MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI- OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT (LMD)

FILIÈRE : MATHÉMATIQUES.

SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS.

Titre de La thèse : **FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES GÉNÉRALISÉES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.**

Présentée par :
Mme Yousra DJABRI

Devant le jury d'examen composé de :

Mr Mohamed	Morsli	Professeur	U.M.M.T.O	Président
Mme Fazia	Bedouhene	Professeur	U.M.M.T.O	Rapporteur
Mme Fatiha	Boulahia	M.C.A	U.A.M.Bejaia	Co-Rapporteur
Mr Ahmed	Berboucha	Professeur	U.A.M.Bejaia	Examinateur
Mme Leila	Rahmani	Professeur	U.M.M.T.O	Examinatrice
Mme Manel	Smaali	M.C.A	U.M.M.T.O	Examinatrice

Soutenu le : / / /

Remerciements

Avant tout, il apparaît opportun de rendre grâce à DIEU de m'avoir donné le courage et la volonté pour réaliser et terminer ce travail.

Ma profonde reconnaissance s'adresse à ma directrice de thèse Professeur Fazia BEDOUHENE, pour la confiance qu'elle m'a témoigné en acceptant la direction scientifique de mes travaux. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais.

J'adresse mes plus sincères remerciements à ma Co-directrice de thèse Madame Fatiha BOULAHIA, Maître de Conférences à l'Université Abderrahmane Mira de Bejaia, qui a cru en moi et su m'orienter par ses précieux conseils qui n'ont cessé de prodiguer tout au long de ce travail.

Je voudrais exprimer également ma profonde gratitude à Monsieur Paul RAYNAUD DE FITTE, Professeur à l'Université Rouen-Normandie, pour son accueil au Laboratoire Raphaël Salem au cours de mes stages de courtes durées. J'ai apprécié ses grandes qualités humaines et son sens aigu de la pédagogie.

Un grand remerciement s'adresse notamment à Monsieur Mohamed MORSLI, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le Jury de soutenance.

Mes respectueuses reconnaissances s'adressent également à Monsieur Ahmed BERBOUCHA, Professeur à l'Université Abderrahmane Mira de Bejaia et à Madame Manel SMAAILI, Maître de Conférences à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou ainsi qu'à Madame Leila Rahmani, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Leur présence constituent un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail.

Ma gratitude est destinée à mes chers parents Nouara et Nabil qui m'ont supporté dans tous les sens du terme durant toutes ces années. Leur amour, leur affection et leur soutien sont au-dessus de tous les remerciements. Merci infiniment à mon frère Houssem-Eddine et à ma soeur Naila.

A titre plus personnel, je remercie chaleureusement mon mari Abderrahmane, pour la grande patience, l'encouragement et la confiance qu'il m'a témoigné. Je tiens à le remercier surtout pour son soutien moral ininterrompu et ses nombreux conseils tout le long de ma thèse.

Table des matières

Chapitre 2
La presque périodicité dans les espaces d'Orlicz

II Contributions

Chapitre 3
Autres caractérisations des fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques et leurs applications

Introduction générale

Au cours des deux dernières décennies, la théorie des fonctions presque périodiques a été développée en liaison avec les problèmes des équations différentielles, les systèmes dynamiques et la théorie de la stabilité et ses applications à la théorie du contrôle. Les ouvrages classiques de C. Corduneanu [25], Fink [49] , Yoshizawa [89], Amério et Prouse [4], Levitan et Zhikov [65], etc... donnent une belle présentation des méthodes et des résultats sur ce sujet.

Les fonctions presque périodiques ont été utilisées par des astronomes depuis l'époque grecque antique. Ces derniers approchaient la fonction qui donne le mouvement de la planète par un polynôme trigonométrique ; mais leurs apparition formelle revient au mathématicien danois H.Bohr [17] au début des années vingt (1923-1925).

Depuis, de nombreuses généralisations ont été faites sur cette classe, notamment par Bochner [13] qui, vers 1933, a donné une caractérisation d'une fonction presque périodique en terme de la compacité de l'ensemble de ses translatés dans l'espace des fonctions continues et bornées. Cette définition est équivalente aux définitions données par H.Bohr à savoir : celle qui utilise les ensembles relativement denses et celle qui définit ces fonctions comme limite uniforme des polynômes trigonométriques généralisés. Ces caractérisations ont motivé d'importantes contributions dans ce domaine, on peut citer par exemple celles de Besicovitch [9] et de Stepanov [83].
Stepanov a donné naissance aux fonctions qui portent aujourd'hui son nom (fonctions Stepanov-presque périodiques et notées $\mathbb{S}^p AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$). Cette classe de fonctions contient celle de Bohr.
Amerio et Prouse [4] ont montré qu'une fonction f est Stepanov- presque périodique si et seulement si sa transformée de Bochner f^b est Bohr presque périodique, ce résultat à permis de généraliser les résultats d'existence de solutions Bohr presque périodiques de certaines classes d'équations différentielles au cas des équations différentielles à coefficients Stepanov presque périodiques. Toujours dans son article de 1926 [83], Stepanov a défini les fonctions presque périodiques en mesure de Lebesgue notées dans cette thèse μ-$AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Une autre généralisation connue des fonctions presque périodiques est la classe des fonctions asymptotiquement presque périodiques introduite par Fréchet [47, 48], ce sont les fonctions qui s'écrivent sous la forme

$$f = g + \vartheta$$

avec g presque périodique et ϑ une fonction continue vérifiant $|\vartheta(t)| \to 0$ quand $t \to \infty$.

Dans les années 1994 et 1995, Zhang [92,93] a introduit le concept de la pseudo presque périodicité comme une extension de l'asymptotique presque périodicité. Ces fonctions sont obtenues en perturbant la classe des fonctions presque périodiques de Bohr par un terme ergodique (une fonction continue bornée de moyenne nulle).

Plus précisément, les fonctions pseudo presque périodiques sont les fonctions de type

$$f = g + h$$

avec g une fonction presque périodique et h une fonction ergodique.

Diagana [31] a introduit le concept de fonctions pseudo presque périodiques avec poids comme une extension de la pseudo presque périodicité, en introduisant une définition plus générale de la perturbation ergodique de Zhang.

L'idée principale consiste à mettre un poids ρ ($\rho : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ une fonction localement intégrable sur tout $\mathbb{R}$) sur la composante ergodique apparaissant dans la définition de Zhang, ce qui a permis d'obtenir l'espace des fonctions ergodiques avec poids noté $\mathrm{PAP}_0(\mathbb{X},\rho)$. De cette façon une fonction f pseudo presque périodique avec poids apparaît comme étant une perturbation d'une fonction presque périodique au sens de Bohr par une fonction de $\mathrm{PAP}_0(\mathbb{X},\rho)$.

En 2013, Blot et al. [11] ont donné une nouvelle approche (une généralisation des fonctions pseudo presque périodiques avec poids introduites par Diagana dans [31]) en utilisant la théorie de la mesure.

Dans [35], Diagana et Zitane (2014) ont introduit le concept de Stepanov-pseudo presque périodicité dans le cadre des espaces de Lebesgue à exposants variables $L^{p(x)}$ qui sont un cas particulier des espaces de Musielak-Orlicz, [29], [73].
Un tel concept est une généralisation naturelle de la notion de la Stepanov pseudo presque périodicité introduite et étudiée dans [33].

Bien qu'il existe une abondante littérature consacrée aux différentes extensions de la Stepanov presque périodicité dans le cadre des espaces de Lebesgue, que ce soit dans le cas déterministe ou stochastique [14,33], très peu d'ouvrages sont consacrés à l'étude des fonctions Stepanov presque périodiques dans le cadre des espaces d'Orlicz.

A notre connaissance, la seule référence qui introduit et traite les fonctions presque périodiques dans le cadre des espaces d'Orlicz est le document de Hillmann [52], dans lequel certaines propriétés structurelles et topologiques des espaces de telles fonctions ont été étudiées. Mais, leurs applications à la théorie qualitative des équations différentielles n'ont pas encore été examinées.

L'objectif de cette thèse est de généraliser les différentes caractérisations des fonctions Stepanov presque périodiques et Stepanov pseudo presque périodiques au cadre des espaces d'Orlicz.

Notre contribution a débuté par la caractérisation des fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques introduites par Hillmann [52] via la transformée de Bochner. Ensuite nous avons généralisé la caractérisation donnée par Stepanov [83], [85], [28] ce qui nous a permis d'établir un résultat de superposition dans les espaces de Stepanov-Orlicz presque périodiques et les Stepanov-Orlicz pseudo presque périodiques.
On s'est intéressé aussi à l'existence et à la nature de la périodicité des solutions "mild" d'une classe d'équations d'évolution linéaires et semi-linéaires à coefficients Stepanov-Orlicz presque périodiques et Stepanov-Orlicz pseudo presque périodiques.

Le travail de cette thèse est réparti en quatre chapitres

Le premier chapitre fournit un exposé des différentes notions de la presque périodicité en citant éventuellement quelques propriétés relatives à ces notions et qui sont utiles pour la suite.

Le deuxième chapitre a pour objectif de faire une présentation des espaces de Stepanov-Orlicz de fonctions presque périodiques tels qu'ils sont définis par Hillmann [52]. Pour se faire, des rappels sur les espaces d'Orlicz et des espaces modulaires sont donnés. Une attention particulière a été accordée au propriétés des espaces de Morse-Transue qui sont indispensables dans la démonstration de nos résultats. .

Le troisième chapitre est composé de trois sections.
Dans la première section, nous avons revisité la classe des fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques définies par Hillmann dans l'espoir de pouvoir la caractériser via la transformée de Bochner sans imposer aucune condition supplémentaire sur la fonction de Young ϕ. Mais contrairement à la presque périodicité de Stepanov, celle de Stepanov-Orlicz ne peut pas être équivalente à la presque périodicité de sa transformée de Bochner sans imposer la condition-Δ_2 à la fonction de Young ϕ.
Une autre caractérisation concernant la classe $\mathbb{S}^{\phi}AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ à été donnée en termes de la Stepanov-presque périodicité en mesure de Lebesgue introduite par Stepanov et d'une propriété d'uniforme intégrabilité. Notre résultat généralise ainsi celui de Danilov [26] lorsque ϕ est la fonction puissance.
Grâce à cette caractérisation, nous avons établi dans la deuxième section un théorème de superposition dans l'espace des fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques.
Comme application nous avons étendu dans la troisième section l'étude effectuée par Andres et Pennequin en 2012 [7] au cadre des fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques.
Plus précisément, nous avons montré que les solutions bornées des équations différen-

tielles ordinaires à coefficients Stepanov-Orlicz presque périodiques sont Bohr presque périodiques et qu'il n'existe pas de solutions purement Stepanov-Orlicz presque périodiques.

Dans le quatrième chapitre, nous avons introduit les espaces de fonctions Stepanov-Orlicz pseudo presque périodiques, puis on a étendu les résultats du chapitre trois à ces espaces.
Différentes caractérisations et résultats ont été obtenus à savoir ;

1. En s'inspirant de [35], nous avons introduit trois différentes notions d'ergodicité au sens de Stepanov-Orlicz et par suite, nous avons étudié leurs hiérarchies et leurs diverses propriétés.
   De plus, nous avons donné une caractérisation des fonctions Stepanov-Orlicz ergodiques via l'ergodicité de leurs transformées de Bochner.
2. Nous avons fourni quelques exemples afin de mettre en évidence la hiérarchie des fonctions ergodiques introduites.
3. Nous avons introduit un nouvel espace appelé " Stepanov-Orlicz pseudo presque périodique ($\mathbb{S}^{\phi}PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$)" qui généralise l'espace des fonctions Stepanov pseudo presque périodiques à exposants variables $L^{p(x)}$ donné par Diagana et Zitane [35], ensuite nous avons caractérisé ces fonctions $\mathbb{S}^{\phi}PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ via la pseudo presque périodicité de leurs transformées de Bochner .
4. Un nouveau théorème de superposition dans l'espace des fonctions du type Stepanov-Orlicz pseudo presque périodique et un résultat d'existence et d'unicité de solution "mild" pseudo presque périodique pour une classe d'équations différentielles linéaires et semi-linéaires à coefficients Stepanov-Orlicz pseudo presque périodique ont été établis.

Ce manuscrit est clôturé par une conclusion générale et quelques perspectives des travaux présentés.

1

Première partie

Préliminaires

CHAPITRE 1

La presque périodicité et la pseudo presque périodicité

Sommaire

L'objectif de ce chapitre introductif est de faire une présentation sommaire des fonctions presque périodiques au sens de Bohr et des fonctions pseudo presque périodiques ainsi que leurs généralisations respectives au sens de Stepanov.
On énoncera leurs propriétés de base indispensable pour la suite de ce travail.

Enfin, on achèvera ce chapitre par rappeler quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions de certaines classes d'équations d'évolution semi linéaires.

Dans toute la suite $(\mathbb{X}, \|.\|)$ désignera un espace de Banach réel, μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\Sigma = \Sigma(\mathbb{R})$ la σ-algèbre des sous-ensembles Lebesgue mesurables de $\mathbb{R}$.

On notera par $C(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ et $BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{X}$.

1.1 Fonctions presque périodiques

Les fonctions presque-périodiques apparaissent naturellement dès qu'on est en présence de plusieurs mouvements périodiques simultanés (par exemple deux ressorts d'élasticité différentes accrochés à deux masses différentes). Elles ne sont pas des fonctions qui sont presque des fonctions périodiques, mais sont des fonctions qui possèdent de nombreuses presque-périodes.

Les fonctions presque périodiques ont été introduites par des astronomes depuis l'époque grecque antique et en particulier par E. Elsclangon en (1902). L'apparition formelle de la théorie des fonctions presque périodiques remonte aux travaux du mathématicien danois H. Bohr (1923).
En s'intéressant à la fonction Zeta de Riemann et aux séries de Dirichlet, H. Bohr était emmené à les étudier en liaison avec des problèmes de nature arithmétique.
Par suite, la notion de presque-périodicité a été généralisée dans diverses directions notamment par Favard [44, 45], Besicovitch [9], Fink [49], Levitan et Zhicov [65] et Corduneanu [25] etc.

1.1.1 Fonctions presque périodiques au sens de Bohr

Définition 1.1.1. *Un sous ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit relativement dense s'il existe un nombre positif l (dit longueur d'inclusion) tel que*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad [a, a+l] \cap E \neq \emptyset.$$

Remarque 1.1.2. *Tout ensemble contenant un ensemble relativement dense est relativement dense.*

Définition 1.1.3. *Pour une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{X}$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$, on définit :*

$$T(f, \varepsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R}, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon \right\}.$$

$\mathrm{T}(f,\varepsilon)$ *est l'ensemble des* ε*-presque périodes de* f.

Définition 1.1.4. *Soit* $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{X})$*, on dit que* f *est presque périodique au sens de Bohr (où* $\mathbb{X}$*-presque périodique) si pour tout* $\varepsilon > 0$*,* $\mathrm{T}(f,\varepsilon)$ *est relativement dense dans* $\mathbb{R}$*; i.e.* $\forall \varepsilon > 0$*, il existe un nombre* $l = l(\varepsilon) > 0$*, tel que tout intervalle* $[a, a+l]$ *contienne un nombre* ε*-presque période* $\tau = \tau_\varepsilon$ *satisfaisant*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

On notera par $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, l'espace de ces fonctions. L'espace $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$$

est un espace de Banach (C.f. [4] [65]).

Proposition 1.1.5. *[4]*

L'espace $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *jouit des propriétés suivantes ;*

1. *Tout élément de* $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est uniformément continu.*
2. *Tout élément de* $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est à image relativement compacte dans* $\mathbb{X}$ *et donc borné sur* $\mathbb{R}$*.*
3. *Soit* $f \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$*, si* $\mathbb{Y}$ *est un espace de Banach et si* $g : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *est une application uniformément continue sur l'adhérence de l'image de* f *alors* $g \circ f \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$*.*
4. $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est stable par la limite uniforme.*
5. $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est invariant par translation* [1].

Du Théorème de Bochner, (voir ([4, Chapitre 4, page9])), on déduit les propriétés suivantes (C.f. [4, 16, 49, 65]) :

Proposition 1.1.6.

1. *Si* $f \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et* $\psi \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *alors* $\psi.f \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
2. *Soient* $f \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et* $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *alors* $f * g \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ [2].

---

1. Un sous ensemble $E \subset \mathrm{BC}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et dit **invariant par translation** si pour tout $\varphi \in E$, on a $\varphi(.+s) \in E$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
2. $f * g$ désigne la convolution de deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,g(t-s)\,ds$$

En plus des propriétés importantes citées précédemment, les fonctions presque périodiques au sens de Bohr peuvent être définies comme des limites uniformes de suites de polynômes trigonométriques généralisés $P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k t)$, où $t \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{X}$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont des nombres réels mutuellement différents.

Ceci découle du fait que tout polynôme trigonométrique est une fonction presque périodique et de la propriété (4) de la proposition 1.1.5.

D'où l'obtention de la définition suivante dite d'approximation pour les fonctions presque périodiques.

Définition 1.1.7. *[4, Chapitre I, Page 15]* $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est la fermeture de l'espace des polynômes trigonométriques* $\mathrm{Trig}(\mathbb{R};\mathbb{X})$ *dans* $\mathrm{BC}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *pour la topologie de la convergence uniforme. i.e.* $f \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $P_\varepsilon \in \mathrm{Trig}(\mathbb{R};\mathbb{X})$ *tel que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - P_\varepsilon(t)\| < \varepsilon.$$

1.1.2 Dérivation et intégration des fonctions presque périodiques

Rappelons que la dérivée d'une fonction périodique dérivable est une fonction périodique. Ceci n'est pas vrai lorsqu'il s'agit des fonctions presque-périodiques car rien n'assure que la dérivée soit uniformément continue, ce qui est nécessaire pour qu'elle soit presque-périodique.
La proposition qui suit assure la suffisance de cette condition.

Proposition 1.1.8. *Si* $f \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et* f' *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *alors* $f' \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Pour une fonction périodique continue, la condition qu'elle soit de moyenne nulle assure la périodicité des primitives.
Pour les fonctions presque périodiques, cette condition ne suffit pas comme le montre l'exemple suivant (Cf. [66, Page 198]).

Exemple 1.1.9. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{t}{2k+1}\right).$$

Cette fonction est presque périodique et de moyenne nulle.
En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,d\mu(s) &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{s}{2k+1}\right) + \varepsilon\right) d\mu(s) \\ &\leq \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} + \varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant tendre $t \to +\infty$, on conclue que f est de moyenne nulle.

D'autre part, si g est une primitive de f, alors on a

$$g(t) = \int_0^t f(s)\, d\mu(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{t}{2k+1}\right)}{2k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \sin^2 \frac{t}{2(2k+1)} \geq 0.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g(t) > \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \sin^2 \frac{t}{2(2k+1)}.$$

Prenons $t_0 = 1 \times 3 \times \ldots \times (2N+1)\pi$.

Si $0 \leq k \leq N$ alors $\frac{t_0}{2(2k+1)} = \frac{1}{2}(2r+1)\pi$ où $r \in \mathbb{N}$.

D'où, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$g(t_0) > \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} > \int_0^N \frac{ds}{2s+1} = \frac{1}{2}\ln(2N+1).$$

Ainsi, g est non bornée et donc elle n'est pas presque périodique.

La proposition suivante montre que la compacité de l'image des primitives est parfois nécessaire.

Proposition 1.1.10. *[4] Soient $f \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et F une primitive de f.*
L'une des conditions suivantes assure que les primitives soient presque périodiques

1. *L'image de F est relativement compacte.*
2. *F est bornée et $\mathbb{X}$ est uniformément convexe* [3]

1.1.3 Fonctions presque-périodiques à paramètres

Définition 1.1.11. *Soit $F \in \mathrm{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.*
On dit que F est presque périodique en t uniformément par rapport à x, si pour tout compact K de $\mathbb{X}$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists l = l(\varepsilon) > 0,\ \ \exists \tau \in [\alpha, \alpha + l] \ \ \text{tels que}$$
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in \mathbb{X},\ \ \|f(t+\tau, x) - f(t,x)\| \leq \varepsilon.$$

$\mathrm{AP}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$*, désignera l'espace de telles fonctions.*

3. [18] On dit qu'un espace de Banach $\mathbb{X}$ est **uniformément convexe** si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$(x, y \in \mathbb{X},\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1 \ \text{ et } \ \|x-y\| > \varepsilon) \Rightarrow \left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta \right).$$

1.2 Fonctions presque périodiques au sens de Stepanov

La presque périodicité de Stepanov, comme propriété structurelle, est une généralisation de la presque périodicité.
Cette théorie a débuté dans la première moitié du vingtième siècle par le mathématicien russe V. Stepanov [83] et a été développée grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens, ce qui est bien présenté dans les monographies de N. Wiener, P. Franklin [46], A.S. Besicovitch [9], B.M. Levitan et V.V. Zhicov [65], Amerio et Prouse [4], S. Zaidman [94], A. S. Rao [78], C. Corduneanu [25], L. I. Danilov [27, 28], S. Stoinski [84] et J. Andres, A. M. Bersani, G. Grande [5].

Cette section est dédiée à la presque périodicité au sens de Stepanov.
Nous présentons les définitions et les propriétés essentielles de cette notion ainsi que son lien avec la presque périodicité au sens de Bohr.

Soit $\mathrm{M}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace de Banach $\mathbb{X}$.

Définition 1.2.1. *Soit $f \in \mathrm{M}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $1 \leq p < \infty$. On dit que la fonction f est localement p-intégrable, ($f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$) si pour tout compact K de $\mathbb{R}$ la quantité*

$$\int_K \|f(t)\|^p \, d\mu(t)$$

est finie.

La norme de Stepanov d'une fonction $f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est définie par

$$\|f\|_{\mathbb{S}^p_l} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l} \int_x^{x+l} \|f(t)\|^p \, d\mu(t) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad l > 0,$$

et la distance induite par la norme $\|.\|_{\mathbb{S}^p_l}$ est

$$\mathrm{D}_{\mathbb{S}^p_l}(f,g) = \|f-g\|_{\mathbb{S}^p_l} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l} \int_x^{x+l} \|f(t)-g(t)\|^p \, d\mu(t) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.2.2. *Une propriété importante vérifiée par les normes de Stepanov $\|.\|_{\mathbb{S}^p_1}$, $l > 0$ est qu'elles sont toutes équivalentes. C'est à dire,
pour tout $1_1,\ 1_2 > 0$ il existe α, β dépendant de 1_1 et 1_2 tels que*

$$\alpha \|f\|_{\mathbb{S}^p_{1_1}} \leq \|f\|_{\mathbb{S}^p_{1_2}} \leq \beta \|f\|_{\mathbb{S}^p_{l_1}}.$$

En raison de cette équivalence, on peut supposer dans tout ce qui suit $l = 1$. C'est à dire

$$\|f\|_{\mathbb{S}^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\int_x^{x+1} \|f(t)\|^p \, d\mu(t) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

1.2.1 Espace des fonctions Stepanov-presque périodiques $\mathbb{S}^p AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$

Proposition 1.2.3. *[4] On dit qu'une fonction $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est presque périodique au sens de Stepanov (et on écrit $f \in \mathbb{S}^p AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$) si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :*

1. *f vérifie la **propriété de translation** : si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*
$$\mathbb{S}^p T(f,\varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R};\ \ \|f_\tau - f\|_{\mathbb{S}^p} < \varepsilon\}$$
est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Les nombres $\tau \in \mathbb{S}^p T(f,\varepsilon)$ sont appelés ε-Stepanov presque périodes de f.
2. *f vérifie la **propriété de normalité** : si la famille de fonctions $\{f(.+h),\ \ h \in \mathbb{R}\}$ est $\mathbb{S}^p$-pré-compacte, c'est à dire si pour toute suite $(f(.+h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ on peut choisir une sous-suite convergente au sens de la norme $\|.\|_{\mathbb{S}^p}$.*
3. *f vérifie la **propriété d'approximation** : l'espace des fonctions presque périodiques est la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques dans $B\mathbb{S}^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ par rapport à la norme $\|.\|_{\mathbb{S}^p}$, où $B\mathbb{S}^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est l'espace de Banach définit par :*
$$B\mathbb{S}^p(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \left\{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X});\ \ \|f\|_{\mathbb{S}^p} < \infty\right\}.$$

Un résultat important de Besicovitch [9] (voir aussi Guter et al. dans [50, Théorème. 7, p.190 et Théorème 4, p.191] et Pankov [74, p.26-27]) a permis de montrer que toutes les définitions précédentes sont équivalentes. La preuve de ces équivalences découle du fait que le concept de la presque périodicité au sens de Stepanov peut être vue comme la presque périodicité au sens de Bohr d'une certaine fonction à valeurs dans un espace de Lebesgue $L^p([0,1];\mathbb{X})$, comme le montre le théorème 1.2.5.

Définition 1.2.4 (La transformée de Bochner [13]).

1. *La transformée de Bochner f^b [4] d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est définie comme suit :*
$$f^b : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{X}^{[0,1]}\,{}^{5} \\ t \mapsto f^b(t) = f(t+.). \end{cases}$$
2. *La transformée de Bochner $F^b(t,s,u)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$, $u \in \mathbb{X}$ d'une fonction $F(t,u)$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{X}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ est définie par :*
$$F^b(t,s,u) = F(t+s,u)$$

Théorème 1.2.5 ([4]). *Soit $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. On a la caractérisation suivante :*
$$f \in \mathbb{S}^p AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \ \ \textit{si et seulement si} \ \ f^b \in AP(\mathbb{R}, L^p([0,1];\mathbb{X})).$$
De plus,
$$\|f\|_{\mathbb{S}^p} = \left\|f^b\right\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|f^b(t)\right\|_{L^p([0,1],\mathbb{X})}.$$

4. La terminologie est due au fait que Bochner a été le premier à utiliser cette transformation pour la presque périodicité au sens de Stepanov dans [13]
5. $\mathbb{X}^{[0,1]}$: l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{X}$.

Notons que toute fonction presque périodique au sens de Bohr est presque périodique au sens de Stepanov.
En revanche, la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant (C.f. [64]).

Exemple 1.2.6. *[64] Supposons que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha\beta^{-1}$ est un nombre irrationnel bien défini, alors les fonctions*

$$f(t) = \sin \frac{1}{2 + \cos(\alpha t) + \cos(\beta t)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$g(t) = \cos \frac{1}{2 + \cos(\alpha t) + \cos(\beta t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

sont presque périodiques au sens de Stepanov mais ne sont pas presque périodiques au sens de Bohr.

En outre, un résultat due à Amerio et Prouse dans [4] (on peut le trouver aussi dans [65, lemme. 4, p. 34] et dans [25, Théorème 6.16]), assure que si f est Stepanov presque périodique et uniformément continue alors f est Bohr presque périodique, autrement dit :

$$\mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) = \mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \cap \mathrm{C}_u(\mathbb{R}, \mathbb{X})$$

où $\mathrm{C}_u(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ désigne l'ensemble des fonctions uniformément continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$.

Grâce au Théorème 1.2.5, les propriétés de la presque périodicité au sens de Bohr se transfèrent à la presque périodicité au sens de Stepanov, en particulier, on a le résultat suivant

Théorème 1.2.7. *[4] Toute fonction presque périodique au sens de Stepanov est*

1. *$\mathbb{S}^p$-bornée ($f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$),*
2. *$\mathbb{S}^p$-uniformément continue, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \ \textit{tel que si} \ \ |h| < \delta \ \ \textit{alors} \ \ \mathrm{D}_{\mathbb{S}^p}(f_h, f) < \varepsilon.$$

Pour la suite on donnera la définition des fonctions Stepanov presque périodiques à paramètre :

Définition 1.2.8. *[12, 37] Une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $(t, u) \mapsto f(t, u)$ avec $f(., u) \in \mathrm{B}\mathbb{S}^p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ pour tout $u \in \mathbb{X}$, est dite Stepanov presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément pour $u \in \mathbb{X}$, si pour tout $\varepsilon > 0$, et tout compact $K \subset \mathbb{X}$, il existe un ensemble relativement dense $\mathbb{S}^p\mathrm{T}(f, \varepsilon, K)$ tel que*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|f(t+s+\tau, u) - f(t+s, u)\|^p \, d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

pour tout $\tau \in \mathbb{S}^p\mathrm{T}(f, \varepsilon, K)$ et tout $u \in K$. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathbb{S}^p\mathrm{AP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

1.2.2 Les fonctions mesurables presque périodiques (μ-$\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$)

La notion de la presque périodicité pour des fonctions mesurables au sens de Lebesgue (μ-$\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$) a été introduite par Stepanov [83], il ne les avait pas appelées fonctions presque périodiques en mesure de Lebesgue mais des fonctions *mesurables presque périodiques*.

Contrairement aux fonctions μ-$\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ qui sont seulement mesurables, les fonctions $\mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ sont nécessairement localement intégrables. Par conséquent, la valeur moyenne des fonctions μ-$\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ n'existe pas nécessairement, mais elles peuvent être approximer par une suite de polynômes trigonométriques généralisés.

Signalons qu'une grande attention a été accordée à ces fonctions, on peut citer les travaux de Stoinski [84], Danilov [28], Bugajewski et al. [19] et Kasprzak et al. [59]. On note que, les fonctions μ-$\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ possèdent une définition beaucoup plus compliquée que celle de $\mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ (voir définition 1.2.9). D'ailleurs, leurs applications dans la théorie des équations d'évolution n'ont pas encore été examinées.

Soit $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}$ la sous mesure qui a tout sous ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$ associe $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}(A)$ définit par :

$$\bar{\mu}_{\mathbb{S}}(A) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \mu\left(A \cap [\xi, \xi+1]\right). \tag{1.2}$$

La notation A^c signifie le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.9 ([19, 59, 83, 84])**.** *Une fonction $f \in \mathrm{M}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est dite* mesurable presque périodique *(et on écrit $f \in \mu$-$\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$), si pour tout ε, $\delta > 0$, il existe $l(\varepsilon,\delta) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon,\delta)$ contient au moins un nombre réel τ satisfaisant*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \mu\left(\{t \in [\xi, \xi+1],\ \|f(t+\tau) - f(t)\| \geq \varepsilon\}\right) < \delta.$$

Remarque 1.2.10. *[19, 84]*

1. *La notion de fonction mesurable presque périodique coïncide avec la presque périodicité de Stepanov $\mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ lorsqu'on remplace la norme $\|.\|$ par la norme tronquée $\|.\|' = \min(\|.\|, 1)$.*
Autrement dit, nous avons la caractérisation suivante
$$\mu\text{-}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \mathbb{S}^1\mathrm{AP}\left(\mathbb{R}, \left(\mathbb{X}, \|.\|'\right)\right). \tag{1.3}$$
2. *En utilisant (1.3), on déduit que*
$$\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathbb{S}^1\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mu\text{-}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}). \tag{1.4}$$
3. *Notons que la classe μ-$\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ jouit d'une propriété de compacité importante qu'on notera par **(D)** (voir [28]) :*
(D) *: Si $f \in \mu$-$\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable T_ε de $\mathbb{R}$ et un sous ensemble compact K_ε de $\mathbb{X}$; tel que $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}(\mathrm{T}^c_\varepsilon) < \varepsilon$ et $f(t) \in \mathrm{K}_\varepsilon; \forall t \in \mathrm{T}_\varepsilon$.*
*La propriété de compacité **(D)** joue un rôle primordial dans la démonstration du résultat de superposition.*

1.3 La pseudo presque périodicité

Au début des années quatre-vingt-dix, Zhang [92, 93] a donné naissance à une nouvelle classe de fonctions appelées fonctions pseudo presque périodiques. Il les a défini en perturbant la classe des fonctions presque périodiques par un terme ergodique.
Avant de définir ces fonctions, commençons par une présentation des fonctions ergodiques.

Une fonction $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est dite ergodique si elle satisfait

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|f(t)\|\, d\mu(t) = 0, \tag{1.5}$$

Notons par $\mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ l'espace de telles fonctions. Plus précisément,

$$\mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \left\{ f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R},\mathbb{X}) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|f(t)\|\, d\mu(t) = 0 \right\}.$$

Sous la condition de bornitude qui est de nature métrique, Blot et al. [10] ont retravaillé la définition de l'ergodicité en lui donnant une caractérisation élégante via une propriété topologique dans le cas général d'une mesure de Borel.

En fait, d'après Blot et al. une fonction $f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est ergodique si pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r}\gamma(\{t \in [-r,r], \|f(t)\| \geq \varepsilon\}) = 0 \tag{1.6}$$

où γ est la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\gamma(\mathbb{R}) = +\infty$ et $\gamma([a,b]) < +\infty$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(a \leq b)$.

Remarque 1.3.1. *L'espace $\mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est invariant par translation.*

1.3.1 Définitions et propriétés des fonctions pseudo presque périodiques $\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$

Définition 1.3.2. *[11] Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est dite pseudo presque périodique si elle se décompose comme suit*

$$f = g + h, \quad \text{où} \quad g \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \quad \text{et} \quad h \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}). \tag{1.7}$$

La fonction g (resp. h) est la composante presque périodique (resp. la composante ergodique) de f.

L'ensemble des fonctions pseudo presque périodiques est noté par $\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Exemples 1.3.3. *Les fonctions suivantes*

1. $\varphi(t) = \cos^2(t) + \cos^2\left(\sqrt{3}t\right) + \exp\left(-t^2\cos^2(t)\right),$

2. $\psi(t) = \sin(t) + \sin(\pi t) + t|\sin(\pi t)^{t^N}|$, $N \in \mathbb{N}$ $N > 6$.
3. $\psi(t,y) = \sin(t) + \sin(\pi t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(y-t)}{t^2 + w^2} dt$, $K(.) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ $,w,y \in \mathbb{R}$.

sont des fonctions pseudo presque périodiques.

La proposition suivante résume les principales propriétés des fonctions pseudo presque périodiques.

Proposition 1.3.4. *[32, 92, 93]*

1. $(\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*
2. *Soit* $f \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. *Alors l'écriture* $f = g + h$ *est unique. i.e.*

$$\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \oplus \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

3. $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
4. *L'espace* $\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est invariant par translation.*
5. *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *telle que* $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ *quand* $n \to \infty$ *alors* $f \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

1.3.2 Dérivation et intégration des fonctions pseudo presque périodiques

Théorème 1.3.5. *[92] Si* $f \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et sa dérivée* f' *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*, alors* $f' \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Théorème 1.3.6. *[32, Théorème 5.12] On suppose que l'espace de Banach* $\mathbb{X}$ *est uniformément convexe. Soit* $f \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$*, avec*

$$f = g + h, \quad g \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \quad et \quad h \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

On définit les fonctions :

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \quad et \quad H(t) = \int_0^t h(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

et on suppose que

1. *G est bornée*
2. *Il existe* $\Phi \in \mathbb{X}$ *tel que :* $H - \Phi \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Alors la fonction définie par : $t \mapsto F(t) = G(t) + H(t)$ *appartient à* $\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

1.4 Fonctions Stepanov pseudo presque périodiques $\mathbb{S}^p\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$

En 2007, T. Diagana [33] a défini les fonctions Stepanov pseudo presque périodiques. Ces derniers sont conçues à partir des fonctions Stepanov presque périodiques introduites par Stepanov lui même en 1926 [83]. Plus précisément, on a la définition suivante :

Définition 1.4.1. *Une fonction $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est dite **Stepanov pseudo presque périodique** ($\mathbb{S}^p$-pseudo presque périodique) et on écrit $(f \in \mathbb{S}^p\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X}))$, si elle s'exprime comme suit*

$$f = g + h,$$

avec $g^b \in \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathrm{L}^p([0,1],\mathbb{X}))$ et $h^b \in \mathscr{E}(\mathbb{R}, \mathrm{L}^p([0,1],\mathbb{X}))$.

*En d'autre termes, une fonction $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est dite **Stepanov pseudo presque périodique** si sa transformée de Bochner $f^b : \mathbb{R} \to \mathrm{L}^p([0,1],\mathbb{X})$ est pseudo presque périodique dans le sens qu'il existe deux fonctions $g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ telles que $f = g + h$ avec $g \in \mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \left(\int_{t}^{t+1} \|h(s)\|^p \, d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(t) = 0.$$

Remarque 1.4.2. *On note que*

1. $\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathbb{S}^p\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X}), \quad \forall 1 \leq p < \infty.$
2. $\mathbb{S}^q\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathbb{S}^p\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X}), \quad \forall 1 \leq p < q < \infty.$

Dans [34], T. Diagana et M. Zitane ont généralisé le concept définit dans [33] au cadre des espaces de Lebesgue à exposant variables.

Avant d'énoncer les théorèmes de superposition dans ces espaces il est utile de donner la définition des fonctions Stepanov pseudo presque périodiques à paramètre.

Définition 1.4.3. *[33, 76] Une fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $(t,u) \mapsto F(t,u)$ avec $F(.,u) \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{X})$ pour tout $u \in \mathbb{X}$, est dite $\mathbb{S}^p$-pseudo presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $u \in \mathbb{X}$ si l'application $t \mapsto F(t,u)$ est $\mathbb{S}^p$-pseudo presque périodique pour tout $u \in \mathbb{X}$.*

Autrement; il existe deux fonctions $G,H : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ telles que F s'écrit comme $F = G + H$ avec $G^b \in \mathrm{AP}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathrm{L}^p([0,1],\mathbb{X}))$, et $h^b \in \mathscr{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathrm{L}^p([0,1],\mathbb{X}))$ avec

$$\mathscr{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X}) = \left\{ f \in \mathrm{BC}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X}); \ \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \left(\int_{t}^{t+1} \|f(s,u)\|^p \, d\mu(s) \right) d\mu(t) = 0 \right\}.$$

L'espace des fonctions $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ $\mathbb{S}^p$-pseudo presque périodiques est noté par $\mathbb{S}^p\mathrm{PAP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.

1.5 Théorèmes de superposition dans les espaces $\mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\mathbb{S}^p\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$

Soit $f:\mathbb{R}\times\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ une fonction mesurable.

Définition 1.5.1. *L'opérateur de Nemytskii (appelé aussi* opérateur de superposition*), noté $\mathcal{N}_f$ construit sur la fonction f est défini comme suit*

$$\mathcal{N}_f:[t\mapsto x(t)]\longmapsto[t\mapsto f(t,x(t))],$$

pour tout fonction $x:\mathbb{R}\to\mathbb{X}$

Le rôle de cet opérateur s'est révélé crucial dans l'étude de l'existence de solutions presque périodiques d'équations d'évolution.
Des résultats sur les propriétés de ces opérateurs entre divers espaces de fonctions presque-périodiques ont été développés par, J. Blot, P. Cieutat, G.M. N'guérékata, D.Pennequin et autres, (voir [12, 22, 24]).

Ces auteurs ont établi une condition suffisante sur la fonction paramétrique f à savoir **Bohr presque périodique** qui permet à l'opérateur $\mathcal{N}_f$ d'envoyer un espace de fonctions presque périodiques dans un espace de même type.

Ce résultat a été généralisé par W. Long et al. [37] (voir aussi [67]) dans le cadre des espaces de Stepanov presque périodiques sous la condition de compacité suivante :

(COMP) Il existe un sous-ensemble mesurable $A\subset\mathbb{R}$ avec $\mu(A)=0$ tel que $K:=\overline{\{x(t):t\in\mathbb{R}\setminus A\}}$ est un compact de $\mathbb{X}$,

l'opérateur de Nemytskii $\mathcal{N}_f$ envoie l'espace de fonctions Stepanov presque périodiques dans un espace de même type. Dans l'article de 2009, J. Blot et al [12] se sont intéressé à la continuité et la différentiabilité de cet opérateur. Notons aussi qu'une étude approfondie a été faite par J. Andres et D. Pennequin sur ces opérateurs de superpositions (pour plus de détails, voir [7])

Dans l'année 2018, en s'inspirant des travaux de Danilov [26] et en adoptant une nouvelle approche, Bedouhene et al. [14] ont amélioré le résultat de [67, Théorème 2.4] en supprimant la condition de compacité **(COMP)**, voir le théorème 1.5.2.

Dans ce qui suit, supposons que $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ avec p,q et $r\geq 1$.
On notera **(LIP)** la condition de Lipschitz sur $f:\mathbb{R}\times\mathbb{X}\to\mathbb{X}$. Plus précisément :

(LIP) : Il existe une fonction non-négative $L\in B\mathbb{S}^r(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\|f(.,u)-f(.,v)\|_\infty\leq L(t)\,\|u-v\|\,,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \ u,v\in\mathbb{X}.$$

Théorème 1.5.2. *[14, Théorème 2.10]. Soit $f\in\mathbb{S}^p\mathrm{AP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.*
Supposons que f satisfait la condition **(LIP)***, alors pour tout $x(.)\in\mathbb{S}^q\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, on a $\mathcal{N}_f(x(.))\in\mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.*

T. Diagana [33] a introduit le concept de fonctions Stepanov pseudo presque périodiques et a ainsi établi certaines propriétés, y compris le théorème de composition suivant (voir [33, Théorème 2.14]).

Théorème 1.5.3. *Soit* $f \in \mathbb{S}^p\mathrm{PAP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$. *Supposons que* $f(.,u)$ *est Lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe* $L > 0$ *tel que pour tout* $u, v \in \mathbb{X}$

$$\|f(.,u) - f(.,v)\|_\infty \leq L\|u - v\|. \tag{1.8}$$

Si $x \in \mathbb{S}^p\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *alors,* $f(.,x(.)) \in \mathbb{S}^p\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

1.6 Solutions presque périodiques et pseudo presque périodiques des équations abstraites à coefficients $\mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\mathbb{S}^p\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$

La question de savoir si des équations différentielles avec un second membre Stepanov-presque périodique admettent des solutions purement Stepanov presque périodiques (c-à-d elles sont presque périodiques au sens de Stepanov et non presque périodiques de Bohr) a attiré l'attention de plusieurs auteurs notamment Z. Hu et A. B. Mingarelli [53–57], M. Tarallo [87]. Ce dernier, en étendant des techniques de Favard [87], a montré que ceci n'est pas possible pour les équations linéaires.

Considérons ici les équations différentielles suivantes :

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \tag{1.9}$$

et

$$u'(t) = Au(t) + F(t,u(t)) \tag{1.10}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$, $F : \mathbb{R}\times\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ sont des fonctions Stepanov presque périodiques (ou Stepanov pseudo presque périodiques) et $A : \mathrm{Dom}(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est un opérateur linéaire (non borné) qui génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ exponentiellement stable, c'est-à-dire il existe des constantes $M > 0$, $\omega > 0$ telles que

$$\|T(t)\| \leq M\exp(-\omega t), \quad \forall t \geq 0.$$

Le but de cette section est d'énoncer quelques résultats concernant l'existence et l'unicité de solutions "mild" Bohr presque périodiques (ou pseudo presque périodiques) des équations précédentes.
Ces résultats feront l'objet de généralisations (dans la partie contribution de cette thèse) au cadre des équations différentielles à coefficients Stepanov-Orlicz presque périodiques et Stepanov-Orlicz pseudo presque périodiques.

Commençons par rappeler qu'une fonction continue $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{X}$ est une **solution "mild"** de l'équation différentielle semi-linéaire (1.10) signifie que

$$u(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-\sigma) f(\sigma, u(\sigma)) d\sigma \quad t \geq s, \ s \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Théorème 1.6.1. *[33, 37] Si $f \in \mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ (resp. $f \in \mathbb{S}^p\mathrm{PAP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$), l'équation (1.9) admet une solution mild unique Bohr presque périodique (resp. pseudo presque périodique) donnée par :*

$$u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Le théorème suivant (Cf. [37, 69]) assure l'existence et l'unicité d'une solution mild presque périodique de l'équation (1.10) dans le cas où la fonction paramétrique F est continue et Stepanov presque périodique.

Théorème 1.6.2. *Sous les hypothèses* **(LIP)** *et la $\mathbb{S}^p$-bornitude de F, l'équation (1.10) admet une solution mild unique bornée donnée par*

$$u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) F(s, u(s)) ds, \quad \textit{pour chaque} \ \ t \in \mathbb{R},$$

à condition que

$$\|L\|_{\mathbb{S}^p} < \frac{1 - e^{-\omega}}{M} \left(\frac{\omega q}{1 - e^{-\omega q}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \textit{avec} \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si de plus, $F \in \mathbb{S}^p\mathrm{AP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, alors cette solution est presque périodique.

Le problème d'existence et d'unicité de solution "mild" pseudo presque périodique de l'équation (1.10) est examiné par [33].

Théorème 1.6.3. *Sous l'inégalité (1.8), l'équation (1.10) admet une solution mild unique bornée donnée par*

$$u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) F(s, u(s)) ds, \quad \textit{pour chaque} \ \ t \in \mathbb{R},$$

à condition que $\frac{LM}{\omega} < 1$. Si de plus $F \in \mathbb{S}^p\mathrm{PAP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, alors cette solution est pseudo presque périodique.

La preuve du théorème 1.6.3 repose sur le théorème du point fixe de Banach et le théorème de superposition 1.5.3.

CHAPITRE 2

La presque périodicité dans les espaces d'Orlicz

Sommaire

2.1 Introduction

Les espaces d'Orlicz sont introduits pour la première fois par le mathématicien polonais W. Orlicz au début des années trente. Ils constituent une généralisation naturelle des espaces de Lebesgue ($L^p, p \geq 1$).

Orlicz a remplacé la fonction puissance qui définit les L^p par une fonction dite de Young (notée dans cette thèse par ϕ) possédant des propriétés semblables à celles de la fonction puissance.
Ces derniers sont aussi des espaces modulaires généré par la modulaire d'Orlicz suivante : pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{X}$

$$\rho_\phi(f) = \int_\Omega \phi(\|f(t)\|)\, d\mu(t), \quad \Omega \subset \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

En s'inspirant du travail de Besicovitch [9], T.R.Hillmann a introduit trois types de presque périodicité à savoir : Stepanov-Orlicz presque périodique $\mathbb{S}^\phi \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, Besicovitch-Orlicz presque périodique $\mathbb{B}^\phi \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et Weyl-Orlicz presque périodique $\mathbb{W}^\phi \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. L'avantage de ces classes de fonctions et qu'elles jouissent des propriétés des espaces normés et de celles des espaces modulaires [20], [61], [63].

Dans le cadre de cette thèse on s'est intéressé seulement à la classe $\mathbb{S}^\phi \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Elle constitue une extension naturelle de $\mathbb{S}^p \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ étudiée dans le chapitre précédent.

Le choix de $\mathbb{S}^\phi \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est motivé par

1. les différents résultats concernant l'application des $\mathbb{S}^p \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ dans la théorie des équations différentielles et les équations intégrales [7], [33], [35].
2. Insuffisance des méthodes utilisant les espaces de types L^p en théorie des opérateurs, des équations différentielles et des équations intégrales (voir [62], [60]).

2.2 Les fonctions de Young

Définition 2.2.1. *On appelle **fonction de Young** une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant aux axiomes suivants :*

1. *ϕ est convexe*
2. *ϕ est symétrique,*
3. *ϕ est croissante,*
4. *$\phi(0) = 0$ et $\phi(u) > 0$ pour $u \neq 0$.*
5. *$\lim\limits_{|u| \to \infty} \phi(u) = +\infty$.*

Toute fonction de Young admet la représentation intégrale suivante (cf. [62] ; [80]) : $\phi(u) = \int_0^{|u|} p(t)\, d\mu(t)$, où p est la fonction dérivée à droite de ϕ. p et croissante pour $t \neq 0$ et continue à droite.

*Une fonction de Young ϕ est dite N-**fonction** lorsqu'elle vérifie les conditions supplémentaires suivantes :*

(a) $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\phi(u)}{u} = 0,$

(b) $\lim\limits_{u\to \infty} \dfrac{\phi(u)}{u} = \infty.$

A toute fonction de Young ϕ, on associe une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dite complémentaire de ϕ au sens de Young, définie par :

$$\psi(y) = \sup_{x\neq 0} x|y| - \phi(x),\ y \in \mathbb{R}.$$

La fonction ψ possède des propriétés semblables à celles de ϕ.
Elle est convexe, symétrique et telle que $\psi(0) = 0$ et $\lim\limits_{y\to\infty} \psi(y) = +\infty$. Mais elle n'est pas nécessairement une fonction de Young puisqu'on peut avoir $\psi(x_0) = 0$ pour $x_0 > 0$.
Le couple de fonctions complémentaires $(\phi;\psi)$ satisfait à l'inégalité dite de Young :

$$xy \leq \phi(x) + \psi(y) \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2.2.

1. *La fonction $\phi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $p > 1$ est une fonction de Young, sa fonction complémentaire ψ est donnée par : $\psi(y) = \frac{|y|^q}{q}$, où q est telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
2. *La fonction complémentaire de*

$$\phi_{\infty,1}(x) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ x \in [-1,1], \\ |x| - 1 \ \ sinon \end{cases}$$

est

$$\psi_{\infty,1}(y) = \phi_{1,\infty}(y) = \begin{cases} |y| \ \ si \ \ y \in [-1,1] \\ +\infty \ \ sinon. \end{cases}$$

La formule explicite de la fonction complémentaire au sens de Young n'est pas toujours simple. Les exemples suivants illustrent ce fait :

Exemples 2.2.3.

1. $\phi(x) = \exp(|x|) - |x| - 1$ *et* $\psi(y) = (1+|y|)\ln(1+|y|) - |y|$.
2. $\phi(x) = \exp\left(|x|^\delta\right) - 1,\ \delta > 1$ *le calcul de ψ revient à résoudre l'équation de la variable x :* $|y| - \delta x^{\delta-1}\exp\left(|x|^\delta\right) = 0,\ \delta > 1.$
3. *La fonction de Young suivante : $\phi(x) = \exp(x) - 1$ a pour complémentaire la fonction ψ définie par*

$$\psi(y) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ |y| \leq 1 \\ y\ln|y| - y + 1 \ \ si \ \ |y| > 1, \end{cases}$$

ψ n'est pas une fonction de Young. On remarque que $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} \neq 0$, et donc, ψ n'est pas une N-fonction.

La condition-Δ_2

La condition-Δ_2 est une condition de croissance sur les fonctions de Young. Elle joue un rôle primordial dans certaines questions concernant les espaces d'Orlicz.

Définition 2.2.4. *[80] Une fonction de Young ϕ satisfait la condition-Δ_2 ($\phi \in \Delta_2$) s'il existe deux constantes $k > 2$ et $u_0 \neq 0$ telles que :*

$$\phi(2u) \leq k\phi(u), \quad \forall |u| \geq u_0. \tag{2.2}$$

Remarque 2.2.5. *Si ϕ vérifie la condition-Δ_2 pour des constantes $k > 2$ et $u_0 \neq 0$ alors l'inégalité (2.2) reste valable pour tout $u_0 > 0$. De manière précise (Cf. [80]) :*

$$\forall u^* > 0, \exists k^* > 2 \text{ tel que } \phi(2u) \leq k^*\phi(u) \quad \forall |u| \geq u^*.$$

Exemples 2.2.6.

1. *La fonction $\phi(x) = |x|^{\alpha}(\ln|x| + 1)$, $\alpha > 1$ satisfait la condition-Δ_2.*
2. *La fonction $\phi(x) = (1 + |x|)\ln(1 + |x|) - |x|$ satisfait la condition-Δ_2 mais sa fonction complémentaire $\psi(y) = \exp(|y|) - |y| - 1$ ne la satisfait pas.*
3. *$\phi(x) = \exp(|x|) - 1$ ne vérifie pas la condition-Δ_2.*

Remarque 2.2.7. *Si ϕ est une fonction de Young vérifiant la condition-Δ_2 alors il existe x_0 et deux constantes $c > 0$, $\alpha > 1$ tels que $\phi(x) \leq c|x|^{\alpha}$, $\forall |x| \geq x_0$ (Cf. [80]). C'est à dire : une fonction de Young ϕ vérifiant la condition-Δ_2 est à croissance au plus polynômiale.*

2.3 Les espaces d'Orlicz

Comme mentionnée dans l'introduction de ce chapitre les espaces d'Orlicz sont des espaces modulaires conçu par la modulaire (2.1). Une littérature abondantes est consacrée à ces espaces voir [20, 61, 63, 73].

Soient ϕ une fonction de Young, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$, μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions μ-mesurable définies de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2.3.1 Espaces modulaires

Définition 2.3.1. *Soit X un espace vectoriel réel ou complexe.*
Une fonctionnelle $\rho : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ est dite pseudo-modulaire lorsque pour tout $x, y \in X$, on a

1. *$\rho(0) = 0$,*

2. $\rho(-x) = \rho(x)$,
3. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *si* $\alpha, \beta \geq 0 \;\; \alpha + \beta = 1$.

Lorsque la fonctionnelle ρ *est convexe, c'est-à-dire :*

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y) \;\; si \;\; \alpha, \beta \geq 0 \;\; \alpha + \beta = 1,$$

elle est dite pseudo-modulaire convexe.
Si de plus, $\rho(x) = 0$ *implique* $x = 0$*,* ρ *est appelée fonctionnelle modulaire.*

A la modulaire ρ*, on associe l'espace modulaire suivant :*

$$\begin{aligned} X_\rho &= \left\{ x \in X, \lim_{k \to 0} \rho(kx) = 0 \right\} \\ &= \{ x \in X, \rho(kx) < \infty \;\; pour\ un\ certain \;\; k > 0 \}. \end{aligned}$$

Définition 2.3.2. *Soit* ρ *une modulaire convexe sur* X*. Alors la fonction définie par*

$$\|f\|_\rho = \inf\left\{ k > 0, \; \rho\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1 \right\} \tag{2.3}$$

est une norme sur X_ρ *appelée norme de Luxemburg.*

Remarque 2.3.3. *Si* ρ *n'est pas convexe,* $\|.\|_\rho$ *n'est pas une norme.*

Topologie et convergence dans les espaces modulaires On peut munir l'espace modulaire X_ρ de la topologie induite par la norme en considérant comme ouverts élémentaires, les ensembles

$$B(x_0, \varepsilon) = \left\{ x \in X_\rho, \|x - x_0\|_\rho < \varepsilon \right\}, \;\; x_0 \in X_\rho, \varepsilon > 0.$$

La convergence dans les espaces modulaires peut être introduite de la manière suivante :

Une suite $\{x_n\}_n \subset (X, \rho)$, sera dite modulaire convergente (ou ρ-convergente) vers un élément $x \in X$, lorsqu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \rho(\lambda(x_n - x)) = 0.$$

Remarque 2.3.4. *[52, 62, 80] Le lien entre le concept de la convergence modulaire et celui de la convergence au sens de la norme* $\|.\|_\rho$ *est clarifié par le résultat fondamental suivant :*

$$\|x_n - x\|_\rho \to 0 \;\; si\ et\ seulement\ si \;\; \rho(\lambda(x_n - x)) \to 0, \; \forall \lambda > 0. \tag{2.4}$$

Si ϕ vérifie la condition-Δ_2 alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_\rho = 0 \text{ si et seulement si } \exists\lambda > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \rho\left(\lambda\left(x_n - x\right)\right) = 0. \tag{2.5}$$

2.3.2 Espaces d'Orlicz

Définition 2.3.5. *La fonctionnelle*

$$\begin{array}{rccl} \rho_{\mathrm{L}^{\phi}(\Omega)}: & \mathrm{M}(\Omega) & \to & \bar{\mathbb{R}}^{+} \\ & f & \mapsto & \rho_{\phi}(f) = \int_{\Omega} \phi\left(f(t)\right) d\mu(t) \end{array} \tag{2.6}$$

est une modulaire convexe sur $\mathrm{M}(\Omega)$ *dite modulaire d'Orlicz.*

Soit $\mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ (respectivement. $\mathrm{L}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$) le sous espace de toutes les fonctions Lebesgue-mesurables f définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour chaque intervalle borné $\Omega \subset \mathbb{R}$ et tout $\alpha > 0$, (respectivement. il existe $\alpha := \alpha_{\Omega,f} > 0$),

$$\rho_{\mathrm{L}^{\phi}(\Omega)}(\alpha f) < \infty.$$

Les deux espaces sont des espaces modulaires.

Lorsque $\Omega = [0,1]$, on obtient l'espace de Morse-Transue classique $\mathrm{E}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ (respectivement, l'espace d'Orlicz $\mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$).

De plus, les deux espaces $\mathrm{E}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ et $\mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ munis de la norme de Luxemburg (Cf. [73], [80])

$$\|f\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])} = \inf\left\{k > 0 : \rho_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])}\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1\right\},$$

sont des espaces de Banach.

On a évidemment $\mathrm{E}^{\phi}([0,1],\mathbb{X}) \subset \mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$.
L'égalité des deux espaces a lieu quand ϕ satisfait la condition-Δ_2.

L'inégalité de Hölder dans les espaces d'Orlicz est donnée comme suit :
Soit $f \in \mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ et $g \in \mathrm{L}^{\psi}([0,1],\mathbb{X})$ où ψ est la fonction complémentaire au sens de Young de la fonction ϕ, alors $fg \in \mathrm{L}^{1}([0,1],\mathbb{X})$, de plus

$$\int_0^1 |f(t).g(t)|\, d\mu(t) \leq 2\|f\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])}\|g\|_{\mathrm{L}^{\psi}([0,1])}. \tag{2.7}$$

Remarque 2.3.6. *Si la fonction de Young ϕ dépend d'un paramètre on obtient les espaces dits de Musielak-Orlicz.*

2.3.3 Propriétés des espaces de Morse-Transue

L'espace de Morse-Transue $E^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ jouit de propriétés importantes (voir [63]). Dans ce qui suit nous rappelons deux de ces remarquables propriétés, très utiles dans notre contribution.

Continuité en ϕ-moyenne (voir [63, P 179, Théorème 3.15.5])

Si $f \in E^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$, alors f est *continue en ϕ-moyenne*. C'est à dire, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\|f_h - f\|_{L^{\phi}([0,1])} < \varepsilon$, pour $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < \delta$, où

$$f_h(t) = \begin{cases} f(t+h) & \text{si } t \in [0,1] \text{ et } t+h \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'absolue continuité en L^{ϕ}-norme (voir [63, P 172, Théorème 3.14.2])

Si $f \in E^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ alors f est *absolument continue en* L^{ϕ}*-norme*, c'est à dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $A \in \Sigma$ avec $\mu(A) < \delta$, on a $\|f\mathbf{1}_A\|_{L^{\phi}([0,1])} < \varepsilon$, où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.

2.4 Espaces de Stepanov-Orlicz

La théorie des espaces d'Orlicz s'est développée dans plusieurs directions. Celle adaptée dans notre présentation est l'approche induite par la théorie des espaces modulaires qui a permis la mise en évidence de nouvelles classes d'espaces d'Orlicz généralisées : espaces de Stepanov-Orlicz, Weyl-Orlicz et Besicovitch-Orlicz (voir [70], [71], [72]).

En 1994, dans son article [70] M. Morsli s'est intéressé particulièrement aux propriétés des espaces de Stepanov-Orlicz.

Soit ϕ une fonction de Young, la fonctionnelle

$$\begin{array}{rccl} \rho_{\mathbb{S}^{\phi}}: & L^{\phi}_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{X}) & \to & \bar{\mathbb{R}}^{+} \\ & f & \mapsto & \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_{t}^{t+1} \phi(\|f(s)\|)\, d\mu(s) \end{array} \tag{2.8}$$

est la modulaire convexe de Stepanov-Orlicz. L'espace modulaire associé à $\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}$ est appelé espace de Stepanov-Orlicz,

$$BS^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \{f \in M(\mathbb{R},\mathbb{X}), \text{t.q. } \rho_{\mathbb{S}^{\phi}}(\alpha \mathrm{f}) < +\infty, \text{ pour un certain } \alpha > 0\}.$$

On munira l'espace $BS^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ de la norme de Luxemburg définie par :

$$\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}} = \inf\left\{k > 0 : \ \rho_{\mathbb{S}^{\phi}}\left(\frac{f}{k}\right) \le 1\right\}$$

$$= \inf\left\{k > 0 : \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \phi\left(\frac{\|f(s)\|}{k}\right) d\mu(s) \leq 1\right\}. \tag{2.9}$$

Hillmann [52] a montré que la norme de Luxembourg (2.9) peut être reformulée comme suit

$$\|f\|_{\mathbb{S}^\phi} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \inf\left\{k > 0 : \int_t^{t+1} \phi\left(\frac{\|f(s)\|}{k}\right) d\mu(s) \leq 1\right\}. \tag{2.10}$$

On peut également définir le sous espace de $\mathrm{B}\mathbb{S}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X})$ du type Morse-Transue

$$\widetilde{\mathrm{B}\mathbb{S}}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \{f \in \mathrm{M}(\mathbb{R},\mathbb{X}) : \rho_{\mathbb{S}^\phi}(\alpha f) < +\infty, \text{ pour tout } \alpha > 0\}.$$

Remarque 2.4.1.

1. *L'espace* $\widetilde{\mathrm{B}\mathbb{S}}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *muni de la norme* (2.10) *est un espace de Banach.*
2. $\mathrm{B}\mathbb{S}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \widetilde{\mathrm{B}\mathbb{S}}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *si et seulement si* $\phi \in \Delta_2$.

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans [73], on peut montrer que la propriété suivante (du même type que [52, Lemme 1.2]) est vérifiée :
pout tout $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X})$, il existe $\beta_{\phi,f} > 0$, tel que

$$\|f\|_{\mathbb{S}^1} \leq \beta_{\phi,f} \|f\|_{\mathbb{S}^\phi}, \tag{2.11}$$

où la notation $\|.\|_{\mathbb{S}^1}$ représente la norme (2.9) lorsque $\phi = |.|$.

Dans toute la suite et pour des raisons de clarté, nous posons

$$\rho_{\mathbb{S}^\phi(x)}(f) := \int_x^{x+1} \phi(\|f(s)\|)\, d\mu(s);$$

$$\|f\|_{\mathbb{S}^\phi(x)} := \inf\left\{k > 0 : \rho_{\mathbb{S}^\phi(x)}\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1\right\}.$$

La norme de Luxemburg $\|.\|_{\mathbb{S}^\phi}$ jouit de propriétés importantes en relation avec la modulaire $\rho_{\mathbb{S}^\phi}(.)$ qu'on peut trouver dans [52, 68].

Lemme 2.4.2. *Soit* $f \in \mathrm{M}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. *On a*

1. $\|f\|_{\mathbb{S}^\phi} < +\infty$ *si et seulement si* $\rho_{\mathbb{S}^\phi}(\alpha f) < +\infty$ *pour un certain* $\alpha > 0$, *(voir [68]).*
2. $\|f\|_{\mathbb{S}^\phi} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f\|_{\mathbb{S}^\phi(x)}$, *(voir [52]),*
3. $\|f\|_{\mathbb{S}^\phi} \leq 1$ *si et seulement si* $\rho_{\mathbb{S}^\phi}(f) \leq 1$.
   Plus précisement, $\|f\|_{\mathbb{S}^\phi} \leq 1$ *implique* $\rho_{\mathbb{S}^\phi}(f) \leq \|f\|_{\mathbb{S}^\phi}$ *et* $\|f\|_{\mathbb{S}^\phi} > 1$ *implique* $\rho_{\mathbb{S}^\phi}(f) \geq \|f\|_{\mathbb{S}^\phi}$.

Remarque 2.4.3.

1. *L'assertion* 3 *du Lemme 2.4.2 est un résultat bien connu dans les espaces modulaires, (voir [73]).*
2. *La propriété* 2 *du Lemme 2.4.2 joue un rôle important dans nos résultats.*

La remarque suivante nous sera utile dans la démonstration de certains résultats :

Remarque 2.4.4. *Il est facile de vérifier que pour toute fonction de Young ϕ, l'équivalence suivante*
$$f \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \Longleftrightarrow \phi(\|f\|) \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
est vraie.

2.5 Les fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques

En considérant la fermeture de l'ensemble $\mathrm{Trig}(\mathbb{R};\mathbb{X})$ relativement à des pseudo-normes du type L^p ($\|.\|_{\mathbb{S}^p}$, $\|.\|_{\mathbb{W}^p}$, $\|.\|_{\mathbb{B}_p}$ [6]), A.S.Bésicovitch [9] a obtenu trois nouvelles classes de fonctions presque périodiques contenant la classe $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ appelées : espaces de Stepanov $\mathbb{S}^p AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, espaces de Weyl $\mathbb{W}^p AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et espaces de Besicovitch $\mathbb{B}^p AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ de fonctions presque périodiques.

Suite aux travaux d'Albrycht [3], où la théorie des espaces de Marcinkiewicz-Orlicz a été introduite et ceux de Besicovitch [9], Hillmann [52] a élargi cette théorie aux espaces d'Orlicz mettant ainsi en évidence de nouvelles classes d'espaces : espaces de Stepanov-Orlicz, espaces de Weyl-Orlicz et espaces de Besicovitch-Orlicz presque périodiques.

Dans toute la suite, notre étude se restreindra aux espaces de fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques.

Définition 2.5.1 ([52]). *Une fonction $f \in \mathrm{L}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est dite* Stepanov-Orlicz presque périodique, *($f \in \mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X})$) si elle appartient à la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés* $\mathrm{Trig}(\mathbb{R};\mathbb{X})$ *dans $\mathrm{L}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ par rapport à la norme $\|.\|_{\mathbb{S}^{\phi}}$. Plus exactement :*
$$\mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \overline{\mathrm{Trig}(\mathbb{R};\mathbb{X})}^{\|\cdot\|_{\mathbb{S}^{\phi}}}. \tag{2.12}$$

Les fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques ont été aussi caractérisées en termes de propriétés de translation ou de presque périodicité.

Définition 2.5.2 ([52]). *On dit qu'une fonction $f \in \mathrm{L}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ satisfait la* propriété de translation au sens de Stepanov-Orlicz *et on écrit $f \in \mathbb{S}^{\phi}_{t.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*
$$\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{T}(f,\varepsilon) := \{\tau \in \mathbb{R}, \|f_\tau - f\|_{\mathbb{S}^{\phi}} < \varepsilon\} \tag{2.13}$$

6. $\|f\|_{\mathbb{W}^p} = \lim_{l\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l}\int_x^{x+l} \|f(t)\|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|f\|_{\mathbb{B}^p} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \left(\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|f(t)\|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
Les éléments de $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{T}(f, \varepsilon)$ *sont appelés* ε-$\mathbb{S}^{\phi}$*-presque périodes de* f.

Remarque 2.5.3. *[52]*

1. *Les espaces* $\left(\mathbb{S}^{\phi}_{t.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_{\mathbb{S}^{\phi}}\right)$ *et* $\left(\mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|.\|_{\mathbb{S}^{\phi}}\right)$ *sont des espaces de Banach.*
2. *L'espace* $\mathbb{S}^{\phi}_{t.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *contient l'espace* $\mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *et lui est égal si et seulement si* ϕ *vérifie la condition-*Δ_2.

Deuxième partie

Contributions

CHAPITRE 3

Autres caractérisations des fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques et leurs applications

Sommaire

3.1 Introduction

La notion des fonctions Stepanov presque périodiques a été très tôt introduite, mais récemment entreprise au niveau de l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Depuis, un grand intérêt a été donné pour l'extension de certains résultats classiques au cas des équations différentielles dans des espaces de Banach, (voir [7], [33], [69], [78], [57]).
Toutefois, un récent résultat démontré en 2012 par Andres et Pennequin [7] sur les solutions des équations différentielles ordinaires à coefficients Stepanov presque périodiques indique que les solutions bornées sont Bohr presque périodiques et qu'il n'existe pas de solutions purement Stepanov presque périodiques.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre le résultat d'Andres et Pennequin au cadre plus large des fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques introduites par Hillmann [52].
Dans un premier temps, nous revisitons cette classe de fonctions presque périodiques via la transformée de Bochner, différents résultats et caractérisations structurelles seront donnés.
Nous généralisons notamment la caractérisation donnée par Stepanov [83].
Grâce à cette caractérisation, nous établirons un nouveau théorème de superposition pour les fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques.
Dans un second temps, nous aborderons le problème d'existence de solutions bornées de l'équation différentielle semi-linéaire suivante

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

où $A : D(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ exponentiellement stable sur l'espace de Banach $\mathbb{X}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ est une fonction paramétrique Stepanov-Orlicz presque périodique.

3.2 Fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques

3.2.1 Caractérisation des fonctions $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ via la transformée de Bochner

Dans un théorème important [52, Théorème 1.1], Hillmann a montré l'inclusion suivante :

$$\mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset \mathbb{S}^{\phi}_{t.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

L'égalité a lieu si et seulement si ϕ satisfait la condition-Δ_2.
C'est le cas notamment lorsque $\phi = |.|^p$, $p \geq 1$. Dans ce cas, on obtient l'espace usuel des fonctions Stepanov presque périodiques, noté $\mathbb{S}^p\mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Cet espace est largement étudié, voir par exemple [5, 57, 59, 74].

Soit $f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, il est bien connu, voir [4, 5, 25, 74], que la presque périodicité de f au sens de Stepanov est équivalente à la $\mathrm{L}^p([0,1], \mathbb{X})$-presque périodicité au sens de Bohr de sa transformée de Bochner f^b (voir Théorème 1.2.5 Chapitre 1).

Une question naturelle se pose alors :

(**Q**) Peut-on caractériser les fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques définies par Hillmann [52] via la transformée de Bochner ?

Dans le but de répondre à cette question et pour des raisons de clarté, on donne la remarque suivante :

Remarque 3.2.1.

1. *La norme de Luxemburg de $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^\phi(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ peut être vue comme la norme-sup de sa transformée de Bochner $f^b : \mathbb{R} \to \mathrm{L}^\phi([0,1], \mathbb{X})$. C'est-à-dire,*
$$\|f\|_{\mathbb{S}^\phi} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+.)\|_{\mathrm{L}^\phi([0,1])} = \left\|f^b\right\|_\infty. \tag{3.2}$$
Grâce à cette identification, on conclut que la bornitude de f^b est équivalente à celle de f par rapport à la norme de Luxemburg $\|.\|_{\mathbb{S}^\phi}$.
2. *On a $\mathbb{S}^\phi\mathrm{T}(f, \varepsilon) = \mathrm{T}\left(f^b, \varepsilon\right)$.*
3. *La suite (f_n) converge vers f dans $\mathrm{B}\mathbb{S}^\phi(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ si et seulement si la suite (f_n^b) converge vers f^b dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{L}^\phi([0,1], \mathbb{X}))$.*

Proposition 3.2.2. *La réponse à la question (**Q**) est affirmative pour :*

1. *$\mathbb{S}^\phi_{t.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ si ϕ satisfait la condition-Δ_2 ;*
2. *$\mathbb{S}^\phi_{a.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ pour toute fonction de Young ϕ.*

Démonstration : 1. En utilisant la remarque 3.2.1, les deux fonctions f et f^b ont les mêmes ε-presque périodes.
Pour avoir la presque périodicité de f^b, il reste à vérifier sa continuité.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Comme $\phi \in \Delta_2$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| \leq \delta$, on a
$$\|f_h - f\|_{\mathrm{L}^\phi([t_0, t_0+1])} \leq \varepsilon.$$
La continuité de f^b provient de l'égalité suivante
$$\left\|f^b(t_0+h) - f^b(t_0)\right\|_{\mathrm{L}^\phi([0,1])} = \|f_h - f\|_{\mathrm{L}^\phi([t_0, t_0+1])} \leq \varepsilon$$
combinée avec la continuité en ϕ-moyenne de f dans $\mathrm{L}^\phi([t_0, t_0+1])$.

2. Soient $f \in \mathbb{S}^\phi_{a.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, (f_n) une suite approximative de polynômes trigonométriques généralisés, c'est à dire
$$(f_n) \subset \mathrm{Trig}_f(\mathbb{R}, \mathbb{X}) = \{P_n \in \mathrm{Trig}(\mathbb{R}; \mathbb{X}) \ \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_{\mathbb{S}^\phi} = 0\}.$$

Puisque pour chaque n, f_n^b appartient à $\mathrm{Trig}_{f^b}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathrm{Trig}(\mathbb{R},\mathrm{L}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X}))$ (voir [74, Proposition 4.3]) et

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f^b - f_n^b\right\|_{\infty} = \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f^b(t) - f_n^b(t)\right\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])} = \lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_{\mathbb{S}^{\phi}} = 0,$$

on déduit que $f^b \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X}))$.
La démonstration est ainsi achevée.

□

Le théorème suivant montre que sans la condition-Δ_2, les fonctions appartenant aux espaces $\mathbb{S}^{\phi}_{t.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ ne peuvent pas être caractérisées via la transformée de Bochner. Ceci est dû principalement au fait que les fonctions de $\mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ ne sont pas absolument continues en L^{ϕ}-norme.

Théorème 3.2.3. *Sans la condition Δ_2, il existe $\widetilde{g} \in \mathbb{S}^{\phi}_{t.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ tel que $\widetilde{g}^b \notin \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X}))$.*

Démonstration : Puisque les fonctions appartenant à l'espace $\mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X}) \setminus \mathrm{E}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ ne sont pas absolument continues en L^{ϕ}-norme (voir exple. Kufner et al. [63, Theorem 3.15.6]), il en découle alors qu'on peut trouver une fonction $g \in \mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X}) \setminus \mathrm{E}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ et $\varepsilon_0 > 0$ telle que pour tout $\delta > 0$, il existe un ensemble mesurable, A_{δ}, vérifiant, $\mu(A_{\delta}) \leq \delta$ et $\|g\,\mathbf{1}_{A_{\delta}}\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])} > \varepsilon_0$.

Supposons que $A_{\delta} \subset [1-\delta,1[$ et $g \equiv 0$ sur $[0,1-\delta[$.

Soit $\widetilde{g}$ le prolongement périodique de période 1 de g à l'ensemble $\mathbb{R}$, alors $\widetilde{g} \in S^{\phi}_{t.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ (voir Hillmann [52]).

En outre, si on suppose que $\widetilde{g}^b : \mathbb{R} \to \mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ est continue, on peut choisir δ' suffisamment petit tel que $\varepsilon_0 \geq \left\|\widetilde{g}^b(h) - \widetilde{g}^b(0)\right\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])}$ pour tout $h \in]0,\delta']$.

Soit $\delta^* = \min(\delta,\delta')$. Comme $\widetilde{g}(\delta^* + .) \equiv 0$ sur $[1-\delta^*,1[$, on obtient pour $h = \delta^*$,

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{g}^b(\delta^*) - \widetilde{g}^b(0)\right\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])} &\geq \left\|(\widetilde{g}(\delta^* + .) - \widetilde{g}(.))\,\mathbf{1}_{[1-\delta^*,1]}\right\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])}\\ &= \left\|g(.)\,\mathbf{1}_{[1-\delta^*,1]}\right\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])}\\ &= \left\|g(.)\,\mathbf{1}_{A_{\delta^*}}\right\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])} > \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que $\widetilde{g}^b : \mathbb{R} \to \mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ est continue. □

Notre objectif dans ce qui suit est de caractériser la presque périodicité de Stepanov-Orlicz via la transformée de Bochner sans imposer aucune condition à la fonction de Young.
L'idée consiste à restreindre l'étude à l'espace Morse-Transue $\mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
Ceci nous permettra de bénéficier de la richesse de ce dernier, en particulier de la continuité en ϕ-moyenne et de l'absolue continuité en L^{ϕ}-norme .

Désormais, on définit l'espace $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ comme suit

$$\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) := \mathbb{S}^{\phi}_{t.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X}). \tag{3.3}$$

Les éléments de l'espace $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ ainsi introduits seront appelés les fonctions $\mathbb{S}^{\phi}$-presque périodiques.

Remarque 3.2.4. *On en déduit de (3.3) que l'espace $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est un sous espace fermé de $\mathbb{S}^{\phi}_{t.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Ce qui sous entend que $\left(\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}), \|.\|_{\mathbb{S}^{\phi}}\right)$ est un espace de Banach.*

Remarque 3.2.5. *Il est important de signaler l'aspect suivant :*

$$\mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Plus précisément, l'espace $\mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est invariant par intersection avec $\mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, même si la fermeture dans (2.12) est prise dans $\mathrm{L}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Afin de démontrer l'inclusion $\mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, il suffit de prouver que pour tout $\alpha > 0$, $\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}(\alpha f) < +\infty$.
Pour cela, soit $f \in \mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et en choisissant $P_{\varepsilon} \in \mathrm{Trig}(\mathbb{R};\mathbb{X})$ tel que $\|f - P_{\varepsilon}\|_{\mathbb{S}^{\phi}} \leq \varepsilon$.
En tenant compte de la bornitude de P_{ε}, on aura, pour tout $\alpha > 0$,

$$\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}(\alpha f) \leq \frac{1}{2}\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}\left(2\alpha(f - P_{\varepsilon})\right) + \frac{1}{2}\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}\left(2\alpha P_{\varepsilon}\right) < +\infty.$$

Ce qui achève la démonstration.

Comme conséquence, nous avons :

Corollaire 3.2.6. *Les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Si $f \in \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors $f^b \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathrm{E}^{\phi}([0,1];\mathbb{X}))$;*
2. *$\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \mathbb{S}^{\phi}_{a.p.}(\mathbb{R},\mathbb{X})$;*
3. *$f \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ si et seulement si $f^b \in \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathrm{E}^{\phi}([0,1];\mathbb{X}))$.*

Remarque 3.2.7. *Item 3 du corollaire 3.2.6 permet de déduire certaines propriétés d'une fonction $f \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ via la presque périodicité de $f^b : \mathbb{R} \to \mathrm{E}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$. En particulier, le résultat de Bohr Bohl Amerio [4, Theorem II, p. 82] reste valable dans $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, comme le montre la proposition suivante :*

Proposition 3.2.8. *Soient $\mathbb{X}$ un espace de Banach uniformément convexe, ϕ une fonction de Young uniformément convexe vérifiant la condition-Δ_2 et $f \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Soit $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Si $F \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ alors F est presque périodique au sens de Bohr.*

Démonstration : La preuve que F soit presque périodique provient du fait que si $\phi \in \Delta_2$ et est uniformément convexe et l'espace $\mathbb{X}$ est uniformément convexe alors $\mathrm{L}^{\phi}([0,1];\mathbb{X})$ est uniformément convexe, (voir [58]). ∎

La proposition 3.2.8 est établi dans le cas ou $\phi = |.|$, [2, 7].

3.2.2 Lien entre les espaces $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et μ-AP $(\mathbb{R},\mathbb{X})$

Dans ce qui suit, nous allons établir une condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions mesurables presque périodiques soient dans $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Commençons par introduire la définition de l'absolue ϕ-intégrabilité.

Définition 3.2.9. *Une fonction* $f \in \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est dite* absolument ϕ-intégrable au sens de $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *tel que pour tout sous ensemble mesurable* $A \in \Sigma$ *avec* $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}(A) < \delta$ *on a*

$$\|f\,\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^{\phi}} < \varepsilon.$$

L'ensemble de ces fonctions sera noté $\mathbb{M}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Pour $f \in \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, on définit la quantité suivante :

$$\kappa(f) := \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{\substack{A \subset \mathbb{R} \\ \bar{\mu}_{\mathbb{S}}(A) \leq \delta}} \|f\,\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^{\phi}}. \tag{3.4}$$

Il est facile de vérifier que f est absolument ϕ-intégrable au sens de $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}$ si et seulement si $\kappa(f) = 0$.
D'où, on peut écrire

$$\mathbb{M}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \left\{ f \in \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \ \text{ t.q. } \ \kappa(f) = 0 \right\}.$$

Le lemme suivant montre que les fonctions dans $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ bénéficient de l'absolue ϕ-intégrabilité au sens de $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}$.

Lemme 3.2.10. *L'inclusion :*

$$\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathbb{M}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \tag{3.5}$$

est vraie.

Démonstration : Commençons par montrer que les fonctions bornées sont absolument $\phi-$intégrables au sens de $\bar{\mu}_{\mathbb{S}^{\phi}}$, c'est-à-dire $\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathbb{M}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Soit $\varepsilon > 0$, $A \in \Sigma$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction bornée. Posons $C = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$. Nous excluons par raison de simplicité le cas trivial lorsque $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}(A)=0$. Clairement, on a

$$\|\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^\phi}=\frac{1}{\phi^{-1}(\frac{1}{\bar{\mu}_{\mathbb{S}}(A)})}\quad \text{et}\quad \|f\,\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^\phi}\leq C\|\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^\phi}.$$

Comme la fonction $t\to\left(\phi^{-1}(1/t)\right)^{-1}$ est continue et croissante sur $]0,+\infty[$, on en déduit en choisissant $\delta:=\left(\phi\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)\right)^{-1}$ que $\|f\,\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^\phi}\leq\varepsilon$ chaque fois que $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}(A)<\delta$.

Supposons maintenant que $f\in\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. En utilisant le corollaire 3.2.6, il existe un polynôme trigonométrique $P_\varepsilon\in\mathrm{Trig}(\mathbb{R};\mathbb{X})$ tel que

$$\|f-P_\varepsilon\|_{\mathbb{S}^\phi}\leq\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

Comme $P_\varepsilon\in\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{X})$, il existe $\delta>0$ tel que $\|P_\varepsilon\,\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^\phi}\leq\frac{\varepsilon}{2}$ quand $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}(A)<\delta$. Ainsi, on a

$$\|f\,\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^\phi}\quad\leq\|(f-P_\varepsilon)\,\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^\phi}+\|P_\varepsilon\,\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^\phi}\quad\leq\|f-P_\varepsilon\|_{\mathbb{S}^\phi}+\|P_\varepsilon\,\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{S}^\phi}\quad\leq\varepsilon.$$

Ceci complète la preuve du lemme. □

Comme conséquence de ce lemme, nous avons la caractérisation suivante :

Théorème 3.2.11. *La caractérisation suivante est vraie*

$$\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})=\mathbb{M}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X})\cap\mu\text{-}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Démonstration : Premièrement, en utilisant (1.4) et le Lemme 3.2.10, on obtient l'inclusion suivante

$$\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})\subset\mu\text{-}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})\cap\mathbb{M}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Inversement, supposons que $f\in\mu\text{-}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})\cap\mathbb{M}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Soit $\varepsilon>0$. On peut trouver un polynôme trigonométrique $P_\varepsilon\in\mathrm{Trig}(\mathbb{R};\mathbb{X})$ tel que $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}(A_\varepsilon)<\varepsilon$, où

$$A_\varepsilon=\left\{t\in\mathbb{R}\ \text{tel que}\ \|f(t)-P_\varepsilon(t)\|>\varepsilon\phi^{-1}(1)\right\}.$$

Soit $\eta>0$. De l'absolue ϕ-intégrabilité au sens de $\bar{\mu}_{\mathbb{S}}$ de f et P_ε, on peut choisir $\varepsilon>0$ suffisamment petit pour que $\max\left(\|f\,\mathbf{1}_{A_\varepsilon}\|_{\mathbb{S}^\phi},\|P_\varepsilon\,\mathbf{1}_{A_\varepsilon}\|_{\mathbb{S}^\phi}\right)<\frac{\eta}{2}$.

Par conséquent, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}\|f-P_\varepsilon\|_{\mathbb{S}^\phi}&\leq\|(f-P_\varepsilon)\,\mathbf{1}_{A_\varepsilon}\|_{\mathbb{S}^\phi}+\left\|(f-P_\varepsilon)\,\mathbf{1}_{A_\varepsilon^c}\right\|_{\mathbb{S}^\phi}\\&\leq\|f\,\mathbf{1}_{A_\varepsilon}\|_{\mathbb{S}^\phi}+\|P_\varepsilon\,\mathbf{1}_{A_\varepsilon}\|_{\mathbb{S}^\phi}+\varepsilon\\&\leq\varepsilon+\eta.\end{aligned}$$

Cela signifie que $f\in\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, puisque η est arbitraire.
La démonstration est ainsi achevée. □

3.3 Opérateurs de Nemytskii dans $\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$

L'opérateur de Nemytskii est bien étudié dans la littérature dans les espaces de Stepanov presque périodiques [7, 23, 37] ainsi que dans les espaces d'Orlicz, voir par exemple [21].

Cette section est consacrée à l'étude de cet opérateur dans l'espace de fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques. En s'inspirant de [14], on montre que sous certaines conditions sur F, les images de fonctions Stepanov-Orlicz presque-périodiques par cet opérateur $\mathcal{N}_F$ sont aussi Stepanov-Orlicz presque-périodiques.

Pour des raisons de clarté, on commence par introduire la définition d'une fonction Stepanov-Orlicz presque périodique uniformément par rapport à un paramètre ainsi qu'une fonction bornée au sens de Stepanov-Orlicz :

Définition 3.3.1. *Soit $F:\mathbb{R}\times\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ une application.*

a) On dit que F est presque périodique au sens de Stepanov-Orlicz si l'application $t\mapsto F(t,x)$ appartient à $\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ uniformément sur tout sous-ensemble compact K de $\mathbb{X}$, c'est-à-dire que pour chaque $x\in\mathbb{X}$, $F(.,x)\in\mathrm{E}^\phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et pour tout $\varepsilon>0$ et tout sous-ensemble compact K de $\mathbb{X}$, l'ensemble

$$\left\{\tau\in\mathbb{R},\sup_{x\in\mathrm{K}}\|F(.+\tau,x)-F(.,x)\|_{\mathbb{S}^\phi}\leq\varepsilon\right\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble de ces fonctions est noté par $\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.

b) F est dite $\mathbb{S}^\phi$-bornée s'il existe une constante $C>0$ telle que $\|\mathcal{N}_F(0)\|_{\mathbb{S}^\phi}\leq C$.

Notons que item b) de la définition 3.3.1 coïncide avec la propriété que $\mathcal{N}_F(0)\in\mathrm{B}\mathbb{S}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X})$, voir Luxemburg [68, Définition 1, p 43].

Dans ce qui suit, on notera **(lip)** la condition de Lipschitz sur $F:\mathbb{R}\times\mathbb{X}\to\mathbb{X}$. Plus précisément :

(lip) Il existe $L>0$ tel que pour tout $u,v\in\mathbb{X}$

$$\|F(.,u)-F(.,v)\|_\infty\leq L\|u-v\|.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner un théorème de superposition pour les fonctions $\mathbb{S}^\phi$-presque périodiques.

Théorème 3.3.2. *Soit $F\in\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.*
Supposons que F satisfait la condition **(lip)***, alors, pour tout $x(.)\in\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, on a $\mathcal{N}_F(x(.))\in\mathbb{S}^\phi\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.*

Démonstration : Montrons tout d'abord que $F(.,x(.))\in\mathrm{E}^\phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

On a $x(.) \in \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $F(.,0) \in \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors pour tout ensemble borné $U \subset \mathbb{R}$ et tout $\alpha > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\rho_{\phi}\left(\frac{\alpha}{2}(F(.,x(.)))\right) &= \int_U \phi\left(\frac{\alpha}{2}\|F(t,x(t))\|\right)d\mu(t)\\ &\leq \frac{1}{2}\int_U \phi(\alpha\|F(t,x(t))-F(t,0)\|)\,d\mu(t)+\frac{1}{2}\int_U \phi(\alpha\|F(t,0)\|)\,d\mu(t)\\ &\leq \frac{1}{2}\int_U \phi(\alpha L\|x(t)\|)\,d\mu(t)+\frac{1}{2}\int_U \phi(\alpha\|F(t,0)\|)\,d\mu(t)\\ &\leq \frac{1}{2}\rho_{\phi}(\alpha Lx(.))+\frac{1}{2}\rho_{\phi}(\alpha F(.,0)) < +\infty.\end{aligned}$$

Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{X}$, et soit $x(.) \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Fixons $\varepsilon > 0$, en vertu du théorème 3.2.11 et la propriété de Danilov (**D**), on peut trouver $\eta := \eta(\varepsilon) > 0$ et un sous ensemble compact $\mathbb{K}_{\eta(\varepsilon)} \subset \mathbb{X}$ tel que

$$\bar{\mu}_{\mathbb{S}}\left(\mathrm{T}_{\eta(\varepsilon)}\right) < \eta, \text{ et } \left\|x(.)\,\mathbf{1}_{\mathrm{T}^c_{\eta(\varepsilon)}}\right\|_{\mathbb{S}^{\phi}} \leq \frac{\varepsilon}{12L}, \tag{3.7}$$

où $\mathrm{T}_{\eta(\varepsilon)} = \{t \in \mathbb{R},\ x(t) \in \mathbb{K}_{\eta(\varepsilon)}\}$.

La compacité de $\mathbb{K}_{\eta(\varepsilon)}$ assure l'existence d'une suite finie $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ dans $\mathbb{K}_{\eta(\varepsilon)}$ telle que

$$\mathbb{K}_{\eta(\varepsilon)} \subset \cup_{i=1}^{m} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{12L}\right). \tag{3.8}$$

Maintenant, puisque pour tout $i = 1,\ldots,m$, $F(.,x_i) \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $x(.) \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, on peut choisir une ε-$\mathbb{S}^{\phi}$-presque période commune associée à $x(.)$ et $(F(.,x_i))_{1\leq i\leq m}$ (voir, par exemple, [65, p.6, Property 7]). C'est-à-dire,

$$\tau \in \cap_{i=1}^{m}\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{T}\left(F(.,x_i),\frac{\varepsilon}{4}\right) \cap \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{T}\left(x(.),\frac{\varepsilon}{4L}\right). \tag{3.9}$$

En utilisant la condition de Lipschitz **(lip)** et la croissance de la fonction ϕ, on obtient pour tout $k > 0$

$$\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}\left(\frac{1}{k}\|F(.+\tau,x(.+\tau))-F(.+\tau,x(.))\|\right) \leq \rho_{\mathbb{S}^{\phi}}\left(\frac{L}{k}\|x(.+\tau)-x(.)\|\right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\left\{k>0,\,\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}\left(\frac{L}{k}\|x(.+\tau)-x(.)\|\right)\leq 1\right\}\\ &\qquad\qquad \subset \left\{k>0,\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}\left(\frac{1}{k}\|F(.+\tau,x(.+\tau))-F(.+\tau,x(.))\|\leq 1\right)\right\},\end{aligned}$$

passant à la borne inférieure, on en déduit que

$$\|F(.+\tau, x_\tau(.)) - F(.+\tau, x(.))\|_{\mathbb{S}^\phi} \leq L \|x_\tau(.) - x(.)\|_{\mathbb{S}^\phi}. \tag{3.10}$$

En utilisant à nouveau la condition **(lip)**, l'inégalité (3.10) et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|F_\tau(.,x_\tau(.)) - F(.,x(.))\|_{\mathbb{S}^\phi} \\
&\leq \|F(.+\tau, x(.+\tau)) - F(.+\tau, x(.))\|_{\mathbb{S}^\phi} + \|F(.+\tau, x(.)) - F(.,x(.))\|_{\mathbb{S}^\phi} \\
&\leq L\|x(.+\tau) - x(.)\|_{\mathbb{S}^\phi} + \max_{1\leq i\leq m} \|F(.+\tau, x(.)) - F(.+\tau, x_i)\|_{\mathbb{S}^\phi} \\
&+ \max_{1\leq i\leq m} \|F(.+\tau, x_i) - F(.,x_i)\|_{\mathbb{S}^\phi} + \max_{1\leq i\leq m} \|F(.,x_i) - F(.,x(.))\|_{\mathbb{S}^\phi} \\
&\leq L\|x_\tau(.) - x(.)\|_{\mathbb{S}^\phi} + 2L \max_{1\leq i\leq m} \|x(.) - x_i\|_{\mathbb{S}^\phi} + \max_{1\leq i\leq m} \|\{F(.+\tau, x_i) - F(.,x_i)\}\|_{\mathbb{S}^\phi}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Notre but dans ce qui suit est d'estimer le terme $\max\limits_{1\leq i\leq m} \|x(.) - x_i\|_{\mathbb{S}^\phi}$. En utilisant (3.7) et le fait que la fonction est constante $t \to x_i$ (pour tout i) est dans $\mathbb{M}^\phi(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, on peut choisir $\eta(\varepsilon)$ suffisamment petit tel que

$$\max_{1\leq i\leq m} \left\{ \left\| x_i \mathbf{1}_{T_{\eta(\varepsilon)}} \right\|_{\mathbb{S}^\phi} + \left\| x(.) \mathbf{1}_{T_{\eta(\varepsilon)}} \right\|_{\mathbb{S}^\phi} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{6L}.$$

Comme conséquence de l'inégalité ci-dessus et l'inégalité (3.8), on en déduit que pour chaque $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}
\|x(.) - x_i\|_{\mathbb{S}^\phi} &\leq \left\| \{x(.) - x_i\} \mathbf{1}_{T_{\eta(\varepsilon)}} \right\|_{\mathbb{S}^\phi} + \left\| \{x(.) - x_i\} \mathbf{1}_{T^c_{\eta(\varepsilon)}} \right\|_{\mathbb{S}^\phi} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{12L} + \left\| x(.) \mathbf{1}_{T^c_{\eta(\varepsilon)}} \right\|_{\mathbb{S}^\phi} + \left\| x_i \mathbf{1}_{T^c_{\eta(\varepsilon)}} \right\|_{\mathbb{S}^\phi} \leq \frac{\varepsilon}{4L}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

En combinant (3.9), (3.11), et (3.12), on obtient

$$\|F_\tau(., x_\tau(.)) - F(., x(.))\|_{\mathbb{S}^\phi} \leq L\frac{\varepsilon}{4L} + 2L\frac{\varepsilon}{4L} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Finalement, la $\mathbb{S}^\phi$-presque périodicité de $\mathcal{N}_F(x(.))$ est obtenue en utilisant l'inclusion

$$\cap_{i=1}^m \mathbb{S}^\phi \mathrm{T}\left(F(., x_i), \frac{\varepsilon}{4}\right) \cap \mathbb{S}^\phi \mathrm{T}\left(x(.), \frac{\varepsilon}{4L}\right) \subset \mathbb{S}^\phi \mathrm{T}\left(\mathcal{N}_F(x(.)), \varepsilon\right).$$

$\square$

3.4 Solutions Bohr presque périodiques des équations d'évolution abstraites à coefficients $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$

Cette section est consacrée à l'étude du problème d'existence et d'unicité de solution "mild" Bohr presque périodiques des équations différentielles abstraites linéaires et semi-linéaires suivantes :

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \tag{3.13}$$

et

$$u'(t) = Au(t) + F(t, u(t)) \tag{3.14}$$

respectivement, où $A : \mathrm{Dom}(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est un opérateur, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ sont des fonctions mesurables (leurs continuité n'est pas nécessaire).

Désormais, nous formulons les hypothèses suivantes :

(H1) L'opérateur A génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ exponentiellement stable c'est à dire, qu'il existe deux constantes $M > 0$ et $\omega > 0$ telles que

$$\|T(t)\| \leq M \exp(-\omega t), \quad \forall t \geq 0.$$

(H2) $f \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

(H3) $F \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.

Un tel problème est bien étudié dans la littérature lorsque f est continue et Stepanov presque périodique, voir [37, 75, 94].

Notre objectif est d'étendre ce résultat au contexte des fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques, sans imposer la condition de continuité sur f.

Le théorème suivant établit le résultat d'existence et d'unicité d'une solution Bohr presque périodique de l'équation (3.13) :

Théorème 3.4.1. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2)*, l'équation* (3.13) *admet une unique solution "mild" Bohr presque périodique donnée par :*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s) f(s)\, d\mu(s), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Démonstration : Considérons, pour chaque $n \geq 1$, la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ définie par l'intégrale :

$$u_n(t) = \int_{t-n}^{t-n+1} T(t-s) f(s)\, d\mu(s) = \int_{n-1}^{n} T(s) f(t-s)\, d\mu(s), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrons que pour chaque $n \geq 1$, u_n appartient à $\mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Pour cela, fixons $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit $(t_m)_m$ une suite convergeant vers t_0.

Utilisant l'hypothèse (H1), l'inégalité de Hölder dans les espaces d'Orlicz, (voir (2.7)) et le fait que

$$\|\mathbf{1}_{\mathbb{R}}\|_{L^{\psi}[t_0-n,\ t_0-n+1]} = \left(\psi^{-1}(1)\right)^{-1},$$

on obtient pour chaque $n \geq 1$ et chaque $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
\|u_n(t_m) - u_n(t_0)\| &\leq \int_{n-1}^{n} \|T(s)\| \, \|f(t_m - s) - f(t_0 - s)\| \, d\mu(s) \\
&\leq M \int_{n-1}^{n} \exp(-\omega s) \, \|f(t_m - s) - f(t_0 - s)\| \, d\mu(s) \\
&\leq M \|1\|_{L^{\psi}[t_0-n,\ t_0-n+1]} \left\|f_{(t_m - t_0)} - f\right\|_{L^{\phi}[t_0-n,\ t_0-n+1]} \\
&\leq \frac{M}{\psi^{-1}(1)} \left\|f_{(t_m - t_0)} - f\right\|_{L^{\phi}[t_0-n,\ t_0-n+1]}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

En vertu de (3.3), les fonctions de $\mathbb{S}^{\phi}AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ sont continues en ϕ-moyenne.

Combinant ce fait avec (3.16), on obtient que

$$\lim_{m \to \infty} \|u_n(t_m) - u_n(t_0)\| = 0.$$

Puisque $t_0 \in \mathbb{R}$ est arbitraire, on en déduit que $u_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Montrons maintenant que pour chaque n, $u_n(.) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. De même que dans (3.16), on a pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$

$$\|u_n(. + \tau) - u_n(.)\|_{\infty} \leq \frac{M}{\psi^{-1}(1)} \|f_{\tau} - f\|_{\mathbb{S}^{\phi}},$$

ce qui signifie que pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{S}^{\phi}T\left(f, \frac{\varepsilon \psi^{-1}(1)}{M}\right) \subset T(u_n, \varepsilon).$$

Ce qui signifie que $T(u_n, \varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. La presque périodicité de u_n est alors établie.

Enfin, montrons que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
En utilisant l'hypothèse (H1) et l'inégalité (2.11), il en résulte que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|u_n(t)\| \leq M \beta_{\phi} e^{-\omega(n-1)} \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}}. \tag{3.17}$$

Grâce au test de Weierstrass et l'inégalité (3.17), on obtient que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, soit $u(t)$ sa somme associée

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t).$$

Alors, u est presque périodique. De plus,

$$\|u\|_\infty \leq \frac{M\beta_\phi}{1-e^{-\omega}} \|f\|_{\mathbb{S}^\phi}.$$

L'unicité est obtenue en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans le cas des fonctions Stepanov presque périodiques ([37]). □

Maintenant, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle semi-linéaire (3.14).

En utilisant le Théorème 3.4.1, on montre facilement le théorème suivant :

Théorème 3.4.2. *Sous l'hypothèse* (H1)*, la condition* (Lip) *et la* $\mathbb{S}^\phi$*-bornitude de* F*, l'équation* (3.14) *admet une unique solution "mild" bornée donnée par*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s) F(s, u(s))\, d\mu(s), \quad \textit{pour tout} \quad t \in \mathbb{R},$$

à condition que $\dfrac{LM}{1-e^{-\omega}} < 1.$

Si en plus (H3) *est satisfaite alors cette solution est presque périodique.*

Démonstration : Pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on considère les opérateurs non linéaires définis par

$$\Gamma(u)(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s) F(s, u(s))\, d\mu(s),$$

$$\Gamma_n(u)(t) = \int_{t-n}^{t-n+1} T(t-s) F(s, u(s))\, d\mu(s) = \int_{n}^{n-1} T(s) F(t-s, u(t-s))\, d\mu(s)$$

Montrons que pour chaque $n \geq 1$, l'opérateur Γ_n envoie $\mathrm{E}^\phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ dans $\mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Soit $u \in \mathrm{E}^\phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Pour simplifier les notations, on pose $g := \mathcal{N}_F(u)$.

En vertu du Théorème 3.3.2, $g \in \mathrm{E}^\phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Par un raisonnement analogue à la preuve du Théorème 3.4.1, on obtient aisément que, pour chaque $n \geq 1$, $\Gamma_n(u) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Montrons que l'opérateur Γ envoie $\mathrm{E}^\phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \cap \mathrm{B}\mathbb{S}^\phi(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ dans $\mathrm{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Commençons par prouver que pour chaque $n \geq 1$,

$$\Gamma_n\left(\mathrm{B}\mathbb{S}^\phi(\mathbb{R}, \mathbb{X})\right) \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

Soit $u \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, en utilisant les hypothèses (H1), (H3), (lip) et l'inégalité (2.11), on obtient pour chaque $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_n u(t)\| &\leq Me^{-\omega(n-1)} \int_{t-n}^{t-n+1} (\|F(s,u(s)) - F(s,0)\| + \|F(s,0)\|)\, d\mu(s) \\ &\leq Me^{-\omega(n-1)} \int_{t-n}^{t-n+1} (L\|u(s)\| + \|F(s,0)\|)\, d\mu(s) \\ &\leq Me^{-\omega(n-1)} (L\|u\|_{\mathbb{S}^1} + \|F(.,0)\|_{\mathbb{S}^1}) \\ &\leq Me^{-\omega(n-1)} \left(L\alpha_{u,\phi} \|u\|_{\mathbb{S}^{\phi}} + \beta_{F,\phi} \|F(.,0)\|_{\mathbb{S}^{\phi}}\right. \end{aligned} \tag{3.18}$$

où les constantes $\alpha_{u,\phi} > 0$ et $\beta_{F,\phi} > 0$ proviennent de (2.11).
Selon la $\mathbb{S}^{\phi}$-bornitude de F et de l'équation (3.18), il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 1} \Gamma_n u$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
Clairement, $\Gamma(u) = \sum_{n\geq 1} \Gamma_n(u) \in \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ pour chaque $u \in \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
De plus,

$$\|\Gamma(u)\|_{\infty} \leq \frac{M}{1-e^{-\omega}} \left(L\alpha_{u,\phi} \|u\|_{\mathbb{S}^{\phi}} + \beta_{F,\phi} \|F(.,0)\|_{\mathbb{S}^{\phi}}\right).$$

Par conséquent,

$$\Gamma\left(\mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})\right) \subset \mathrm{BC}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Maintenant, montrons que si de plus $F \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$, l'opérateur Γ envoie $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ dans $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Soit $u \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Par le Théorème 3.3.2, on conclut que $g \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Par conséquent, en utilisant la preuve du théorème 3.4.1, on obtient que $\Gamma u \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Ainsi

$$\Gamma\left(\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})\right) \subset \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Pour compléter la preuve, on a besoin de montrer que Γ est une application contractante sur $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Il suffit d'appliquer le théorème du point fixe de Banach à l'opérateur non-linaire Γ. Les calculs sont semblables à ceux qui existent déjà dans la littérature, (C.f. [37, 94]). Sous les hypothèses (H1) et (lip), on aura

$$\|\Gamma u - \Gamma v\|_{\infty} \leq \frac{LM}{1-e^{-\omega}} \|u-v\|.$$

Ce qui implique que Γ est une application contractante sur $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ à condition que $\frac{LM}{1-e^{-\omega}} < 1$.

Donc, selon le principe de contraction de Banach, il existe un point fixe unique $u \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, tel que $\Gamma u = u$. De plus, en utilisant le raisonnement de [37], on obtient que u est une solution mild de l'équation (3.14). □

CHAPITRE 4

Les fonctions Stepanov-Orlicz pseudo-presque périodiques et applications

Sommaire

4.1 Introduction

Dans [35], Diagana et Zitane ont donné une généralisation de la notion de Stepanov-pseudo presque périodicité étudiée dans [33] au contexte des espaces de Lebesgue à exposants variables $L^{p(.)}$ lorsqu'ils sont munis de la norme de Luxemburg. Les espaces $L^{p(.)}$ ont l'avantage d'être générés par une fonction particulière de Musielak-Orlicz $\phi(t,x) = |x|^{p(t)}$ satisfaisant la condition-Δ_2.
Compte tenu de la définition de l'ergodicité de Zhang, qui est basée sur une propriété topologique et une autre métrique (la bornitude), Diagana et Zitane [35] ont étendu cette définition aux espaces de Lebesgue à exposants variables $L^{p(.)}$ en remplaçant la norme de l'espace $\mathbb{X}$ dans (1.5) par la norme de Luxemburg et la bornitude usuelle par celle utilisant la norme de Luxemburg.

Ceci nous a motivé à considérer le cas où l'espace $L^{p(.)}$ est équipé de la topologie induite par la convergence modulaire. Il s'est avéré que le remplacement de la norme dans (1.5) par la norme de Luxemburg ou par la modulaire associée donne lieu à deux concepts d'ergodicité identiques.
Cela nous a mis sur la voie pour définir trois notions d'ergodicité au sens de Stepanov-Orlicz à savoir : ergodicité en norme $\|.\|_{\mathbb{S}^\phi}$, ergodicité modulaire et ergodicité fortement modulaire au sens de Stepanov Orlicz.

L'un des objectifs de ce chapitre est d'étudier la hiérarchie de ces différentes notions.

4.2 L'ergodicité dans les espaces de Stepanov-Orlicz

On montre que le remplacement de la norme de Luxemburg par sa modulaire associée dans (1.5) donne lieu à un concept équivalent à celui proposé dans [36, Definition 5.10].
Cette reformulation (Definition 4.2.2) rend l'étude de l'ergodicité dans $L^{p(.)}$ plus appropriée car la norme de Luxemburg est plus compliquée que la modulaire correspondante.

Cependant, pour la cohérence et la clarté de ce qui suit, on présentera quelques notations en relation avec les espaces de Lebesgue à exposants variables $L^{p(.)}$. Pour plus de détails, voir par exemple [29, 35, 36, 43].

Pour $p(.) \in M(\mathbb{R}) := M(\mathbb{R},\mathbb{R})$, utilisant les notations

$$p^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}} p(x) \quad \text{et} \quad p^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} p(x)$$

.

Soit

$$C^{+}(\mathbb{R}) = \left\{ p \in \mathrm{M}(\mathbb{R}) : \ 1 < p^{-} \leq p(x) \leq p^{+} < \infty \ \text{ pour chaque } \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit $p(.) \in C^{+}(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{B}\mathbb{S}^{p(.)}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ l'espace modulaire de type Musielak-Orlicz définit comme suit

$$\mathrm{B}\mathbb{S}^{p(.)}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) := \left\{ f \in \mathrm{M}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) : \ \|f\|_{\mathbb{S}^{p(.)}} < \infty \right\},$$

où $\|.\|_{\mathbb{S}^{p(.)}}$ et $\rho_{\mathbb{S}^{p(.)}}(.)$ sont respectivement la norme de Luxemburg et sa modulaire correspondante donnée par

$$\|f\|_{\mathbb{S}^{p(.)}} = \inf \left\{ k > 0 : \ \sup_{x \in \mathbb{R}} \rho_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)} \left(\frac{f}{k} \right) \leq 1 \right\},$$

et

$$\rho_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)}(f) = \int_{x}^{x+1} \|f(t)\|^{p(t)} \, d\mu(t). \tag{4.1}$$

Définition 4.2.1. *[36] Une fonction $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{p(.)}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est dite $\mathbb{S}^{p(.)}$-ergodique en norme et on écrit ($f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{p(.)}_{\mathrm{norm}}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$) si*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \inf \left\{ k > 0 : \ \rho_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)} \left(\frac{f}{k} \right) \leq 1 \right\} d\mu(x) = 0. \tag{4.2}$$

En remplaçant la norme de Luxemburg par sa modulaire $\rho_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)}(.)$, on obtient la définition suivante :

Définition 4.2.2. *Une fonction $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{p(.)}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est dite $\mathbb{S}^{p(.)}$-ergodique en modulaire, et on écrit $f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{p(.)}_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, si*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \rho_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)}(f) \, d\mu(x) = 0. \tag{4.3}$$

Le théorème suivant dû à Fan et Zaho [43, Theorem 1.3] permet de donner un résultat sur l'équivalence des deux définitions précédentes.

Théorème 4.2.3 ([43]). *Soit $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{p(.)}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Alors, pour chaque $x \in \mathbb{R}$*

$$\|f\|^{\vartheta}_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)} \leq \rho_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)}(f) \leq \|f\|^{\theta}_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)}, \tag{4.4}$$

et

$$\left(\rho_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)}(f) \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq \|f\|_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)} \leq \left(\rho_{\mathbb{S}^{p(.)}(x)}(f) \right)^{\frac{1}{\vartheta}}; \tag{4.5}$$

où

$$\theta = \begin{cases} p^+ & si \quad \|f\|_{\mathbb{S}^{p(\cdot)}(x)} > 1 \\ p^- & si \quad \|f\|_{\mathbb{S}^{p(\cdot)}(x)} \leq 1 \end{cases} \quad et \quad \vartheta = \begin{cases} p^- & si \quad \|f\|_{\mathbb{S}^{p(\cdot)}(x)} > 1 \\ p^+ & si \quad \|f\|_{\mathbb{S}^{p(\cdot)}(x)} \leq 1. \end{cases}$$

Proposition 4.2.4. *Soit* $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{p(.)}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. *Alors,*

$$f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{p(.)}_{\mathrm{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \text{ si et seulement si } f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{p(.)}_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X}). \tag{4.6}$$

Démonstration : ***Nécessité :*** En utilisant l'estimation (4.4) et l'inégalité de Hölder il s'ensuit que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \rho_{\mathbb{S}^{p(\cdot)}(x)}(f)\,d\mu(x) \leq \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{(2r)^{\theta}}\left(\int_{-r}^{r} \inf\left\{k>0, \int_{x}^{x+1}\left\|\frac{f(t)}{k}\right\|^{p(t)} d\mu(t) \leq 1\right\} d\mu(x)\right)^{\theta} = 0.$$

Suffisance : On déduit, grâce à l'estimation (4.5) et l'inégalité d'Hölder que :

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|f\|_{\mathbb{S}^{p(\cdot)}(x)}\,d\mu(x) \leq \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{\vartheta}}}\left(\int_{-r}^{r}\left(\int_{x}^{x+1}\|f(t)\|^{p(t)}\,d\mu(t)\right)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{\vartheta}} = 0.$$

□

Remarque 4.2.5. *Les inégalités* (4.4) *et* (4.5) *constituent la clé principale de l'identification* (4.6).
Malheureusement, ce type d'inégalités ne se produit pas dans les espaces d'Orlicz et de Musielak-Orlicz (lorsque la fonction qui définie ces espaces ne vérifie pas la condition-Δ_2).

On va voir que l'ergodicité dans les espaces d'Orlicz se devise en au moins trois notions différentes (voir Définition 4.2.6). Ergodicité en norme de Luxemburg, ergodicité modulaire et ergodicité fortement modulaire. Ces notions sont différentes, (voir Exemple 4.2.19 et Exemple 4.2.20).

4.2.1 Les fonctions ergodiques au sens de Stepanov-Orlicz

Compte tenu de ce qui précède, on introduit la définition suivante :

Définition 4.2.6. *Soit* $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. *On dit que* f *est*

1. $\|.\|_{\mathbb{S}^{\phi}}$-ergodique *ou* norme ergodique au sens de Stepanov Orlicz *si*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left(\inf\left\{k>0 : \int_{x}^{x+1}\phi\left(\left\|\frac{f(t)}{k}\right\|\right)d\mu(t) \leq 1\right\}\right)d\mu(x) = 0.$$

2. $\rho_{\mathbb{S}^\phi}$-ergodique au sens large, *ou* modulaire ergodique au sens de Stepanov Orlicz *s'il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \left(\int_{x}^{x+1} \phi \left(\alpha \| f(t) \| \right) d\mu(t) \right) d\mu(x) = 0.$$

3. $\rho_{\mathbb{S}^\phi}$-fortement ergodique, *ou* fortement modulaire ergodique au sens de Stepanov Orlicz *si pour tout* $\alpha > 0$

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \left(\int_{x}^{x+1} \phi \left(\alpha \| f(t) \| \right) d\mu(t) \right) d\mu(x) = 0.$$

Les espaces de toutes ces fonctions seront notés par $\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, $\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et* $\widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *respectivement.*

Comme conséquence immédiate de la définition 4.2.6, nous avons

$$\widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

L'étude des liens entre les trois espaces introduits se fera par la suite.

Proposition 4.2.7. *Les espaces* $\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, $\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et* $\widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *sont*

(i) *des sous-espaces linéaires fermés de* $B\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

(ii) *invariants par translation.*

(iii) $\mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Démonstration :

— La propriété (i) est conforme à la proposition 2.11 dans [11] et au lemme 2.14 dans [51] de l'espace des fonctions ergodiques à l'espace des fonctions ergodiques au sens de Stepanov-Orlicz.

— La propriété (ii) peut être prouvée de la même manière que [42, proposition 24].

— En utilisant l'invariance par translation de $\mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, propriété 2 du Lemme 2.4.2 et la remarque 2.4.4, on peut affirmer que, $\mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
En effet, supposons que $f \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, en vertu de la continuité de f et ϕ on obtient :

$$\begin{aligned}\inf\left\{k>0: \int_{x}^{x+1} \phi\left(\left\|\frac{f(t)}{k}\right\|\right) dt \leq 1\right\} &= \inf\left\{k>0: \int_{0}^{1} \phi\left(\frac{\|f(x+s)\|}{k}\right) ds \leq 1\right\} \\ &\leq \inf\left\{k>0: \max_{s\in[0,1]} \phi\left(\frac{\|f(x+s)\|}{k}\right) \leq 1\right\}\end{aligned}$$

$$\leq \inf\left\{k>0: \quad \phi\left(\frac{\|f(x+s_0)\|}{k}\right)\leq 1\right\}$$
$$=\frac{\|f(x+s_0)\|}{\phi^{-1}(1)}.$$

Du fait que l'espace $\mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X},\mu)$ est invariant par translation, on obtient :

$$\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\,d\mu(x)\leq\frac{\left(\phi^{-1}(1)\right)^{-1}}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\|f(x+s_0)\|\,d\mu(x)$$
$$\to 0 \quad \text{quand} \quad r\to\infty.$$

Ce qui signifie que $f\in\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

□

Le théorème suivant établit l'équivalence (le lien) entre les trois espaces introduits précédemment.
A cet effet introduisons quelques notations.

Pour $\varepsilon>0,\ \alpha>0,\ r\in\mathbb{R}$ et $f\in B\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, on définit les ensembles suivants :

$$\mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)=\left\{x\in[-r,r];\ \inf\left\{k>0: \int_x^{x+1}\phi\left(\frac{\|f(t)\|}{k}\right)d\mu(t)\leq 1\right\}\geq\varepsilon\right\};$$

$$\mathscr{R}^{\mathrm{mod}}_{r,\varepsilon,\alpha}(f)=\left\{x\in[-r,r];\ \int_x^{x+1}\phi\left(\alpha\|f(t)\|\right)d\mu(t)\geq\varepsilon\right\}.$$

Théorème 4.2.8. *Soit $f\in B\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et soient les propriétés suivantes :*

$(\mathscr{P}_1)$ *Pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2r}\mu\left(\mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)\right)=0$,*

$(\mathscr{P}_2)$ *il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2r}\mu\left(\mathscr{R}^{\mathrm{mod}}_{r,\varepsilon,\alpha}(f)\right)=0$,*

$(\mathscr{P}_3)$ *pour tout $\varepsilon>0$ et tout $\alpha>0$, $\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2r}\mu\left(\mathscr{R}^{\mathrm{mod}}_{r,\varepsilon,\alpha}(f)\right)=0.$*

Alors,

$$(\mathscr{P}_1)\Longleftrightarrow(\mathscr{P}_3)\Longrightarrow(\mathscr{P}_2).$$

Remarque 4.2.9. *Notons que si $(\mathscr{P}_i), i=\overline{1,3}$ est vraie pour $\varepsilon_0\in\,]0,1[$ alors elle restera vraie pour tout $\varepsilon>\varepsilon_0$.*

Preuve du Théorème 4.2.8. Montrons, tout d'abord, que $(\mathscr{P}_3)\Rightarrow(\mathscr{P}_1)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\varepsilon\in\,]0,1]$.

Prenons $\alpha=\frac{1}{\varepsilon}$ dans $(\mathscr{P}_3)$, en vertu de l'implication suivante (voir, par exemple [8, Theorem 1.2.]).

$$\int_x^{x+1} \phi\left(\frac{\|f(t)\|}{\varepsilon}\right) d\mu(t) \leq \varepsilon \leq 1 \Longrightarrow \inf\left\{k>0: \int_x^{x+1} \phi\left(\frac{\|f(t)\|}{k}\right) d\mu(t) \leq 1\right\} \leq \varepsilon,$$

on obtient que

$$\frac{1}{2r}\mu\left\{x \in [-r,r]\,;\ \|f(.)\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)} > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{2r}\mu\left\{t \in [-r,r]\,;\ \rho_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\left(\frac{1}{\varepsilon}f(.)\right) > \varepsilon\right\}.$$

Un passage à la limite permet de conclure l'implication désirée.

Maintenant, démontrons que $(\mathscr{P}_1) \Rightarrow (\mathscr{P}_3)$.
Supposons que la condition $(\mathscr{P}_1)$ est satisfaite.
Soit α un nombre réel positif arbitraire. Pour chaque $\varepsilon \in]0,1]$, on a

$$\left\{x \in [-r,r]\,;\ \|f(.)\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)} > \frac{\varepsilon}{\alpha}\right\} \supset \left\{x \in [-r,r]\,;\ \rho_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}(\alpha f(.)) > \varepsilon\right\}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2r}\mu\left\{x \in [-r,r]\,;\ \rho_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}(\alpha f(.)) > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{2r}\mu\left\{x \in [-r,r]\,;\ \|f(.)\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)} > \varepsilon\right\} \to 0,$$

quand $r \to \infty$. Ainsi est obtenue l'implication souhaitée.

La preuve que $(\mathscr{P}_3) \Rightarrow (\mathscr{P}_2)$ est immédiate. □

Remarque 4.2.10. *Les propriétés $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{P}_3)$ sont de nature topologique, en particulier, la première signifie que pour tout voisinage U de 0 dans $\mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})$ pour la topologie induite par la convergence en norme de Luxemburg on a*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu\{t \in [-r,r]\,; f(t+.) \notin U\}}{2r} = 0.$$

Théorème 4.2.11. *Soit $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.*
Alors les équivalences suivantes sont vérifiées :

1. $f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\mathrm{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *si et seulement si f satisfait la propriété $(\mathscr{P}_1)$.*
2. $f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *si et seulement si f satisfait la propriété $(\mathscr{P}_2)$.*
3. $f \in \widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *si et seulement si $f \in \widetilde{\mathrm{B}\mathbb{S}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et f satisfait la propriété $(\mathscr{P}_3)$.*

Démonstration : Il suffit de montrer la première équivalence. La preuve de la deuxième et de la troisième équivalence est la même que la précédente.

Suivant des arguments analogues à ceux de [76, Lemme 2.7], on peut facilement montrer que

$$f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \mu\left(\mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)\right) = 0.$$

On va prouver maintenant l'implication inverse.
En se basant sur le fait que $f \in B\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et en vertu de la propriété 1 du lemme 2.4.2, on obtient $\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}} < +\infty$.

On suppose que f est une fonction qui satisfait la propriété $(\mathscr{P}_1)$, c'est à dire que $\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \mu\left(\mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)\right) = 0$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r_0 > 0$ tel que pour $r \geq r_0$ on a

$$\frac{1}{2r} \mu\left(\mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)\right) < \frac{\varepsilon}{\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}}}. \tag{4.7}$$

Ainsi, pour $r \geq r_0$, on obtient en vertu de l'item 2. du Lemme 2.4.2 et de l'inégalité (4.7) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(t)}\, d\mu(t) &= \frac{1}{2r}\left(\int_{\mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)} + \int_{[-r,r]\setminus \mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)}\right) \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(t)}\, d\mu(t) \\
&\leq \frac{1}{2r}\mu\left(\mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)\right) \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(t)} + \frac{1}{2r}\int_{[-r,r]\setminus \mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)} \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(t)}\, d\mu(t) \\
&= \frac{1}{2r}\mu\left(\mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)\right) \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}} + \frac{1}{2r}\int_{[-r,r]\setminus \mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)} \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(t)}\, d\mu(t) \\
&\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2r}\mu\left([-r,r]\setminus \mathscr{N}_{r,\varepsilon}(f)\right) \ \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

□

Théorème 4.2.12. *Soit ϕ une fonction d'Orlicz qui satisfait la condition-Δ_2. Alors*

$$\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \subset \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

Démonstration : Comme ϕ vérifie la condition-Δ_2, il existe $\lambda > 1$ et on peut choisir $u_0 > 0$ satisfaisant $\phi(2^m u_0) \leq \frac{1}{2}$ tels que

$$\phi(2^m u) \leq \lambda^m \phi(u) \ \text{ pour tout } \ u \geq u_0 \ \text{ et } \ m \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

On a, pour chaque $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)} &= \inf\left\{k > 0 : \int_{x}^{x+1} \phi\left(\frac{\|f(t)\|}{k}\right) d\mu(t) \leq 1\right\} \\
&\leq \inf\left\{2^{-m} : \int_{x}^{x+1} \phi\left(2^m \|f(t)\|\right) d\mu(t) \leq 1\right\}.
\end{aligned}$$

Soit E_x l'ensemble défini par $E_x = \{t \in [x,x+1], \ \|f(t)\| > u_0\}$ et E_x^c son complément dans $[x,x+1]$.

De l'inégalité (4.8), il s'ensuit que,

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} \phi\left(2^m \|f(t)\|\right) d\mu(t) &= \int_{E_x} \phi\left(2^m \|f(t)\|\right) d\mu(t) + \int_{E_x^c} \phi\left(2^m \|f(t)\|\right) d\mu(t) \\ &\leq \lambda^m \rho_{\mathbb{S}^\phi(x)}(f) + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ensuite, on en déduit que, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, et $m \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_{\mathbb{S}^\phi(x)} \leq \inf\left\{2^{-m} : \ \lambda^m \rho_{\mathbb{S}^\phi(x)}(f) + \frac{1}{2} \leq 1\right\} \leq \inf\left\{2^{-m} : \ 2^{\frac{\ln\left(2\rho_{\mathbb{S}^\phi(x)}(f)\right)}{\ln\lambda}} \leq 2^{-m}\right\}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\|f\|_{\mathbb{S}^\phi(x)} \leq \left(2\rho_{\mathbb{S}^\phi(x)}(f)\right)^{\frac{\ln 2}{\ln\lambda}}. \tag{4.9}$$

A ce stade, on distingue deux cas :

1. *Premier cas* $\lambda > 2$: L'utilisation de l'inégalité (4.9) nous donne

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|f\|_{\mathbb{S}^\phi(x)} d\mu(x) \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} \rho_{\mathbb{S}^\phi(x)}(f)\, d\mu(x). \tag{4.10}$$

   D'où on en déduit immédiatement que f est $\|.\|_{\mathbb{S}^\phi}$-ergodique.

2. *Deuxième cas* $1 < \lambda < 2$. On a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left(2\int_x^{x+1} \phi\left(\|f(t)\|\right) d\mu(t)\right)^{\frac{\ln 2}{\ln\lambda}} d\mu(x) \\ &\quad = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\left(\int_x^{x+1} \phi\left(\|f(t)\|\right) d\mu(t)\right)\left(2\int_x^{x+1} \phi\left(\|f(t)\|\right) d\mu(t)\right)^{\frac{\ln 2}{\ln\lambda}-1} d\mu(x).\end{aligned}$$

   Il en résulte que

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} \|f\|_{\mathbb{S}^\phi(x)} d\mu(x) \leq \frac{1}{r}\left(2\rho_{\mathbb{S}^\phi}(f)\right)^{\frac{\ln 2}{\ln\lambda}-1}\int_{-r}^{r}\left(\int_x^{x+1} \phi\left(\|f(t)\|\right) d\mu(t)\right) d\mu(x). \tag{4.11}$$

   Comme $f \in B\mathbb{S}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{X})$, le côté droit de l'inégalité (4.11) tend vers zéro quand $r \to \infty$.

Il s'ensuit que f est norme ergodique au sens de Stepanov-Orlicz.

$\square$

Corollaire 4.2.13. *Pour tout fonction d'Orlicz ϕ, les inclusions suivantes sont vraies :*

$$\widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X}). \tag{4.12}$$

L'égalité de ces espaces a lieu lorsque ϕ vérifie la condition-Δ_2.

Remarque 4.2.14. *La relation entre les différents concepts d'ergodicité dans les espaces de Stepanov-Orlicz est récapitulée dans le tableau 4.3 dans lequel la nécessité de la condition-Δ_2 pour avoir les inclusions inverses dans (4.12).*
La nécessité est mise en évidence dans ce dernier.

$\widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$	$\Longrightarrow$ $\not\Longleftarrow$	$(\mathscr{P}_3)$
$\Downarrow\not\Uparrow$ See Example 4.2.20		$\Updownarrow$
$\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$	$\Longleftrightarrow$	$(\mathscr{P}_1)$
$\Downarrow\not\Uparrow$ See Example 4.2.19		$\Downarrow\not\Uparrow$
$\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$	$\Longleftrightarrow$	$(\mathscr{P}_2)$

TABLE 4.1 – Cas où $\phi \notin \Delta_2$.

$\widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$	$\Longleftrightarrow$	$(\mathscr{P}_3)$
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
$\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$	$\Longleftrightarrow$	$(\mathscr{P}_1)$
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
$\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$	$\Longleftrightarrow$	$(\mathscr{P}_2)$

TABLE 4.2 – Cas où $\phi \in \Delta_2$ ou bien les fonctions appartiennent à $\widetilde{B\mathbb{S}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

TABLE 4.3 – La relation entre les différents concepts de l'ergodicité dans les espaces Stepanov Orlicz.

4.2.2 La caractérisation des fonctions Stepanov-Orlicz ergodiques via la transformée de Bochner

Diagana et Zitane ([34–36]) ont donné une caractérisation aux fonctions Stepanov ergodiques et Stepanov pseudo presque périodiques via l'ergodicité et la pseudo presque périodicité de leurs transformées de Bochner respectivement.
Notre but est d'étendre ces résultats aux cas des espaces de Stepanov-Orlicz.

Notons que contrairement à la définition de l'ergodicité donnée par Zhang [91] pour des fonctions continues et bornées, on trouve une définition d'ergodicité introduite par Ait Dads et al. [1] pour des fonctions Lebesgue mesurables.

Dans tout ce qui suit, on ne s'intéressera qu'à la définition de la pseudo presque périodicité définie par Zhang.

Définition 4.2.15. *On dit qu'une fonction* $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est fortement ergodique au sens de Stepanov-Orlicz* ($f \in \widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$) *si*

$$f^b : \mathbb{R} \to \left(\mathrm{L}^{\phi}([0,1],\mathbb{X}), \rho_{\mathbb{S}^{\phi}}(.)\right)$$

est ergodique. Autrement dit :

$$f \in \widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{X})) \Leftrightarrow f^b \in \mathscr{E}(\mathbb{R}, \mathrm{L}^{\phi}([0,1];\mathbb{X}), \rho_{\mathbb{S}^{\phi}}(.)). \tag{4.13}$$

Remarque 4.2.16. *Dans le théorème 3.2.3, nous avons montré que la transformée de Bochner d'une fonction* $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *n'est pas absolument continue en* L^{ϕ}*-norme.*
Ceci nous a permis de déduire que, contrairement à (4.13) les fonctions dans $\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\mathrm{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *ne peuvent pas être caractérisées via la transformée de Bochner.*
Pour cela, nous avons donné une condition suffisante pour qu'une fonction f^b *soit dans* $\mathscr{E}(\mathbb{R}, \mathrm{E}^{\phi}([0,1];\mathbb{X}), \|.\|_{\mathbb{S}^{\phi}})$. *Ceci est le cas si* $f \in \mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *ou* f *satisfait la condition-*Δ_2.

Il est important de signaler que le choix de la condition est dû à la continuité en ϕ*-moyenne des fonctions de* $\mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et de la bornitude au sens de Stepanov-Orlicz des fonctions de* $\mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$*, (voir Luxemburg [68, Definition 1, p43]).*

Désormais, on notera $\widehat{\mathrm{B}\mathbb{S}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ l'espace définit comme suit :

$$\widehat{\mathrm{B}\mathbb{S}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathrm{E}^{\phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

Commençons par donner le lemme suivant :

Lemme 4.2.17. *Soit* $f \in \widehat{\mathrm{B}\mathbb{S}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. *Alors* $f^b \in \mathscr{E}(\mathbb{R}, \mathrm{E}^{\phi}([0,1];\mathbb{X}))$ *si et seulement si* f *satisfait la propriété* ($\mathscr{P}_1$).

Démonstration : La démonstration est analogue à celle du théorème 4.2.11 □

Par conséquent nous avons :

Corollaire 4.2.18. *Soit* $f \in \widehat{\mathrm{B}\mathbb{S}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. *Alors la propriété suivante est vraie pour toute fonction de Young* ϕ

$$f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\mathrm{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \Leftrightarrow f^b \in \mathscr{E}(\mathbb{R}, \mathrm{E}^{\phi}([0,1];\mathbb{X}), \|.\|_{\mathbb{S}^{\phi}})$$

4.2.3 Exemples instructifs

Dans tout ce qui suit, on choisit $\phi(t) = e^{|t|} - 1$ une N-fonction qui ne satisfait pas la condition-Δ_2. L'exemple suivant fournit une fonction modulaire ergodique au sens de Stepanov Orlicz mais pas norme ergodique au sens de Stepanov Orlicz.

Exemple 4.2.19. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} n\, \mathbf{1}_{[3n,3n+e^{-2n}]}(t) = \begin{cases} n, & 3n \leq t \leq 3n + e^{-2n} \quad \textit{avec } n \in \mathbb{N}^*; \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

La fonction f appartient à $\mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \phi\left(2\|f(s)\|\right) d\mu(s) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{3n}^{3n+e^{-2n}} \phi\left(2n\right) d\mu(s) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-2n}\left(e^{2n}-1\right) = 1.$$

Montrons que $f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour chaque $T > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $3(n-1) \leq T < 3n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \rho_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}(f)\, d\mu(x) &\leq \frac{1}{2(3n-3)} \int_0^{3n+e^{-2n}} \left(\int_x^{x+1} \phi\left(\|f(s)\|\right) d\mu(s) \right) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2(3n-3)} \sum_{k=1}^{n} \int_{3k-1}^{3k+e^{-2k}} \left(\int_x^{x+1} \phi\left(\|f(s)\|\right) d\mu(s) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \rho_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}(f)\, d\mu(x) \\ &\leq \frac{1}{2(3n-3)} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{3k-1}^{3k-1+e^{-2k}} + \int_{3k-1+e^{-2k}}^{3k} + \int_{3k}^{3k+e^{-2k}} \right) \left(\int_x^{x+1} \phi\, \|f(s)\| \right) d\mu(s) d\mu(x). \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \rho_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}(f)\, d\mu(x) \leq \frac{1}{2(3n-3)} \sum_{k=1}^{n} \left(J_1(k) + J_2(k) + J_3(k)\right).$$

Estimons les quantités $J_i(k)$, $i = 1, \cdots, 3$.
On aura, pour chaque $k \geq 1$

$$\begin{aligned} J_1(k) &= \int_{3k-1}^{3k-1+e^{-2k}} \left(\int_x^{x+1} \phi\left(\|f(s)\|\right) d\mu(s) \right) d\mu(x) \\ &= \left(e^k - 1\right) \int_{3k-1}^{3k-1+e^{-2k}} (x+1-3k)\, d\mu(x) \leq e^{-3k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2(k) &= \int_{3k-1+e^{-2k}}^{3k}\left(\int_x^{x+1}\phi\left(\|f(s)\|\right)d\mu(s)\right)d\mu(x)\\
&= \int_{3k-1+e^{-2k}}^{3k}\int_{3k}^{3k+e^{-2k}}\left(e^k-1\right)d\mu(s)\leq e^{-k};\\
J_3(k) &= \int_{3k}^{3k+e^{-2k}}\left(\int_x^{x+1}\phi\left(\|f(s)\|\right)d\mu(s)\right)d\mu(x)\\
&= \left(e^k-1\right)\int_{3k}^{3k+e^{-2k}}\left(3k+e^{-2k}-x\right)d\mu(x)\leq e^{-3k}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T_n}^{T_n}\left(\int_x^{x+1}\phi\left(\|f(s)\|\right)d\mu(s)\right)d\mu(x)\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2\left(3n-3\right)}\sum_{k=1}^{n}e^{-k}=0.$$

Ce qui signifie que $f\in\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$.

Maintenant, prenons $T_n=3n+e^{-2n}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T_n}\int_{-T_n}^{T_n}\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\,d\mu(x) &= \frac{1}{2T_n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{3k-1}^{3k-1+e^{-2k}}+\int_{3k-1+e^{-2k}}^{3k}+\int_{3k}^{3k+e^{-2k}}\right)\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\,d\mu(x)\\
&\geq \frac{1}{2T_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{3k-1+e^{-2k}}^{3k}\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

Nous allons estimer $\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}$ *pour* $x\in\left[3k-1+e^{-2k},3k\right]$.

Nous avons

$$\int_x^{x+1}\phi\left(2\|f(s)\|\right)d\mu(s)=\int_{3k}^{3k+e^{-2k}}\left(e^{2k}-1\right)d\mu(s)=e^{-2k}\left(e^{2k}-1\right)>\frac{1}{2}.$$

D'où l'on déduit que

$$\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}>\frac{1}{4},\quad \textit{pour tout } x\in\left[3k-1+e^{-2k},3k\right].$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2T_n}\int_{-T_n}^{T_n}\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\,d\mu(x)\geq\frac{1}{2T_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{3k-1+e^{-2k}}^{3k}\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\,d\mu(x)>\frac{1}{2T_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1-e^{-2k}\right)>\frac{1}{24}.$$

Cela montre que $f\notin\mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$.

L'exemple suivant donne une fonction qui est $\|.\|_{\mathbb{S}^{\phi}}$-ergodique et $\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}$-ergodique au sens large mais pas $\rho_{\mathbb{S}^{\phi}}$-fortement ergodique.

Exemple 4.2.20. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} n\,\mathbf{1}_{[n^2, n^2+e^{-n}]}(t) = \begin{cases} n, & n^2 \leq t \leq n^2+e^{-n} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La fonction f appartient à $\mathrm{B}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \phi\left(\|f(s)\|\right) d\mu(s) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{n^2}^{n^2+e^{-n}} \phi(n)\, d\mu(s) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-n}\left(e^n - 1\right) = 1.$$

Par contre $f \notin \widetilde{\mathrm{B}}\mathbb{S}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ parce que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \phi\left(2\|f(s)\|\right) d\mu(s) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{n^2}^{n^2+e^{-n}} \phi(2n)\, d\mu(s) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-n}\left(e^{2n} - 1\right) = +\infty.$$

Montrons que $f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour chaque $T > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n-1)^2 \leq T < n^2$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\, d\mu(x) \\
\leq\ & \frac{1}{2(n-1)^2}\int_0^{n^2+e^{-n}} \left(\int_x^{x+1} \phi\left(\|f(s)\|\right) d\mu(s)\right) d\mu(x) \\
=\ & \frac{1}{2(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n} \int_{k^2-1}^{k^2+e^{-k}} \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\, d\mu(x) \\
=\ & \frac{1}{2(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n} \left(\int_{k^2-1}^{k^2-1+e^{-k}} + \int_{k^2-1+e^{-k}}^{k^2} + \int_{k^2}^{k^2+e^{-k}}\right) \|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}\, d\mu(x) \\
=\ & \frac{1}{2(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n} \left(I_1(k) + I_2(k) + I_3(k)\right).
\end{aligned}$$

Évaluons $\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)}$ pour $x \in U_1^k := \left[k^2-1, k^2-1+e^{-k}\right]$, $x \in U_2^k := \left[k^2-1+e^{-k}, k^2\right]$ et $x \in U_3^k := \left[k^2, k^2+e^{-k}\right]$, respectivement.
On a

— *pour $x \in U_1^k$,*

$$\|f\|_{\mathbb{S}^{\phi}(x)} = \inf\left\{\lambda > 0, \int_{k^2}^{x+1} \left(e^{\frac{k}{\lambda}} - 1\right) d\mu(s) \leq 1\right\} \leq \inf\left\{\lambda > 0, \int_{k^2}^{k^2+e^{-k}} e^{\frac{k}{\lambda}}\, d\mu(s) \leq 1\right\} = 1;$$

— *pour* $x \in U_2^k$,

$$\|f\|_{\mathbb{S}^\phi(x)} = \inf\left\{\lambda > 0, \int_{k^2}^{k^2+e^{-k}} (e^{\frac{k}{\lambda}} - 1) d\mu(s) \leq 1\right\} = \frac{k}{k + \ln\left(1 + e^{-k}\right)} \leq 1;$$

— *pour* $x \in U_3^k$,

$$\inf\left\{\lambda > 0, \int_{x}^{k^2+e^{-k}} (e^{\frac{k}{\lambda}} - 1) d\mu(s) \leq 1\right\} \leq \inf\left\{\lambda > 0, \int_{k^2}^{k^2+e^{-k}} e^{\frac{k}{\lambda}} d\mu(s) \leq 1\right\} = 1.$$

D'où l'on déduit que

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T_n}^{T_n} \|f\|_{\mathbb{S}^\phi(x)} d\mu(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2(n-1)^2} \sum_{k=1}^{n} 3 = \limsup_{n\to\infty} \frac{3n}{2(n-1)^2} = 0.$$

Cela signifie que $f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^\phi_{\text{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Par conséquent, on obtient* $f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^\phi_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *De plus, pour* $T_n = n^2 + e^{-n}$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} \left(\int_x^{x+1} \phi\left(3\|f(s)\|\right) d\mu(s)\right) d\mu(x) \\
\geq\ & \frac{1}{2T_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{k^2-1+e^{-k}}^{k^2} \left(\int_x^{x+1} \phi\left(3\|f(s)\|\right) d\mu(s)\right) d\mu(x) \\
=\ & \frac{1}{2T_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{k^2-1+e^{-k}}^{k^2} \left(\int_{k^2}^{k^2+e^{-k}} \left(e^{3k} - 1\right) d\mu(s)\right) d\mu(x) \\
\geq\ & \frac{1}{4T_n} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{2k} - e^{-k}\right).
\end{aligned}$$

Pour n *assez grand, le dernier terme tend vers* ∞. *Ce qui prouve que* $f \notin \widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^\phi_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

L'exemple suivant fournit une fonction qui est fortement modulaire ergodique au sens de Stepanov-Orlicz

Exemple 4.2.21. *Soit* $N \geq 1$ *un entier et soit*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} n\,\mathbf{1}_{[n^2, n^2+e^{-n}]}(t) = \begin{cases} n, & n^2 \leq t \leq n^2 + e^{-n} \quad \text{avec } 1 \leq n \leq N; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrons que $f \in \widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^\phi_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour un $\alpha > 0$ *fixé et* $N \geq 1$, *la fonction* f *appartient à* $\widetilde{\mathrm{B}\mathbb{S}}^\phi(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *car*

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{x}^{x+1} \phi\left(\alpha \|f(s)\|\right) d\mu(s) &= \sup_{1\leq n\leq N} \int_{n^2}^{n^2+e^{-2n}} \phi\left(\alpha n\right) d\mu(s) \\
&= \sup_{1\leq n\leq N} e^{-2n}\left(e^{\alpha n}-1\right) \leq e^{\alpha N} < +\infty.
\end{aligned}$$

Suivant l'exemple 4.2.20, nous avons $f \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *En utilisant le fait que* $f \in \widetilde{\mathrm{B}\mathbb{S}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on obtient que* $f \in \widetilde{\mathscr{E}\mathbb{S}}^{\phi}_{\text{mod}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Clairement, $f \notin \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *puisque* f *n'est pas continue.*

4.3 La Stepanov-Orlicz pseudo presque périodicité et applications

La notion de la pseudo presque périodicité au sens de Stepanov-Orlicz est une généralisation de la Stepanov pseudo presque périodicité dans des espaces de Lebesgue à exposants variables proposée et étudiée par Diagana et Zitane dans [36].

4.3.1 L'espace de fonctions Stepanov-Orlicz pseudo presque périodiques

Définition 4.3.1. *Une fonction* $f \in \widehat{\mathrm{B}\mathbb{S}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est dite* $\mathbb{S}^{\phi}$-pseudo presque périodique *ou* Stepanov-Orlicz pseudo presque périodique *si elle s'écrit comme suit*

$$f = g + h, \quad g \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}), \quad h \in \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X}).$$

L'espace de ces fonctions sera noté $\mathbb{S}^{\phi}$*-pseudo presque périodiques est noté* $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Il est facile de prouver que $f \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *si et seulement si il existe deux fonctions* $g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ *telles que*

$$f = g + h, \quad \text{où} \quad g^b \in \mathrm{AP}\left(\mathbb{R}, \mathrm{E}^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right), \quad h^b \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, \mathrm{E}^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right).$$

La proposition suivante montre que $\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Proposition 4.3.2. *Si* $f \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *alors* f *est* $\mathbb{S}^{\phi}$*-pseudo presque périodique.*

Démonstration : L'inclusion $\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est démontrée dans [52]. D'après item 3 de la proposition 4.2.7, on a $\mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathscr{E}\mathbb{S}^{\phi}_{\text{norm}}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Ceci achève la démonstration. ∎

Les fonctions Stepanov-Orlicz pseudo presque périodiques à paramètre :

— Une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ avec $f(.,x) \in \widehat{\mathrm{BS}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ pour chaque $x \in \mathbb{X}$ est dite *Stepanov Orlicz-ergodique par rapport à la première variable, uniformément par rapport à la deuxième variable sur des sous ensembles compacts de* $\mathbb{X}$ Si,

1. Pour tout $x \in \mathbb{X}$, $f^b(.,x) \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathrm{E}^{\phi}([0,1];\mathbb{X}))$,
2. f satisfait
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mu([-r,r])} \int_{[-r,r]} \|f(.,x)\|_{\mathbb{S}^{\phi}(t)}\, d\mu(t) = 0$$
uniformément par rapport à x dans des sous-ensembles compacts de $\mathbb{X}$.

L'espace de telles fonctions sera noté $\mathscr{E}_K(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.

— Une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ avec $f(.,x) \in \widehat{\mathrm{BS}}^{\phi}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ pour chaque $x \in \mathbb{X}$ est dite *Stepanov-Orlicz pseudo presque périodique par rapport à la première variable, uniformément par rapport à la deuxième variable sur des sous ensembles compacts* $\mathrm{K} \subset \mathbb{X}$, s'il existe deux fonctions $g,h : \mathbb{R}\times\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ telles que $f = g+h$, où $g^b \in \mathrm{AP_K}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathrm{E}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})\right)$ et $h^b \in \mathscr{E}_{\mathrm{K}}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathrm{E}^{\phi}([0,1],\mathbb{X})\right)$, c'est à dire
$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mu([-r,r])} \int_{[-r,r]} \inf\left\{k>0 : \int_0^1 \phi\left(\frac{\|h(t+s,x)\|}{k}\right) ds \le 1\right\} d\mu(t) = 0.$$
L'espace de telles fonctions sera noté $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{AP_K}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.

4.3.2 Théorème de superposition dans $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$

Rappelons que l'opérateur de Nemytskii (ou l'opérateur de superposition) $\mathscr{N}_f$ construit sur une fonction mesurable $f : \mathbb{R}\times\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ correspond à l'application définie comme suit :
$$\mathscr{N}_f(x) := [t \mapsto f(t,x(t))].$$
Cet opérateur est bien étudié dans la littérature dans l'espace de fonctions Stepanov pseudo presque périodiques [23, 33, 35].

Notre objectif est de généraliser cette étude aux espaces de fonctions pseudo presque périodiques au sens de Stepanov-Orlicz.

En s'inspirant des travaux de [14], nous avons montré que sous la condition de Lipschitz et sous la propriété de compacité (**D**) l'opérateur de Nemytskii $\mathscr{N}_f$ transforme l'espace $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ en lui-même.

Théorème 4.3.3. *Soit* $f = g+h \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP_K}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$*, supposons que* f *et* g *vérifient la condition (***lip***). Si* $x \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *alors* $f(.,x(.)) \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Démonstration : Puisque $f \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP_K}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ et $x \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP_K}(\mathbb{R},\mathbb{X})$, nous avons
$$f = g+h \quad x = y+z,$$

où $g^b \in AP\left(\mathbb{R}\times\mathbb{X}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$, $h^b \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{X}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$ et $y^b \in AP\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$, $z^b \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$.
La fonction f^b se décompose comme suit

$$f^b\left(.,x^b(.)\right) = g^b\left(.,y^b(.)\right) + \left[f^b\left(.,x^b(.)\right) - f^b\left(.,y^b(.)\right)\right] + h^b\left(.,y^b(.)\right).$$

Afin de démontrer le théorème, il suffit de vérifier que $g^b\left(.,y^b(.)\right) \in AP\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$, $f^b\left(.,x^b(.)\right) - f^b\left(.,y^b(.)\right) \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$ et $h^b\left(.,y^b(.)\right) \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$.

En utilisant le fait que $g \in \mathbb{S}^{\phi}AP_K(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$, $y \in \mathbb{S}^{\phi}AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et le théorème 3.3.2 du chapitre 3, on obtient que $g(.,y(.)) \in \mathbb{S}^{\phi}AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, c'est à dire $g^b\left(.,y^b(.)\right) \in AP\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$.

Posons

$$\varphi^b(.) = f^b\left(.,x^b(.)\right) - f^b\left(.,y^b(.)\right)$$

Montrons que $\varphi^b \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$.

En effet, pour $r > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\left\|\varphi^b(t)\right\|_{L^{\phi}([0,1])} d\mu(t) &= \frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\left\|f^b\left(t,x^b(t)\right) - f^b\left(t,y^b(t)\right)\right\|_{L^{\phi}([0,1])} d\mu(t)\\
&\leq \frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]} L\left\|x^b(t) - y^b(t)\right\|_{L^{\phi}([0,1])} d\mu(t)\\
&= \frac{L}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\left\|z^b(t)\right\|_{L^{\phi}([0,1])} d\mu(t).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $z^b \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$, il s'ensuit que $\varphi^b \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$.

Maintenant, vérifions que $h^b\left(.,y^b(.)\right) \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}\left([0,1],\mathbb{X}\right)\right)$.

Soit $y(.) \in \mathbb{S}^{\phi}AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la propriété de compacité de Danilov (**D**), on peut trouver $\eta(\varepsilon) > 0$ et un sous-ensemble compact $\mathscr{K}_{\eta(\varepsilon)} \subset \mathbb{X}$ tels que

$$\bar{\mu}_{\mathbb{S}}\{t \in \mathbb{R},\ \ y(t) \notin \mathscr{K}_{\eta(\varepsilon)}\} < \eta, \ \text{ et } \ \left\|y(.)\,\mathbf{1}_{T^c_{\eta(\varepsilon)}}\right\|_{\mathbb{S}^{\phi}} \leq \frac{\varepsilon}{4L}, \tag{4.14}$$

où $T_{\eta(\varepsilon)}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel $y(t) \in \mathscr{K}_{\eta(\varepsilon)}$ et $T^c_{\eta(\varepsilon)}$ est son complémentaire.

Compte tenu de la compacité de $\mathscr{K}_{\eta(\varepsilon)}$, nous pouvons trouver une suite finie $y_1, y_2, ..., y_m$ dans $\mathscr{K}_{\eta(\varepsilon)}$ telle que

$$\mathscr{K}_{\eta,\varepsilon} \subset \cup_{i=1}^{m} B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{4L}\right). \tag{4.15}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\left\|h^b\left(t,y^b(t)\right)\right\|_{L^{\phi}([0,1])} d\mu(t) \leq \max_{1\leq i\leq m}\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]}\left\|h^b\left(t,y^b(t)\right) - h^b(t,y_i)\right\|_{L^{\phi}([0,1])}$$

$$+\max_{1\leq i\leq m}\frac{1}{\mu\left([-r,r]\right)}\int_{[-r,r]}\left\|h^{b}\left(t,y_{i}\right)\right\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])}d\mu(t)$$
$$=I_1(r)+I_2(r).$$

Compte tenu de (4.14), (4.15) et de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}I_1(r) &\leq \frac{L}{\mu\left([-r,r]\right)}\|1\|_{\mathbb{S}^{\psi}}\max_{1\leq i\leq m}\|y(.)-y_i\|_{\mathbb{S}^{\phi}}\\ &\leq \frac{L}{\mu\left([-r,r]\right)}\|1\|_{\mathbb{S}^{\psi}}\left\{\max_{1\leq i\leq m}\left\|\{y(.)-y_i\}\,\mathbf{1}_{T_{\eta(\varepsilon)}}\right\|_{\mathbb{S}^{\phi}}+\max_{1\leq i\leq m}\left\|\{y(.)-y_i\}\,\mathbf{1}_{T^{c}_{\eta(\varepsilon)}}\right\|_{\mathbb{S}^{\phi}}\right\}\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Nous allons estimer la quantité $I_2(r)$.
En utilisant le fait que la fonction paramétrique $h\in\mathbb{S}^{\phi}\mathscr{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.
On obtient

$$I_2(r)\leq\sup_{y\in\mathscr{K}_{\varepsilon}}\frac{1}{\mu\left([-r,r]\right)}\int_{[-r,r]}\left\|h^{b}\left(t,y\right)\right\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])}d\mu(t),$$

on déduit que $\lim\limits_{r\to\infty}I_2(r)=0$. Enfin, puisque ε est arbitraire, on obtient que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu\left([-r,r]\right)}\int_{[-r,r]}\left\|h^{b}\left(t,y^{b}\left(t\right)\right)\right\|_{\mathrm{L}^{\phi}([0,1])}d\mu(t)=0.$$

Cela prouve que $f(.,x(.))\in\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}\left(\mathbb{R},\mathbb{X}\right)$.

4.3.3 Solutions pseudo presque périodiques d'une équation d'évolution à coefficients $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}\left(\mathbb{R},\mathbb{X}\right)$

Cette partie est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution "mild" pseudo presque périodique des équations différentielles abstraites linéaires et semi-linéaires suivantes :

$$u'(t)=Au(t)+f(t) \tag{4.16}$$

et

$$u'(t)=Au(t)+F\left(t,u(t)\right) \tag{4.17}$$

respectivement, où $A:D(A)\subset\mathbb{X}\mapsto\mathbb{X}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe et $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{X}$, $(F:\mathbb{R}\times\mathbb{X}\mapsto\mathbb{X})$ sont des fonctions mesurables.

Désormais, nous formulons les hypothèses suivantes :

(H1) L'opérateur A génère un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq0}$ exponentiellement stable, c'est à dire, qu'il existe deux constantes $M>0$ et $\omega>0$ telles que

$$\|T(t)\|\leq M\exp(-\omega t),\quad\forall t\geq0.$$

(H2) La fonction $f \in \mathbb{S}^{\phi}PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ i.e., $f = g + h$ où $g^b \in AP\left(\mathbb{R}, E^{\phi}([0,1],\mathbb{X})\right)$ et $h^b \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}([0,1],\mathbb{X})\right)$. De plus, f et g vérifient la condition **(lip)**.

(H3) La fonction $F \in \mathbb{S}^{\phi}PAP_K(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ i.e., $F = G + H$ où $G^b \in AP\left(\mathbb{R}\times\mathbb{X}, E^{\phi}([0,1],\mathbb{X})\right)$ et $H^b \in \mathscr{E}\left(R\times\mathbb{X}, E^{\phi}([0,1],\mathbb{X})\right)$. De plus, F et G vérifient la condition **(lip)**.

Le premier résultat sur l'existence et l'unicité de la solution pseudo presque périodique à (4.16) est rapporté dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.4. *Sous les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, l'équation (4.16) admet une unique solution "mild" pseudo presque périodique donnée par :*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.18}$$

Démonstration : Puisque $f \in \mathbb{S}^{\phi}PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors $f = g + h$ où $g^b \in AP\left(\mathbb{R}, E^{\phi}([0,1]);\mathbb{X}\right)$ et $h^b \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}([0,1];\mathbb{X})\right)$.

Désormais, on définit les quantités suivantes

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)g(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad Y(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)h(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La preuve que $X \in AP\left(\mathbb{R}, E^{\phi}([0,1]);\mathbb{X}\right)$ est la même que celle de [14, Theorem 3.15 p 13]. Alors, il suffit juste de montrer que $Y \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, E^{\phi}([0,1];\mathbb{X})\right)$.
Considérons pour chaque $n \geq 1$, la suite d'opérateurs $Y_n(.)$ définie par :

$$Y_n(t) = \int_{t-n}^{t-n+1} T(t-s)h(s)\,ds = \int_{n-1}^{n} T(s)h(t-s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les mêmes arguments utilisés pour prouver la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ dans [14, Theorem 3.15 p 13] nous donnent que la série $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t)$ est convergente au sens de la norme $\|.\|_{\infty}$ uniformément sur $\mathbb{R}$ et $Y \in BC(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Montrons que pour chaque n, $Y_n \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
En utilisant des arguments de la preuve de [36, Theorem 6.3].
En effet, nous avons pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\|Y_n(t)\| \leq Me^{-\omega(n-1)}\|h(.)\|_{\mathbb{S}^{\phi}}.$$

Alors nous obtenons

$$\frac{1}{\mu([-r,r])}\int_{[-r,r]} \|Y_n(t)\|\,d\mu(t)$$

$$\leq Me^{-\omega(n-1)} \times \frac{1}{\mu([-r,r])} \int_{[-r,r]} \inf\left\{k>0 : \int_{t-n}^{t-n+1} \phi\left(\frac{h(s)}{k}\right) ds \leq 1\right\} d\mu(t).$$

Ainsi, du fait que $h^b \in \mathscr{E}\left(\mathbb{R}, \mathrm{E}^{\phi}([0,1];\mathbb{X})\right)$, on en déduit que $Y_n \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

En utilisant l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu([-r,r])} \int_{[-r,r]} \|Y(t)\| d\mu(t) \\
&\quad \leq \frac{1}{\mu([-r,r])} \int_{[-r,r]} \left\|Y(t) - \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t)\right\| d\mu(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu([-r,r])} \int_{[-r,r]} \|Y_n(t)\| d\mu(t),
\end{aligned}$$

nous obtenons que la limite uniforme $Y(.) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(.) \in \mathscr{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Alors, $u \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

L'unicité de la solution "mild" $u(.)$ de l'équation (4.16) se démontre de la même manière que dans le Théorème [14, Theorem 3.15 p 13]. □

En utilisant le théorème 4.3.4, on montre facilement le théorème suivant qui assure l'existence et l'unicité de l'équation différentielle semi linéaire (4.17).

Théorème 4.3.5. *Sous les hypothèses **(H1)**, **(H3)** et sous la condition* $\frac{LM}{1-e^{-\omega}} < 1$, *il existe une unique solution "mild" pseudo presque périodique de l'équation* (4.17).

Démonstration : Considérons l'opérateur non-linéaire Λ défini par

$$\Lambda(u)(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s) F(s,u(s)) d\mu(s), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Les arguments de la preuve du Théorème 4.3.5 sont identiques à ceux de la preuve du [14, Theorem 3.16 p.12].

Du théorème 4.3.3, on obtient que $F(.,x(.)) \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Ensuite, en utilisant la démonstration du théorème 4.3.4, on déduit que $\Lambda u \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ si $u \in \mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Ainsi l'application Λ envoie $\mathbb{S}^{\phi}\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ dans $\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Pour compléter la preuve, nous devons montrer que Λ est une application contractante sur $\mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Alors il suffit d'appliquer le théorème du point fixe de Banach à l'opérateur non linéaire Λ comme dans le cas presque périodique (voir [14, Theorem 3.16 p.12]). □

Conclusion générale et quelques perspectives de recherche

Dans cette thèse, nous avons contribué à l'étude des fonctions presque périodiques de type Stepanov-Orlicz et leurs applications aux équations différentielles ordinaires abstraites.

En premier lieu, nous avons donné de nouvelles définitions aux fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques définies initialement par Hillmann.
Par suite, grâce à ces nouvelles caractérisations, on a réussi à démontrer des théorèmes de superposition et à établir des résultats d'existence de solutions "mild" presque périodiques au sens de Bohr pour une classe d'équations d'évolution à coefficients Stepanov-Orlicz presque périodiques, résultats de même type que ceux obtenus dans le cadre de Stepanov presque périodiques.
On s'est intéressé aussi dans cette thèse à la notion de la pseudo presque périodicité définie initialement par C. Zhang et généralisée au cadre des espaces de Lebesgue et de Lebesgue généralisés par Diagana et ses collaborateurs.

En définissant l'ergodicité au sens de Stepanov-Orlicz, (ergodicité au sens de la norme et au sens de la modulaire), nous avons introduit et étudié une nouvelle classe de fonctions qu'on avait appelées "fonctions Stepanov-Olicz pseudo presque périodiques".
A la fin, on a établit un résultat d'existence de solutions pseudo-presque périodiques d'une classe d'équations d'évolution semi-linéaires à coefficients Stepanov-Orlicz pseudo-presque périodiques.

De nombreuses questions demeurent encore posées dans les espaces de fonctions presque périodiques de type Orlicz, elles concernent les propriétés topologiques (exemple la compacité) et géométriques qui sont indispensables pour appliquer les théorèmes du point fixe existant dans la littérature.
Comme suite à notre travail, on pourra développer ces propriétés afin d'étudier les solutions presque périodiques (de type Orlicz) pour d'autres classes d'équations différentielles.
Nous souhaitons enfin que notre modeste contribution puisse susciter un intérêt et donner lieu à d'autres études.

Annexe

Opérateurs linéaires

Soient $(\mathbb{X}, \|.\|)$, $(\mathbb{Y}, \|.\|_{\mathbb{Y}})$ deux espace de Banach. Un opérateur T de X vers $\mathbb{Y}$ est dit linéaire si on a :

$$T(ax+by) = aT(x) + bT(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X} \text{ et } \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

T est dit borné s'il existe un réel positif M tel que

$$\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq M\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Un opérateur linéaire $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

1. T est borné ;
2. T est continu sur $\mathbb{X}$.
3. T est continu en 0.
4. T est uniformément continu sur $\mathbb{X}$.

On note par $\mathscr{L}(\mathbb{X}) := \mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ l'ensemble des opérateur linéaires (bornés) dans $\mathbb{X}$.

Semi-groupes

Nous renvoyons le lecteur à [41, 77, 82] pour plus de détails.

Définition 4.0.6. *Une famille $T(t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires de $\mathbb{X}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathbb{X}$ si :*

1. *$T(t+s) = T(t)T(s)$, pour tout $t, s \geq 0$ (dite propriété de semi-groupe)*
2. *$T(0) = I$. (I étant l'opérateur identité sur $\mathbb{X}$).*

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires $T(t)_{t\geq 0}$ est dite uniformément continu si

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})} = 0$$

et il est dit fortement continu sur $\mathbb{X}$ où C^0-semi-groupe si

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\|T(t)x-x\|=0,\ \ \forall x\in\mathbb{X}.$$

Proposition 4.0.7. *Soit $T(t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur $\mathbb{X}$, alors*
- *$t\longrightarrow\|T(t)\|$ est bornée sur tout intervalle compact $[0,T]$,*
- *Pour tout $x\in X$, la fonction $t\longrightarrow T(t)x$ est continue (à valeurs dans $\mathbb{X}$), sur $[0,+\infty[$.*
- *Il existe des constantes positives ω et M telles que*

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\qquad \|T(t)\|\leq M\exp(\omega t). \tag{1}$$

Définition 4.0.8. *On appelle générateur infinitésimal de $T(t)$, l'opérateur A de domaine $D(A)$ défini par :*

$$D(A)=\left\{x\in\mathbb{X}/\quad \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x-x}{h}\quad \textit{existe}\right\}, \tag{2}$$

et pour $x\in D(A)$:

$$Ax=\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x-x}{h}. \tag{3}$$

Théorème 4.0.9. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs bornés sur un espace de Banach $\mathbb{X}$, et soit A son générateur infinitésimal. Pour tout $x_0\in D(A)$, on a*
- *$T(t)x_0\in D(A)$, pour tout $t\geq 0$*
- *$\frac{d}{dt}(T(t)x_0)=AT(t)x_0=T(t)Ax_0$, $\forall t>0$*
- *$T(t)x_0-x_0=\int_0^t AT(s)x_0\,ds$*
- *A est un opérateur linéaire fermé, $D(A)$ est partout dense dans $\mathbb{X}$*

Théorème du point fixe de Banach

Théorème 4.0.10. *Soit $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique complet et $f:\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{X}$ une fonction telle que :*

$$\exists k\in[0,1[,\ \forall(x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X},\qquad d(f(x),f(y))\leq kd(x,y), \tag{4}$$

alors f admet un point fixe unique dans $\mathbb{X}$, c'est à dire

$$\exists! x_0\in X,\qquad f(x_0)=x_0. \tag{5}$$

Bibliographie

Bibliographie

[1] E. Ait Dads, K. Ezzinbi, and O. Arino, *Pseudo almost periodic solutionsfor some differential equations in a Banach space*, Nonlinear Analysis,Theory, Methods and Applications, **28**, no 7, (1997), 1141-1155.

[2] E. Ait Dads, B. Es-Sebbar, K. Ezzinbi, and M. Ziat, *Behavior of bounded solutions for some almost periodic neutral partial functional differential equations.*, Math. Methods Appl. Sci. **40** (2017), no. 7, 2377–2397 (English).

[3] J. Albrycht, *The Theory of Marcinkiewicz Orlicz Spaces*, Dissertationes Math, (1962).

[4] L. Amerio, and G. Prouse, *Almost-periodic functions and functional equations*, Van Nostrand Reinhold Co, New York-Toronto, Ont.-Melbourne, (1971). MR 0275061.

[5] J. Andres, A. M. Bersani, and R. F. Grande, *Hierarchy of almost-periodic function spaces*, Rend. Mat. Appl., VII. Ser, **26** (2006), no. 2, 121–188 (English).

[6] J. Andres, and D. Pennequin, *On Stepanov almost-periodic oscillations and their discretizations*, J. Difference Equ. Appl. **18** (2012), no. 10, 1665–1682 (English).

[7] ______, *On the nonexistence of purely Stepanov almost-periodic solutions of ordinary differential equations*, Proc. Am. Math. Soc, **140** (2012), no. 8, 2825–2834 (English).

[8] C. Bardaro, J. Musielak, and G. Vinti, *Nonlinear Integral Operators and Applications,* Walter de Gruyter, Berlin-New-York, (2003).

[9] A.S. Besicovitch, *Almost Periodic Functions,* Dover Publications, Inc. New-York (1954).

[10] J. Blot, P. Cieutat, and K. Ezzinbi, *Measure theory and pseudo almost automorphic functions : new developments and applications*, Nonlinear Anal **75** (2012), no. 4, 2426 – 2447.

[11] ______, *New approach for weighted pseudo-almost periodic functions under the light of measure theory, basic results and applications*, Appl. Anal. **92** (2013), no. 3, 493–526.

[12] J. Blot, P. Cieutat, G.M. N'Guérékata, and D. Pennequin, *Superposition operators between various almost periodic function spaces and applications*, Commun. Math. Anal, 6 (2009), no. 42-70.

[13] S. Bochner, *Abstrakte Fastperiodische Funktionen,* Acta Math. 61, (1933,) no. 149-184.

[14] F. Bedouhene, N. Challali, O. Mellah, P. Raynaud de Fitte, and M. Smaali, *Almost periodic solution in distribution for stochastic differential equations with Stepanov almost periodic coefficients*, ArXiv e-prints (2017).

[15] J.P. Bertrandias, *Espace de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p*, Bull. Soc. Math. de France, (1966).

[16] H. Bohr, *Almost periodic functions* Chelsea, New York, (1956).

[17] H. Bohr, *Zur Theorie der fast periodischen Funktionen. I. Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen,* Acta math., v. 45, (1924,) no. 29–127.

[18] H. Brezis, P.G Ciarlet, and J.L Lions, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications,* Dunod Paris., 91 (1999).

[19] D. Bugajewski, and A. Nawrocki, *Some remarks on almost periodic functions in view of the Lebesgue measure with applications to linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. **42** (2017), no. 2, 809–836 (English).

[20] S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, Dissertationes Math. no. 356 (1996).

[21] M. Cichoń, and M.M.A. Metwali, *On quadratic integral equations in Orlicz spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **387** (2012), no. 1, 419 – 432.

[22] P. Cieutat, *Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded or almost periodic solutions for differential systems with convex potential*, Differential Integral Equations 18 (2005), no. 361-378.

[23] P. Cieutat, *Nemytskii operators between Stepanov almost periodic or almost automorphic function spaces.*, arXiv preprint arXiv :1910.09389 (2019).

[24] P. Cieutat, S. Fatajou, and G.M. N'Guérékata, *Composition of pseudo almost periodic and pseudo almost automorphic functions and applications to evolution equations*, Appl. Anal. no. 89 (2010), 11-27.

[25] C. Corduneanu, *Almost periodic functions*, Interscience Publishers [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1968, With the collaboration of N. Gheorghiu, and V. Barbu, Translated from the Romanian by Gitta Bernstein and Eugene Tomer, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 22. MR 0481915 (58 (2006)).

[26] L.I. Danilov, *Measure-valued almost periodic functions*, Math. Notes **61** (1997), no. 1, 48–57 (English).

[27] L.I. Danilov, *Measure-valued almost periodic functions and almost periodic selections of multivalued mappings*, Mat. Sb. **188** (1997), no. 10, 3–24. MR 1485446 (99e :42016)

[28] L.I. Danilov, *On the uniform approximation of a function that is almost periodic in the sens of Stepanov*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat (1998), no. 5, 10 – 18.

[29] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Ruzicka, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Springer, (2011).

[30] T. Diagana, *Weighted pseudo almost periodic functions and applications*, C. R. Math. (10), (2006) no. 343, 243–646.

[31] T. Diagana, *Weighted pseudo almost periodic functions and applications*, C. R. Math. (10), (2006) no. 343, 243–646.

[32] T. Diagana, *Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces*, Springer, Cham Heidelberg New York Dordrecht London, (2010).

[33] T. Diagana, *Stepanov-like pseudo-almost periodicity and its applications to some nonautonomous differential equations.*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods **69** (2008), no. 12, 4277–4285 (English).

[34] T. Diagana, and M. Zitane, *Weighted Stepanov-like pseudo-almost periodic functions in lebesgue space with variable exponents* $l^{p(x)}$, Afr. Diaspora J. Math. (N.S.) **15** (2013), no. 2, 56–75.

[35] T. Diagana, and M. Zitane, *Stepanov-like pseudo-almost automorphic functions in Lebesgue spaces with variable exponents* $L^{p(x)}$, Electron. J. Differ. Equ. (2013), 20 (English).

[36] T. Diagana, and M. Zitane, *Stepanov-Like Pseudo-Almost Periodic Functions in Lebesgue Spaces with Variable Exponents* $L^{p(x)}$, Springer International Publishing, (2014), 295–314. (English).

[37] H.S. Ding, W. Long, and G.M. N'Guérékata, *Almost periodic solutions to abstract semilinear evolution equations with stepanov almost periodic coefficients.*, J. Comput. Anal. Appl. **13** (2011), no. 2, 231–242 (English).

[38] M.A. Diop, K. Ezzinbi, and M.M Mbaye, *Measure theory and* S^2*-pseudo almost periodic and automorphic process : application to stochastic evolution equations.*, Afr. Mat. **26** (2015), no. 5-6, 779–812 (English).

[39] Y. Djabri, F. Bedouhene, and F. Boulahia, *Further Properties of Stepanov-Orlicz Almost Periodic functions.*, (To appear in Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae Journal).

[40] F. Bedouhene, Y. Djabri, and F. Boulahia, *Ergodicity in Stepanov-Orlicz Spaces*, (To appear in Annals of Functional Analysis Journal).

[41] K. Engel, R. Nagel, *One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer verlag, (1999).

[42] B. Es-Sebbar, K. Ezzinbi, *Stepanov ergodic perturbations for some neutral partial functional differential equations*, Math. Methods Appl. Sci. **39** (2016), no. 8, 1945–1963 (English).

[43] X. Fan, and D. Zhao, *On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), no. 2, 424-446 (English).

[44] J. Favard, *Sur les équations differentielles linéaires à coefficients presque-périodiques*, C. R. Acad. Sci., Paris Vol 182 (1926), no. 263, 1122-1124.

[45] J. Favard, *Sur les équations differentielles linéaires à coefficients presque-périodiques*, Acta Math. Vol 51 **263** (1927), no. 263, 31-81 .

[46] P. Franklin, *Almost periodic recurrent motions*, Mathematische Zeitschrift. **30** (1929), no. 30, 325-331(English).

[47] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques continues*, C. R. Acad. Sci. Paris 1941, no. 213, 520-522. (French).

[48] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques*, Revue Sci. (Rev. Rose. Illus.) (1941), no. 79, 341-354. (French).

[49] A. M. Fink, "*Almost -Periodic Differential Equations* "Lecture Notes in Mathematics, vol. 377, Springer Verlag, New York, Berlin (1974).

[50] R. S. Guter, L. D. Kudryavtsev, and B. M. Levitan, *Elements of the Theory of Functions,* Translated by H. F. Cleaves. Translation edited by I. N. Sneddon. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics. Vol. 90).Oxford-London-Edinburgh-New York-Toronto-Paris-Braunschweig : Pergamon Press. XII, 219 p. (1966).

[51] B. He, and Q. Wang, *On completeness of the space of weighted Stepanov-like pseudo almost automorphic (periodic) functions.*, J. Math. Anal. Appl. **465** (2018), no. 2, 1176–1185 (English).

[52] T.R. Hillmann, *Besicovitch-Orlicz spaces of almost periodic functions*, Real and stochastic analysis, Wiley Ser. Probab. Math. Stat. Probab. Math. Stat. 119-167 (1986).

[53] Z. Hu, *Contributions to the Theory of Almost Periodic Differential Equations*, PhD Thesis, Carleton Univ, Ottawa (Ontario, Canada), (2001).

[54] Z. Hu, and A.B. Mingarelli, *On a theorem of Favard*, Proc. Amer. Math. Soc. (2004), **132**, 417–428 (English).

[55] Z. Hu, *Boundeness and Stepanov's almost periodicity of solutions*, Electron. J. Differ. Equ, 35 (2005), no. 35, 1–7 (English).

[56] Z. Hu, and A.B. Mingarelli, *Favard's theorem for almost periodic processes on Banach space,* Proc. Dynam. Syst. Appl. (2005), no. 14, 615–631 (English).

[57] Z. Hu, and A.B. Mingarelli, *Bochner's theorem and Stepanov almost periodic functions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **187** (2008), no. 4, 719–736 (English).

[58] H. Hudzik, *Uniform convexity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg's norm*, Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math. **23** (1983), 21–32 (English).

[59] P. Kasprzak, A. Nawrocki, and J. Signerska-Rynkowska, *Integrate-and-fire models with an almost periodic input function*, Journal of Differential Equations **264** (2018), no. 4, 2495 – 2537.

[60] M.A. Khamsi and W.M. Kozlowski, *Fixed point theorem in modular Function Spaces*, Birkhauser, (2015).

[61] W.M. Kozlowski, *Modular function spaces*, Dekker, New York, (1988) (English).

[62] M.A. Krasnoselskii, and Ya.B. Rutickii, *Convex function, and Orlicz spaces*, P. Noodhoff Ltd, Groningen, (1961).

[63] A. Kufner, O. John, and S. Fučík, *Function spaces. From the Czech*, Monographs and Textsbooks on Mechanics of Solids and Fluids. Mechanics : Analysis. Leyden : Noordhoff International Publishing. Prague : Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences. XV, 454 p. Dfl, 120.00 (1977).

[64] B.M. Levitan, *Almost-Periodic Functions*, Moscow (1953). (Russian)

[65] B.M. Levitan, and V.V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge etc. : Cambridge University Press. XI, 211 p. sterling 17.50 (1982).

[66] Z. Lin, *Theory of Linear Systems*, Annals of Differential Equations. **6**, no. 2, 153–215 (1990).

[67] W. Long, and H.S. Ding, *Composition theorems of Stepanov almost periodic functions and Stepanov-like pseudo-almost periodic functions*, Adv. Difference Equ. **2011**, no.12 (English).

[68] W.A.J. Luxemburg, *Banach function spaces*, PhD dissertation, Delft 70 p., (1955).

[69] Md. Maqbul, and D. Bahuguna, *Almost periodic solutions for Stepanov-almost periodic differential equations*, Differential Equations and Dynamical Systems, Differ. Equ. Dyn. Syst, **22** (2014), no. 3, 251–264 (English).

[70] M. Morsli, *Some properties of the Stepanoff-Orlicz space.* Functiones Et Approximatio Commentarii Mathematici (1994), no 22, p. 85.

[71] M. Morsli, *On some convexity properties of the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions.* Commentationes Mathematicae-Prace Matematyczne-Seria 1-Rocz Polsk Towarz Matematycz 34 (1994) : 137-152.

[72] M. Morsli, and F. Bedouhene, *On the strict convexity of the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions*, Revista Matematica Complutense 16, Num.2 (2003), 399-415.

[73] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture notes in mathematics, Springer, (1983).

[74] A.A. Pankov, *Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations*, Dordrecht etc. : Kluwer Academic Publishers, (1990) (English).

[75] L. Radová, *Theorems of Bohr-Neugebauer-type for almost-periodic differential equations*, Math. Slovaca **54** (2004), no. 2, 191–207 (English).

[76] H.X. Li, and L.L Zhang, *Stepanov-like pseudo-almost periodicity and semilinear differential equations with uniform continuity*, Result. Math. **59** (2011), no. 1-2, 43–61 (English).

[77] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, (1987).

[78] A.S. Rao, *On the Stepanov almost periodic solution of a second order operator differential equation*, Proc. Edinb. Math. Soc. (1975), **19** 3, 261–263.

[79] A.S. Rao, and W. Hengartner, *On the existence of a unique almost periodic solution of an abstract differential equation* J. Lond. Math. Soc. **2** no. 8, 577–581 (1974)

[80] M.M. Rao, and Z.D. Ren, *Theory of Orlicz spaces, Marcel Dekker*, Inc. New-York, (1991).

[81] M. Ben Salah, K. Ezzinbi, and A. Rebey, *Pseudo-almost periodic and pseudo-almost automorphic solutions to evolution equations in Hilbert spaces*, Mediterr. J. Math, **13** (2016), no. 2, 703–717 (English).

[82] G. R. Sell, Y. You, *Dynamics of evolutionary equations*, Springer, New York, (2002).

[83] W. Stepanoff, *Über einige verallgemeinerungen der fast periodischen funktionen*, Mathematische Annalen **95** (1926), no. 1, 473–498.

[84] S. Stoiński, *Almost periodic functions in the Lebesgue measure*, Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math, **34** (1994), no. 34, 189–198 (English).

[85] S. Stoiński, *Some remarks on Bohr's almost periodic functions and Stepanov's almost periodic functions*, Funct. Approx. Comment. Math. (1996), no. 24, 53–58. MR 1453448

[86] S. Stoiński, *On compactness of almost periodic functions in the Lebesgue measure*, Fasc. Math. (1999), no. 30, 171–175 (English).

[87] M. Tarallo, *A Stepanov version for Favard theory*, Arch. Math. (Basel) (2008),no. 90. 53–59 (English).

[88] Z. Yan, and H. Zhang, *Existence of Stepanov-like square-mean pseudo almost periodic solutions to partial stochastic neutral differential equations*, Ann. Funct. Anal. AFA **6** (2015), no. 1, 116–138 (English).

[89] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Applied Mathematical Sciences. Vol. 14. New York - Heidelberg Berlin : Springer-Verlag. VII, 233 p. DM 23.30 ; 10.10, (1975).

[90] A.C. Zaanen, *Some remarcs about the definition of an Orlicz space, in Measure theory* , New York - Heidelberg Berlin : Springer-Verlag (Oberwolfach), Lecture Notes in Math., No. 945, Spinger- Verlag, Berlin, (1982), 261-268.

[91] C. Zhang, *Pseudo Almost Periodic Functions And Their Applications*, J. Math. Anal. Appl. Journal of Mathematical Analysis and Applications (1992) (English).

[92] C. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of some differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **181** (1994), no. 1, 62–76 (English).

[93] C. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of some differential equations. II*, Journal of Mathematical Analysis and Applications J. Math. Anal. Appl. **192** (1995), no. 2, 543–561 (English).

[94] S. Zaidman, *An existence result for Stepanoff almost-periodic differential equations*, Can. Math. Bull, **14** (1971), 551–554 (English).

Résumé Dans cette thèse, nous avons caractérisé le concept de fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques introduit par Hillmann via la transformée de Bochner, ensuite nous avons introduit une nouvelle classe de fonctions appelée fonctions Stepanov-Orlicz pseudo presque périodiques qui généralise notamment la pseudo presque périodicité de Stepanov introduite par Diagana.
Certaines propriétés structurelles de ces fonctions ont été examinées.
Une attention particulière a été accordée à l'opérateur de Nemytskii entre les espaces de fonctions Stepanov-Orlicz (pseudo) presque périodiques.

Enfin, nous avons établi un résultat d'existence et d'unicité de la solution "mild" (pseudo) presque périodique à une classe d'équations d'évolution semi-linéaires à coefficients Stepanov-Orlicz (pseudo) presque périodique.

Abstract
In this thesis we characterized the concept of Stepanov-Orlicz almost periodic functions introduced by Hillmann in terms of Bochner transform. In addition we introduced a new class of functions called Stepanov-Orlicz pseudo almost periodic functions which generalizes in a natural way the classical Stepanov pseudo almost periodic spaces introduced by Diagana.
Some structural properties of these functions are investigated.
A particular attention is paid to the Nemytskii operator between spaces of Stepanov-Orlicz (pseudo) almost periodic functions.
Finally, we established an existence and uniqueness result of Bohr almost periodic mild solution to a class of semilinear evolution equations with Stepanov-Orlicz (pseudo) almost periodic forcing term.

Résumé

Dans cette thèse, nous avons caractérisé le concept de fonctions Stepanov-Orlicz presque périodiques introduit par Hillmann via la transformée de Bochner, ensuite nous avons introduit une nouvelle classe de fonctions appelée fonctions Stepanov-Orlicz pseudo presque périodiques qui généralise notamment la pseudo presque périodicité de Stepanov introduite par Diagana. Certaines propriétés structurelles de ces fonctions ont été examinées. Une attention particulière a été accordée à l'opérateur de Nemytskii entre les espaces de fonctions Stepanov-Orlicz (pseudo) presque périodiques.

Enfin, nous avons établi un résultat d'existence et d'unicité de la solution "mild" (pseudo) presque périodique à une classe d'équations d'évolution semi-linéaires à coefficients Stepanov-Orlicz (pseudo) presque périodique.

Abstract

In this thesis we characterized the concept of Stepanov-Orlicz almost periodic functions introduced by Hillmann in terms of Bochner transform. In addition we introduced a new class of functions called Stepanov-Orlicz pseudo almost periodic functions which generalizes in a natural way the classical Stepanov pseudo almost periodic spaces introduced by Diagana. Some structural properties of these functions are investigated. A particular attention is paid to the Nemytskii operator between spaces of Stepanov- Orlicz (pseudo) almost periodic functions.

Finally, we established an existence and uniqueness result of Bohr almost periodic mild solution to a class of semilinear evolution equations with Stepanov-Orlicz (pseudo) almost periodic forcing term.