \;\; \textbf{et} \;\; \overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \subset p_2^{-1}\left(p_2\left(\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}\right)\right) \subset p_2^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}}\right).$$
Ce qui prouve que
$$\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \subset p_1^{-1}\left(\overline{\mathcal{A}}\right) \cap p_2^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}}\right) = \overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}}.$$
Par conséquent,
$$\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}}.$$
• Réciproquement, soient $X = (x_1, x_2) \in \overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ un ouvert élémentaire de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ contenant X. On a
$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cap (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1) \times (\mathcal{B} \cap \mathcal{O}_2).$$
Comme $x_1 \in \overline{\mathcal{A}}$, $x_2 \in \overline{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{T}_1$, $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_2$, on déduit que
$$\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset \;\; \textbf{et} \;\; \mathcal{B} \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset.$$
Alors
$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cap (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1) \times (\mathcal{B} \cap \mathcal{O}_2) \neq \emptyset.$$
Ceci implique
$$X \in \overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}.$$
Ce qui prouve
$$\overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}.$$
Donc
$$\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}}.$$
2. Si $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{X}_1$ et $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathbb{X}_2$, alors
$$\overline{\mathcal{A}} = \mathbb{X}_1 \;\; \textbf{et} \;\; \overline{\mathcal{B}} = \mathbb{X}_2.$$
D'après la première question on a
$$\overline{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2.$$
Donc $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est dense dans $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$.
3. Soient $X = (x_1, x_2)$ et $X' = (x_1', x_2')$ deux points distincts de $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$. Alors $x_1 \neq x_1'$ ou $x_2 \neq x_2'$. Supposons que c'est $x_1 \neq x_1'$. Comme $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ est séparé, il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x_1)$ et $V' \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1}(x_1')$ tels que
$$V \cap V' = \emptyset.$$
Alors
$$W = V \times \mathbb{X}_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2}(X) \;\; \textbf{et} \;\; W' = V' \times \mathbb{X}_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2}(X').$$
De plus $W \cap W' = \emptyset$. Donc $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ est séparé.

Exercice 1.11.9

Soit $x, y \in \mathbb{X}_1$ tels que $x \neq y$. Alors il existe une application continue $f : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ telle que

$$f(x) \neq f(y).$$

Comme $\mathbb{X}_2$ est séparé, il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ de $\mathcal{T}_2$ tels que $f(x) \in \mathcal{O}_1$, $f(y) \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ ($\mathcal{O}_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(x))$ et $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}_2}(f(y))$). Et comme f est continue, on déduit que $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ sont deux ouverts de $\mathcal{T}_1$ tels que $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_1)$, $y \in f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ et

$$f^{-1}(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2) = f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Donc $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ est séparé.

Exercice 1.11.10

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(x) > 0$. Donc f est croissante.
2. Vérifions que l'application d^* est une distance
   (a) Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a
   $$d^*(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Longleftrightarrow d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$
   (Car d est une distance)
   (b) Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a
   $$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d^*(y,x).$$
   (c) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{X}$, on a
   $$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$
   En utilisant la croissance de la fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, F(X) = \dfrac{X}{X+1}$ $\big($*i.e.*, si $X \leq Y$, alors $F(X) \leq F(Y)\big)$ et en supposant $X = d(x,z)$, $Y = d(x,y) + d(y,z)$, on obtient
   $$\begin{aligned} d^*(x,z) = F(d(x,z)) &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \\ &\leq F(d(x,y)+d(y,z)) = \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d^*(x,y) + d^*(y,z). \end{aligned}$$

Donc d^* est une distance sur $\mathbb{X}$.

Exercice 1.11.11

1. Vérifions que d_i $(i=1,2,3)$ sont des distances sur $\mathbb{R}^n$
   (a) Vérifions que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}^n$
      i. Pour tout $X,Y\in\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
d_1(X,Y)=0 &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=0\\
&\Longleftrightarrow |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|=0\\
&\Longleftrightarrow |x_i-y_i|=0 \quad \forall i\in\{0,\ldots,n\}\\
&\Longleftrightarrow x_i=y_i \quad \forall i\in\{0,\ldots,n\}\\
&\Longleftrightarrow X=Y.
\end{aligned}$$

      ii. Pour tout $X,Y\in\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
d_1(X,Y)&=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=|x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|=|y_1-x_1|+\ldots+|y_n-x_n|\\
&=\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|=d_1(Y,X).
\end{aligned}$$

      iii. Pour tout X,Y et $Z=(z_1,\ldots,z_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
d_1(X,Z)&=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|=|x_1-z_1|+\ldots+|x_n-z_n|\\
&=|x_1-y_1+y_1-z_1|+\ldots+|x_n-y_n+y_n-z_n|\\
&\leq (|x_1-y_1|+|y_1-z_1|)+\ldots+(|x_n-y_n|+|y_n-z_n|)\\
&\leq (|x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|)+(|y_1-z_1|+\ldots+|y_n-z_n|)\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|\right)=d_1(X,Y)+d_1(Y,Z).
\end{aligned}$$

   Donc d_1 est une distance.
   (b) Vérifions que d_2 est une distance sur $\mathbb{R}^n$
      i. Pour tout $X,Y\in\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
d_2(X,Y)=0 &\Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=0\\
&\Longleftrightarrow \sqrt{|x_1-y_1|^2+\ldots+|x_n-y_n|^2}=0\\
&\Longleftrightarrow |x_1-y_1|^2=0,\ldots,|x_n-y_n|^2=0\\
&\Longleftrightarrow x_1=y_1,\ldots,x_n=y_n\\
&\Longleftrightarrow X=Y.
\end{aligned}$$

ii. Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$d_2(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2}$$
$$= \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + \ldots + |y_n - x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = d_2(Y,X).$$

iii. Pour montrer l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivantes

$$\sum_{1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Pour tout X, Y et $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} d_2^2(X,Z) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i + y_i - z_i|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\,|y_i - z_i| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, en prenant $a_i = |x_i - y_i|$ et $b_i = |y_i - z_i|$, on obtient

$$\begin{aligned} d_2^2(X,Z) &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\,|y_i - z_i| \\ &\leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &+ 2\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{2} |y_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= (d_2(X,Y) + d_2(Y,Z))^2. \end{aligned}$$

Alors

$$d_2^2(X,Z) \leq (d_2(X,Y) + d_2(Y,Z))^2.$$

Ceci implique

$$d_2(X,Z) \leq d_2(X,Y) + d_2(Y,Z).$$

Donc d_2 est une distance.

(c) Vérifions que d_3 est une distance sur $\mathbb{R}^n$

i. Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} d_3(X,Y) = 0 &\Longleftrightarrow \max_{\{i=1,\ldots,n\}} |x_i - y_i| = 0 \\ &\Longleftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \\ &\Longleftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \\ &\Longleftrightarrow X = Y. \end{aligned}$$

ii. Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$d_3(X,Y) = \max_{\{i=1,\ldots,n\}} |x_i - y_i| = \max_{\{i=1,\ldots,n\}} |y_i - x_i| = d_3(Y,X).$$

iii. Pour tout X, Y et $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} d_3(X,Z) &= \max_{\{i=1,\ldots,n\}} |x_i - z_i| = \max_{\{i=1,\ldots,n\}} |x_i - y_i + y_i - z_i| \\ &\leq \max_{\{i=1,\ldots,n\}} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &\leq \max_{\{i=1,\ldots,n\}} |x_i - y_i| + \max_{\{i=1,\ldots,n\}} |y_i - z_i| = d_3(X,Y) + d_3(Y,Z). \end{aligned}$$

Donc d_3 est une distance.

2. Montrons que ces distances sont équivalentes

(a) Prenons d_1 et d_2. Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} d_1^2(X,Y) &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - y_i|\,|x_j - y_j| + \sum_{1\leq j<i\leq n} |x_i - y_i|\,|x_j - y_j| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} |x_i - y_i|\,|x_j - y_j| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 + (n-1)\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 = n\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 = nd_2^2(X,Y). \end{aligned}$$

Alors

$$d_1(X,Y) \leq \sqrt{n}\, d_2(X,Y).$$

On a aussi

$$d_2(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = d_1(X,Y).$$

Alors il existe deux constantes réelles positives $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{n}$ telles que

$$\alpha d_2(X,Y) \leq d_1(X,Y) \leq \beta d_2(X,Y).$$

Donc d_1 et d_2 sont équivalentes.

(b) Prenons d_1 et d_3. Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$d_3(X,Y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \leq |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = d_1(X,Y).$$

On a aussi

$$d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq n \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| = nd_3(X,Y).$$

Alors il existe deux constantes réelles positives $\gamma = 1$ et $\delta = n$ telles que

$$\gamma d_3(X,y) \leq d_1(x,Y) \leq \delta d_3(X,Y).$$

Donc d_1 et d_3 sont équivalentes.

(c) Prenons d_2 et d_3. On a déjà montré que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha d_2(X,Y) \leq d_1(x,Y) \leq \beta d_2(X,Y), \tag{6.1.2}$$

et

$$\gamma d_3(X,y) \leq d_1(x,Y) \leq \delta d_3(X,Y). \tag{6.1.3}$$

D'après (6.1.2) et (6.1.3), on trouve

$$\alpha d_2(X,y) \leq d_1(x,Y) \leq \delta d_3(X,Y) \Longrightarrow d_2(X,Y) \leq \frac{\delta}{\alpha} d_3(X,Y),$$

et

$$\gamma d_3(X,y) \leq d_1(x,Y) \leq \beta d_2(X,Y) \Longrightarrow \frac{\gamma}{\beta} d_3(X,Y) \leq d_2(X,Y).$$

Alors il existe deux constantes réelles positives $c_1 = \dfrac{\delta}{\alpha}$ et $c_2 = \dfrac{\gamma}{\beta}$ telles que

$$c_1 d_3(X,Y) \leq d_2(X,Y) \leq c_2 d_3(X,Y).$$

Donc d_2 et d_3 sont équivalentes.

Conclusion. les distances d_1, d_2 et d_3 sont équivalentes.

Exercice 1.11.12

1. (i) Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \ \ \textbf{car } f \textbf{ est injective}.$$

(ii) Pour tout $x, y \in \mathbb{X}$, on a

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y,x).$$

(iii) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Donc d est une distance sur $\mathbb{X}$.

2. Comme la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3$ est une application injective, d'après la première question, on déduit que d^* est une distance sur $\mathbb{R}$.
3. • Pour $r > \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
B(2,r) &= \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \, |f(x) - f(2)| < r\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < r\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / -r < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} < r\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \frac{1}{2} - r < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} + r\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \frac{2}{1-2r} < x < \frac{2}{1+2r}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / x \in \left]\frac{2}{1-2r}, \frac{2}{1+2r}\right[\right\} \\
&= \mathbb{R}_+^* \cap \left]\frac{2}{1-2r}, \frac{2}{1+2r}\right[= \left]0, \frac{2}{1+2r}\right[.
\end{aligned}$$

On suit les mêmes étapes on trouve

$$\overline{B}(2,r) = \left]0, \frac{2}{1+2r}\right].$$

• Pour $r < \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
B(2,r) &= \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \, |f(x) - f(2)| < r\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < r\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / -r < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} < r\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \frac{1}{2} - r < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} + r\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \frac{2}{1-2r} < x < \frac{2}{1+2r}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / x \in \left]\frac{2}{1-2r}, \frac{2}{1+2r}\right[\right\} \\
&= \mathbb{R}_+^* \cap \left]\frac{2}{1-2r}, \frac{2}{1+2r}\right[= \left]\frac{2}{1-2r}, \frac{2}{1+2r}\right[\quad \left(\textbf{car } \frac{2}{1-2r} > 0\right).
\end{aligned}$$

On suit les mêmes étapes on trouve

$$\overline{B}(2,r) = \left[\frac{2}{1-2r}, \frac{2}{1+2r}\right].$$

• Pour $r = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
B\left(2, \frac{1}{2}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \, |f(x) - f(2)| < \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < r\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / -\frac{1}{2} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / 0 < \frac{1}{x} < 1\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}_+^* / x \in]1, +\infty[\right\} \\
&= \mathbb{R}_+^* \cap]1, +\infty[=]1, +\infty[.
\end{aligned}$$

On suit les mêmes étapes on trouve

$$\overline{B}\left(2, \frac{1}{2}\right) = [1, +\infty[.$$

Exercice 1.11.13

1. Vérifions que les applications suivantes sont des distances sur $\mathbb{X}$

$$d_1(f,g)=\int_0^1 \mid f(x)-g(x)\mid dx,\quad d_2(f,g)=\left(\int_0^1 \mid f(x)-g(x)\mid^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{et}\quad d_3(f,g)=\max_{x\in[0,1]}\mid f(x)-g(x)\mid.$$

   (a) Vérifions que l'application d_1 est une distance sur $\mathbb{X}$

      i. Pour tout $f,g\in\mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} d_1(f,g)=0 &\Longleftrightarrow \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx=0 \\ &\Longleftrightarrow |f(x)-g(x)|=0 \quad \forall x\in[0,1] \\ &\Longleftrightarrow f(x)=g(x),\quad \forall x\in[0,1]. \end{aligned}$$

      ii. Pour tout $f,g\in\mathbb{X}$, on a

$$d_1(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^1 |g(x)-f(x)|\,dx=d_1(g,f).$$

      iii. Pour tout $f,g,h\in\mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} d_1(f,h)=\int_0^1 |f(x)-h(x)|\,dx &= \int_0^1 |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|\,dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\,dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx+\int_0^1 |g(x)-h(x)|\,dx=d_1(f,g)+d_1(g,h). \end{aligned}$$

   Donc d_1 est une distance sur $\mathbb{X}$.

   (b) Vérifions que l'application d_2 est une distance sur $\mathbb{X}$

      i. Pour tout $f,g\in\mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} d_2(f,g)=0 &\Longleftrightarrow \left(\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=0 \\ &\Longleftrightarrow \int_0^1 |f(x)-g(x)|^2\,dx=0 \\ &\Longleftrightarrow |f(x)-g(x)|^2=0,\quad \forall x\in[0,1] \\ &\Longleftrightarrow f(x)=g(x),\quad \forall x\in[0,1]. \end{aligned}$$

      ii. Pour tout $f,g\in\mathbb{X}$, on a

$$d_2(f,g)=\left(\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^1 |g(x)-f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=d_2(g,f).$$

      iii. Pour montrer l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante

$$\int_0^1 |f(x)\,g(x)|\,dx\leq\left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\quad \forall f,g\in\mathbb{X}.$$

Pour tout $f, g, h \in \mathbb{X}$, on a

$$
\begin{aligned}
d_2^2(f,h) =& \int_0^1 |f(x)-h(x)|^2\,dx = \int_0^1 |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|^2\,dx \\
=& \int_0^1 (f(x)-g(x)+g(x)-h(x))^2\,dx \\
=& \int_0^1 \Big((f(x)-g(x))^2+(g(x)-h(x))^2+2(f(x)-g(x))(g(x)-h(x))\Big)\,dx \\
=& \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx + \int_0^1 (g(x)-h(x))^2\,dx \\
&+ 2\int_0^1 (f(x)-g(x))(g(x)-h(x))\,dx \\
\leq& \int_0^1 |f(x)-g(x)|^2\,dx + \int_0^1 |g(x)-h(x)|^2\,dx \\
&+ 2\int_0^1 |(f(x)-g(x))(g(x)-h(x))|\,dx
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité Cauchy-Schwartz, on obtient

$$
\begin{aligned}
d_2^2(f,h) \leq& \int_0^1 |f(x)-g(x)|^2\,dx + \int_0^1 |g(x)-h(x)|^2\,dx \\
&+ 2\left(|f(x)-g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(|g(x)-h(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
=& \left(\left(\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\left(\int_0^1 |g(x)-h(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&+ 2\left(|f(x)-g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(|g(x)-h(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
=& \left(\left(\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |g(x)-h(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
=& d_2^2(f,g) + d_2^2(g,h).
\end{aligned}
$$

Alors

$$d_2^2(f,h) \leq (d_2(f,g)+d_2(g,h))^2.$$

Ce qui donne

$$d_2(f,h) \leq d_2(f,g)+d_2(g,h).$$

Donc d_2 est une distance sur $\mathbb{X}$.

(c) Vérifions que l'application d_3 est une distance sur $\mathbb{X}$

i. Pour tout $f, g \in \mathbb{X}$, on a

$$
\begin{aligned}
d_3(f,g) = 0 &\Longleftrightarrow \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| = 0 \\
&\Longleftrightarrow |f(x)-g(x)| = 0, \quad \forall x \in [0,1] \\
&\Longleftrightarrow f(x) = g(x), \quad \forall x \in [0,1].
\end{aligned}
$$

ii. Pour tout $f, g \in \mathbb{X}$, on a

$$d_3(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = \max_{x\in[0,1]} |g(x) - f(x)| = d_3(g,f).$$

iii. Pour tout $f, g, h \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} d_3(f,h) &= \max_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x)| \\ &= \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq \max_{x\in[0,1]} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \\ &\leq \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + \max_{x\in[0,1]} |g(x) - h(x)| = d_3(f,g) + d_3(g,h). \end{aligned}$$

Alors

$$d_3(f,h) \leq d_3(f,g) + d_3(g,h).$$

Donc d_1 est une distance sur $\mathbb{X}$.

2. Considérons la suite de fonction $f_n, n \in \mathbb{N}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{pour} \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n} \\ 0 & \text{pour} \quad \dfrac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et $g = 0$.

(a) Vérifier que $f_n \in \mathbb{X}$.
Il est clair que f_n est continue sur $[0,1]$. Alors $f_n \in \mathbb{X} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

(b) Calculer $d_1(f_n, g)$, $d_2(f_n, g)$ et $d_3(f_n, g)$
On a

$$\begin{aligned} d_1(f_n, g) &= \int_0^1 |f_n(x) - g(x)| \, dx = \int_0^1 |f_n(x)| \, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \left|-n^2 x + 2n\right| dx + \int_{\frac{2}{n}}^1 0 dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \left(-n^2 x + 2n\right) dx, \qquad \left(\text{car } 0 \leq -n^2 x + 2n, \ \forall x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) \\ &= \left[\frac{n^2}{2} x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[-\frac{n^2}{2} x^2 + 2nx\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = 1. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
d_2^2(f_n,g) &= \int_0^1 |f_n(x)-g(x)|^2\,dx = \int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} n^4x^2dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \left|-n^2x+2n\right|^2 dx + \int_{\frac{2}{n}}^1 0^2dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} n^4x^2dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \left(n^4x^2+4n^2-4n^3x\right) dx \\
&= \left[\frac{n^4}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[\frac{n^4}{3}x^3+4n^2x-2n^3x^2\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \frac{2n}{3}.
\end{aligned}$$

Alors

$$d_2(f_n,g) = \sqrt{\frac{2n}{3}}.$$

Finalement

$$d_3(f_n,g) = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)-g(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n.$$

(c) Déduire que d_1, d_2 et d_3 elles ne sont pas équivalentes

On remarque que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} d_1(f_n,g) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} d_2(f_n,g) = \infty.$$

Ce qui signifie, pour tout $f,g\in\mathbb{X}$, il n'existe aucun $\beta>0$ pour que l'inégalité suivante

$$d_2(f,g) \le \beta d_1(f,g).$$

Soit vérifiée.

Donc d_1 et d_2 ne sont pas équivalentes.

On remarque aussi que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} d_1(f_n,g) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} d_3(f_n,g) = \infty.$$

Ce qui signifie, pour tout $f,g\in\mathbb{X}$, il n'existe aucun $\beta>0$ pour que l'inégalité suivante

$$d_3(f,g) \le \beta d_1(f,g).$$

Soit vérifiée.

Donc d_1 et d_3 ne sont pas équivalentes.

Finalement on remarque que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{d_3(f_n,g)}{d_2(f_n,g)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{2n}{3}}} = \infty.$$

Ce qui signifie, pour tout $f,g\in\mathbb{X}$, il n'existe aucun $\beta>0$ pour que l'inégalité suivante

$$d_3(f,g) \le \beta d_2(f,g).$$

Soit vérifiée.

Donc d_2 et d_3 ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.11.14

1. Montrer que les applications suivantes sont des distances sur $\mathbb{X}$

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i \quad \text{et} \quad D_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} d_i.$$

(a) Montrons que D_1 est une distance sur $\mathbb{X}$

i. Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} D_1 (X, Y) = 0 &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i (x_i, y_i) = 0 \\ &\Longleftrightarrow d_1 (x_1, y_1) + \ldots + d_n (x_n, y_n) = 0 \\ &\Longleftrightarrow d_i(x_i, y_i) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ &\Longleftrightarrow x_i = y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \qquad (\text{car } \forall 1 \leq i \leq n, d_i \text{ est une distance sur } \mathbb{X}_i) \\ &\Longleftrightarrow X = Y. \end{aligned}$$

ii. Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} D_1 (X, Y) &= \sum_{i=1}^{n} d_i (x_i, y_i) = d_1 (x_1, y_1) + \ldots + d_n (x_n, y_n) \\ &\Longleftrightarrow d_1 (y_1, x_1) + \ldots + d_n (y_n, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i (y_i, x_i) = D_1 (Y, X). \end{aligned}$$

iii. Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} D_1 (X, Z) &= \sum_{i=1}^{n} d_i (x_i, z_i) \\ &= d_1 (x_1, z_1) + \ldots + d_n (x_n, z_n) \\ &\leq (d_1 (x_1, y_1) + d_1 (y_1, z_1)) + \ldots + (d_n (x_n, y_n) + d_n (y_n, z_n)) \\ &\leq (d_1 (x_1, y_1) + \ldots + d_n (x_n, y_n)) + \ldots + (d_1 (y_1, z_1) + \ldots + d_n (y_n, z_n)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} d_i (x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i (y_i, z_i) = D_1 (X, Y) + D_1 (Y, Z). \end{aligned}$$

Donc D_1 est une distance sur $\mathbb{X}$.

(b) Montrons que D_∞ est une distance sur $\mathbb{X}$

i. Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} D_\infty (X, Y) = 0 &\Longleftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} d_i (x_i, y_i) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x_i = y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ &\Longleftrightarrow X = Y. \end{aligned}$$

ii. Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{X}$, on a

$$D_\infty (X, Y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i (x_i, y_i) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i (y_i, x_i) = D_\infty (Y, X).$$

iii. Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} D_\infty (X, Z) &= \max_{1 \le i \le n} d_i (x_i, z_i) \\ &\le \max_{1 \le i \le n} (d_i (x_i, y_i) + d_i (y_i, z_i)) \\ &\le \max_{1 \le i \le n} d_i (x_i, y_i) + \max_{1 \le i \le n} d_i (y_i, z_i) = D_\infty (X, Y) + D_\infty (Y, Z) . \end{aligned}$$

Donc D_∞ est une distance sur $\mathbb{X}$.

Que peut-on dire si $n = \infty$?
Si $n = \infty$, D_1 et D_∞ ne sont pas des distances sur $\mathbb{X}' = \mathbb{R}^\infty$ car

(a) Pour D_1, il existe $X, Y \in \mathbb{X}'$, tel que $D_1 (X, Y) = +\infty$, ce qui signifie que D_1 n'est pas une application.
Donc D_1 n'est pas une distance sur $\mathbb{X}'$.

(b) Pour D_∞, si d_i $i \in \mathbb{N}$ sont des distances quelconque telles que $d_i \neq d_j$, $\quad \forall i \neq j$, alors $D_\infty = \max_{1 \le i \le +\infty} d_i (x_i, y_i)$ n'existe pas.
Donc D_∞ n'est pas une distance sur $\mathbb{X}'$

2. Montrons que dans ce dernier cas on peut prendre comme distance sur $\mathbb{X}'$

$$D_1' = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i}{1 + d_i} \quad \text{et} \quad D_\infty' = \max_{i \ge 1} \left(\min \left(\frac{1}{2^i}, d_i \right) \right) .$$

(a) Montrons que D_1' est une distance sur $\mathbb{X}'$
On pose

$$D_{1,n}' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{d_i}{1 + d_i} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\frac{d_i}{1 + d_i}$ (même pour $\frac{1}{2^i} \frac{d_i}{1 + d_i}$) est une distance (voir exercice (1.11.10)) et d'après la première question, il est clair que $D_{1,n}'$ est aussi une distance.
On remarque que $D_{1,n}'$ est une suite croissante et majorée par 1. Alors

$$\lim_{n \to \infty} D_{1,n}' = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i}{1 + d_i},$$

existe. Alors

i. Pour tout $X_n, Y_n \in \mathbb{X}$ (avec $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \ldots \times \mathbb{X}_n$), on a

$$\begin{aligned} D_{1,n}' (X_n, Y_n) = 0 &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{d_i (x_i, y_i)}{1 + d_i (x_i, y_i)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow d_i (x_i, y_i) = 0 \quad \forall 1 \le i \le n \\ &\Longleftrightarrow X_n = Y_n. \end{aligned}$$

Alors

$$D_1' (X, Y) = \lim_{n \to \infty} D_{1,n}' (X_n, Y_n) = 0 \Longleftrightarrow X = Y.$$

ii. Pour tout $X_n, Y_n \in \mathbb{X}$ (avec $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \ldots \times \mathbb{X}_n$), on a

$$\begin{aligned} D'_{1,n}(X_n, Y_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(y_i, x_i)}{1 + d_i(y_i, x_i)} = D'_{1,n}(Y_n, X_n). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} D'_1(X, Y) &= \lim_{n\to\infty} D'_{1,n}(X_n, Y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} D'_{1,n}(Y_n, X_n) = D'_1(Y, X). \end{aligned}$$

iii. Pour tout $X_n, Y_n, Z_n \in \mathbb{X}$, on a

$$D'_{1,n}(X_n, Z_n) \leq D'_{1,n}(X_n, Y_n) + D'_{1,n}(Y_n, Z_n).$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} D'_{1,n}(X_n, Z_n) \leq \lim_{n\to\infty} D'_{1,n}(X_n, Y_n) + \lim_{n\to\infty} D'_{1,n}(Y_n, Z_n).$$

Alors

$$D'_1(X, Z) \leq D'_1(X, Y) + D'_1(Y, Z).$$

Donc D'_1 est une distance sur $\mathbb{X}'$.

(b) Montrons que D'_∞ est une distance $\mathbb{X}'$
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que

$$\min\left(\frac{1}{2^{N_\varepsilon}}, d_{N_\varepsilon}\right) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \min\left(\frac{1}{2^i}, d_i\right) \geq \varepsilon \quad \forall 1 \leq i \leq N_\varepsilon.$$

Alors

$$D'_\infty = \max_{i\geq 1}\left(\min\left(\frac{1}{2^i}, d_i\right)\right) = \max_{1\leq i\leq N_\varepsilon}\left(\min\left(\frac{1}{2^i}, d_i\right)\right).$$

Cette dernière est bien définie.
Il est facile de montrer que D'_∞ est une distance sur $\mathbb{X}'$.

Exercice 1.11.15

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Alors

$$\inf_{z\in\mathcal{A}} d(x, z) \leq d(x, y) + \inf_{z\in\mathcal{A}} d(y, z).$$

Ceci implique

$$d(x, \mathcal{A}) \leq d(x, y) + d(y, \mathcal{A}).$$

Alors

$$d(x, \mathcal{A}) - d(y, \mathcal{A}) \leq d(x, y). \tag{6.1.4}$$

On obtient aussi

$$d(x,z) \leq d(y,x) + d(y,z) = d(x,y) + d(x,z).$$

Ce qui donne

$$\inf_{z\in\mathcal{A}} d(y,z) \leq d(x,y) + \inf_{z\in\mathcal{A}} d(x,z).$$

Il s'en suit

$$d(y,\mathcal{A}) \leq d(x,y) + d(x,\mathcal{A}).$$

Alors

$$d(y,\mathcal{A}) - d(x,\mathcal{A}) \leq d(x,y).$$

Ceci implique

$$-\left(d(x,\mathcal{A}) - d(y,\mathcal{A})\right) \leq d(x,y). \tag{6.1.5}$$

Donc d'après (6.1.4) et (6.1.5), on a

$$|d(x,\mathcal{A}) - d(y,\mathcal{A})| \leq d(x,y).$$

Exercice 1.11.16

1. - $(a) \Rightarrow (b)$. Soit $x \in \overline{\mathcal{A}}$. Alors pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on a $V \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Comme, pour tout $r > 0$, la boule $B(x,r)$ est un voisinage de x, on déduit que

   $$B(x,r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

   - $(b) \Rightarrow (c)$. On a, pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$; en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

   Il s'en suit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in \mathcal{A}$ tel que

   $$d(x_n, x) < \frac{1}{n}.$$

   Donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ converge vers x.

   - $(c) \Rightarrow (a)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ converge vers x. Alors pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $n \geq n_0$, on ait

   $$x_n \in V.$$

   Alors pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on a

   $$x_{n_0} \in V \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

   Donc

   $$x \in \overline{\mathcal{A}}.$$

2. (a) - Soit $x \in \overline{\mathcal{A}}$. Supposons que $d(x,\mathcal{A}) = \varepsilon > 0$. Alors la boule ouverte $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ ne contient aucun point de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire,

   $$B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathcal{A} = \emptyset.$$

   D'après la question 1, on a $x \notin \overline{\mathcal{A}}$ (contradiction).

- Réciproquement, supposons que $d(x,\mathcal{A}) = 0$, alors toute boule ouverte de centre x contient au moins un point de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire, pour tout $r > 0$, on a

$$B(x,r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

D'après la question 1, on a $x \in \overline{\mathcal{A}}$. Donc

$$x \in \overline{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow d(\mathcal{A},x) = 0.$$

(b) - Soit $x \in \mathring{\mathcal{A}}$. Alors $\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$. Ceci implique qu'il existe $r > 0$ tel que

$$B(x,r) \subset \mathcal{A}.$$

Alors pour tout $y \in \mathbb{X}/A$, on a $d(x,y) \geq r$. Ce qui donne

$$d(x,\mathbb{X}/\mathcal{A}) \geq r > 0.$$

- Réciproquement, soit $x \in \mathcal{A}$ tel que $d(x,\mathbb{X}/\mathcal{A}) > 0$. Alors il existe $r > 0$ tel que

$$d(x,\mathbb{X}/\mathcal{A}) \geq r.$$

Ceci implique

$$B(x,r) \subset \mathcal{A}.$$

Il s'en suit que $\mathcal{A} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$. Ce qui prouve

$$x \in \mathring{\mathcal{A}}.$$

Donc

$$x \in \mathring{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow d(x,\mathbb{X}/\mathcal{A}) > 0.$$

Exercice 1.11.17

1. Pour la partie $\mathbb{A}$

(a) On a $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \cup \{0\} = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. En effet, on a $\mathbb{A} \subset \overline{\mathbb{A}}$ et On a aussi $0 \in \overline{\mathbb{A}}$ car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (par exemple $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$) tel que

$$\frac{1}{N_\varepsilon + 1} \in B(0,\varepsilon) \cap \mathbb{A}.$$

Alors

$$B(0,\varepsilon) \cap \mathbb{A} \neq \emptyset.$$

Donc $0 \in \overline{\mathbb{A}}$.

(b) On a $\mathring{\mathbb{A}} = \emptyset$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{A}$, on a $\mathbb{A} \notin \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$. Précisément, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$B(x,\varepsilon) \not\subset \mathbb{A}.$$

(c) Les points isolés de $\mathbb{A}$ c'est l'ensemble $\mathbb{A}$ lui même. En effet, pour tout $x \in \mathbb{A}$ il existe $r_x > 0$ tel que

$$B(x,r_x) \cap \mathbb{A} = \{x\}.$$

(d) Les points d'accumulations de $\mathbb{A}$ est 0. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (par exemple $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$) tel que

$$\frac{1}{N_\varepsilon + 1} \in B(0, \varepsilon) \cap \mathbb{A}.$$

Alors $B(0, \varepsilon)$ contient un élément de $\mathbb{A}$ différent de 0.

2. Pour la partie $\mathbb{B}$.

(a) On a $\overline{\mathbb{B}} = \mathbb{B} \cup \{-1, 2\} =]-\infty, -1] \cup \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{2\}$. En effet, il est clair que $\mathbb{B} \subset \overline{\mathbb{B}}$. On a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$B(-1, \varepsilon) \cap \mathbb{B} \neq \emptyset.$$

Alors $-1 \in \overline{\mathbb{B}}$.
On a aussi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (par exemple $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$) tel que

$$2 - \frac{1}{N_\varepsilon + 1} \in B(2, \varepsilon) \cap \mathbb{B}.$$

Alors

$$B(2, \varepsilon) \cap \mathbb{B} \neq \emptyset.$$

Donc $2 \in \overline{\mathbb{B}}$.

(b) On a $\mathring{\mathbb{B}} =]-\infty, -1[$. En effet, pour tout $x \in]-\infty, -1[$ il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que

$$x \in B(x, \varepsilon_x) \subset]-\infty, -1[= \mathbb{B}.$$

Alors pour tout $x \in]-\infty, -1[$, on a

$$\mathbb{B} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x).$$

(c) Les points isolés de $\mathbb{B}$ sont $\left\{0, \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. En effet, pour tout $x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que

$$B(x, \varepsilon_x) \cap \mathbb{B} = \{x\}.$$

(d) Les points d'accumulations de $\mathbb{B}$ sont $]-\infty, -1] \cup \{2\}$. En effet, pour tout $x \in]-\infty, -1]$ et tout $\varepsilon > 0$, La boule $B(x, \varepsilon)$ contient des éléments différents de x.
On a aussi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (par exemple $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$) tel que

$$2 - \frac{1}{N_\varepsilon + 1} \in B(2, \varepsilon) \cap \mathbb{B}.$$

Alors $B(2, \varepsilon)$ contient un élément de $\mathbb{B}$ différent de 2.

Exercice 1.11.18

1. (a) i. $\mathbb{Z}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte $B(a, \varepsilon) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ contient des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs (exemple si $0 < \varepsilon < 1$ on a $x = a + \dfrac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Alors

$$B(a, \varepsilon) \not\subset \mathbb{Z}.$$

ii. $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ parce que son complémentaire $\mathbb{Z}^C = \cup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$ (réunion quelconque d'intervalles ouverts est un ouvert).

(b) i. $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. En effet, $\forall a \in \mathbb{Q}$ et $\forall \varepsilon > 0$, la boule ouvert $B(a,\varepsilon) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ contient des nombres irrationnels $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (car $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$). Alors la boule $B(a,\varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}$.

ii. $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. En effet, pour tout $a \in \mathbb{N}$, les suites des nombres rationnels suivantes $u_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a}{k!}$ convergent vers $\exp(a)$ ($\exp(a) \notin \mathbb{Q}$).
D'une autre façon, $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé parce que son complémentaire $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert, c'est-à-dire, $\forall a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ et $\forall \varepsilon > 0$, la boule ouverte $B(a,\varepsilon)$ contient des nombres rationnels. Alors

$$B(a,\varepsilon) \not\subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}.$$

(c) i. $\mathbb{A} =]0,1]$ n'est pas un ouvert. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$B(1,\varepsilon) =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\not\subset \mathbb{A}.$$

ii. $\mathbb{A} =]0,1]$ n'est pas un fermé parce que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{A}$ définie par $x_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 ($0 \notin \mathbb{A}$).

(d) i. $\mathbb{B} =]-\infty, 1]$ n'est pas un ouvert. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$B(1,\varepsilon) =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\not\subset \mathbb{A}.$$

ii. $\mathbb{B} =]-\infty, 1]$ est un fermé parce que son complémentaire $\mathbb{B}^C =]1,+\infty[$ est un ouvert, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{B}^C$, il existe r_x (par exemple $r_x = \frac{x-1}{2}$) tel que

$$B(x, r_x) \subset \mathbb{B}^C.$$

(e) i. $\mathbb{C} = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ n'est pas un ouvert. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B(1,\varepsilon) \not\subset \mathbb{C}$ (par exemple, $a = 1 + \dfrac{\varepsilon}{2} \in B(1,\varepsilon)$ mais n'appartient pas à $\mathbb{C}$).

ii. $\mathbb{C} = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ n'est un fermé. En effet, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$ définie par $x_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0 ($0 \notin \mathbb{C}$).

(f) i. L'ensemble $\mathbb{D}$ n'est pas un ouvert. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B(1,\varepsilon) \not\subset \mathbb{C}$ (par exemple, $a = 1 + \dfrac{\varepsilon}{2} \in B(1,\varepsilon)$ mais n'appartient pas à $\mathbb{D}$).

ii. L'ensemble $\mathbb{D}$ est un fermé, car son complémentaire $\mathbb{D}^C =]-\infty, 0[\cup \left(\cup_{k\in\mathbb{N}} \left] \dfrac{1}{k+2}, \dfrac{1}{k+1} \right[\right) \cup$ $]1,+\infty[$ est un ouvert (la réunion quelconque des intervalles ouverts).

2. (a) i. L'ensemble $\mathbb{A}$ est un ouvert. En effet, soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{A}$, alors $y_0 > x_0 + 1$ et ceci implique

$$y_0 - x_0 - 1 > 0.$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{y_0 - x_0 - 1}{3}$. Alors

$$\begin{aligned}
B(X_0,\varepsilon) &= \left\{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ d_1(X_0, X) < \varepsilon\right\} \\
&= \left\{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon\right\} \\
&\subset \left\{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x - x_0| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |y - y_0| < \varepsilon\right\} \\
&= \left\{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \quad \text{et} \quad y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\right\} \\
&=]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\\
&= \left] \frac{4x_0 - y_0 + 1}{3}, \frac{2x_0 + y_0 - 1}{3} \right[\times \left] \frac{2y_0 + x_0 + 1}{3}, \frac{4y_0 - x_0 - 1}{3} \right[.
\end{aligned}$$

On remarque que $\forall x_* \in \left]\dfrac{4x_0 - y_0 + 1}{3}, \dfrac{2x_0 + y_0 - 1}{3}\right[$ et $\forall y_* \in \left]\dfrac{2y_0 + x_0 + 1}{3}, \dfrac{4y_0 - x_0 - 1}{3}\right[$, on a

$$y_* > x_* + 1.$$

Alors

$$X_* = (x_*, y_*) \in \mathbb{A}$$

Comme X_* est quelconque dans $\left]\dfrac{4x_0 - y_0 + 1}{3}, \dfrac{2x_0 + y_0 - 1}{3}\right[\times \left]\dfrac{2y_0 + x_0 + 1}{3}, \dfrac{4y_0 - x_0 - 1}{3}\right[$, on déduit que

$$B(X_0, \varepsilon) \subset \left]\frac{4x_0 - y_0 + 1}{3}, \frac{2x_0 + y_0 - 1}{3}\right[\times \left]\frac{2y_0 + x_0 + 1}{3}, \frac{4y_0 - x_0 - 1}{3}\right[\subset \mathbb{A}.$$

Donc $\mathbb{A}$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

- D'une autre manière, pour montrer que $\mathbb{A}$ est un ouvert, il suffit de montrer que son complémentaire $\mathbb{A}^C = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x + 1 \geq y \Big\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est un fermé.

  Soit $u_n = (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de $\mathbb{A}^C$ (*i.e.*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + 1 \geq y_n$) qui converge vers (x_*, y_*), c'est-à-dire, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y_*$. Alors

  $$\lim_{n\to\infty} x_n + 1 = x_* + 1 \geq \lim_{n\to\infty} y_n = y_* \Longrightarrow x_* + 1 \geq y_*.$$

  Ceci implique $(x_*, y_*) \in \mathbb{A}^C$. Alors $\mathbb{A}^C$ est un fermé.

  Donc $\mathbb{A}$ est un ouvert.

ii. L'ensemble $\mathbb{A}$ n'est pas un fermé dans $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{A}$ définie par $u_n = \left(\dfrac{1}{n} - 1, \dfrac{2}{n}\right)$ ($u_n \in \mathbb{A}$, car $\forall n \geq 1$, on a $1 + \dfrac{1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n} < \dfrac{3}{n}$). On remarque que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = (-1, 0) \notin \mathbb{A}.$$

(b) i. L'ensemble $\mathbb{B}$ n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}^2$. En effet, le point $X^* = (0,0) \in \mathbb{B}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte de centre X^* et de rayon ε dans $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\begin{aligned}
B(X^*, \varepsilon) &= \Big\{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ d_\infty(X, X^*) < \varepsilon \Big\} \\
&= \Big\{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ \max(|x-0|, |y-0|) < \varepsilon \Big\} \\
&= \Big\{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ |x| < \varepsilon \ \textbf{et} \ |y| < \varepsilon \Big\} \\
&= \Big\{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ |x| < \varepsilon \Big\} \times \Big\{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ |y| < \varepsilon \Big\} \\
&=]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[.
\end{aligned}$$

Maintenant, on pose $Y = \left(0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$. Il est clair $Y \in B(X^*, \varepsilon)$ et $Y \notin \mathbb{B}$ (parce que on a $0+1 < e^{2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} = e^{\varepsilon}$), c'est-à-dire, la boule $B(X^*, \varepsilon)$ contient un élément qui n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{B}$. Alors $B(X^*, \varepsilon) \not\subset \mathbb{B}$.

D'une autre manière Pour montrer que $\mathbb{B}$ n'est un ouvert, il suffit de montrer que son complémentaire $\mathbb{B}^C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 1 < e^{2y}\}$ n'est pas fermé. En effet, soit

$(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{A}$ définie par $u_n = \left(-\frac{1}{n} - 1, -\frac{1}{2n}\right)$ ($u_n \in \mathbb{A}$, car $\forall n \geq 1$, on a $1 - \frac{1}{n} - 1 = -\frac{1}{n} < 2^{-\frac{1}{n}}$). On remarque que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = (0,0) \notin \mathbb{A}.$$

ii. L'ensemble $\mathbb{B}$ est un fermé dans $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $u_n = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de $\mathbb{B}$ (*i.e.*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2x_n + 1 \geq e^{y_n}$) qui converge vers (x_*, y_*), c'est-à-dire, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y_*$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} 2x_n + 1 = 2x_* + 1 \geq \lim_{n\to\infty} e^{y_n} = e^{y_*} \Longrightarrow 2x_* + 1 \geq e^{y_*}.$$

Ceci implique $(x_*, y_*) \in \mathbb{B}$. Alors $\mathbb{B}$ est un fermé.

(c) i. L'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas un ouvert. En effet, son complémentaire $\mathbb{C}^C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x \leq y^2, y > 0\}$ n'est pas fermé, parce que on peut construire une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{C}^C$ converge vers une limite $X^* = (x_*, y_*)$ qui n'appartient pas à $\mathbb{C}^C$. Par exemple on pose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}^C$ définie par

$$X_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \quad \textbf{(pour tout } n \geq 1\textbf{, } X_n \in \mathbb{C}^C \textbf{ car } \frac{2}{n} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{4}{n} \textbf{ et } \frac{2}{\sqrt{n}} > 0 \textbf{)}.$$

On a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = (0,0) \notin \mathbb{C}^C.$$

ii. L'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas un fermé. En effet, soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{C}$ définie par $X_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ($X_n \in \mathbb{C}$, car $\forall n \geq 1$, on a $\frac{2}{n} > \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}$ et $-\frac{1}{\sqrt{n}} < 0$). On remarque que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n = (0,0) \notin \mathbb{C}.$$

Exercice 1.11.19

1. Vérifier que l'application d_1 définie par

$$d_1(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{n}}, \quad n \geq 2$$

est une distance sur $\mathbb{R}_+$.

(a) $d_1(x,y) = 0 \Longleftrightarrow |x-y|^{\frac{1}{n}} \Longleftrightarrow |x-y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a

$$d_1(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{n}} = |y-x|^{\frac{1}{n}} = d_1(y,x).$$

(c) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} d_1(x,z) &= |x-z|^{\frac{1}{n}} = |x-y+y-z|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq (|x-y| + |y-z|)^{\frac{1}{n}} \quad \textbf{(la fonction } f(x) = x^n \textbf{ est croissante)} \\ &\leq |x-y|^{\frac{1}{n}} + |y-z|^{\frac{1}{n}} \quad \textbf{(car } \forall a,b \geq 0\textbf{, on a } (a+b)^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}\textbf{)} \\ &\leq d_1(x,y) + d_1(y,z). \end{aligned}$$

2. d'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $x, y \in \mathbb{X}$

$$d_1(x,0) \leq d_1(x,y) + d_1(y,0),$$

alors

$$d_1(x,0) - d_1(0,y) \leq d(x,y) \quad (\text{car } d_1(y,0) = d_1(0,y)) \tag{6.1.6}$$

et

$$d_1(y,0) \leq d_1(y,x) + d_1(x,0) = d_1(x,y) + d_1(x,0) \quad (\text{car } d_1(x,y) = d_1(y,x)),$$

alors

$$d_1(y,0) - d_1(x,0) = -(d_1(x,0) - d_1(0,y)) \leq d_1(x,y). \tag{6.1.7}$$

D'après (6.1.6) et (6.1.7), on a

$$|d_1(x,0) - d_1(0,y)| \leq d_1(x,y).$$

.

3. On a $d_1(x,0) = x^{\frac{1}{n}}$, $d_1(0,y) = y^{\frac{1}{n}}$ et $d_1(x,y) = |x-y|^{\frac{1}{n}}$. Alors d'après la question précédente on déduit que

$$\left| x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}} \right| \leq |x-y|^{\frac{1}{n}}.$$

4. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}} \right| \leq |x-y|^{\frac{1}{n}}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon = \varepsilon^n$, tel que quelque soit $x, y \in \mathbb{R}_+$, tels que $d(x,y) = |x-y| < \delta_\varepsilon$, on ait

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}} \right| \leq |x-y|^{\frac{1}{n}} < (\varepsilon^n)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon.$$

Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
Maintenant, supposons que $x \neq 0$ et $y = 0$. Alors on a

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{x} = \frac{1}{x^{1-n}}.$$

Pour n tend vers 0, on a $\frac{1}{x^{1-n}}$ tend vers $+\infty$. Alors

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} = +\infty.$$

On déduit que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, il n'existe pas $k > 0$ tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y).$$

Donc f n'est pas lipschitzienne.

6.2 Exercices du Chapitre 2

Exercice 2.7.1

1. Pour $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, l'intervalle $I =]0,1]$ de $\mathbb{R}$ n'est pas compact. En effet, pour tout $x \in \mathcal{A}$, on considère $\mathcal{O}_x =]\frac{x}{2}, x + \frac{1}{2}[$. Il est clair que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_x$. Alors $(\mathcal{O}_x)_{x \in \mathcal{A}}$ est un recouvrement de $\mathcal{A}$. Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un sous ensemble finie de $\mathcal{A}$. Alors $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2}\right)$ est aussi un sous-ensemble de $\mathcal{A}$. Posons $a = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}}\{\frac{x_i}{2}\}$. Alors $a \in \mathcal{A}$ et $]0, a[\subset \mathcal{A}$. En plus, on a
$$]0, a[\bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{x_i}\right) = \emptyset.$$
Alors $(\mathcal{O}_x)_{x \in \mathcal{A}}$ n'admet aucun sous recouvrement fini contenant $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ n'est pas un compact. D'un autre côté, on a toute partie compacte est fermée et comme $\mathcal{A}$ n'est pas fermé, on déduit qu'il n'est pas compact.
2. L'ensemble $(\{n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{N}$ mais on peut pas extraire un sous-recouvrement fini, sinon $\mathbb{N}$ serait fini.
3. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $\mathcal{A}$ par les ouverts $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$. C'est-à-dire
$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i.$$
Comme $l \in \mathcal{A}$, il existe $i_0 \in I$ tel que $l \in \mathcal{O}_{i_0}$. Par définition de la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait
$$x_n \in \mathcal{O}_{i_0}$$
. De plus, pour tout $n < N$, il existe $i_n \in I$ tel que
$$x_n \in \mathcal{O}_{i_n}.$$
Alors on a
$$\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{i_0} \cup \left(\bigcup_{n=0}^{N-1} \mathcal{O}_{i_n}\right).$$
Ce qui donne un sous-recouvrement fini de $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est compacte.

Exercice 2.7.2

- Soit $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ un espace topologique compact. Soit $(\mathcal{O}'_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $\mathbb{X}_2$ par les ouverts $\mathcal{O}'_i \in \mathcal{T}_2$, c'est-à-dire,
$$\mathbb{X}_2 = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}'_i.$$
Comme f est homéomorphisme, on a
$$\mathbb{X}_1 = f^{-1}(\mathbb{X}_2) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}'_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\mathcal{O}'_i).$$
La continuité de f entraîne que pour chaque $i \in I$, on a $f^{-1}(\mathcal{O}'_i)$ est un ouvert de $\mathbb{X}_1$ (*i.e.*, $f^{-1}(\mathcal{O}'_i) \in \mathcal{T}_1$). Alors la famille $(f^{-1}(\mathcal{O}'_i))_{i \in I}$ constitue un recouvrement ouvert de $\mathbb{X}_1$ ($\mathbb{X}_1$ est compact) dont on peut en extraire un sous-recouvrement fini
$$\mathbb{X}_1 = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(\mathcal{O}'_j).$$

Puisque f est homéomorphisme, on a

$$\mathbb{X}_2 = f(\mathbb{X}_1) = f\left(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(\mathcal{O}'_j)\right) = \bigcup_{j=1}^{n} f\left(f^{-1}(\mathcal{O}'_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}'_j.$$

Donc l'espace topologique $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ est compact.

- Soit $(\mathbb{X}_2, \mathcal{T}_2)$ un espace topologique compact. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $\mathbb{X}_1$ par les ouverts $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_1$, c'est-à-dire,

$$\mathbb{X}_1 = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i.$$

Comme f est homéomorphisme (alors bijective), on a

$$\mathbb{X}_2 = f(\mathbb{X}_1) = f\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(\mathcal{O}_i).$$

La continuité de f^{-1} entraîne que pour chaque $i \in I$, on a $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O}_i) = f(\mathcal{O}_i)$ est un ouvert de $\mathbb{X}_2$ ($i.e.$, $f(\mathcal{O}_i) \in \mathcal{T}_2$). Alors la famille $(f(\mathcal{O}_i))_{i\in I}$ constitue un recouvrement ouvert de $\mathbb{X}_2$ ($\mathbb{X}_2$ est compact) dont on peut en extraire un sous-recouvrement fini

$$\mathbb{X}_2 = \bigcup_{j=1}^{n} f(\mathcal{O}_j).$$

Puisque f est homéomorphisme, on a

$$\mathbb{X}_1 = f^{-1}(\mathbb{X}_2) = f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{n} f(\mathcal{O}_j)\right) = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}\left(f(\mathcal{O}_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}_j.$$

Donc l'espace topologique $(\mathbb{X}_1, \mathcal{T}_1)$ est compact.

Exercice 2.7.3

1. Soit $y \in \mathcal{B}$. Comme $x \notin \mathcal{B}$, on a $x \neq y$. Par hypothèse on a $\mathbb{X}$ est séparé, alors il existe deux ouvert disjoints (deux voisinages) U_y et V_y tels que

$$x \in U_y \quad \textbf{et} \quad y \in V_y.$$

il est clair que $\{V_y, y \in \mathcal{B}\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathcal{B}$. Puisque $\mathcal{B}$ est compacte, on peut extraire un sous recouvrement fini d'ouvert $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ tel que

$$\mathcal{B} \subset V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $x \in U_{y_i}$. Alors

$$x \in U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}.$$

Posons $U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$ et $V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$. Remarquons que U et V sont des ouverts (intersection et union finie respectives d'ouverts). De plus $x \in U$ et $\mathcal{B} \subset V$. D'un autre côté on a

$$U \cap V = (U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}) \cap \ldots \cap (V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}) = (U_{y_1} \cap V_{y_1}) \cup \ldots \cup (U_{y_n} \cap V_{y_n}) = \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset = \emptyset.$$

Conclusion. Il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $\mathcal{B} \subset V$.

2. Soit $x \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont disjoints, on a $x \notin \mathcal{B}$. Puisque $\mathcal{B}$ est compact et d'après la première question, il existe des ouverts U_x et V_x tels que
$$x \in U_x, \quad \mathcal{B} \subset V_x \ \textbf{ et } \ U_x \cap V_x = \emptyset.$$
Il est clair que $\{U_x, x \in \mathcal{A}\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est compacte, on peut construire un nombre fini de ces ouverts par exemple $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$, de sorte que
$$\mathcal{A} \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}.$$
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\mathcal{B} \subset V_{x_i}$. Alors
$$\mathcal{B} \subset V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}.$$
Posons $U = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$ et $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Remarquons que U et V sont des ouverts (union et intersection finie respectives d'ouverts). De plus $\mathcal{A} \subset U$ et $\mathcal{B} \subset V$. D'un autre côté on a
$$U \cap V = (U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}) \cap (V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}) = (U_{x_1} \cap V_{x_1}) \cup \ldots \cup (U_{x_n} \cap V_{x_n}) = \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset = \emptyset.$$
Conclusion. Il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $\mathcal{A} \subset V$ et $\mathcal{B} \subset U$.

Exercice 2.7.4

1. L'application $d^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $d^*(x) = d(x, \mathcal{B})$ est continue (car on a $|d(x, \mathcal{B}) - d(y, \mathcal{B})| \leq d(x, y)$). Comme $\mathcal{A}$ est compact, on déduit que d^* atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que
$$d^*(a) = \inf_{x \in \mathcal{A}} d^*(x) = \inf_{x \in \mathcal{A}} d(x, \mathcal{B}) = d(a, \mathcal{B}).$$
D'un autre côté, par définition on a
$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{x \in \mathcal{A}} d(x, \mathcal{B}).$$
Alors
$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(a, \mathcal{B}).$$
2. Dans la première question on a montré qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(a, \mathcal{B})$. Supposons maintenant $\delta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\delta(y) = d(a, y)$. Il est clair que δ est continue et comme $\mathcal{B}$ est compacte, on déduit que δ atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire, il existe $b \in \mathcal{B}$ tel que
$$\delta(b) = \inf_{y \in \mathcal{B}} \delta(y) = \inf_{y \in \mathcal{B}} d(a, \mathcal{B}) = d(a, b).$$
D'un autre côté, par définition on a
$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{y \in \mathcal{A}} d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{y \in \mathcal{A}} d(a, \mathcal{B}).$$
Alors
$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(a, b).$$
3. Dans la première question on a montré qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(a, \mathcal{B})$ et dans l'exercice 1.11.16, on a montré que
$$x \in \overline{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow d(x, \mathcal{B}) = 0.$$
Ceci implique
$$x \notin \overline{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow d(x, \mathcal{B}) > 0.$$
Comme $\mathcal{B}$ est fermé dans $\mathbb{X}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ (*i.e.*, $\forall a \in \mathcal{A}$ on a $a \notin \mathcal{B}$), on déduit que
$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(a, \mathcal{B}) > 0.$$

Exercice 2.7.5

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (*i.e.*, $K_{n+1} \subset K_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$) de compactes non vides de $\mathbb{X}$

1. (a) Supposons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$. d'après la proposition 2.1.13, il existe $J \subset \mathbb{N}$, par exemple $J = \{0, \dots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, tel que
$$\bigcap_{i=0}^{n} K_i = \emptyset.$$
Alors
$$K_n = \bigcap_{i=0}^{n} K_i = \emptyset.$$
Ce qui contredit l'hypothèses. Donc
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset.$$
   (b) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le compact K_n est un fermé. Comme l'intersection quelconque des fermés est un fermé, on déduit que $K = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ est un fermé. Puisque K est un fermé inclus dans le compact K_n (*i.e.*, $K = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset K_n$), on déduit que K est compact.
2. Raisonnons par l'absurde et supposons que ceci soit faux. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in K_n$ mais $x_n \notin \Omega$. Alors
$$x_n \in K_n \cap \Omega^C.$$
Par conséquence, on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$x_n \in K_n \cap \Omega^C \subset K_0.$$
Comme K_0 est compact, on déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au moins une valeur d'adhérence. Alors on peut construire une sous suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in K_0$.
D'un autre côté, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq m$ (donc $\phi(n) \geq n \geq m$), on a
$$x_{\phi(n)} \in K_m.$$
Puisque K_m est fermé, on a $x \in K_m$, qui est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$. Alors
$$x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} K_m = K.$$
Mais puisque Ω^C est fermé, on a aussi que $x \in \Omega^C$, c'est-à-dire, $x \notin \Omega$. Ceci contredit que $K \subset \Omega$.

Exercice 2.7.6

- Supposons que l'espace topologique produit $\mathbb{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i$ est localement compact. Comme les projections canoniques de $\mathbb{X}$ sur $\mathbb{X}_i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ sont continues, surjectives et ouvertes (prouver le !), d'après la proposition 2.6.3, on déduit que les $\mathbb{X}_i$ sont localement compacts.
- Réciproquement, supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{X}_i$ est localement compact. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}$. Comme $\mathbb{X}_i$ est localement compact pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un voisinage compact V_i de x_i dans $\mathbb{X}_i$. Alors $V = \prod_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage compact de x dans $\mathbb{X}$. Donc $\mathbb{X}$ est localement compact.

6.3 Exercices du Chapitre 3

Exercice 3.5.1

On a d_1 et d_2 deux distances équivalentes. Alors il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 tel que pour tout $x, y \in \mathbb{X}$ on a

$$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d(x,y). \tag{6.3.1}$$

- Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(\mathbb{X}, d_1)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$ on ait
$$d_1(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{C_2}.$$
En utilisant (6.3.1) on obtient
$$d_2(x_n, x_m) \leq C_2 d_1(x_n, x_m) < C_2 \frac{\varepsilon}{C_2} = \varepsilon.$$
Alors elle est de Cauchy dans $(\mathbb{X}, d_2)$.
- Inversement, on suppose que (x_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{X}, d_2)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$ on ait
$$d_2(x_n, x_m) < C_1 \varepsilon.$$
En utilisant (6.3.1) on obtient
$$C_1 d_1(x_n, x_m) \leq d_2(x_n, x_m) < C_1 \varepsilon.$$
Alors
$$d_1(x_n, x_m) < \varepsilon.$$
Donc (x_n) est une de Cauchy dans $(\mathbb{X}, d_1)$.

Exercice 3.5.2

Soient l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle $|.|$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres rationnels définie par
$$x_0 = 1 \quad \textbf{et} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad \forall n \geq 1.$$

1. **Initialisation :** $x_0 = 1$ alors $0 \leq x_0 \leq 1$. La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : Supposons la propriété est vraie au rang n c'est-à-dire,
$$0 \leq x_n \leq 1$$
et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$. On a
$$0 \leq x_n \leq 1.$$
Alors
$$1 \leq x_n \leq 2.$$
Ceci implique
$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x_n} \leq 1.$$

Donc
$$0 \leq x_{n+1} \leq 1.$$
Ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $n+1$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq x_n \leq 1.$$

2. Supposant que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. On a
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n+1} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{1+x_n}.$$
Alors
$$l = \frac{1}{1+l}.$$
Ceci implique
$$l^2 + l - 1 = 0.$$
Cette équation admet deux racines différentes $l_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $l_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ comme solutions. Puisque $0 \leq x_n \leq 1$, on déduit que l_2 est refusée. Donc
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$, alors c'est une suite réelle. Comme elle converge vers $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$, on déduit qu'elle est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Alors
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon, \ \ |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{6.3.2}$$
Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ et elle vérifie le critère de Cauchy (6.3.2), on déduit qu'elle est aussi de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, |.|)$

4. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, |.|)$ qui converge vers $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$, on déduit que $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas complet.

Exercice 3.5.3

Pour tout $i_0 \in I$, on a
$$\bigcap_{i\in I} F_i \subset F_{i_0}.$$
On a aussi pour tout $i \in I$, F_i est un fermé dans $\mathbb{X}$. Alors $\cap_{i\in I} F_i$ est un fermé dans $\mathbb{X}$. Comme F_{i_0} est complète et $\cap_{i\in I} F_i$ est un fermé inclus dans F_{i_0}, on déduit que $\cap_{i\in I} F_i$ est complète.

Exercice 3.5.4

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq N_\varepsilon$, on ait
$$d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon.$$
Il s'en suit que pour tout $x \in \mathbb{X}$ on a
$$d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon. \tag{6.3.3}$$

Comme $\mathbb{Y}$ est complet, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{X}$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $\mathbb{Y}$ que l'on note $f(x)$.
Posons $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ une application telle que pour tout $x \in \mathbb{X}$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(f_n(x), f(x)) = 0.$$

Pour montrer que $(\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), d_\infty)$ est complet il suffit de montrer que f est borné (*i.e.*, $f \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$) et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
D'après l'équation (6.3.3), pour tout $x \in \mathbb{X}$, on a

$$d(f_n(x), f(x)) = \lim_{m\longrightarrow\infty} d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon. \tag{6.3.4}$$

Comme f_n est bornée, il existe $y \in \mathbb{Y}$ et $r > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{X}$, on ait

$$f_n(x) \in B(y, r).$$

Ce qui prouve que pour tout $x \in \mathbb{X}$

$$f(x) \in B(y, r + \varepsilon).$$

Donc f est bornée.
Finalement on montre que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d_\infty(f_n, f) = 0.$$

Comme $f_n, f \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_\varepsilon \in \mathbb{X}$ tel que

$$d_\infty(f_n, f) < d(f_n(x_\varepsilon), f(x_\varepsilon)) + \varepsilon.$$

En utilisant (6.3.4), on obtient

$$d_\infty(f_n, f) < d(f_n(x_\varepsilon), f(x_\varepsilon)) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d_\infty(f_n, f) = 0.$$

Donc $(\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}), d_\infty)$ est complet.

2. On rappelle que toute partie fermée dans un espace complet est complète. Alors pour montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ muni de la distance d_∞ est complet il suffit de le montrer que c'est un fermé dans $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $f \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ telles que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d_\infty(f_n, f) = 0. \tag{6.3.5}$$

Pour montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est un fermé dans $\in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ il s'agit de montrer que $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et comme $f \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, il suffit seulement de montrer que f est continue sur $\mathbb{X}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{X}$. Alors d'après (6.3.5), il existe $N = N_{\varepsilon,x_0} \in \mathbb{N}$ tel que

$$d_\infty(f_N, f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ceci implique que pour tout $x \in \mathbb{X}$

$$d(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque f_N est continue, on déduit que

$$\exists \delta = \delta_{\varepsilon,x_0} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{X},\ d^*(x,x_0) < \delta \Longrightarrow d(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ce qui prouve que f est continue en x_0, alors f est continue sur $\mathbb{X}$. Donc $(\mathcal{C}_b(\mathbb{X},\mathbb{Y}), d_\infty)$ est complet.

3. On a toute fonction continue sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{Y}$ est bornée. Alors

$$\mathcal{C}([0,1] = \mathcal{C}_b([0,1].$$

Ce qui prouve que d'après la question 2, l'espace métrique $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{Y}), d_\infty)$ est complet.

Exercice 3.5.5

1. Soit $f \in \mathbb{X}$. Alors f est bornée (f est continue sur un intervalle borné, alors elle est bornée), c'est-à-dire,

$$\delta(f) = \sup_{(x,y)\in[a,b]^2} |f(x) - f(y)| < +\infty.$$

Soit $x_0 \in [a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $f, g \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| \leq& |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - g(x_0)| + |g(x_0) - g(x)| \\ \leq& \delta(f) + |f(x_0) - g(x_0)| + \delta(g) < +\infty. \end{aligned}$$

Donc $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ est bien définie.

(i) Pour tout $f, g \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) = 0 \Longleftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = 0 \Longleftrightarrow& |f(x) - g(x)| = 0,\ \forall x \in [a,b] \\ \Longleftrightarrow& f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b]. \end{aligned}$$

(ii) Pour tout $f, g \in \mathbb{X}$, on a

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[[a,b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| = d_\infty(g,f).$$

(iii) Pour tout $f, g, h \in \mathbb{X}$, on a

$$\begin{aligned} d_\infty(f,h) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| =& \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ \leq& \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x) - h(x)| = d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h). \end{aligned}$$

Donc d_∞ est une distance sur $\mathbb{X}$.

2. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
d_\infty(f_{n+p}, f_n) &= \sup_{x\in[a,b]} |f_{n+p}(x), f_n(x)| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left| \sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{(n+p)^2}} - \sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} \right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{\left(\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{(n+p)^2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}\right)^2}{\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{(n+p)^2}} + \sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}} \right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{\left(\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{(n+p)^2}\right) - \left(\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{(n+p)^2}} + \sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}} \right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{\frac{1}{(n+p)^2} - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{(n+p)^2}} + \sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}} \right| \\
&\leq \left| \frac{\frac{1}{(n+p)^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+p)} + \frac{1}{n}} \right| = \left| \frac{(n^2-np)(p^2+2np)}{(2n^3+n^2p)(n+p)^2} \right|.
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} d_\infty(f_{n+p}, f_n) \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left| \frac{(n^2-np)(p^2+2np)}{(2n^3+n^2p)(n+p)^2} \right| = 0.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{X}, d_\infty)$.

3. Pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2} = \left|x-\frac{a+b}{2}\right|.$$

4. Supposons que cette limite c'est f.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} d_\infty(f_n, f) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in[a,b]} \left| \sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} - \left|x-\frac{a+b}{2}\right| \right| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2} - \left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} + \left|x-\frac{a+b}{2}\right|} \right| \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} = 0.
\end{aligned}$$

5. On a

$$\lim_{x\longrightarrow^< \frac{a+b}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{x-\frac{a+b}{2}} = \lim_{x\longrightarrow^< \frac{a+b}{2}} \frac{\left|x-\frac{a+b}{2}\right|}{x-\frac{a+b}{2}} = \lim_{x\longrightarrow \frac{a+b}{2}} \frac{-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{x-\frac{a+b}{2}} = -1$$

et

$$\lim_{x\longrightarrow^> \frac{a+b}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{x-\frac{a+b}{2}} = \lim_{x\longrightarrow^> \frac{a+b}{2}} \frac{\left|x-\frac{a+b}{2}\right|}{x-\frac{a+b}{2}} = \lim_{x\longrightarrow \frac{a+b}{2}} \frac{x-\frac{a+b}{2}}{x-\frac{a+b}{2}} = 1.$$

Alors la fonction f n'est pas dérivable au point $x = \frac{a+b}{2}$. Donc $f \notin \mathbb{X}$.

6. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{X}$ qui converge vers $f \notin \mathbb{X}$, on déduit que $(\mathbb{X}, d_\infty)$ n'est pas complet.

6.4 Exercices du Chapitre 4

Exercice 4.4.1

1. Soient $\mathbb{X} = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c, d\}, \mathbb{X}\}$ une topologie sur $\mathbb{X}$.
   (a) $\mathbb{X}$ n'est pas connexe car $\{b\}$ et $\{a, c, d\}$ deux ouverts disjoints non vides et $\mathbb{X} = \{b\}\cup\{a, c, d\}$.
   (b) i. La topologie induite sur $\{a, c\}$ définie par
   $$\mathcal{T}_{\{a,c\}} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}\}.$$
   On remarque que $\emptyset$ et $\{a, c\}$ sont les seules parties ouvertes et fermées de $\{a, c\}$. Donc la partie $\{a, c\}$ est connexe.
   ii. La topologie induite sur $\{b, d\}$ définie par
   $$\mathcal{T}_{\{b,d\}} = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}\}.$$
   On remarque que $\{b\}$ et $\{d\}$ deux ouverts disjoint non vides tels que $\{b, d\} = \{b\} \cup \{d\}$. Donc la partie $\{b, d\}$ n'est pas connexe.
2. Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique discret.
   - Supposons que $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est connexe. Alors $\emptyset$ et $\mathbb{X}$ sont les seuls ouverts et fermés. Comme il est discret, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{X}$, on a $\{x\}$ est ouvert et fermé. Donc
   $$\mathbb{X} = \{x\}.$$
   - Réciproquement, si $\mathbb{X} = \{x\}$, alors la seul topologie qu'on peut définir sur $\mathbb{X}$ est $(\mathbb{X}, \emptyset)$ qui est grossière. Donc $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est connexe.

Exercice 4.4.2

1. On a $\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_2$ deux ouverts disjoints de $\mathcal{A}$ (topologie induite) et
   $$\mathcal{A} = (\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_1)\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_2).$$
   Comme $\mathcal{A}$ est connexe, on déduit que $\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_2 = \emptyset$. Ceci implique que
   - si $\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_1 = \emptyset$, alors on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_2$,
   - si $\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_2 = \emptyset$, alors on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_1$.

   Donc
   $$\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_1 \ \textbf{ ou bien } \ \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_2.$$
2. On a $\mathcal{A}\cap F_1$ et $\mathcal{A}\cap F_2$ deux fermés disjoints de $\mathcal{A}$ (topologie induite) et
   $$\mathcal{A} = (\mathcal{A}\cap F_1)\cup(\mathcal{A}\cap F_2).$$
   Comme $\mathcal{A}$ est connexe, on déduit que $\mathcal{A}\cap F_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{A}\cap F_2 = \emptyset$. Ceci implique que
   - si $\mathcal{A}\cap F_1 = \emptyset$, alors on a $\mathcal{A} \subset F_2$,
   - si $\mathcal{A}\cap F_2 = \emptyset$, alors on a $\mathcal{A} \subset F_1$.

Donc

$$\mathcal{A} \subset F_1 \ \ \textbf{ou bien} \ \ \mathcal{A} \subset F_2.$$

3. On a $\mathcal{O}^C$ une partie ouverte $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^C$ deux ouverts de $\mathbb{X}$ tels que $\mathbb{X} = \mathcal{O} \cup \mathcal{O}^C$. On a $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}^C$ deux ouverts disjoints de $\mathcal{A}$ (topologie induite) et

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{O}) \cup \left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}^C\right),$$

D'après la première question, on a $\mathcal{A} \cap \mathcal{O} = \emptyset$ ou bien $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}^C = \emptyset$. Puisque $\mathcal{O} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ (les hypothèses), on déduit que $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}^C = \emptyset$. Ce qui prouve que

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{O}.$$

Exercice 4.4.3

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des parties d'un espace topologique.

1. (a) Supposons par l'absurde que $\mathcal{A}$ n'est pas connexe. Alors il existe deux fermés non vides et disjoints de $\mathcal{A}$ (topologie induite) F_1, F_2 tels que

$$\mathcal{A} = F_1 \cup F_2.$$

Comme $A \cap B$ est connexe, d'après l'exercice 4.4.2, on a

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset F_1 \ \ \textbf{ou bien} \ \ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset F_2.$$

Supposons que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset F_2$. Puisque on a

$$F_1 \subset \mathcal{A} \ \ \textbf{et} \ \ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \not\subset F_1,$$

on déduit que

$$\mathcal{B} \cap F_1 = \emptyset.$$

Alors F_1 et $\mathcal{B} \cup F_2$ sont deux fermés non vides et disjoints dans $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ (topologie induite) tels que

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = F_1 \cup (\mathcal{B} \cup F_2).$$

Donc $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'est pas connexe. Ce qui contredit l'hypothèse.

(b) Supposons par l'absurde que $\mathcal{B}$ n'est pas connexe. Alors il existe deux fermés non vides et disjoints de $\mathcal{B}$ (topologie induite) F_1, F_2 tels que

$$\mathcal{B} = F_1 \cup F_2.$$

Comme $A \cap B$ est connexe, d'après l'exercice 4.4.2, on a

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset F_1 \ \ \textbf{ou bien} \ \ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset F_2.$$

Supposons que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset F_2$. Puisque on a

$$F_1 \subset \mathcal{B} \ \ \textbf{et} \ \ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \not\subset F_1,$$

on déduit que

$$\mathcal{A} \cap F_1 = \emptyset.$$

Alors F_1 et $\mathcal{A} \cup F_2$ sont deux fermés non vides et disjoints dans $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ (topologie induite) tels que

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = F_1 \cup (\mathcal{A} \cup F_2).$$

Donc $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'est pas connexe. Ce qui contredit l'hypothèse.

2. Soit $f : \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Les applications $f_{|\mathcal{A}}$ et $f_{|\mathcal{B}}$ sont continues sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont connexes, on déduit que les applications $f_{|\mathcal{A}}$ et $f_{|\mathcal{B}}$ sont constantes. Supposons par exemple $a, b \in \{0, 1\}$ tels que
$$\forall x \in \mathcal{A},\ \ f_{|\mathcal{A}}(x) = f(x) = a \ \ \textbf{et} \ \ \forall y \in \mathcal{B},\ \ f_{|\mathcal{B}}(y) = f(y) = b.$$
Supposons aussi par exemple $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}}$ non vide. Soit $x^* \in \mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}}$. Alors $x^* \in \mathcal{A}$ et $x^* \in \overline{\mathcal{B}}$. Ceci implique
$$f(x^*) = a \ \ \textbf{et} \ \ \{x^*\} \subset \overline{\mathcal{B}}.$$
La dernière inclusion implique que
$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{x^*\} \subset \overline{\mathcal{B}}.$$
D'après le corollaire 4.1.16, on déduit que $\mathcal{B} \cup \{x^*\}$ est connexe. Alors f est constante sur $\mathcal{B} \cup \{x^*\}$. Il s'en suit que, pour tout $y \in \mathcal{B}$,
$$b = f_{|\mathcal{B}}(y) = f_{|\mathcal{B}\cup\{x\}}(y) = f_{|\mathcal{B}\cup\{x\}}(x^*) = f(x^*) = a.$$
Ce qui prouve que f est constante. Donc $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est connexe.

Exercice 4.4.4

1. On a
$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \mathbb{X}\}$$
et
$$\mathcal{F} = \{\mathbb{X}, \{a, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{d, e\}, \{e\}, \emptyset\}.$$
On remarque que $\mathbb{X}$ et $\emptyset$ sont les seuls ouverts et fermés en même temps de $\mathbb{X}$. Donc $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est connexe.
2. Montrons que $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est localement connexe.
   - Tous les voisinages de a : $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$ et $\mathbb{X}$ sont connexes.
   - Tous les voisinages de b : $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, d, e\}$, $\{b, c, d, e\}$ et $\mathbb{X}$ sont connexes.
   - Tous les voisinages de c : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$ et $\mathbb{X}$ sont connexes.
   - Tous les voisinages de d : $\{a, b, c, d\}$ et $\mathbb{X}$ sont connexes.
   - Tous les voisinages de e : $\mathbb{X}$ est connexes.

   Alors $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est localement connexe.

Exercice 4.4.5

1. Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique discret ayant plus d'un point. Alors $\{\{x\}\}$ est un système fondamental de voisinages connexes de x. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{X}$ et tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ il existe un voisinage $V' = \{x\} \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$ tel que $V' \subset V$. Donc $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est localement connexe.
2. Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace localement connexe et $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$. Pour tout $x \in \mathcal{A}$ et tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$, on a
$$\mathcal{A} \cap V \in \mathcal{V}_{\mathbb{X}}(x)$$
et
$$\mathcal{A} \cap V \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}(x) \qquad \textbf{(car on a } \mathcal{A} \cap V \in \mathcal{T}_{\mathcal{A}}\textbf{, alors } x \in \mathcal{A} \cap V \subset \mathcal{A} \cap V).$$
Puisque $\mathbb{X}$ est localement connexe, il existe un voisinage connexe V' de x contenu dans $\mathcal{A} \cap V$ et comme $\mathcal{A} \cap V \in \mathcal{V}_{\mathcal{A}}(x)$, on a V' est un voisinage connexe de x dans $\mathcal{A}$.
Donc $\mathcal{A}$ est localement connexe.

6.5 Exercices du Chapitre 5

Exercice 5.4.1

1. Montrons que les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^n$
   (a) i. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\|X\|_1 = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0 \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Longleftrightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

   ii. Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\|\lambda X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda|\,|x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\,\|X\|_1 .$$

   iii. Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\|X+Y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|X\|_1 + \|Y\|_1 .$$

   Donc $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) i. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\|X\|_2 = 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0 \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Longleftrightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

   ii. Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\|\lambda X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^2\,|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\,\|X\|_2 .$$

   iii. Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| .\end{aligned}$$

   En utilisant l'inégalité d'Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_2^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (\|X\|_2 + \|Y\|_2)^2 .\end{aligned}$$

Alors
$$\|X+Y\|_2 \leq \|X\|_2 + \|Y\|_2 .$$

Donc $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(c) i. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On a
$$\|X\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow \sup_{i=\{1,\ldots,n\}} (|x_i|) = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0 \ \ \forall i \in \{1,\ldots,n\} \Longleftrightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

ii. Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\|\lambda X\|_\infty = \sup_{i=\{1,\ldots,n\}} (|\lambda x_i|) = \sup_{i=\{1,\ldots,n\}} (|\lambda|\,|x_i|) = |\lambda| \sup_{i=\{1,\ldots,n\}} (|x_i|) = |\lambda|\,\|X\|_\infty .$$

iii. Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On a
$$\begin{aligned}\|X+Y\|_\infty &= \sup_{i=\{1,\ldots,n\}} (|x_i+y_i|) \leq \sup_{i=\{1,\ldots,n\}} (|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \sup_{i=\{1,\ldots,n\}} (|x_i|) + \sup_{i=\{1,\ldots,n\}} (|y_i|) = \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty .\end{aligned}$$

Donc $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Où $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

2. Montrons que ces trois normes sont équivalentes.

(a) Montrons que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes

Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\begin{aligned}\|X\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i|\,|x_j| + \sum_{1\leq j<i\leq n} |x_i|\,|x_j| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} |x_i|\,|x_j| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + (n-1)\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = n\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = n\,\|X\|_2^2 .\end{aligned}$$

Alors
$$\|X\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|X\|_2 .$$

On a aussi
$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|X\|_1 .$$

Alors il existe deux constantes réelles positives $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{n}$ telles que
$$\alpha\,\|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq \beta\,\|X\|_1 .$$

Donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.

(b) Montrons que $\|.\|_1$ et $\|.\|_3$ sont équivalentes

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a
$$\|X\|_3 = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq |x_1| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|X\|_1 .$$

On a aussi

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = n \|X\|_3 .$$

Alors il existe deux constantes réelles positives $\gamma = 1$ et $\delta = n$ telles que

$$\gamma \|X\| \leq \|X\|_1 \leq \delta \|X\|_3 .$$

Donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_3$ sont équivalentes.

(c) Montrons que $\|.\|_2$ et $\|.\|_3$ sont équivalentes
On a déjà montré que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha \|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq \beta \|X\|_2 , \tag{6.5.1}$$

et

$$\gamma \|X\|_3 \leq \|X\|_1 \leq \delta \|X\|_3 . \tag{6.5.2}$$

D'après (6.5.1) et (6.5.2), on trouve

$$\alpha \|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq \delta \|X\|_3 \Longrightarrow \|X\|_2 \leq \frac{\delta}{\alpha} \|X\|_3 ,$$

et

$$\gamma \|X\|_3 \leq \|X\|_1 \leq \beta \|X\|_2 \Longrightarrow \frac{\gamma}{\beta} \|X\|_3 \leq \|X\|_2 .$$

Alors il existe deux constantes réelles positives $c_1 = \dfrac{\delta}{\alpha}$ et $c_2 = \dfrac{\gamma}{\beta}$ telles que

$$c_1 \|X\|_3 \leq \|X\|_2 \leq c_2 \|X\|_3 .$$

Donc $\|.\|_2$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.

Conclusion. Les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_3$ sont équivalentes.

Exercice 5.4.2

1. Montrons les inégalités suivantes
   (a) Inégalité de Young.
      i. Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors il est clair que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

      ii. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$. En utilisant la concavité de la fonction logarithme népérien " ln " sur $]0, +\infty[$, on obtient

$$\ln(ab) = \ln(a^{\frac{p}{p}}) + \ln(b^{\frac{q}{q}}) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

En passant à l'exponentielle qui est croissante, on obtient

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(b) Inégalité de Hölder.

i. Si $\|X\|_p = 0$ ou $\|Y\|_q = 0$ l'inégalité est triviale.

ii. $\|X\|_p \neq 0$ et $\|Y\|_q \neq 0$. En utilisant l'inégalité de Young et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on obtient

$$\left(\frac{|x_i|}{\|X\|_p}\right)\left(\frac{|y_i|}{\|Y\|_q}\right) \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{\|X\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{\|Y\|_q}\right)^q = \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|X\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|Y\|_q^q}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|X\|_p}\frac{|y_i|}{\|Y\|_q} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|X\|_p^p} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|Y\|_q^q} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{p\,\|X\|_p^p} + \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{q\,\|Y\|_q^q} \\ &= \frac{\|X\|_p^p}{p\,\|X\|_p^p} + \frac{\|Y\|_q^q}{q\,\|Y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i| \leq \|X\|_p\,\|Y\|_q\,.$$

Donc

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i| \leq \|X\|_p\,\|Y\|_q\,.$$

(c) Inégalité de Minkowski.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_j|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_j|\,|x_i + y_j|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)\,|x_i + y_j|^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i + y_j|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i + y_j|^{p-1}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on aura

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i + y_j|^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_j|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} = \|X\|_p\,\|X+Y\|_p^{\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i + y_j|^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_j|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} = \|Y\|_p\,\|X+Y\|_p^{\frac{p}{q}}\,.\end{aligned}$$

Alors
$$\|X+Y\|_p^p \leq \left(\|X\|_p + \|Y\|_p\right) \|X+Y\|_p^{\frac{p}{q}}.$$
Ceci implique
$$\frac{\|X+Y\|_p^p}{\|X+Y\|_p^{\frac{p}{q}}} = \|X+Y\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$
Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$
D'autre part, on a
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Ce qui donne
$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}.$$
Alors
$$\frac{p}{q} = p - 1.$$
Ce qui prouve que
$$p - \frac{p}{q} = 1.$$
Donc
$$\|X+Y\|_p^{p-\frac{p}{q}} = \|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

2. (i) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\|X\|_p = 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^p = 0 \Longleftrightarrow x_i = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \Longleftrightarrow X = 0.$$

(ii) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\|\lambda X\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^p |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|X\|_p.$$

(iii) Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, en utilisant l'inégalité de Minkowski, on obtient
$$\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Donc $\|.\|_p$ est une norme.

Exercice 5.4.3

Soit $\mathbb{E} = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$.

1. Monter que les applications suivantes de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}_+$ sont des normes sur $\mathbb{E}$.

   (a) i. Pour tout $f \in \mathbb{E}$, on a
$$\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow \int_a^b |f(x)|\, dx = 0 \Longleftrightarrow |f(x)| = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$$

ii. Pour tout $f \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(x)|\, dx = \int_a^b |\lambda|\, |f(x)|\, dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)|\, dx = |\lambda|\, \|\lambda f\|_1 .$$

iii. Pour tout $f, g \in \mathbb{E}$, on a

$$\begin{aligned} \|f+g\|_1 &= \int_a^b |f(x)+g(x)|\, dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| + |g(x)|\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |g(x)|\, dx = \|f\|_1 + \|g\|_1 . \end{aligned}$$

Donc $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathbb{E}$.

(b) i. Pour tout $f \in \mathbb{E}$, on a

$$\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Longleftrightarrow \int_a^b |f(x)|^2\, dx = 0 \Longleftrightarrow |f(x)|^2 \Longleftrightarrow f = 0.$$

ii. Pour tout $f \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_2 &= \left(\int_a^b |\lambda f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |\lambda|^2\, |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\, \|f\|_2 . \end{aligned}$$

iii. Pour tout $f, g \in \mathbb{E}$, on a

$$\begin{aligned} \|f+g\|_2^2 &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^2\, d \\ &\leq \int_a^b |f(x)|^2\, dx + \int_a^b |g(x)|^2\, dx + 2\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \\ &= \left(\left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|f+g\|_2^2 \leq{}& \left(\left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &+ 2\left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ ={}& \left(\left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 \end{aligned}$$

Alors

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 .$$

Donc $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(c) i. Pour tout $f \in \mathbb{E}$, on a

$$\|f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$$

ii. Pour tout $f \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \lambda \|f\|_\infty .$$

iii. Pour tout $f, g \in \mathbb{E}$, on a

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} (|f(x)|+|g(x)|) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .\end{aligned}$$

Donc $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2. (a) Pour tout $f \in \mathbb{E}$, on a

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b dx = (b-a)\|f\|_\infty .$$

(b) Pour tout $f \in \mathbb{E}$, on a

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|^2 \int_a^b dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty .$$

(c) En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient, pour tout $f \in \mathbb{E}$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 .$$

3. Il est clair que $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

(a) On a

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} -n^2 x + 2n = \left[\frac{n^2x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[-\frac{n^2x^2}{2} + 2nx\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = 1$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\|f_n\|_2^2 &= \int_0^1 |f_n(x)|^2\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^4x^2 dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \left|-n^2x+2n\right|^2 dx + \int_{\frac{2}{n}}^1 0^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^4x^2 dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \left(n^4x^2 + 4n^2 - 4n^3x\right) dx \\ &= \left[\frac{n^4}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[\frac{n^4}{3}x^3 + 4n^2x - 2n^3x^2\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \frac{2n}{3}.\end{aligned}$$

Alors

$$\|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{2n}{3}}.$$

Finalement, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n.$$

(b) On remarque que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|f_n\|_1 = 1 \quad \textbf{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\|f_n\|_2 = \infty.$$

Ce qui signifie, pour tout $f \in \mathbb{E}$, il n'existe aucun $\beta > 0$ pour que l'inégalité suivante

$$\|f\|_2 \leq \beta\,\|f\|_1$$

soit vérifiée. Donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{E}$.
On remarque aussi que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|f_n\|_1 = 1 \quad \textbf{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\|f_n\|_\infty = \infty.$$

Ce qui signifie, pour tout $f \in \mathbb{E}$, il n'existe aucun $\beta > 0$ pour que l'inégalité suivante

$$\|f_n\|_\infty \leq \beta\,\|f_n\|_1$$

soit vérifiée. Donc $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{E}$.
Finalement on remarque que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{2n}{3}}} = \infty.$$

Ce qui signifie, pour tout $f \in \mathbb{E}$, il n'existe aucun $\beta > 0$ pour que l'inégalité suivante

$$\|f_n\|_\infty \leq \beta\,\|f_n\|_2$$

soit vérifiée. Donc $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{E}$.

Exercice 5.4.4

1. La topologie produit sur $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ est définie par les trois distances usuelles. Choisissons d_1 qui définit par
$$d_1(X,X') = \left\|x-x'\right\|_{\mathbb{E}} + \left\|y-y'\right\|_{\mathbb{E}},$$
pour tout $X=(x,y)$ et $X'=(x',y')$ dans $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$. On a
$$\left\|X-X'\right\|_{\mathbb{E}} = \left\|(x,y)-(x',y')\right\|_{\mathbb{E}} \leq \left\|x-x'\right\|_{\mathbb{E}} + \left\|y-y'\right\|_{\mathbb{E}} = d_1(X,X').$$
Ceci implique que l'application $\mathbb{E}\times\mathbb{E}\to$, $(x,y)\mapsto x+y$ est lipschitzienne, ce qui prouve qu'elle est continue.
2. La topologie produit sur $\mathbb{E}\times\mathbb{K}$ est définie par les trois distances usuelles. Choisissons d_1 qui définit par
$$d_1(X,X') = \left|\lambda-\lambda'\right| + \left\|x-x'\right\|_{\mathbb{E}},$$
pour tout $X=(\lambda,x)$ et $X'=(\lambda',x')$ dans $\mathbb{K}\times\mathbb{E}$. Notre objectif est de montrer que pour tout $\varepsilon>0$ et $X=(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times\mathbb{E}$, il existe $\delta=\delta_{\varepsilon,X}>0$ tel que pour chaque $X'=(\lambda',x')\in\mathbb{K}\times\mathbb{E}$ vérifie $d_1(X-X')<\delta$ on a $\|X-X'\|_{\mathbb{E}}<\varepsilon$.
Il est clair que pour tout $\delta>0$, si $d_1(X,X')<\delta$, alors $|\lambda-\lambda'|<\delta$ et $\|x-x'\|_{\mathbb{E}}<\delta$. Il est aussi clair que, si $|\lambda-\lambda'|<\delta$, alors $|\lambda'|<\delta+|\lambda|$

Soit $\varepsilon > 0$ et $X = (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}$. Pour tout $0 < \delta < 1$ et $X' = (\lambda', x') \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|X - X'\right\|_{\mathbb{E}} &= \left\|(\lambda, x) - (\lambda', x')\right\|_{\mathbb{E}} = \left\|\lambda x - \lambda' x'\right\|_{\mathbb{E}} = \left\|\lambda x - \lambda' x + \lambda' x - \lambda' x'\right\|_{\mathbb{E}} \\
&\leq \left\|\lambda x - \lambda x'\right\|_{\mathbb{E}} + \left\|\lambda x' - \lambda' x'\right\|_{\mathbb{E}} \leq \left|\lambda - \lambda'\right| \|x\|_{\mathbb{E}} + \left|\lambda'\right| \left\|x - x'\right\|_{\mathbb{E}} \\
&\leq \delta \left(\|x\|_{\mathbb{E}} + \left|\lambda'\right|\right) \leq \delta \left(\|x\|_{\mathbb{E}} + \delta + |\lambda|\right) \\
&\leq \delta \left(\|x\|_{\mathbb{E}} + 1 + |\lambda|\right).
\end{aligned}$$

Alors pour que $\|X - X'\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon$ il suffit que $\delta \left(\|x\|_{\mathbb{E}} + 1 + |\lambda|\right) < \varepsilon$ et ceci implique

$$\delta < \frac{\varepsilon}{\|x\|_{\mathbb{E}} + 1 + |\lambda|}.$$

Donc il suffit de choisir $\delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|_{\mathbb{E}} + 2 + |\lambda|}$ pour montrer la continuité de l'application $\mathbb{K} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

Bibliographie

[Ava96] Vazgain Avanissian. Initiation àl'analyse fonctionnelle. *Press universitaires de France*, 1996. 1

[Bou58] N Bourbaki. Eléments de mathématiques, topologie générale, chap 9, 1958. 1

[Has] Nawfal El Hage Hassan. Topologie générale et espaces normés. *ZI des hauts, no. édition*, 54692. 1

[KF74] A Kolmogorov and S Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Editions Mir, 1974. 1

[Rob05] Didier Robert. Cours d'analyse fonctionnelle. *Nantes*, le 20 juillet 2005. 1

[Sch70] Laurent Schwartz. *Topologie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann Paris, 1970. 1