

République Algérienne Démocratique et Populaire.  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.  
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



**Mémoire de Master**

Spécialité : MATHÉMATIQUE

Option : Recherche Opérationnelle

Intitulé du projet :

**La résolution d'un problème de contrôle optimal avec une  
méthode indirecte**

Réalisé par :

**CHIKH Ibtissam**

**BELABBAS Sara**

Les membres du jury sont :

Mr. AIDENE Mouhamed; Professeur; U.M.M.T.O; Président

Mme. ZIDELMAL Nacera; Maître assistante A; U.M.M.T.O; Rapportrice

Mme. REZKI Fariza; Maître assistante A; U.M.M.T.O; Examinatrice

Année universitaire : 2020/2021

# Remerciement

En tout premier lieu. Nos remerciements vont avant tout au Dieu qui nous a donné la santé et la patience pour réaliser ce modeste travail.

Nous remercions vivement notre encadrante *M<sup>me</sup>* N.ZIDELMAL pour ses conseils constructifs et son aide tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour avoir accepté de juger notre travail.

Enfin, nous tenons à exprimer tout au fond de nos cœurs les reconnaissances à nos familles qui nous ont offert toujours un appui sûr par leurs soutiens et leurs encouragements, nous remercions aussi tout ceux qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

## *Dédicaces*

Je dédie ce modeste travail à :

♡ La mémoire de mon père, c'est grâce à lui que je suis arrivée là, je n'oublierai jamais ses conseils et ses encouragements, que dieu l'accueille dans son vaste paradis.

♡ Ma chère mère que j'aime énormément, pour sa présence, son encouragement et soutien que dieu la béni inchaa allah.

♡ Mes chères frères **Farid**, **Kamel** et **Housseem**.

♡ Mes chère amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables.

♡ Tous les gens qui m'aime.

♡ Ma chère binôme **Sara** , avec laquelle j'ai le plaisir de partager ce travail.

♡ Toute la promotion **RO**.

*Ibtissam*

## *Dédicaces*

Je dédie ce travail à :

♡ Mes chers parents, pour tous leur sacrifices, leur soutien, leur amour, leur confiance en moi et la bonne éducation qui m'ont donnés. C'est grâce à eux que je suis arrivée là. Merci mon cher papa, ma chère maman d'être toujours à mes cotés à tous moment. Que dieu vous protège et vous garde pour moi.

♡ Toute ma famille.

♡ Une personne spécifique, et très spéciale pour moi.

♡ Mes chères amies avec qui j'ai partagé des moments agréables et inoubliables.

♡ Tous les gens qui m'aime.

♡ Ma chère binôme ***Ibtissam***, avec laquelle j'ai le plaisir de partager ce travail.

♡ Toute la promotion **RO**.

*Sara*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités sur le contrôle optimal</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Définitions . . . . .	9
1.2.1 Contrôle . . . . .	9
1.2.2 Système de contrôle optimal . . . . .	9
1.2.3 Contrôlabilité . . . . .	10
1.2.4 Contrôle optimal . . . . .	10
1.2.5 Contrôle admissible . . . . .	10
1.2.6 Classe des contrôles admissibles . . . . .	10
1.3 Types de problèmes de contrôle optimal . . . . .	11
1.3.1 Problème de Bolza (Mayer-Lagrange) . . . . .	11
1.3.2 Problème de Lagrange . . . . .	12
1.3.3 Problème de Mayer . . . . .	13
1.4 Contrôlabilité . . . . .	14
1.4.1 Introduction . . . . .	14
1.4.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires . . . . .	14
1.4.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires . . . . .	17
<b>2 Méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimal</b>	<b>20</b>
2.1 Introduction . . . . .	20
2.2 Méthodes indirectes . . . . .	20
2.2.1 Principe du maximum faible . . . . .	21
2.2.2 Principe du maximum de Pontryagin . . . . .	26
2.2.3 Méthode de tir simple . . . . .	32
2.2.4 Méthode de tir multiple . . . . .	33
2.2.5 Rappel sur la méthode de Newton . . . . .	34

2.3	Méthodes directes . . . . .	35
2.3.1	Discrétisation totale : tir direct . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Exemple de résolution d'un problème de Lagrange avec le principe du maximum de Pontryagin</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.2	Exemple numérique . . . . .	37
3.2.1	Résolution théorique . . . . .	38
3.2.2	Implémentation numérique sous MatLab . . . . .	40
3.3	Problème du COVID-19 . . . . .	43
3.3.1	Élaboration du modèle . . . . .	43
3.3.2	Description du modèle . . . . .	43
3.3.3	Modélisation du COVID-19 . . . . .	44
3.3.4	Problème de contrôle optimal du COVID-19 . . . . .	45
3.3.5	Application du principe du maximum de Pontryagin au problème du COVID-19 . . . . .	46
3.3.6	Conclusion . . . . .	48
	<b>Conclusion générale</b>	<b>49</b>
	Bibliographie . . . . .	50

# Introduction générale

La théorie du contrôle optimal a une grande importance. En effet, elle a un champs d'application extrêmement vaste dans diverse domaines à savoir : mécanique, électricité, électronique, chimie, économie, biologie, médecine,...etc.

Cette théorie a pour objet l'étude du comportement des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but étant alors d'amener le système d'un état initial à un état final en respectant certains critères. Ces systèmes sont modélisés par des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux dérivées partielles,...etc.

D'un point de vue formel, un problème de contrôle optimal est un problème d'optimisation (minimisation ou maximisation) d'une fonctionnelle. La détermination d'une commande optimale consiste à trouver parmi les commandes admissibles celles qui vérifient les conditions initiales, finales et les contraintes. Ainsi la théorie du contrôle optimal est une extension du calcul des variations.

La théorie du contrôle optimal est apparue après la seconde guerre mondiale. Un point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin formulé par le mathématicien soviétique Lev Pontryagin en 1956 ; qui nous donne une condition nécessaire d'optimalité. Dans le but de résoudre un problème de contrôle optimal, nous allons utilisé dans le cadre de ce mémoire ce principe.

Notre travail est organisé comme suit :

Premier chapitre : Généralités sur le contrôle optimal.

Deuxième chapitre : Méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimal.

Troisième chapitre : Exemple de résolution d'un problème de Lagrange avec une méthode indirecte.

Dans le premier chapitre, des notions de bases sur la théorie du contrôle optimal sont introduites, et des différents types de problèmes de contrôle optimal sont donnés avec des illustrations pour chacun. Comme nous traitons la notion de contrôlabilité pour des systèmes de contrôle linéaires (autonomes et non autonomes) et non linéaires.

---

Le deuxième chapitre est consacré aux méthodes de résolution en contrôle optimal : méthodes directes et indirectes. C'est dans ce chapitre que nous introduisons le principe du maximum de Pontryagin, où on va entamer le cas sans contraintes sur le contrôle : principe du maximum faible et le cas avec contraintes sur le contrôle : principe du maximum de Pontryagin.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution d'un problème de contrôle optimal en utilisant une méthode indirecte qui est le principe du maximum de Pontryagin. Après avoir résolu le problème théoriquement, nous nous passerons à la résolution numérique à l'aide du problème aux deux bouts implémenté sous le langage de programmation MatLab.

Le principe du maximum de Pontryagin constitue un outil de résolution très important utilisé pour résoudre différents problèmes dans divers domaines. Le dernier en date est un exemple d'utilisation de ce principe pour résoudre le problème de la pandémie du COVID-19 [9].

# Chapitre 1

## Généralités sur le contrôle optimal

### 1.1 Introduction

La théorie de la commande optimale est un prolongement du calcul des variations ; qui permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance, éventuellement sous des contraintes sur la commande ou bien sur l'état du système.

Maintenant, nous introduisons des notions de base de cette théorie.

### 1.2 Définitions

#### 1.2.1 Contrôle

Un contrôle est un paramètre défini en fonction du temps ; habituellement soumis à des contraintes. Il est noté  $u(t)$ .

#### 1.2.2 Système de contrôle optimal

Un système de contrôle est un système dynamique ; représenté par des équations différentielles du premier ordre dépendant d'un contrôle.

Ce système s'écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, T]$$

où :

—  $t$  désigne le temps défini dans l'intervalle  $[t_0, T]$ .

## 1.2. DÉFINITIONS

---

- $f$  est la dynamique telle que  $f : R \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$  est une fonction de classe  $C^1$ .
- $x$  est appelé variable d'état.
- $u$  est appelé variable de contrôle.

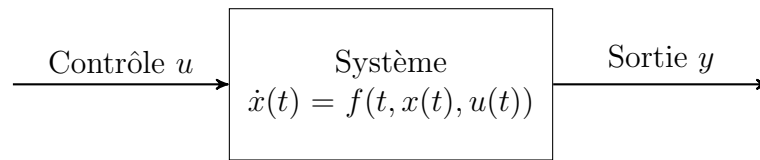


FIGURE 1.1 – Schéma d'un système de contrôle

### 1.2.3 Contrôlabilité

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut aller d'un état initial bien déterminé vers un état final prédéfini en un temps fini.

### 1.2.4 Contrôle optimal

Un contrôle optimal est un système contrôlable avec optimisation de certains critères.

### 1.2.5 Contrôle admissible

On dit qu'un contrôle  $u$  est admissible si  $u(t) \in U$ , où  $U$  un ensemble convexe fermé de  $R^m$  et  $t \in [t_0, T]$ .

### 1.2.6 Classe des contrôles admissibles

#### Contrôle bornée

Dans les problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les  $u_j(t)$  par des constantes, et lorsque  $U$  est bornée on peut se ramener à des contrôles entre  $-1$  et  $1$ .

En effet ;

On considère :  $a_j \leq u_j \leq b_j$

En posant :

$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$$

Tel que :  $v_j$  est intégrable.

Donc

$$\begin{aligned} a_j &\leq \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j \leq b_j \\ a_j - \frac{1}{2}(a_j + b_j) &\leq \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j \leq b_j - \frac{1}{2}(a_j + b_j) \\ \frac{1}{2}a_j - \frac{1}{2}b_j &\leq \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j \leq \frac{1}{2}b_j - \frac{1}{2}a_j \\ \frac{\frac{1}{2}(b_j - a_j)}{\frac{1}{2}(a_j - b_j)} &\leq v_j \leq \frac{\frac{1}{2}(a_j - b_j)}{\frac{1}{2}(a_j - b_j)} \quad (\text{car } a_j \leq b_j) \end{aligned}$$

On trouve :  $-1 \leq v_j \leq 1$

### Contrôle Bang Bang

On suppose que  $U$  est un polyèdre (cube)  $[-1, 1]^m$  dans  $R^m$ . Un contrôle  $u \in U$  est un contrôle Bang-Bang si on a  $|u_j(t)| = 1$ ,  $j = \overline{1, m}$  pour  $t$  quelconque.

#### Remarque 1.1

Si un contrôle est admissible et la solution  $x$  vérifiée les conditions terminales on dit que  $u$  est un contrôle réalisable.

## 1.3 Types de problèmes de contrôle optimal

On distingue trois types de problèmes de contrôle optimal :

### 1.3.1 Problème de Bolza (Mayer-Lagrange)

Ce problème est donnée sous la forme suivante :

$$J(u(t)) = C(x(T)) + \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t))dt \longrightarrow \text{opt}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0, \\ x(T) = x_1, \\ u \in U, \quad t \in [t_0, T] \end{cases}$$

où :

—  $J(u(t))$  est le critère à optimiser.

- $x(t_0) = x_0$  est la position initiale du système dynamique .
- $x(T) = x_1$  est la position finale du système.
- $u(t)$  est la commande du problème de contrôle optimal .
- $U$  est l'ensemble des applications mesurables localement bornées à valeurs dans l'ensemble non vide  $\Omega \subset R^m$ .
- $f_0 : R \times R^m \times R^n \longrightarrow R^n$  est une fonction de classe  $C^1$  dépend de  $x$  (variables d'état) et de  $u$  (variable de contrôle).
- $C : R \times R^n \longrightarrow R$  est une fonction continue dépend de  $T$  et  $x(T)$  .

**Remarque 1.2**

La fonction  $J(u(t))$  est appelée coût ou critère de qualité ou bien fonctionnelle.

**Exemple 1.1**

$$J(u(t)) = -x(1) + \int_0^1 u(t)^2 dt \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

**1.3.2 Problème de Lagrange**

C'est un problème où le coût terminal est nul, c-à-d le critère à optimiser est égal à :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt \longrightarrow opt$$

avec :

- $f_0 : R \times R^m \times R^n \longrightarrow R^n$  est une fonction de classe  $C^1$  dépend de  $x$  (variables d'état) et de  $u$  (variable de contrôle).

**Exemple 1.2**

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt \quad \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 + u(t), \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 2 \\ u \in R, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

**1.3.3 Problème de Mayer**

Ce problème dépend uniquement de la valeur terminale de l'état de contrôle du système c-à-d :

$$f_0 = 0$$

(Où ;  $f_0 : R \times R^m \times R^n \longrightarrow R^n$  est une fonction de classe  $C^1$  dépend de  $x$  (variables d'état) et de  $u$  (variable de contrôle)).

Donc, le critère à optimiser est :  $J(u(t)) = C(x(T))$

avec :  $C : R \times R^n \longrightarrow R$  est une fonction continue dépend de  $T$  et  $x(T)$  .

**Exemple 1.3**

$$J(u) = -x_1(T) + T \quad \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(T) = 0 \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

## 1.4 Contrôlabilité

### 1.4.1 Introduction

La notion de la contrôlabilité est importante pour résoudre le problème de contrôle optimal. Pour les systèmes linéaires, on a une caractérisation très simple (critère de Kalman), contrairement aux systèmes non linéaires ; l'étude de cette propriété présente une tâche très difficile.

### 1.4.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

#### Définition 1.1

Le système de contrôle linéaire est décrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \\ t \in I \end{cases} \quad (1.1)$$

Où :

- $I$  un intervalle de  $R$ .
- $A$  est une matrice réelles de dimension  $n$  ( $A \in M_n(R)$ ).
- $B$  est une matrice de  $n$  lignes et  $m$  colonnes ( $B \in M_{n,m}(R)$ ).
- $r \in R^n$ .
- $u \in U$  tel que  $U$  ensemble des applications mesurables localement bornées à valeurs dans l'ensemble non vide  $\Omega \subset R^m$ .

### Ensemble accessible

#### Définition 1.2

L'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $T > 0$  est défini par :

$$A_{cc}(x_0, T) = \{x_u(T) / u \in U\}$$

Où :  $x_u(t)$  est la solution du système (1.1) associée au contrôle  $u$ .

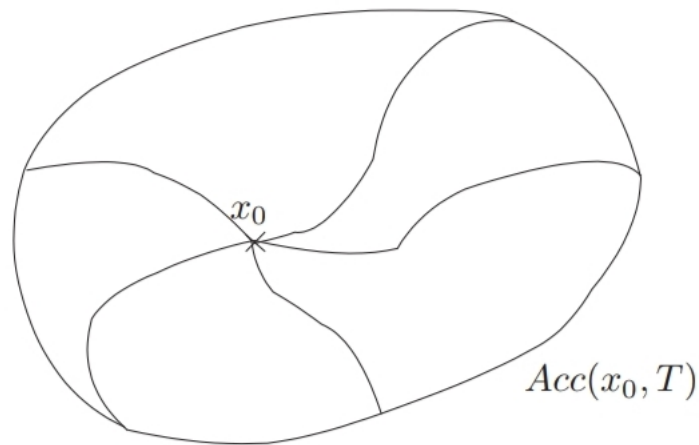


FIGURE 1.2 – Ensemble accessible

**Théorème 1.** [2]

Considérons le système de contrôle linéaire dans  $R^n$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

où,  $\Omega \subset R^m$  est compact.

Soient  $T > 0$  et  $x_0 \in R^n$ . Alors pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $A_{cc}(x_0, t)$  est compact, convexe, et varie continûment avec  $t$  sur  $[0, T]$ .

**Remarque 1.3**

Dans ce type de systèmes (systèmes linéaires), on a des systèmes linéaires autonomes et non autonomes.

**Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes**

On dit que le système (1.1) est autonome (stationnaire) lorsque les matrices A, B ne dépendent pas du temps  $t$ .

On distingue deux cas :

**Cas sans contraintes sur le contrôle****Théorème 2.** [2]

On suppose que  $\Omega = R^m$  (pas de contrainte sur le contrôle).

Le système  $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$  est contrôlable en temps  $T$  (quelconque) si et seulement si la matrice

$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  est de rang  $n$ .

**Exemple 1.4**

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + 2u, \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$n = 2$$

La matrice de contrôlabilité est :

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} C = 2 = n$$

Donc le système est contrôlable .

**Cas avec contraintes sur le contrôle****Théorème 3.** [2]

Soit  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}$  un intervalle contenant 0 dans son intérieur. Considérons le système  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , avec  $u(t) \in \Omega$ . Alors tout point de  $\mathbb{R}^n$  peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire  $(A, B)$  vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de  $A$  est inférieure ou égale à 0.

**Contrôlabilité des systèmes linéaires non autonomes**

On dit que le système (1.1) est non autonome (instationnaire) lorsque les matrices  $A, B$  dépendent de temps.

**Théorème 4.** [2]

Le système  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$  est contrôlable en temps  $T$  si et seulement si la matrice

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1} B(t) B(t)' M(t)^{(-1)'} dt$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

**Remarques**

- ◇ Si un système linéaire non autonome est contrôlable en temps  $T$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en temps  $T$  depuis tout point.
- ◇ On a  $C(T) = c(T)'$  et  $x' C(T) x \geq 0 \quad \forall x \in R^n$ , c-à-d  $C(T)$  est une matrice carrée réelle symétrique positive.

### 1.4.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

**Définition 1.3**

Le système de contrôle non linéaire est décrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

avec :

- $f$  non linéaire.
- $x(t) \in R^n$  est l'état.
- $u \in R^m$  est le contrôle.
- $f : R^n \times R^m \rightarrow R^n$  est une application de classe  $C^1$ .

### Ensemble accessible

**Théorème 5.** [2]

Considérons le système de contrôle

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0,$$

où, la fonction  $f$  est  $C^1$  sur  $R^{1+n+m}$ , et les contrôles  $u$  appartiennent à l'ensemble  $U$  des fonctions mesurables à valeurs dans un compact  $\Omega \subset R^m$ . On suppose que

## 1.4. CONTRÔLABILITÉ

---

— il existe un réel positif  $b$  tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par  $b$  sur  $[0, T]$ , i.e

$$\exists b > 0 \quad | \quad \forall u \in U \quad \forall t \in [0, T] \quad \|x_u(t)\| \leq b,$$

— pour tout  $(t, x)$ , l'ensemble des vecteurs vitesses

$$V(t, x) = \{f(t, x, u) | u \in \Omega\}$$

est convexe.

Alors l'ensemble  $A_{cc}(x_0, t)$  est compact et varie continûment en  $t$  sur  $[0, T]$ .

### Remarque 1.5

La définition de l'ensemble accessible dans ce cas (non linéaire) est identique à celle donnée dans le cas des systèmes linéaires.

Pour ces systèmes, le problème de contrôlabilité est beaucoup plus difficile, mais il existe un théorème qui permet de déduire la contrôlabilité locale à partir de l'étude du système linéarisé.

### Système linéarisé [5]

Soit  $(x_e, u_e)$  un point d'équilibre du système (1.2). Le système de contrôle linéarisé au point  $(x_e, u_e)$  du système  $\dot{x} = f(t, x, u)$  est le système de contrôle linéaire :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u(t), \quad t \in I \quad (1.3)$$

### Contrôlabilité locale [5]

Soit  $(x_e, u_e) \in R^n \times R^m$  un point d'équilibre du système de contrôle (1.2). On dit alors que ce système est localement contrôlable au point d'équilibre  $(x_e, u_e)$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tous  $x_0, x_1 \in B_\eta(x_e) = \{x \in R^n; |x - x_e| < \eta\}$ , il existe une application mesurable  $u : [0, \varepsilon] \rightarrow R^m$  telle que

$$\begin{aligned} |u(t) - u_e(t)| &\leq \varepsilon \\ (\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \Rightarrow x(\varepsilon) = x_1) \end{aligned}$$

**Théorème 6.** [5]

On considère le système (1.2) avec  $f(x_e, u_e) = 0$ . On note

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) \quad \text{et} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$$

On suppose que

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

Alors le système est localement contrôlable en  $(x_e, u_e)$ .

# Chapitre 2

## Méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimal

### 2.1 Introduction

Généralement dans les problèmes de contrôle optimal, la détermination d'une solution analytique est difficile. En effet dans la plupart des cas étudiés, la modélisation mathématique d'un phénomène pratique conduit à un modèle non linéaire, non convexe et parfois non lisse, et dans ces modèles la notion de contrôlabilité n'est pas évidente à vérifier. Par conséquent, cela nécessite l'utilisation des méthodes numériques dont on distingue deux types : méthodes directes et indirectes.

### 2.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement par une méthode de tir ("Shooting method"), un problème aux valeurs limites ; obtenu par application du principe du maximum.

Le principe du maximum, formulé en 1956 par le mathématicien soviétique Lev Semonovich Pontryagin, est un point important dans la théorie du contrôle optimal. Il est utilisé pour ramener un système dynamique d'un état initial à un état final, en présence de contraintes sur l'état ou bien le contrôle. Ce principe a été développé en 1962 ; par Pontryagin et ses collaborateurs, d'où le principe du maximum de Pontryagin qui nous donne une condition nécessaire d'optimalité (non suffisante) et permet de calculer les trajectoires optimales.

On donne d'abord une version simple du principe du maximum ; lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle (principe du maximum faible), ensuite on introduit la version générale, qui prend en compte les contraintes sur le contrôle (principe du maximum de Pontryagin).

### 2.2.1 Principe du maximum faible

#### Définition 2.1

Le contrôle  $u$  est extrémal sur  $[t_0, t_f]$ , si la trajectoire du système  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$  du problème de Bolza associée au contrôle  $u$  vérifie :

$$x(t) \in \partial A_{cc}(x_0, t), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Où :  $\partial A_{cc}(x_0, t)$  est la frontière de  $A_{cc}(x_0, t)$ .

#### Définition 2.2

Un contrôle  $u^0(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  est dit optimal si  $u^0(t)$  est extrémal et  $J(u^0(t)) \leq J(u(t))$  pour tout contrôle extrémal  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

#### Principe du maximum faible : cas de Lagrange

Considérons le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \\ x(t_f) = x_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

Où : Les contrôles  $u \in U$  sont définis sur  $[0, t_f]$ .

Ainsi, Le problème est de chercher les conditions nécessaires d'optimalité du système de contrôle en minimisant le coût :

$$J(u(t)) = \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.2)$$

qui permet de joindre  $x_0$  l'état initial à l'état finale  $x_1$ .

**Théorème 7.** [2]

Si le contrôle  $u$  associé au système de contrôle (2.1) est optimal pour le coût (2.2), alors il existe une application  $p(\cdot)$  absolument continue sur  $[0, t_f]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , appelée vecteur adjoint, et un réel  $p^0 \leq 0$ , tels que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout  $t \in [0, t_f]$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) &= 0,\end{aligned}$$

Où ;  $H$  est le Hamiltonien associé au système (2.1) et au coût (2.2)

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f_0(t, x, u).$$

**Exemple 2.1**

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 + u(t), \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 2 \\ u \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

— Le Hamiltonien :

$$\begin{aligned}H(t, x, p, p^0, u) &= p^0 f_0 + p f \\ &= -\frac{1}{2} u^2 + p(1 + u) \\ &= -\frac{1}{2} u^2 + p + p \cdot u\end{aligned}$$

— Équation adjointe :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \implies p(t) = c$$

— Condition du maximum :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -u + p = 0 \implies u = p = c$$

Donc  $u(t) \equiv c$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = 1 + u(t) = 1 + c &\implies x(t) = (1 + c)t + c_1 \\ &\implies x(t) = (1 + c)t, \quad \text{car } x(0) = 0 \\ &\implies c = 1, \quad \text{car } x(1) = 2 \end{aligned}$$

Donc  $u(t) \equiv 1, t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \implies J(u(t)) &= \frac{1}{2} \int_0^1 dt \\ &= \frac{1}{2} t \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Principe du maximum faible : cas de Bolza

Dans ce cas on considère le coût :

$$J(u(t)) = C(x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.3)$$

Où ; le temps final  $t_f$  n'est pas fixé. Soit le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

Où ; les contrôles  $u(\cdot)$  sont dans l'ensemble  $U$  des contrôles admissibles sur  $[0, t_e(u)[$ , Soit  $M_1$  une variété de  $R^n$  telle que  $x(t_f) \in M_1$ .

Le problème de contrôle optimal consiste à déterminer d'une part une trajectoire solution du système (2.4), d'autre part  $x(\cdot)$  doit minimiser sur  $[0, t_f]$  le coût donné par l'équation (2.3).

Supposons que la variété  $M_1$  est donnée par :

$$M_1 = \{x \in R^n | F(x) = 0\},$$

Où ;  $F$  est une fonction de classe  $C^1$  de  $R^n$  dans  $R^p$  .

En écrivant  $F = (F_1, F_2, \dots, F_p)$  où les fonctions  $F_i$  sont à valeurs réelles, il vient

$$M_1 = \{x \in R^n | F_1(x) = \dots = F_p(x)\},$$

L'espace tangent à  $M_1$  en un point  $x \in M_1$  est :

$$T_x M_1 = \{v \in R^n | \nabla F_i(x) \cdot v = 0, i = 1, \dots, p\}.$$

**Théorème 8.** [2]

*Si le contrôle  $u$  est optimal sur  $[0, t_f]$  alors il existe une application  $p : [0, t_f] \rightarrow R^n \setminus \{0\}$  absolument continue, et un réel  $p^0 \leq 0$ , tels que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial, et*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{2.5}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0, \tag{2.7}$$

*Si de plus la cible  $M_1$  est une sous-variété de  $R^n$  alors il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tels que l'on ait au point final  $(t_f, x_1)$*

$$p(t_f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i + p^0 \frac{\partial C}{\partial x}.$$

*De plus si le temps final n'est pas fixé dans le problème de contrôle optimal, et si  $u$  est continu au temps  $t_f$ , alors on a au temps final  $t_f$*

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f)) = -p^0 \frac{\partial C}{\partial t}(t_f, x(t_f)).$$

**Exemple 2.2**

$$J(u(t)) = -x(1) + \int_0^1 u(t)^2 dt \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0, \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

Posons :

$x = x_1$  : la position

$\dot{x} = x_2$  : la vitesse

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0 \end{cases}$$

— Le Hamiltonien :

$$H(t, x, p, p^0, u) = -u^2 + p_1 x_2 + p_2 u$$

— Équations adjointes :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \implies p_1(t) = c_1, \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t) = -c_1 \implies p_2(t) = -c_1 t + c_2, \end{cases}$$

— Conditions de transversalité :

$$\begin{cases} p_1(1) = p^0 \frac{\partial(-x_1(1))}{\partial x_1} = 1 \implies c_1 = 1, \\ p_2(1) = p^0 \frac{\partial(-x_1(1))}{\partial x_2} = 0 = -1 + c_2 \implies c_2 = 1, \end{cases}$$

D'où ;

$$\begin{cases} p_1(t) = 1, \\ p_2(t) = -t + 1, \end{cases}$$

— Condition du maximum :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + p_2 = -2u - t + 1 = 0 \implies u = \frac{1}{2}(-t + 1)$$

Donc :

$$u(t) = \frac{1}{2}(-t + 1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = u(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \implies x_2(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}, & \text{car } x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \implies x_1(t) = -\frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{4}, & \text{car } x_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$x_1(1) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \implies J(u(t)) &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \int_0^1 (t^2 - 2t + 1) dt \\ &= -\frac{T^3}{6} + \frac{1}{4} \left( \frac{t^3}{3} - t^2 + t \Big|_0^1 \right) \\ &= -\frac{T^3}{6} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} - 1 + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Principe du maximum de Pontryagin

La version forte présentée ci-dessous du principe du maximum de Pontryagin (PMP) est très générale, puisqu'elle est applicable pour des systèmes différentiels généraux et elle prend en compte des contraintes sur le contrôle.

#### 1) Énoncé général

Considérons le système de contrôle suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{2.8}$$

où,  $f : R \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$  est de classe  $C^1$ . Les contrôles  $u(\cdot)$  sont des fonctions mesurables bornées à valeurs dans un domaine quelconque  $U \subset R^m$ .

Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous-variétés différentielles de  $R^n$ . Enfin, on définit le coût d'un contrôle  $u$  sur  $[t_0, t_f]$  par :

$$J(u(t)) = C(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.9)$$

Avec  $f_0 : R \times R^n \times R^m \rightarrow R$  et  $C : R \times R^n \rightarrow R$  sont de classe  $C^1$  et  $x(\cdot)$  la trajectoire solution de (2.8) associée au contrôle  $u(\cdot)$ .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_1$  et minimisant le coût (2.9). Le temps final peut être fixe ou non.

**Théorème 9. (Principe du Maximum de Pontryagin) [2]**

Si le contrôle  $u \in U$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[t_0, t_f]$ , alors il existe une application  $p(\cdot) : [t_0, t_f] \mapsto R^n$  absolument continue appelé vecteur adjoint et un réel  $p^0 \leq 0$ , tel que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial, et tel que pour presque tout  $t \in [t_0, t_f]$ ,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \end{cases} \quad (2.10)$$

et on a la condition de maximisation presque partout sur  $[t_0, t_f]$  :

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in V} H(t, x(t), p(t), p^0, v) \quad (2.11)$$

si de plus le temps final pour joindre la cible  $M_1$  n'est pas fixé, on a la condition au temps final  $t_f$  :

$$\max_{v \in V} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial C}{\partial t}(t_f, x(t_f)) \quad (2.12)$$

Si de plus  $M_0$  et  $M_1$  (ou juste l'une des deux ensembles) sont des variétés de  $R^n$  ayant des espaces tangents en  $x(t_0) \in M_0$  et  $x(t_f) \in M_1$ , alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux).

$$p(t_0) \perp T_{x(t_0)}M_0, \quad (2.13)$$

$$p(t_f) - p^0 \frac{\partial C}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \perp T_{x(t_f)}M_1, \quad (2.14)$$

**Remarque 2.1**

Le couple  $(p^0, p(t))$  est appelé vecteur fonction.

Avec :

$p^0$  un réel tel que  $p^0 \leq 0$ .

$p(t) \in R^n$  est le vecteur adjoint.

**Remarque 2.2**

L'équation  $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t))$  est appelée équation adjointe.

**Définition 2.3**

Les conditions (2.13) et (2.14) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint, et la condition (2.12) est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien.

Dans le théorème précédent ces conditions sont écrites de manière générale.

## 2) Conditions de transversalité

### a) Conditions de transversalité sur le le vecteur adjoint

Dans cette partie, le temps final peut être fixé ou non. Réécrivons les conditions (2.13) et (2.14) dans les deux cas : problème de Lagrange et problème de Mayer.

#### Problème de Lagrange

Dans ce cas, les condition de transversalité (2.13) et (2.14) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$p(t_0) \perp T_{x(t_0)}M_0 \quad , \quad p(t_f) \perp T_{x(t_f)}M_1 \quad (2.15)$$

**Remarque 2.3**

◇ Si  $M_0 = \{x_0\}$ , la condition (2.13) devient vide.

◇ Si  $M_0 = R^n$  c-à-d le point initial n'est pas fixé , on obtient  $p(t_0) = 0$ .

◇ D'autre part, si  $M_1 = R^n$ , on aura  $p(t_f) = 0$ . Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

### Problème de Mayer

Dans ce cas, les conditions de transversalité (2.13) et (2.14) ne se simplifient pas à priori.

### Cas particulier

Si  $M_1 = R^n$  c-à-d le point final  $x(t_f)$  est libre, la condition (2.14) devient :

$$p(t_f) = p^0 \frac{\partial C}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \quad (2.16)$$

et alors forcément  $p^0 \neq 0$ . (on prend alors  $p^0 = -1$ )

### b) Condition de transversalité sur le Hamiltonien

Dans cette partie, le temps final n'est pas fixé. (la condition n'est pas valable que si  $t_f$  n'est pas fixé).

Lorsque la fonction  $C$  ne dépend pas du temps  $t$ , la condition de transversalité (2.12) sur le Hamiltonien devient :

$$\max_{v \in V} H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, v) = 0 \quad (2.17)$$

c-à-d :

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f)) = 0 \quad (2.18)$$

Autrement dit, le Hamiltonien s'annule au temps final.

**Exemple 2.3**

$$J(u) = -x_1(T) + T \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(T) = 0 \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

— Le Hamiltonien :

$$H(t, x, p, u) = p_1 x_2 + p_2 u$$

— Équations adjointes :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 & \implies p_1(t) = c_1, \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t) & \implies p_2(t) = -c_1 t + c_2, \end{cases}$$

— Conditions de transversalité :

$$\begin{cases} p_1(T) = p^0 \frac{\partial(-x_1(T))}{\partial x_1} = 1 \\ p_2(T) = p^0 \frac{\partial(-x_1(T))}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

d'où ;

$$\begin{cases} p_1(t) = 1, \\ p_2(t) = -t + c_2, \end{cases}$$

— On maximise le Hamiltonien :

$$\max_{|u(t)| \leq 1} H \iff \max_{|u(t)| \leq 1} p_2 u = \max_{|u(t)| \leq 1} (u(-t + c_2)),$$

$$\implies u(t) = \text{signe de } (-t + c_2),$$

$$\implies u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_c] \\ -1, & t \in [t_c, T] \end{cases}$$

◇  $u \equiv 1$ , pour  $t \in [0, t_c]$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{t^2}{2}, \\ x_2(t) = t, \end{cases}$$

◇  $u \equiv -1$ , pour  $t \in [t_c, T]$

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + Tt + c_1, \\ x_2(t) = T - t, \end{cases}$$

On a

$$t_c = T - t_c \implies T = 2t_c$$

et

$$x_1(t_c) = x_1(t_c) \iff \frac{t_c^2}{2} = -\frac{t_c^2}{2} + Tt_c + c_1 \implies c_1 = -t_c^2$$

d'où ;

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + Tt - \frac{T^2}{4}, & t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \\ x_2(t) = T - t, & t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases}$$

$$x_1(T) = -\frac{T^2}{2} + T^2 - \frac{T^2}{4} = \frac{T^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \implies J(u) &= -\frac{T^2}{4} + T \\ &= T\left(1 - \frac{T}{4}\right) \end{aligned}$$

$$J'(u) = 1 - \frac{T}{4} - \frac{T}{4} = 1 - \frac{T}{2} = 0 \implies T = 2$$

$$J(u) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$x_1(T) = -2 + 4 - 1 = 1$$

$$x_1(T) = 1$$

### 2.2.3 Méthode de tir simple

La méthode du tir simple fait partie des méthodes indirectes. Elle est basée sur le principe du maximum de Pontryagin. Le tir simple consiste à trouver un zéro de la fonction de tir associée au problème original. Dans ce cas, il s'agit d'une méthode rapide et de haute précision qui ne requiert pas d'hypothèses sur la structure du contrôle.

Le principe de cette méthodes est comme suit : Considérons le problème de Bolza suivant :

$$J(u(t)) = C(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t))dt \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \\ u \in U, \quad t \in [t_0, t_f] \end{cases}$$

Supposons que  $t_f$  est fixé. Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum du Hamiltonien d'exprimer le contrôle optimal en fonction de  $x(t)$  et de  $p(t)$ , alors le système différentiel d'état et d'état adjoint peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{y}(t) = F(t, y(t)) \text{ où } y(t) = (x(t), p(t))$$

Les conditions initiales, finales et les condition de transversalité se mettent sous la forme :

$$R(y(0), y(t_f)) = 0$$

On obtient alors, le problème au deux bouts (valeurs limites) :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \\ R(y(0), y(t_f)) = 0, \end{cases}$$

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

On note  $y(t, y^0)$  la solution du problème de Cauchy dépendant de  $y^0$ , et on pose :

$$S(y^0) = R(y^0, y(t_f, y^0)) \text{ appelé fonction de tir.}$$

La résolution du problème aux deux bouts est alors équivalent à la recherche d'un zéro de la fonction de tir  $S(y^0)$ ; c.à.d,  $S(y^0) = 0$  qu'on peut résoudre par la méthode de Newton.

#### Remarque 2.4

Si  $t_f$  est libre, on peut se ramener à la formulation précédente en considérant  $t_f$  comme une inconnue auxiliaire notée  $y_{2n+1} = t_f$ . On augmente alors la dimension d'état ( $x_i$ ) en considérant l'équation supplémentaire  $\dot{y}_{2n+1} = \frac{dt_f}{dt} = 0$ .

Cependant, il est préférable; lorsque le temps final est libre, d'utiliser la condition de transversalité sur le Hamiltonien.

### 2.2.4 Méthode de tir multiple

La méthode de tir multiple consistent à réduire la sensibilité des méthodes de tir simple, aux conditions initiales, en partitionnant l'espace temps en une série d'intervalles plus courts. Le problème de tir multiple consiste à déterminer la valeur initiale  $V(t_0) = V_0$  telle que la condition de bord  $\phi(V(t_f), t_f) = 0$  soit satisfaite pour une valeur  $t_0 < t_f$  vérifiant :

$$\dot{V} = f(V(t), t) \tag{2.19}$$

Commençons par créer une partition du domaine temporel en  $n$  segments tels que  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_f$ . On note, la valeur initiale des variables  $V$  au début de chaque

segment par  $x_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ . L'intégration de la dynamique (2.19) le long du segment  $j$  entre les instants  $t_j$  et  $t_{j+1}$ . On obtient alors l'ensemble des segments  $V$  des variables du problème non linéaire, tel que :

$$x = \{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\}$$

On introduit l'ensemble de contraintes supplémentaires, appelées contraintes de résidus, permettant d'assurer que les différents segments se joignent à leurs extrémités.

$$c(x) = \begin{pmatrix} V_1 - V_2 \\ V_2 - \bar{V}_1 \\ \vdots \\ \phi(V_n, t_f) \end{pmatrix}$$

Ces contraintes engendrent une augmentation de taille du problème non linéaire qui devra être résolu. Le nombre de variables et de contraintes pour la méthode de tir multiple est  $n = n_V \cdot M$ .

Où ;

$n_V$  : représente le nombre de variables dynamiques  $V$  du système (2.19).

$M$  : le nombre de segments.

### Remarque 2.5

- ◇ La méthode de tir multiple peut être formulé de manière directe ou indirecte, selon la définition de l'ensemble  $V$  des variables d'optimisation.
- ◇ Si  $V = (x, u)$  est choisi comme étant l'état et les contrôles du système (2.19) alors la méthode sera directe.
- ◇ Si  $V = (x, u, p)$  tel que  $p$  variables adjoints alors la méthode de tir multiple sera de type indirecte.

## 2.2.5 Rappel sur la méthode de Newton

### Principe de la méthode de Newton ( Newton-Raphson) [10]

La méthode de Newton dite aussi méthode des tangentes est une méthode itérative. Soit à résoudre l'équation  $f(x) = 0$ , où  $f$  est supposée de classe  $C^2$ .

On note par  $\bar{x}$  la racine de l'équation  $f(x) = 0$ , et  $x^0$  une valeur initial assez proche de  $\bar{x}$ . Appliquant le développement de Taylor d'ordre 2 de  $f$ , on obtient ainsi :

$$f(\bar{x}) = f(x^0) + f'(x^0)(\bar{x} - x^0) + \frac{f''(\eta)}{2}(\bar{x} - x^0)^2 \quad (2.20)$$

où,  $\eta \in [\bar{x}, x^0]$  ou  $[x^0, \bar{x}]$ .

On a  $f(\bar{x}) = 0$  et supposant que  $f'(x^0) \neq 0$ , la formule (2.20) devient :

$$\bar{x} = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} - \frac{f''(\eta)}{2f'(x^0)}(\bar{x} - x^0)^2$$

En négligeant le reste  $R = -\frac{f''(\eta)}{2f'(x^0)}(\bar{x} - x^0)^2$  et notons  $x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$ , alors  $x^1$  est une meilleure approximation de  $\bar{x}$  que  $x^0$ .

De manière générale, on a la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} x^0 & \text{donné.} \\ x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

appelé algorithme de Newton-Raphson.

### Test d'arrêt pour la méthode de Newton

Le critère d'arrêt de la méthode de Newton est donné par la relation suivante :

$$|x^n - x^{n-1}| \leq \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0).$$

## 2.3 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie qu'on résout en utilisant des méthodes connus en optimisation (méthode du gradient, du gradient conjugué, méthode de Newton, technique du point milieu,...etc).

Cette transformation est réalisée grâce à la méthode de la discrétisation de l'état et du contrôle; dont le principe est de choisir les contrôles admissibles dans un espace de dimension finie et d'utiliser des méthodes numériques pour discrétiser une équation différentielle ordinaire.

### 2.3.1 Discrétisation totale : tir direct

On transforme le problème de contrôle optimal en un problème de la forme :

$$\min_{z \in C} F(z)$$

Où :

$$z = (x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$C = \{z/g_i(z) = 0 \quad , \quad i = \overline{1, r}\}$$

$$z/g_j(z) \leq 0 \quad , \quad j = \overline{r+1, m}$$

Cette méthode consiste à choisir les contrôles ( $u_i$ ) dans un espace de dimension finie (n variables), et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles.

On considère une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_f$  de l'intervalle  $[0, t_f]$ , on réduit l'espace des contrôles par exemple en considérant des contrôles constantes par morceaux selon cette subdivision ; c-à-d :

sur chaque sous intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$  la valeur de contrôle  $u_i$  ,  $i = \overline{1, n}$  est constante.

Par ailleurs, on choisit une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple ici on choisit (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite.

Alors on obtient la formule suivante :

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i)$$

avec  $h_i = t_{i+1} - t_i$  ,  $i = \overline{1, n}$ .

Cette discrétisation conduit au problème de programmation non linéaire suivant :

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i)$$

$$\min_{u_i \in U} C(x_0, \dots, x_n, u_0, \dots, u_n)$$

$$i = 0, \dots, n - 1$$

### Remarque 2.6

Il existe une infinité de variantes. D'une part, on peut discrétiser l'ensemble des contrôles admissibles par des contrôles constantes par morceaux, ou affines par morceaux, ou des splines,...etc. D'autre part, il existe plusieurs méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler (explicite ou implicite), point milieu, Runge kutta, Adams-moulton,...etc, et le choix de la méthode dépend du problème abordé.

# Chapitre 3

## Exemple de résolution d'un problème de Lagrange avec le principe du maximum de Pontryagin

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'application du principe du maximum de Pontryagin. D'une part, on traite un exemple numérique et on donne son programme sous MatLab. D'autre part, on trouve parmi les problèmes de contrôle optimal résolus par ce principe, le problème de la pandémie du COVID-19 ; qui est un problème d'actualité réalisé dans l'article [9].

### 3.2 Exemple numérique

Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$J(u(t)) = \int_0^1 (-x(t) - u^2(t))dt \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

### 3.2.1 Résolution théorique

— Le Hamiltonien

$$\begin{aligned}H(t, x, p, p^0, u) &= p^0 f + p f \\ &= x + u^2 + pu\end{aligned}$$

— Équation adjointe

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 \implies p(t) = -t + c$$

— Condition de transversalité

Dans ce cas, le point final n'est pas fixé, on obtient alors  $p(1)=0 \implies c = 1$   
d'où ;

$$p(t) = -t + 1$$

— Condition du maximum

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + p = 0 \implies u = -\frac{p}{2}$$

$$\implies u^*(t) = \frac{t-1}{2}$$

$$\dot{x}(t) = u = \frac{t-1}{2} \implies x(t) = \frac{(t-1)^2}{4} + c_1$$

$$x(0) = 1 \implies c_1 = \frac{3}{4}$$

$$\implies x(t) = \frac{(t-1)^2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
 J(u(t)) &= \int_0^1 (-x(t) - u^2(t))dt \\
 &= \int_0^1 \left( -\frac{(t-1)^2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{(t-1)^2}{4} \right) dt \\
 &= \left[ -\frac{1}{12}(t-1)^3 \right]_0^1 - \left[ \frac{3}{4}t \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{12}(t-1)^3 \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{12} - \frac{3}{4} - \frac{1}{12} \\
 &= -\frac{11}{12}
 \end{aligned}$$

### Problème aux deux bouts

Après la résolution avec le principe du maximum de Pontryagin, nous introduisons le problème aux deux bouts suivant :

$$PDB \begin{cases} \dot{x} = u, & x(0) = 1 \\ \dot{p} = -1, & p(1) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$u(t) = -\frac{p}{2}$$

Posant

$$y = (x, p) = (y_1, y_2)$$

On aura alors :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u, & y_1(0) = 1 \\ \dot{y}_2 = -1, & y_2(1) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$u = -\frac{y_2}{2}$$

Donc le problème aux deux bouts est équivalent à  $\dot{y} = F(t, y)$  , avec :

$$y(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

$$y(1) = \begin{pmatrix} x(1) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

Le problème de Cauchy associé au problème est :

$$\dot{y} = F(t, y), \quad y(0) = y^0 = \begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

La solution du système s'écrit comme suit :

$$y(t_f, y^0) = y(t_f) = \begin{pmatrix} x(1) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La fonction de tir est défini par :

$$G(y^0) = y(t_f, y^0) - y(t_f)$$

La résolution de problème aux deux bouts est équivalent à la recherche du zéro de la fonction de tir ; c'est à dire chercher  $y^0$  tel que  $G(y^0) = 0$ .

#### 3.2.2 Implémentation numérique sous MatLab

```
[1] function tir - simple3
[2] clear all; clf; clc;
[3] global x0 tf;
[4] x0 = 1; tf = 1; P0 = 0.5;
% Calcul du zéro de la fonction de tir (P0f)
[5] options=optimset('Display','iter','Algorithm','levenberg-marquardt');
[6] [P0f,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@G,P0,options);
[7] P0f, FVAL, EXITFLAG
% Tracé des trajectoires optimales
[8] options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[9] [t,y] = ode45(@system,[0;tf],[x0;P0f],options);
[10] subplot(321); plot(t,y(:,1)); title('Trajectoire de x(t)'); grid on
[11] subplot(322); plot(t,y(:,2)); title('Trajectoire de p(t)'); grid on
% Trajectoire de du contrôle optimal
[12] y(:,3) = -y(:,2)/2;
[13] subplot(323); plot(t,y(:,3)); title('Trajectoire de u(t)'); grid on
%====Définition de la fonction de tir=====
[14] function Yzero = G(Y)
[15] global x0 tf;
```

### 3.2. EXEMPLE NUMÉRIQUE

---

```
[16] options =odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
[17] [t, y] = ode45(@sysm,[0; tf],[x0; Y],options);
[18] Yzero = [y(end, 1)
[19] y(end, 2)];
%=====Système extrêmeal=====
[20] function ydot = sysm (t, y)
[21] u = -y(2)/2;
[22] ydot = [u
[23] - 1];
```

### 3.2. EXEMPLE NUMÉRIQUE

---

Les résultats obtenus sont donnés dans les figures suivantes :

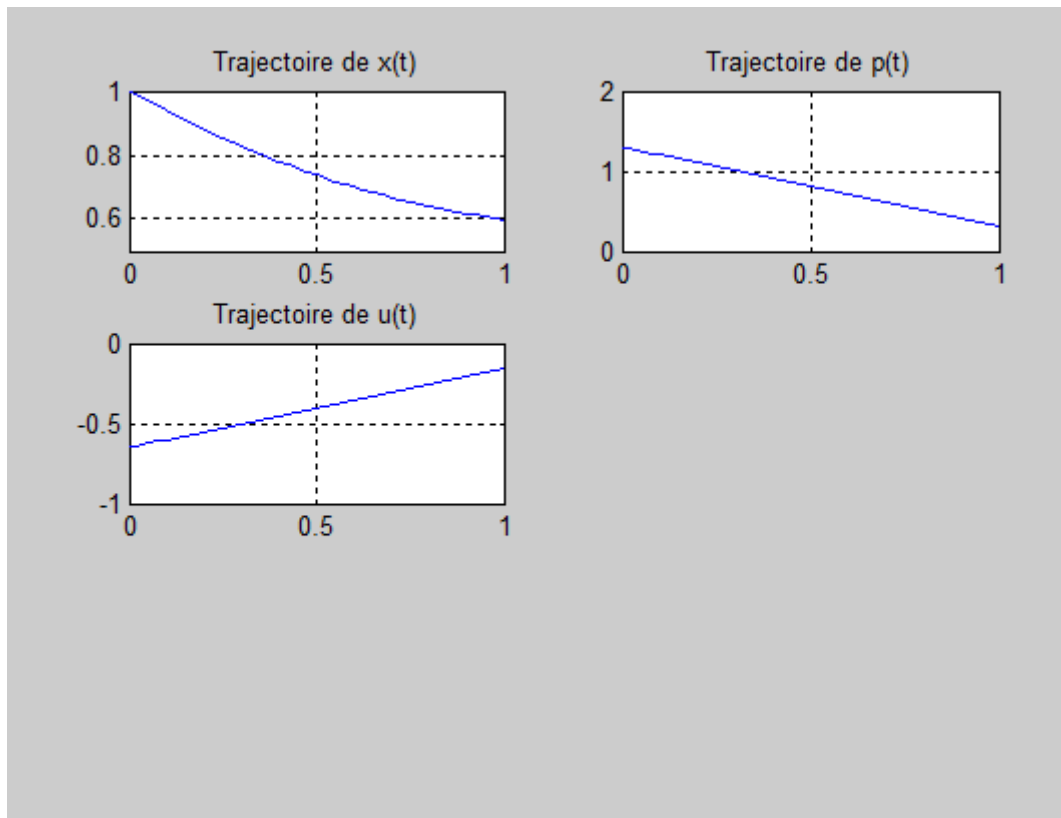


FIGURE 3.1 – Résultat par la méthode indirecte

### 3.3 Problème du COVID-19

Le COVID-19 est un nouveau virus qui appartient à la famille des coronavirus ; qui sont très nocifs pour les humains. Il est transmis de l'homme à l'homme par voie respiratoire gouttelettes. Ce virus cause des troubles respiratoires aigus sévère (SRAS-COV-2). Il est apparu pour la première fois fin décembre 2019 en chine, dans la ville de Wuhan plus exactement.

Le 11 mars 2020, l'OMS a annoncé que l'épidémie du COVID-19 avait franchi le stade pandémique, indiquant sa propagation autonome sur plusieurs continents.[16]

#### 3.3.1 Élaboration du modèle

Le problème du COVID-19 est modélisé comme un problème de contrôle optimal ; basé sur les modèles de Wiliam Ogilvy Kermack et Anderson Gray Mchendrick qui sont utilisés pour décrire l'évolution d'une maladie dans le temps, en utilisant les équations différentielles ordinaires.

Dans ce cas, le modèle utilisé est le modèle SEIR, modifié en ajoutant un compartiment (classe) supplémentaire D ; qui représente les personne décédés afin de rapprocher la situation à la réalité.

#### 3.3.2 Description du modèle

Le modèle SEIR consiste à décomposer la population en quatre classes d'individus (compartiments) :  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  et  $R(t)$ , d'où le nombre d'individus est variable dans le temps.

L'utilisation de ces compartiments permet de décrire l'état de santé des individus comme présenter ci-dessous :

- $S(t)$  : Les personnes susceptibles de contracter la maladie.
- $E(t)$  : Les personnes qui sont exposées à l'épidémie c-à-d, des individus ayant subis le virus, mais n'étant pas capable de le transmettre immédiatement.
- $I(t)$  : Les personnes infectieuses.
- $R(t)$  : Les personnes guéries.

Ajoutant un compartiment supplémentaire :

- D : Les personnes décédés.

Les personnes sensibles (S) sont exposées à la maladie. Ils ne deviennent pas nécessairement capable de transmettre immédiatement, COVID-19 nécessite quelques jours pour rendre

l'individu malade. C'est ce qu'on appelle la période de latence, où on obtient des personnes exposées (E) (le compartiment E semble particulièrement important dans la propagation du COVID-19), puis les personnes deviennent infectieuses (I). A la fin de l'infection, on aura des personnes soit récupérées (compartiment R) ou décédées (compartiment D).

**Les règles retenues sont :**

- La population totale au temps  $t$ , notée  $N(t)$ , est donnée par 
$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + D(t).$$
- La maladie est caractérisée par le taux d'infection noté  $(\alpha > 0)$ , et le taux de guérison noté  $(\gamma > 0)$ .
- Le taux d'incubation est le taux d'individus latents devenant infectieux noté  $\beta > 0$ .
- Compte tenu de la durée moyenne connu d'incubation  $Y$  tel que  $\beta = \frac{1}{Y}$ ,  $\gamma = \frac{1}{K}$  est déterminée par la durée moyenne d'âge de guérison de l'infection.
- Le taux de mortalité est noté par  $\delta > 0$ .
- La taille de la population est considérée constante.
- La variable  $t$  représente le temps tel que  $t \in T$  où  $T$  est la durée totale.

Cette modélisation peut être représenté à l'aide du diagramme compartimenté suivant :

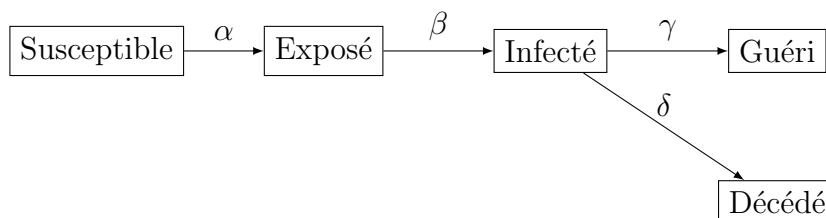


FIGURE 3.2 – diagramme compartimenté

#### 3.3.3 Modélisation du COVID-19

L'étude est faite pour une période de 70 jours.

Pour  $t \in [0, T]$ ,  $\alpha$  est le taux d'infection.

$S(\cdot)$  vérifie la relation suivante :

$$\dot{S}(\cdot) = -\alpha S(t)I(t) \quad , \quad S(0) = S_0 > 0.$$

Comme dans toute épidémie, les personnes infectées sont vaccinées :

Soit  $u(t)$  le taux de vaccination, tel que :  $0 \leq u(t) \leq u_{max}$ ,  $t \in [0, T]$ .

Dans ce cas :

$$\dot{S}(t) = -(\alpha I(t) + u(t))S(t) \quad , \quad S(0) = S_0.$$

$I(t)$  est tel que :

$$\dot{I}(t) = \beta E(t) - (\delta + \gamma)I(t) \quad , \quad I(0) = I_0 > 0.$$

$E(t)$ ,  $t \in [0, T]$  désigne les personnes qui sont exposé à l'épidémie. Il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\dot{E}(t) = I(t)S(t) - \beta E(t) \quad , \quad E(0) = E_0 > 0.$$

Sachant que les personnes infectées sont soit recouvert (compartiment  $R$ ) après avoir été vaccinées ou mort (compartiment  $D$ ).

Celui-ci est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= \gamma I(t) + u(t)S(t) \quad , \quad R(0) = R_0. \\ \text{et } \dot{D}(t) &= \delta I(t) \quad , \quad D(0) = D_0. \end{aligned}$$

### 3.3.4 Problème de contrôle optimal du COVID-19

D'après la modélisation du COVID-19, le système dynamique est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}(t) = (-\alpha I(t) - u(t))S(t), \\ \dot{E}(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta E(t), \\ \dot{I}(t) = \beta E(t) - (\delta + \gamma)I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) + u(t)S(t), \\ \dot{D}(t) = \delta I(t), \\ t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Où,  $u(t)$  est une fonction mesurable telle que  $0 \leq u(t) \leq u_{max}$  pour  $t \in [0, T]$ .

$u_{max}$  est le taux maximale de vaccination.

Le but est de maximiser le nombre de personnes guéries et minimiser le nombre de personnes infectées.

La fonctionnelle dans ce cas est :

$$J(u) = -I(T) + R(T) \rightarrow \max \quad (3.2)$$

De (3.1), (3.2) et ces conditions initiales :

$$S(0) = S_0 > 0, E(0) = E_0 > 0, I(0) = I_0 > 0, R(0) = R_0 > 0, D(0) = D_0 > 0, \quad (3.3)$$

L'étude est faite dans le cas de l'Algérie, sur 1.000.000 personnes en bonne santé, 3000 ont exposées aux virus. A partir du 02 avril 2020, 986 personnes sont infectées, 108 ont été guéries et 83 sont décédées.

Donc le problème de contrôle optimal s'écrit comme suit :

$$J(u) = -I(T) + R(T) \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S}(t) = (-\alpha I(t) - u(t))S(t), \\ \dot{E}(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta E(t), \\ \dot{I}(t) = \beta E(t) - (\delta + \gamma)I(t), \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) + u(t)S(t), \\ \dot{D}(t) = \delta I(t), \\ S(0) = 10^6, E(0) = 3000, I(0) = 986, R(0) = 108, D(0) = 83, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{max}, \quad t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Où :

$\alpha$  est taux d'infection.

$\gamma$  est le taux de guérison.

(3.3) est le nombre de personnes dans chaque compartiment à l'instant  $t = 0$ .

### 3.3.5 Application du principe du maximum de Pontryagin au problème du COVID-19

#### Résolution théorique

Le Hamiltonien du problème (3.4) est donnée pour  $t \in [0, T]$  comme suit :

$$\begin{aligned} H(t, X, P, u) &= P_S(-\alpha I - u)S + P_E(\alpha IS - \beta E) + P_I(\beta E - (\delta + \gamma)I) + P_R(\gamma I + uS) + P_D(\delta I) \\ &= -P_S\alpha IS - P_SuS + P_E\alpha IS - P_E\beta E + P_I\beta E - P_I(\delta + \gamma)I + P_R\gamma I + P_RuS + P_D\delta I \\ &= -P_S(\alpha I + u) + P_E(\alpha IS - \beta E) + P_I(\beta E - (\delta + \gamma)I) + P_R(\gamma I + uS) + \delta P_D I \end{aligned}$$

Dans l'article[9], pour simplifier l'écriture, ils ont posés :

$$X(t) = (S(t), E(t), I(t), R(t), D(t)).$$

### 3.3. PROBLÈME DU COVID-19

---

$P(t) = (P_S(t), P_E(t), P_I(t), P_R(t), P_D(t))$  est le vecteur adjoint.

— Les équations adjointes :

$$\begin{cases} \dot{P}_S = -\frac{\partial H}{\partial S} = \alpha I(P_S - P_E) + (P_S - P_R)u \\ \dot{P}_E = -\frac{\partial H}{\partial E} = \beta(P_E - P_I) \\ \dot{P}_I = -\frac{\partial H}{\partial I} = \alpha S(P_S - P_E) + (\delta + \gamma)P_I - \gamma P_R - \delta P_D \\ \dot{P}_R = -\frac{\partial H}{\partial R} = 0 \\ \dot{P}_D = -\frac{\partial H}{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

— Conditions de transversalité :

$$\begin{cases} P_S(T) = p^0 \frac{\partial(-I(T) + R(T))}{\partial S} = 0 \\ P_E(T) = p^0 \frac{\partial(-I(T) + R(T))}{\partial E} = 0 \\ P_I(T) = p^0 \frac{\partial(-I(T) + R(T))}{\partial I} = -1 \\ P_R(T) = p^0 \frac{\partial(-I(T) + R(T))}{\partial R} = 1 \\ P_D(T) = p^0 \frac{\partial(-I(T) + R(T))}{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

— La condition du maximum :

$$\begin{aligned} H^* &= \max_{0 \leq u(t) \leq u_{max}} (t, X, P, u) \\ &= -\alpha S I (P_S - P_E) - \beta P_E E + P_I (\beta E - (\delta + \gamma) I) + \gamma P_R I + \delta P_D I + S \max_{0 \leq u(t) \leq u_{max}} [(-P_S + P_R)u] \end{aligned}$$

Où  $H^* = H(t, X^*, P^*, u^*)$ .

C-à-d on maximise cette équation :

$$\phi(u) = (-P_S(t) + P_R(t))u(t)$$

On a :

$$\dot{P}_R(t) = 0$$

c-à-d

$$P_R(t) = C^{te}$$

et on a aussi :

$$P_R(T) = 1$$

Donc

$$P_R(t) = 1, \quad t \in [0, T]$$

Alors

$$u(t) = \text{signe}(1 - P_S(t))$$

D'où le contrôle qui maximise le Hamiltonien est :

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } 1 - P_S(t) \leq 0 \\ 0 & \text{si } 1 - P_S(t) > 0 \end{cases}$$

C-à-d

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } P_S(t) < 1 \\ u_{\max} & \text{si } P_S(t) \geq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Puis :  $u^*(t) = -u_{\max} \min(0, \text{signe}(P_S(t) - 1))$ .

### 3.3.6 Conclusion

Après la résolution théorique avec le principe du maximum de Pontryagin qui a donné une condition nécessaire d'optimalité, une implémentation numérique sous MatLab est faite dans l'article[9], et ils ont déduit qu'il est nécessaire de trouver un vaccin pour réduire la propagation du COVID-19.[9]

# Conclusion générale

L'objectif de ce travail est d'appliquer le principe du maximum de Pontryagin et montrer son importance dans la résolution des problèmes de contrôle optimal. Le principe du maximum de Pontryagin est une méthode indirecte qui donne une condition nécessaire non suffisante.

On a présenté dans notre mémoire, certains éléments de base de la théorie du contrôle optimal et les trois types de problème de contrôle ; avec des exemples résolus, ainsi la notion de la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires.

Par la suite, on a donné les méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal : les méthodes indirectes et les méthodes directes.

Dans le troisième chapitre, on a proposé un exemple de calcul qu'on a résolu par le principe du maximum de Pontryagin, puis nous avons fait une implémentation numérique sur MatLab en utilisant la méthode de tir simple.

A la fin, nous avons étudié un exemple déjà présenté dans l'article [9], pour donner une valeur à ce principe du maximum de Pontryagin : c'est le problème de contrôle optimal du COVID-19. Ils ont modélisé d'abord le problème, ensuite ils ont fait une résolution théorique (nous avons intéressé seulement à ça). Puis la résolution numérique sur MatLab et ils ont conclu que le vaccin est une solution efficace pour lutter contre cette pandémie.

# Bibliographie

- [1] A.Merakeb, F.Achemine. Cours de contrôle optimal : aspects théoriques et numériques. Université de Tizi Ouzou, 2013/2014.
- [2] E.Trélat. Contrôle optimal : théorie et applications Vuibert, Collection "Mathématiques Concrète", 2008.
- [3] Fatima Zohra YOUNSI. Mise en place d'un système d'information décisionnel pour le suivi et la présentation des épidémies. Thèse de doctorat. Université d'ORAN 2015-2016.
- [4] Grégoire ALLAIRE, Alexandre ERN. Optimisation et contrôle. École Polytechnique 24 février 2021.
- [5] Juliette LEGRAND. Introduction à la théorie du contrôle : Etude du pendule inversé. Rapport de stage. Magistère de mathématiques de RENNES, 2<sup>ème</sup> année, 02 Mai 2017-30 Juin 2017.
- [6] K.Adel-Aissanou, O.Lekadri, Dj.Aissani. Modélisation mathématique de l'évolution de la pandémie Covid-19 : Synthèse de la littérature. Revue spécialisée de Mathématiques et Application, LaMOS Research Unit, Université de Béjaia, 2020.
- [7] K.Louadj. Résolution de problème paramétrés de contrôle optimal. Thèse de doctorat Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2012.
- [8] N.Moussouni Dehbi. Contrôle optimal : optimisation d'une production céréalière. Thèse en cotutelle internationale. Université d'Orléans et Université Tizi Ouzou (Algèria), 2012.
- [9] N.Moussouni, M.Aliane. Optimal control of COVID-19. Article de recherche. Laboratoire L2CSP, Université Mouloud Mameri Tizi Ouzou et laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université Amar Telidji, Laghouat, 2020.
- [10] O.Bouarab. Cours sur les Méthodes Numériques. Université de Tizi Ouzou, 2015-2016.
- [11] Olivier COTS. Contrôle optimal géométrique : Méthodes homotopiques et application. Thèse de doctorat. Université de bourgogne, 2012.

- [12] O.Oukacha. Méthode directe d'optimisation de problème de contrôles. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, 2014.
- [13] Pierre de Buyl. Vous avez dit "modèle". La revue nouvelle, numéro 3/2020.
- [14] Pierre Martinon. Résolution numérique de problème de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale. Thèse de doctorat. Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [15] Raherinaivosona Fidèle. Application de la théorie du contrôle à l'économie. Diplôme d'études Approfondies de Mathématique. Université d'Antananarivo, 2013.
- [16] S.Alizon, B.Reyné, Ch.Selinger. Modélisation de l'épidémie de COVID-19, modèle SEAIR. Rapport de recherche 3; centre national scientifique(CNRS); Institut de Recherche pour le développement (IRD); University, 2020, hal-02882687.
- [17] TERENCE Bayen(I3M), Alain Rapaport(INRA-Supagro). Commande Optimal :Approches analytiques et Géométriques. Cours M2/S3. Université Montpellier , 2015-2016.
- [18] Yannick PRIVAT. Introduction au contrôle optimal aspects théoriques et numériques. Cours de Master 2(Calcul Scientifique et Mathématique de l'information). Université de Strasbourg, 2020-2021.

# Résumé

Dans la théorie du contrôle optimal, le principe du maximum de Pontryagin est un point important utilisé dans de nombreux domaines pour calculer la solution d'un problème de contrôle optimal.

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressées à une méthode indirecte pour la résolution d'un problème de contrôle optimal.

Après avoir donné les éléments de base de cette théorie ; à savoir : quelques définitions essentiels, les différents types du problèmes de contrôle optimal et la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires, nous avons présenté les méthodes de résolution : les méthodes directes et indirectes.

Enfin, nous avons utilisé le principe du maximum de Pontryagin pour résoudre un exemple de calcul en se basant sur une résolution numérique sur MatLab.

Puis, nous avons attiré l'attention à la résolution du problème de contrôle optimal de la pandémie du COVID-19 avec ce principe dans un article intitulé " Optimal control of COVID-19 " [9].

# Abstract

In optimal control theory, the Pontryagin maximum principle is an important point to use in many fields to calculate the solution of an optimal control problem.

Within the framework of this work, we are interested in an indirect method for solving an optimal control problem.

After having given the basic elements of this theory ; namely : some essential definitions, the different types of the problems of optimal control and the controlability of linear and nonlinear systems, we have presented the methods of resolution : direct and indirect methods.

Finally, we used the principle of Pontryagin's maximum to solve an example of calculation based on a numerical resolution on MatLab.

Then, we drew attention to solving a problem of optimal control of the COVID-19 pandemic with this principle in an article titled " Optimal control of COVID-19" [9].