RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI OUZOU

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master
en
Mathématiques
Option
Analyse Mathématique et Applications

Thème

Etude asymptotique d'un problème de transmission dépendant d'un petit paramètre.

Réalisé par :

BELKADI Nabila

Dirigé par

M^{me} **RAHMANI Leila**

Devant le jury d'examen composé de :

M^{me} **TALEB Lynda**	**M.C.B**	U.M.M.T.O	**Présidente**
M^{me} **RAHMANI Leila**	**Professeur**	U.M.M.T.O	**Rapporteur**
M^{r} **MENGUELTI Ali**	**M.A.A**	U.M.M.T.O	**Examinateur**

Promotion : 2019/2020.

Remerciements

Je remercie avant tout, le bon Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté, afin d'aboutir à ce modeste travail.

Je tiens à exprimer mon profond respect et ma reconnaissance à ma promotrice, Madame **Rahmani. L** d'avoir proposé et dirigé ce mémoire et aussi pour l'effort fourni, ses encouragements, et ses précieux conseils tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Il est d'un agréable devoir d'exprimer mes sentiments de reconnaissance aux enseignants et personnel du département Mathématiques ainsi qu'a tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

Et enfin mes vifs remerciements vont également à M^{me}. L. Taleb et M^{r}. A. Menguelti pour l'honneur qu'ils me font en jugeant ce travail.

Merci infiniment à tous.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

Aux deux être les plus chers au monde, ma mère et mon père, source de tendresse et sacrifice, qui m'ont soutenue depuis l'enfance à suivre le chemin du savoir, que Dieu les protège ;

A mon très chère frère Younes.

A ma grand mère qui a passé sa vie, les mains levéé me souhaitant la grâce et la bénédiction.

A mes très chères amies.

A tous ceux ou celles qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail ;

A toute la promotion 2019/2020 ;
A ceux que j'aime et m'aiment.

Nabila

Table des matières

Introduction

Plusieurs phénomènes physiques, biologiques ou mécaniques sont modélisés par des problèmes aux limites qui font intervenir un ou plusieurs petits paramètres. Ce paramètre est souvent de nature géometrique : couches minces, structures minces..etc. La simulation numérique de ce type de problèmes par les méthodes classiques (méthode des éléments finis,..etc) peut s'avérer trés difficile car elle nécessite une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur du domaine mince, ce qui rend les calculs trés couteux et parfois peu précis. L'alternative consiste alors à utiliser les méthodes asymptotiques pour dériver des modèles approchés plus simples à analyser numériquement. Plus précisément, on cherche des problèmes qui ne font pas intervenir les parties minces mais dont les solutions sont proches des solutions des problèmes initiaux.

Dans ce travail, on s'intèresse à l'étude asymptotique d'un problème aux limites posé sur un multi-domaine composé de la jonction de domaines minces. Plus précisément, on étudie la propagation de la chaleur dans une multi-structure mince en forme de "L" et on dérive, en utilisant l'analyse asymptotique, un modèle limite de jonction $1D$-$1D$. Ce problème approché ainsi obtenu est posé sur un multi-domaine de dimension moindre dans les parties minces. Il présente l'avantage d'être plus simple et plus économique pour la résolution numérique. Notons enfin, que cette étude a été reprise de la référence [2], où plusieurs modélisations asymptotiques de problèmes variationnels dans des multi-domaines ont été menées.

Ce mémoire est composé de deux chapitres :

Dans le chapitre 1, nous introduisons quelques notions élementaires d'analyse fonctionnelle nécessaires pour la suite de l'étude.

Dans le chapitre 2, nous présentons le problème aux limites considéré, étudions l'existence et l'unicité de la solution variationnelle et menons une analyse asymptotique pour obtenir le problème limite.

Chapitre 1

Rappels

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats classiques d'analyse fonctionnelle utiles pour aborder la suite.

1.1 Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.1. [1]. *L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est défini par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2 \ldots N \right\},$$

où les dérivées $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ sont prises au sens des distributions.
Il est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{i=n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}, \tag{1.1}$$

qui est équivalente à la norme suivante :

$$(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{i=n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} ; \forall\ 1 \leq p < +\infty.$$

Pour $P = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est noté $H^1(\Omega)$ et il est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle_{L^2},$$

la norme associée étant :

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Théorème 1.1. [1]. *L'espace $H^1(\Omega)$, muni de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Voir [1].

Définition 1.2. [5]. *Soit $m \geq 2$ un entier et soit p un réel, $1 \leq p \leq +\infty$. On définit l'éspace de sobolev :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i = 1, 2 \ldots N \right\},$$

et on pose :

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

où :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

est la dérivée de u au sens des distribustions. $(\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m).)$.

Théorème 1.2. [6]. *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$, muni de la norme $\|.\|_{W^{m,p}}$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Voir [6].

Théorème 1.3. *(De Trace). Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^∞, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On définit l'application trace :*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$
$$v \to \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}.$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\|v\|_{L^2(\partial(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Proposition 1.1. [7]. *(Inégalité de Poincaré).*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans au moins une direction de l'espace, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout fonction $v \in H^1_0(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Voir [7].

1.2 Convergence forte, convergence faible, convergence faible-$*$

1.2.1 Convergence forte

Définition 1.3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H, et $x \in H$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x et l'on note $x_n \to x$ si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_H = 0,$$

$\|.\|$ étant la norme associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle_H$.

1.2.2 Convergence faible

Définition 1.4. [1]. *Soit H un espace de hilbert et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$ (x est la limite faible de la suite (x_n))et l'on note $x_n \rightharpoonup x$ si :*

$$\forall y \in H, \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H.$$

Proposition 1.2. *Si la limite faible d'une suite de H existe, elle est unique.*

1.2.3 Convergence faible-$*$

Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach, X' son dual (topologique) et $\langle .,.\rangle$ dans la dualité entre X' et X.

Définition 1.5. [1]. *On dit qu'une suite $(x'_n)_{n\in\mathcal{N}}$ dans X' converge vers x' faible-$*$ et on note $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ si :*

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle x'_n, x\rangle = \langle x', x\rangle.$$

Proposition 1.3. *Si la limite faible-$*$ existe, elle est unique.*

Théorème 1.4. [1]. *Soit X un espace de Banach, X' son dual. Soit $x_n \subset X$ et $x'_n \subset X'$. On a alors :*

- • *Si $x_n \rightharpoonup x$ dans X et $x'_n \to x'$ dans X', alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x'_n, x_n\rangle = \langle x', x\rangle,$$

- • *Si $x_n \to x$ dans X et $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ dans X', alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x'_n, x_n\rangle = \langle x', x\rangle.$$

1.3 Injection de Sobolev

Théorème 1.5. *(Rellich-kondrachov). On suppose que Ω est borné et de classe $\mathcal{C}^1$. On a :*

1. *Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,*
2. *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q$, $\forall q \in [1, +\infty[$,*
3. *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,*

avec injections compactes.
En particulier, pour $p = 2$ *et* $q = 2$ *on a* $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, *ce qui donne :*

$$D(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega).$$

Démonstration. Voir[1].

1.4 Espace $L^p(a, b; X)$

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$, X' son dual (topologique).

Définition 1.6. [3].

- *Pour* $p \in [1, +\infty[$, *on note* $L^p(a, b; X)$ *l'espace vectoriel des fonctions* $f : [a, b] \mapsto X$ *qui sont mesurable et telle que* $\int_a^b \|f\|_X^p dt < \infty$, *qu'on munit de la norme :*

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = (\int_a^b \|f(x)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Pour* $p = \infty$, *on note* $L^\infty(a, b; X)$ *l'espace vectoriel des fonctions* $f : [a, b] \mapsto X$ *mesurable et essentiellement bornées sur* $[a, b]$, *i.e pour lesquelles il existe une constante* C *telle que*

$$\|f(x)\|_X \leq C, \quad p.p \; dans [a, b].$$

  Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{t\in[a,b]} ess \|f(t)\|_X < +\infty.$$

Lemme 1.1. [2]. *Soient* V *et* H *deux espaces de Hilbert vérifiant :*

$$V \subset H \equiv H' \subset V',$$

où H' *et* V' *sont les espaces dual de* H *et* V *respectivement.*
Si $u \in L^2(0, T; V)$ *et* $u' \in L^2(0, T; V')$, *alors* u *est égale presque partout à une fonction continue définie de* $]0, T[$ *dans* H. *Nous avons :*

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2 < u', u > .$$

Démonstration. Voir [2].

Théorème 1.6. [3]. *L'espace $H^1(a,b;V;V')$ est un espace de Hilbert pour la norme :*

$$\|u\|^2_{H^1(a,b;V;V')} = \|u\|^2_{L^2(a,b;V)} + \|u'\|^2_{L^2(a,b;V')}.$$

Démonstration. Voir [3].

Proposition 1.4. [3]. *Pour $u \in H^1(a,b;V;V')$, $v \in V$, on a :*

$$\frac{d}{dt} < u(.), v >_V = < u'(.), v >_{V',V} \text{ dans } \mathcal{D}'(]a,b[).$$

Démonstration. Voir [3].

Théorème 1.7. [2]. *Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$ et la norme $|.|$. On identifie H et son dual. Soit V un autre espace de Hilbert de norme $\|.\|$.*
On suppose que :

$$V \subset H \subset V'$$

Soit $T > 0$ fixé, pour presque tout $t \in [0,T]$ on se donne une forme bilinéaire $a(t;u,v)$: $V \times V \to \mathbb{R}$ vérifiant les proprietés

1. *La fonction $t \mapsto a(t;u,v)$ est mesurable $\forall u, v \in V$*
2. $$a(t;u,v) \leq M\|u\|\|v\| \text{ p.p. } t \in [0,T], \forall u, v \in V$$
3. $$a(t;u,v) \geq \alpha\|v\|^2 - \beta|v|^2 \ \forall v \in V \text{ p.p. } t \in [0,T]$$

   où $\alpha > 0$, β et C sont des constantes, $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0,T;V')$. Alors il existe une fonction unique u telle que :

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V) \cap C(0,T;H) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V') \\ \frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle + a(t;u,v) = \langle f(t), v\rangle_{V',V}, \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0,T] \\ u(t=0) = u_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Lemme 1.2. [2].*(lemme de Gronwall). Soit une fonction* $g \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ *intégrable telle que :*

$$g(t) \leq a \int_0^t g(s)ds + b,$$

Alors on a :

$$\forall t \in [0,T], \quad g(t) \leq b \exp{(at)}.$$

Chapitre 2

L'équation de la chaleur dans un domaine mince : Analyse asymptotique

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse asymptotique de l'équation de la chaleur dans un multi-domaine mince. Plus présisément, nous établirons l'existence, l'unicité de la solution et le comportement asymptotique de u^ε.

2.1 Position du problème

Soit $\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^1 \cup \Omega_\varepsilon^2$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, constitué par la jonction de deux structures minces Ω_ε^1 et Ω_ε^2, d'épaisseurs ε, ε étant un petit paramètre positif destiné à tendre vers 0. Plus précisement, on suppose que Ω_ε est un multi-domaine en L, formé par la réunion des deux rectangles minces :

$$\Omega_\varepsilon^1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < \varepsilon \right\},$$

$$\Omega_\varepsilon^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x_1 < \varepsilon,\ 0 < x_2 < 1 \right\},$$

on désigne par Γ_ε le bord latéral de Ω_ε défini par :

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^1 \cup \Gamma_\varepsilon^2,$$

où

$$\Gamma_\varepsilon^1 = \partial\Omega_\varepsilon \cap \{x_1 = 1\}\ \ et\ \Gamma_\varepsilon^2 = \partial\Omega_\varepsilon \cap \{x_2 = 1\},$$

et par S_ε la partie du bord définie par :

$$S_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \backslash \Gamma_\varepsilon.$$

Notons que $\partial\Omega_\varepsilon$ désigne la frontière de l'ouvert complet Ω_ε, (voir figure 2.1).

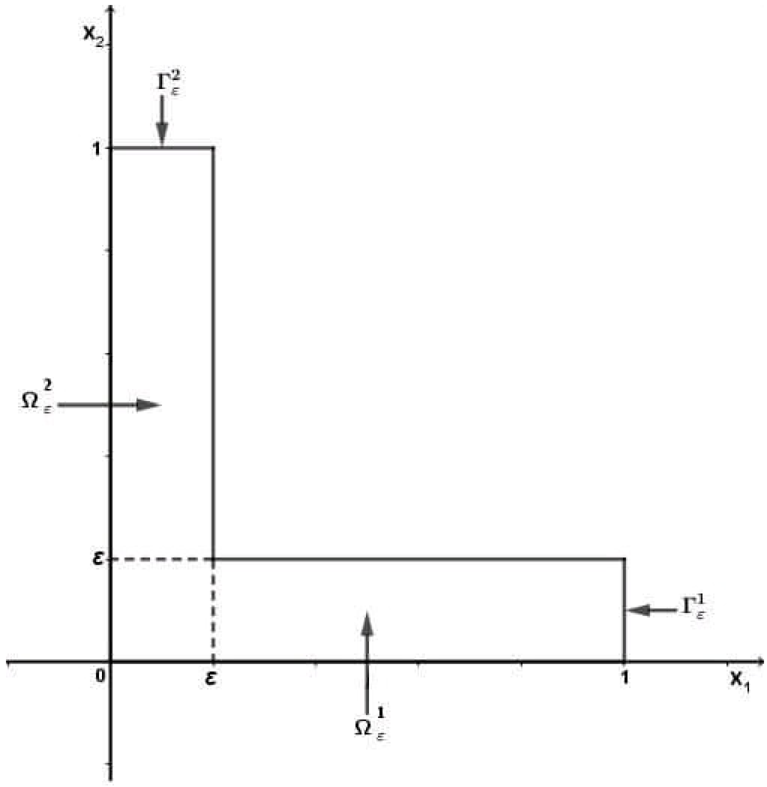

FIG. 2.1 – Le domaine Ω_ε

Considérons pour la suite de l'étude, l'équation de la chaleur posée sur le domaine Ω_ε :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u^\varepsilon & = f^\varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \times]0, T[, \\ u^\varepsilon & = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\varepsilon \times]0, T[, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \eta} & = 0 \quad \text{sur} \quad S_\varepsilon \times]0, T[, \\ u^\varepsilon_{|t=0} & = u_0^\varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.1}$$

La fonction$f^\varepsilon \in L^2(0, T; (H^1_{\Gamma_\varepsilon})')$ et $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.

2.2 Formulation variationnelle du problème (2.1)

On multiplie la première équation du problème (2.1) par une fonction test $v^\varepsilon(x)$ qui ne dépend pas du temps et on intègre sur Ω_ε. On obtient alors :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{du^\varepsilon}{dt}\, v^\varepsilon dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u^\varepsilon v^\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon dx.$$

A cause de la condition de Dirichlet, on impose à ce que v^ε s'annule sur le bord de Ω_ε, en utilisant la formule de Green (formule d'intégration par parties), on obtient :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{du^\varepsilon}{dt}(t,x)\, v^\varepsilon(x)dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(t,x)\nabla v^\varepsilon(x)dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon(t,x)v^\varepsilon(x)dx. \tag{2.2}$$

Comme Ω_ε et v^ε ne varient avec le temps t, alors on peut récrire l'équation (2.2) sous la forme

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon(t,x)\, v^\varepsilon(x)dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(t,x)\nabla v^\varepsilon(x)dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon(t,x)v^\varepsilon(x)dx. \tag{2.3}$$

Il est claire que l'espace naturel pour la fonction test v^ε est $H^1_{\Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)$. On va considérer la solution $u^\varepsilon(t,x)$ comme une fonction du temps t à valeurs dans un espace de fonction défini sur Ω_ε. Plus précisément, pour $t > 0$, on suppose que u^ε est donné par :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon :]0,T[&\to H^1_{\Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon) \\ t &\to u^\varepsilon(t), \end{aligned}$$

et on continue à noter $u^\varepsilon(x,t)$ la valeur $u^\varepsilon(x)(t)$. Soit a(.,.) la forme bilinéaire définie par :

$$a(w^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla w^\varepsilon \nabla v^\varepsilon dx.$$

La formulation variationnelle de notre problème s'écrit :

$$\begin{cases} Trouver\ u^\varepsilon \in L^2(]0,T[, H^1_{\Gamma_\varepsilon})\ telle\ que : \\ \frac{d}{dt}\langle u^\varepsilon(t), v^\varepsilon\rangle_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + a(u^\varepsilon(t), v^\varepsilon) = \langle f^\varepsilon(t), v^\varepsilon\rangle_{(H^1_{\Gamma_\varepsilon})', H^1_{\Gamma_\varepsilon}},\ \forall v^\varepsilon \in H^1_{\Gamma_\varepsilon},\ 0 < t < T, \\ u^\varepsilon(t=0) = u^\varepsilon_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

2.3 Existence et unicité de la solution

Dans ce qui suit, on note :

$$V^\varepsilon = H^1_{\Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon) \; et \; H^\varepsilon = L^2(\Omega_\varepsilon).$$

L'existence et l'unicité de la solution est assurée par le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit $u_0^\varepsilon \in H^\varepsilon$, $f^\varepsilon \in L^2(0,T;(V^\varepsilon)')$. Alors le problème variationnel :*

$$\begin{cases} Trouver\ u^\varepsilon \in L^2(]0,T[, H^1_{\Gamma_\varepsilon})\ telle\ que : \\ \frac{d}{dt}\langle u^\varepsilon(t), v^\varepsilon\rangle_{H^\varepsilon} + a(u^\varepsilon(t), v^\varepsilon) = \langle f^\varepsilon(t), v^\varepsilon\rangle_{(V^\varepsilon)', V^\varepsilon},\ \forall v^\varepsilon \in V^\varepsilon,\ 0 < t < T, \\ u^\varepsilon(t=0) = u_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{2.5}$$

admet une unique solution u^ε. De plus, $u^\varepsilon \in L^\infty(0,T;V^\varepsilon)$ et on a les estimations :

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^\varepsilon)} \le C(\|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')} + \|u_0^\varepsilon\|_{H^\varepsilon}), \tag{2.6}$$

$$\int_0^T a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))dt \le C(\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')} + \|u_0^\varepsilon\|^2_{H^\varepsilon}), \tag{2.7}$$

où la constante C ne dépend que de α, β (avec $\alpha > 0$ et β des constante), et T.

Démonstration :

La continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$:

Pour démontrer la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On obtient

$$\begin{aligned} |a(u^\varepsilon(t), v^\varepsilon)| &= |\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(t,x)\nabla v^\varepsilon(x)dx| \\ &\le \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon(t,x)||\nabla v^\varepsilon(x)|dx \\ &\le (\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon(t,x)|^2dx)^{1/2}(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v^\varepsilon(x)|^2dx)^{1/2} \\ &\le \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Par suite, on peut écrire :

$$|a(u^\varepsilon(t), v^\varepsilon)| \leq \|u^\varepsilon(t)\|_{V^\varepsilon} \|v^\varepsilon\|_{V^\varepsilon},$$

d'où la continuité de $a(.,.)$.

La coercivité de la forme bilinéaire a :
Pour démontrer la coercivité de a, on utilise l'inégalité de Poincaré dans $H^1_{\Gamma_\varepsilon}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon(t))^2 dx \\ &= \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

d'autre part, on écrit

$$\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \| u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq c_1^2 \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq (c_1^2 + 1) \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \geq \frac{1}{c_1^2 + 1} \|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

i,e

$$a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \geq \alpha \|u^\varepsilon(t)\|^2_{V^\varepsilon}, \tag{2.8}$$

d'où la coercivité de $a(.,.)$, avec $\alpha = \frac{1}{c_1^2+1}$.
Pour démontrer les estimastions (2.6) et (2.7) données par le théorème ci-dessus, on pose $v^\varepsilon = u^\varepsilon(t)$ comme fonction test dans (2.5), on aura

$$\frac{d}{dt} \langle u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t) \rangle_{H^\varepsilon} + a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) = \langle f^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t) \rangle_{(V^\varepsilon)', V^\varepsilon}, \quad p.p\ t \in [0, T].$$

En utilisant le lemme (1.1), nous pouvons écrire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon} + a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) = \langle f^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)\rangle_{(V^\varepsilon)', V^\varepsilon}, \quad p.p\ t \in [0, T]. \tag{2.9}$$

D'autre part, nous avons

$$\langle f^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)\rangle \leq \|f^\varepsilon(t)\|_{(V^\varepsilon)'}\|u^\varepsilon(t)\|_{V^\varepsilon},$$

et en combinant avec l'inégalité (2.8), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon} + \alpha\|u^\varepsilon(t)\|^2_{V^\varepsilon} \leq \|f^\varepsilon(t)\|_{(V^\varepsilon)'}\|u^\varepsilon(t)\|_{V^\varepsilon}, \ \ p.p \in [0, T].$$

Nous povons appliquer l'inégalité de Young :

$$a.b \leq \frac{\alpha}{2}a^2 + \frac{1}{2\alpha}b^2;\ \forall a, b \in \mathbb{R},$$

pour obtenir

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{V^\varepsilon}\|f^\varepsilon(t)\|_{(V^\varepsilon)'} \leq \frac{\alpha}{2}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{V^\varepsilon} + \frac{1}{2\alpha}\|f^\varepsilon(t)\|^2_{(V^\varepsilon)'}\ ,\ p.p\ t \in [0, T],$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon} + \alpha\|u^\varepsilon(t)\|^2_{V^\varepsilon} \leq \frac{\alpha}{2}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{V^\varepsilon} + \frac{1}{2\alpha}\|f^\varepsilon(t)\|^2_{(V^\varepsilon)'},$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon} + \frac{\alpha}{2}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{V^\varepsilon} \leq \frac{1}{2\alpha}\|f^\varepsilon(t)\|^2_{(V^\varepsilon)'}.$$

En intègrant sur l'intervalle $[0, t]$, on obtient

$$\frac{1}{2}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon} + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|^2_{V^\varepsilon}ds \leq \frac{1}{2}\|u^\varepsilon_0\|^2_{H^\varepsilon} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|^2_{(V^\varepsilon)'}ds. \tag{2.10}$$

Multipliant (2.10) par 2, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon} + \alpha \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|^2_{V^\varepsilon} ds &\leq \|u_0^\varepsilon\|^2_{H^\varepsilon} + \frac{1}{\alpha}\int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|^2_{(V^\varepsilon)'} ds \ \ , \forall t \in [0,T] \\
&\leq \|u_0^\varepsilon\|^2_{H^\varepsilon} + \frac{1}{\alpha}\int_0^T \|f^\varepsilon(s)\|^2_{(V^\varepsilon)'} ds \\
&\leq c(\|u_0^\varepsilon\|^2_{H^\varepsilon} + \|f^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')}), \ \ \forall t \in [0,T] \\
&\leq c(\|u_0^\varepsilon\|_{H^\varepsilon} + \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')})^2, \ \ \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Ceci donne alors

$$\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon} + \alpha \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|^2_{V^\varepsilon} ds \leq c(\|u_0^\varepsilon\|_{H^\varepsilon} + \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')})^2 \ \ \forall t \in [0,T], \tag{2.11}$$

avec $c = max(1, \frac{1}{\alpha})$.
Maintenant, de (2.11), il découle :

$$\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon} \leq c(\|u_0^\varepsilon\|_{H^\varepsilon} + \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')})^2 \ \ \forall t \in [0,T],$$

ce qui implique que

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{H^\varepsilon} \leq C(\|u_0^\varepsilon\|_{H^\varepsilon} + \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')}), \ \ \forall t \in [0,T],$$

d'où

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{L^\infty(0,T;H^\varepsilon)} \leq C(\|u_0^\varepsilon\|_{H^\varepsilon} + \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')}), \ \ \forall t \in [0,T].$$

D'où l'inégalité (2.6) avec $C = \sqrt{c} = \sqrt{max(1, \frac{1}{\alpha})}$.
D'après les calculs précédents, on a

$$\alpha \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|^2_{V^\varepsilon} ds \leq \|u_0^\varepsilon\|^2_{H^\varepsilon} + \frac{1}{\alpha}\int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|^2_{(V^\varepsilon)'} ds,$$

ce qui donne :

$$\int_0^t a(u^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) ds \leq C(\|u_0^\varepsilon\|^2_{H^\varepsilon} + \|f^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')}),$$

d'où

$$\int_0^T a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) dt \leq C(\|u_0^\varepsilon\|^2_{H^\varepsilon} + \|f^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;(V^\varepsilon)')}),$$

ce qui est l'inégalité (2.7) avec $C = max(1, \frac{1}{\alpha})$.
Dans tout ce qui va suivre, on suppose que $f^\varepsilon \in L^2(0,T;H^\varepsilon)$.

2.4 Comportement asymptotique de la solution

2.4.1 Changement d'échelle

L'objectif de cette section est l'étude du comportement asymptotique de la solution u^ε lorsque l'épaisseur ε tend vers 0. Afin de mener à bien cette analyse, il convient d'opérer un changement d'échelle dans Ω_ε pour se ramener à un problème posé sur un domaine fixe Ω. Pour cela, on effectue une dilatation de rapport ε^{-1} dans Ω_ε. On considère le changement d'échelle suivant :

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon : \bar{\Omega}^1 \cup \bar{\Omega}^2 &\to \bar{\Omega}_\varepsilon \\ x &\to \begin{cases} (x_1, \varepsilon x_2) \ si \ x \in \bar{\Omega}^1 \\ (\varepsilon x_1, x_2) \ si \ x \in \bar{\Omega}^2 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.12}$$

On note par Ω l'image de Ω_ε par ce changement d'échelle qui s'écrit :

$$\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2.$$

Notons que l'interêt de ce changement d'échelle réside dans le fait de compter la région de jonction entre les deux cylindres, deux fois (dans Ω_1 et dans Ω_2). On désigne par J_ε la région de jonction, tel que :

$$J_\varepsilon = \Omega^1_\varepsilon \cap \Omega^2_\varepsilon.$$

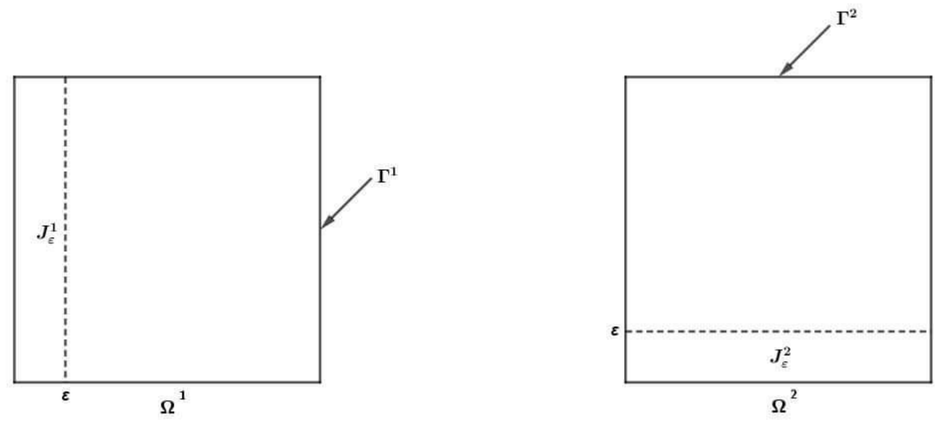

FIG. 2.2 – La région de jonction J_ε

On posera alors :

$$J_\varepsilon^1 = \left\{x \in \Omega^1; 0 < x_1 < \varepsilon\right\},$$
$$J_\varepsilon^2 = \left\{x \in \Omega^2; 0 < x_2 < \varepsilon\right\}.$$

De (2.12), on déduit que :

$$J_\varepsilon = \phi_\varepsilon(J_\varepsilon^1 \cup J_\varepsilon^2).$$

Soit Φ l'opérateur associé au changement d'échelle, donné par :

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : H^1_{\Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon) &\to H^1_{\Gamma^1}(\Omega^1) \times H^1_{\Gamma^2}(\Omega^2) \\ v^\varepsilon &\to (v^\varepsilon \circ \phi_\varepsilon|_{\Omega^1}, v^\varepsilon \circ \phi_\varepsilon|_{\Omega^2}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Notons que l'image de u^ε par ce changement d'échelle ($\Phi_\varepsilon u^\varepsilon$) est désignée par $u(\varepsilon)$ et l'image de u_0^ε ($\Phi_\varepsilon u_0^\varepsilon$) est donnée par $u_0(\varepsilon)$ et on note aussi l'image de f^ε (Φf^ε) par (f^1, f^2), avec

$$f^1 \in L^2(\Omega^1) \ et \ f^2 \in L^2(\Omega^2).$$

De même, on associe aux espaces V^ε et H^ε les espaces $V(\varepsilon)$ et $H(\varepsilon)$ donnés par :

$$V(\varepsilon) \subset V = H^1_{\Gamma^1}(\Omega^1) \times H^1_{\Gamma^2}(\Omega^2),$$
$$H(\varepsilon) \subset H = L^2(\Omega^1) \times L^2(\Omega^2).$$

Ainsi, l'image de l'espace des fonctions tests $H^1_{\Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)$ par (2.13) est l'espace $V(\varepsilon) \subset V$ des couples (v^1, v^2) qui satisfont à la relation de jonction suivante :

$$v^1(\varepsilon x_1, x_2) = v^2(x_1, \varepsilon x_2), \tag{2.14}$$

$$\text{pour } (x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]. \tag{2.15}$$

2.4.2 Problème variationnel mis à l'échelle

Nous allons maintenant réécrire notre problème variationel (2.5) dans le domaine dilaté. Nous avons :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla v^\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon dx.$$

Ce qui donne aussi :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\varepsilon \setminus J_\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon dx + \frac{d}{dt}\int_{J_\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus J_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla v^\varepsilon dx + \int_{J_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla v^\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus J_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon dx.$$

D'autre part on a :

$$\nabla u^\varepsilon \nabla v^\varepsilon = \partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v^\varepsilon + \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v^\varepsilon.$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\varepsilon \setminus J_\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon dx + \frac{d}{dt}\int_{J_\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus J_\varepsilon} (\partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v^\varepsilon + \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v^\varepsilon) dx + \int_{J_\varepsilon} (\partial_1 u^\varepsilon \partial_1 v^\varepsilon + \partial_2 u^\varepsilon \partial_2 v^\varepsilon) dx \\ = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus J_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon dx.\end{aligned}$$

Avec le changement d'échelle précédent, nous avons :

$$\partial_1 u^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \partial_1 u(\varepsilon) \text{ dans } \Omega^2,$$
$$\partial_2 u^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \partial_2 u(\varepsilon) \text{ dans } \Omega^1.$$

Ceci entraine alors :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} u^1(\varepsilon)v^1(\varepsilon)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{J_\varepsilon^1} u^1(\varepsilon)v^1(\varepsilon)dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} u^2(\varepsilon)v^2(\varepsilon)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{J_\varepsilon^2} u^2(\varepsilon)v^2(\varepsilon)dx$$
$$+\int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),v^1(\varepsilon))dx + \frac{1}{2}\int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),v^1(\varepsilon))dx + \int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),v^2(\varepsilon))dx +$$
$$\frac{1}{2}\int_{J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),v^2(\varepsilon))dx = \int_{\Omega^1} f^1(\varepsilon)v^1(\varepsilon)dx + \int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} f^2(\varepsilon)v^2(\varepsilon)dx, \qquad \forall v(\varepsilon)\in V(\varepsilon),$$

avec :

$$b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),v^1(\varepsilon)) = \partial_1 u^1(\varepsilon)\partial_1 v^1(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_2 u^1(\varepsilon)\partial_2 v^1(\varepsilon),$$

et

$$b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),v^2(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_1 u^2(\varepsilon)\partial_1 v^2(\varepsilon) + \partial_2 u^2(\varepsilon)\partial_2 v^2(\varepsilon).$$

Le problème ainsi obtenu s'écrit alors :

$$\begin{cases} Trouver\;\; u(\varepsilon)\in L^2(0,T;V)\;\; telle\ que : \\ \frac{d}{dt}\int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} u^1(\varepsilon)v^1(\varepsilon)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{J_\varepsilon^1} u^1(\varepsilon)v^1(\varepsilon)dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} u^2(\varepsilon)v^2(\varepsilon)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{J_\varepsilon^2} u^2(\varepsilon)v^2(\varepsilon)dx \\ +\int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),v^1(\varepsilon))dx + \frac{1}{2}\int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),v^1(\varepsilon))dx + \int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),v^2(\varepsilon))dx + \\ \frac{1}{2}\int_{J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),v^2(\varepsilon))dx = \int_{\Omega^1} f^1(\varepsilon)v^1(\varepsilon)dx + \int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} f^2(\varepsilon)v^2(\varepsilon)dx, \qquad \forall v(\varepsilon)\in V(\varepsilon), \\ u(\varepsilon)(0) = u_0(\varepsilon). \end{cases}$$

2.4.3 Analyse asymptotique du problème variationnel

Dans ce qui suit, on suppose que :

$$\|u_0(\varepsilon)\|_H \le C \; et \; \|f(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H)} \le C, \tag{2.16}$$

avec $C \ge 0$ une constante indépendante de ε. On supposera que :

$$u_0(\varepsilon) \rightharpoonup u_0(0) \;\text{ faiblement dans } H,$$

$$et\;\; f(\varepsilon) \rightharpoonup f(0) \;\text{ faiblement dans } L^2(0,T;H).$$

Nous considérons l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathcal{V} = \left\{ (\xi^1, \xi^2) \in H^1(]0,1[) \times H^1(]0,1[);\ \xi^1(1) = \xi^2(1) = 0,\ \ \xi^2(0) = \xi^1(0) \right\},$$

muni du produit scalaire :

$$\langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{V}} = \int_0^1 \frac{d\zeta^1}{dx_1}\frac{d\xi^1}{dx_1} dx_1 + \int_0^1 \frac{d\zeta^2}{dx_2}\frac{d\xi^2}{dx_2} dx_2.$$

De plus, on pose :

$$\mathcal{H} = L^2(]0,1[) \times L^2(]0,1[),$$

muni du produit scalaire :

$$\langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 \zeta^1 \xi^1 dx_1 + \int_0^1 \zeta^2 \xi^2 dx_2.$$

On identifie $\mathcal{H}$ a son dual de sorte que :

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'.$$

Le comportement asymptotique des solutions du problème (2.5) est exprimé dans le théorème suivant :

Théorème 2.2. *La solution $u(\varepsilon)$ converge faiblement dans $L^2(0,T;V)$ et faiblement-étoile dans $L^\infty(0,T;H)$ vers $(u^1(0), u^2(0))$, caractérisé par :*

1. *Il existe $(\zeta^1, \zeta^2) \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{H})$ tel que :*

$$u^1(0)(x_1,x_2,t) = \zeta^1(x_1,t), \quad u^2(0)(x_1,x_2,t) = \zeta^2(x_2,t), \quad p.p\ t \in [0,T]. \tag{2.17}$$

2. *$\zeta = (\zeta^1, \zeta^2)$ est l'unique solution du problème variationnel :*

$$\begin{cases} Trouver\ \zeta \in L^2(0,T;\mathcal{V})\ tel\ que : \\ \forall \xi \in \mathcal{V},\ \ \langle \zeta, \xi \rangle'_{\mathcal{H}} + \langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, \xi \rangle_{\mathcal{H}}, \end{cases} \tag{2.18}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$ et $\zeta|_{t=0} = (\zeta_0^1, \zeta_0^2) \in \mathcal{H}$, où

$$\zeta_0^1(x_1) = \int_0^1 u_0^1(0)(x_1,x_2) dx_2,\ \zeta_0^2(x_2) = \int_0^1 u_0^2(0)(x_1,x_2) dx_1,$$

et

$$F^1(x_1,t)=\int_0^1 f^1(0)(x_1,x_2,t)dx_2,\ F^2(x_2,t)=\int_0^1 f^2(0)(x_1,x_2,t)dx_1.$$

Démonstration :

2.4.4 Formulation forte du problème limite

Dans cette section, nous allons identifier la formulation forte du problème variationnel (2.18) on a :

$$\langle\zeta,\xi\rangle'_{\mathcal{H}}+\langle\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{V}}=\frac{d}{dt}\int_0^1\zeta^1\xi^1dx_1+\frac{d}{dt}\int_0^1\zeta^2\xi^2dx_2+\int_0^1\frac{d\zeta^1}{dx_1}\frac{d\xi^1}{dx_1}dx_1+\int_0^1\frac{d\zeta^2}{dx_2}\frac{d\xi^2}{dx_2}dx_2,$$

par intégration par parties, on obtient :

$$\langle\zeta,\xi\rangle'_{\mathcal{H}}+\langle\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{V}}=-\frac{d\zeta^1}{dx_1}(0,t)\xi^1(0)-\frac{d\zeta^2}{dx_2}(0,t)\xi^2(0)+\int_0^1\frac{d\zeta^1}{dt}(x_1,t)\xi^1(x_1)dx_1+$$
$$\int_0^1\frac{d\zeta^2}{dt}(x_2,t)\xi^2(x_2)dx_2-\int_0^1\frac{d^2\zeta^1}{dx_1^2}\xi^1dx_1-\int_0^1\frac{d^2\zeta^2}{dx_2^2}\xi^2dx_2,\ \ \forall(\xi^1,\xi^2)\in\mathcal{V}.$$

En particulier pour $\xi^1\in\mathcal{D}(0,1)$ et $\xi^2\in\mathcal{D}(0,1)$, on aura :

$$\int_0^1\frac{d\zeta^1}{dt}\xi^1dx_1+\int_0^1\frac{d\zeta^2}{dt}\xi^2dx_2-\int_0^1\frac{d^2\zeta^1}{dx_1^2}\xi^1dx_1-\int_0^1\frac{d^2\zeta^2}{dx_2^2}\xi^2dx_2=\langle F,\xi\rangle_{\mathcal{H}},$$

ce qui donne :

$$\int_0^1\frac{d\zeta^1}{dt}\xi^1dx_1+\int_0^1\frac{d\zeta^2}{dt}\xi^2dx_2-\int_0^1\frac{d^2\zeta^1}{dx_1^2}\xi^1dx_1-\int_0^1\frac{d^2\zeta^2}{dx_2^2}\xi^2dx_2=\int_0^1F^1\xi^1dx_1+\int_0^1F^2\xi^2dx_2,$$

d'où :

$$\int_0^1\frac{d\zeta^1}{dt}\xi^1dx_1-\int_0^1\frac{d^2\zeta^1}{dx_1^2}\xi^1dx_1=\int_0^1F^1\xi^1dx_1,\ \ \forall\xi^1\in\mathcal{D}(0,1),\tag{2.19}$$

et

$$\int_0^1\frac{d\zeta^2}{dt}\xi^2dx_2-\int_0^1\frac{d^2\zeta^2}{dx_2^2}\xi^2dx_2=\int_0^1F^2\xi^2dx_2,\ \ \forall\xi^2\in\mathcal{D}(0,1).\tag{2.20}$$

D'après (2.19), on aura :

$$\int_0^1(\frac{d\zeta^1}{dt}-\frac{d^2\zeta^1}{dx_1^2}-F^1)\xi^1dx_1=0.$$

Ce qui implique que :

$$\frac{d\zeta^1}{dt} - \frac{d^2\zeta^1}{dx_1^2} = F^1, \quad \text{dans } w^1 \times]0, T[,$$

avec

$$w^1 = \{0 < x_1 < 1,\ x_2 = 0\}.$$

De (2.20), on aura :

$$\int_0^1 \Big(\frac{d\zeta^2}{dt} - \frac{d^2\zeta^2}{dx_2^2} - F^2\Big)\xi^2 dx_2 = 0.$$

Ce qui implique que :

$$\frac{d\zeta^2}{dt} - \frac{d^2\zeta^2}{dx_2^2} = F^2, \quad \text{dans } w^2 \times]0, T[,$$

avec

$$w^2 = \{x_1 = 0,\ 0 < x_2 < 1\}.$$

D'autre part, on a :

$$-\Big(\frac{d\zeta^1}{dx_1}(0,t) + \frac{d\zeta^2}{dx_2}(0,t)\Big)\xi^1(0) + \int_0^1 \Big(\frac{d\zeta^1}{dt} - \frac{d^2\zeta^1}{dx_1^2} - F^1\Big)\xi^1 dx_1 + \int_0^1 \Big(\frac{d\zeta^2}{dt} - \frac{d^2\zeta^2}{dx_2^2} - F^2\Big)\xi^2 dx_2 = 0,$$

d'où

$$\frac{d\zeta^1}{dx_1}(0,t) + \frac{d\zeta^2}{dx_2}(0,t) = 0.$$

D'après (2.17) et la condition de Dirichlet satisfaite par $u^1(\varepsilon)$ et $u^2(\varepsilon)$, on a :

$$u^1(0)(1, x_2, t) = \zeta^1(1, t) = 0,$$

et

$$u^2(0)(x_1, 1, t) = \zeta^2(1, t) = 0.$$

Ce qui donne :

$$\zeta^1(1,t) = \zeta^2(1,t) = 0.$$

Soit encore

$$\zeta|_{t=0} = (\zeta_0^1, \zeta_0^2), \tag{2.21}$$

(2.21) s'écrit alors :

$$\zeta^1(x_1,0)=\zeta_0^1(x_1),\ \zeta^2(x_2,0)=\zeta_0^2(x_2).$$

Par conséquent, la formulation forte associée au problème variationnel (2.18) s'écrit :

$$\begin{cases}\frac{\partial\zeta^1}{\partial t}-\frac{\partial^2\zeta^1}{\partial x_1^2}=F^1 \text{ dans } \quad w^1\times]0,T[,\\ \frac{\partial\zeta^2}{\partial t}-\frac{\partial^2\zeta^2}{\partial x_2^2}=F^2 \text{ dans } \quad w^2\times]0,T[,\\ \zeta^1(1,t)=\zeta^2(1,t)=0,\ \zeta^1(0,t)=\zeta^2(0,t) \text{ pour } \quad t\in]0,T[,\\ \frac{\partial\zeta^1}{\partial x_1}(0,t)+\frac{\partial\zeta^2}{\partial x_2}(0,t)=0 \text{ pour } \quad t\in]0,T[,\\ \zeta^1(x_1,0)=\zeta_0^1(x_1),\ \zeta^2(x_2,0)=\zeta_0^2(x_2).\end{cases}$$

Afin d'obtenir le comportement asymptotique de la solution, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Il existe une constante $C>0$ independante de ε telle que :*

$$\|u(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;V)}\leq C,\quad \|u(\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;H)}\leq C. \tag{2.22}$$

Démonstration du lemme 2.1 **:** Prenons $v^\varepsilon=u^\varepsilon(t)$ comme fonction test dans (2.5), il vient :

$$\frac{d}{dt}\langle u^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)\rangle_{H^\varepsilon}+\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u^\varepsilon(t)\nabla u^\varepsilon(t)dx=\langle f^\varepsilon,u^\varepsilon(t)\rangle.$$

D'après le lemme (1.1), l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon}+\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u^\varepsilon(t)\nabla u^\varepsilon(t)dx=\langle f^\varepsilon,u^\varepsilon(t)\rangle,$$

et par intégration sur $[0,t]$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\|u^\varepsilon(t)\|^2_{H^\varepsilon}+\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u^\varepsilon\nabla u^\varepsilon dxds=\frac{1}{2}\|u_0^\varepsilon\|^2_{H^\varepsilon}+\int_0^t\langle f^\varepsilon,u^\varepsilon\rangle ds. \tag{2.23}$$

L'application du changement d'échelle donne :

$$\frac{1}{2}\|u(\varepsilon)(t)\|^2+\int_0^t\int_{\Omega^1}b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),u^1(\varepsilon))dxds+\int_0^t\int_{\Omega^2}b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),u^2(\varepsilon))dxds=$$
$$\frac{1}{2}\|u_0(\varepsilon)\|^2_H+\int_0^t\langle f(\varepsilon),u(\varepsilon)(s)\rangle ds.$$

Comme :

$$\int_0^t \langle f(\varepsilon), u(\varepsilon)(s)\rangle ds \leq \int_0^t \|f(\varepsilon)\|_H \|u(\varepsilon)(s)\|_H ds.$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2}\|u(\varepsilon)(t)\|_H^2 + \int_0^t \int_{\Omega^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon), u^1(\varepsilon))dxds + \int_0^t \int_{\Omega^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon), u^2(\varepsilon))dxds \leq \frac{1}{2}\|u_0(\varepsilon)\|_H^2 + \int_0^t \|f(\varepsilon)\|_H \|u(\varepsilon)(s)\|_H ds.$$

Par l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \|f(\varepsilon)\|_H \|u(\varepsilon)(s)\|_H ds &\leq \int_0^t \frac{1}{2}\|f(\varepsilon)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u(\varepsilon)(s)\|_H^2 ds\\ &\leq \int_0^T \frac{1}{2}\|f(\varepsilon)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u(\varepsilon)(s)\|_H^2 ds.\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\|u(\varepsilon)(t)\|_H^2 + \int_0^t \int_{\Omega^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon), u^1(\varepsilon))dxds + \int_0^t \int_{\Omega^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon), u^2(\varepsilon))dxds \tag{2.24}$$

$$\leq \frac{1}{2}(\|u_0(\varepsilon)\|_H^2 + \|f(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \int_0^T \|u(\varepsilon)(s)\|_H^2 ds).$$

Maintenant, de (2.24), il découle :

$$\|u(\varepsilon)(t)\|_H^2 \leq \|u_0(\varepsilon)\|_H^2 + \|f(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \int_0^T \|u(\varepsilon)(s)\|_H^2 ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall à la fonction $\|u(\varepsilon)(t)\|_H^2$, on obtient :

$$\|u(\varepsilon)(t)\|_H^2 \leq b\exp(T),$$

avec : $b = \|u_0(\varepsilon)\|_H^2 + \|f(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H)}^2$.
De (2.16), on aura :

$$\|u(\varepsilon)(t)\|_H \leq C,$$

d'où

$$\|u(\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C, \tag{2.25}$$

avec : $C = \sqrt{b\exp(T)}$.
Par ailleurs, de (2.24), il vient

$$\int_0^t \int_{\Omega^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon), u^1(\varepsilon))dxds + \int_0^t \int_{\Omega^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon), u^2(\varepsilon))dxds \\ \leq \frac{1}{2}(\|u_0(\varepsilon)\|_H^2 + \|f(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \int_0^T \|u(\varepsilon)(s)\|_H^2 ds),$$

on déduit alors que :

$$\int_0^t \int_{\Omega^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon), u^1(\varepsilon))dxds + \int_0^t \int_{\Omega^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon), u^2(\varepsilon))dxds \leq C. \tag{2.26}$$

Or, pour $\varepsilon << 1$, nous pouvons écrire :

$$\int_0^T \|u(\varepsilon)\|_V^2 dt \leq \int_0^T \int_{\Omega^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon), u^1(\varepsilon))dxdt + \int_0^T \int_{\Omega^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon), u^2(\varepsilon))dxdt,$$

ce qui implique alors :

$$\|u(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;V)} \leq C. \tag{2.27}$$

Passage à la limite pour $\varepsilon \to 0$: Le lemme (2.1) donne lieu au résultats de convergence suivant :
D'après (2.26) et (2.27), nous concluons que $\|u(\varepsilon)\|$ est uniformement bornée dans $L^\infty(0,T;H)$ est bornée dans l'espace de Hilbert $L^2(0,T;V)$.
Par conséquent, en vertu de la compacité faible (ou faible étoile) des boules unités des espaces $L^2(0,T;V)$ et $L^\infty(0,T;H)$, on en déduit qu'il est possible d'extraire de la famille $u(\varepsilon)$ une sous suite, que nous notons toujours ε telle que :

$$u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0) \text{ dans } L^2(0,T;V), \tag{2.28}$$

et

$$u(\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} u_*(0) \text{ dans } L^\infty(0,T;H), \tag{2.29}$$

qaund $\varepsilon \to 0$. Montrons maintenant que :

$$u(0) = u_*(0).$$

Remarquons que si $v(\varepsilon) \in L^2(0,T;V)$, alors $v(\varepsilon) \in L^2(0,T;H)$ car $V \hookrightarrow H$. En effet, comme

$$\|v(\varepsilon)\|_H \leq c\|v(\varepsilon)\|_V, \quad \forall v \in V,$$

il s'ensuit que :

$$\|v(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H)} = (\int_0^T \|v(\varepsilon)(t)\|_H^2 dt)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_0^T c^2\|v(\varepsilon)(t)\|_V^2 dt)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Soit $v(\varepsilon) \in L^1(0,T;H)$ *(avec* $L^1(0,T;H) = (L^\infty(0,T;H))'$).
En vertu de (2.29), nous avons :

$$\int_0^T \langle u(\varepsilon)(t), v(\varepsilon)(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle u_*(0), v(\varepsilon)(t)\rangle dt. \tag{2.30}$$

Par ailleurs, pour $v(\varepsilon) \in L^2(0,T;V)$ fixé arbitrairement, l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : L^2(0,T;V) &\to \mathbb{R} \\ u(\varepsilon) &\to \int_0^T \langle u(\varepsilon)(t), v(\varepsilon)(t)\rangle dt, \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur $L^2(0,T;V)$. En effet, pour tout $u(\varepsilon) \in L^2(0,T;V)$, on a :

$$\begin{aligned} |\Phi_\varepsilon(u(\varepsilon))| &\leq \int_0^T |\langle u(\varepsilon)(t), v(\varepsilon)(t)\rangle| dt \\ &\leq \int_0^T \|u(\varepsilon)(t)\|_H \|v(\varepsilon)(t)\|_H dt \\ &\leq \int_0^T c^2\|u(\varepsilon)(t)\|_V \|v(\varepsilon)(t)\|_V dt, \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} |\Phi_\varepsilon(u(\varepsilon))| &\leq c^2(\int_0^T \|u(\varepsilon)(t)\|_V^2 dt)^{\frac{1}{2}}(\int_0^T \|v(\varepsilon)(t)\|_V^2 dt)^{\frac{1}{2}}, \\ &= c^2\|u(\varepsilon)(t)\|_{L^2(0,T;V)}\|v(\varepsilon)(t)\|_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (2.28), on obtient :

$$\Phi(u(\varepsilon)) = \int_0^T \langle u(\varepsilon)(t), v(\varepsilon)(t)\rangle dt \to \Phi(u(0)) = \int_0^T \langle u(0), v(\varepsilon)(t)\rangle dt, \text{ quand } \varepsilon \to 0. \quad (2.31)$$

Ce qui entraine, compte tenu de (2.30) et l'unicité de la limite faible que :

$$\int_0^T \langle u(0), v(\varepsilon)(t)\rangle | dt = \int_0^T \langle u_*(0), v(\varepsilon)(t)\rangle | dt,$$

ce qui implique que

$$\int_0^T \langle u(0) - u_*(0), v(\varepsilon)(t)\rangle dt = 0, \quad \forall v(\varepsilon) \in L^2(0,T;V),$$

d'où

$$\langle u(0) - u_*(0), v(\varepsilon)(t)\rangle_{L^2(0,T;H)} = 0.$$

En raison de la densité de $L^2(0,T;V)$ dans $L^2(0,T;H)$ laquelle est une conséquence de l'injection V dans H, l'égalité ci-dessus est valable pour $v \in L^2(0,T;H)$, on obtient alors :

$$u(0) = u_*(0) \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V).$$

Ainsi, La famille $u(\varepsilon)$ converge faiblement dans $L^2(0,T;V)$ et faiblement-étoile dans $L^\infty(0,T;H)$ vers un couple $(u^1(0), u^2(0))$.

Lemme 2.2. *Il existe* $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) \in L^2(0,T;H^1(]0,T[)^2) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{H})$ *tel que* $u(0)$ *satisfait* (2.17).

Démonstration : De (2.26), on a :

$$\int_0^T \int_{\Omega^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon), u^1(\varepsilon)) dxds \leq C,$$
$$\int_0^T \int_{\Omega^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon), u^2(\varepsilon)) dxds \leq C,$$

plus explicitement :

$$\int_0^T \int_{\Omega^1} \partial_1 u^1(\varepsilon)\partial_1 u^1(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_2 u^1(\varepsilon)\partial_2 u^1(\varepsilon) dxds \leq C,$$
$$\int_0^T \int_{\Omega^2} \frac{1}{\varepsilon^2}\partial_1 u^2(\varepsilon)\partial_1 u^2(\varepsilon) + \partial_2 u^2(\varepsilon)\partial_2 u^2(\varepsilon) dxds \leq C,$$

ce qui implique :

$$\|\partial_2 u^1(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H)} \leq C\varepsilon,$$
$$\|\partial_1 u^2(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H)} \leq C\varepsilon.$$

Par conséquent, on a :

$$\partial_2 u^1(\varepsilon) \to 0 \text{ dans } L^2(0,T;H), \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$
$$\partial_1 u^2(\varepsilon) \to 0 \text{ dans } L^2(0,T;H), \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

ce qui nous permet d'avoir :

$$\partial_2 u^1(0) = 0 \text{ et } \partial_1 u^2(0) = 0,$$

d'où :

$$u^1(0)(x_1,x_2,t) = \zeta^1(x_1,t),$$
$$u^2(0)(x_1,x_2,t) = \zeta^2(x_2,t).$$

Lemme 2.3. *Le couple* (ζ^1, ζ^2) *appartient à* $L^2(0,T;\mathcal{V})$.

Lemme 2.4. *Le couple* (ζ^1, ζ^2) *est solution de l'équation variationnelle* (2.18).

Démonstration :
Pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, on définit :

$$v^1(\varepsilon)(x_1,x_2) = \begin{cases} \xi^1(x_1) & \text{pour } 2\varepsilon \leq x_1 \leq 1, \\ \xi^1(2(x_1-\varepsilon)) & \text{pour } \varepsilon \leq x_1 \leq 2\varepsilon, \\ \xi^1(0) & \text{pour } 0 \leq x_1 \leq \varepsilon, \end{cases} \tag{2.32}$$

et

$$v^2(\varepsilon)\,(x_1,x_2)=\begin{cases}\xi^2\,(x_2) & \text{pour } 2\varepsilon\leq x_2\leq 1,\\ \xi^2\,(2\,(x_2-\varepsilon)) & \text{pour } \varepsilon\leq x_2\leq 2\varepsilon,\\ \xi^2(0) & \text{pour } 0\leq x_2\leq \varepsilon.\end{cases}\tag{2.33}$$

Soit $v(\varepsilon)\in V(\varepsilon)$ tel que : $v(\varepsilon)\to v(0)$ dans H quand $\varepsilon\to 0$.
Pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(]0,T[)$, on a :

$$\varphi(t)v(\varepsilon)\in\mathcal{D}(]0,T[;V(\varepsilon)).$$

De plus, on a :

$$\varphi(t)v(\varepsilon)\to\varphi(t)v(0) \text{ dans } L^2(0,T;V),\tag{2.34}$$

$$\varphi'(t)v(\varepsilon)\to\varphi'(t)v(0) \text{ dans } L^2(0,T;H).\tag{2.35}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^T\|\varphi(t)v(\varepsilon)-\varphi(t)v(0)\|_V^2dt&=\int_0^T\|v(\varepsilon)-v(0)\|_V^2|\varphi(t)|^2dt\\&\leq T(sup|\varphi(t)|)^2\|v(\varepsilon)-v(0)\|_V^2.\end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoir :

$$\|\varphi v(\varepsilon)-\varphi v(0)\|_{L^2(0,T;V)}\leq C\|v(\varepsilon)-v(0)\|_V\to 0,\quad quand\ \varepsilon\to 0,$$

avec : $C=\sqrt{T}(sup|\varphi(t)|)$.
D'où

$$\varphi(t)v(\varepsilon)\to\varphi(t)v(0)\ \text{ dans }\ L^2(0,T;V).$$

De même,

$$\begin{aligned}\int_0^T\|\varphi'(t)v(\varepsilon)-\varphi'(t)v(0)\|_H^2dt&=\int_0^T|\varphi'(t)|^2\|v(\varepsilon)-v(0)\|_H^2dt\\&\leq T(sup|\varphi'(t)|)^2\|v(\varepsilon)-v(0)\|_H^2\\&\leq c^2T(sup|\varphi'(t)|)^2\|v(\varepsilon)-v(0)\|_V^2,\end{aligned}$$

ce qui permet d'avoir :

$$\|\varphi' v(\varepsilon) - \varphi' v(0)\|_{L^2(0,T;H)} \leq C\|v(\varepsilon) - v(0)\|_V^2 \to 0.$$

avec : $C = c\sqrt{T}(sup|\varphi'(t)|)$.
D'où

$$\varphi'(t)v(\varepsilon) \to \varphi'(t)v(0) \text{ dans } L^2(0,T;H).$$

Maintenant, en multipliant l'équation variationnelle associée à notre problème par $\varphi(t)$, $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$ et en intégrant de 0 à t, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} \frac{du^1}{dt}(\varepsilon)(t)v^1(\varepsilon)\varphi(t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^1} \frac{du^1}{dt}(\varepsilon)(t)v^1(\varepsilon)\varphi(t)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} \frac{du^2}{dt}(\varepsilon)(t)v^2(\varepsilon)\varphi(t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^2} \frac{du^2}{dt}(\varepsilon)(t)v^2(\varepsilon)\varphi(t)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon)(t), v^1(\varepsilon))\varphi(t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon)(t), v^1(\varepsilon))\varphi(t)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon)(t), v^2(\varepsilon))\varphi(t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon)(t), v^2(\varepsilon))\varphi(t)dxdt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega^1} f^1(\varepsilon)(t)v^1(\varepsilon)\varphi(t)dxdt + \int_0^T \int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} f^2(\varepsilon)(t)v^2(\varepsilon)\varphi(t)dxdt, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[).
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\int_0^T \int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} \frac{du^1}{dt}(\varepsilon)(t)v^1(\varepsilon)\varphi(t)dxdt = -\int_0^T \int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} u^1(\varepsilon)(t)v^1(\varepsilon)\varphi'(t)dxdt, \ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[).$$

De même, on a :

$$\int_0^T \int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} \frac{du^2}{dt}(\varepsilon)(t)v^2(\varepsilon)\varphi(t)dxdt = -\int_0^T \int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} u^2(\varepsilon)(t)v^2(\varepsilon)\varphi'(t)dxdt, \ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[).$$

Comme $L^2(0,T;H) \hookrightarrow L^1(0,T;H)$ et de (2.35), on a :

$$\varphi'(t)v(\varepsilon) \to \varphi'(t)v(0), \text{ dans } L^1(0,T;H).$$

L'utilisation du théorème (1.4), et de (2.29), (2.35), nous permet d'écrire :

$$\langle u(\varepsilon), \varphi' v(\varepsilon)\rangle_{L^\infty(0,T;H),L^1(0,T;H)} \to \langle u(0), \varphi' v(0)\rangle_{L^\infty(0,T;H),L^1(0,T;H)},$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Omega^1\setminus J^1_\varepsilon} u^1(\varepsilon)v^1(\varepsilon)\varphi'(t)dxdt &\to \int_0^T \int_{\Omega^1\setminus J^1_0} u^1(0)v^1(0)\varphi'(t)dxdt \\ &= \int_0^T \int_0^1 u^1(0)v^1(0)\varphi'(t)dx_1dt, \text{ quand } \varepsilon \to 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Omega^2\setminus J^2_\varepsilon} u^2(\varepsilon)v^2(\varepsilon)\varphi'(t)dxdt &\to \int_0^T \int_{\Omega^1\setminus J^2_0} u^2(0)v^2(0)\varphi'(t)dxdt \\ &= \int_0^T \int_0^1 u^2(0)v^2(0)\varphi'(t)dx_2dt, \text{ quand } \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

De (2.17), on a :

$$\begin{gathered} u^1(0)(x_1,x_2,t) = \zeta^1(x_1,t), \\ \text{et } u^2(0)(x_1,x_2,t) = \zeta^2(x_2,t).\end{gathered}$$

et de (2.32), (2.33), on a :

$$\begin{aligned} v^1(0)(x_1,x_2) &= \xi^1(x_1) \quad \text{pour } 0 \le x_1 \le 1, \\ v^2(0)(x_1,x_2) &= \xi^2(x_2) \quad \text{pour } 0 \le x_2 \le 1.\end{aligned}$$

avec :

$$J^1_0 = \emptyset \text{ et } J^2_0 = \emptyset.$$

Par conséquent, on déduit que :

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_{\Omega^1 \setminus J_\varepsilon^1} u^1(\varepsilon)(t) v^1(\varepsilon)\varphi'(t) dx dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^1} u^1(\varepsilon)(t) v^1(\varepsilon)\varphi'(t) dx dt \\
&-\int_0^T \int_{\Omega^2 \setminus J_\varepsilon^2} u^2(\varepsilon)(t) v^2(\varepsilon)\varphi'(t) dx dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^2} u^2(\varepsilon)(t) v^2(\varepsilon)\varphi'(t) dx dt \\
\rightarrow & -\int_0^T \int_0^1 \zeta^1(x_1,t)\xi^1(x_1)\varphi'(t) dx_1 dt - \int_0^T \int_0^1 \zeta^2(x_2,t)\xi^2(x_2)\varphi'(t) dx_2 dt, \text{ dans } \mathcal{D}(]0,T[),
\end{aligned}
$$

ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega^1 \setminus J_\varepsilon^1} \frac{du^1}{dt}(\varepsilon)(t) v^1(\varepsilon) dx + \frac{1}{2}\int_{J_\varepsilon^1} \frac{du^1}{dt}(\varepsilon)(t) v^1(\varepsilon) dx + \int_{\Omega^2 \setminus J_\varepsilon^2} \frac{du^2}{dt}(\varepsilon)(t) v^2(\varepsilon) dx + \frac{1}{2}\int_{J_\varepsilon^2} \frac{du^2}{dt}(\varepsilon)(t) v^2(\varepsilon) dx \\
&\rightarrow \int_0^1 \frac{d\zeta^1}{dt}(x_1,t)\xi^1(x_1) dx_1 + \int_0^1 \frac{d\zeta^2}{dt}(x_2,t)\xi^2(x_2) dx_2, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[).
\end{aligned}
$$

De même, de (2.28) et (2.34), on a :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega^1 \setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon)(t), v^1(\varepsilon))\varphi(t) dx dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon)(t), v^1(\varepsilon))\varphi(t) dx dt \\
+&\int_0^T \int_{\Omega^2 \setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon)(t), v^2(\varepsilon))\varphi(t) dx dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon)(t), v^2(\varepsilon))\varphi(t) dx dt \\
&\rightarrow \int_0^T \int_0^1 b_0^1(u^1(0), v^1(0))\varphi(t) dx_1 dt + \int_0^T \int_0^1 b_0^2(u^2(0), v^2(0))\varphi(t) dx_2 dt,
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 b_0^1(u^1(0), v^1(0)) dx_1 &= \int_0^1 \partial_1 u^1(0)\partial_1 v^1(0) dx_1 \\
&= \int_0^1 \frac{d\zeta^1}{dx_1}\frac{d\xi^2}{dx_1} dx_1,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 b_0^1(u^2(0), v^2(0)) dx_2 &= \int_0^1 \partial_2 u^2(0)\partial_1 v^2(0) dx_1 \\
&= \int_0^1 \frac{d\zeta^2}{dx_2}\frac{d\xi^2}{dx_2} dx_2.
\end{aligned}
$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega^1 \setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon)(t), v^1(\varepsilon))\varphi(t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon)(t), v^1(\varepsilon))\varphi(t)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega^2 \setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon)(t), v^2(\varepsilon))\varphi(t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon)(t), v^2(\varepsilon))\varphi(t)dxdt \\
&\to \int_0^T \int_0^1 \frac{d\zeta^1}{dx_1}\frac{d\xi^1}{dx_1}\varphi(t)dx_1dt + \int_0^T \int_0^1 \frac{d\zeta^2}{dx_2}\frac{d\xi^2}{dx_2}\varphi(t)dx_2dt, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[),
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^1 \setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon), v^1(\varepsilon))dx + \frac{1}{2}\int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon), v^1(\varepsilon))dx \\
&+ \int_{\Omega^2 \setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon), v^2(\varepsilon))dx + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon), v^2(\varepsilon))dx \\
&\to \int_0^1 \frac{d\zeta^1}{dx_1}\frac{d\xi^2}{dx_1}dx_1 + \int_0^1 \frac{d\zeta^2}{dx_2}\frac{d\xi^2}{dx_2}dx_2, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[).
\end{aligned}$$

Enfin, de la même manière et de (2.34) et (2.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega^1} f^1(\varepsilon)(t)v^1(\varepsilon)\varphi(t)dxdt + \int_0^T \int_{\Omega^2 \setminus J_\varepsilon^2} f^2(\varepsilon)(t)v^2(\varepsilon)\varphi(t)dxdt \\
&\to \int_0^T \int_{\Omega^1} f^1(0)(t)v^1(0)\varphi(t)dxdt + \int_0^T \int_{\Omega^2} f^2(0)(t)v^2(0)\varphi(t)dxdt, \ \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[),
\end{aligned}$$

avec :

$$\int_{\Omega^1} f^1(0)(x_1, x_2, t)dx = \int_0^1 F^1(x_1, t)dx_1,$$

et

$$\int_{\Omega^1} f^2(0)(x_1, x_2, t)dx = \int_0^1 F^2(x_2, t)dx_2.$$

Il s'ensuit que :

$$\int_{\Omega^1} f^1(\varepsilon)v^1(\varepsilon)dx + \int_{\Omega^2 \setminus J_\varepsilon^2} f^2(\varepsilon)v^2(\varepsilon)dx \to \int_0^1 F^1\xi^1dx_1 + \int_0^1 F^1\xi^1dx_1, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[).$$

Finalement, on aura :

$$\langle \zeta, \xi \rangle'_{\mathcal{H}} + \langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, \xi \rangle_{\mathcal{H}}, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[), \ \forall\, \xi \in \mathcal{V}.$$

D'où ζ vérifie (2.18).

Lemme 2.5. *On a* $\zeta' \in L^2(0,T;\mathcal{V}')$.

Démonstration : Soit $A(.) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ un opérateur linéaire continu, défini par :

$$\langle A\xi^1, \xi^1\rangle_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} = \langle \xi^1, \xi^2\rangle,$$

avec :

$$\begin{aligned}
\|A(t)\zeta\|_{\mathcal{V}'} &= \sup_{\xi\in\mathcal{V},\xi\neq 0} \frac{\langle A(t)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}}{\|\xi\|_{\mathcal{V}}} \\
&= \sup_{\xi\in\mathcal{V},\xi\neq 0} \frac{\langle \zeta, \xi\rangle_{\mathcal{V}}}{\|\xi\|_{\mathcal{V}}} \\
&\leq \frac{\|\zeta\|_{\mathcal{V}}\|\xi\|_{\mathcal{V}}}{\|\xi\|_{\mathcal{V}}} = \|\zeta\|_{\mathcal{V}},
\end{aligned}$$

d'où :

$$\|A(t)\zeta\|_{\mathcal{V}'} \leq \|\zeta\|_{\mathcal{V}}. \tag{2.36}$$

Alors (2.18) peut s'écrire sous la forme :

$$\langle \zeta, \xi\rangle'_{\mathcal{H}} = \langle F - A\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}},$$

d'autre part, on a :

$$\frac{d}{dt}\langle \zeta, \xi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \frac{d\zeta}{dt}, \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[), \ \forall \xi \in \mathcal{V}.$$

Pour tout $\zeta \in L^2(0,T;\mathcal{V})$ et de (2.36), on a :

$$\|A(t)\zeta(t)\|_{\mathcal{V}'} \leq \|\zeta(t)\|_{\mathcal{V}}, \text{ p.p t} \in [0,T],$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|A(t)\zeta(t)\|^2_{\mathcal{V}'} dt &\leq \int_0^T \|\zeta(t)\|^2_{\mathcal{V}} dt \\
&= \|\zeta\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{V})} < \infty,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\|A\zeta\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}')} \leq \|\zeta\|_{L^2(0,T;\mathcal{V})},$$

ce qui donne :

$$A\zeta \in L^2(0,T;\mathcal{V}').$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$, on a :

$$\int_0^T \langle \zeta, \xi \rangle'_{\mathcal{H}} \varphi(t)dt = \int_0^T \langle F(t) - A\zeta(t) \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \varphi(t)dt,$$

donc

$$-\int_0^T \langle \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{H}} \varphi'(t)dt = \int_0^T \langle F(t) - A\zeta(t) \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \varphi(t)dt,$$

alors, nous pouvons écrire

$$-\int_0^T \langle \varphi'(t)\zeta(t), \xi \rangle_{\mathcal{H}} dt = \int_0^T \langle (F(t) - A\zeta(t))\varphi(t), \xi \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} dt, \ \forall \xi \in \mathcal{V}, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[),$$

comme $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V}'$, alors on a : $\varphi'\zeta \subset L^2(0,T;\mathcal{V}) \subset L^2(0,T;\mathcal{V}')$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \varphi'(t)\zeta(t), \xi \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^T \langle \varphi'(t)\zeta(t), \xi \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} dt, \\
&= \langle \int_0^T \varphi'(t)\zeta(t)dt, \xi \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}},
\end{aligned}$$

d'où :

$$\langle \int_0^T \zeta'(t)\varphi(t)dt, \xi \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \langle \int_0^T (F(t) - A\zeta(t))\varphi(t)dt, \xi \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}},$$

donc

$$\zeta' = F - A\zeta, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[;\mathcal{V}'), \tag{2.37}$$

comme

$$(F - A\zeta) \in L^2(0,T;\mathcal{V}'),$$

alors, en déduit que :

$$\zeta' \in L^2(0,T;\mathcal{V}'). \tag{2.38}$$

Lemme 2.6. *La solution limite ζ appartient à $\mathcal{C}^0([0,T];\mathcal{H})$ et est telle que :*

$\zeta_{|t=0} = (\zeta_0^1, \zeta_0^2)$, où (ζ_0^1, ζ_0^2) est défini par :

$$\begin{aligned} \zeta_0^1(x_1) &= \int_0^1 u_0^1(0)(x_1,x_2)dx_2, \\ \zeta_0^2(x_2) &= \int_0^1 u_0^2(0)(x_1,x_2)dx_1. \end{aligned}$$

Lemme 2.7. *Le problème variationnel* (2.18) *est bien posé.*

Démonstration :
De (2.37) et (2.38), on a :

$$\zeta' \in L^2(0,T;\mathcal{V}') \text{ et } \zeta' = F - A\zeta,$$

on a :

$$\langle \zeta'(t), \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \langle F(t) - A(t)\zeta(t), \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \tag{2.39}$$

comme $\zeta \in W^{1,2}(0,T;\mathcal{V},\mathcal{V}')$ et $\xi \in \mathcal{V}$, on a :

$$\langle \zeta(t), \xi\rangle'_{\mathcal{H}} = \langle \zeta'(t), \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}, \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[),$$

ce qui donne :

$$\langle \zeta(t), \xi\rangle'_{\mathcal{H}} = \langle F(t) - A(t)\zeta(t), \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}, \tag{2.40}$$

d'où

$$\langle \zeta(t), \xi\rangle'_{\mathcal{H}} + \langle A(t)\zeta(t), \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \langle F(t), \xi\rangle_{\mathcal{H}}, \text{ p.p } t \in [0,T]$$

alors, on obtient :

$$\langle \zeta, \xi\rangle'_{\mathcal{H}} + \langle \zeta, \xi\rangle_{\mathcal{V}} = \langle F, \xi\rangle_{\mathcal{H}}, \ \forall \xi \in \mathcal{V}.$$

D'autre part, on a :
on considère la fonction $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$, telle que : $\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi(T) = 0$:
en intégrant (2.40) par rapport à t de 0 à T, on aura :

$$\int_0^T \langle \zeta, \xi\rangle'_{\mathcal{H}}\varphi(t)dt = \int_0^T \langle F(t) - A(t)\zeta(t), \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}\varphi(t)dt,$$

utilisant l'intégration par partie, on obtient :

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\langle \zeta, \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi(t)dt = -\int_0^T \langle \zeta, \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi'(t)dt - \langle \zeta(0), \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi(0),$$

ce qui donne :

$$-\int_0^T \langle \zeta, \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi'(t)dt - \langle \zeta(0), \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi(0) = \int_0^T \langle F(t) - A(t)\zeta(t), \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \varphi(t)dt, \tag{2.41}$$

il suit alors de (2.39) que :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \zeta'(t), \xi\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \varphi(t)dt &= -\int_0^T \langle \zeta(t), \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi'(t)dt - \langle \zeta(0), \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi(0) \\ &= -\int_0^T \langle \zeta(t), \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi'(t)dt - \langle \zeta_0, \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi(0), \end{aligned}$$

d'où :

$$-\int_0^T \langle \zeta(t), \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi'(t)dt - \langle \zeta_0, \xi\rangle_{\mathcal{H}} \varphi(0) = \int_0^T \langle F(t) - A\zeta(t)\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \varphi(t)dt \tag{2.42}$$

par comparaison (2.41) avec (2.42), on aura :

$$\langle \zeta_0, \xi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \zeta(0), \xi\rangle_{\mathcal{H}},$$

et par conséquent,

$$\zeta_{t=0} = (\zeta_0^1, \zeta_0^2) \in \mathcal{H}.$$

L'existence et l'unicité de la solution et assurée par le théorème 2.1.

Convergence forte :
Pour étudier la convergence forte de $u(\varepsilon)$, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire sur les données :

Hypothèse : Soit $\bar{u}_0 \in H$, tel que :

$$\bar{u}_0^1(x_1, x_2) = \zeta_0^1(x_1) \text{ et } \bar{u}_0^2(x_1, x_2) = \zeta_0^2(x_2),$$

on suppose que

$$u_0(\varepsilon) \to \bar{u}_0 \text{ fortement dans } H,$$

et

$$f(\varepsilon) \to f(0) \text{ fortement dans } L^2(0,T;H).$$

On a alors le théorème de convergence forte suivant :

Théorème 2.3. *La famille $u(\varepsilon)$ tend fortement vers $u(0)$ dans $L^2(0,T;V)$ quand $\varepsilon \to 0$.*

Pour démontrer ce théorème, on pose d'abord $T' = T + 1$. En prolongeant $f(\varepsilon)$ par 0 de T à T' et on prolongeant aussi $u(\varepsilon)$ à $[T,T']$.
Le théorème (2.2) reste vrai en remplaçant T par T'. D'après l'hypothèse ce dessus, on a :

$$f(\varepsilon) \to f(0) \text{ fortement dans} L^2(0,T';H). \tag{2.43}$$

Pour tout $v(\varepsilon) \in H(\varepsilon)$, on pose :

$$\|u(\varepsilon)\|^2_{H(\varepsilon)} = \int_{\Omega^1\setminus J^1_\varepsilon} v^1(\varepsilon)^2 dx + \int_{\Omega^2\setminus J^2_\varepsilon} v^2(\varepsilon)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{J_\varepsilon} v^1(\varepsilon)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{J^2_\varepsilon} v^2(\varepsilon)^2 dx, \tag{2.44}$$

on note $(.,.)_{H(\varepsilon)}$ le produit scalaire associé à $H(\varepsilon)$.
Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.8. *sous l'hypothèses ci-dessus, on a*

$$\frac{T'}{2}\|u_0(\varepsilon)\|^2_{H(\varepsilon)} + \int_0^{T'} (T'-t)(f(\varepsilon),u(\varepsilon))_{H(\varepsilon)} dt \to \frac{T'}{2}\|u_0(0)\|^2_H + \int_0^{T'} (T'-t)(f(0),u(0))_H dt. \tag{2.45}$$

Démonstration du théorème 2.3 **:** Pour tout $(u(\varepsilon), v(\varepsilon)) \in V(\varepsilon)^2$, on pose :

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(v(\varepsilon),w(\varepsilon)) = &\int_{\Omega^1\setminus J^1_\varepsilon} b^1_\varepsilon(v^1(\varepsilon),w^1(\varepsilon))dx + \int_{\Omega^2\setminus J^2_\varepsilon} b^2_\varepsilon(v^2(\varepsilon),w^2(\varepsilon))dx + \\ &\frac{1}{2}\int_{J^1_\varepsilon} b^1_\varepsilon(v^1(\varepsilon),w^1(\varepsilon))dx + \frac{1}{2}\int_{J^2_\varepsilon} b^2_\varepsilon(v^2(\varepsilon),w^2(\varepsilon))dx, \end{aligned}$$

Grâce aux changement d'échelle, on obtient l'estimation suivante :

$$C(\|(u(\varepsilon)-u(0))(t)\|_H^2+\int_0^t\|(u(\varepsilon)-u(0))(s)\|_V^2)\leq$$
$$\frac{1}{2}\|(u(\varepsilon)-u(0))(t)\|_{H(\varepsilon)}^2+\int_0^t B_\varepsilon(u(\varepsilon)-u(0),u(\varepsilon)-u(0))(s)ds,$$

où C est une constante positive indépendante de ε.
Noton $I(\varepsilon)$ la quantité :

$$I(\varepsilon)=\frac{1}{2}\|(u(\varepsilon)-u(0))(t)\|_{H(\varepsilon)}^2+\int_0^t B_\varepsilon(u(\varepsilon)-u(0),u(\varepsilon)-u(0))(s)ds,$$

Le dévloppement de $I(\varepsilon)$ donne :

$$I(\varepsilon)=\frac{1}{2}\|u(\varepsilon)(t)\|_{H(\varepsilon)}^2+\frac{1}{2}(u(0)-2u(\varepsilon),u(0))_{H(\varepsilon)}(t)+\int_0^t B_\varepsilon(u(\varepsilon)-u(0),u(\varepsilon)-u(0))(s)ds, \tag{2.46}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t B_\varepsilon(u(\varepsilon)-u(0),u(\varepsilon)-u(0))(s)ds=&\int_0^t\int_{\Omega^1\backslash J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon)-u^1(0),u^1(\varepsilon)-u^1(0))(s)dxds+\\&\int_0^t\int_{\Omega^2\backslash J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon)-u^2(0),u^2(\varepsilon)-u^2(0))(s)dxds+\\&\frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon)-u^1(0),u^1(\varepsilon)-u^1(0))(s)dxds+\\&\frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon)-u^2(0),u^2(\varepsilon)-u^2(0))(s)dxds,\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^t B_\varepsilon(u(\varepsilon)-u(0),u(\varepsilon)-u(0))(s)ds = \int_0^t\int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),u^1(\varepsilon))(s)dxds +\\
\int_0^t\int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),u^2(\varepsilon))(s)dxds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),u^1(\varepsilon))(s)dxds +\\
\frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),u^2(\varepsilon))(s)dxds + \int_0^t\int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),-u^1(0))(s)dxds +\\
\int_0^t\int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),-u^2(0))(s)dxds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(\varepsilon),-u^1(0))(s)dxds +\\
\frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(\varepsilon),-u^2(0))(s)dxds + \int_0^t\int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(-u^1(0),u^1(\varepsilon))(s)dxds +\\
\int_0^t\int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(-u^2(0),u^2(\varepsilon))(s)dxds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(-u^1(0),u^1(\varepsilon))(s)dxds +\\
\frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(-u^2(0),u^2(\varepsilon))(s)dxds + \int_0^t\int_{\Omega^1\setminus J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(0),u^1(0))(s)dxds +\\
\int_0^t\int_{\Omega^2\setminus J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(0),u^2(0))(s)dxds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^1} b_\varepsilon^1(u^1(0),u^1(0))(s)dxds +\\
\frac{1}{2}\int_0^t\int_{J_\varepsilon^2} b_\varepsilon^2(u^2(0),u^2(0))(s)dxds,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_0^t B_\varepsilon(u(\varepsilon)-u(0),u(\varepsilon)-u(0))(s)ds = \int_0^t B_\varepsilon(u(\varepsilon),u(\varepsilon))(s)ds + \int_0^t B_\varepsilon(u(0)-2u(\varepsilon),u(0))(s)ds$$

Grâce aux calculs ci dessus, (2.46) s'écrit :

$$\begin{aligned}
I(\varepsilon) = \frac{1}{2}\|u(\varepsilon)(t)\|^2_{H(\varepsilon)} + \frac{1}{2}(u(0)-2u(\varepsilon),u(0))_{H(\varepsilon)} + \int_0^t B_\varepsilon(u(\varepsilon),u(\varepsilon))(s)ds +\\
\int_0^t B_\varepsilon(u(0)-2u(\varepsilon),u(0))(s)ds,
\end{aligned}$$

comme :

$$\frac{1}{2}\|u(\varepsilon)(t)\|^2_{H(\varepsilon)} + \int_0^t B_\varepsilon(u(\varepsilon),u(\varepsilon))(s)ds = \frac{1}{2}\|u_0(\varepsilon)\|^2_{H(\varepsilon)} + \int_0^t (f(\varepsilon),u(\varepsilon))_{H(\varepsilon)}(s)ds,$$

alors

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{2}\|u_0(\varepsilon)\|^2_{H(\varepsilon)} + \int_0^t (f(\varepsilon), u(\varepsilon))_{H(\varepsilon)}(s)ds + \frac{1}{2}(u(0) - 2u(\varepsilon), u(0))_{H(\varepsilon)}(t) + \int_0^t B_\varepsilon(u(0) - 2u(\varepsilon), u(0))(s)ds.$$

Par intégration de 0 à T', on obtient :

$$C(\int_0^{T'} \|(u(\varepsilon) - u(0))(t)\|^2_H dt + \int_0^{T'} (T' - t)\|(u(\varepsilon) - u(0))(t)\|^2_V dt) \leq \frac{T'}{2}\|u_0(\varepsilon)\|^2_{H(\varepsilon)} + \int_0^{T'} (T' - t)(f(\varepsilon), u(\varepsilon))_{H(\varepsilon)}(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{T'} (u(0) - 2u(\varepsilon), u(0))_{H(\varepsilon)}(t)dt + \int_0^{T'} (T' - t)B_\varepsilon(u(0) - 2u(\varepsilon), u(0))(t)dt.$$

De (2.29) on a :

$$u(\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} u(0) \text{ dans } L^\infty(0, T'; H),$$

alors on déduit que :

$$u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0) \text{dans } L^2(0, T'; H),$$

d'où :

$$\int_0^{T'} (u(0) - 2u(\varepsilon), u(0))_{H(\varepsilon)}(t)dt \to -\int_0^{T'} \|u(0)\|^2_H(t)dt.$$

De (2.28) on a :

$$u(\varepsilon) \rightharpoonup u(0) \text{ dans } L^2(0, T'; V),$$

on aura alors :

$$\int_0^{T'} (T' - t)B_\varepsilon(u(0) - 2u(\varepsilon), u(0))(t)dt \to -\int_0^{T'} (T' - t)B_0(u(0), u(0))(t)dt,$$

où $B_0(u(0), u(0))$ est la forme bilinéaire obtenue en faisant tendre ε vers 0.

En passant à la limite et grâce au lemme (2.9), on obtient :

$$C \limsup_{\varepsilon\to 0}(\int_0^{T'} [\|(u(\varepsilon) - u(0))(t)\|^2_H + (T' - t)\|(u(\varepsilon) - u(0))(t)\|^2_V]dt) \leq \frac{T'}{2}\|u_0(0)\|^2_H + \int_0^{T'} (T' - t)(f(0), u(0))_H(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^{T'} \|u(0)\|^2_H(t)dt - \int_0^{T'} (T' - t)B_0(u(0), u(0))(t)dt,$$

on déduit alors que :

$$u(\varepsilon) \to u(0) \text{ dans } L^2(0,T;V).$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'analyse asymptotique de l'équation de la chaleur posée sur un multi-domaine bidimensionnel mince en forme "L". Nous avons obtenu, en faisant tendre l'épaisseur mince vers zéro, un modèle de jonction $1D$-$1D$, plus simple et plus économique pour la résolution numérique.
L'analyse menée dans cette étude peut être généralisée à d'autres modèles et d'autres équation (équation des ondes, élasticité,...etc). En outre, la multi-structure consdérée peut avoir d'autres formes et être composée de plusieurs structures minces. L'intêret essentiel de ce type d'études réside dans le fait que ces multi-structures sont souvent utilisées en physique, mécanique et sciences de l'ingénieur.

Bibliographie

[1] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, (1987).

[2] H. LEDRET. Problèmes variationnels dans les multi-domaines. Masson (1991)

[3] M. Chipot, Elements of nonlinear analysis, Birkh$\ddot{a}$user, (2000).

[4] R. Temam, Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland Publishing Company (1977).

[5] J. Rochat, Les espaces de Sobolev, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, (2009).

[6] Adams R.S "Sobolev spaces", Academic press New York (1975).

[7] A. Munnier, Espaces de sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Nancy Université, France, (2007-2008).