

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou



Mémoire de Master

Recherche Opérationnelle (Aide à la Décision)

Présenté par

Rabehi Sofiane Et Mazigh Chalal

Problème de Contrôle Optimal par l'Approche de La Théorie des Jeux

Mémoire soutenu le 10 octobre 2019 devant le jury composé de :

Mme. N. ZIDELMAL	M.A.A	Présidente
Mme. K. FAHEM	M.C.B	Encadreur
Mme. F. ACHEMINE	M.C.A	Examinatrice

Table des matières

1	Introduction en théorie de contrôle	6
1.1	Introduction	6
1.2	Problème de contrôle optimal	6
1.2.1	Objet de la commande	7
1.2.2	Condition initiale du système	8
1.2.3	Le but de la commande	8
1.2.4	Classe des commandes admissibles	9
1.2.5	Critère de qualité	9
1.2.6	Contrôlabilité	10
1.3	Différents types de contrôle	12
1.3.1	Problème de Lagrange	12
1.3.2	Problème de mayer	12
1.3.3	Problème de Mayer-lagrange	13
1.4	Méthode de résolution	13
1.4.1	Principe du maximum de Pontriaguine	13
2	Notions fondamentales de la théorie des jeux	18
2.1	Quelques définitions essentielles	18
2.2	Jeux sous forme normale	19
2.3	Concepts de solutions	21
2.3.1	Équilibre en stratégies dominantes	21
2.3.2	Équilibre de Nash	22
2.3.3	Équilibre de stackelberg dans un jeu à deux joueurs	24
3	Jeux différentiels	28
3.1	Introduction	28
3.2	Position du problème	28
3.3	Concepts de solutions	30

3.3.1	Commande par la stratégie de Nash	31
3.3.2	Stratégie de Nash en boucle ouverte pour les jeux linéaires- quadratiques	32
3.3.3	Equation de Ricatti	35
3.3.4	Conditions d'existence et d'unicité d'un équilibre de Nash	37
3.4	Commande par la stratégie de stackelberg	37
3.4.1	Conditions nécessaires pour le suiveur	38
3.4.2	Conditions nécessaires pour le leader	39
3.5	Stratégie de Stackelberg en boucle ouverte pour les jeux linéaires- quadratiques	40
3.5.1	Condition d'existence et d'unicité d'un équilibre de Stackelberg	45

Introduction générale

Le défi de la recherche opérationnelle réside sur la maîtrise de systèmes de plus en plus complexes. Cette complexité demeure sur le fait que ces systèmes sont soumis à l'action de multiples contrôles (commandes) qui sont souvent étudié par la théorie de contrôle.

La théorie de contrôle s'est imposé à la fin du 18ème siècle pour résoudre des problèmes d'optimisation multicritères de cette époque, elle est introduite par de grands mathématiciens comme Lagrange et L.V Kotorovich. Elle permet d'amener un système d'un état initial à un certain état final en respectant certains paramètres. Toutefois un système de contrôle ou système multicritère (de contrôle) est un système dynamique qui se constitue principalement d'une ou plusieurs fonctions coûts, des contraintes et des commandes qui sont sans doute l'outil le plus important dans les problèmes de contrôles. Le but de cette théorie est de maximiser ou de minimiser la fonction critère. La théorie des jeux est introduite au début du 20ème siècle, c'est le cadre naturel pour la résolution des problèmes d'optimisation. Sa richesse est de présenter de nombreux avantages comme les différentes stratégies, les différentes structures d'informations, . . . ,etc. Elle s'intéresse aux interactions

des individus (joueurs) et c'est la que la notion d'équilibre rentre, elle permet de trouver le meilleur compromis possible pour les joueurs. Les fondements de cette théorie sont décrits autour des années 1920 par le mathématicien Ernst Zemerlo, qui sont par la suite développés par Oscar Morgenstern et John Von Neumann en 1944.

La rencontre de ces deux théories donne naissance à ce qu'on appelle les jeux différentiels. L'objectif de ce mémoire est d'aborder des problèmes de commandes multicritères par l'approche de la théorie des jeux autrement dit avec les jeux différentiels. Ils ont été introduits avec la théorie des jeux qu'on définira et qu'on éclaircira dans ce mémoire. L'idée est d'optimiser les critères en se servant des équilibres de Nash et Stackelberg. L'étude de ces théories est très bénéfique, ces apports sont surprenants et visibles dans plusieurs expériences comme (la planification des lignes de production, la planification des missions spatiales, la couverture satellite des téléphones portables, le recyclage de déchets,...,etc).

Ce mémoire est réparti comme suit :

Un premier chapitre qui est dédié à la présentation des notions de bases et essentielles de la théorie de contrôle. Nous exposerons notamment les différents problèmes de contrôle et la méthode de résolution.

Le second chapitre est consacré à la théorie des jeux, nous définissons les notions élémentaires de cette théorie (un jeu, un joueur, une stratégie,...,etc) ainsi que les équilibres de Nash et Stackelberg, deux concepts qui sont très utilisés et étudiés.

Au troisième chapitre on s'intéressera aux jeux différentiels (cas général), aux jeux différentiels linéaires-quadratiques comme cas particulier, à leur résolution par la stratégie de Nash et Stackelberg. En appliquant les notions du premier et du deuxième chapitre nous obtiendrons des conditions nécessaires d'existence des deux équilibres.

Et enfin une conclusion générale.

Chapitre 1

Introduction en théorie de contrôle

1.1 Introduction

La théorie de contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir sur une commande. Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un état final en respectant certains critères. Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, dérivés partielles etc. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres habituellement soumis à des contraintes.

1.2 Problème de contrôle optimal

Définition 1.1. La problématique générale du contrôle optimal est la suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

où f est une application de classe C^1 de $I \times V \times U$ dans \mathbb{R}^n , I un intervalle dans \mathbb{R} , V un ouvert de \mathbb{R}^n , U un ouvert de \mathbb{R}^m et $(t_0, x_0) \in I \times V$, u est le contrôle qui appartient à un sous-ensemble $\mathcal{L}_{loc}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$.

Pour tout contrôle $u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ la trajectoire associée x_u est définie sur un intervalle maximal $[0, t_e(u)]$ où $t_e(u) \in \mathbb{R}^+ \cup [+\infty]$, $x(t_0) = x_0$ est la condition initiale ou la position initiale.

Comme il peut aussi être sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} J(t^*, u) &= g(t^*, x(t^*)) + \int_0^{t^*} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min \\ x'(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0 \in M_0 \\ x(t^*) &= x_1 \in M_1 \\ u &\in U, t \in I = [0, t^*] \end{aligned}$$

où M_0 et M_1 sont deux variétés de \mathbb{R}^n , I un intervalle de \mathbb{R} , $x(0) = x_0$ est la position initiale, $x(t^*)$ est sa position terminale (finale).

En pratique, la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température, ...etc. $u(t)$ est la commande du système. U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans \mathbb{R}^m .

$$J(t^*, u) = g(t^*, x(t^*)) + \int_0^{t^*} f^0(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.2)$$

est appelé coût, critère de qualité ou but du problème.

Le problème général de contrôle optimal est constitué des données suivantes :

1.2.1 Objet de la commande

Le système peut comporter beaucoup de variables ou paramètres. On suppose que n variables sont nécessaires pour décrire son comportement.

Les variables nommées variables d'états seront notées $x_i, i = 1, \dots, n$

Le système évolue dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de $t : x_i(t)$.

Les n variables d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre sur un intervalle de temps $I = [t_0, t^*]$ qui sont sous la forme suivante :

$$\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} = f^i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), i = 1 \dots n \quad (1.3)$$

Les variables de contrôle seront notées $u_j(t), j = 1, \dots, m$. Elles sont soumises à l'hypothèse d'intégrabilité par rapport à t . Si les u_j sont connues alors les traitements sont très simplifiés.

1.2.2 Condition initiale du système

La condition initiale du système, $x_0 = x(t_0)$ est un vecteur donné dans un plan de phase. En réalité, les composantes de $x(t)$ et de x_0 peuvent représenter physiquement : la position, la vitesse, la température et d'autres paramètres mesurables.

1.2.3 Le but de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0), (x_0 \in M_0)$ à une autre position $x^* = x(t^*), (x^* \in M_1)$ où M_0 et M_1 sont des sous ensembles de variétés.

1.2.4 Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être non borné, borné ou du type Bang-Bang.

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, on a $u_j(t) = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un switch, où switch est un commutateur d'instant.

1.2.5 Critère de qualité

Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système atteint un état désirable.

Le critère de qualité, appelé aussi coût ou fonction objectif, est généralement décrit par la formule suivante :

$$J(t, u) = g(t^*, x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x, u) dt \quad (1.4)$$

$g(t^*, x^*)$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final t^* . Le second terme intervenant dans la fonction objectif $\int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x, u) dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'états. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u .

1.2.6 Contrôlabilité

Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle. La notion de contrôlabilité a été introduite en 1960 par Kalman pour des systèmes linéaires de la forme $x' = Ax + Bu$. L'état x évolue dans un espace vectoriel réel E , de dimension n .

On dit que $x' = Ax + Bu$ est contrôlable, si l'on peut joindre deux points de l'espace d'état, c'est à dire si, et seulement si, étant donnés deux points $x_0, x^* \in E$ et deux instants t_0, t^* avec $t_0 < t^*$, il existe une commande u , définie sur $[t_0, t^*]$, telle que $x(t_0) = x_0, x(t^*) = x^*$.

Contrôlabilité des systèmes linéaires

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est la suivante :

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0, t \in I \quad (1.5)$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} , A, B , et r sont trois applications localement intégrables sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{nm}(\mathbb{R})$ et R^m où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension n , et $M_{nm}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de n lignes et de m colonnes. L'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous ensemble $U \subset R^m$. Soit $F(.) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ la

résolvante du système linéaire homogène $x'(t) = A(t)x(t)$ définie par

$$\begin{cases} F' = A(t)F(t) \\ F(t_0) = Id \end{cases}$$

où Id désigne la matrice identité.

Pour tout contrôle u le système

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0 \quad (1.6)$$

admet une unique solution $x(\cdot) : I \rightarrow R^n$ absolument continue donnée par ;

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_{t_0}^{t^*} F(t)F(s)^{-1}B(s)u(s) + r(s)ds \quad (1.7)$$

pour tout $t \in I$.

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution du système s'écrit de la manière suivante :

$$x(t) = F(t) \int_t^{t^*} F(s)^{-1}B(s)u(s)ds \quad (1.8)$$

Elle est linéaire en u .

Théorème 1.1. *Le système $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t^* si et seulement si la matrice*

$$c(t^*) = \int_t^{t^*} F(t)^{-1}B(t)B(t)'F(t)^{-1}dt \quad (1.9)$$

Où $B(t)' = B^t$ la matrice transposée de $B(t)$.

$c(t^*)$ est dite matrice de contrôlabilité. Cette condition ne dépend pas de x_0 , c'est-à-dire que si un système linéaire est contrôlable en temps t^* depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps t^* depuis tout point.

Théorème 1.2. *On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle). Le système $x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t^* (quelconque) si et seulement si la matrice*

$$C = B, AB, \dots, A^{n-1}B \quad (1.10)$$

est de rang n .

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $\text{rang}C = n$ est appelée condition de Kalman

1.3 Différents types de contrôle

1.3.1 Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à :

$$J(t^*, u) = \int_{t_0}^{t^*} f^0(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.11)$$

c'est à dire $g = 0$

1.3.2 Problème de mayer

C'est le problème dont le critère est le suivant :

$$J(t^*, u) = g(t^*, x(t^*)) \quad (1.12)$$

C'est à dire $f^0 = 0$, $J(t^*, u)$ est le coût terminal.

L'unicité de la solution du système est assurée par le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles. Cette solution varie en fonction du contrôle u .

1.3.3 Problème de Mayer-lagrange

Le problème de mayer-lagrange est donné sous la forme d'un système

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, x(t^*) = x^*, \quad (1.13)$$

$u \in U, t \in (t_0, t^*)$ l'objectif étant de minimiser le coût.

$$J(t^*, u) = g(t^*, u^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x, u) dt. \quad (1.14)$$

Lorsque $g = 0$ dans l'expression de la fonctionnelle J , on parlera d'un problème de lagrange. Lorsque $f_0 = 0$, on parlera d'un problème de mayer.

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f_0(t, x, u) = 1, g(t^*, x^*) = 0$ et le temps final t^* est libre dans l'expression de $\min_{t_0}^{t^*} \int 1 dt$

1.4 Méthode de résolution

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryaguin qui donne une condition nécessaire d'optimalité, il faut vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée. Cette dernière a l'extrême précision numérique, mais elle est très sensibles au choix de la condition initiale. Contrairement au méthodes directes.

1.4.1 Principe du maximum de Pontriaguine

Théorème 1.3. *On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n*

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.15)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)[$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $\Omega \in \mathbb{R}^m$.

Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $t(u) < t_e(u)$. Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, t]$

$$J(t, u) = g(t, x(t)) + \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds \quad (1.16)$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , et $x(t)$ est la trajectoire solution associée au contrôle u .

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(t)$ est optimal sur $[0, t^*]$, alors il existe une application $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(t), p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, t^*]$,

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial H(t, x, p, p^0, u)}{\partial p} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = - \frac{\partial H(t, x, p, p^0, u)}{\partial x} \quad (1.18)$$

où $p(t)$ la co-trajectoire solution du système est appelé système adjoint et $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est l'Hamiltonienne du système. On dit qu'une commande $u(t)$, $t \in [t_0, t^*]$ vérifie le principe du maximum, si la condition

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v(t)) \quad (1.19)$$

est vérifiée.

Si dans un problème de contrôle la commande n'est pas soumise à des contraintes, dans ce cas on distingue la condition d'optimalité suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Exemple 1.4.

$$\begin{cases} t^* \rightarrow \min \\ x'_1 = x_2, x_1(0) = x_{10} \\ x'_2 = 2x_2 + u, x_2(0) = x_{20} \\ |u(t)| \leq 1, t \in [0, tf] \end{cases}$$

1. Contrôlabilité :

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Matrice de Kalman avec $n = 2$

$$C = (B \quad A^{2-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Rang $C = 2 \rightarrow$ le système est contrôlable

2. L'Hamiltonienne :

$$H(x, p, u, t) = p_0 + p_1 x'_1 + p_2 x'^2$$

$$= 1 + p_1 x_2 + p_2 (2x_2 + u)$$

$$p'_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \implies p_1(t) = c_1$$

$$p'_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 - 2p_2 \implies p_2 = c_2 e^{-2t} - \frac{c_1}{2}$$

- La fonction adjointe est donc : $\begin{cases} p_1(t) = c_1 \\ p_2(t) = c_2 e^{-2t} - \frac{c_1}{2} \end{cases}$

- Montrer que la commande optimale a une seule commutation :

- Principe du maximum :

$$\max_{-1 \leq u \leq 1} H(x, p, u, t) = \max_{-1 \leq u \leq 1} (1 + p_1 x_2 + 2p_2 x_2 + p_2 u)$$

$$= 1 + p_1 x_2 + 2p_2 x_2 + \max_{-1 \leq u \leq 1} p_2 u$$

$$\implies u(t) = \text{signe } p_2(t), t \in [0, tf]$$

$$p_2(t) = c_2 e^{-2t} + \frac{c_1}{2}$$

$$p'_2(t) = -2c_2 e^{-2t}$$

alors

$$\text{signe } p'(t_0) = -\text{signe } c_2 \implies p'_2(t) > 0 \text{ où } p'_2(t) < 0$$

$$\implies p_2(t) \text{ est monotone c'est à dire : } \begin{cases} \text{si, } c_2 > 0 \implies p_2(t) \searrow \\ \text{si, } c_2 < 0 \implies p_2(t) \nearrow \\ \text{si, } c_2 = 0 \implies p_2(t) = -\frac{c_1}{2} \end{cases}$$

3. Trouver la commande optimale et les trajectoires :

$$u = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [t_0, t_c], \text{ avec, } x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ -1, & \text{si } t \in [t_c, t_f], \text{ avec, } x_1(t_f) = 1, x_2(t_f) = 0 \end{cases}$$

Sur $[0, t_c]$, on a $u = 1$ et

$$x_2' = 2x_2 + 1 \implies x_2(t) = ce^{2t} - \frac{1}{2}$$

$$\text{avec } x_2(0) = c - \frac{1}{2} = 0 \implies c = \frac{1}{2}$$

D'où

$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$$

$$x_1'(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \implies x_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}, \text{ si } t \in [0, t_c]$$

Pour $t \in [0, t_c]$ on a donc

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}, & \text{si } t \in [0, t_c] \\ x_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}, & 0, t_c \end{cases}$$

Pour $t \in [t_c, t_f]$, $u = -1$ et

$$\begin{cases} x_2'(t) = 2x_2 - 1 \\ x_1'(t) = ce^{2t} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}ce^{2t} + \frac{1}{2}t + c_1 \\ x_2(t) = ce^{2t} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a

$$x_2(t_c) = ce^{2t_c} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{2t_c} - \frac{1}{2} \implies c = \frac{1}{2} - e^{-2t_c}$$

d'où

$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - e^{2(t-t_c)} + \frac{1}{2}$$

et

$$\begin{aligned} x_2(t_f) &= \frac{1}{2}e^{2t_f} - e^{2(t_f-t_c)} + \frac{1}{2} = 0 \\ \implies e^{2t_f} \left(\frac{1}{2} - e^{2t_c} \right) &= -\frac{1}{2} \\ \implies e^{2t_f} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2} - e^{2t_c}} = \frac{1}{2e^{-2t_c} - 1} \\ \implies e^{2t_f} &= \frac{e^{2t_c}}{2 - e^{2t_c}} \\ \implies t_f &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^{2t_c}}{2 - e^{2t_c}} \right) \end{aligned}$$

conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à une théorie très importante en optimisation qui est la théorie du contrôle optimale. Nous avons exposé les principales notions de bases et les différents cas d'un problème de contrôle. Par la suite nous avons présenté le célèbre principe maximum de Pontriaguine qui donne les conditions nécessaire de résolution d'un problème de contrôle.

Chapitre 2

Notions fondamentales de la théorie des jeux

La théorie des jeux s'intéresse aux situations où des individus doivent prendre des décisions " en interférence ", dans le sens où le gain de chacun dépend de ce qu'il fait mais aussi de ce que font les autres.

Pour un joueur toute la difficulté provient alors de ce qu'il doit anticiper, le choix des autres, avant de faire le sien, d'où l'hypothèse de la rationalité : les joueurs cherchent à maximiser leur gain, compte tenu des informations dont ils disposent. Le but principal pour chaque joueur consiste à savoir comment réagir et quelle sera la décision à prendre pour satisfaire son intérêt.

2.1 Quelques définitions essentielles

Définition 2.1. Un jeu : est une situation où les individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance (les règles du jeu), les résultats de ces choix constituent une issue du jeu, à laquelle est associé un gain ou une perte pour chacun des participants.

Définition 2.2. Un joueur : est un acteur ou une entité pouvant être une

personne, une entreprise, un gouvernement, une cellule, un virus...etc, agissant dans leur propre intérêt selon le principe de la rationalité.

On notera \mathcal{N} l'ensemble des joueur participant à un même jeu : $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ où N désigne leur nombre ($N \geq 2$).

Définition 2.3. Une stratégie est un plan d'action complet pour chaque joueur spécifiant ce que fera ce dernier à chaque étape du jeu et face à chaque situation pouvant survenir au cours du jeu. La stratégie décrit totalement le comportement d'un joueur. On distingue deux type de stratégie :

Une stratégie pure du joueur i est une action, ou un plan d'actions, choisie avec certitude.

Une stratégie mixte du joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures du i^{eme} joueur.

Définition 2.4. Une utilité. À chaque profil de stratégie est associé une récompense (un gain ou une perte) pour chaque joueur, découlant d'une fonction d'utilité à valeur pour chaque combinaison possible de stratégies. La sélection d'une stratégies au détriment d'une autre implique un résultat, et donc une satisfaction du joueur, différente. La notion de bien être ou de satisfactions dans une situation donnée est traduite par cette fonction d'utilité qui associe une série de choix préférentiels à des valeurs numériques.

2.2 Jeux sous forme normale

La forme normale, également connue sous le nom de forme stratégique, est la représentation la plus familière des interactions stratégiques dans la théorie des jeux. Un jeu écrit de cette façon s'élève à une représentation de l'utilité de chaque joueur, l'ensemble de ces stratégies et les issues possibles du jeu.

Définition 2.5. Un jeu sous forme normale peut être représenté sous forme

$$J = (\mathcal{N}, (X_i)_{i \in \mathcal{N}}, (f_i)_{i \in \mathcal{N}}) \quad (2.1)$$

où

- $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ est l'ensemble des joueurs, un joueur quelconque est noté i et donc $i = 1, \dots, N$;
- $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ désigne l'ensemble des stratégies du joueur $i \in N$, $X = \prod_{i=1}^N S_i$ est l'ensemble des issues du jeu;
- f_i est la fonction des gains du joueur $i \in \mathcal{N}$.

Remarque 2.1. un jeu sous forme normale (stratégique) est un jeu ayant les caractéristiques suivantes :

1. il s'agit d'un jeu à information complète. C'est à dire que chacun des joueurs connaît la structure du jeu (les ensembles, les préférences, les règles du jeu,...etc).
2. il s'agit d'un jeu simultané (statique) où chaque joueur choisit une stratégie indépendamment du choix de ses adversaires et le jeu ne se répète pas.
3. les joueurs sont rationnels et leurs objectif est la maximisation de leurs paiements.

Exemple 2.1. Considérons le jeu suivant (romantique ou action). Dans ce jeu une femme et son mari veulent voir un film ensemble. La femme préfère les films romantiques tandis que l'homme préfère les films d'actions. Néanmoins ils n'ont pas envie de voir des films séparément.

Voici le tableau des utilités (femme sur les lignes et l'homme sur les colonnes). Dans les quatres cases du tableau :

-Le premier chiffre est le paiement que reçoit la femme.

-Le deuxième chiffre est le paiement que reçoit l'homme.

		Homme	
		romantique	action
Femme	romantique	(3,2)	(1,1)
	action	(1,1)	(2,3)

4.png

FIGURE 2.1 – Jeu du romantique ou action

2.3 Concepts de solutions

Maintenant que nous avons défini le jeu sous forme normale, la question est comment raisonner au sujet de tels jeux. Les théoriciens de jeu traitent ce problème en identifiant certains sous-ensembles de résultats, appelés concepts de solutions. Dans cette section, nous décrivons quelques uns de ces concepts les plus fondamentaux : **l'équilibre de Nash** et **l'équilibre de Stackelberg**.

2.3.1 Équilibre en stratégies dominantes

Définition 2.6. Considérons le jeu sous forme normale (2.1). On dit que la stratégie $x_i \in X_i$ est une **stratégie dominante** si :

$$\forall x'_i \in X_i, \forall x_{-i} \in X_{-i}, f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(x'_i, x_{-i}) \quad (2.2)$$

La stratégie $x_i \in X_i$ est dominante pour joueur i , si x_i domine x'_i .

Définition 2.7. Une stratégie $x_i \in X_i$ est une **stratégie strictement dominante** pour le joueur i dans le jeu (2.1), si :

$$\forall x'_i \in X_i, x'_i \neq x_i, \forall x_{-i} \in X_{-i}, f_i(x_i, x_{-i}) > f_i(x'_i, x_{-i}) \quad (2.3)$$

Définition 2.8. Une stratégie x_i est **faiblement dominante** si :

$$\forall x'_i \in X_i, x'_i \neq x_i, \forall x_{-i} \in X_{-i}, f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(x'_i, x_{-i}) \quad (2.4)$$

$$\exists x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{-i}) > f_i(x'_i, x_{-i}) \quad (2.5)$$

Définition 2.9 (Équilibre en stratégies dominantes). Une situation $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \in X$ est appelé équilibre en stratégies dominantes dans le jeu (2.1), si chaque composante $x_i^* \in X_i$ est stratégie dominante pour le joueur i , $\forall i \in N$

2.3.2 Équilibre de Nash

Le concept clé de la théorie des jeu est le concept d'équilibre de Nash introduit par le mathématicien John Nash en 1950. La stratégie de Nash est une solution sécurisante quand un décideur ne connaît pas la stratégie adoptée par ses concurrents. La caractérisation principale de la stratégie de Nash est qu'un joueur ne peut pas améliorer unilatéralement son critère en modifiant sa stratégie tant que les autres joueurs appliquent leurs stratégies de Nash. En fonction de la structure d'information dans le jeu, plusieurs stratégies de Nash peuvent être définies menant à des commandes différentes. Un équilibre de Nash correspond donc à une situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de la situation d'équilibre.

Définition 2.10. Un profil de stratégies $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est un **équilibre de Nash** pour le jeu (2.1) si aucun des joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie x_i^* (quand les autres joueurs continuent à jouer le profil x_{-i}^*). Autrement dit :

$$\forall i \in N, \forall x_i \in X_i, f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*) \quad (2.6)$$

Exemple 2.2 (jeu de la poule mouillée). Deux voitures se dirigent l'une vers l'autre au milieu de la chaussé, celui qui s'écarte au dernier moment est une poule mouillée, donc son gain est nul, celui de l'autre étant strictement positif, si tout les deux s'écartent le déshonneur est total mais le pire arrive bien sur quand il n'y a aucun qui s'écarte.

Le jeu est représenté par le tableau suivant :

Trouver l'équilibre de Nash.

Notons l'ensemble des stratégies des deux voitures $X = \{p, e\}$ avec (p) pour passer et (e) pour s'écarter.

Soit f_1 la fonction des gains pour la première voiture et f_2 la fonction des gains de la deuxième voiture.

pour la première voiture on a :

		Voiture 2	
		passer	s'écarter
Voiture 1	passer	(-2, -2)	(1, 0)
	s'écarter	(0, 1)	(-1, -1)

5.png

FIGURE 2.2 – Jeu de la poule mouillée

$$f_1(p, p) = -2 < f_1(p, e) = 1$$

pour la deuxième voiture on a :

$$f_2(p, p) = -2 < f_2(e, p) = 1$$

Alors le profil (p, p) n'est pas un équilibre de Nash, par contre le profil (p, e)

est un équilibre de Nash, en effet :

$$f_1(e, p) = 0 > f_1(e, e) = -1$$

$$f_2(p, e) = 0 > f_2(e, e) = -1$$

Théorème 2.3. *Un jeu sous forme normal (2.1) admet un équilibre de Nash, si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. Les ensembles X_i , des stratégies sont convexes et compacts, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.
2. Les fonctions $f_i : \prod_{j=1}^N X_j \rightarrow \mathbb{R}$, sont continues, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.
3. Les fonctions $f_i(\cdot, x_{-i}) : X_j \rightarrow \mathbb{R}$, sont concaves, $\forall i \in 1, \dots, N$, $\forall x_{-i} \in \prod_{j \in \mathcal{N}, j \neq i} X_j$.

Équilibre de Nash et correspondance de meilleures réponses

On appelle correspondance de meilleures réponses du joueur i l'application multivoque $MR_i(x_{-i}) \rightarrow 2^{X_i}$ qui associe à x_{-i} l'ensemble des meilleures réponses du joueur i . L'application multivoque : $MR(x) \rightarrow 2^X$ définie par $MR(x) = \prod_{i \in I} MR_i(x_{-i})$ est appelée correspondance de meilleure réponse du

jeu. La meilleure réponse est définie par la formule suivante :

$$MR_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}), \forall y_i \in X_i\} \quad (2.7)$$

$$= \{x_i \in X_i, f_i(x_i, x_{-i}) = \sup_{y_i \in X_i} f_i(y_i, x_{-i})\} \quad (2.8)$$

où X_i est l'ensemble des stratégies du joueur i , x_{-i} les stratégies du reste des joueurs, f_i est fonction des gains du joueur i .

Si $x^* \in \prod_{\mathcal{N}} MR_i(x_{-i}^*) = MR(x^*)$ alors x^* est un point fixe de meilleure réponse par conséquent un équilibre de Nash.

2.3.3 Équilibre de stackelberg dans un jeu à deux joueurs

Cet équilibre a été introduit par l'économiste Heinrich Von Stackelberg en 1934, initialement défini en économie. Etant donné deux entreprises, l'entreprise 1 et l'entreprise 2, choisissant leur niveau de production, q_1 et q_2 (la variable stratégique du jeu est le niveau de production). Toutefois, l'entreprise 2 est supposée choisir son niveau de production en premier. C'est le **leader de Stackelberg**. Le joueur 1 est **suiveur**, il observe le choix du joueur 2 puis décide à son tour d'un niveau de production q_1 . Si le joueur 1 est rationnel, il va choisir son niveau de production comme une meilleure réponse à la production du joueur 2. Or si le joueur 2 est rationnel, et sait que le joueur 1 est rationnel, il sait que s'il choisit q_2 , le joueur 1 choisira $MR_1(q_2)$. Ainsi, le joueur 2 va anticiper la réaction du joueur 1 et l'intégrer dans son programme d'optimisation.

Considérons un jeu à deux joueurs, $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, X_1, X_2 leurs ensembles de

stratégies. f_1 et f_2 leurs fonctions coût (le but de chacun est donc de minimiser), avec $f_1, f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.11. S'il existe une application $MR_1 : X_2 \rightarrow X_1$ telle que $\forall x_2 \in X_2$,

$$f_1(MR_1(x_2), x_2) \leq f_1(x_1, x_2) \quad \forall x_1 \in X_1$$

et si $\exists x_2^* \in X_2$ tel que :

$$f_2(MR_1(x_2^*), x_2^*) \leq f_2(MR_1(x_2), x_2) \quad \forall x_2 \in X_2$$

alors le couple $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$ où $x_1^* = MR_1(x_2^*)$ est un équilibre de Stackelberg avec le joueur 2 comme leader et le joueur 1 comme suiveur.

Les propositions suivantes peuvent être considérées comme des définitions équivalente de l'équilibre de Nash et de l'équilibre de Stackelberg avec le joueur 2 comme leader et le joueur 1 comme suiveur.

Posons :

$$D_1 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \text{ tel que } : x_1 = MR_1(x_2)\} = Gr(MR_1)$$

MR_1 est l'application de meilleures réponses de joueur 1.

$$\text{posons } D_2 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \text{ tel que } x_2 = MR_2(x_1)\} = Gr(MR_2).$$

Proposition 2.4. *une paire de stratégies (x_1^*, x_2^*) est un équilibre de Stackelberg avec J_2 comme leader si et seulement si $(x_1^*, x_2^*) \in D_1$ et :*

$$f_2(x_1^*, x_2^*) \leq f_2(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in D_1 \quad (2.9)$$

Proposition 2.5. *une paire de stratégies (\bar{x}_1, \bar{x}_2) est un équilibre de Nash si et seulement si $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in D_1 \cap D_2$*

Remarque 2.2. Les propositions 2.4 et 2.5 sont des conséquences directes de la définition des deux équilibres.

Proposition 2.6. *La stratégie de Stackelberg favorise les leader.*

Preuve

Pour le suiveur (joueur 1)

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq f_1(x_1, \bar{x}_2) \forall x_1$$

$$\text{or : } f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f_1(MR_1(\bar{x}_2), \bar{x}_2)$$

Pour le leader (joueur 2)

$$f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq f_2(\bar{x}_1, x_2) \forall x_2$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*) \leq f_2(x_1, x_2) \forall (x_1, x_2) \in D_1$$

donc $f_2(x_1^, x_2^*) \leq f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ l'équilibre de Stackelberg favorise le leader (la stratégie de Stackelberg est équivalente sinon meilleure qu'une stratégie de Nash)*

Exemple 2.7. Soit un jeu à deux joueurs F et G où le joueur G est le leader et soit f_1 et f_2 les fonctions de gains des deux joueurs respectivement. Les deux joueurs voudront donc maximiser leurs gains. Soit M_f et M_G les matrices des gains des deux joueurs respectivement. D_1 et D_2 les graphes de F et G respectivement.

Avec

$$M_F = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 11 \\ 5 & 9 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } M_G = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 11 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ l'ensemble des stratégies du joueur F et $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ l'ensemble des stratégies du joueur G. on trouve l'équilibre de Nash avec les correspondances de meilleures réponses et cela avec la formule suivante :

$$MR_F(y_1) = \{(x \in X), f_1(x, y_1) \geq f_1(x^*, y_1)\} \quad (2.11)$$

$$= \{(x \in X), f_1(x, y_1) = \sup_{x^* \in X} f_1(x^*, y_1)\} \quad (2.12)$$

Alors

$$\begin{aligned} MR_F(y_1) &= \{x_1\}, MR_F(y_2) = \{x_3\}, MR_F(y_3) = \{x_3\} \\ MR_G(x_1) &= \{y_3\} MR_G(x_2) = \{y_3\} MR_G(x_3) = \{y_2\} \end{aligned}$$

Par la notion des produits des meilleure réponse on obtient un seul équilibre de Nash qui est le suivant :

$$MR(x_2, y_3) = MR_F(y_3) \times MR_G(x_2) = \{(x_2)\} \times \{y_3\} = \{(x_2, y_3)\} \quad (2.13)$$

L'équilibre de Nash de ce jeu est donc $(x^*, y^*) = (x_2, y_3)$

Cherchons à présent l'équilibre de Stackelberg.

Si on note $D_1 = Gr(MR_F)$, alors ce qui précède

$$D_1 = \{(x_1, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3)\}$$

D'après la Proposition 2.5, le leader maximisera sa fonction de gain sur l'ensemble D_1 , on obtiendra donc $(x^*, y^*) = (x_1, y_1)$ comme équilibre de Stackelberg puisque

$$f_2(x_1, y_1) = 10 \geq f_2(x_3, y_2) = 9 \text{ et } f_2(x_1, y_1) = 10 \geq f_2(x_3, y_3) = 6$$

Conclusion

Ce chapitre présente les notions fondamentales de la théorie des jeux. On s'est intéressé aux jeux sous forme normale, nous avons présenté les concepts d'équilibre les plus connus et les plus utilisés et étudiés en littérature, à savoir l'équilibre de Nash et l'équilibre de Stackelberg que nous utiliserons au chapitre suivant.

Chapitre 3

Jeux différentiels

3.1 Introduction

La théorie des jeux différentiels peut être vue comme l'évolution des jeux statiques et de l'optimisation dynamique, c'est une prolongation de la théorie des jeux séquentiels au cas continu. Elle est définie quand il peut y avoir plus d'un décideur, chacun a sa propre fonction objectif qu'il essaie de minimiser, soumis à un ensemble d'équations différentielles.

3.2 Position du problème

Un jeu différentiel est représenté comme un jeu dynamique dont l'état évolue selon l'équation :

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = f(x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t), t) \quad (3.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$; $u_i \in \mathbb{R}^{r_i}$ $i = (1, 2, \dots, N)$; $t \in [t_0, t_f]$ et l'état $x(t_0) = x_0$.

L'évolution de l'état $x(t)$ du système est donc influencé par l'ensemble des joueurs et leurs commandes associées u_i .

On suppose que la fonction (3.1) est continue et dérivable sur \mathbb{R}_i . De plus les commandes u_i ($i = 1, 2, \dots, N$) définissent une trajectoire unique pour l'état $x(t)$. Le critère associé au joueur i est :

$$J_i = K_{if}(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) dt \quad (3.2)$$

où $x_f = x(t_f)$ et les fonctions L_i et K_{if} sont supposées continuellement dérivables par rapport à toutes ses variables. Le critère représente l'intérêt du joueur. Le comportement rationnel du joueur i consiste à minimiser le critère J_i .

Jeux différentiels linéaire-quadratiques

Les jeux différentiels linéaires-quadratiques sont souvent étudiés dans la littérature à cause de leur simplicité relative. Dans ce chapitre on s'intéressera exclusivement à ce type de jeux différentiels.

Définition 3.1. Pour N joueurs, le jeu différentiel est défini par une fonction coût associée à chaque joueur i avec des contraintes associées à cette dernière qui sont représentées par :

$$J_i = \frac{1}{2}(x_f^T K_{if} x_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x(t)^T Q_i x(t) + \sum_{j=1}^N u_j^T(t) R_{ij} u_j^T(t)] dt \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t) + \sum_{i=1}^N B_i u_i, \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.4)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$; $u_i \in \mathbb{R}^{r_i}$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Toutes les matrices de pondérations sont symétriques et les matrices R_{ii} sont inversibles pour $i = 1, 2, \dots, N$.

Les jeux linéaire - quadratiques représentent un intérêt particulier dans des problèmes macroéconomiques comme la recherche de politiques stabilisantes à court terme ou la coordination de politiques entre pays. On trouve aussi des applications dans les problèmes de poursuite.

Dans ce chapitre, on s'intéressera aux jeux différentiels linéaires-quadratiques compte tenu de leur importance. En effet, beaucoup de systèmes physiques ou économiques ont une dynamique linéaire, ou bien qui peut être correctement approchée par son modèle linéarisé.

3.3 Concepts de solutions

Dans ce travail on s'intéressera à la résolution des jeux différentiels par deux types de stratégies : la stratégie de Nash et la stratégie de Stackelberg déjà présenté au deuxième chapitre.

L'études de ces deux équilibres se fera en utilisant les résultats présentés aux chapitres précédents sur la théorie des jeux et la théorie du contrôle optimal.

De plus toute stratégie adoptée nécessite une structure d'information pour la résolution qui sont définies comme suit

Définition 3.2. Structure d'information en boucle ouverte Pour ce type de stratégie on se réfère à seulement la fonction coût et la contrainte dynamique et aucune mesure de l'état du système n'est disponible pendant l'intervalle d'optimisation. N'ayant pas accès à des mesures de l'état pour juger de la qualité de la stratégie adoptée. les joueurs s'engagent (en aveugle) à partir de leur connaissance du modèle du système et de l'état initial pour maintenir leur stratégies et optimiser leur critère.

Définition 3.3. Structure d'information en boucle fermée Dans ce cas l'état $x(t)$ est inclus dans la fonction coût, ainsi les mesures de l'état

du système sont disponibles pour le joueur ceci permet de concevoir une commande fonction de l'état $x(t)$ et de mieux apprécier l'effet de sa stratégie sur l'évolution du système et sur la valeur du critère associé à chaque décideur

Dans ce qui suit nous nous limiterons à une stratégie avec une structure d'information à boucle ouverte.

3.3.1 Commande par la stratégie de Nash

Considérons un jeu différentiel à N joueurs où le joueur i ($i \in \{1, 2, \dots, N\}$) doit déterminer une commande $u_i(t)$ pour minimiser le critère J_i donné par l'équation (3.2) et sous la contrainte dynamique (3.1).

L'hamiltonienne associée au joueur i s'écrit de la manière suivante :

$$H_i(t) = L_i(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t) + p_i^T(t)(f(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t), t)) \quad (3.5)$$

où $p_i(t)$ est le vecteur d'état adjoint associé au problème d'optimisation du joueur i et $p_i^T(t)$ sa transposée.

Les conditions de transversalités sont données par :

$$\frac{\partial p_i(t)}{\partial t} = \frac{\partial H_i(t)}{\partial x} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\partial H_i(t)}{\partial u_j} \frac{\partial n_j(x, t)}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\text{avec } p_i(t_f) = \frac{\partial K_{if}(x_f, t_f)}{\partial x_f}.$$

Le critère supplémentaire $\sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\partial H_i(t)}{\partial u_j} \frac{\partial n_j(x, t)}{\partial x}$ est obtenue avec une structure d'information à boucle fermée auquel on ne s'intéressera pas dans ce travail.

et la commande $u_i(t) = n_i(x, t)$ minimise

$$H_i(x, n_1(x, t), \dots, n_{i-1}(x, t), u_i(t), n_{i+1}(x, t), \dots, n_N(x, t), p_i(t), t) \quad (3.7)$$

Par rapport à un problème de commande optimale classique mono-critère, le terme de sommation dans l'équation traduit la prise en compte par le joueur i des réactions des autres joueurs. Ainsi pour $N = 1$, ce terme disparaît. Il disparaît aussi dans le cas d'une stratégie avec une structure d'informations en boucle ouverte car, dans ce cas, n_i n'est pas en fonction de l'état $x(t)$.

3.3.2 Stratégie de Nash en boucle ouverte pour les jeux linéaires-quadratiques

Pour une structure d'informations en boucle ouverte, l'application directe des conditions nécessaires, à savoir

$$\frac{\partial p_i(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H_i(t)}{\partial u_i} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial p_i(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H_i(t)}{\partial u_i} \quad (3.9)$$

$$p_i(t) = \frac{\partial K_i(x, t)}{\partial x} \quad (3.10)$$

Avec

$$J_i = \frac{1}{2}(x_f^T K_{if} x_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x(t)^T Q_i x(t) + \sum_{j=1}^N u_j^T(t) R_{ij} u_j^T(t)] dt \quad (3.11)$$

pour le jeu différentiel linéaire-quadratique donné par (3.11) et (3.4), nous donne :

De $\frac{\partial H_i(t)}{\partial u_i} = 0$ on obtient : $u_i(t) R_{ii} + B_i^T p_i(t) = 0$

On aura alors :

$$u_i(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T p_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.12)$$

et

$$\frac{\partial p_i(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H_i(t)}{\partial x} \implies \frac{\partial p_i(t)}{\partial t} = -Q_i x(t) - A^T p_i(t) \quad (3.13)$$

L'état final étant libre, les vecteurs adjoints vérifient la condition de transversalité, $p_i(t) = \frac{\partial K_i(x,t)}{\partial x}$ par conséquent :

$$p_i(t_f) = K_{if} x_f \quad (3.14)$$

En injectant les commandes $u_i(t) = -R_{ii} B_i^T p_i(t)$ dans l'équation (3.13) on aura :

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t) + \sum_{i=1}^N B_i u_i \quad (3.15)$$

$$= Ax(t) + \sum_{i=1}^N B_i [-R_{ii} B_i^T p_i(t)] \quad (3.16)$$

Avec $p_i(t_f) = K_{if} x_f$

Alors il est possible de présenter le problème de façon linéaire :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ p_1'(t) \\ \vdots \\ p_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -S_1 & \cdot & \cdot & -S_N \\ -Q_1 & -A^T & & & o_n \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & .1 & \\ -Q_N & 0_n & & & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ p_N(t) \end{pmatrix} = M_N \begin{pmatrix} x(t) \\ p_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ p_N(t) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

avec $S_j = B_j R_{jj}^{-1} B_j^T$ et 0_n est la matrice carrée nulle. Les conditions aux limites se résument sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ p_1(t_f) \\ \vdots \\ p_N(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ K_{1f} x_f \\ \vdots \\ K_{Nf} x_f \end{pmatrix}$$

Dans ce cas on suppose qu'il existe une relation linéaire entre les vecteurs d'état adjoint $p_i(t)$ et l'état $x(t)$ à travers des matrices carrées $K_i(t)$, soit

$$p_i(t) = K_i(t)x(t) \quad (3.18)$$

En utilisant les conditions nécessaires (3.8)-(3.10) et la contrainte (3.4) d'un jeu différentiel linéaire-quadratique on montre aisément que les matrices $K_i(t)$ doivent satisfaire

$$\frac{\partial K_i(t)}{\partial t} = -A^T K_i(t) - K_i(t)A - Q_i + K_i(t) \sum_{j=1}^N S_j K_j(t), \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

En effet

$$p_i(t) = K_i(t)x(t) \implies \frac{\partial p_i(t)}{\partial t} = K_i'(t)x(t) + K_i x'(t) \quad (3.19)$$

et

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t) + \sum_{i=1}^N B_i - S_j p_i(t) \text{ avec } s_j = B_j R_{jj}^{-1} B_j^T$$

D'après (3.18) et (3.19) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_i(t)}{\partial t} &= -Q_i x(t) - A^T p_i(t) = K_i' x(t) + K_i x'(t) \\
\implies -Q_i x(t) - A^T K_i(t) x(t) - K_i' x(t) - K_i A x(t) + \sum_{i=1}^N B_i - S_j k_i(t) x(t) &= 0 \\
\implies [-Q_i - A^T K_i(t)] x(t) [-K_i' - K_i A + \sum_{i=1}^N B_i - S_j k_i(t)] x(t) &= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial K_i(t)}{\partial t} = -A^T K_i(t) - K_i(t) A - Q_i + K_i(t) \sum_{j=1}^N S_j K_j(t) \quad (3.20)$$

avec $K_i(t_f) = K_i$

3.3.3 Equation de Ricatti

Définition 3.4. : On appelle le cas général d'une équation de Ricatti couplée rectangulaire une équation différentielle de la forme suivante :

$$W' = M_{21}(t) + M_{22}(t)W - WM_{11}(t) - WM_{12}(t)W \quad (3.21)$$

Où

$M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ sont continues par morceaux de dimension $N * N, N * M, M * N, M * M$

On lui associe la matrice :

$$M(t) = \begin{pmatrix} M_{11}(t) & M_{12}(t) \\ M_{21}(t) & M_{22}(t) \end{pmatrix}$$

Cette dernière équation représente N équations asymétriques couplées de Ricatti, qui peuvent se mettre sous la forme d'une équation différentielle de Ricatti rectangulaire :

$$\begin{pmatrix} K'_1 \\ \vdots \\ K'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^T & & o_n \\ & \cdot & \\ 0_n & & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} A - \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} [S_1 \dots S_N] \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{pmatrix} K_1(t_f) \\ \vdots \\ K_N(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1f} \\ \vdots \\ K_{Nf} \end{pmatrix}$$

La stratégie de nash en boucle ouverte est donc obtenue en appliquant les commandes :

$$u_i(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t) \emptyset(t, t_0) x_0$$

où $\emptyset(t, t_0)$ est la matrice de transition du système, elle vérifie :

$$\frac{\partial \emptyset(t, t_0)}{\partial t} = [A - \sum_{j=1}^N S_j K_j(t)] \emptyset(t, t_0); \emptyset(t, t) = I_n \quad (3.23)$$

où I_n est la matrice identité, Notons que $\emptyset(t, t_0)$ est introduite pour éviter l'apparition de l'état courant $x(t)$ dans l'expression (3.18). Ainsi, la structure d'information en boucle ouverte est respectée.

3.3.4 Conditions d'existence et d'unicité d'un équilibre de Nash

Il est possible sous une condition de convexité des critères, d'obtenir un résultat sur l'existence et l'unicité de l'équilibre.

Soit

$$\begin{cases} R_{ii} > 0_{ri}, & ; \\ Q_i \geq 0_n, \quad \forall i = 1, \dots, N & ; \\ K_{if} \geq 0_n, & . \end{cases}$$

la condition de convexité des critères. Si cette condition est remplie il y a existence et unicité de l'équilibre de Nash. Si en plus les équations différentielles de Ricatti admettent une solution sur $[t_0, t_f]$ alors le jeu admet un unique équilibre de Nash donné par :

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t) x^*(t)$$

où $x^*(t)$ est solution de l'équation $x' = [A - \sum_{j=1}^N S_j K_j(t)]x$ et ce quelle que soit la condition initiale $x(t_0)$. La condition de convexité n'est pourtant pas une condition nécessaire de l'existence et de l'unicité d'un équilibre de Nash.

3.4 Commande par la stratégie de stackelberg

La stratégie de stackelberg est une solution adaptée aux jeux où les joueurs n'ont pas accès aux mêmes informations. Nous nous limitons aux jeux à deux joueurs. Le joueur 2 appelé leader possède dans sa structure d'infor-

mation celle du joueur 1 appelé le suiveur. Le leader connaît la réaction rationnelle du suiveur et va l'utiliser pour minimiser son propre critère. Contrairement à la stratégie de Nash, les rôles des joueurs ne sont pas interchangeables. Le jeu de Stackelberg est donc plus compliqué que celui de Nash à cause de ce biais d'information. En fonction de la structure d'information dans le jeu, plusieurs stratégies de Stackelberg peuvent être définies menant à des commandes différentes. Cependant, nous nous limitons à des structure d'information en boucle ouverte.

Considérons le jeu différentiel (3.11) et (3.4) à 2 joueurs, où le joueur i ($i = 1, 2$) doit déterminer une commande $u_i(t)$ pour minimiser le critère donné par (3.2) et sous la contrainte dynamique (3.1)

3.4.1 Conditions nécessaires pour le suiveur

Le problème d'optimisation du suiveur est identique au problème d'optimisation d'un joueur de la stratégie de Nash. On associe au suiveur l'Hamiltonienne suivante :

$$H_1(t) = L_1(x(t), u_1(t), u_2(t), t) + p_1^T(t)f(x(t), u_1(t), u_2(t), t) \quad (3.24)$$

où $p_1(t)$ est le vecteur d'état de même taille que $x(t)$ associé à la contrainte dynamique (3.1). Comme la condition finale est libre. Aussi $u_1(t) = n_1(t)$ minimise $H_1(x, u_1(t), n_2(t), p_1(t), t)$ on peut reformuler cette minimisation au premier ordre et Les conditions nécessaires pour le suiveur en boucle ouverte

sont alors :

$$\frac{\partial p_1(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H_1(t)}{\partial x} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial H_1(t)}{\partial u_1} = 0 \quad (3.26)$$

$$p_1(t_f) = \frac{\partial K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f} \quad (3.27)$$

3.4.2 Conditions nécessaires pour le leader

Pour le leader, le problème d'optimisation est plus compliqué. Effectivement il doit tenir compte de la réaction rationnelle du suiveur. Le leader doit donc minimiser son critère, sous plusieurs contraintes : la contrainte dynamique du système et les contraintes de la réaction du suiveur. Pour le leader du jeu de Stackelberg en boucle ouverte, on lui associe l'Hamiltonienne suivante :

$$H_2(t) = L_2(x(t), u_1(t), u_2(t), t) + p_2^T(t) f(x(t), u_1(t), u_2(t), t) + \gamma^T(t) \left(-\frac{\partial H_1(t)}{\partial x}\right) + \beta^T(t) \left(\frac{\partial H_1(t)}{\partial u_1}\right) \quad (3.28)$$

Les vecteurs $p_2(t)$, $\gamma(t)$ et $\beta(t)$ sont les vecteurs d'état adjoint respectivement des contraintes dynamiques.

Comme $\left(\frac{\partial H_1(t)}{\partial x}\right) = 0$, alors $H_2(t)$ peut se simplifier en :

$$H_2(t) = L_2(x(t), u_1(t), u_2(t), t) + p_2^T(t) f(x(t), u_1(t), u_2(t), t) - \gamma^T(t) \left(-\frac{\partial H_1(t)}{\partial x}\right) \quad (3.29)$$

Le terme en $\beta(t)$ n'intervient donc plus ni dans la définition de cette Hamiltonienne, ni dans la commande.

Les équations nécessaires sont alors pour le leader du jeu de Stackelberg en boucle ouverte. $\frac{\partial p_2(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H_2(t)}{\partial x} = 0$

sous la condition terminale suivante :

$$p_2(t_f) = \frac{\partial K_{2f}(x_f, t_f)}{\partial x_f} - \frac{\partial^2 K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f^2} \gamma(t_f) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial H_2(t)}{\partial u_2} = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H_2(t)}{\partial p_1} \quad (3.32)$$

N'ayant pas de condition aux limites pour le vecteur d'état adjoint $\gamma(t)$, on peut prendre $\gamma(t_0) = 0$

d'après l'équation (3.31)

3.5 Stratégie de Stackelberg en boucle ouverte pour les jeux linéaires-quadratiques

Considérons jeu différentiel linéaire-quadratique (3.11) et (3.4). L'application des conditions nécessaires (3.25)-(3.27) pour une stratégie de Stackelberg en boucle ouverte mène pour le suiveur à : La commande optimale déjà démontré est :

$$u_1 = -R_{11}^{-1} B_1^T p_1(t)$$

$$\frac{\partial p_1(t)}{\partial t} = -Q_1 x(t) - A^T p_1(t)$$

avec $p_1(t) = K_1(t)x(t)$

et pour le leader :

La commande optimale est : $u_2 = -R_{22}^{-1}B_2^T p_2(t)$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2(t)}{\partial t} &= -\frac{\partial H_2(t)}{\partial x} \\ \frac{\partial p_2(t)}{\partial t} &= -Q_2 x(t) - A^T p_2(t) + \left[-\frac{\partial H_1(t)}{\partial x}\right] \gamma(t) \end{aligned}$$

et

$$p_2(t_f) = \frac{\partial K_{2f}(x_f, t_f)}{\partial x_f} - \frac{\partial^2 K_{1f}(x_f, t_f)}{\partial x_f^2} \gamma(t_f)$$

par conséquent on obtient le résultat suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial p_2(t)}{\partial t} = -Q_2 x(t) - A^T p_2(t) + Q_1 \gamma(t), & ; \\ p_2(t) = K_{2f} x_f - K_{1f} \gamma(t_f), & . \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = -S_{21} p_1(t) + S_1 p_2(t) + A \gamma(t) \quad (3.34)$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -S_1 & -S_2 & 0_n \\ -Q_1 & -A^T & 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & -A^T & Q_1 \\ 0_n & -S_{21} & S_1 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = M_s \begin{pmatrix} x(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$$

où $S_{ij} = B_j R_{jj}^{-1} R_{jj} R_{jj}^{-1} B_j^T$ et $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$ pour $i, j = 1, 2$. Et les conditions aux limites :

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ p_1(t_f) \\ p_2(t_f) \\ \gamma(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ K_{1f}x_f \\ K_{2f}x_f - K_{1f}\gamma(t_f) \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}$$

On peut noter que la matrice M_s est réelle et hamiltonienne. Comme pour la commande mono-critère et la commande issue de la stratégie de Nash, on suppose qu'il existe une relation linéaire entre les vecteurs d'état adjoints $p_1(t), p_2(t), \gamma(t)$ et l'état $x(t)$ à travers des matrices carrées $K_1(t), K_2(t)$ et $p(t)$ soit :

$$p_1(t) = K_1(t)x(t)$$

$$p_2(t) = K_2(t)x(t)$$

$$\gamma(t) = p(t)x(t)$$

En utilisant les conditions nécessaires (3.25)-(3.27) on peut montrer que ces matrices doivent vérifier les équations différentielles suivantes :

Soit :

$$p_i(t) = K_i(t)x(t) \implies \frac{\partial p_i(t)}{\partial t} = K'_i(t)x(t) + K_i(t)x'(t)$$

et

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t) + \sum_{i=1}^N B_i - S_j p_i(t) \text{ avec } s_j = B_j R_{jj}^{-1} B_j^T$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial p_1(t)}{\partial t} = -Q_1 x(t) - A^T p_1(t) = K'_1(t)x(t) + K_1(t)x'(t)$$

$$\begin{aligned} &\implies -Q_1 x(t) - A^T K_1(t) x(t) - K'_{1f} x_f - K_1(t) A x(t) + \sum_{i=1}^N B_i S_j k_i(t) x(t) = 0 \\ &\implies [-Q_1 - A^T K_1(t)] x(t) [-K'_{1f} - K_1(t) A + \sum_{i=1}^N B_i S_j k_i(t)] x(t) = 0 \end{aligned}$$

par conséquent on obtient :

$$\frac{\partial K_1(t)}{\partial t} = -A^T K_1(t) - K_1(t) A - Q_1 + K_1(t) \sum_{j=1}^2 S_j K_j(t) \quad (3.35)$$

De la même manière on obtient :

$$\frac{\partial K_2(t)}{\partial t} = -A^T K_2(t) - K_2(t) A - Q_2 + Q_1 \gamma(t) + K_2(t) \sum_{j=1}^2 S_j K_j(t) \quad (3.36)$$

on a :

$$\gamma(t) = p(t)x(t) \text{ donc } \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = \frac{\partial p(t)}{\partial t} x(t) + p(t)x'(t)$$

et d'après (3.34)

$$\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = -S_{21} p_1(t) + S_1 p_2(t) + A \gamma(t)$$

alors

$$-S_{21} p_1(t) + S_1 p_2(t) + A \gamma(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial t} x(t) + p(t)x'(t)$$

ou

$$-S_{21} K_1(t) x(t) + S_1 K_2(t) x(t) + A \gamma(t) - \frac{\partial p(t)}{\partial t} x(t) - p(t) [A x(t) + \sum_{i=1}^N B_i S_j K_i(t) x(t)] =$$

0

ou encore

$$[-S_{21} K_1(t) + S_1 K_2(t)] x(t) + A \gamma(t) - \frac{\partial p(t)}{\partial t} x(t) - p(t) [A x(t) + \sum_{i=1}^N B_i S_j k_i(t) x(t)] = 0$$

Alors on obtient :

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = Ap(t) - p(t)A - S_{21}K_2(t) + S_1K_2(t) + p(t) \sum_{j=1}^2 S_j K_j(t) \quad (3.37)$$

avec

$$S_{ij} = B_j R_{jj}^{-1} R_{jj} R_{jj}^{-1} B_j^T; S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T; i, j = 1, 2 \quad K_1(t_f) = K_{1f}; K_2(t_f) = K_{2f} - K_{1f}p(t_f); p(t_0) = 0$$

Comme pour la stratégie de Nash, il est possible de réécrire cette série d'équations sous la forme d'une équation de Riccati rectangulaire :

$$\begin{pmatrix} K_1' \\ K_2' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^T & 0_n & 0_n \\ 0_n & -A^T & Q_1 \\ -S_{21} & S_1 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ p \end{pmatrix} A - \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ p \end{pmatrix}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{pmatrix} K_1(t_f) \\ K_2(t_f) \\ p(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1f} \\ K_{2f} - K_{1f}p(t_f) \\ 0_n \end{pmatrix}$$

La stratégie de stackelberg en boucle ouverte est donc obtenue en appliquant les commandes :

$$u_i(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t) \emptyset(t, t_0) x_0; i = 1, 2$$

$\emptyset(t, t_0)$ est la matrice de transition du système elle vérifie :

$$\frac{\partial \emptyset(t, t_0)}{\partial t} = (A - S_1 K_1(t) - S_2 K_2(t)) \emptyset(t, t_0) \quad \emptyset(t, t) = I_n \quad (3.38)$$

où I_n est la matrice identité. Notons que $\emptyset(t, t_0)$ est introduite pour éviter l'apparition de l'état courant $x(t)$ dans l'expression de la dernière commande. Ainsi, la structure d'information en boucle ouverte est respectée.

3.5.1 Condition d'existence et d'unicité d'un équilibre de Stackelberg

Comme pour la stratégie de Nash, il est possible sous une condition de convexité des critères d'obtenir un résultat sur l'existence et l'unicité de l'équilibre de Stackelberg. Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} > 0_{ri}, \\ Q_1 \geq 0_n, \\ K_{1f} \geq 0_n. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{22} > 0_{ri}, \\ Q_2 \geq 0_n, \\ K_{2f} \geq 0_n. \end{array} \right. \quad R_{21} \geq 0_n$$

Conclusion

Après avoir défini les jeux différentiels et le cas linéaires-quadratiques nous avons abordé la résolution de ces jeux par la stratégie de Nash et Stackelberg dans une structure d'information à boucle ouverte. Nous avons appliqué le principe du maximum de Pontriaguine pour déterminer les conditions nécessaires et d'existences.

Conclusion générale

Au cours de notre formation nous avons eu l'occasion d'étudier la théorie du contrôle optimal et la théorie des jeux. La première a pour objectif d'analyser les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. L'étude de ces systèmes se base essentiellement sur le principe du maximum de Pontryagin.

Quand à la deuxième, à savoir la théorie des jeux, permet d'étudier les comportements et les prises de décisions des individus ou agents rationnels qui interagissent dans une situation donnée avec des objectifs différents et souvent conflictuels. Elle a pour but de trouver des situations qui satisfont tous les protagonistes et qu'on appelle équilibre. Le plus connu et le plus étudié est l'équilibre de Nash.

Ce mémoire nous a permis de découvrir un autre domaine qui est la théorie des jeux différentiels. On peut la considérer comme connexion des deux théories : la théorie du contrôle et la théorie des jeux. Ceci incite à aborder les problèmes considérés comme jeux différentiels en utilisant les concepts de ces dernières.

Nous nous sommes donc intéressés à la résolution des jeux différentiels avec l'équilibre de Nash ainsi que l'équilibre de Stackleberg en appliquant le principe du maximum de Pontryaguin pour avoir les conditions nécessaires de leur existence dans le cas général et dans le cas des jeux différentiels linéaires.

Pour approfondir l'étude de ces deux concepts et leur calcul, il faut faire appel aux équations différentielles couplées de Riccati que nous n'avons pas traité dans ce travail.

Bibliographie

- [1] H. Abou-Kandil, G. Freilinga, V. Ionesco, , and G. Jank, *Matrix ricatti equations in control and system theory*, Birkhauser (2003).
- [2] M. Aidene, I.L Vorobev, and B.Oukacha, *Algorithm for solving a linear optimal control problem with minmax*, vol. 45(10), 2005.
- [3] A. Haurie and P. Marcott, *On the relationship betwenn nash-cournot and wardrop equilibria*, vol. 15, Wiley online Library, 1985.
- [4] Rosenthal and W. Robert, *A class of games possessing pure-strategy nash equilibria*, International journal of game theory **2.1** (1973), 65–67.
- [5] E. Trélat, *Contrôle optimal, théorie et applications*, vol. 865, Vuibert Paris, France, 2008.