République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI -TIZI OUZOU-

Faculté du Génie de la Construction Département de Génie Civil

MÉMOIRE DE MASTER ACADÉMIQUE

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et matériaux

Intitulé du Mémoire:

INFLUENCE DU MAILLAGE DANS LA SIMULATION DES OSSATURES EN BETON ARME

Proposé et encadré par: Présentée par :

M^r DRIZI Said M^{elle} BOUKHARI Ferroudja

Promotion: 2013/2014

REMERCIEMENTS

Au terme de cette étude, il m'est très agréable d'exprimer toute ma gratitude, ma reconnaissance et mes très vifs remerciements à touts ceux qui ont contribués de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Je remercie tout d'abord Monsieur S. DRIZI de m'avoir proposé ce sujet de mémoire, de l'intention qu'il a porté à mon travail et des moments précieux de discussion qu'il m'a réservée. Je le remercie pour sa grande disponibilité durant toute ma thèse. J'ai bénéficié grâce à lui, d'un professeur vrai, non seulement sur le plan scientifique, mais aussi sur le plan humain.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux à mon employeur M^r EL KECHAI HICHEM. Sans sont aide et encouragements, ce mémoire n'aurait sûrement pas vu le jour.

J'exprime toute ma profonde reconnaissance à Mr BELKEBIR HAKIM pour sa contribution dans ce travail.

Je tiens à remercie également mes amies.

Mes reconnaissances vont spécialement à mes parents, mes frères et mes sœurs, me beau frère et Mayas pour leur soutien continuel.

Résumé

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à l'analyse et à la simulation du

comportement non linéaire des éléments d'ossatures planes en béton armé.

L'outil d'analyse consiste en un programme informatique basé sur la

méthode des éléments finis et utilisant des éléments finis poutres à 2 nœuds.

On se propose d'étudier l'influence du maillage est de la finesse de

discrétisation sur les résultats des calculs.

Une étude comparative portant sur des exemples d'éléments d'ossatures

(poteau, portique) est réalisée en linéaire et en non linéaire.

Mots-clés: Discrétisation, non linéarité, simulation numérique, élément poutre.

Abstract

As part of this work, we focus on the analysis and simulation of the nonlinear behavior of reinforced concrete frames planar elements.

The analysis tool is a computer program based on the finite element method and finite element beams using 2 nodes.

We propose to study the influence of the mesh is the fineness of discretization of the calculation results.

A comparative study of examples of framing elements (pole, gantry) is made of linear and non-linear.

Keywords: Discretization, nonlinearity, numerical simulation, beam element

Principales Notations

 ε_r : La contrainte limite d'écoulement des aciers.

 ε_{ft} : Déformation limite d'élasticité de l'acier le plus tendu.

 ε_u : La déformation maximale du matériau.

 f_{c28} : Résistance caractéristique du béton à l'âge de 28 jours.

 f_{ci} : Résistance à la compression du béton à l'âge j.

 f_{ti} : Résistance à la traction du béton à l'âge j.

 E_{bt} : Module d'élasticité longitudinale du béton.

 E_{b0} : Module Young tangent à l'origine.

 f_e : Limite élastique des aciers.

 ε_a : La déformation longitudinale au niveau du centre géométrique G d'une section.

 σ_p : Contrainte dans l'acier de précontrainte.

 ε_p : Déformation dans l'acier de précontrainte.

 f_{peq} : Limite élastique conventionnelle.

 $0.9f_{peq}$: Contrainte ou s'arrêt le diagramme linéaire.

 $1.06f_{peg}$: Contrainte de rupture.

 σ_{bc} : Contrainte de la fibre de béton la plus comprimée.

 σ_{bt} : Contrainte de la fibre de béton la plus tendue.

 ε_{bc} : Déformation de la fibre de béton la plus comprimée.

 ε_{bt} : Déformation de la fibre de béton la plus tendue.

 ε_{ν} : Déformation d'une fibre située à une hauteur y, du centre de gravité G de la section.

 $u_0(X)$: Déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la poutre.

 θ (x): Rotation de la normale de la section transversale d'abscisse x.

 γ : La rotation due au cisaillement transversal.

v : Coefficient de poisson.

 ε_{0x} : La déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence.

☐ : La courbure.

 \overline{EA} : Rigidité à l'effort normal (rigidité de membrane).

ES: Rigidité due au couplage flexion – effort normal.

 \overline{EI} : Rigidité à la flexion.

 $\{p\}^e$: Vecteur des forces nodales résultant des efforts intérieurs.

 $\{f\}^e$: Vecteur des forces résultant des efforts reparties à l'élément en cours.

 $[K_S]$: La matrice de rigidité sécante de la section.

 B_{inf} : Largeur inferieure du trapèze.

 B_{sup} : Largeur supérieure du trapèze.

 Z_{inf} : Position inférieure par rapport à l'axe de référence.

 Z_{inf} : Position supérieure par rapport à l'axe de référence.

h_{lavr}: Epaisseur de la couche j.

 h_{trap} : Hauteur du trapèze en cours (i_{trap})

A : Aire de la section.

 ηb : Nombre de tranches horizontales dans la section du béton.

 A_i : Aire du lit d'acier j.

M : Moment de flexion appliqué sur la section.

N : Effort normal appliqué sur la section.

u (x, z): Déplacement axial selon x.

w (x, z): Déplacement transversal selon z.

[D] : Matrice des propriétés élastiques de l'élément.

[N]: Matrice des fonctions d'interpolation (de forme).

 u_i : La valeur du déplacement longitudinal au noeud i.

w_i: La valeur du déplacement transversal au nœud i.

 θ_i : La valeur de la rotation au noeud i.

[B] : Matrice de déformation.

n : Nombre de points de Gauss (n = 3).

 ξ_i : Abscisse du point de Gauss i.

 α_i : Poids d'intégration au point de Gauss i.

N : L'intensité de l'effort normal de compression.

 σ : La contrainte normale de compression.

F: La force maximale selon l'élément finis utilisés.

d : Le déplacement maximal selon l'éléments finis utilisés.

 l_e : La longueur de l'élément finis.

L ou H : La longueur de l'élément d'ossature.

h: La longueur de la section transversale de l'élément d'ossature.

Tables des figures

2D (c), discrétisée en 1D (d)
Figure 2-2: Représente d'un élément avec une discrétisation serre au niveau des zones critiques
Figure 2-3: Représentation de moment et courbure
Figure 3-1 : Maillage d'un portique en élément fini
Figure 3-2 : Elément d'une poutre plane9
Figure 3-3: poutre mince de Bernoulli
Figure 3-4: Représentation graphique du chargement
Figure 3-5 : élément fini à deux (02) nœuds et 6DDL
Figure 3-6 : Représentation graphique des abscisses des points de Gauss
Figure 3-7 : Discrétisation de la section transversale en couches trapézoïdales
Figure 4-1: Diagramme contrainte-déformation du béton
Figure 4-2: Comportement du béton sous contrainte de compression
Figure 4-3: comportement de béton ordinaire avant fissuration
Figure 4-4: Diagramme contrainte- déformation instantanée du béton tendu (Grelat)
Figure 4-5: Loi élastique parfait
Figure 4-6: Diagramme contrainte-déformation des aciers BEAL
Figure 4-7: Méthode Newton-Raphson standard
Figure 4-8: Méthode Newton-Raphson modifiée
Figure 4-9: Méthode de la sécante

Figure 4-10 : Organigramme de calcul
Figure 5-1 : Les données du poteau de Low-Mohle
Figure 5-2 : Maillage utilisé
Figure 5-3 : Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées 36
Figure 6-1: Représentation du maillage utilisé
Figure 6-2: Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées 39
Figure 6-3: histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation
Figure 6-4: histogramme donnant les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation
Figure 6-5: Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments en %
Figure 6-6 : Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments en %
Figure 6-7 : Maillage utilise de la variable l _e
Figure 6-8: Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées 44
Figure 6-9: histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation
Figure 6-10: histogramme donnant les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation
Figure 6-11 : Histogramme donnant l'erreur relative de la charge en fonction du nombre d'éléments en %
Figure 6-12: Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments en %
Figure 6-13: Détail du portique simple en R.D.C à étudié

Figure 6-14: Détail de discrétisation pour le portique à étudié
Figure 6-15: Courbe force-déplacement pour les différentes simulations effectuées 50
Figure 6-16: histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation
Figure 6-17: histogramme donnant des déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation
Figure 6-18: Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments er %
Figure 6-19: Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement en fonction du nombre d'éléments en %
Figure 6-20: Maillage utilise de la variable l _e
Figure 6-21(a): Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées54
Figure 6-21(b) : Courbes forces-déplacements de 9 et 54 éléments
Figure 6-22: histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation
Figure 6-23: histogramme donnant les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation
Figure 6-24: Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments er %
Figure 6-25: Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments er %
Figure 6-26: Détail du portique en RDC+1 à étudié
Figure 6-27: Détail de discrétisation pour le portique à étudié
Figure 6-28: Courbure force-déplacement pour les différentes simulations effectuées 61
Figure 6-29: histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation

Figure 6-30 : histogramme donnant des déplacements à la rupture en fonction de type de
discrétisation
Figure 6-31: Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments en
%
Figure 6-32: Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments en
%
Figure 6-33 : Maillage utilise de la variable l _e et h _{e1} , h _{e2}
Figure 6-34(a): Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées 65
Figure 6-34(b) : Courbes forces-déplacements de 18 et 48 éléments
Figure 6-35: histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de
discrétisation
Figure 6-36: histogramme donnant les déplacements à la rupture en fonction de type de
discrétisation
Figure 6-37: Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments en
%
Figure 6-38: Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments en
%

Liste des tableaux

Tableau 3-1: Abscisses et poids d'intégration de Gauss utilisés pour l'intégration numérique
de l'élément à deux nœuds
Tableau 5-1 : Caractéristiques du béton. 34
Tableau 5-2 : Caractéristiques des aciers
Tableau 6-1: Principaux résultats de la simulation en fonction de nombre d'éléments 39
Tableau 6-2: Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations
Tableau 6-3 : Valeurs de l _e /h considérées
Tableau 6-4 : Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations
Tableau 6-5: propriété des matériaux qui forment le portique en R.D.C étudié
Tableau 6-6: Principaux résultats de la simulation en fonction de nombre d'éléments 49
Tableau 6-7: Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations 51
Tableau 6-8: Les données de la longueur de l'élément fini pour chaque simulation 53
Tableau 6-9: Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations 57
Tableau 6-10: propriété des matériaux qui forment le portique en RDC+1 étudié 59
Tableau 6-11: Principaux résultats de la simulation en fonction de nombre d'éléments 60
Tableau 6-12: Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations avec
l'expérimental62
Tableau 6-13: Les données de la longueur de l'élément fini pour chaque simulation 64
Tableau 6-14: Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations 67

Table des matières

Chapitre 1 : Introduction générale.

1-1-	Position du problème	1
1-2-	Objectif de l'étude	1
1-3-	Plan de l'étude	2
Chap	oitre 2 : Revue bibliographique.	
2-1-	Introduction	3
2-2-	Bref aperçu sur la M.E.F	3
	- Principe de la M.E.F	4
	- Type de modélisation 3D, 2D et 1D	4
	- Influence du maillage	5
2-3-	Aperçu sur les travaux consacrés à l'analyse non linéaire des ossatures planes en	oétor
	armé	5
2-4-	Modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé	7
	a- Non linéarité matérielle	7
	b- Non linéarité géométrique	7
2-5-	Aperçu sur le comportement non linéaire d'un élément en béton armé	8
Chap	oitre 3: Présentations du modèle d'une poutre plane selon la théorie de	
•	NAVIER-BERNOULLI.	
3-1-	Introduction	9
3-2-	Hypothèses de calcul	9
3-3-	cinématique	. 10
3-4-	Relation contraintes-déformations	11
3-5-	Relation déformation –déplacement	. 12
3-6-	Relation entre efforts et déformation	. 12
3-7-	Principe des travaux virtuels (P.T.V)	13
3-8-	Discrétisation par élément fini (poutre mince à deux nœuds)	15
3-9-	Discrétisation de la section transversale	20
Chap	oitre 4 : Méthode de résolution non linéaire et modélisation des matériaux.	
4-1-	Introduction	22
4-2-	Comportement des matériaux	22

4-2-1-	Béton
a-	Comportement du béton en traction et en compression
b-	Béton en compression de SARGIN
c-	Béton en traction GRELAT [01]
4-2-2-	Aciers
	- Aciers naturels
	- Aciers écrouis
4-3-	Méthode de résolution non linéaire
4-3-1-	Algorithme de résolution non linéaire
	- Méthode Newton-Raphson standard
	- Méthode Newton-Raphson modifiée
	- Méthode de la rigidité sécante
4-3-2-	L'algorithme de résolution non linéaire
4-3-3-	Organigramme de calcul
4-3-4-	Programme de calcul poutre_mince 2
Chapi	tre 5 : Etude de l'influence du maillage dans le domaine linéaire
5-1-	Introduction
5-2-	Présentation de l'exemple du poteau de Low-Mohle [37]
5-3-	discrétisation
5-4-	la simulation numérique36
	Conclusion
Chapi	tre 6 : Etude du l'influence du maillage dans le domaine non linéaire
6-1-	Introduction
6-2-	Simulation du poteau de Low-Mohle
6-2-1-	discrétisation avec des nœuds équidistants
6-2-1-	1- La simulation
6-2-1-	2- Influence de la finesse de discrétisation sur la précision des calculs41
c 0 1	
6-2-1-	3- Interprétation des résultats

6-2-2-1- La simulation
6-2-2-2- Influence du maillage sur la précision des calculs
6-3- Portique simple en R.D.C
6-3-1- Discrétisation avec des nœuds équidistants
6-3-1-1- Simulation
6-3-1-2- Influence de la finesse de discrétisation sur la précision des calculs51
6-3-1-3- Interprétation des résultats53
6-3-2- Discrétisation proposée
6-3-2-1- La simulation
6-3-2-2- Influence du maillage sur la précision des calculs
6-4- Portique en R.D.C+1 (Vecchio et Emara Frame)
6-4-1- Discrétisation avec des nœuds équidistants
6-4-1-1- La simulation
6-4-1-2- Influence de la finesse de discrétisation sur la précision des calculs62
6-4-1-3- Interprétations des résultats
6-4-2- Discrétisation proposée
6-4-2-1- La simulation
6-4-2-2- Influence du maillage sur la précision des calculs
Conclusion générale
Références bibliographiques
Annexes
Annexe A73
Annexe B74
Annexe C

1-1- Position du problème:

Dans le domaine des constructions civiles et industrielles, les concepteurs portent un grand intérêt à prédire correctement le comportement réel des différents éléments constitutifs et leurs réponses aux divers modes de sollicitations.

Le développement des méthodes d'analyse numérique, notamment la méthode des éléments finis, ainsi que le progrès dans le domaine de l'informatique, a permis d'élaborer des approches plus réalistes pour une modélisation précise, des lois constitutives réalistes et une technique de résolution efficace.

Une telle analyse est aujourd'hui indispensable pour les structures de forme et le fonctionnement complexes (bâtiments élevés, ponts de grande portée etc.) subissant des charges importantes, surtout quand leur défaillance a des conséquences humaines et économiques graves.

De plus, la question de développement d'un code de calcul permettant de minimiser le temps de calcul pour l'évaluation de l'indice de fiabilité en assurant la précision des résultats est un problème d'actualité.

Dans la simulation du comportement non linéaire des éléments d'ossatures en béton armé, le choix du type de modélisation et du maillage (éléments à trois dimension, à deux dimension on unidimensionnels) dépend des donnes des problèmes et des objectifs visés par la simulation.

1-2- Objectif de l'étude :

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à la simulation et à l'analyse du comportement non linéaire, jusqu'à rupture, des éléments structuraux (poutres, poteaux, portiques) des ossatures planes en béton armé.

On utilise une approche globale, consistant à modéliser les éléments d'ossatures par des éléments finis poutres à deux nœuds.

L'objectif essentiel de notre travail est d'étudier l'influence du maillage et de la finesse de discrétisation sur les résultats des simulations numériques du comportement linéaire et non linéaire d'ossature planes en béton armé.

1-3- Plan de l'étude :

La présente étude est développée comme suit :

Le chapitre 2 : est consacré à la revue bibliographique sur les études relatives à la modélisation du comportement linéaire et non linéaire des ossatures planes en béton armé.

Dans le Chapitre 3, on s'intéresse à la formulation de modèles d'éléments finis type poutre, qui permet la modélisation du comportement en flexion composé jusqu'à rupture des ossatures planes. Pour cela on se base sur l'hypothèse de Navier- Bernoulli, et une présentation d'un modèle d'élément finis type poutre à 2 nœuds.

Le chapitre 4, présente, la méthode de résolution non linéaire utilisée et la modélisation des matériaux adoptés.

Dans le chapitre 5, on s'intéressé à l'étude de l'influence du maillage dans les cas du comportement linéaire d'un poteau.

Dans le chapitre 6, on étudie l'influence du maillage dans le cas du comportement non linéaire jusqu'à la rupture.

L'analyse non linéaire porte sur trois exemples : un poteau, un portique simple et un portique à 2 niveaux (RDC+1).

Enfin une conclusion générale est proposée à la fin du document.

2-1- Introduction:

Plusieurs recherches ont été réalisées pour le calcul non linéaire des ossatures (portique) auto-stable en béton armé et leur comportement, basé sur la méthode des éléments finis, ellemême basée sur la discrétisation.

2-2- Bref aperçu sur la M.E.F [06]:

La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds.

Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Les nœuds et les éléments n'ont pas forcement de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.

Nous pouvons dire aussi, que c'est une approche numérique qui peut être utilisées pour faire cette discrétisation c'est-à-dire, grâce à des équations différentielles peuvent être résolues de façon approximative, elle permet le passage du problème continu au problème discret équivalent.

Nous pouvons donc dire que : « Le milieu continu est subdivisé en un nombre fini d'éléments (éléments finis dans le comportement est définis par un nombre fini de paramètres).

L'obtention d'une solution exacte étant impossible, l'idée dans la M.E.F, est de chercher une solution approchée U(x) sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions indépendantes connusP(x), qui sont généralement des polynômes.

Principe de la MEF:

- 1. Définir les nœuds et les éléments (Créer le maillage).
- 2. Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux $\{U_e\}$ et les forces.
 - $\{f_e\}$ Appliquées aux nœuds : $[K_e]\{U_e\} = \{f_e\}$.
- 3. Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K]\{U\} = \{F\}$ de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds.
- 4. Modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites.
- 5. Résoudre le système $[K]{U} = {F}$ et obtenir les déplacements ${U}$ aux nœuds.
- 6. Calculer les gradients (flux de chaleur, déformations et contraintes) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur lesquels les conditions aux limites sont imposées.

- Type de modélisation 3D, 2D et 1D :

Lorsque nous devons modéliser une pièce pour simuler le comportement par éléments finis, il est fréquent que les données du problème nous laissent le choix entre plusieurs types de modèles: à une dimension, à deux dimensions ou à trois dimensions. Sur la **figure 1-1** nous représente un exemple d'une poutre.

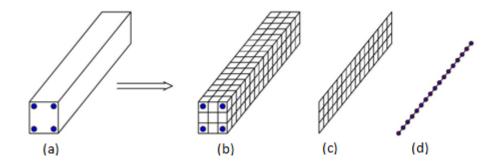


Figure 2-1 : Modélisation 3D d'une poutre continue (a), discrétisée en 3D (b), discrétisée en 2D (c), discrétisée en 1D (d).

- Influence du maillage :

Le maillage doit être serré dans les zones critiques et espacé le long de l'élément.

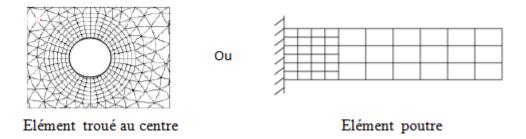


Figure 2-2 : Représentation d'un élément avec une discrétisation serre au niveau des zones critiques.

2-3- Aperçu sur les travaux consacrés à l'analyse non linéaire des ossatures plane en béton armé :

La non linéarité matérielle a été prise en compte par :

- **FRINKLIN** (Californie) en 1970 [13], a développé une approche d'une poutre à 3 degrés de liberté par nœuds (2 translations et une rotation), la théorie du premier ordre des déplacements.
- MENEGOTTO et PLNTO (Rome) entre 1972-1974 [13], la prise en compte de :
 - -L'intégration de déformation des sections le long de l'élément.
 - -La matrice de flexibilité élémentaire (inverse de la matrice de rigidité).
 - -La discrétisation de la section transversale en fibres horizontales.
 - -La résistance du béton tendue est négligée.
- **GRELAT** .A (CEBTP, PARIS) en 1978[14], inspiré par Menegotto et Pinto, il a introduit se que suit :
 - -Le béton comprimé, la loi de SARGIN.
 - -La forme originale et efficace de tension-stiffening.
 - Le programme à été validé par plusieurs tests.
- **FERRARO-MAIA** (CEBTP) en 1979 [13], c'est la suite de Grelat, il à pris en compte ce qui suit :
 - -Les différents effets de la précontrainte.
 - -Supposé la trace des câbles paraboliques.
 - -L'inclinaison des câbles dans la matrice de rigidité il est négligée.

- **ESPION** (Bruxelles) entre 1980-1986 [13],, l'utilisation d'un élément poutre à 9 degrés de liberté, la prise en compte de:
 - -La théorie de second ordre des déplacements.
 - -La fissuration du béton (composition de QUAST).
 - Il a été validé par plusieurs tests, aussi sur des ossatures en béton armé et charpente métallique, étude numérique.
- MAZARS en 1984 [12], a pris en compte l'endommagement et la rupture des structures en béton armé, les fissurations du béton tendu.
- **ABOU** -**EZZI** en 1989 [12], a utilisé le modèle de la mécanique de l'endommagement.
- **KWAK** en 1990 [12], a utilisé la méthode des éléments finis.
- **FILIPPOU** et *al*. en 1997 [12], a utilisé un élément en béton armé sous charges monotones par la méthode des éléments finis.
- **SPASONE** et *al*. en 2000 [12], a pris en compte l'adhérence entre acier-béton sur un élément poutres.
- **RAMIRE et RAGUENEAU** en 2005 [12], la prise en compte de l'effet d'adhérence dans la distribution des fissures dans un élément en béton armé.

La non linéarité géométrique, a été utilisé par :

- **GUNNIN** (Austin) en 1970 [13], c'est le premier qui a pris en compte, l'analyse d'un élément à 6 degrés de liberté, la considération des effets de second ordre des déplacements n'est qu'approximative, en ce qui concerne la non linéarité matérielle, il a supposé que les rigidités flexionnelles et extensionnelle constantes le long de l'élément, la traction de béton n'est pas prise en compte.
- LAZARRO en 1970 [14], a introduit quelques corrections sur le modèle de Gunnin, pour prendre en compte la fissuration du béton.
- **JENNINGS** en 1968 [14], la prise en compte des éléments en 2D, et les rotations planes.
- **BLAAUWENDRAAD** en 1972 [14], a utilisée ce qui suit :
 - -Les éléments finis classiques.
 - -La méthode des déplacements.
 - -La fonction de forme.
 - -L'interpolation du champ des déplacements.
 - -L'intégration numérique des déformations

-Le champ des déplacements.

La non linéarité mécanique et géométrique à été prise en compte par:

- Hammoum, en 1998 [09] a développé une méthode d'analyse non linéaire des ossatures planes, applicable au béton armé (béton ordinaire et béton de haute performance) et béton précontraint. La tendance actuelle de dimensionnement aux états limites ultimes, conduit à considérer le comportement non linéaire des structures. En considérant la non linéarité géométrique et mécanique .Dans cette méthode, la structure est discrétisée en éléments finis, reliant deux nœuds.

2-4- Modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé:

L'hypothèse de comportement des structures en béton armé stipule un comportement non linéaire, ce qui implique que ces structures supportent de grandes charges engendrant de grands déplacements.

- Géométriques.
- Matérielles.

a- Non linéarité matérielle :

Elles peuvent provenir de la loi de comportement élastique parfaitement plastique, qui implique la prise en compte du comportement réel des différents matériaux comme :

- La fissuration du matériau
- Le béton tendu entre les fissures.
- L'assemblage (béton-acier).
- Le béton.
- L'acier.

b- Non linéarité géométrique :

Elles sont dû aux déplacements de la structure, en effet lorsque les déplacements sont très importants l'équilibre du système ne peut plus être décrit dans la configuration initiale non déformé « théorie au premier ordre des déplacements » mais doit être étudié dans la configuration déformée. « La théorie second ordre des déplacements » impliquant la prise en compte du non linéarité géométrique, est fondamentale pour l'étude de la stabilité de forme des pièces élancées, elle permet de prédire la charge critique pour le calcul du flambement.

2-5- Aperçu sur le comportement non linéaire d'un élément en béton armé :

Considérons un poteau (une poutre console) en béton armé soumise à un effort croissant agissant au niveau de sont extrémité supérieure. Le moment fléchissant résultat est linéaire croisant et attient son maximum au niveau de l'encastrement.

Dans le domaine linéaire, avant fissuration, la variation de la courbure est également linéaire lorsque l'effort F, attient une certaine valeur, on constate en début de fissuration au niveau de la section d'encastrement. Le comportement du poteau devient non linéaire et la variation de la courbure n'est plus linéaire.

Au voisinage de la section d'encastrement, correspondant au moment maximal, la courbure dévie fortement de la droite linéaire. A l'approche de la charge maximale, on atteint la rupture de la section d'encastrement par excès de plastification des armatures tendues et par écrasement du béton comprimé. On perte alors de « zone plastique » au voisinage de l'encastrement (**figure 2-3**).

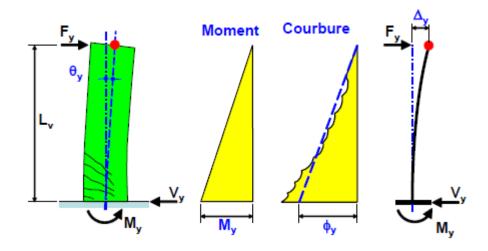


Figure 2-3: Représentation de moment et courbure [01].

3-1- Introduction:

Dans ce chapitre on s'est intéressé à la présentation du calcul non linéaire d'une section transversale en béton armé d'un élément d'ossature plane, en se basant sur la méthode des éléments finis et l'hypothèse de Navier Bernoulli. Ce dernier permettra la simulation numérique du comportement non linéaire et linéaire basés sur la méthode des éléments finis jusqu'à la rupture d'une structure plane quelconque, la section est considérée dans l'espace à deux dimension (y, z). Ainsi il permettra le calcul de la résistance, et des déplacements.

3-2- Hypothèses de calcul :

Pour l'analyse du comportement non linéaire des ossatures en béton armé, basées sur la méthode des éléments finis, (voir maillage sur la **figure 3-1**).

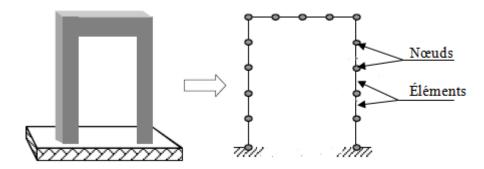


Figure 3-1 : Maillage d'un portique en élément fini.

Nous considérons une section droite d'une poutre en béton armé, symétrique par rapport à l'axe principale oz, située dans le plan de la poutre orientée selon l'axe longitudinal x.

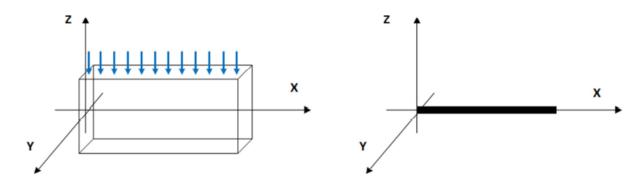


Figure 3-2 : Elément d'une poutre plane [10].

On va s'intéresse a l'élément de Bernoulli "Poutre mince", qu'il base sur l'hypothèse de Navier-Bernoulli et fonctionnant en flexion.

On se base sur les hypothèses suivantes :

- Flexion plane d'une poutre à charge moyen dans son plan (étude d'une section droit).
- La poutre transmet des efforts normaux Nx(x) suivant x, des effort tranchants Tz(x) suivant z et des moments fléchissant My(x) autour de l'axe local y, orthogonal au plan x-z.
- Les sections planes et droites avant déformation, restent planes et droites après déformation et demeure perpendiculaire à l'aire de la poutre déformée (hypothèse de Navier Bernoulli).
- Les déformations et les déplacements du second ordre sont négligés (relation linéaire entre déformation et déplacement).
 - On néglige l'influence de l'effort tranchant.
 - On suppose qu'il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton.

3-3- Cinématique :

Considérons le tronçon de poutre avant et après déformation, soit le point M(x, z) sur la configuration non déformé, après déformation le point M(x, z) subit un déplacement axial u(x,z) selon x et un déplacement transversal w(x,z) selon z.

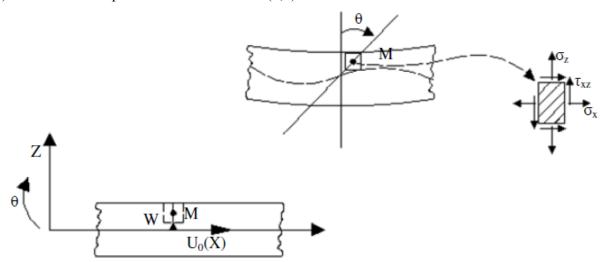


Figure 3-3: poutre mince de Bernoulli [12].

$$u(x, z) = u_0(x) - z \cdot \theta(x)$$
 (3-1)
 $w(x, z) = w(x)$ (3-2)

Avec: $u_0(x)$ = déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la poutre.

 $\theta(x)$ = rotation de la normale de la section transversale, d'abscisse x.

Tel que:

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma...$$
(3-3)

Où:

γ : La rotation due au cisaillement transversal.

Dans le cadre de l'hypothèse de Navier- Bernoulli, les déformations dues à l'effort tranchant (ou cisaillement) sont négligées, d'où $\gamma=0$.

Donc:

$$\theta(\mathbf{x}) = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}\mathbf{x}} \tag{3-4}$$

La relation (3-1) devient :

$$u(x,z) = u_0(x) + z \frac{dw(x)}{dx}$$
 (3-5)

Cette relation (3-5) exprime l'hypothèse de Navier-Bernoulli, valable dans le cas des poutres minces. $(P - \Delta)$

3-4- Relation contraintes-déformations :

On considère que la contrainte au point M(x,z), dans le cas d'un comportement élastique linéaire et isotrope, on a :

$$\begin{cases}
\sigma_{x} \\
\sigma_{z} \\
\tau_{xz}
\end{cases} = \frac{E}{(1-v^{2})} \begin{bmatrix}
1 & v & 0 \\
v & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1-v}{2}
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x} \\
\varepsilon_{z} \\
\gamma_{xz}
\end{cases}$$
(3-6)

Avec:

E: Module de Young.

v : Coefficient de poisson.

On à:

$$\varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x \tag{3-8}$$

On remplaçant (3-6) et (3-8), on obtient :

$$\begin{cases}
\sigma_{\chi} = E \varepsilon_{\chi} \\
\tau_{\gamma z} = G v_{\gamma z}
\end{cases}$$
(4.9)

3-5- Relation déformation – déplacement :

Selon l'hypothèse, la relation déformation-déplacement est linéaire on à l'équation suivante :

$$\varepsilon_{\chi} = \frac{du_0(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \tag{3-10}$$

Ou encore :
$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z\phi$$
 (3-11)

Avec:

$$\begin{cases} \varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} \\ \phi = \frac{d^2w(x)}{dx^2} \end{cases}$$

Et : ε_{0x} = déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence.

 ϕ = Courbure.

3-6- Relation entre efforts et déformations :

L'effort normal dans la section transversale d'abscisse x est :

$$N = N(x) = \int_{S} \sigma_x \, ds \qquad (3-12)$$

$$N = N(x) = \int_{S} E \varepsilon_{x} ds$$

$$= \int_{S} E(\varepsilon_{0x} + z\emptyset) ds$$

$$= \int_{S} E \varepsilon_{0x} ds + \int_{S} E z \emptyset ds$$

$$N = \varepsilon_{0x} \int_{S} E ds + \emptyset \int_{S} E z ds$$

On pose:

 $\overline{EA} = \int_{S} E \, ds$ C'est la rigidité à l'effort normal ou membrane.

 $\overline{EA} = \int_{S} E z \, ds$ C'est la rigidité du au couplage effort normal + flexion.

L'expression de l'effort normal s'écrit comme suit :

$$N = \overline{EA}.\,\varepsilon_{0x} + \overline{ES}\,\emptyset \qquad (3-13)$$

Le moment fléchissant dans la section transversale d'abscisse x par rapport à l'axe de référence :

$$M = M(x) = \int_{S} \sigma_{x} z ds$$

$$= \int_{S} E \varepsilon_{x} z ds$$

$$= \int_{S} E (\varepsilon_{0x} + z \emptyset) z ds$$

$$= \int_{S} E \varepsilon_{0x} z ds + \int_{S} E z^{2} \emptyset ds$$

$$= \varepsilon_{0x} \int_{S} E z ds + \emptyset \int_{S} E z^{2} ds$$

On pose : $\overline{EI} = \int_{S} E z^{2} ds$ C'est la rigidité à l'effort tranchant.

 $\overline{ES} = \int_{S} E z \, ds$ C'est la rigidité du au couplage effort normal + flexion.

L'expression de moment fléchissant devient :

$$M = \overline{ES}\varepsilon_{0x} + \overline{EI}\emptyset \tag{3-14}$$

Présentation de N et M sous forme matricielle suivant :

$${N \choose M} = [D] {\mathcal{E}_{0x} \choose \emptyset} ... (3-15)$$

Avec: $[D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix}$

3-7- Principe des travaux virtuels (P.T.V):

On considère une poutre mince droite de longueur ℓ ayant une section transversale de hauteur h et de largeur b(z) variant avec la hauteur. On suppose que cette poutre est soumise à un chargement repartie transversalement et f_z et longitudinalement f_x .

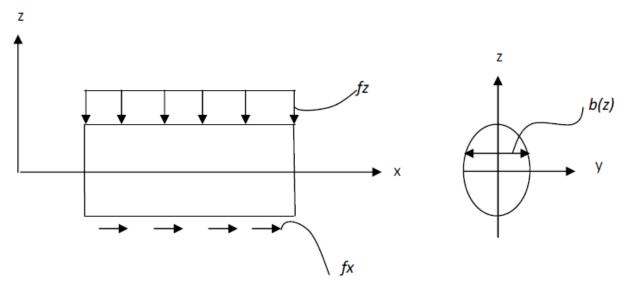


Figure 3-4: Représentation graphique du chargement.

D'après le principe des travaux virtuels (P.T.V) pour toute variation des déplacements et déformations virtuels $\delta \hat{u}$, $\delta \hat{w}$ et $\delta \hat{\varepsilon}$, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs.

$$\partial \widehat{w}_{int} = \partial \widehat{w}_{ext} \qquad (3-16)$$

Ce qui donne l'expression suivant :

$$\int_{\mathcal{V}} \langle \hat{\delta} \varepsilon \rangle \{ \sigma \} \, d\nu = \int_{0}^{\ell} \delta \widehat{w} f_{z} \, dx + \int_{0}^{\ell} \delta \widehat{u} f_{x} dx \qquad \forall \delta \hat{\varepsilon}, \delta \widehat{w} \text{ et } \delta \widehat{u}$$

$$\int_{0}^{\ell} \int_{S} \delta \hat{\varepsilon}_{x} \sigma_{x} ds \, dx - \int_{0}^{\ell} \delta \widehat{w} f_{z} dx - \int_{0}^{\ell} \delta \widehat{u} f_{x} dx = 0$$

Donc d'après la relation (3-11) on a :

$$\delta \hat{\varepsilon}_{x} = \delta \hat{\varepsilon}_{0x} + z\delta \hat{\phi}$$

$$\int_{0}^{\ell} \int_{s} (\delta \hat{\varepsilon}_{0x} + z\delta \hat{\phi}) \sigma_{x} ds \, dx - \int_{0}^{\ell} \delta \hat{w} f_{z} dx - \int_{0}^{\ell} \delta \hat{u} f_{x} dx = 0$$

$$\int_{0}^{\ell} \int_{s} (\delta \hat{\varepsilon}_{0x} \sigma_{x} + \delta \hat{\phi} \sigma_{x} z) ds \, dx - \int_{0}^{\ell} \delta \hat{w} f_{z} dx - \int_{0}^{\ell} \delta \hat{u} f_{x} dx = 0$$

$$\int_{0}^{\ell} [\delta \hat{\varepsilon}_{0x} \int_{s} \sigma_{x} ds + \delta \hat{\phi} \int_{s} \sigma_{x} z ds \, dx - \int_{0}^{\ell} \delta \hat{w} f_{z} dx - \int_{0}^{\ell} \delta \hat{u} f_{x} dx = 0 \quad ... \quad (3-17)$$
sonc:

$$\int_0^\ell \left[\delta \hat{\varepsilon}_{0x} N + \delta \hat{\phi} M \right] dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_x \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$
 (3-18)

Avec:
$$N = \int_{S} \sigma_{x} ds$$
 et $M = \int_{S} \sigma_{x} z ds$

Ainsi dans la section transversale d'abscisse x, la relation entre les efforts et les déformations sont donnée par :

$${N \brace M} = {\overline{EA} \over \overline{AS}} \quad {\overline{ES} \brace \overline{EI}} {\varepsilon_{0x} \brace \emptyset}$$

En tenant compte de (3-13) et (3-14), on peut réécrire (3-16) comme suit :

$$\int_{0}^{\ell} \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \widehat{\varphi} \rangle \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx - \int_{0}^{\ell} \delta \widehat{w} f_{z} dx - \int_{0}^{\ell} \delta \widehat{u} f_{x} dx = 0$$

$$\int_{0}^{\ell} \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \widehat{\emptyset} \rangle \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \emptyset \end{Bmatrix} dx - \int_{0}^{\ell} \delta \widehat{w} f_{z} dx - \int_{0}^{\ell} \delta \widehat{u} f_{x} dx = 0 \ \forall \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \forall \emptyset \quad . \tag{3-19}$$

3-8- Discrétisation par élément fini (poutre mince à deux nœuds) :

-Hypothèses:

On utilise un élément fini à deux (02) nœuds, chaque nœud est caractérisé par deux (02) déplacements et une (01) rotation, 3 DDL par nœud.

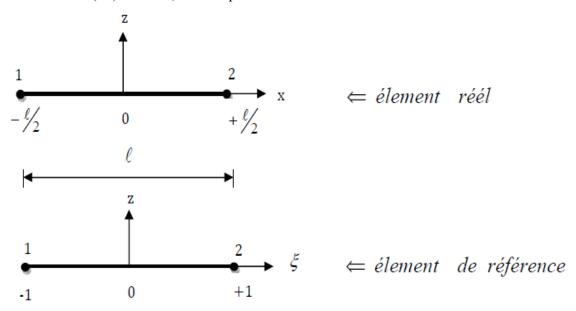


Figure 3-5 : élément fini à deux (02) nœuds et 6DDL.

Les déplacements sont représentés par un vecteur de dimension $\{u\}^t = \{u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2\}$

Le déplacement longitudinal $u_0(x)$ au niveau de l'axe de référence est approximé par des fonctions d'interpolation de type Lagrange de degré un (01) dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1 u_1 + N_4 u_2 (3-20)$$

Avec : u_1 et u_2 sont les valeurs de déplacement longitudinal aux nœuds 1 et 2 respectivement. Ou :

$$\begin{cases} N_1(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\ell}\right) \\ N_4(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\ell}\right) \end{cases}$$
(3-21)

On à:

 $\xi = \frac{x}{\ell/2} = \frac{2x}{\ell}$, les expressions précédentes deviennent comme suite.

$$\begin{cases} N_1(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2}\right) \\ N_4(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2}\right) \end{cases}$$
(3-22)

L'expression du déplacement devient :

$$u_{\cdot}(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2}\right)u_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2}\right)u_2$$
 (3-23)

Pour le déplacement transversal w(x), on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré trois (03) dans la base polynomiale.

$$w(x) = N_2 w_1 + N_3 \theta_1 + N_5 w_2 + N_6 \theta_6$$
 (3-24)

Donc, les fonctions d'interpolation sont données par :

$$\begin{cases} N_{2}(x) = \frac{1}{2} \left[4 \left(\frac{x}{\ell} \right)^{3} - 3 \left(\frac{x}{\ell} \right) + 1 \right] \\ N_{3}(x) = \ell \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right)^{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{\ell} \right) + \frac{1}{8} \right] \\ N_{5}(x) = \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{x}{\ell} \right) - 4 \left(\frac{x}{\ell} \right)^{3} + 1 \right] \\ N_{6}(x) = \ell \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right)^{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{\ell} \right) - \frac{1}{8} \right] \end{cases}$$
(3-25)

Ou bien

$$\begin{cases} N_{2}(\xi) = \frac{1}{2} [4(\xi)^{3} - 3(\xi) + 1] = \frac{1}{4} (1 - \xi)^{2} (2 + \xi) \\ N_{3}(\xi) = \frac{1}{8} [(\xi)^{3} - (\xi)^{2} - (\xi) + 1] = \frac{\ell}{8} (1 - \xi)^{2} (1 + \xi) \\ N_{5}(\xi) = \frac{1}{2} [\frac{3}{2} (\xi) - \frac{1}{2} (\xi)^{3} + 1] = \frac{\ell}{4} (1 + \xi)^{2} (2 - \xi) \\ N_{6}(\xi) = \frac{\ell}{8} [(\xi)^{3} + (\xi)^{2} - (\xi) - 1] = \frac{\ell}{8} (1 - \xi)^{2} (1 - \xi) \end{cases}$$
(3-26)

Avec : w_1, w_2 : Les valeurs de déplacement transversal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

 θ_1 , θ_2 : Les valeurs de la rotation aux nœuds 1 et 2 respectivement.

La déformation longitudinale, au niveau de l'axe de référence de l'élément est donnée par :

$$\varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} = \left\langle \frac{\partial N_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_4(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \left\langle N'_1, N'_1 \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \dots (3-27)$$

La rotation:

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = \left\langle \frac{\partial N_2(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_3(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_5(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_6(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

de NAVIER-BERNOULLI

$$= \langle -N_2', -N_3', -N_5', -N_6' \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots (3-28)$$

Et la courbure:

$$\phi(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \langle -N_2'', -N_3'', -N_5'', -N_6'' \rangle \begin{cases} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{cases}(3-29)$$

La relation entre les déformations (ε_{0x} , \emptyset) et les déplacements nodaux s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \emptyset \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & N_4' & 0 & 0 \\ 0 & N_2'' & N_3'' & 0 & N_5'' & N_6'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} (3-30)$$

Ou plus simplement

$${\begin{cases} \varepsilon_{0x} \\ \emptyset \end{cases}} = [B]\{u_n\} \tag{3-31}$$

Avec:

$$[B] = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & N_4' & 0 & 0 \\ 0 & N_2'' & N_3'' & 0 & N_5'' & N_6'' \end{bmatrix} ...$$
(3-32)

Et:

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2 \rangle$$

À partir de l'expression du P.T.V, on obtient :

$$\int_0^\ell \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^T [D] [B] \{ u_n \} dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad ...$$
 (3-33)

La matrice de rigidité élémentaire est comme suit :

$$[K]_e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^T [D] [B] dx \qquad (3-34)$$

Rappel:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi$$
 (3-35)

Avec:

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2 \iff \xi = \frac{2}{x_2 - x_1} \left[x - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right]$$

Pour:

$$x_1 = -\frac{\ell}{2}, \qquad x_2 = +\frac{\ell}{2} \implies \xi = \frac{2}{\ell}(x-0) = \frac{2x}{\ell}$$

$$x \to \frac{-\ell}{2}$$
 $0 \to \frac{+\ell}{2}$

$$\xi \rightarrow \frac{2}{5}$$
 0 $+1$

$$[K]_e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B(x)]^T [D(x)] [B(x)] dx = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi \dots (3-36)$$

L'évaluation de $[K]_e$ est effectuée par intégration numérique :

$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi = \sum_{i=1}^{n} [B(\xi_i)]^T [D(\xi_i)] [B(\xi_i)] \alpha_i$$

$$ou \begin{cases} n = Nomnre \ de \ point \ de \ Gauss \\ \xi_i = Abscisse \ du \ point \ de \ Gauss \ i \\ \alpha_i = Poids \ d'integration au \ point \ de \ Gauss \ i \end{cases}$$

Dans notre cas, on utilise trois points de Gauss n=3

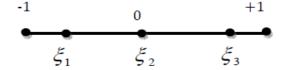


Figure 3-6 : Représentation graphique des abscisses des points de Gauss.

Les Abscisses des points de Gauss	Les poids d'intégration aux points de Gauss i
$\xi_1 = -\sqrt{3/5}$	$\alpha_1 = \frac{5}{9}$
$\xi_2 = 0$	$\alpha_2 = \frac{8}{9}$
$\xi_3 = +\sqrt{3/5}$	$\alpha_3 = \frac{5}{9}$

Tableau 3-1 : Abscisses et poids d'intégration de Gauss utilisés pour l'intégration numérique de l'élément à deux nœuds.

-calcul des expressions de N_i' et N_i'' :

On a:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \tag{3-37}$$

Dans notre cas:

$$\xi = \frac{2x}{\ell} \implies \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{\ell}$$

$$\implies \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{2}{\ell} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \left(\frac{2}{\ell}\right)^2$$

Donc les expressions des N_i' devient comme suite

$$\begin{cases} N_{2}(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\xi)^{3} - \frac{3}{2} (\xi) + 1 \right] \implies N_{2}''(\xi) = \frac{6}{\ell^{2}} \xi \\ N_{3}(\xi) = \frac{\ell}{8} \left[(\xi)^{3} - (\xi)^{2} - \xi + 1 \right] \implies N_{3}''(\xi) = -\frac{4}{\ell^{2}} \left(\frac{\ell}{4} - \frac{3\ell}{4} \xi \right) \\ N_{5}(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} (\xi) - \frac{1}{2} (\xi)^{3} + 1 \right] \implies N_{5}''(\xi) = -\frac{6}{\ell^{2}} \xi \\ N_{6}(\xi) = \frac{\ell}{8} \left[(\xi)^{3} + (\xi)^{2} - \xi - 1 \right] \implies N_{6}''(\xi) = \frac{4}{\ell^{2}} \left(\frac{\ell}{4} + \frac{3\ell}{4} \xi \right) \end{cases}$$
(3-38)

- Evaluation du vecteur des forces résiduelles {R }e:

D'après la relation (4-14) du P.T.V, on a :

$$\int_0^\ell \delta \left[\hat{\varepsilon}_{0x} \int_s \sigma_x ds + \delta \hat{\phi} \int_s \sigma_x z ds \right] dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_z dx = 0 \dots (3-39)$$

Qui peut s'écrire encore sous la forme :

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x}, \delta \widehat{\varphi} \rangle \begin{cases} \int_{s}^{s} \sigma_{x} ds \\ \int_{s}^{s} \sigma_{x} z ds \end{cases} dx - \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \langle \delta \hat{u}, \delta \widehat{w} \rangle \begin{cases} f_{x} \\ f_{x} \end{cases} dx = 0 \quad ... \quad (3-40)$$

Donc d'après les relations $\begin{pmatrix} \delta \hat{\varepsilon}_{0x} \\ \delta \widehat{\emptyset} \end{pmatrix} = [B] \{\hat{u}_n\} \ et \ [B]$

 $\{\hat{u}_n\}$: Vecteur des déplacements nodaux.

$$\operatorname{Et} \left\{ \begin{array}{l} \delta \hat{u} \\ \delta \hat{w} \end{array} \right\} = [N] \{ \hat{u}_n \}$$

Avec [N]: matrice des fonctions d'interpolation (de forme).

On à : $\int_{S} \sigma_{x} ds = N(x)$ Effort normal à l'abscisse x de l'élément.

 $\int_{S} \sigma_{x} z ds = M(x)$ Moment fléchissant à l'abscisse x de l'élément.

L'expression devient comme suite :

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t {N(x) \brace M(x)} dx - \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \langle \delta \hat{u}_n \rangle [N] {f_x \brace f_x} dx = 0$$

Ce qui donne :

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \langle \delta \hat{u}_n \rangle [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_x \end{Bmatrix} dx \qquad \forall \partial \hat{u}_n \dots (3-41)$$

Ou

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^t [B]^t {N(x) \brace M(x)} dx = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [N] {f_x \brace f_x} dx \qquad (3-42)$$

Donc l'expression précédente va devenir comme suite :

$${p}^e - {f}^e = 0$$
(3-43)

Avec : $\{p\}^e$: Vecteur des forces nodales résultant des efforts intérieurs.

 $\{f\}^e$: Vecteur des forces résultant des efforts reparties appliques à l'élément en cours.

Remarque: Dans le cas non linéaire, les efforts intérieurs dépendent de la solution $\{u_n\}^e$. A chaque étape de résolution, il reste des forces résiduelles qu'il faut équilibrer à l'étape suivant: $\{p\}^e - \{f\}^e = \{\psi\}^e = \{0\}$

Le processus de calcul non linéaire consiste à rechercher la solution $\{u_n\}$ qui rend les forces résiduelles aussi proches que possible de zéro.

- Evaluation de {p}pour chaque élément :

$$\{p\}^e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^t {N(x) \atop M(x)} dx \qquad (3-44)$$

Le calcul des composantes de $\{p\}^e$ se fait à l'aide d'une intégration numérique sur l'élément de référence.

On a:

$$\{p\}^{e} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^{t} {N(x) \brace M(x)} dx \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B(\xi)]^{t} {N(\xi) \brace M(\xi)}....(3-45)$$

Avec:

$$[B] = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & N_4' & 0 & 0 \\ 0 & -N_2'' & -N_3'' & 0 & -N_5'' & -N_6'' \end{bmatrix}$$

3-9- Discrétisation de la section transversale :

La méthode la plus simple et la plus juste est la discrétisation de la section transversale en trapèze, pour permettre d'évaluer l'état de contrainte-déformation et de déterminer la matrice de rigidité et des efforts dans la section droite et dans l'élément poutre dans sa totalité. Les quantités EA, ES et EI son évaluées en divisant la section transversale en un certain nombre de trapèzes. Chaque trapèze est subdivisé en un certain nombre de couches horizontales de modules E_j , d'épaisseur h_j et de largeur b_j , et qui seront comptées de bas en haut (voir figure 3-7).

Remarque:

Cette décomposition en trapèze est valable sauf dans le cas d'une flexion plane (XY).

Soit n_i le nombre total de couches horizontales. Les expressions des différentes rigidités s'écrivent comme suit :

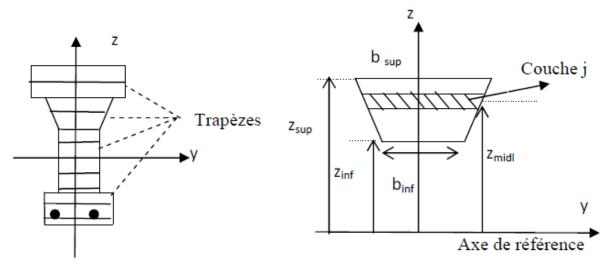
$$\overline{EA} = \int_{S} Eds = \sum_{j=1}^{n_e} E_j b_j h_j$$

$$\overline{EA} = \int_{S} E z \, ds = \sum_{j=1}^{n_e} E_j \, b_j \, h_j \, z$$
 (3-47)

$$\overline{EA} = \int_{S} E z^{2} ds = \sum_{j=1}^{n_{e}} E_{j} b_{j} h_{j} z_{j}^{2}$$

Avec : Z_j : ordonnée du milieu de la couche j/à l'axe de référence.

B_j: largeur du milieu de la couche j.



a. Section transversale

b. couche Trapézoïdale itrap

Figure 3-7 : Discrétisation de la section transversale en couches trapézoïdales [12].

Sachant que chaque trapèze est caractérisé par :

B_{inf}= largeur inférieure du trapèze

B_{sup}= largeur supérieure du trapèze.

Z_{inf}= position inférieure par rapport à l'axe de référence.

Z_{sup}= position supérieure par rapport à l'axe de référence.

Pour chaque couche, on considère la déformation au milieu de la couche. La position de la couche en cours par rapport à l'axe de référence est définie par z_{midl} .

$$z_{midl} = z_{inf} + h_{layr}(j - 0.5)$$
 (3-48)

Ou : h_{layr} c'est l'épaisseur de la couche j.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z\emptyset$$
 (3-49)

La largeur au niveau du milieu de la couche est :

$$b_{layr} = b_{inf} + (b_{sup} - b_{inf}) \frac{h_{layr}}{h_{trap}} (j - 0.5)$$
 (3-50)

Ou h_{trap} est la hauteur du trapèze en cours (i_{trap})

4-1- Introduction:

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement non linéaire des matériaux en béton armé, ainsi qu'à la méthode de calcul itérative utilisé dans le cas élastique non linéaire.

4-2- Comportement des matériaux:

L'ossature et l'élément que l'on se propose d'étudier sont réalisés en béton armé, matériau au comportement complexe de par son hétérogénéité et des comportements mécaniques très différents de ses constituants. Nous allons donc présenter le comportement retenues pour le béton et l'acier (les principales caractéristiques du ces matériaux), ainsi que le processus d'homogénéisation adopté pour l'obtention du comportement homogène équivalent.

4-2-1- Béton

Le béton présent des résistances à la compression assez élevées, et une faible résistance à la traction est donné par la courbe contrainte-déformation. De plus, le béton à un comportement fragile, on lui associe des armatures en acier, c'est le béton armé. Différents modèles existent pour représenter le comportement du béton. Une représentation de ce comportement est donnée par SARGIN (en compression) et GRELAT (en traction).

a- Comportement du béton en traction et en compression (comportement général du matériau) :

Ce comportement est représenté par la **figure 4-1** ci-dessous.

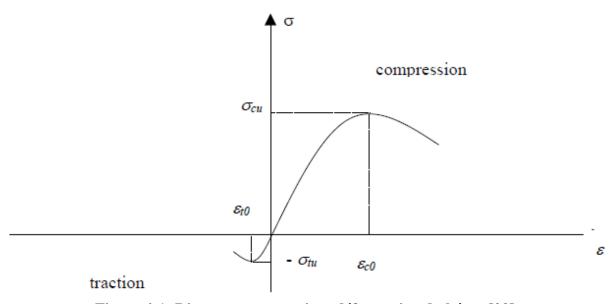


Figure 4-1: Diagramme contrainte-déformation du béton [02].

Cette courbe se caractérise par un maximum de contrainte de compression σ_{cu} mesurée pour une déformation ε_{0c} , ainsi qu'une faible résistance à la traction dont le pic noté σ_{tu} est mesuré pour une déformation ε_{0t} .

b- Béton en compression de SARGIN:

On admet un comportement élastique (c'est-à-dire réversible) non linéaire.

Les relations qui lient les contraintes aux déformations des fibres de béton comprimé sont connues à l'âge t quelconque. Ces lois sont définies en fonction des paramètres \mathcal{E}_{b0} , $f_{\sigma j}$, \mathcal{E}_{b0} et \mathcal{E}_{u} .

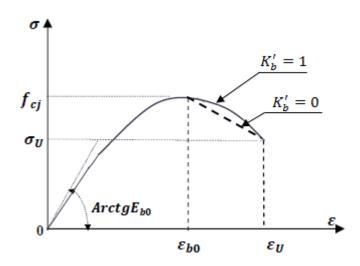


Figure 4-2 : Comportement du béton sous contrainte de compression.

On utilise les expressions proposées par SARGIN dans les références [04], [05] et [11].

$$\sigma = f_{\sigma f} \frac{u_0 z + (u_0^2 - 1) z^2}{1 + (u_0^2 - 2)z + u_0^2 z^2}$$
(4-1).

Avec:
$$\bar{s} = \frac{s}{s_0}$$
; $K_b = \frac{E_{b0} s_0}{f_{ej}}$; $E_{b0} = 11000 \sqrt[5]{f_{ej}}$

Et : f_{aj} : c'est la résistance à la compression du béton à l'âge j jours, donnée en MPa.

8_{b0}: Module d'élasticité longitudinal du béton à l'origine.

 K_b Et K_b : Paramètres adimensionnels, ajustent la branche descendante et ascendante, respectivement, de la loi de Sargin.

La partie descendante de la courbe peut être approximée par une branche linéaire reliant les pointe (v_{bo}, f_{oj}) et (v_{b}, v_{b}) . K_{b} Influe essentiellement sur l'allure de la branche descendante :

 $K_h^t = 0$ \implies Pour les bétons ayant un comportement fragile.

 $K_b^s = 1$ \implies Pour les bétons ayant un comportement ductile.

Nous pouvons adopter les expressions suivantes d'après [05] :

$$K_{b}^{t} = \begin{cases} K_{b} - 1 & pour & f_{oj} \leq 30MPa \\ 0 & pour & f_{oj} \geq 55MPa \\ (K_{b} - 1) \left(\frac{88 - f_{oj}}{28}\right) & pour & 30MPa < f_{oj} < 55MPa \end{cases}$$
(4-2)

c- Béton en traction GRELAT [11]:

L'expression de Grelat [11] attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre représenté sur la **figure 4-3**, dont la contribution du béton s'annule à la plastification des aciers.

La résistance du béton à la traction et la contribution du béton tendu entre les fissures sont généralement négligées dans les calculs habituels.

La plastification nous ramène à la dimension du diamètre et à la rupture de l'acier. Donc, pour tenir compte de la contribution des dents du béton située entre les fissures dans notre étude, nous utiliserons le modèle développé par GRELAT [11], qui simule le comportement moyen de dent du béton entre deux fissures. Cette contribution est décrite dans les références [03] et [13].

Le comportement attribué au béton tendu fissuré, c'est le diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre représenté sur la **figure 4-3**, dont la contribution du béton s'annule à la plastification des aciers.

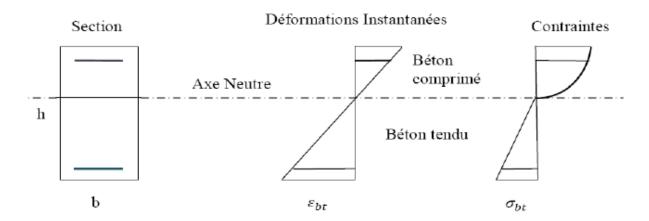


Figure 4-3: comportement de béton ordinaire avant fissuration.

Les fibres du béton tendu d'un module de déformation E_{bt} sont définies à partir de la contrainte et la déformation instantanée du béton tendu. Elles sont données par la formule suivante:

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\sigma_{bt}} \tag{4-3}$$

Donc, la participation du béton tendu est traduite en fonction des limites suivante:

Eft: C'est la résistance à la traction du béton.

E : C'est la contrainte limite d'écoulement des aciers.

 $s_{ft} < |s_{bt}| \le s_{rt} \rightarrow \text{Fissuration avec participation du béton tendu (courbe parabole). La}$ formule est : $\sigma_{bt} = -f_{tf} \frac{(s_{bt} + s_{-t})^2}{(s_{rt} - s_{-t})^2}$ (4-5).

 $|s_{be}| > s_{re} \rightarrow$ Fissuration sans participation du béton tendu (rupture).

La valeur est : $\sigma_{ba} = 0$ (4-6).

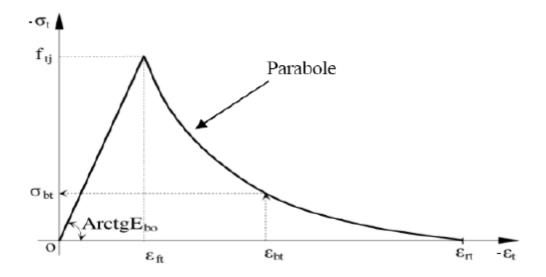


Figure 4-4: Diagramme contrainte- déformation instantanée du béton tendu

(Grelat) [11].

Avec:

 \boldsymbol{E}_{br} : Module d'élasticité longitudinale du béton.

E_{b0}: Module Young tangent à l'origine.

f_{ti}: Résistance à la traction de béton.

 $\mathcal{E}_{f_{\mathbf{c}}}$: Déformation de traction correspondant à $f_{\mathbf{c}_{f}}$, qui égale à $\mathcal{E}_{f_{\mathbf{c}}} = \frac{f_{\mathbf{c}_{f}}}{E_{b_{\mathbf{c}}}}$

 ε_{∞} : Déformation limite d'élasticité de l'acier le plus tendu.

4-2-2- Aciers:

L'acier présente une très bonne résistance à la traction (et aussi `a la compression pour des élancements faibles), mais si aucun traitement n'est réalisé, il subit les effets de la corrosion. De plus, son comportement est ductile, avec des déformations très importantes avant rupture.

Nous avons deux types d'aciers utilisés pour le renforcement du béton, qui sont les aciers naturels et les aciers écrouis.

- Aciers naturels:

On peut adopter pour les aciers naturels la loi élastoplastique parfaite qui s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} \sigma = E_e \varepsilon & pour \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\sigma_e}{r_e E_e} \\ \sigma = \frac{\sigma_e}{r_e} & pour \quad \varepsilon \ge \frac{\sigma_e}{r_e E_e} \end{cases}$$
(4-7).

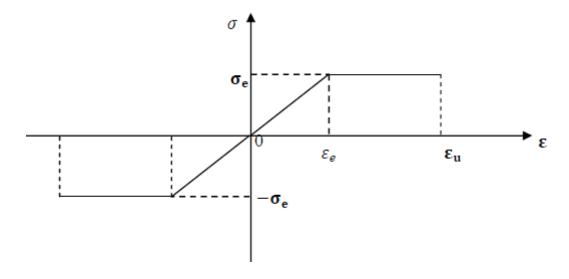


Figure 4-5: Loi élastique parfait.

- Aciers écrouis :

L'acier possède un comportement symétrique en traction et en compression, décomposé en une partie élastique linéaire et une partie plastique non linéaire. Une représentation de ce comportement est donnée par la **figure 4-6**.

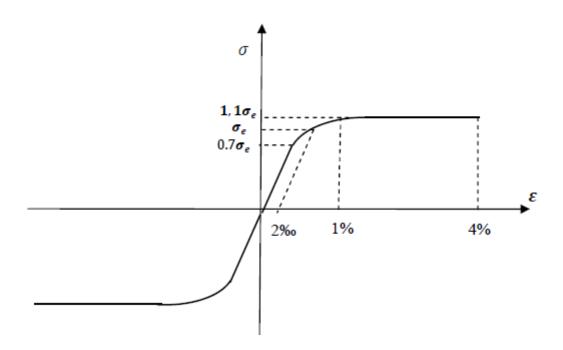


Figure 4-6: Diagramme contrainte-déformation des aciers BEAL.

$$\begin{cases} \sigma_s = E_a s_s & pour \\ s_s = \frac{\sigma_s}{E_a} + 0.823 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_c} - 0.7\right)^s & pour \\ \sigma_s = 1.1 \sigma_e & pour \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_s \leq 0.7 \sigma_e \\ 0.7 \sigma_e < \sigma_s < 1.1 \sigma_e \\ pour \end{cases}$$

$$(4-8).$$

Avec:

 E_a : C'est le module d'Young de l'acier à l'origine.

σ_s: C'est la limite élastique conventionnelle à 2%.

0.7 c. : C'est la contrainte ou s'arrête le diagramme linéaire.

4-3- Méthode de résolution non linéaire :

La discrétisation par élément fini d'un problème non linéaire conduit à un système d'équations algébriques de la forme suivante :

$${F}-[K(U)]{U} = {\psi(U)} \neq 0$$
 (4-10)

Avec:

[K(U)]: Matrice de rigidité de la structure dépendant de vecteur $\{U\}$.

 $\{F\}$: Vecteur de forces nodales appliquées à la structure.

 $\{\psi(U)\}$: Vecteur des forces résiduelles, ou résidus, exprimant le déséquilibre entre les efforts appliqués à la structure et les efforts internes, à une étape du chargement donné.

 $\{U\}$: Vecteur des déplacements nodaux.

Pour la résolution des systèmes précédents, on envisage une procédure de calcul itérative qui consiste à rechercher la solution $\{U_n\}$ qui rend le résidu $\{\psi\{U_n\}\}$ aussi proche que possible de zéro.

4-3-1- Algorithme de résolution non linéaire :

Les méthodes de résolution d'équation non linéaire ont déjà fait l'objet de plusieurs recherches. Nous limiterons donc à un petit aperçu de trois méthodes de résolution non linéaire [08].

- Méthode Newton-Raphson standard :

Elle est basée sur la matrice de rigidité tangente $K_i(U)$ qui est actualisée, et un système complètement nouveau d'équations est résolu à chaque itération. Cette méthode exige un nombre réduit d'itérations et converge rapidement vers la solution exacte (**figure 4-7**).

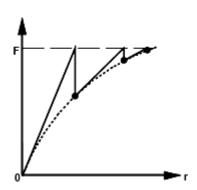


Figure 4-7: Méthode Newton-Raphson.

- Méthode Newton-Raphson modifiée :

Dans ce cas la matrice de rigidité tangente est calculée une seule fois au début de l'incrément de charge, pour la première itération **figure 4-8**. Cette méthode exige un grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence et arriver à la solution.

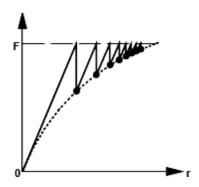


Figure 4-8: Méthode Newton-Raphson modifiée.

- La méthode de la rigidité sécante :

La matrice de rigidité est recalculée à chaque itération, et la solution converge de façon sensiblement moins rapide, mais son implémentation est beaucoup plus légère (**figure 4-9**). Cette méthode est mieux adaptée pour les cas des structures ayant un comportement adoucissant (cas du béton tendu fissuré dans les structures en béton armé). Le cout de calcul par itération est le même que pour la méthode Newton-Raphson modifiée.

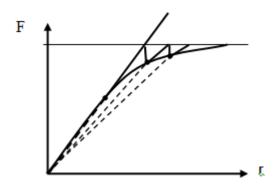


Figure 4-9: Méthode de la sécante.

4-3-2- L'algorithme de résolution non linéaire :

L'analyse non linéaire est effectuée selon une procédure itérative :

1. Pour l'étape j-1, correspondant au chargement extérieurs $\{F\}^{j-1}$, on suppose connu l'état de la structure étudiée (déplacement $\{U\}^{j-1}$, forces résiduelles $\{\psi\}^{j-1}$)

l'étape initiale j=1 correspond au chargement nul ($\{\vec{v}\}^{\circ} = \{0\}$ et $\{\psi\}^{\circ} = \{0\}$).

2. Incrémentation du chargement extérieur.

a.

$${F}^{j} = {F}^{j-1} + {\Delta F}^{j}$$

- **b.** Début de la procédure itérative i=1.
- c. Incrémentation des forces résiduelles à équilibrer.

$$\{\psi\}^j = \{\Delta F\}^j + \{\psi\}^{j-1}$$

- 3. Evaluation des matrices de rigidité élémentaires [K], après l'assemblage de la matrice de rigidité globale [K] en fonction de la solution de l'étape précédente j-1.
- **4.** Résolution du système d'équations :

$$\{K\}^i = \{\Delta U\}^i + \{\psi\}^i$$

5. Cumul du vecteur des déplacements nodaux :

$$\{U\}^t = \{U\}^{t-1} + \{\Delta U\}^t$$

- 6. Evaluation des forces résiduelles élémentaires [ψ]⁺¹ et assemblage dans le vecteur global des forces résiduelles.
- **7.** Test de convergence :
- a. Si convergence, l'étape actuelle est convergente ⇒ passage a l'étape (2) pour
 l'incrément de chargement suivant j+1.
- **b.** Sinon, passage à l'itération suivante i+1 → revenir a l'étape (3). (Si le nombre maximal d'itération du processus est divergent → arrêt de calcul)

4-3-3- Organigramme de calcul:

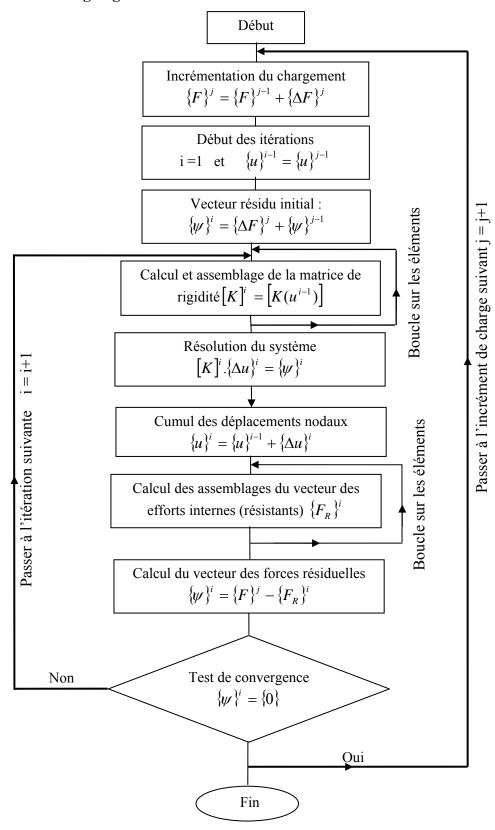


Figure 4-10: Organigramme de calcul.

4-4- Programme de calcul poutre_mince2 :

Ce programme est basé sur des éléments finis et les hypothèses de Navire-Bernoulli présentées auparavant dans ce chapitre, il a été déjà élaboré en langage FORTRAN 90 (déjà existant, il a été testé au paravent). Le programme informatique est appelé poutre_mince2, cet outil de calcul permettant la simulation numérique du comportement non linéaire (non linéarité matérielle) d'un élément ou d'une ossature plane en béton armé (courbe charge-déplacement) jusqu'à la rupture. La présentation de ce programme est mise en évidence en ANNEXE A. La description des principales subroutines, du fichier de données, des variables du fichier de données, et du fichier résultats y sont bien détaillés en ANNEXE B.

5-1- Introduction:

Dans le cadre de ce chapitre, on s'intéresse à étudie l'influence de la finesse du discrétisation utilisée dans le maillage des éléments d'ossatures (poutres, poteaux) sur les résultats de simulation et leur comportement dans le domaine linéaire.

5-2- Présentation de l'exemple du poteau de Low-Mohle [02] :

C'est un poteau encastré à sa base, avec une hauteur de 514.40mm, il est soumis a sont sommet à deux charges, une fixe et verticale avec une densité de 44.5KN, et l'autre c'est une charge horizontal variable F croissante jusqu'à la rupture. Les caractéristiques des matériaux utilisés sont représentées sur les **tableaux 5-1** et **5-2**.

Module d'élasticité E (MPa)	$33x10^3$
Coefficient de poisson	0.2
Résistance en compression f_{cj} (MPa)	42.13
Résistance à la rupture en compression du béton (MPa)	44
Résistance en traction f_{tj} (MPa)	3.05

Tableau 5-1: Caractéristiques du béton.

1 ^{er} et le 3 ^{éme} lit d'aciers		2 ^{éme} lit d'aciers			
Module d'élasticité E (MPa)	$200x10^3$	Module d'élasticité E (MPa)	$200x10^3$		
Coefficient de poisson	0.3	Coefficient de poisson	0.3		
Limite d'élasticité (MPa)	465.10	Limite d'élasticité (MPa)	465.10		
Résistance à la rupture (MPa)	500	Résistance à la rupture (MPa)	500		

Tableau 5-2 : Caractéristiques des aciers.

Les données géométriques du poteau de Low-Mohle sont représentées sous forme d'un dessin, qui nous montre la hauteur du poteau et les efforts appliqués, ansai que la section transversale voir la **figure 5-1**.

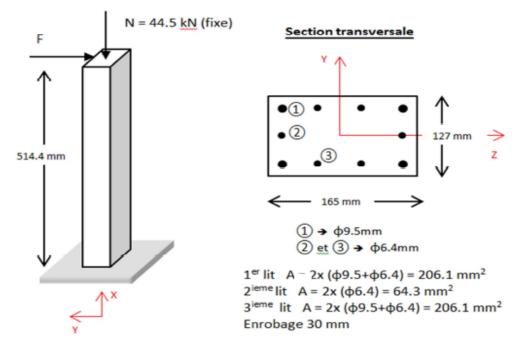


Figure 5-1 : Les données du poteau de Low-Mohle [10].

5-3- Discrétisation :

Les différents discrétisations utilisées pour la simulation de ce poteau. Sont représentées sur la **figure 5-2**.

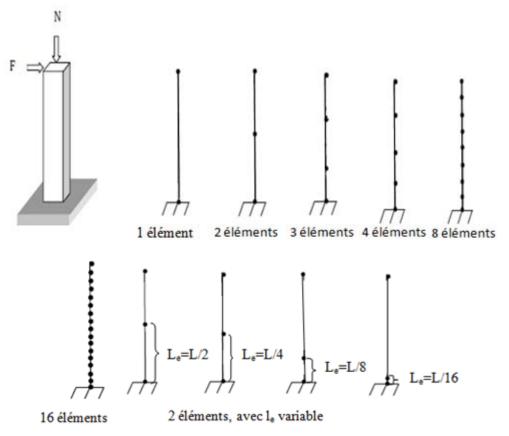


Figure 5-2: Maillages utilises.

Avec:

 l_e : Longueur de l'élément finis.

L : Longueur totale du poteau.

5-4- La simulation numérique :

Pour cet essai, nous avons effectué plusieurs simulations numériques en utilisant les différents maillages présentes dans la **figure 5-2**.

Les courbes charge-déplacement en tête du poteau sont présentées sur la figure 5-3.

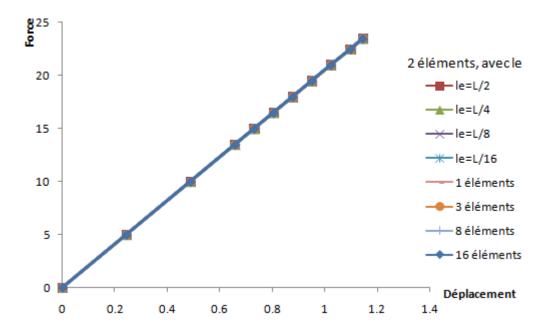


Figure 5-3 : Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées.

On constate que les droites charge-déplacement obtenue pour les divers maillages considérés sont parfaitement confondues.

Dans ce cas, l'utilisation d'un maillage avec 1 seul élément est suffisante pour la modélisation et la simulation du poteau.

En effet dans un comportement linéaire en flexion, la courbure est linéaire. Par conséquence un élément fini poutre à 2 nouds (dans lequel la courbe est linéaire) est suffisent pour la modélisation du poteau.

Conclusion:

Dans le domaine du comportement linéaire, les résultats des calculs ne sont pas influencés par la finesse de discrétisation. En effet, dans ce cas la courbure est linéaire et par conséquent un seul élément fini poutre suffit pour représenter un élément réel (poutre, poteau) d'une ossature plane.

6-1- Introduction:

Dans ce chapitre, on se propos d'étudier l'influence de la finesse de discrétisation dans le maillage des éléments d'ossatures planes en béton armé, sur les résultats des calculs dans le domaine non linéaire.

On s'intéresse, en particulier, à l'évaluation de la charge maximale et au déplacement correspondant atteints à la rupture.

Il s'agit dans un premier temps, de simuler le comportement non linéaire jusqu'à la rupture du poteau de Low-Molle.

On s'intéresse, ensuite, à l'étude par simulation de deux portiques, respectivement, à 1 et 2 niveaux (R.D.C et R.D.C+1).

6-2- Simulation du poteau de Low-Mohle:

Les données géométriques et les caractéristiques des matériaux sont représentées respectivement sur la **figure 5-1** et les **tableaux 5-1, 5-2**.

6-2-1- Discrétisation avec des nœuds équidistants [07]:

La discrétisation utilisée pour la simulation du poteau de 1, 2, 3, 4, 8 et 16 éléments (voir la **figure 6-1**).

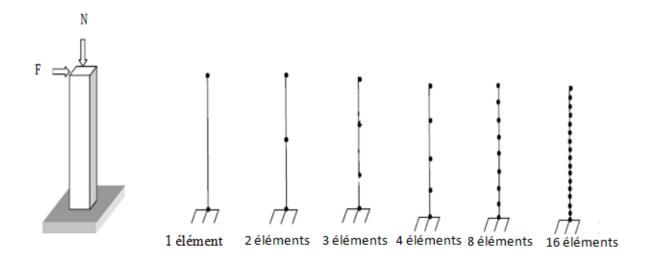


Figure 6-1 : Représentation du maillage utilisé.

6-2-1-1 La simulation :

Pour cet essai nous avons effectué plusieurs simulations, en utilisent 1, 2, 3, 4, 8 et 16 éléments respectivement. Les résultats des simulations sont présentes sur le **tableau 6-1** et **la figure 6-2**.

N éléments	l_e	$F_{\max n}$	$F_{\max n}$	$d_{\max n}$	$d_{\max n}$
	\overline{h}		F_{exp}		d_{exp}
1	1	36.5	1.52	7.681	1.50
2	0.5	29	1.20	7.411	1.45
3	0.333	26.5	1.10	6.835	1.33
4	0.25	25.5	1.06	6.544	1.28
8	0.125	24	1	5.54	1.08
16	0.0625	23.5	0.98	5.247	1.02
Expérimentale		24	1	5.11	1

Tableau 6-1 : Principaux résultats de la simulation en fonction du nombre d'éléments.

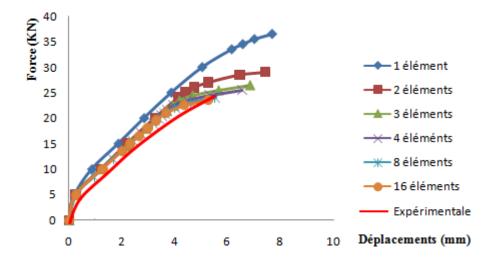


Figure 6-2 : Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées.

L'évaluation de la charge maximale et du déplacement obtenu à la rupture en fonction du nombre d'éléments finis utilisés pour la discrétisation est présentée sous forme d'histogramme sur les **figures 6-3, 6-4**.

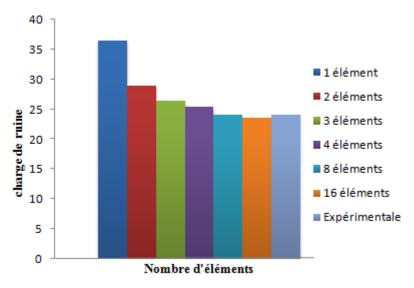


Figure 6-3 : histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation.

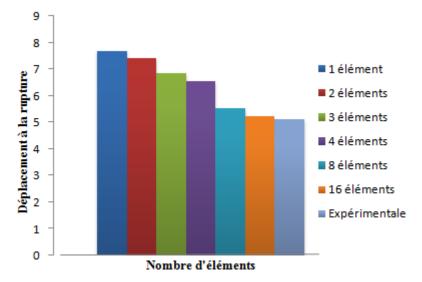


Figure 6-4 : histogramme donnant les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation.

D'après les figures 6-2, 6-3 et 6-4 et le tableau 6-1 on peut faire la remarque suivante :

La finesse de discrétisation influence considérablement les résultats, que ce soit en termes de déplacement, où en termes de la charge appliquée. En augmentant le nombre d'éléments, les courbes de calcul se rapprochent de plus en plus des résultats exacts.

6-2-1-2- influence de la finesse de discrétisation sur la précision des calculs :

Nous avons représenté l'erreur relative sur les charges et les déplacements à rupture en fonction du nombre d'éléments. Les principaux résultats sont présentés sur le **tableau 6-2** et l'histogramme **6-5**, **6-6**.

N éléments	l_e	$F_{\max n}$	$F_{\max n}$	Erreur	$d_{\max n}$	$d_{\max n}$	Erreur
	L		$F_{\text{max 16}}$	relative		$d_{ ext{max}16}$	relative
				Err F(%)			Err d(%)
1	1	36.5	1.52	52	7.681	1.50	50
2	0.5	29	1.20	20	7.411	1.45	45
3	0.333	26.5	1.10	10	6.835	1.33	33
4	0.25	25.5	1.06	6	6.544	1.28	28
8	0.125	24	1	0	5.54	1.08	8
16	0.0625	23.5	0.98	2	5.247	1.02	2
Expérimentale		24	1	0	5.11	1	0

Tableau 6-2 : Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations.

Avec:

F: C'est la force maximale selon l'élément fini utilisé.

d : C'est le déplacement maximal selon l'élément fini utilisé.

 F_{max} et d_{max} : C'est la force et le déplacement correspondant à la discrétisation maximale selon le modèle d'éléments finis utilisées.

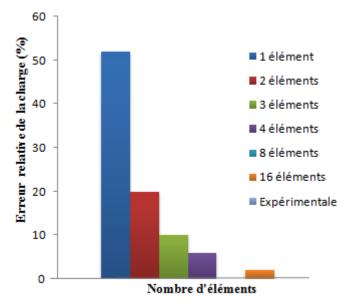


Figure 6-5 : Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments

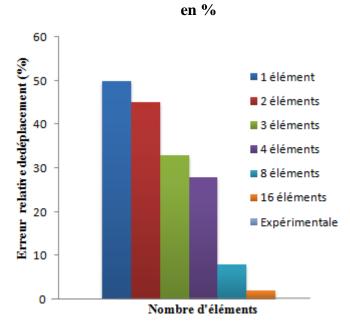


Figure 6-6 : Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments en %

6-2-1-3- Interprétation des résultats :

A l'issue des calculs présents, on peut faire les constatations suivantes :

- La finesse de discrétisation influence considérablement les résultats, que ce soit en termes de déplacement, où en termes de la charge appliquée. En augmentant le nombre d'éléments, les courbes de calcul se rapprochent de plus en plus des résultats exacts.
- La performance des différentes discrétisations apparaissant clairement en comparant les variations des erreurs relatives de forces et des déplacements en fonction du nombre d'éléments finis utilisés.
- Il est clair que les erreurs relatives sur la charge et le déplacement à la rupture diminuent, autrement dit la précision s'améliore, lorsque le nombre d'éléments finis augmente. Ainsi que la précision dans l'évaluation de la charge maximale.

6-2-2- Discrétisation proposée:

Dans ce qui suit on se propose de simuler le poteau de Low-Mohle en utilisant une discrétisation à 2 éléments, en serrant les nœuds au voisinage de l'encastrement (l_e/L varies de 1/2 à 1/16).

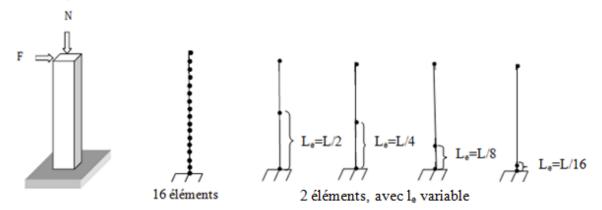


Figure 6-7: Maillage utilise de la variable le.

Les valeurs correspondantes de l_e/h sont représentés sur le **tableau 6-3**.

L (mm)	l _e (mm)	l _e /h (mm)
514.40	257.20	1.558
514.40	128.60	0.779
514.40	64.30	0.389
514.40	32.15	0.195

Tableau 6-3 : Valeurs de l_e/h considérées.

Avec : l_e : C'est la longueur de l'élément finis.

L : C'est la longueur totale du poteau.

h: C'est la hauteur de la section transversale du poteau.

6-2-2-1- La simulation :

Les courbes charges-déplacements obtenus à l'issu des simulations numérique sont présentées sur la **figure 6-8**.

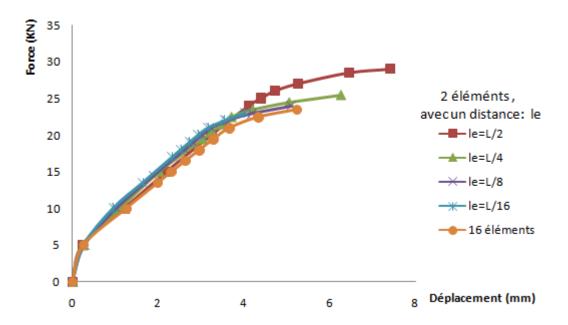


Figure 6-8 : Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées.

Les valeurs des charges et déplacements sont présentes sur les histogrammes des

figures 6-9 et 6-10.

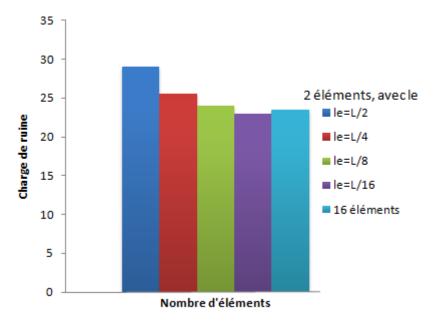


Figure 6-9 : histogramme donnant les charges de ruine en fonction du type de discrétisation.

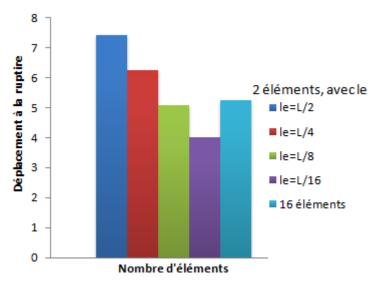


Figure 6-10 : histogramme donnant les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation.

Avec: le=L/2=257.20mm.

le=L/4=128.60mm.

le=L/8=64.30mm.

le=L/16=32.15mm.

En serrant le maillage au voisinage de l'encastrement on obtient un résultat satisfaisant avec 2 éléments équivalent à celui obtenu avec une discrétisation très fine avec 16 éléments équivalents.

6-2-2-2 Influence du maillage sur la précision des calculs :

Pour les différents discrétisations utilises, nous avons évalué les erreurs relatives sur le chargement et le déplacement à la rupture. Les principaux résultats sont donnes au

tableau 6-4 et sous forme d'histogrammes sur les figures 6-11 et 6-12.

	l_e	l_e	$F_{\max n}$	$\underline{F_{\max n}}$	Erreur	$d_{\max n}$	$d_{\max n}$	Erreur
	L	h	(KN)	$F_{\text{max 16}}$	relative	(mm)	$d_{\max 16}$	relative
					Err F(%)			Err d(%)
2 éléments (L/2)	0.5	1.558	29	1.23	23	7.411	1.412	41.2
2 éléments (L/4)	0.333	1.038	25.5	1.085	8.5	6.265	1.194	19.4
2 éléments (L/8)	0.25	0.779	24	1.021	2.1	5.089	0.969	3.1
2 éléments (L/16)	0.125	0.389	23	0.978	2.2	4.023	0.766	23.4
16 éléments	0.0625	0.195	23.50	1	0	5.247	1	0

Tableau 6-4 : Comparaison des résultats donnés par les différentes discrétisations.

Avec : F: C'est la force maximale selon l'élément fini utilisé.

D : C'est le déplacement maximal selon l'élément fini utilisé.

 F_{max} et d_{max} : C'est la force et le déplacement correspondant à la discrétisation maximale selon le modèle d'élément fini utilisé.

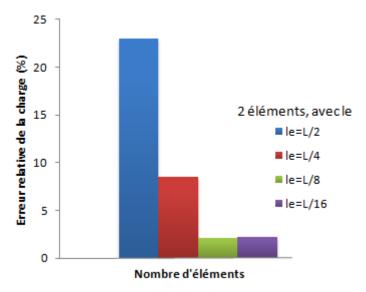


Figure 6-11 : Histogramme donnant l'erreur relative de la charge en fonction du nombre d'éléments en %

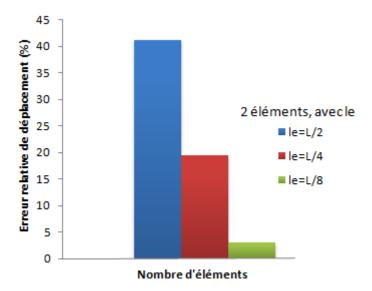


Figure 6-12 : Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments en %

En serrant le maillage au voisinage de l'encastrement correspondant à la zone du comportement non linéaire, on obtenu des résultats satisfaisant avec seulement 2 éléments finis.

6-3- Portique simple en R.D.C:

Après le test effectué avec le programme poutre_mince sur le poteau de Low-Moehle, on s'intéresse cette fois ci à l'étude d'un portique simple (**figure 6-13**), composé d'une discrétisation à 3, 9, 18, 36 et 54 éléments. Par la suite on applique pour le portique à 9 éléments la discrétisation proposée.

Les données géométriques du portique, sont représentées sous forme de schéma, qui nous montre la hauteur des poteaux, la longueur de la poutre et les efforts appliqués, ainsi que la section transversale (**figure 6-13**).

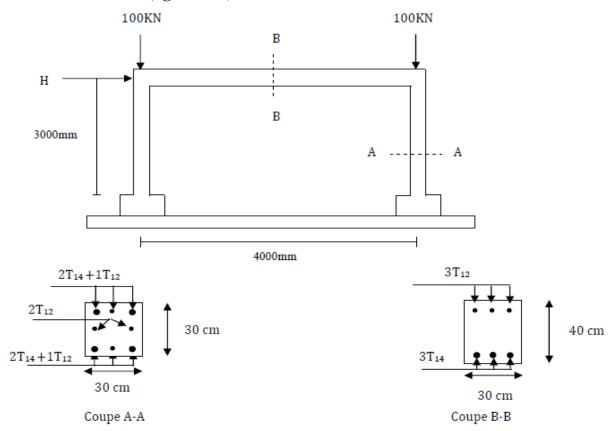


Figure 6-13 : Détail du portique simple en R.D.C étudié [07].

Les caractéristiques des matériaux utilisés sont représentées sur le tableau 6-5.

Caractéristiques du béton	Caractéristiques des aciers			
Coefficient de poisson	0.2	Limite d'élasticité (MPA)	420	
Module d'élasticité E (MPA)	$36x10^3$	Module d'élasticité E (MPA)	$210x10^3$	
Résistance en compression $f_c(MPA)$	30	Contrainte de rupture (MPA)	450	
Résistance en traction f_t (MPA)	2.4		<u>.</u>	

Tableau 6-5: propriété des matériaux qui forment le portique en R.D.C étudié.

6-3-1- Discrétisation avec des nœuds équidistants :

Les discrétisations sont données à la figure6-14.

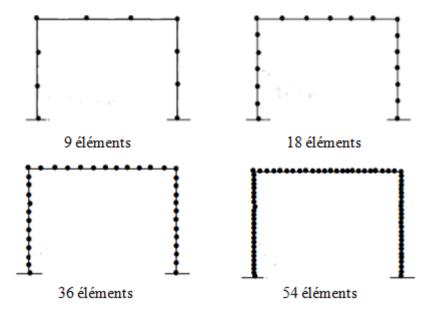


Figure 6-14: Détail de discrétisation pour le portique étudié.

6-3-1-1- Simulation:

Les résultats de la simulation sont représentés sur le tableau 6-6 et la figures 6-15.

N ^{bre} éléments	$F_{\max n}$	$\frac{F_{\max n}}{F_{\max 16}}$	$d_{\max n}$	$\frac{d_{\max n}}{d_{\max 16}}$
9	164	1.505	78.05	2.362
18	132	1.211	63.58	1.924
36	119	1.09	40.38	1.222
54	109	1	33.04	1

Tableau 6-6 : Principaux résultats de la simulation en fonction de nombre d'éléments.

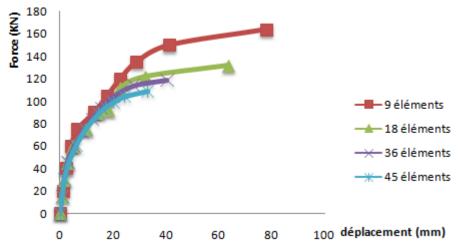


Figure 6-15 : Courbe force-déplacement pour les différentes simulations effectuées.

L'évaluation de la charge maximale et du déplacement obtenu à la rupture en fonction du nombre d'éléments finis utilisés pour la discrétisation est présentée sous forme d'histogramme sur les **figures 6-16, 6-17**.

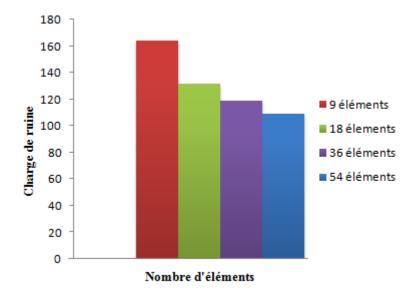


Figure 6-16: histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation.

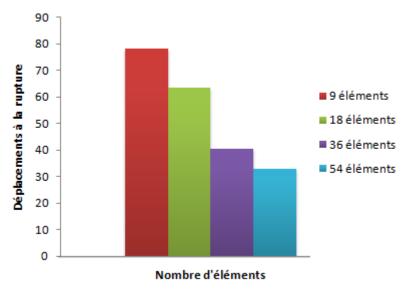


Figure 6-17: histogramme donnant les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation.

D'après les **figures 6-15, 6-16 et 6-17** et le **tableau 6-6** on peut faire la remarque suivante :

La finesse de discrétisation influence considérablement les résultats, que ce soit en termes de déplacement, où en termes de la charge appliquée. En augmentant le nombre d'éléments, les courbes de calcul se rapprochent de plus en plus des résultats exacts.

6-3-1-2- influence de la finesse de discrétisation sur la précision des calculs :

Nous avons représenté l'erreur relative sur les charges et les déplacements à rupture en fonction du nombre d'éléments. Les principaux résultats sont présentés sur le **tableau 6-7** et l'histogramme **6-18, 6-19**.

N ^{bre}	$\frac{l_e}{L}$ et $\frac{h_e}{H}$	$F_{\max n}$	$F_{\max n}$	Erreur	$d_{\max n}$	$d_{\max n}$	Erreur
éléments	$L \stackrel{et}{=} H$		$F_{\text{max 16}}$	relative		$d_{\text{max 16}}$	relative
				Err F(%)			Err d(%)
3	0.333	164	1.505	50.50	78.05	2.362	136.20
6	0.167	132	1.211	21.10	63.58	1.924	92.40
12	0.083	119	1.09	9.00	40.38	1.222	22.20
18	0.055	109	1	0	33.04	1	0

Tableau 6-7: Comparaison des résultats donnés par les différentes discrétisations.

Avec:

F: C'est la force maximale selon l'élément fini utilisé.

d : C'est le déplacement maximal selon l'élément fini utilisé.

 F_{max} et d_{max} : C'est la force et le déplacement correspondant à la discrétisation maximale et cela selon le modèle d'élément fini utilisée.

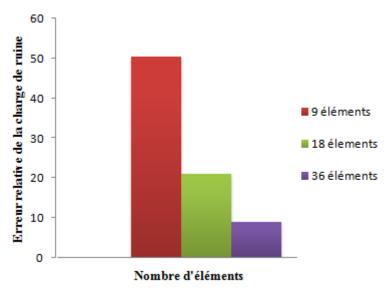


Figure 6-18: Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments

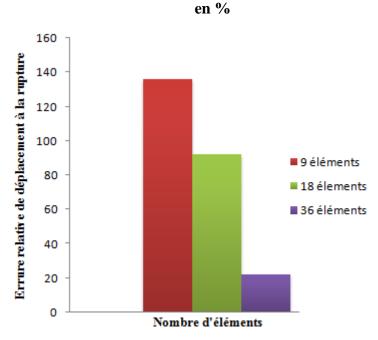


Figure 6-19: Histogramme donnant l'erreur relative du déplacement en fonction du nombre d'éléments en %

6-3-1-3- Interprétation des résultats :

A l'issue des calculs présents, on peut faire les constatations suivantes :

- La finesse de discrétisation influence considérablement les résultats, que ce soit en termes de déplacement, où en termes de la charge appliquée.
- La performance des différentes discrétisations apparaissant clairement en comparant les variations des erreurs relatives de forces et des déplacements en fonction du nombre d'éléments finis utilisés.
- Il est clair que les erreurs relatives sur la charge et le déplacement à la rupture diminuent, autrement dit la précision s'améliore, lorsque le nombre d'éléments finis augmente. Ainsi que la précision dans l'évaluation de la charge maximale.

6-3-2- Discrétisation proposée :

Dans ce qui suit on se propose de simuler le portique simple en utilisant une discrétisation à 9 éléments, en serrant les nœuds au voisinage des encastrements et de l'intersection poteau, poutre (des nœuds) (l_e/L et h_e/H varies de 1/3 à 1/25).

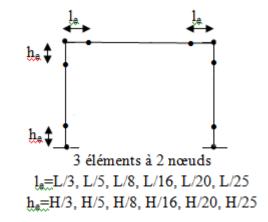


Figure 6-20 : Maillage utilise de la variable l_e.

Les valeurs correspondantes de l_e/h et h_e/h sont représentés sur le **tableau 6-8**.

L (mm)	l _e (mm)	l _e /h (mm)	H (mm)	h _e (mm)	h _e /h (mm)
4000	1333.33	33.33	3000	1000	33.33
4000	800	20	3000	600	20
4000	500	12.5	3000	375	12.5
4000	250	6.25	3000	187.5	6.25
4000	200	5	3000	150	5
4000	160	4	3000	120	4

Tableau 6-8: Les données de la longueur de l'élément fini pour chaque simulation.

Avec:

 l_e , h_e : C'est la longueur (hauteur) de l'élément fini.

L : C'est la longueur totale de la poutre.

H : C'est la hauteur totale du poteau.

h : C'est la hauteur de la section transversale du poteau et de la poutre.

6-3-2-1- La simulation :

Les courbes charges-déplacements obtenus à l'issu des simulations numérique sont présentées sur les **figures 6-21(a) et 6-21(b).**

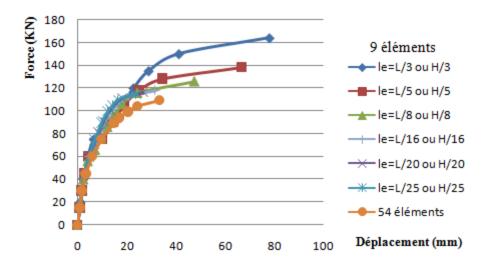


Figure 6-21 (a) : Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées.

Avec:

$L_e = L/3 = 1000 mm$	et	$h_e = H/3 = 1333.33 \text{mm}$
L _e =L/5=600mm	et	$h_e = H/5 = 800 mm$
$L_e = L/8 = 375 \text{mm}$	et	$h_e = H/8 = 500 mm$
L _e =L/16=187.5mm	et	$h_e = H/16 = 250 mm$
L _e =L/20=150mm	et	h _e =H/20=200mm
L _e =L/25=120mm	et	$h_e = H/25 = 160 mm$

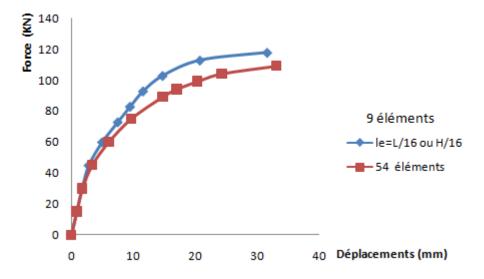


Figure 6-21 (b): Courbes forces-déplacements à 9 et 54 éléments.

Les valeurs des charges et déplacements sont présentes sur les histogrammes des **figures 6-22** et 6-23.

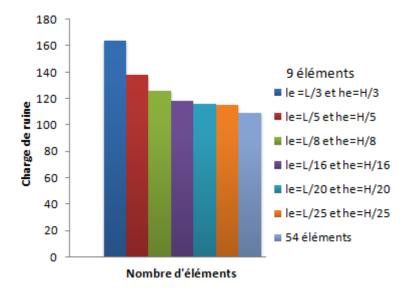


Figure 6-22 : histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation.

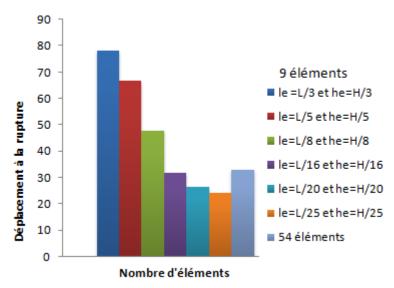


Figure 6-23: histogramme donnant les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation.

En serrant le maillage au voisinage de l'encastrement et des nœuds on obtient un résultat satisfaisant avec 9 éléments équivalent à celui obtenu avec une discrétisation très fine avec 54 éléments équivalents.

6-3-2-2- Influence du maillage sur la précision des calculs:

Pour les différents discrétisations utilises, nous avons évalué les erreurs relatives sur le chargement et le déplacement à la rupture. Les principaux résultats sont donnes au

tableau 6-9 et sous forme d'histogrammes sur les figures 6-24 et 6-25.

		$\frac{l_e}{L}$ et	$F_{\max n}$	$\underline{F_{\max n}}$	Erreur	$d_{\max n}$	$d_{\max n}$	Erreur
			(KN)	$F_{\text{max 16}}$	relative	(mm)	$d_{ ext{max 16}}$	relative
		$\frac{h_e}{H}$			Err F(%)			Err F(%)
	$l_e = 1333.33mm$	0.33	164	1.5	50	78.05	2.36	136
	$h_e = 1000mm$							
	$l_e = 800mm$	0.20	138	1.26	26	66.568	2.01	101
	$h_e = 600mm$							
	$l_e = 500mm$	0.125	126	1.15	15	47.6	1.44	44
9	$h_e = 375mm$							
éléments	$l_e = 250mm$	0.625	118	1.08	8	31.629	0.95	5
	$h_e = 187.5mm$							
	$l_e = 200mm$	0.05	116	1.06	6	26.53	0.80	20
	$h_e = 150mm$							
	$l_e = 160mm$	0.04	115	1.05	5	23.952	0.72	28
	$h_e = 120mm$							
54	éléments	0.055	109	1	0	33.04	1	0

Tableau 6-9: Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations.

Avec:

F: C'est la force maximale selon l'élément finis utilisés.

d : C'est le déplacement maximal selon l'élément finis utilisés.

 F_{max} et d_{max} : C'est la force et le déplacement correspondant à la discrétisation maximale et cela selon le modelée d'éléments finis utilisée.

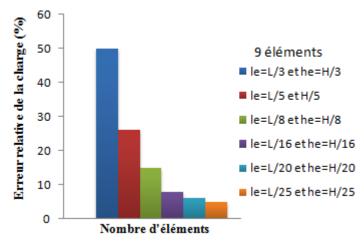


Figure 6-24: Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments

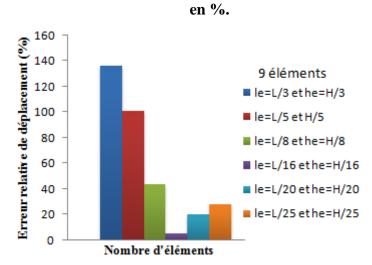


Figure 6-25: Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments en %

En serrant le maillage au voisinage de l'encastrement et des nœuds correspondant à la zone du comportement non linéaire, on obtenu des résultats satisfaisant avec seulement 9 éléments finis.

6-4- Portique en RDC+1 (Vecchio et Emara Frame [16]) :

Après le test sur le portique simple en R.D.C, on s'intéresse cette fois à l'étude d'un portique en R.D.C+1 (Vecchio et Emara Frame à 2 niveaux), composé d'une discrétisation à 18, 24 et 48 éléments. Par la suite on applique pour le portique à 18 éléments la discrétisation proposée.

Les données géométriques de portique en R.D.C+1 (à 2 niveaux), est représente sous forme d'un dessin, qui nous montre la hauteur des poteaux et la longueur des poutres et les efforts appliquée, ainsi la section transversale voir la **figure 6-26**.

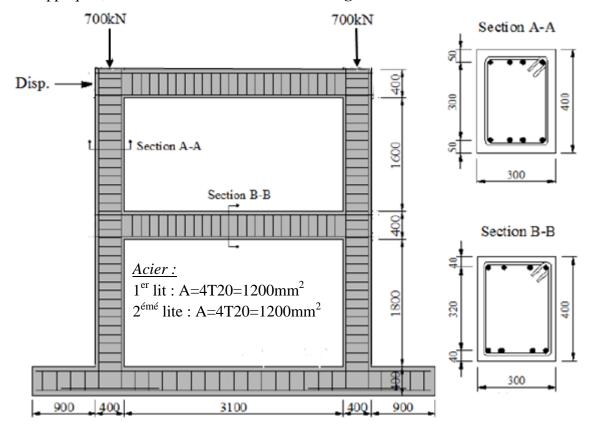


Figure 6-26: Détail du portique en RDC+1 à étudié [16].

Les caractéristiques des matériaux utilisée sont représente sur le tableau 6-10.

Caractéristiques du béton	Caractéristiques des aciers			
Coefficient de poisson	0.2	Limite d'élasticité (MPA)	418	
Module d'élasticité E (MPA)	23674	Module d'élasticité E (MPA)	192500	
Résistance en compression $f_c(MPA)$	30	Contrainte ultime (MPA)	596	
Résistance en traction f_t (MPA)	2.4	Déformation ultime (MPA)	66.9x10 ⁻³	

Tableau 6-10: propriété des matériaux qui forment le portique en RDC+1 à étudié.

6-4-1- Discrétisation avec des nœuds équidistants:

Les discrétisations sont données à la figure 6-27.

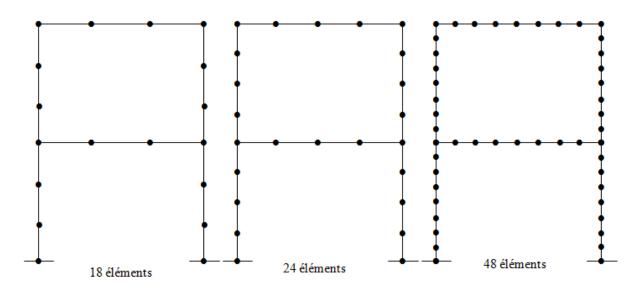


Figure 6-27: Détail de discrétisation pour le portique étudié.

6-4-1-1- La simulation :

Pour cet essai nous avons effectué trois simulations, en utilisent 18, 24 et 48 éléments respectivement. Les résultats des simulations sont présentes sur le **tableau 6-11** et **la**

figure 6-28.

N ^{bre} éléments	$F_{\max n}$	$\frac{F_{\max n}}{F_{exp}}$	$d_{\max n}$	$\frac{d_{\max n}}{d_{exp}}$
18	365	1.38	35.405	1.17
24	340	1.28	28.458	0.94
48	261	0.99	22.365	0.74
expérimentale	264	1	30.2	1

Tableau 6-11: Principaux résultats de la simulation en fonction de nombre d'éléments.

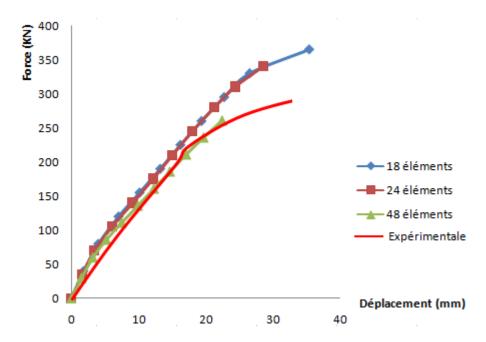


Figure 6-28 : Courbes force-déplacement pour les différentes simulations effectuées.

En augmentant le nombre d'éléments, les courbes de calcul se rapprochent de plus en plus des résultats exacts

L'évaluation de la charge maximale et du déplacement obtenu à la rupture en fonction du nombre d'éléments finis utilisés pour la discrétisation est présentée sous forme d'histogramme sur les **figures 6-29, 6-30**.

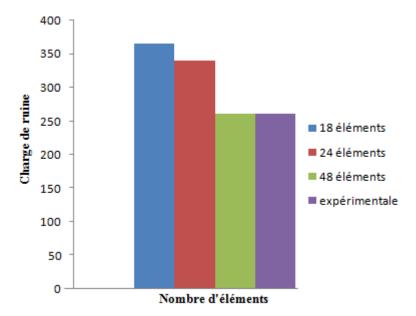


Figure 6-29: Histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation.

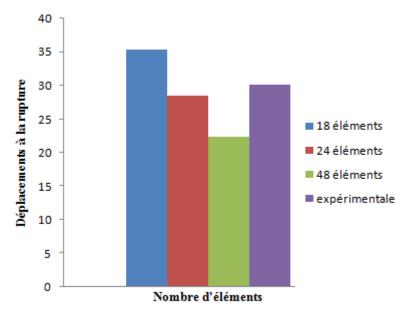


Figure 6-30 : Histogramme donnant des déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation.

D'après les figures 6-28, 6-29 et 6-30 et le tableau 6-11 on peut faire la remarque suivante :

La finesse de discrétisation influence considérablement les résultats, que ce soit en termes de déplacement, où en termes de la charge appliquée. En augmentant le nombre d'éléments, les courbes de calcul se rapprochent de plus en plus des résultats exacts en termes de la charge mais pas en termes de déplacement.

6-4-1-2- Influence de la finesse de discrétisation sur la précision des calculs:

Nous avons représenté l'erreur relative sur les charges et les déplacements à rupture en fonction du nombre d'éléments. Les principaux résultats sont présentés sur le **tableau 6-12** et l'histogramme **6-31**, **6-32**.

		$\frac{l_e}{L}$ et $\frac{h_e}{H}$	$F_{\max n}$	$F_{\max n}$	Erreur	$d_{\max n}$	$d_{\max n}$	Erreur
N ^{bre} éléments		$L \stackrel{ov}{=} H$		F_{exp}	relative		d_{exp}	relative
					Err F(%)			Err d(%)
	18	0.333	365	1.38	38	35.404	1.17	17
calcul	24	0.25	340	1.29	28	28.458	0.94	0.06
	48	0.125	261	0.99	0.1	22.365	0.74	0.26
Etude exp	érimentale		264	1	0	30.20	1	0

Tableau 6-12: Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations avec l'expérimental.

Avec : F: C'est la force maximale selon l'élément finis utilisés.

d : C'est le déplacement maximal selon l'élément finis utilisés.

F_{max} et d_{max}: C'est la force et le déplacement correspondant à la discrétisation maximale et cela selon le modelée d'éléments finis utilisée.

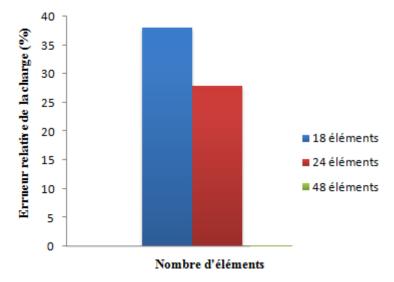


Figure 6-31: Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments en %

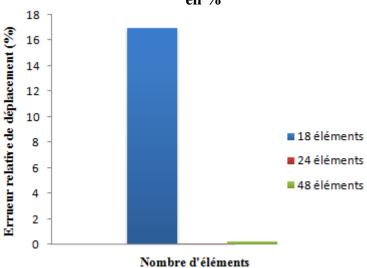


Figure 6-32: Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments en %

6-4-1-3- Interprétations des résultats :

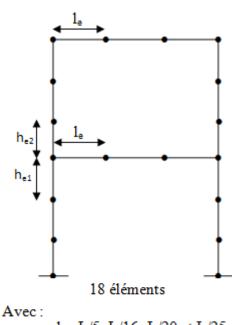
A l'issue des calculs présents, on peut faire les constatations suivantes :

 La finesse de discrétisation influence considérablement les résultats, que ce soit en termes de déplacement, où en termes de la charge appliquée. En augmentant le nombre d'éléments, les courbes de calcul se rapprochent de plus en plus des résultats exacts (en termes de charge).

- La performance des différentes discrétisations apparaissant clairement en comparant les variations des erreurs relatives de forces et des déplacements en fonction du nombre d'éléments finis utilisés.
- Il est clair que les erreurs relatives sur la charge et le déplacement à la rupture diminuent, autrement dit la précision s'améliore, lorsque le nombre d'éléments finis augmente. Ainsi que la précision dans l'évaluation de la charge maximale.

6-4-2- Discrétisation proposée :

Dans ce qui suit on se propose de simuler le portique simple (R.D.C+1) en utilisant une discrétisation à 18 éléments, en serrant les nœuds au voisinage des encastrements et des nœuds (l_e/L et h_{ei}/H_i varies de 1/5 à 1/25).



1_e=L/5, L/16, L/20 et L/25 h_e=H/5, H/16, H/20 et H/25

Figure 6-33 : Maillage utilise de la variable le et hel, he2.

Les valeurs correspondantes de l_e/h et h_e/h sont représentés sur le **tableau 6-13**.

L	le	l _e /h	H_1	h _{e1}	h _{e1} /h	H_2	h _{e2}	h _{e2} /h
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
3500	700	1.75	2200	440	1.10	2000	400	1.0
3500	218.75	0.55	2200	137.5	0.34	2000	125	0.31
3500	175	0.44	2200	110	0.27	2000	100	0.25
3500	140	0.35	2200	88	0.22	2000	80	0.20

Tableau 6-13 : Les données de la longueur de l'élément fini pour chaque simulation.

Avec:

 l_e : Longueur de l'élément finis.

L(H): Longueur (hauteur) totale de la poutre (poteau).

h : Hauteur de la section transversale des poteaux et des poutres.

6-4-2-1- La simulation :

Les courbes charges-déplacements obtenus à l'issu des simulations numérique sont présentées sur la **figure 6-34 (a) et (b)**.

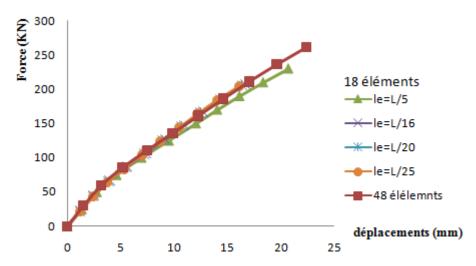


Figure 6-34 (a) : Courbes forces-déplacements pour les différentes simulations effectuées.

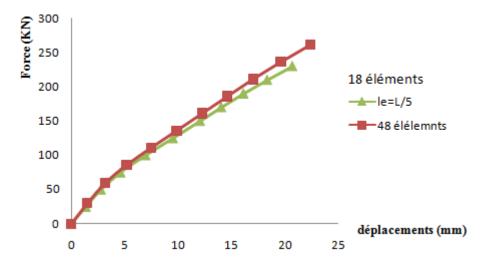


Figure 6-34 (b): Courbes forces-déplacements de 18 et 48 éléments.

Les valeurs des charges et déplacements sont présentes sur les histogrammes des figures 6-35 et 6-36.

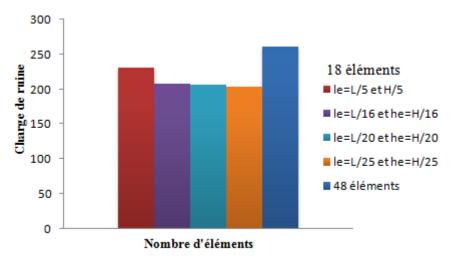


Figure 6-35: histogramme donnant les charges de ruine en fonction de type de discrétisation.

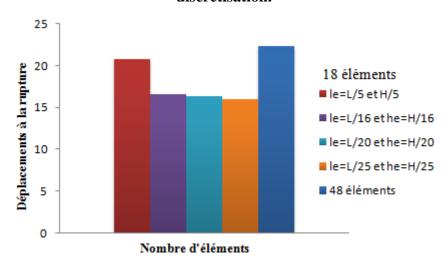


Figure 6-36: histogramme donnant les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation.

Avec:

En serrant le maillage au voisinage de l'encastrement on obtient un résultat satisfaisant avec 2 éléments équivalent à celui obtenu avec une discrétisation très fine avec 16 éléments équivalents.

6-4-2-2- Influence du maillage sur la précision des calculs :

Pour les différents discrétisations utilises, nous avons évalué les erreurs relatives sur le chargement et le déplacement à la rupture. Les principaux résultats sont donnes au

tableau 6-14 et sous forme d'histogrammes sur les figures 6-37 et 6-38.

		$\frac{l_e}{L}$ et	$F_{\max n}$	$F_{\max n}$	Erreur	$d_{\max n}$	$d_{\max n}$	Erreur
		$\frac{h_{en}}{h_{en}}$	(KN)	$\overline{F_{\text{max 48}}}$	relative	(mm)	$\overline{d_{ ext{max 48}}}$	relative
		$\overline{H_n}$			Err F(%)			Err d(%)
	$l_e = 700mm$	0.2						
	$h_{e1} = 440 \text{mm}$	0.2	230	0.88	12	20.726	0.93	7
	$h_{e2} = 400mm$	0.2						
	$l_e = 218.75$ mm	0.06						
	$h_{e1} = 137.5$ mm	0.06	207	0.79	21	16.647	0.74	26
18	$h_{e2} = 125mm$	0.06						
éléments	$l_e = 175$ mm	0.05						
	$h_{e1} = 110$ mm	0.05	206	0.79	21	16.389	0.73	27
	$h_{e2} = 100mm$	0.05						
	$l_e = 140$ mm	0.04						
	$h_{e1} = 88mm$	0.04	204	0.78	22	16.043	0.72	28
	$h_{e2} = 80mm$	0.04						
48	éléments		261	1	0	22.365	1	0

Tableau 6-14 : Comparaison des résultats donnée par les différentes discrétisations.

Avec:

F: C'est la force maximale selon l'élément finis utilisés.

d : C'est le déplacement maximal selon l'élément finis utilisés.

F_{max} et d_{max}: C'est la force et le déplacement correspondant à la discrétisation maximale et cela selon le modelée d'éléments finis utilisée.

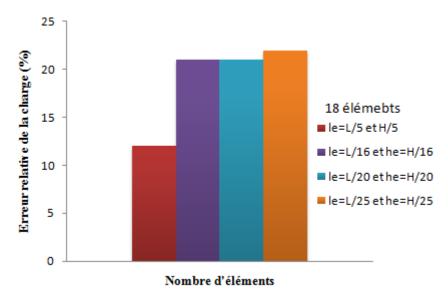


Figure 6-37: Histogramme donnant l'erreur relative de la charge et nombre d'éléments en %

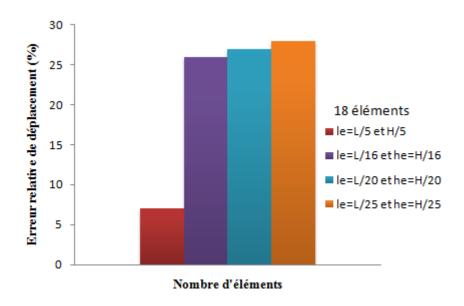


Figure 6-38: Histogramme donnant l'erreur relative de déplacement et nombre d'éléments en %

En serrant le maillage au voisinage de l'encastrement correspondant à la zone du comportement non linéaire, on obtenu des résultats satisfaisant avec seulement 18 éléments finis.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, on s'est intéressé à l'analyse et à la simulation du comportement non linéaire, jusqu'à la rupture, des éléments d'ossatures planes en béton armé.

L'étude à porté sur l'influence du maillage et de la finesse de discrétisation sur la précision des résultats de calcul en termes de charge de rupture et de flèche correspondante.

L'outil du calcul utilisé consiste en un programme informatique, poutre_mince 2, basé sur la méthode des éléments finis et utilisant des éléments finis poutres à 2 nœuds, des analyses linéaire et non linéaire ont été réalisées portant sur des exemples d'un poteau, d'un portique simple et d'un portique en R.D.C+1 en béton armé

Dans le domaine du comportement linéaire, on constate que la finesse de discrétisation n'a pas d'influence sur les résultats de calcul. Par contre dans le domaine non linéaire, la précision des résultats de calcul s'améliore en augmentant le nombre d'éléments finis.

On obtient des résultats suffisamment corrects en utilisant un nombre réduit d'élément fini et en serrant les nœuds des éléments finis au voisinage des zones critiques (jonction poutre-poteau, encastrement...).

En perspective, on peut considère l'influence de la finesse de discrétisation en utilisant des éléments finis d'ordre supérieur (à 3 ou 4 nœuds).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [01] ALESSANDRO DAZIO, Capacité portante des constructions en béton Institut für

 Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich

 Traduction: Xavier Mittaz, SD Ingénierie Dénériaz & Pralong Sion SA, Sion Christian

 Greifenhagen, ENAC-IS-IMAC, EPFL
- [02] Belhocine, Malika, Ductilité des éléments structuraux de bâtiments en béton armé, Mémoire de magister proposé et encadré par Drizi Said, Département de Génie Civil, Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU, 2009.
- [03] BOUAFIA. Y, Simulation numérique du comportement moyen jusqu'à rupture d'une Zone de poutre. Application au béton armé, au béton précontraint et au béton fibres, Mémoire de D.E.A., Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, 1987.
- [04] BOUAFIA. Y, FOURE. B, KACHI. MS, Relation effort-ouverture des fissures dans le cas du béton armé de fibres d'acier. Annal de l'ITB, n°2, avril 1998, ISSN 1270- 9840, Ed, ESKA, France, pp. 5-14 http://www.eska.fr.
- [05] BOUAFIA « Cous Master Deux ».
- [06] Cours: Equations aux Dérivées Partielles Méthodes des Différences Finies,
 Département de Mathématiques FST-Mohammedia, (2008). (Maillage)
- [07] DEBIT Belaid, étude comparative de modèles d'éléments finis de type poutre en béton armé.
- [08] BENYAHI Karim, couplage mécano-fiabiliste appliqué au calcul non linéaire des structures UMM.T.O.

- [09] GHANEM Aldjia, Analyse non linéaire des structures planes en béton armé tenant compte du remplissage en maçonnerie, Mémoire de magister, département de génie civil, Université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [10] GHERBI Khaled, Evaluation de la ductilité sectionelle et structurale des éléments Fléchis en béton armé. Proposé et encadré par M^r DRIZI Said. U.M.M.T.O.
- [11] GRELAT A, Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé, Thèse de Docteur Ingénieur, Université Paris, 1978.
- [12] MEZIANE Roufida, modélisation et simulation du comportement non-linéaire des structures planes, en béton arme et béton de fibres, par des éléments finis poutre.

 Mémoire de magister proposé et encadré par Drizi Said, Département de Génie Civil,

 Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU, 2008.
- [13] O.NAIT RABAH (1990); << Simulation Numérique du comportement non linéaire des ossatures spatiales ; application aux structures en béton armé, en béton précontraint et mixtes >> ; Thèse de doctorat-Ecole centrale de PARIS.
- [14] ROBERT F, Contribution à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des ossatures spatiales en génie civil, application aux ouvrages d'art. Thèse de doctorat « Institut national de sciences appliquées de Lyon, 1999 ».
- [15] SAAD. M, KACHI. MS, BOUAFIA. Y, MULLER. P, FOURE. B, Influence du pourcentage d'acier sur le comportement du béton tendu fissuré. European Journal of Environmental and Civil Engineering (EJECE)- Revue européenne de génie civil, volume 14, N°3, 2010, ISSN 1964-8189, ISBN 978-2-7462-2946-4, Ed. Lavoisier, Paris, pp, 303-327, http://www.ejece.revuesonline.com.

[16] Serhan Güner (2008) «performance assessment of shear-critical reinforced concrete plane frames» thesis submitted in conformity with the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, Graduate Department of Civil Engineering, University of Toronto.

PROGRAMMATION INFORMATIQUE.

Annexe A

Présentation du programme poutre_mince 2 (existant) :

Le programme informatique existant, poutre_mince 2, est rédigé en langage fortran 90 [12].Ce programme permet la simulation numérique du comportement statique non linéaire, jusqu'à rupture d'une structure plane quelconque en béton armé où en béton de fibres, constituée d'éléments de type poutre. Ce programme est caractérisé par une conception permettant sa modification et son enrichissement ; il est constitué d'un programme principal, bloc de calcul et de plusieurs subroutines, l'organigramme détaillé est présenté sur la

Figure A-1
A-1- Organigramme général du bloc calcul :

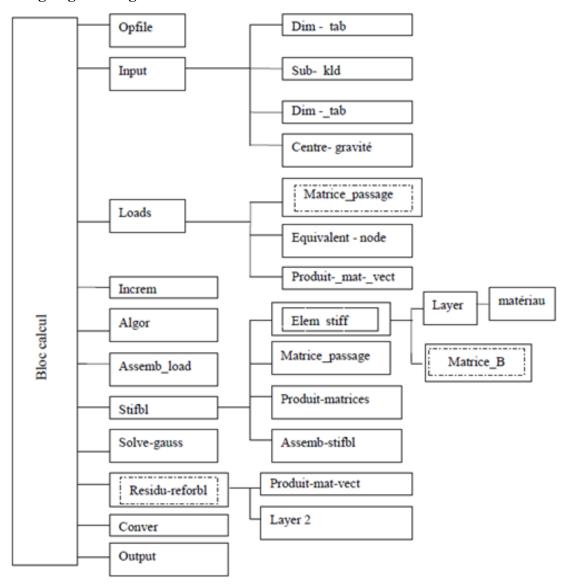


Figure A-1 : Organigramme détaillé du bloc calcul.

Annexe B

B-1- Description des différentes subroutines

Dans ce qui suit, on décrit brièvement les différentes subroutines constituant le programme poutre _ mince 2 :

- **1- Subroutines opfile** : ouverture du fichier de données **finp** et création du fichier des résultats **fout**.
- 2- Subroutines input : lecture des principales données du problème.
- **3- Subroutines dim** _ tab (itab) : dimensionnement et initialisation des tableaux et vecteurs.
- **4- Subroutines sub _kld** : calcul du vecteur **kld** de localisation des débuts de colonnes dans la matrice de rigidité globale (stockage en ligne de ciel)
- **5- Subroutine centre** _ **gravite** : calcul de la position du centre de gravite de la section par rapport à l'axe de référence.
- **6- Subroutine loadps** : lecture du chargement puis évaluation des forces nodales, pour chaque élément dans le vecteur "**rload**".
- **7- Subroutine équivalent—node** : calcul du vecteur des forces nodales équivalentes dues aux charges réparties sur l'élément en cours.
- **8- Subroutine matrice–passage** : calcul de la matrice de passage.
- **9- Subroutine produit_ matrice** : calcul du produit de deux matrices A (l x m) * B (mxn)
- 10- Subroutine produit_ mat_vect : calcul du produit d'une matrice par un vecteur

 A (1 x m) * v (m)
- 11- Subroutine increm : lecture et incrémentation du chargement appliqué.
- **12- Subroutine algor** : calcul du paramètre **kresl** de l'algorithme de résolution en fonction de la valeur du paramètre **nalgo.**
- 13- Subroutine assemb_load : assemblage du chargement dans le vecteur global « gload ».
- 14- Subroutine stifbl : calcul et assemblage de la matrice de rigidité élémentaire

- **15- Subroutine elem_stiff** : calcul de la matrice de rigidité élémentaire **estif** (6x6) pour un élément poutre mince plane à 2 nœuds, de (9x9) pour un élément poutre mince plane à 03 nœuds et de (12x12) pour un élément poutre mince plane à 04 nœuds
- **16- subroutine matrice_B** : c'est la subroutine qui permet l'introduction de la matrice des déformations, nécessaire pour le calcul de la matrice de rigidité.
- 17- Subroutine assem_stifbl : assemblage des matrices élémentaire dans la matrice globale.« gstif » (en ligne de ciel)
- **18- Subroutine layer :** calcul des valeurs EA, ES, et EI par intégration sur la hauteur de la section transversale de l'élément en cours.
- **19- Subroutine solve_gauss** : résolution du système d'équations par la méthode d'élimination de gauss (la matrice de rigidité étant stockée en ligne de ciel), cumul des déplacements et réactions
- 19- Subroutine residu_reforbl : calcul des forces nodales équivalentes
- **20- Subroutine layer 2** : calcul des valeurs des efforts N et M au point **igauss** de la section transversale de l'élément en cours.
- 21- Subroutine matériau : loi de comportement relation contrainte déformation.
- 22- Subroutine conver : test de convergence pour le calcul itératif.
- **23- Subroutine output** : sortie des résultats : Déplacements nodaux
 - Efforts internes N, T, M.
 - Réactions aux appuis.

B-2- Description du fichier de données pour le programme poutre_mince2 Début_titre \$ \$ Titre et/ou description du problème \$ fin_titre donnees_globales Npoin Nelem Nsect MaxTrap MaxAcier Nvfix Nmats Nprop Nincs Nalgo Ntype_charge **elements** NumElem TypElem NumSect NumNoeud1 NumNoeud2 nelem lignes coordonnees NumNoeud CoordX CoordY npoin lignes section Numsect Hsection Ntrapeze Nacier b_inf b_sup z_inf z_sup NumMat Ntrapeze lignes z_acier aire_acier NumMat_acier Nacier lignes $conditions_limites$ Code_CL Depl_fix_X Depl_fix_Y Rot_fix NumNoeud fix

materiaux						
Numat itype_	_materiau pr	rop (1) prop (2)		prop (Npro	op)	
					Nm	nats lignes
Charges						
Indice_charge_l	Nodale In	dice_charge_Rep	artie			
charges_nodal	es					
Nbre_charge_N	ſ					
NumNoeud_Ch	arge Force_	X Force_Y	Moment			
				Nbre_	Charge_N	lignes
charges_repart	ties					
Nbre_charge_R						
Numel_Charge	Ncas Nu	imcas charge				
				Nbre_	Charge_R	lignes
increment						
Fact_Charge1	Tolerance1	Max_iterations	l Indice	_sortie1		
Fact_Charge2	Tolerance2	Max_iterations2	2 , Indice	_sortie2		
				• • • • • •	Nincs	lignes
increment						
Fact_Charge1	Tolerance1	Max_iterations	l Indice	_sortie1		
Fact_Charge2	Tolerance2	Max_iterations2	2 , Indice	_sortie2		
					Nincs	lignes
				• • • • • •		

ANNEXE C

EXEMPLE DE FICHIERS DE DONNEES

```
C1 : fichier de données de poteau de Low_Moehle traité avec poutre_mince2 :
début_titre
$
$
       essai de Low et Moehle 1987 cite par spacone
$
       poteaux en beton arme, soumise a la flexion simple
$
       discretisation en 16 elements à 2 noeuds
fin_titre
donnees_globales
17 16 1 1 3 1 3 10 10 2 2
elements
1
       1 1 1 2
2
      1 1 2 3
3
      1 1 3 4
4
      1 1 4 5
5
      1 1 5 6
6
      1 1 6 7
7
      1 1 7 8
8
      1 1 8 9
9
      1 1 9 10
10
      1 1 10 11
11
      1 1 11 12
12
           12 13
      1 1
13
           13 14
      1 1
14
      1 1
           14 15
15
       1 1 15 16
16
      1 1 16 17
coordonnees
1
        0.
            0.
2
      32.15 0.
3
      64.3 0.
4
      96.45 0.
5
      128.6 0.
6
      160.75 0.
7
      192.9 0.
8
      225.05 0.
9
      257.2 0.
10
      289.35 0.
11
      321.5 0.
12
      353.65 0.
13
      385.8 0.
14
      417.95 0.
15
      450.1 0.
```

```
16
      482.25 0.
17
      514.4 0.
section
1 127. 1 3
165. 165. 0. 127.
35. 206.1 2
63.5 64.3
                3
                    2
92.
        206.1
conditions_limites
                   0. 0. 0.
      111
materiaux
      2 33000. 0.2 42.13 44. 0.002 0.0035 3.05 0.001 1 1
1
2 3 200000. 0.3 465.1 500. 0.010 0.
                                        0. 0. 0. 0.
3 3 200000. 0.3 444.0 500. 0.010 0.
                                        0. 0. 0. 0.
charges
1 0
charges_nodales
1
17
        -44500. 0. 0.
increment
0.1
    0.05 100
                   2
0.1
    0.05 100
                   2
    0.05 100
0.1
                   2
0.1
     0.05 100
                   2
                   2
0.1
    0.05 100
0.1
    0.05 100
                   2
0.1
    0.05 100
                   2
                   2
0.1
    0.05 100
                   2
0.1
    0.05 100
0.1 0.05 100
                   2
charges
1 0
charges_nodales
1
        0. -10000. 0.
17
increment
0.5 0.05 100
                   2
0.5 0.05 100
                   2
0.5 0.05 100
                   2
0.5 0.05 100
                   2
                   2
0.35 0.05 100
                   2
0.05 0.05 100
                   2
0.05 0.05 100
                   2
0.05 0.05 100
                   2
0.05 0.05 100
                   2
```

0.05 0.05 100

C2 : fichier de données de portique théorique en R.D.C traité avec poutre_mince2 :

```
début_titre
$
$
       essai de Low et Moehle 1987 cite par spacone
$
       console en beton arme, soumise a la flexion simple
$
       discretisation en 36 elements à 2 noeuds
fin_titre
donnees_globales
37 36 2 1 3 2 2
                      10 10 2 2
elements
                    2
1
       1 1
             1
                    3
2
       1 1
              2
3
       1 1
              3
                     4
                     5
4
       1 1
              4
5
             5
       1 1
                    6
6
                     7
       1 1
              6
7
       1 1
              7
                     8
8
       1 1
              8
                     9
9
       1 1
              9
                     10
       1 1
10
              10
                     11
11
       1 1
                     12
              11
12
                     13
       1 1
              12
13
       1 1
              13
                     14
14
       1 2
              14
                     15
15
       1 2
              15
                     16
                     17
       1 2
16
              16
       1 2
17
              17
                     18
18
       1 2
              18
                     19
19
       1 2
              19
                     20
20
       1 2
              20
                     21
21
       1 2
              21
                     22
22
       1 2
              22
                     23
23
       1 2
                     24
              23
24
                     25
       1 2
              24
25
       1 1
              25
                     26
26
       1 1
              26
                     27
27
       1 1
              27
                     28
28
       1 1
                     29
              28
29
                     30
       1 1
              29
30
       1 1
              30
                     31
31
       1 1
              31
                     32
32
                     33
       1 1
              32
33
       1 1
              33
                     34
34
       1 1
              34
                     35
35
       1 1
              35
                     36
36
       1 1
              36
                     37
```

coordonnees 1 0. 0. 2 250. 0. 3 500. 0. 4 750. 0. 5 1000. 0. 6 1250. 0. 7 1500. 0. 8 1750. 0. 9 2000. 0. 10 2250. 0. 11 2500. 0. 12 2750. 0. 13 3000. 0. 14 3000. 333.33 15 3000. 666.66 16 3000. 999.99 17 3000. 1333.33 18 3000. 1666.65 19 3000. 1999.98 20 3000. 2333.31 21 3000. 2666.64 22 3000. 2999.97 23 3000. 3333.30 24 3000. 3666.63 25 3000. 4000. 2750. 4000. 26 27 2500. 4000. 28 2250. 4000. 29 2000. 4000. 30 1750. 4000. 31 1500. 4000. 32 1250. 4000. 33 1000. 4000. 34 750. 4000. 35 500. 4000. 36 250. 4000. 37 0. 4000. section 1 300. 1 3 300. 300. 0. 300. 1 37. 421. 2 150. 226. 2 263. 421. 2 2 400. 2 1

300. 300.

0. 400.

1

Annexes

```
37. 462.
           2
363. 339
               2
conditions_limites
                   0. 0. 0.
1
      111
37
                   0. 0. 0.
      111
materiaux
      2 36000. 0.2 40. 32. 0.002 0.0035 2.4 0.001 1
      3 210000. 0.3 420 450. 0.010 0.
                                          0. 0. 0. 0.
charges
1 0
charges_nodales
2
13
       -100000. 0.
                         0.
25
                         0.
       -100000.
                 0.
increment
0.5 0.05 100
                   2
                   2
0.5 0.05 100
                   2
0.5 0.05 100
                   2
0.5 0.05 100
                   2
0.35 0.05 100
0.05 0.05 100
                   2
                   2
0.05 0.05 100
                   2
0.05 0.05 100
                   2
0.05 0.05 100
                   2
0.05 0.05 100
charges
1 0
charges_nodales
1
       0. 10000. 0.
13
increment
1.5 0.05 100
                   2
1.5 0.05 100
                   2
                   2
1.5 0.05 100
1.5
    0.05 100
                   2
1.2 0.05 100
                   2
1.2 0.05 100
                   2
1.0
    0.05 100
                   2
1.0 0.05 100
                   2
                   2
1.0 0.05 100
0.5 0.05 100
                   2
```

C3 : fichier de données de portique vechio et Emara Frame en R.D.C+1 traité avec poutre_mince2 :

```
début_titre
$
       essai de Low et Moehle 1987 cite par spacone
$
       console en beton arme, soumise a la flexion simple
$
       discretisation en 18 elements à 18 nœuds
fin_titre
donnees_globales
18 18 2 1 2 2 2
                      10 10 2 2
elements
1
       1 1
             1
                    2
2
       1 1
            2
                    3
3
       1 1
             3
                     4
4
       1 1
             4
                     5
5
       1 1
             5
                    6
6
       1 1
             6
                     7
7
       1 2
             4
                     8
8
       1 2
             7
                     9
9
       1 2
             8
                   10
10
       1 2
             9
                   11
11
       1 2
             10
                   15
       1 2
12
             11
                   12
13
       1 1
             12
                   13
14
      1 1
                   14
             13
15
       1 1
              14
                     15
16
       1 1
              15
                     16
17
       1 1
                     17
              16
18
       1 1
              17
                     18
coordonnees
1
                     0.
          0.
2
       733.33
                     0.
3
       1466.67
                     0.
4
       2200.
                     0.
5
                     0.
       2866.67
6
       3533.33
                     0.
7
       4200.
                     0.
8
       2200.
                1166.67
9
       4200.
               1166.67
10
       2200.
               2333.33
11
      4200.
               2333.33
12
       4200.
                3500.
13
       3533.33 3500.
14
       2866.67 3500.
15
       2200.
                3500.
```

```
16
      1466.67 3500.
17
      733.33 3500.
18
       0.
               3500.
section
     400.
                2
1
            1
300. 300.
            0. 400.
                      1
50. 1200.
            2
350. 1200.
             2
2
    400.
          1
               2
300. 300.
            0. 400.
                      1
50. 1200.
            2
350. 1200.
conditions_limites
      111
                   0. 0. 0.
1
18
      111
                   0. 0. 0.
materiaux
      2 23674. 0.2 30. 32 0.002 0.0035 2.4 0.001 1
2 3 192500. 0.3 418. 596. 0.0669 0.
                                        0. 0. 0. 0.
charges
1 0
charges_nodales
7
        -700000. 0.
                         0.
12
        -700000. 0.
                          0.
increment
0.35 0.05 100
                   2
                   2
0.35 0.05 100
                   2
0.35 0.05 100
                   2
0.35 0.05 100
                   2
0.35 0.05 100
                   2
0.25 0.05 100
0.25 0.05 100
                   2
                   2
0.25 0.05 100
                   2
0.25 0.05 100
0.25 0.05 100
                   2
charges
1 0
charges_nodales
1
7
       0. 10000. 0.
increment
4.0 0.05 100
                   2
4.0 0.05 100
                   2
4.0 0.05 100
                   2
3.5 0.05 100
                   2
3.5 0.05 100
                   2
```

3.5	0.05 100	2
3.5	0.05 100	2
3.5	0.05 100	2
3.5	0.05 100	2
3.5	0.05 100	2