

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université MOULOUD MAMMÉRI de Tizi-Ouzou



Faculté du Génie de la Construction

Département de Génie Mécanique

En vue de l'obtention du diplôme de master en génie mécanique

Filière: Génie mécanique

Spécialité : Construction mécanique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

THEME :

Application de la plasticité à la mise en forme

Présenté par :

BENBACHIR MADJID

BOURKACHE YACINE

Encadré par :

M^r. DJEBBAR

Devant le jury d'examen composé de :

M^r. BOUAZZOUNI

M^r. BILLEK

M^r. ILLOUL

Soutenu le : 04/10/2016

Promotion : 2015/2016

Remerciements

Nous exprimons nos vifs remerciements à notre promoteur

Mr DJEBBAR .A enseignant et chercheur au département de Génie Mécanique de TIZI-OUZOU de nous avoir proposé ce sujet. On tient à le remercier pour sa précieuse aide, sa disponibilité et ses précieux conseils pour l'élaboration de ce travail.

Nous remercions également le président et les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous font en jugeant notre travail.

Nos remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Génie Mécanique qui nous ont suivis le long de notre cursus universitaire.

On tient à remercier nos chères amis et toutes les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin.

Dédicaces

Je dédie ce travail:

*A mon très cher père et ma très chère mère auxquels je dois tout dans la vie et que je ne remercierai jamais assez pour leurs soutiens, encouragements durant tout mon parcours d'étude.
A la mémoire de mes grands parents paternels.*

A ma sœur, son mari et leur fils ARIS ainsi qu'à toute ma famille.

A mon pote et cher binôme MADJID.

A mes chers amis : MACY, FATAH, SLIMANE, RACHID, AZIZ, AMIR, HAKIM, [B1-118], YACINE (DJEDI), ANIS, MASTENE, SOFIANE et à ma chère amie DYHIA.

A tous mes amis et à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin dans ce travail.

BOURKACHE YACINE

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

La mémoire de mon père, à ma mère ainsi qu'à tous les membres de ma famille, qui n'ont pas cessé de me soutenir dans toutes mes décisions.

Mes chers frères :

AMER, YEHLIA, AHMED, MOUMOUH

Tous mes amis, dont je cite :

Mon pote et cher binôme YACINE

HAKIM mon ami d'enfance

RACHID, FATEH, SLIMANE, MACY, HAKIM, AMIR, SALEM, AHMED, AZIZ MAKHLOUF, et SMAIL. [B1-118]

Ce travail je le dédie spécialement aux étudiants (es) de ma section.

BENBACHIR MADJID

SOMMAIRE

Introduction générale	1
-----------------------------	---

CHAPITRE I : les lois de comportement

I.1. Introduction	2
I.2. Les essais mécaniques	3
I.3. Les modèles rhéologiques	7
I.3.1. Modèles élémentaires.....	7
I.3.1.1. Le ressort	7
I.3.1.2. L'amortisseur.....	8
I.3.1.3. Le patin	9
I.3.2. Modèles non élémentaires.....	10
I.3.2.1. Modèles visqueux-élastiques	10
I.3.2.2. Modèle de MAXWELL (HOOK + NEWTON).....	10
I.3.2.3. Modèle de KELVIN VOIGT.....	11
I.3.2.4. Solide élastique linéaire parfaitement plastique	12
I.3.2.5. Solide élasto-plastique écrouissable	13
I.4. L'écrouissage	15
I.4.1. L'écrouissage isotrope.....	17
I.4.2. L'écrouissage cinématique	18
I.5. L'anisotropie.....	21

I.5.1. L'origine de l'anisotropie	21
I.5.2. Explication de l'anisotropie.....	22
I.6. Rappel sur l'anisotropie élastique.....	22
I.6.1. Les tenseurs d'élasticité	23
I.6.2. Convention d'écriture	23
I.6.3. Matériau isotrope	25
I.6.4. Matériau orthotrope	25
I.6.5. Matériau isotrope transverse	27
I.7. Utilisation des matériaux anisotropes	28
I.8. Conclusion	29

CHAPITRE II : La plasticité

II.1. Introduction	30
II.2. Rappel sur la mécanique des milieux continus	31
II.2.1. L'état de contrainte	31
II.2.2. L'état de déformation	35
II.2.3. Relation contraintes / déformation	37
II.3. Critères de plasticité	37
II.3.1. Surface et fonction de charge	38
II.3.2. Critère de HILL	40
II.3.2.1. Enoncé du principe de HILL.....	40
II.3.2.2. Règle de normalité.....	43
II.3.3. Critère de VON MISES et le critère de TRESCA.....	45
II.3.3.1. Critère de VON MISES.....	45
II.3.3.2. Critère de TRESCA	47
II.4. Conclusion	49

CHAPITRE III : Application à la mise en forme

III.1. Introduction	50
III.2. Méthode des tranches.....	50
III.2.1. Présentation générale de la méthode	51
III.2.1.1. Méthode de COULOMB.....	53
III.2.1.2. Méthode de la couche limite	53
III.2.2. Les méthodes d'encadrement	58
III.2.2.1. Méthode de la borne supérieure	58
III.2.2.2. Méthode de la borne inférieure	72
III.3. Méthode des lignes de glissement	77
III.3.1. Les lignes de glissement et leurs propriétés	77
III.3.2. Application de la méthode des lignes de glissement.....	79
III.4. Conclusion.....	91
Conclusion générale.....	92

Symboles :

$\bar{\bar{\sigma}}$: Tenseur des contraintes

$\bar{\bar{\epsilon}}$: Tenseur des déformations

$\bar{\bar{D}}$: Partie déviatorique des contraintes

$\bar{\bar{S}}$: Partie sphérique des contraintes

$\bar{\bar{I}}$: Matrice identité

\vec{U} : Vecteur déplacement

\vec{f} : Vecteur force

$\vec{\gamma}$: Vecteur accélération

$\bar{\bar{W}}$: Tenseur des rotations

σ : La contrainte

ϵ : La déformation

ϵ_e : déformation élastique

ϵ_p : Déformation plastique

$\dot{\epsilon}$: Vitesse de déformation

R_m : Résistance à la traction

σ_m : Contrainte moyenne

τ_{oct} : Contrainte octaédrale

M : La masse

F : La force

E : Module d'Young

η : Coefficient de viscosité

$f(\bar{\sigma}, \beta)$: Fonction de charge

β : Paramètre d'écroutissage

μ, λ : Coefficient de lamé

t : Temps

$I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3$: Les invariant

φ_i : Fonction de Lagrange

L : Longueur

h : Hauteur

e : épaisseur

a : Largeur

v : volume

s : surface

W : Travail

Ψ : contrainte moyenne

θ : Angle de rotation

Liste des figures

Fig. 01: Essai d'érouissage en traction simple	4
Fig. 02: Essai de fluage en traction simple	5
Fig. 03: Essai de relaxation en traction simple	5
Fig. 04: Modèle analogique de la partie élastique (ressort)	8
Fig. 05: L'amortisseur.....	8
Fig. 06: Partie plastique.....	9
Fig. 07: Patin	9
Fig. 08: Modèle de Maxwell (ressort et amortisseur).....	10
Fig. 09: Modèle de Kelvin Voigt.....	11
Fig. 10-A: Modèle rhéologique élastique parfaitement plastique (EPP).....	12
Fig. 10-B: Courbe de traction d'un modèle élastique parfaitement plastique (EPP).....	12
Fig. 11: Modèle de Saint-Venant généralisé.....	14
Fig. 12: Réponse du modèle (contrainte / déformation).....	14
Fig. 13: Courbe de traction.....	16
Fig. 14: Courbe de traction /compression présentant l'érouissage isotrope.....	17
Fig. 15: Représentation de l'érouissage isotrope dans l'espace des contraintes.....	17
Fig. 16: Courbe de traction /compression présentant l'érouissage cinématique.....	18
Fig. 17: Représentation de l'érouissage cinématique dans l'espace des contraintes.....	18
Fig. 18: Modèle rhéologique de l'érouissage cinématique avec effet BAUSCHINGER.....	19
Fig. 19: Courbe de traction d'un matériau ayant un comportement élastique-plastique avec érouissage	20
Fig. 20: Représentation des contraintes sur un élément de volume (cube).....	32
Fig. 21: Configuration d'un solide dans l'espace.....	35

Fig. 22: Courbe de traction avec écrouissage.....	38
Fig. 23: Influence de l'écrouissage sur la plasticité.....	39
Fig. 24: Représentation du domaine élastique dans l'espace des contraintes.....	39
Fig. 25: Evolution de la déformation plastique	41
Fig. 26: Convexité et concavité de la surface de charge.....	42
Fig. 27: Normalité de la déformation.....	43
Fig. 28: Explication de la règle de normalité.....	44
Fig. 29: Représentation des contraintes sur un cylindre en traction / torsion.....	45
Fig. 30: Représentation des critères (Tresca et Van-Mises)	48
Fig. 31: Barre parallélépipédique.....	52
Fig. 32: Forgeage de la barre	52
Fig. 33: Les différentes couches observées sous l'effet du forgeage.....	54
Fig. 34: Tranche d'épaisseur dx en équilibre.....	55
Fig. 35: Représentation de la répartition linéaire décroissante de la contrainte σ_{yy} le long de l'axe x	57
Fig. 36: Sens de l'application de l'effort de forgeage sur la pièce.....	60
Fig. 37: Les trois étapes de contact pièce / outil	62
Fig. 38: Les différentes zones de glissement.....	63
Fig. 39: L'hodographe des déplacements	65
Fig. 40: Déplacement des zones.....	66
Fig. 41: Déplacement maximal.....	67
Fig. 42: Représentation des contraintes sur la pièce.....	74
Fig. 43: Etat de contrainte en un point P.....	78
Fig. 44: Tracé des lignes de glissement en un point P.....	78
Fig. 45: Etat plan de contraintes.....	81
Fig. 46: Cercle de MOHR.....	82
Fig. 47: Rotation des axes.....	83

Fig. 48: Les lignes de glissement avec divers axes84

Fig. 49: Construction des lignes de glissement d'une barre en forgeage.....86

Fig. 50: Utilisation des lignes de glissement en 2 points distincts (S) et (P).....87

Fig. 51-A: Définition des axes en P.....88

Fig. 51-B: Définition des axes en S.....88

Liste des tableaux

Tableau A : valeurs des énergies dissipées.....70

Introduction générale :

Le procédé de forgeage est l'une des techniques de mise en forme utilisé par l'Homme depuis l'éternité. En raison de ces diverses applications il est d'une importance primordiale dans l'industrie de fabrication.

L'utilisation de ce dernier nécessite la prise en considération du type du matériau avec lequel on travaille, la géométrie de la pièce ainsi que la capacité de la machine. Il est donc essentiel de déterminer l'effort de forgeage à fin de prévenir les risques de détérioration au cours de l'opération.

Pour cela plusieurs méthodes ont été mises en place pour répondre à ce besoin.

Dans ce présent travail on déterminera l'effort nécessaire pour forger une barre à l'aide de deux méthodes distinctes :

- La méthode des tranches : La solution que donne cette méthode sera par la suite encadrée en suivant les méthodes d'encadrement (borne supérieure et borne inférieure) ;
- La méthode des lignes de glissement : donnant une solution exacte.

Le plan du présent travail comporte trois chapitres :

- Le premier chapitre est une large recherche bibliographique concernant le comportement des matériaux ;
- Le deuxième chapitre est consacré à quelques rappels important de la mécanique des milieux continus et de la plasticité ;
- Le dernier chapitre expose les différentes méthodes utilisées ainsi que leur application sur le forgeage d'une barre.

On terminera par une conclusion générale.

CHAPITRE I

Les lois de comportement

I.1. Introduction :

Parfois il est difficile de déterminer le champ de contrainte ou de déplacement à partir de la simple application des principes de la physique (principe fondamental de la mécanique, les principes de la thermodynamique, conservation de la masse).

Généralement les inconnues recherchées d'après [1] sont :

- Six inconnues du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$
- Six inconnues du tenseur des déformations $\overline{\overline{\epsilon}}$
- Trois inconnues du champ de déplacement \vec{U}

Les équations formulées sont :

Relation déformation-déplacement qui donne 9 termes du tenseur des déformations [1].

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{\text{Grad } \vec{U}}} + \overline{\overline{\text{Grad } \vec{U}^T}}) \dots\dots\dots(1)$$

Les équations d'équilibre ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Statique : } \overline{\overline{\text{div}}} \overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} \\ \text{Dynamique : } \overline{\overline{\text{div}}} \overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = M \vec{\gamma} \end{array} \right. \dots\dots\dots (2)$$

Lorsque le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, la détermination de ces dernier semble impossible. Alors pour combler cette différence on utilise des relations empiriques ; Ainsi sont obtenues les équations de comportement qui relient les contraintes aux déformations est permettent d'avoir un nombre suffisant d'équations pour résoudre le problème.

Remarque :

- La majorité des équations sont des équations différentielles ; Alors pour déterminer les constantes d'intégration il est nécessaire de poser les conditions aux limites, et selon la nature du problème posé les conditions initiales elles aussi peuvent être indispensables.
- Les six équations de compatibilité servent uniquement à la vérification de l'intégrabilité du champ de déformation, elles sont données d'après [1] par la notation simplifiée suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_1 \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_1 \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} = 0} \quad \text{.....(3)}$$

Soit sous forme développée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad \dots (4) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Donc l'identification du comportement d'un matériau donnée nécessite la réalisation de certains essais mécaniques selon le besoin qui sont faisable que sur des éprouvettes avec des formes géométriques bien définies ; La loi de comportement élaborée sera par la suite généralisée.

I.2. Les essais mécaniques :

L'application des divers chargements va nous permettre d'étudier les relations de cause à effet qui existe entre les variables physiques accessibles [2].

On entend par les variables physiques accessibles :

- Les déformations et leurs vitesses.
- Les contraintes.
- Le temps
- La température.

Les deux notions de déformation et de contrainte font apparaître l'aspect tensoriel, et généralement on accède à une mesure qui n'est qu'une partie d'un tout alors qu'en réalité il nous faut établir des relations entre tenseurs.

L'objectif des essais est de trouver les relations existantes entre le chargement appliqué (F) et la déformation (ε).

Les essais classiques se faisaient essentiellement en [traction / compression] simple (solicitation axiale) à température constante sur des éprouvettes de forme spécifique calculée de telle sorte que la distribution de la contrainte et de la déformation soit uniforme dans le volume utile.

- **Essai d'écroutissage :**

Dans cet essai figure 01, la vitesse de déformation est constante.

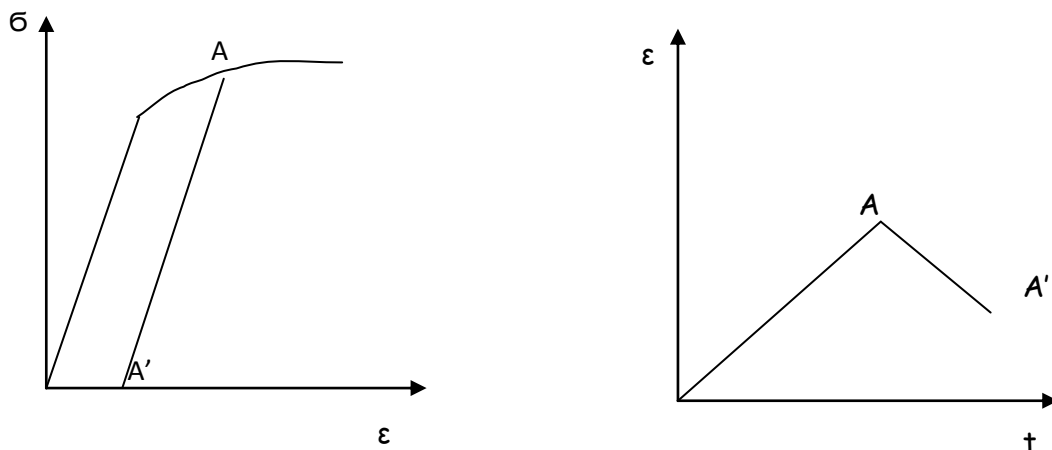


Figure 01 : Essai d'écroutissage en traction simple.

- **Essai de fluage :**

Dans cet essai la contrainte appliquée sera maintenue constante le temps qu'on étudie le comportement de l'éprouvette figure02, c'est à dire l'évolution de la déformation qui permet la caractérisation du durcissement ainsi que la viscosité du matériau.

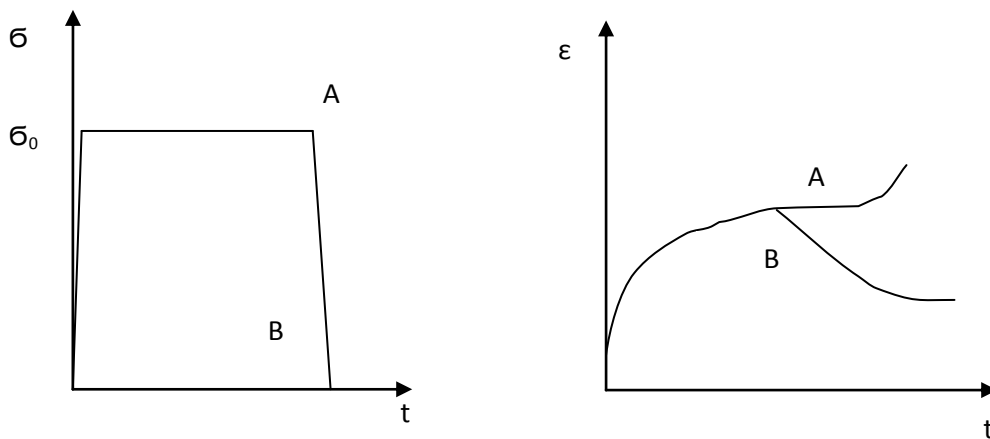


Figure 02 : Essai de fluage en traction simple.

NB :

Durant l’essai la température est contrôlée ; Alors à chaque valeur de contrainte on enregistre la vitesse de déformation qui est lente et le temps à rupture.

- **Essai de relaxation :**

On impose une déformation constante et on étudie l’évolution des contraintes, les résultats sont donnés par la figure 03.

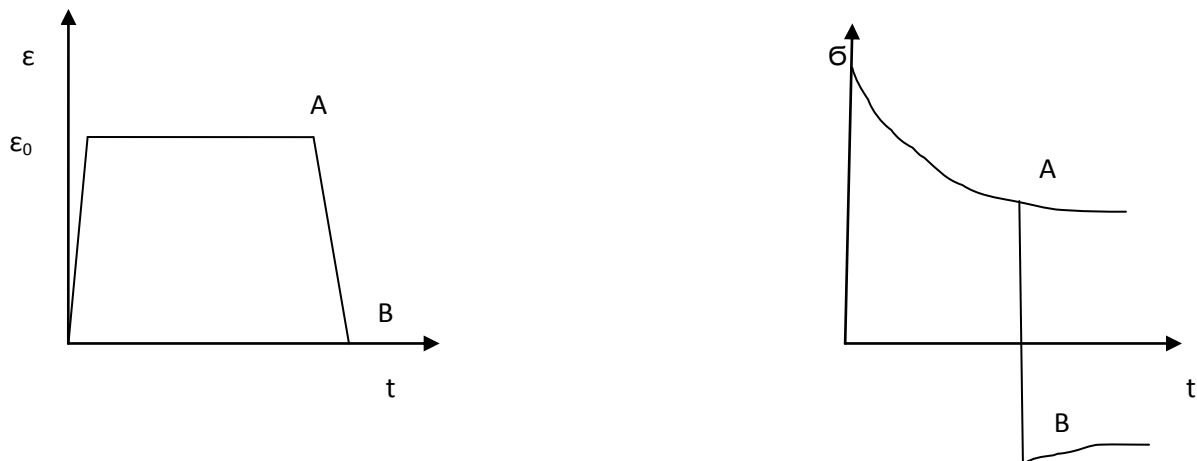


Figure 03 : Essai de relaxation en traction simple.

- **Les essais de rupture** : c'est les mêmes essais précédents mais poussés jusqu'à leurs limites (on s'arrête une fois que l'éprouvette est totalement ruinée).
- **Essai de flexion** : Des contraintes de traction et de compression sont générées simultanément ; Cet essai est fréquemment utilisé pour faire des contrôles de qualité.
- **Essai de torsion** : Cet essai permet d'accéder à certaines caractéristiques élastiques des matériaux anisotropes ; On l'utilise particulièrement pour étudier la déformation des alliages métalliques à hautes températures.
- **Essai de dureté** : Employé lui aussi comme moyen de contrôle ; La dureté reliée à la résistance à la traction par des relations empiriques limitées.
- **Les essais multiaxiaux** : imposés par le fait que la loi de comportement ne se limite pas à une seule contrainte ou déformation ou au temps. Ils permettent de mieux connaître les états tensoriels de contrainte et de déformation (ou sa vitesse).

D'autres méthodes existent : on peut citer à titre d'exemple l'approche microscopique donnée en [2] qui consiste à modéliser les mécanismes à partir d'une étude des liaisons atomiques. On effectue alors une intégration et une moyennisation des variables microscopiques pour avoir le comportement macroscopique.

Remarque :

Du fait que la loi de comportement d'un matériau ne peut se borner à une simple relation entre une seule contrainte, une seule déformation et le temps, il devient de plus en plus nécessaire de réaliser des essais multidimensionnels ou multiaxiaux. On trouvera ainsi des essais de traction-cisaillement, traction ou compression bi ou triaxiale. Ces essais sont onéreux mais ils permettent d'avoir une bonne caractérisation.

I.3. Les modèles rhéologiques:

Les résultats obtenus par les essais précédents ne présentent aucun intérêt si le comportement du matériau n'est pas modélisable (simuler sa réponse à une sollicitation mécanique) [3].

Cette modélisation est importante pour le calcul prévisionnel.

Deux associations distinctes imposent deux principales règles de calcul :

- Dans une association en série la déformation s'ajoute (somme) mais la contrainte supportée par chaque élément est la même.

$$\sigma = \sigma_i \quad \text{et} \quad \varepsilon = \sum_i^n \varepsilon_i \quad \text{.....(5)}$$

Avec n : nombre d'élément

- Dans une association en parallèle la contrainte imposée à l'ensemble est la somme de toutes les contraintes supportées par tous les éléments et la déformation est la même.

$$\varepsilon = \varepsilon_i \quad \text{et} \quad \sigma = \sum_i^n \sigma_i \quad \text{.....(6)}$$

Avec n : nombre d'élément

Commençant par citer quelques modèles élémentaires :

I.3.1. Modèles élémentaires :

I.3.1.1. Le ressort : C'est un modèle analogique qui représente le solide HOOKIEN

(Comportement mécanique purement élastique)

Dans cette modélisation en figure 04 la déformation est instantanée et réversible (disparaît si la force disparaît) [3].

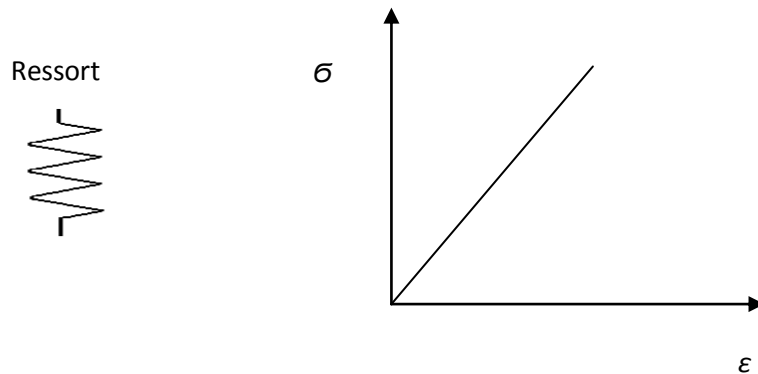


Figure 04 : Modèle analogique de la partie élastique (ressort)

La relation contrainte – déformation s’écrit simplement d’après [3] :

$$\sigma = E \varepsilon \quad \dots\dots\dots(7)$$

1.3.1.2. L’amortisseur :

Le modèle analogique, figure 05 d’après [3] correspondant à un élément visqueux linéaire est celui de l’amortisseur de viscosité η .

Il représente le fluide newtonien

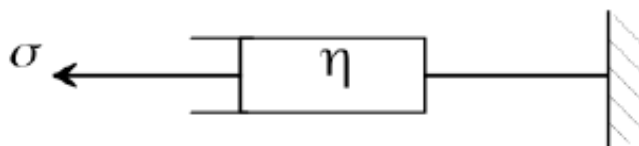


Figure 05 : L’amortisseur

Sa loi de comportement est la suivante :

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad \text{où : } \begin{cases} \dot{\varepsilon} : \text{est la vitesse de déformation} \\ \eta : \text{La viscosité [Pa. s]} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(8)$$

Plus la viscosité est grande, plus l'amortisseur est difficile à déformer. Une viscosité infinie correspond à un matériau indéformable.

La déformation est progressive et permanente (subsiste si la force disparaît).

I.3.1.3. Le patin :

Cet élément rhéologique (Figure 07) est utilisé pour modéliser le comportement plastique d'un matériau c'est à dire qu'à partir d'un certain seuil de contrainte (seuil de plasticité) le solide commence à subir une déformation irréversible ; après décharge le corps ne retrouve pas son état initial avant application du chargement.

Y a que les déformations indépendantes du temps qui sont prises en considération donc le corps a le même comportement qu'on le déforme rapidement où lentement, ces déformations sont appelées déformations plastiques [3].

D'un point de vue physique, les déformations plastiques peuvent être dues soit aux mouvements relatifs des grains (cas des sols) qui constitue le corps soit à des glissements de rangées atomiques dans le réseau cristallin (propagation de dislocations dans l'arrangement régulier du réseau).

Le patin est schématisé en figure 07 d'après [3] comme suite :

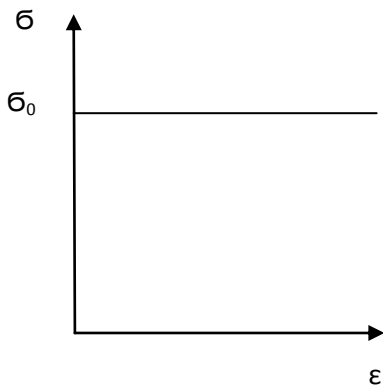


Figure 06 : Partie plastique

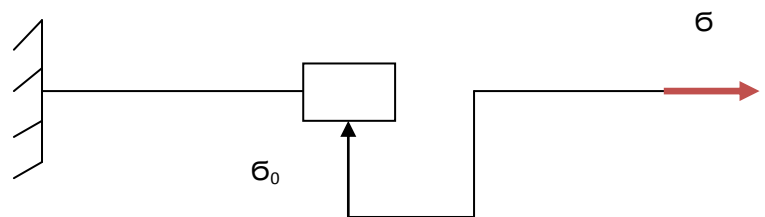


Figure 07 : Patin

Pour pouvoir déformer le patin il faut appliquer la contrainte σ_0 qui représente la contrainte seuil.

Une fois σ_0 atteinte le patin va se déformer mais si l'on supprime cette contrainte il ne va pas revenir à son état initial ; Ce retour à la position de départ nécessite l'application

d'une nouvelle contrainte qui sera d'intensité égale à la contrainte qui la déformé mais appliquée cette fois ci dans le sens inverse [3].

On écrit donc :

$| \sigma | < \sigma_0 \iff \epsilon = 0$ le patin ne se déforme pas si le seuil n'est pas atteint.

$| \sigma | = \sigma_0 \iff \epsilon \neq 0$ lorsque le patin se déforme (seuil atteint) la contrainte agissant sur le corps ne peut pas dépasser le seuil.

Physiquement un état où $| \sigma | > \sigma_0$ est irréalisable.

La surface seuil de plasticité est une fonction f définie par un critère telle que :

$$f(\sigma) = | \sigma | - \sigma_0 \leq 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

Elle définit le domaine élastique et le seuil de plasticité.

I.3.2. Modèles non élémentaires :

I.3.2.1. Modèles visqueux-élastiques :

On les obtient en associant des ressorts et des amortisseurs en série ou en parallèle.

I.3.2.2. Modèle de MAXWELL (HOOK + NEWTON) :

Le modèle de MAXWELL, figure 08 représente le modèle le plus simple du liquide viscoélastique ; Il ne décrit pas le fluage, [3].

C'est l'assemblage en série d'un ressort et d'un amortisseur.

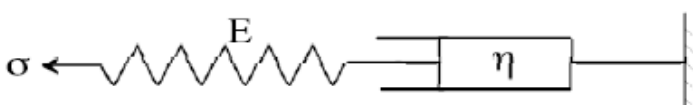


Figure 08 : Modèle de Maxwell (ressort et amortisseur)

La déformation totale est la somme de la déformation du ressort (déformation élastique) et celle de l'amortisseur (déformation visqueuse) mais la contrainte est la même, elle est proportionnelle à la déformation du ressort et à la vitesse de déformation de l'amortisseur, [3].

Donc on écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_v \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = E \boldsymbol{\varepsilon} = \eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \dots\dots\dots(11)$$

Alors :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = E \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = E (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v) \quad \dots\dots\dots(12)$$

Et il s'ensuit que la relation de comportement peut s'écrire pour le modèle de Maxwell.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = E \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{E}{\eta} \boldsymbol{\sigma} \quad \dots\dots\dots(13)$$

Pour une viscosité infinie on retrouve le modèle élastique,[3].

1.3.2.3. *Modèle de KELVIN VOIGT :*

Dans cette représentation d'après [3] on associe en parallèle un ressort à un amortisseur comme le montre la figure 09 :

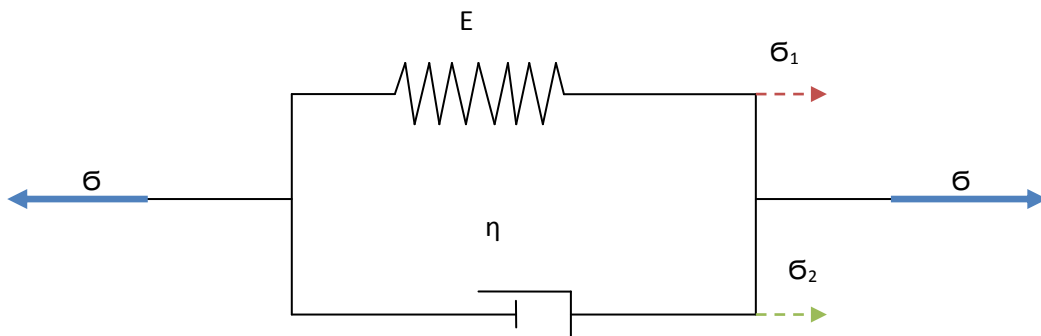


Figure 09 : Modèle de Kelvin Voigt

On a donc :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \dots\dots\dots(13)$$

Avec :

$$\begin{cases} \sigma_1 = E \varepsilon \\ \sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(14)$$

Alors :

$$\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots(15)$$

Et :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right] \quad \dots\dots\dots(16)$$

Cette configuration est utilisée pour modéliser le comportement des polymères ou des pièces en caoutchouc ou en bois si la sollicitation n'est pas trop élevée.

1.3.2.4. Solide élastique linéaire parfaitement plastique :

D'après [3] c'est une association en série d'un ressort et d'un patin comme en figure 10 -A.

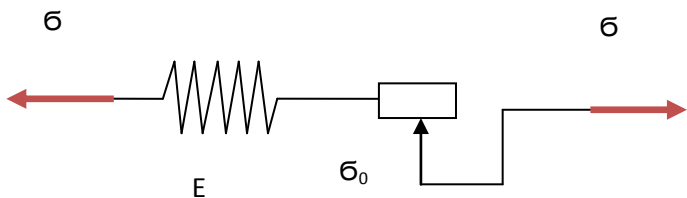


Figure 10-A : Modèle rhéologique élastique parfaitement plastique (EPP)

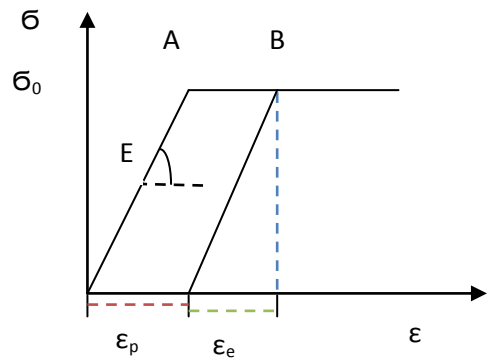


Figure 10-B : Courbe de traction d'un modèle élastique parfaitement plastique (EPP)

Si l'on applique une contrainte inférieure à σ_0 (seuil de plasticité) le patin ne va pas bouger le ressort est le seule qui se déforme, on écrit alors :

$$|\sigma| < \sigma_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad (\text{domaine élastique}) \quad \dots\dots(17)$$

Une fois que le seuil est atteint, le patin et le ressort vont se déformer.

Si l'on décharge, le patin gardera une certaine déformation appelée déformation plastique.(figure 10-B)

$$|\sigma| = \sigma_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (\text{domaine plastique}) \quad \dots\dots(18)$$

Ce type de comportement permet de traiter des problèmes d'analyse limite (ruine d'une structure par rotule plastique) ou pour certain type d'acier à faible teneur en carbone.

1.3.2.5. Solide élasto-plastique écrouissable :

C'est un solide dont on voit l'apparition d'une déformation permanente au-delà du seuil σ_0 , [4].

On écrit les relations décrivant le comportement :

$$|\sigma| < \sigma_0 \quad \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$|\sigma| \geq \sigma_0 \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + f(\sigma) \quad \dots\dots\dots(20)$$

Le modèle analogique associé d'après [4] est le modèle de Saint-Venant généralisé. Il est réalisé par des montages en séries et en parallèles de ressorts et de patins comme en figure 11.

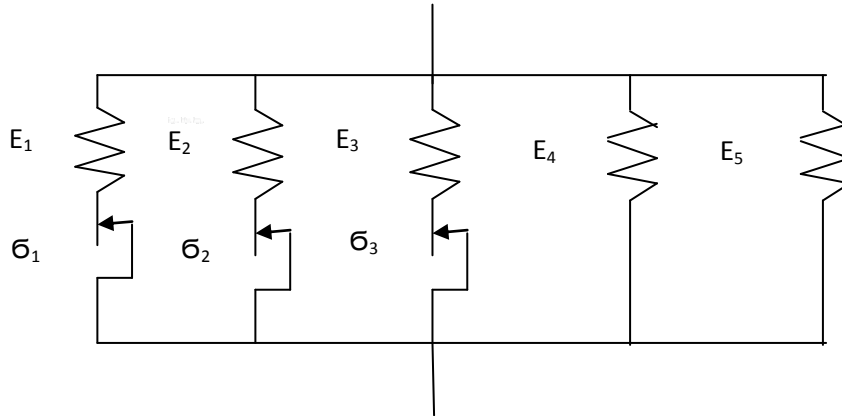


Figure 11 : Modèle de Saint-Venant généralisé

Pour un essai de traction d'après [4] on obtient une courbe linéaire par morceaux (figure 12). En supposant les seuils $\sigma_{(patins)}$ rangés dans un ordre croissant, l'équation au seuil d'indice i et j :

Avec : $i = 1 : 3$ (éléments patins) et $j = 1 : 5$ (éléments ressorts)

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 \sigma_i + \sum_{j=1}^5 E_j \epsilon \quad \dots\dots\dots(21)$$

Alors la déformation ϵ sera :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_j}{E_j} & \text{si } \sigma < \sigma_i \\ \frac{\sigma_j}{E_j} + \epsilon_{patin} & \text{si } \sigma = \sigma_i \end{cases} \quad \dots\dots\dots(22)$$

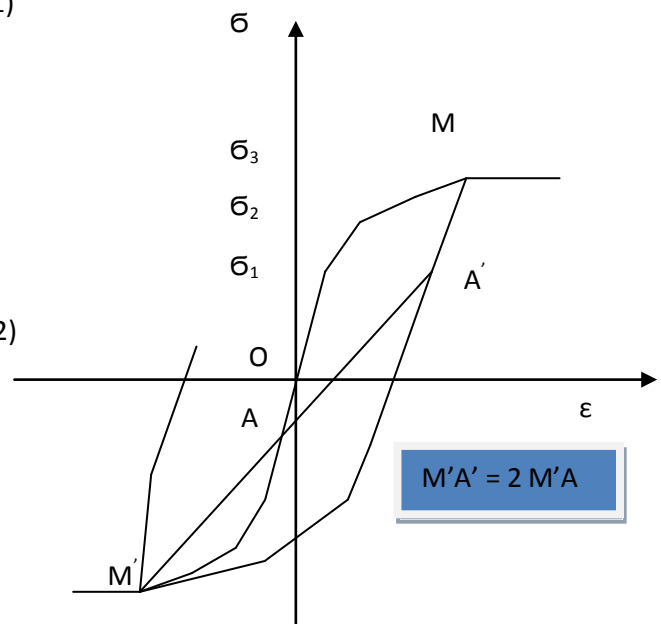


Figure 12 : Réponse du modèle (contrainte / déformation)

Ce modèle présente la particularité d'avoir une courbe d'écrouissage de décharge après traction qui se déduit de la courbe d'écrouissage en compression par une homothétie de rapport 2 et de centre M' symétrique de point de décharge M par rapport à l'origine O

Ce comportement se retrouve dans des métaux et alliages à des températures inférieures au quart de leur température absolue de fusion, [4].

I.4. L'écrouissage :

L'écrouissage d'un métal caractérise son durcissement sous l'effet de sa déformation plastique. Ce durcissement explique globalement les différences entre les pièces métalliques obtenues par corroyage (déformation plastique) [laminage, tréfilage, forgeage] et les pièces de fonderie.

L'écrouissage ne se produit que sur les matériaux ductiles et dans le domaine plastique.

D'après [5] il ne concerne donc que les métaux, à l'exclusion des matières plastiques, des élastomères, des verres et des céramiques. Par ailleurs, ce phénomène est restreint aux métaux :

- **non-fragiles :**

Cela exclut les métaux à basse température (en dessous de la température de transition fragile-ductile) et les métaux non-plastifiables (par exemple les aciers martensitiques et certaines fontes) .

- **ne présentant pas de comportement rhéologique :**

Cela exclut les vitesses de déformation très lentes (fluage) et les applications à haute température.

L'écrouissage correspond aux modifications que subit le métal lorsque les contraintes qui lui sont appliquées sont suffisamment fortes pour provoquer des déformations plastiques, permanentes. Ces modifications sont d'ordre métallurgique (modification de la structure interne du métal) et ont généralement une influence sur ses propriétés mécaniques.

L'écrouissage se caractérise par une augmentation de la limite d'élasticité et de la dureté ; le matériau devient aussi plus fragile. Suivant les métaux considérés, les

propriétés mécaniques peuvent évoluer vers une augmentation de la résistance (cas des aciers alliés) jusqu'à un certain point (seuil de rupture), ou à l'inverse vers sa diminution (cas des aciers peu alliés).

Exemples d'écrouissage :

Si l'on tord un fil de fer (fléchit serait un terme plus exact), puis que l'on essaie de le redresser, on constate qu'il conserve une déformation à l'endroit de la déformation initiale : cet endroit s'est durci, et il devient difficile de déformer le fil à nouveau, dans l'autre sens, [5].

Mise en évidence du phénomène :

Si l'on considère d'après [5] un essai de traction simple (uni-axial), on peut mettre en évidence l'écrouissage en interrompant l'essai comme en figure 13 :

1 / -Dans un premier temps, on étire l'éprouvette en dépassant la limite d'élasticité, mais sans aller jusqu'à la striction. (C'est-à-dire au dessous de la résistance à la traction R_m);

2 / -On annule l'effort, l'éprouvette se rétracte de manière élastique, suivant une droite dans le diagramme (ϵ, σ) . (Parallèlement à la partie élastique);

3 / - Si l'on tire à nouveau sur l'éprouvette, il faut revenir à la contrainte de la fin de la première étape pour provoquer une nouvelle déformation irréversible ; la limite d'élasticité a donc augmenté.

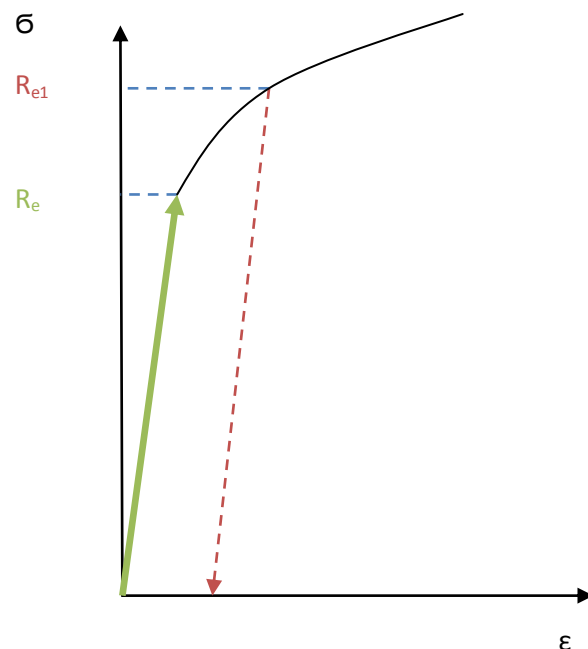


Figure 13 : Courbe de traction

• **Écrouissage cinématique VS isotrope :**

Théoriquement deux types d'écrouissage peuvent être observés :

I.4.1. L'écrouissage isotrope :

Il caractérise d'après [5] un gonflement du domaine élastique, donc une augmentation de limite élastique comme c'est montré en figure 14.

Sa représentation dans l'espace des contraintes est donnée en figure 15.

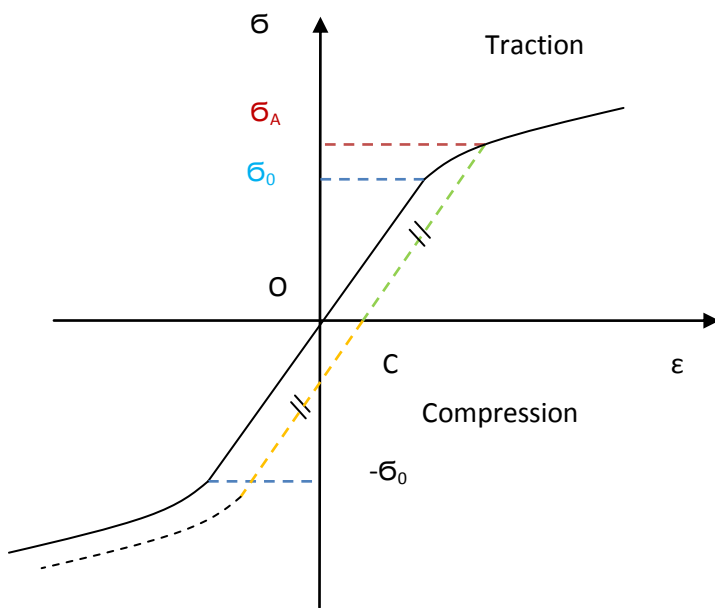


Figure 14 : Courbe de traction /compression présentant l'écrouissage isotrope

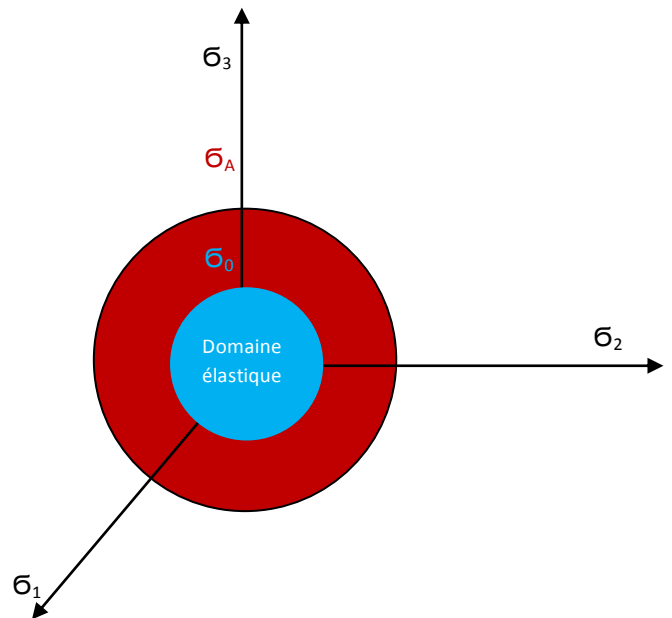


Figure 15 : Représentation de l'écrouissage isotrope dans l'espace des contraintes

La limite élastique a augmentée en traction et en compression.

I.4.2. L'écroissage cinématique :

Il caractérise d'après [5] la translation du domaine élastique comme le montre la figure 17 :

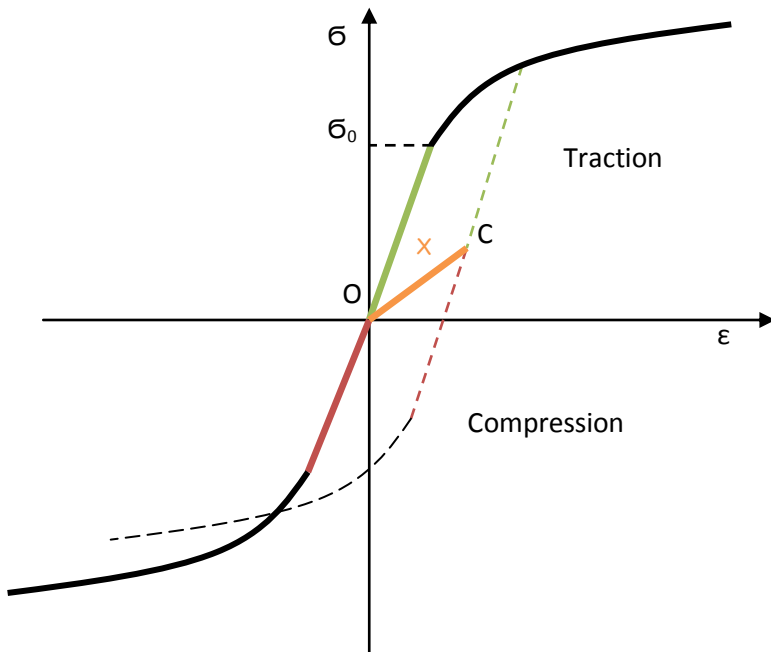


Figure 16 : Courbe de traction /compression présentant l'écrouissage cinématique

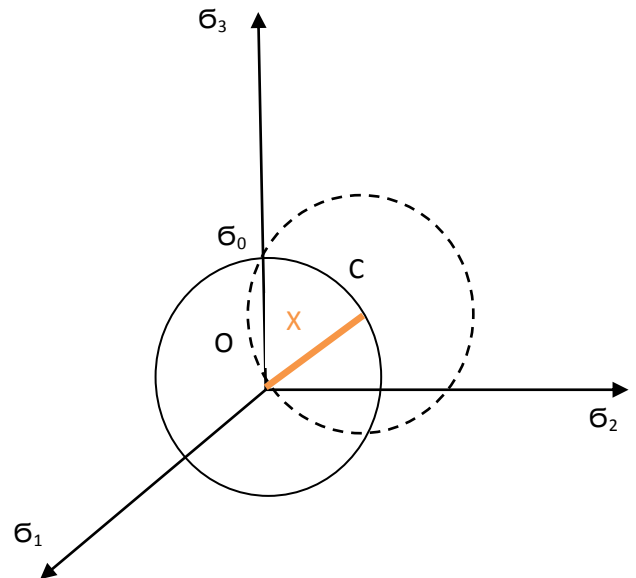


Figure 17 : Représentation de l'écrouissage cinématique dans l'espace des contraintes

On voit bien que le domaine élastique a été traduit d'une distance x (variable cinématique) tout en gardant le même seuil.

On observe aussi dans ce type d'écrouissage l'effet BAUSCHINGER défini d'après [5] comme suite : Lorsque l'on fait subir à un acier une déformation plastique en traction par exemple, sa limite élastique en traction augmente, mais (en général) sa limite élastique en compression diminue (en valeur absolue) ce que montre la figure 16.

Le modèle rhéologique utilisé pour modéliser l'écrouissage cinématique d'après [5] est celui de la figure 18 :

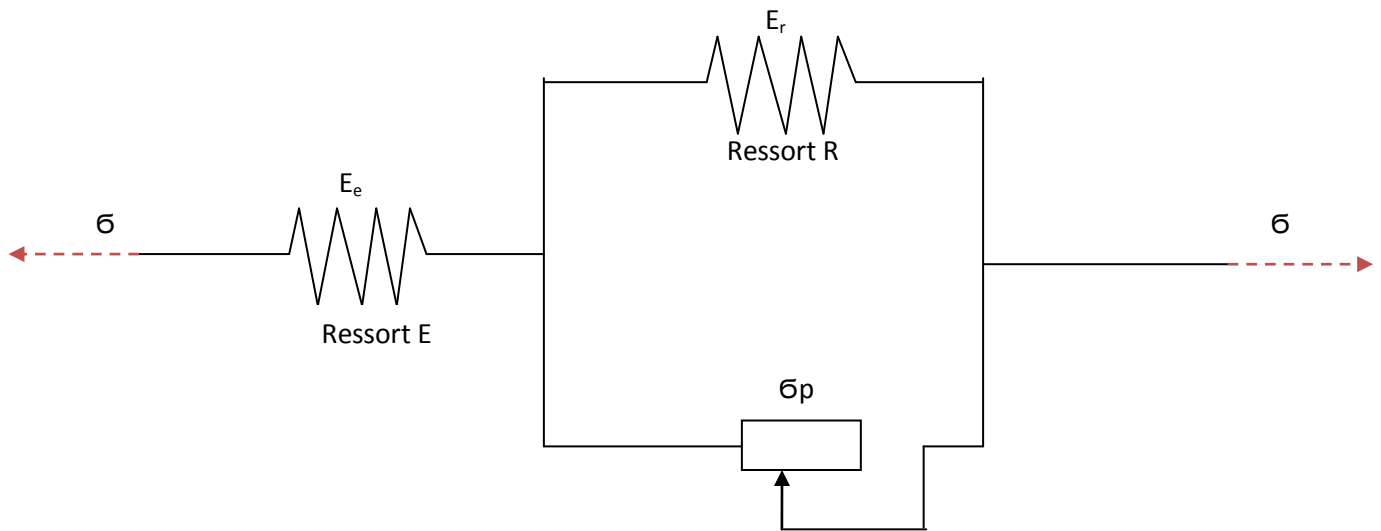


Figure 18 : modèle rhéologique de l'écrouissage cinématique avec effet BAUSCHINGER

Pour un essai de traction :

Si la contrainte appliquée σ est inférieure à celle du patin σ_p le ressort E est le seul à se déformer (puisque le patin bloque le ressort R). Donc on écrit :

$$\sigma = E_e \varepsilon \quad \dots\dots\dots(23)$$

et :

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_e} \quad \dots\dots\dots(24)$$

Par contre lorsqu'on atteint le seuil σ_p c'est tout le système qui se déforme ; alors les déformations du patin et du ressort R vont s'ajouter à celle du ressort E.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E_e} + \varepsilon_p \quad \dots\dots\dots(25)$$

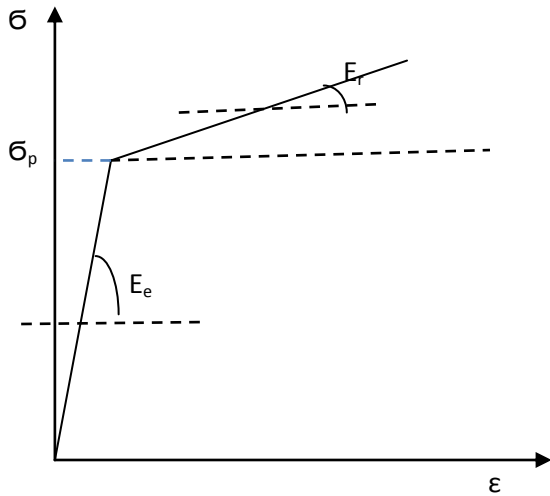


Figure 19 : Courbe de traction d'un matériau ayant un comportement élastique-plastique avec écrouissage

Avec : $E_r \approx 0,9 E_e$

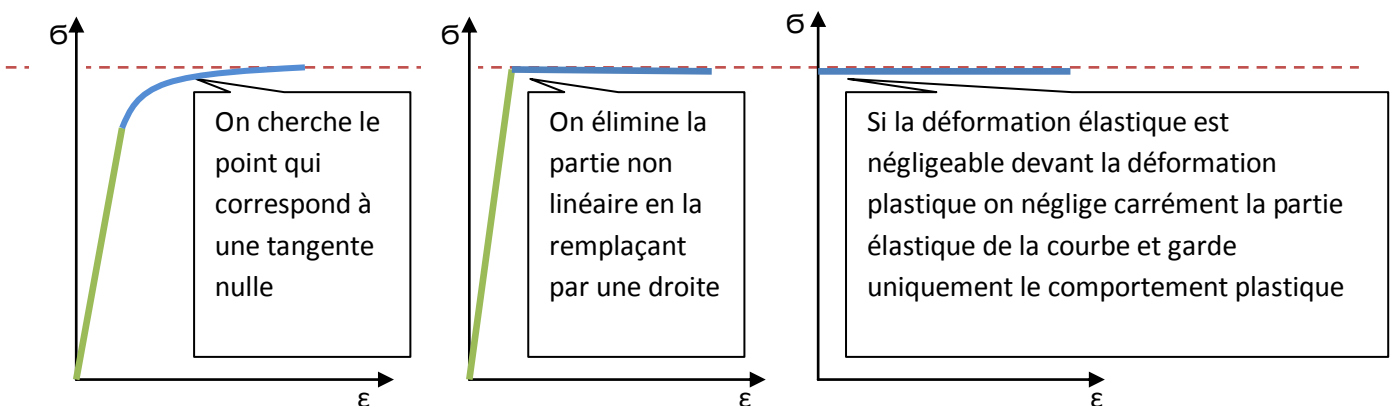
Remarque :

On réalité on ne peut pas distinguer entre l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique parce que l'écrouissage réel est entre les deux.

Plasticité parfaite :

Lors de l'étude le chercheur (constructeur dans le cas d'un dimensionnement) à besoin de se donner un modèle sur le quel le calcul sera porter (modèle de référence).

D'après [6] en plasticité (surtout en termes de calcul) le modèle le plus adapté est celui de la plasticité parfaite.



I.5. *L'anisotropie :*

I.5.1. *L'origine de l'anisotropie :*

On réalité il n'existe pas de matériau isotrope (tous les matériaux sont anisotropes) alors par souci de simplification les chercheurs essaient d'apporter des lois de comportement isotrope, mais cette simplification est un petit peu couteuse car des erreurs systématiques sont commises et selon le matériau ces erreurs sont plus au moins élevées, [7].

Alors en général le comportement sera considéré isotrope mais il existe des cas où l'erreur associée à cette hypothèse est beaucoup trop élevée pour qu'elle soit négligeable.

L'isotropie est la caractérisation du fait que la loi de comportement du matériau étudiée est indépendante du système d'axe. Donc l'anisotropie est le contraire.

On général l'anisotropie constatée peut être liée soit à la structure propre du matériau, soit à son procédé d'élaboration et de mise en forme.

❖ **Anisotropie de structure :**

Naturellement rencontrée ; On peut citer quelques cas fréquent (les monocristaux métalliques, les matériaux composites tels que le béton armé ou les stratifiés, les matériaux fibreux naturellement comme le bois), [7].

❖ **Anisotropie d'élaboration :**

Certains matériaux considérés initialement isotropes peuvent perdre cette propriété dans le processus de réalisation. On peut par exemple citer les profilés obtenus par déformations plastiques ainsi que les tôles laminées, [7].

Alors l'anisotropie marque une grande présence ; donc il est important d'en pouvoir tenir compte de cette dernière à ce stade on peut faire deux bonnes remarques :

- 1)- Il ne faut pas confondre entre l'anisotropie et l'hétérogénéité (qui traduit le fait que le comportement du matériau est fonction du point d'étude);

2)-L'anisotropie ne concerne pas que les comportements plastiques car elle est aussi présente dans certains comportements élastique mais elle sera vite simplifiée et le comportement sera considéré isotrope pas souci de simplification. Hors il ne faut pas penser que l'anisotropie concerne que le comportement plastique alors que certains matériaux initialement isotropes et élastiques deviennent aussi tôt anisotropes plastiques.

1.5.2. Explication de l'anisotropie :

Lors de l'étude expérimentale les difficultés sont plus grandes qu'avec les cas isotrope car les résultats seront dépendants de l'orientation de l'éprouvette dans la structure.

L'anisotropie se traduit d'après [7] par le fait que le chargement de pression hydrostatique $[\bar{\sigma} = -p \bar{\mathbf{I}}]$ n'engendre pas une déformation homogène. Non seulement les termes diagonaux seront différents $[\epsilon_{11} \neq \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}]$ mais aussi on peut trouver des termes hors diagonaux non nuls.

Il est donc pratiquement toujours nécessaire de faire une modélisation particulière pour pouvoir interpréter correctement les résultats.

Il est enfin important de noter que le nombre d'essais à réaliser pour caractériser le comportement d'un matériau anisotrope est souvent plus élevé que pour un matériau isotrope.

1.6. Rappel sur l'anisotropie élastique :

L'élasticité linéaire est la loi de comportement la plus couramment employée. D'une part elle reflète bien le comportement à faible déformation de nombreux matériaux, d'autre part de nombreuses lois de comportement sont numériquement traitées comme étant localement linéaires. On approche ainsi la loi réelle par une suite de segments de droite.

Il est donc tout naturel de s'intéresser à l'incidence de l'anisotropie sur la réponse d'un matériau élastique linéaire.

Il faut toutefois noter que de nombreux paramètres peuvent avoir de l'incidence sur le comportement élastique linéaire. La température, du fait de l'agitation moléculaire qu'elle engendre, est propice à l'apparition de phénomènes irréversibles. A l'inverse, le phénomène d'écrouissage augmente sensiblement la taille du domaine élastique, [7].

I.6.1. Les tenseurs d'élasticité :

Le comportement élastique linéaire est caractérisé par une relation de linéarité entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Cette relation prend la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = A_{ijnm} \epsilon_{nm} \quad \text{où } A \text{ est le tenseur des raideurs} \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$\epsilon_{ij} = B_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{où } B \text{ est la matrice de couplage (Tenseur des complaisances)} \quad \dots(27)$$

Les tenseurs ainsi déterminés représentent des applications inverses l'une de l'autre. La connaissance de l'un implique la connaissance de l'autre [$A = B^{-1}$]. Aussi nous ne nous intéresserons qu'à l'un des deux, à savoir le tenseur des raideurs ou encore tenseur de rigidité, [7].

I.6.2. Convention d'écriture :

Le tenseur de raideur est d'ordre 4 donc son explicitation est délicate. Simplifier les écritures est vraiment nécessaire, [7].

La solution est de passer d'un espace vectoriel de dimension 2 à un espace de dimension 1 comme suite :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (29) \quad \text{devient} \quad \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{32} = \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(30)$$

De même pour le tenseur des déformations, on utilise la fonction définie par :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \dots\dots (31) \quad \text{devient} \quad \bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} = 2\epsilon_{12} = 2\epsilon_{21} \\ \gamma_{13} = 2\epsilon_{13} = 2\epsilon_{31} \\ \gamma_{23} = 2\epsilon_{23} = 2\epsilon_{32} \end{pmatrix} \dots\dots (32)$$

Cela implique d'après [7] l'existence d'une application linéaire de l'espace vectoriel de dimension 4 (associé au tenseur de raideur) vers un espace vectoriel de dimension 2 :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\mathbf{K}}} \bar{\bar{\epsilon}} \text{ vers } \bar{\sigma} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\epsilon} \dots\dots\dots(33)$$

La nouvelle forme du tenseur de raideur permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} & \mathbf{A}_{15} & \mathbf{A}_{16} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} & \mathbf{A}_{25} & \mathbf{A}_{26} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} & \mathbf{A}_{35} & \mathbf{A}_{36} \\ \mathbf{A}_{41} & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} & \mathbf{A}_{45} & \mathbf{A}_{46} \\ \mathbf{A}_{51} & \mathbf{A}_{52} & \mathbf{A}_{53} & \mathbf{A}_{54} & \mathbf{A}_{55} & \mathbf{A}_{56} \\ \mathbf{A}_{61} & \mathbf{A}_{62} & \mathbf{A}_{63} & \mathbf{A}_{64} & \mathbf{A}_{65} & \mathbf{A}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(34)$$

Compte tenu des conditions d'intégrabilité de Cauchy sur le travail de déformation, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21} / \mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{31} / \mathbf{A}_{23} = \mathbf{A}_{32} / \mathbf{A}_{45} = \mathbf{A}_{54} / \mathbf{A}_{46} = \mathbf{A}_{64} / \mathbf{A}_{56} = \mathbf{A}_{65} / \mathbf{A}_{14} = 2\mathbf{A}_{41} / \\ \mathbf{A}_{15} = 2\mathbf{A}_{51} / \mathbf{A}_{16} = 2\mathbf{A}_{61} / \mathbf{A}_{24} = 2\mathbf{A}_{42} / \mathbf{A}_{25} = 2\mathbf{A}_{52} / \mathbf{A}_{26} = 2\mathbf{A}_{62} / \mathbf{A}_{34} = 2\mathbf{A}_{43} \dots(35) \\ \mathbf{A}_{26} = 2\mathbf{A}_{62} / \mathbf{A}_{34} = 2\mathbf{A}_{43} / \mathbf{A}_{35} = 2\mathbf{A}_{53} / \mathbf{A}_{36} = 2\mathbf{A}_{63} \end{aligned}$$

Ces relations étant au nombre de 15, nous nous retrouvons bien avec 21 coefficients indépendants.

On peut faire la même chose avec le tenseur de rigidité.

I.6.3. Matériau isotrope :

L'hypothèse d'isotropie impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base. D'où la loi de comportement faisant apparaître les coefficients de Lamé :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots(36)$$

De cette relation, on constate que les directions principales de contraintes sont confondues avec les directions principales de déformations, [7].

I.6.4. Matériau orthotrope :

Un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux. On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour le bois (dans certains cas), les composites unidirectionnels et les produits métalliques laminés, [7].

Supposons que nous ayons une symétrie par rapport au plan de coordonnées $x_3=0$. La matrice de changement de base traduisant cette symétrie est :

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(37)$$

La relation d'indépendance du tenseur de raideur $\bar{\mathbf{K}}$ dans ce changement va se traduire par le fait que toutes les composantes ayant un nombre impair d'indice 3 sont nulles. Ainsi pour la matrice $\bar{\mathbf{A}}$ on obtient :

$$A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{64} = A_{15} = A_{25} = A_{35} = A_{65} = 0 \quad \dots\dots\dots(38)$$

Le tenseur de raideur $\bar{\mathbf{A}}$ n'a plus que 13 coefficients indépendants.

Il nous reste maintenant à traduire la condition de symétrie par rapport à un plan orthogonal, par exemple celui de coordonnées $x_1 = 0$. On aura donc :

$$A_{15} = A_{16} = A_{25} = A_{26} = A_{35} = A_{36} = A_{45} = A_{46} = 0 \quad \text{.....(39)}$$

Il ne reste donc que 9 coefficients indépendants pour traduire le comportement de notre matériau. Dans le repère principal d'orthotropie, la loi peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad \text{.....(40)}$$

Les conditions de symétrie se traduisant par les relations suivantes :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} / \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3} / \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{23}}{E_3} \quad \text{.....(41)}$$

Le matériau est donc caractérisé par 9 coefficients indépendants :

- Trois modules d'élasticité longitudinal dans les directions de l'orthotropie $[E_1; E_2; E_3]$.
- Trois modules de cisaillement $[G_1; G_2; G_3]$.
- Trois coefficients de contraction (coefficients de poisson) $[\nu_{12}; \nu_{13}; \nu_{23}]$

I.6.5. Matériau isotrope transverse :

Un milieu est dit isotrope transverse pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par rotation autour d'un axe privilégié. Dans ce cas, tout plan passant par l'axe privilégié est un plan de symétrie. Nous pouvons donc remarquer que le milieu est déjà orthotrope, [7].

Imaginons par exemple que l'axe \vec{E}_3 soit l'axe d'isotropie. Il est donc nécessaire d'avoir une invariance de la loi de comportement pour toute rotation définie par :

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{\text{Rotation suivant } \vec{E}_3\} \dots\dots\dots(42)$$

On constate facilement qu'en plus des relations du cas orthotrope, on obtienne de nouvelles relations entre les coefficients élastiques du tenseur de raideur $\bar{\mathbf{K}}$ et donc du tenseur $\bar{\mathbf{A}}$ aussi dans la base de dimension deux ; la chose qui va nous permettre d'écrire la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{12})}{E_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(43)$$

On peut remarquer ici que :

$$-\nu_{12} = \nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{13} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{31} / G_{13} = G_{12} / 2G_{13} = \frac{E_1}{2E_2(1+\nu_{12})} \dots\dots\dots(44)$$

I.7. Utilisation des matériaux anisotropes :

L'emploi de matériaux anisotrope a tendance à se généraliser. Les méthodes de calcul évoluent rapidement et l'aspect numérique n'est plus une barrière. Toutefois, pour utiliser correctement ces matériaux, il subsiste encore deux difficultés.

La première difficulté est liée à la détermination des constantes élastiques. Certes on sait bien que le nombre de paramètres à déterminer étant plus élevé que dans le cas d'un matériau isotrope, il est nécessaire de faire plus d'expériences de caractérisation. Mais le nombre d'expérience n'est rien vis à vis du mode opératoire. Il ne faut pas perdre de vue que le matériau possède des directions particulières et que les éprouvettes seront à référencées vis à vis de ces directions.

Dans le cas d'un matériau orthotrope, un essai de traction suivant les trois directions d'orthotropie permettra de déduire les trois modules d'élasticité longitudinale. Et là il faut qu'on se pose la question suivante quel serait le résultat d'un essai de traction mené suivant une direction quelconque, [7].

La seconde difficulté réside dans les calculs de dimensionnement et en particulier dans l'emploi d'un critère. Il est en effet évident que les critères utilisés dans le cas d'un matériau isotrope ne seront pas adaptés au cas anisotrope. Il convient donc de définir de nouveaux critères. Pour un calcul de prédimensionnement, il convient de bien faire attention au phénomène de ruine mis en œuvre. Ce n'est pas toujours un dépassement de la limite élastique qui interviendra dans le dimensionnement. On peut par exemple citer le phénomène de délaminage des matériaux stratifiés ou encore les pertes d'adhésion dans les matériaux composites.

I.8. Conclusion :

Certains matériaux perdent la propriété d'isotropie lors de la mise en forme à cause des contraintes qui dépassent par fois leurs limites élastiques.

Mais par souci de simplification (surtout si l'anisotropie est négligeable) on les considère comme des matériaux isotropes caractéristique déjà rare à rencontrer même en dehors de la mise en forme.

Afin de mieux comprendre le comportement d'un matériau on simule sa réponse en imaginant un modèle rhéologique qui répond d'une façon cohérente à la sollicitation.

CHAPITRE II

La plasticité

II.1. Introduction:

Nous allons étudier dans ce chapitre un comportement autre que celui de l'élasticité linéaire. Donc nous allons nous intéresser aux déformations plastiques qui apparaissent au-delà du domaine élastique ; Nous allons essayer d'expliquer quand et comment apparaissent ces déformations.

- **Hypothèses :**

1-Nous considérerons en premier lieu que la viscosité est négligeable et que les sollicitations imposées ne créent pas de dommages significatifs (fissurations, développement de micro cavitation, ...) ; Ce qui signifie que les contraintes appliquées n'atteignent pas le seuil de rupture, [7].

2-On travaille beaucoup plus dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations autrement dit la Configuration actuelle est la même que la configuration initiale, [7].

Cela implique que le tenseur des déformations va être linéarisé d'où l'écriture suivante :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad } \vec{U}} + \overline{\text{grad } \vec{U}^T}) \quad \dots\dots\dots(45)$$

On définit la vitesse de déformation telle que $(\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt})$ dérivée de la déformation par rapport au temps.

Le tenseur des vitesses de déformation sera lui aussi à son tour normalisé avec :

$$\bar{\bar{\dot{\epsilon}}} = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad } \vec{\dot{U}}} + \overline{\text{grad } \vec{\dot{U}}^T}) \quad \dots\dots\dots(46)$$

3- L'évolution est isotherme : ça implique que les grandes variations de température sont négligées.

4- L'évolution est quasi-statique : donc les termes d'accélération sont négligés.

5- La partie élastique sera considérée linéaire (équation d'une droite) alors toute partie non linéaire sera directement associée à la plasticité.

II.2. Rappel sur la mécanique des milieux continus :

II.2.1. L'état de contrainte :

L'état de contrainte dans un domaine matériel est un état tensoriel. Il existe plusieurs possibilités de représentation de cet état tensoriel.

Quelle que soit la représentation tensorielle choisie pour l'état de contrainte, on peut associer une base principale et définir un état déviatorique et un autre état dit sphérique associés à ce même tenseur, [7].

- *a) Base principale et invariants :*

On général dans une base quelconque $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ on définit le tenseur des contraintes d'après [8] comme suite :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(47)$$

Ces contraintes sont représentées dans la figure 20.

Les contraintes en rouge $\{\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{33}\}$ sont appelées contraintes normales, les autres c'est des contraintes tangentielles.

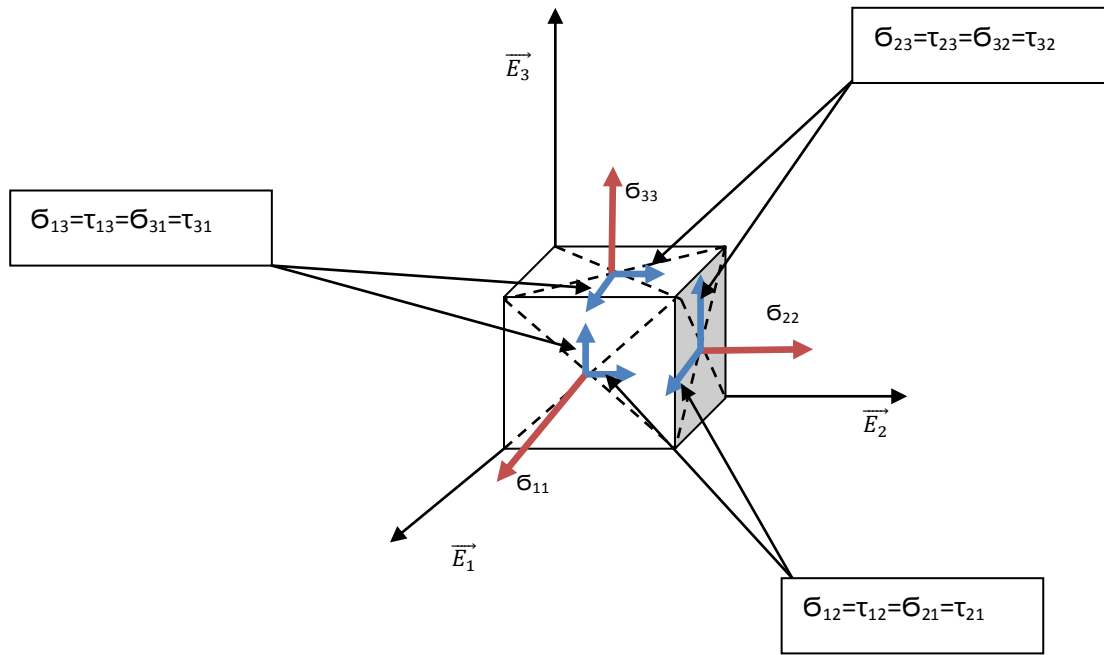


Figure 20 : Représentation des contraintes sur un élément de volume (cube)

Il existe un système d'axes particulier qui représente les "directions propres" de la matrice. Ce repère est appelé **le repère principal des contraintes** (base principale) $(\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III})$. D'après [8] la matrice représentant l'état de contrainte dans cette base prend une forme diagonale :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(48)$$

σ_I ; σ_{II} ; σ_{III} sont appelées contraintes principales.

On remarque que toutes les contraintes tangentiels sont **nulles**.

La détermination des contraintes principales passe par la diagonalisation de la matrice des contraintes. d'après [8] on doit ainsi rechercher les solutions de l'équation :

$$\det(\bar{\sigma} - \lambda \bar{\mathbf{I}}) = \mathbf{0} \iff -\lambda^3 + \mathbf{I}_1 \lambda^2 - \mathbf{I}_2 \lambda + \mathbf{I}_3 = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots(49)$$

Quelque soit le système référentiel choisi $(\vec{\mathbf{X}}_1, \vec{\mathbf{X}}_2, \vec{\mathbf{X}}_3)$, les contraintes principales retrouvées sont les mêmes.

Donc les quantités $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ doivent être indépendantes du système d'axes. On les appelle les invariants du tenseur des contraintes et ils se calculent de la façon suivante :

$$\mathbf{I}_1 = \begin{cases} \text{c'est la trace du tenseur des contraintes} \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(50)$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{cases} \text{Représente la somme des cofacteurs des termes de la diagonale} \\ (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2) + (\sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{13}^2) = \sum (\sigma_{ii} \sigma_{kk} - \sigma_{ik}^2) \\ (\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(51)$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{cases} \text{C'est le déterminant de la matrice des contraintes} \\ \det(\sigma_{ij}) \\ \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(52)$$

• ***b) Tenseur déviateur des contraintes et la partie sphérique :***

Quelque soit la forme du tenseur des contraintes il est toujours possible de le mettre sous la forme d'une somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur déviateur de trace nulle :

$$\bar{\sigma} = \sigma_m \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{D}} \text{ Avec : } \begin{cases} \sigma_m \bar{\mathbf{I}} : \text{est la partie sphérique (tenseur hydrostatique)} \\ \bar{\mathbf{D}} : \text{est la partie déviatorique (déviateur)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(53)$$

On a aussi d'après [8] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trace } \bar{\bar{\mathbf{D}}} = 0 \\ \sigma_m = \frac{I_1}{3} : \text{qui est la contrainte moyemme (pression hydrostatique)} \end{array} \right. \dots(54)$$

Pour la partie déviatorique :

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} \dots\dots(55)$$

Pour décrire un comportement plastique, on utilise les invariant du tenseur déviateur des contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 = \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{D}}}) = 0 \\ J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)] \\ J_3 = \det(\bar{\bar{\mathbf{D}}}) \end{array} \right. \dots(56)$$

Le terme le plus souvent utilisé est le **deuxième** (J_2)

On définit la contrainte octaédrale d'après [8] par la relation suivante :

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \dots\dots(57)$$

On peut écrire donc :

$$J_2 = \frac{3}{2} \tau_{\text{oct}}^2 \dots\dots(58)$$

II.2.2. L'état de déformation :

Le processus de plastification fait souvent intervenir le paramètre temps. On peut arriver à un état de contraintes donné en suivant plusieurs chemins de chargement. L'état de déformation obtenu n'est alors pas le même. L'histoire du chargement joue un rôle important.

Ainsi, contrairement à un comportement élastique linéaire, il convient donc de faire intervenir un paramètre associé à la notion de temps dans la description d'un comportement plastique.

- **Cas de petites déformations :**

Toute en restant dans la description lagrangienne :

La position actuelle d'un point matériel est définie à partir de sa position initiale tel que montre la figure 21.

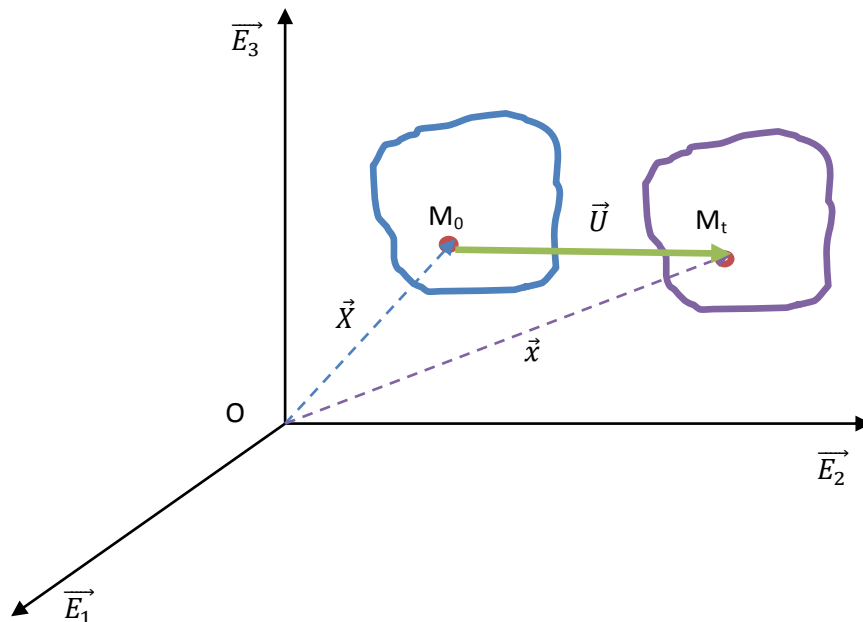


Figure 21 : Configuration d'un solide dans l'espace

Dans le repère \mathbf{R} , à un instant $t = 0$, le point \mathbf{M}_0 a des coordonnées X_1, X_2, X_3 qui définissent la position du point matériel \mathbf{M} . On appelle aussi ce système de coordonnées

le système de coordonnées matérielles dans la configuration de référence \mathbf{C}_0 . Nous pourrions ainsi écrire d'après [8] :

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}_0} = X_1 \overrightarrow{\mathbf{E}_1} + X_2 \overrightarrow{\mathbf{E}_2} + X_3 \overrightarrow{\mathbf{E}_3} = X_i \overrightarrow{\mathbf{E}_i} = \overrightarrow{\mathbf{X}} \quad \text{.....(59)}$$

Pour décrire le mouvement du domaine, il convient donc de se donner la loi d'évolution au cours du temps des positions de l'ensemble des particules matérielles constituant le domaine. On obtient donc la configuration actuelle \mathbf{C}_t . Ainsi il est nécessaire de définir les coordonnées x_1, x_2, x_3 du point \mathbf{M}_t qui à l'instant t représente la position du point matériel \mathbf{M} , [8].

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}_t} = x_1 \overrightarrow{\mathbf{E}_1} + x_2 \overrightarrow{\mathbf{E}_2} + x_3 \overrightarrow{\mathbf{E}_3} = x_i \overrightarrow{\mathbf{E}_i} = \overrightarrow{\mathbf{x}} \quad \text{.....(60)}$$

Ce qui revient à dire qu'il faut se donner les fonctions scalaires suivantes :

$$x_i = \varphi_i (X_j, t) \quad \text{.....(61)}$$

Les fonctions φ_i représentent la description lagrangienne du mouvement de notre domaine par rapport au référentiel \mathbf{R} .

On définit le vecteur déplacement comme suite :

$$\overrightarrow{\mathbf{U}}(X_j, t) = \overrightarrow{\mathbf{OM}_t} - \overrightarrow{\mathbf{OM}_0} = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{X}} \quad \text{.....(62)}$$

Dans le cadre des petites perturbations on définit les tenseurs (Déformation/Rotation)_{Linéarisés} comme suite :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{\mathbf{grad} \overrightarrow{\mathbf{U}}} + \overline{\overline{\mathbf{grad} \overrightarrow{\mathbf{U}}^t}}) \quad \text{.....(63)} ; \quad \overline{\overline{\boldsymbol{W}}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{\mathbf{grad} \overrightarrow{\mathbf{U}}} - \overline{\overline{\mathbf{grad} \overrightarrow{\mathbf{U}}^t}}) \quad \text{.....(64)}$$

Remarque :

On peut décomposer ces tenseurs en des tenseurs sphériques et déviatoriques.

II.2.3. Relation contraintes/déformations :

Ces relations traduisent la loi de comportement du matériau employé. Comme il n'existe pas une relation universelle, chacune des expressions données est déterminée dans un domaine d'emploi bien défini. Ce domaine peut être défini par de nombreux paramètres (temps, contraintes, température ...), [8].

On peut citer la loi de HOOK :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} 3\sigma_m \bar{I} \quad \text{.....(65)}$$

Cette relation n'est valable que pour un état de sollicitation faible. Des critères (VON MISES, TRESCA, MOHR...) permettent de vérifier la légitimité de l'emploi de cette formule.

Dans le cas de non vérification du critère, il convient d'utiliser une autre loi de comportement.

On peut citer aussi la loi faisant apparaître les coefficients de Lamé :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{.....(66)}$$

II.3. Critères de plasticité :

Lorsqu'on applique des chargements dépassants le seuil élastique mais n'atteignant pas le seuil de rupture, le matériau se déforme plastiquement, la réponse du matériau est donnée en figure 22.

Si on décharge parallèlement à la partie élastique on peut confirmer que la déformation totale est la somme d'une déformation élastique et d'une déformation plastique.

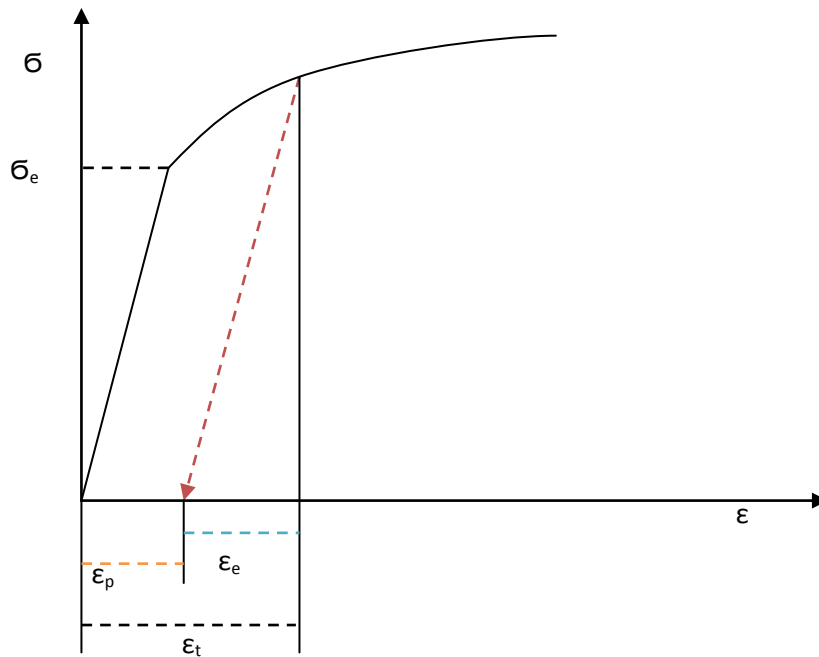


Figure 22 : Courbe de traction avec écouissage

Alors le problème posé ici c'est de pouvoir déterminer cette déformation plastique.

II.3.1. Surface et fonction de charge :

La surface de charge d'après [9] est la surface qui va délimiter le domaine élastique à l'instant t dans l'espace des contraintes.

On appelle la relation permettant de décrire cette surface la fonction de charge.

Vu que le seuil d'élasticité évolue avec le temps sous l'effet de l'écouissage alors on peut vite constater que la surface de charge va être évolutive, on la définit sous cette forme :

$$f(\bar{\sigma}, \beta) \quad \text{avec : } \beta \text{ paramètre d'écouissage}$$

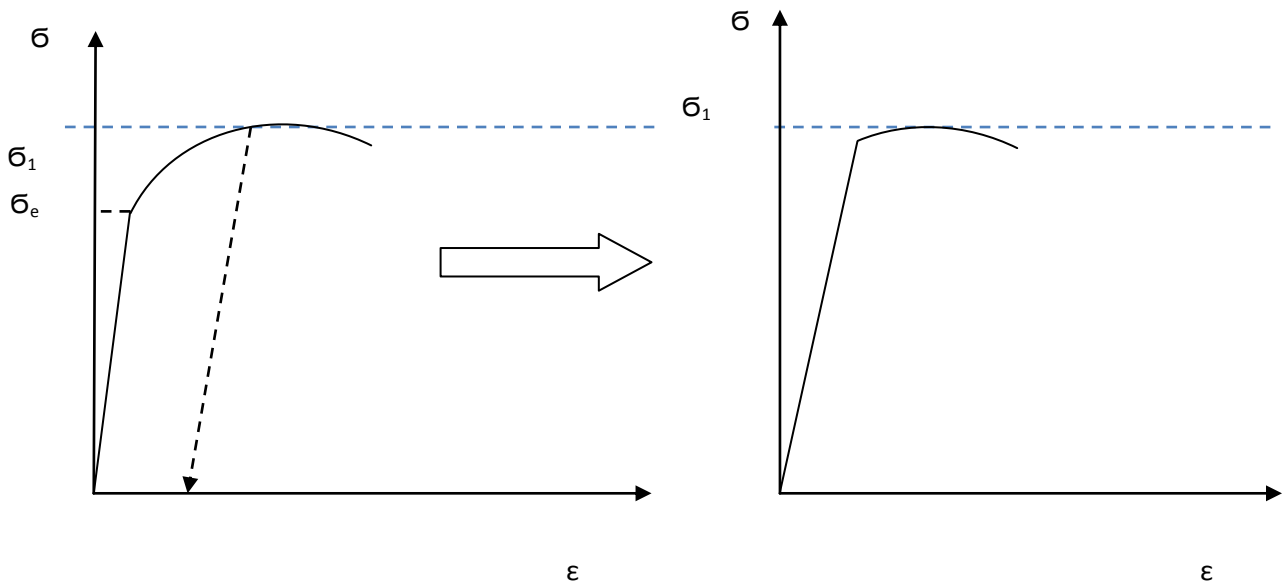


Figure 23 : Influence de l'écroutissement sur la plasticité

Comme le montre la figure 23 après application d'une contrainte de traction le matériau s'est écouré et le seuil élastique a augmenté de σ_0 à σ_1 alors la surface de charge va changer ce que illustre la figure 24.

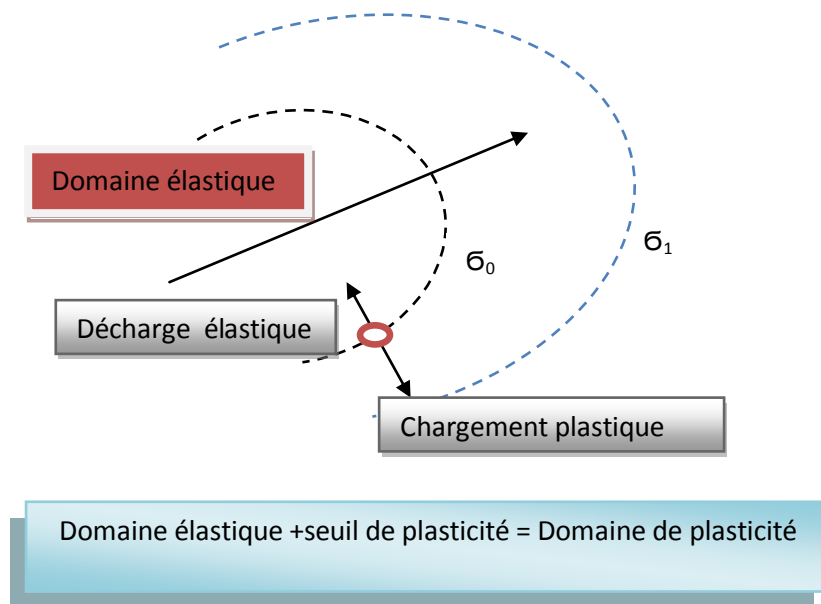


Figure 24 : Représentation du domaine élastique dans l'espace des contraintes

On dit qu'il y a un écoulement isotrope si la dilatation de la surface de charge est uniforme dans toutes les directions. Dans le cas contraire, l'écoulement est dit **cinématique**.

Maintenant le nouveau domaine élastique est délimité par la surface de charge de seuil σ_1 .

Cette notion de surface de charge permet de définir des états de contraintes et de déformations équivalents.

La contrainte équivalente à un état de contraintes plastiques quelconques est la contrainte de traction qui se trouve sur la surface de charge.

La déformation actuelle plastique équivalente est la déformation associée à la contrainte équivalente, qui donne d'après [9] un travail plastique égal au travail plastique réel :

$$\delta W^P = \sigma_{ij}(\delta \epsilon_{ij})^P = \sigma_{\text{équi}}(\delta \epsilon_{\text{équi}}) \quad \dots\dots(67)$$

La notion de fonction de charge conduit naturellement aux critères de plasticité.

Les critères de plasticité les plus utilisés sont les critères de VON MISES et de TRESCA pour les matériaux isotropes et le critère de HILL pour les matériaux anisotropes.

II.3.2. Critère de HILL:

C'est le critère le plus souvent utilisé dans le cas des matériaux anisotropes.

II.3.2.1. Enoncé du principe de HILL :

Le principe de Hill, appelé encore principe du travail plastique maximal, dit que l'état de contrainte réel est parmi l'ensemble des champs de contrainte statiquement admissible, celui pour lequel le travail plastique est maximal, [9].

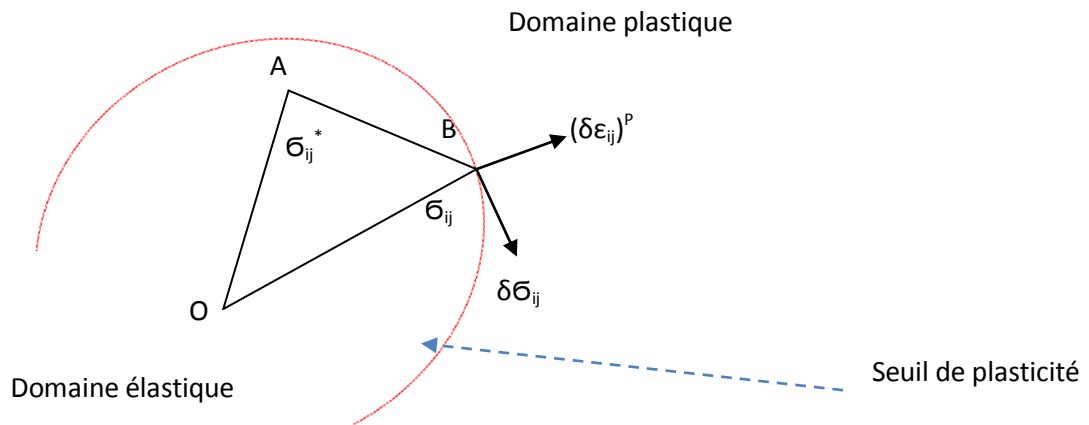


Figure 25 : Evolution de la déformation plastique

Si on prend d'après [9] deux points distincts **A** et **B** comme dans la figure 25 :

- Le point **B** présente un état de contrainte $\bar{\sigma}_{ij}$ sur la surface seuil de plasticité ;
- Le point **A** présente quant à lui un état $\bar{\sigma}_{ij}^*$ à l'intérieur du domaine élastique.

On pose aussi l'accroissement de contrainte $\delta\bar{\sigma}_{ij}$ qui crée une déformation plastique $(\delta\epsilon_{ij})^P$

En comparant le travail plastique des deux contraintes en **A** et **B**, le principe de HILL confirmera que :

$$\bar{\sigma}_{ij} (\delta\epsilon_{ij})^P \geq \bar{\sigma}_{ij}^* (\delta\epsilon_{ij})^P \quad \text{.....(68)}$$

Donc :

$$\bar{\sigma}_{ij} (\delta\epsilon_{ij})^P - \bar{\sigma}_{ij}^* (\delta\epsilon_{ij})^P \geq 0 \quad \text{.....(69)}$$

$$[\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}^*] (\delta\epsilon_{ij})^P \geq 0 \quad \text{.....(70)}$$

Dans l'espace des contraintes la quantité $[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*]$ représente les composante du vecteur \overrightarrow{AB} , on écrit alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\delta \epsilon)_{ij}^P \geq 0 \quad \dots\dots(71)$$

Cette inégalité conduit à la convexité et la concavité de la surface de charge.(figure 26)

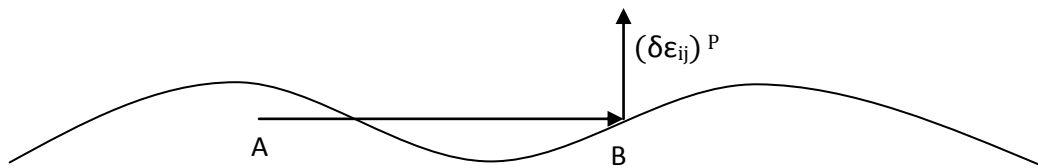


Figure 26 : Convexité et concavité de la surface de charge

D'autre part, on en déduit une condition importante sur la déformation plastique. Considérons en effet le cas où l'on tend vers le point **B** (situé sur la surface de charge) par deux directions opposées. On désigne par (α) le plan tangent en **B** à la surface de charge. Les points **C** et **C'** étant infiniment proches du point **B** (figure 27), on peut associer des composantes infiniment petites aux vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{CB} \leftrightarrow d\sigma_{ij} \\ \overrightarrow{C'B} \leftrightarrow d\sigma'_{ij} \end{array} \right. \quad \dots\dots(72)$$

Ces deux vecteurs appartiennent bien entendu au plan tangent (α) . D'autre part si on considère que le point (**C'**) est le point symétrique de (**C**) par rapport au point **B**, on a :

$$d\sigma_{ij} = - d\sigma'_{ij} \quad \dots\dots(73)$$

D'après le principe de Hill, on écrit :

$$\pm d\sigma_{ij} (\delta\varepsilon_{ij})^P \geq 0 \quad \text{.....(74)}$$

Soit :

$$d\sigma_{ij} (\delta\varepsilon_{ij})^P = 0 \quad \text{.....(75)}$$

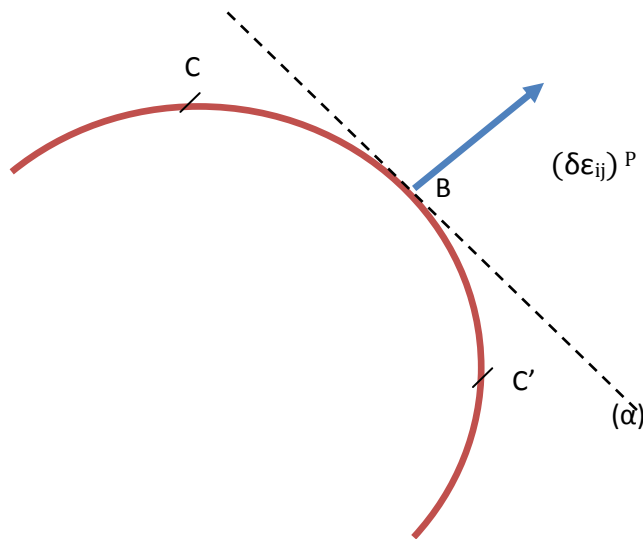


Figure 27 : Normalité de la déformation

Cette relation devrait être vraie quelque soit le point C appartenant au plan tangent (α), on en déduit que le vecteur de composante (δ\varepsilon_{ij}) est perpendiculaire à (α) en B et est dirigé vers l'extérieur. C'est la loi de normalité de la déformation plastique.

II.3.2.2. Règle de normalité :

En s'intéressant à la manière avec laquelle évolue la déformation plastique induite par un état de contrainte se trouvant sur le seuil on peut dire d'après [9] que :

- Si $\bar{\sigma}$ est à l'intérieur du domaine d'élasticité les déformations plastiques n'évoluent pas (nulle) ;
- Si $\bar{\sigma}$ est sur la surface seuil de plasticité (figure 28), la vitesse de déformation plastique est, dans les métaux, donnée par la règle de normalité telle que $\bar{\dot{\epsilon}}^P$ est normale extérieure à la surface seuil de plasticité au point représentatif de l'état de contrainte.

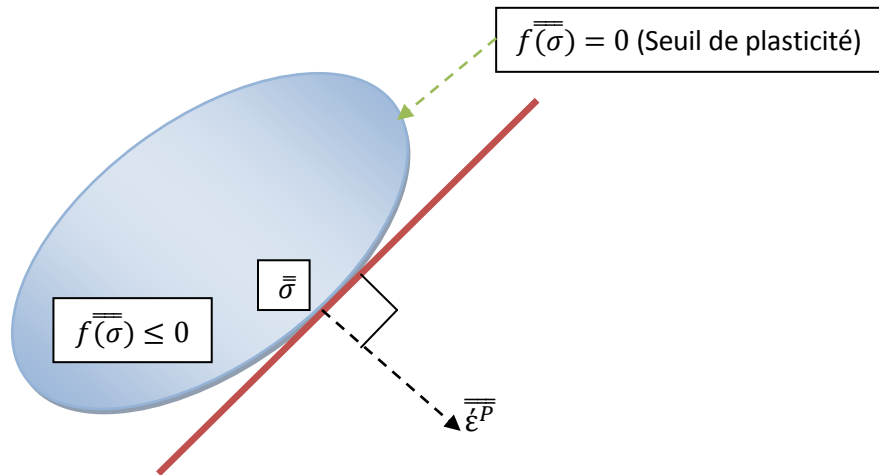


Figure 28 : Explication de la règle de normalité

Alors que $f(\bar{\sigma}) \geq 0$ et, si f est dérivable :

$$\bar{\dot{\epsilon}}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \cdot \bar{\sigma} \quad (\text{produit scalaire}) \quad \dots\dots(76)$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \text{ si } f(\bar{\sigma}) < 0 \\ \lambda \geq 0 \text{ si } f(\bar{\sigma}) = 0 \end{cases} \quad \dots\dots(77)$$

Avec : ($\lambda \geq 0$) multiplicateur plastique, laissé indéterminé par la loi de comportement.

Remarque:

Les états de contraintes hors du domaine de plasticité ne sont pas physiquement admissibles.

$$[f(\bar{\sigma}) > 0] \quad \dots\dots(78)$$

II.3.3. Critère de VON MISES et le critère de TRESCA :

C'est les deux critères les plus souvent utilisés lorsqu'il s'agit de cas de matériaux isotropes.

II.3.3.1. Critère de VON MISES :

On cherche à trouver la contrainte équivalente de VON MISES en chargement plastique avec laquelle le dimensionnement sera fait.

Il faut dire que ce critère se base essentiellement sur le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes, [9].

Alors on a pour un essai de [traction/torsion] simple sur un cylindre mince figure 29.

$$\bar{\sigma}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(79)$$

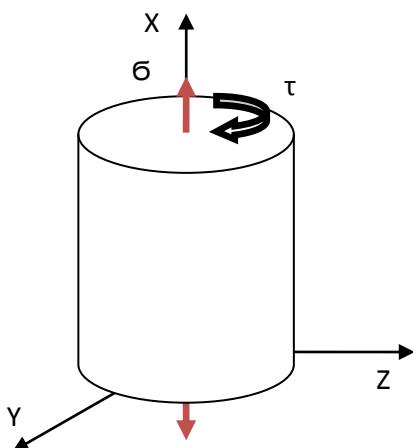


Figure 29 : Représentation des contraintes sur un cylindre en traction / torsion

Donc :

$$\sigma_{xx}=\sigma / \tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau / \sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\tau_{xz}=\tau_{zx}=\tau_{yz}=\tau_{zy}=0 \quad \dots\dots(80)$$

Alors :

$$\sigma_{VON MISES} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{zx})]} \quad \dots(81)$$

$$\sigma_{VON MISES} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + 6(\tau + 0 + 0)]} \quad \dots\dots(82)$$

$$\sigma_{VON MISES} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad \dots\dots(83)$$

On écrit la condition de résistance suivante d'après [9]:

.....(84)

$$\sigma_{VON MISES} \leq \sigma_0$$

$$\sigma_{VON MISES} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_0 \quad \dots\dots(85)$$

$$\sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_0^2 \quad \dots\dots(86)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_0}\right)^2 = 1$$

.....(87)

C'est l'équation d'une ellipse de rapport d'axe égale à $\sqrt{3}$.

II.3.3.2. Critère de TRESCA :

Pour le même état de contrainte [cylindre en (traction/torsion) simple] ; On est obligé de passer vers les contraintes principales.

Alors le nouvel état de contrainte d'après [9] est :

$$\overline{\overline{\overline{\sigma_{I,II,III}}}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad \text{.....(88)}$$

Si l'on suppose que :

$$\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I \quad \text{.....(89)}$$

On aura avec la méthode analytique :

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{.....(90)}$$

$$\begin{cases} \sigma_I = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \\ \sigma_{III} = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \end{cases} \quad \text{Et } \sigma_{II} = 0 \quad \text{.....(91)}$$

Alors :

$$\sigma_{Max} - \sigma_{Min} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{.....(92)}$$

On a aussi :

$$\sigma_{TRESCA} = \sigma_{Max} - \sigma_{Min} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{.....(93)}$$

La condition de résistance est la suivante :

$$\sigma_{TRESCA} \leq \sigma_0 \quad \dots\dots\dots(94)$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_0 \quad \dots\dots\dots(95)$$

$$\sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_0^2 \quad \dots\dots\dots(96)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{2\tau}{\sigma_0}\right)^2 = 1 \quad \dots\dots\dots(97)$$

C'est aussi l'équation d'une ellipse de rapport d'axe égale à 2.

- *Représentation géométrique des deux critères :*

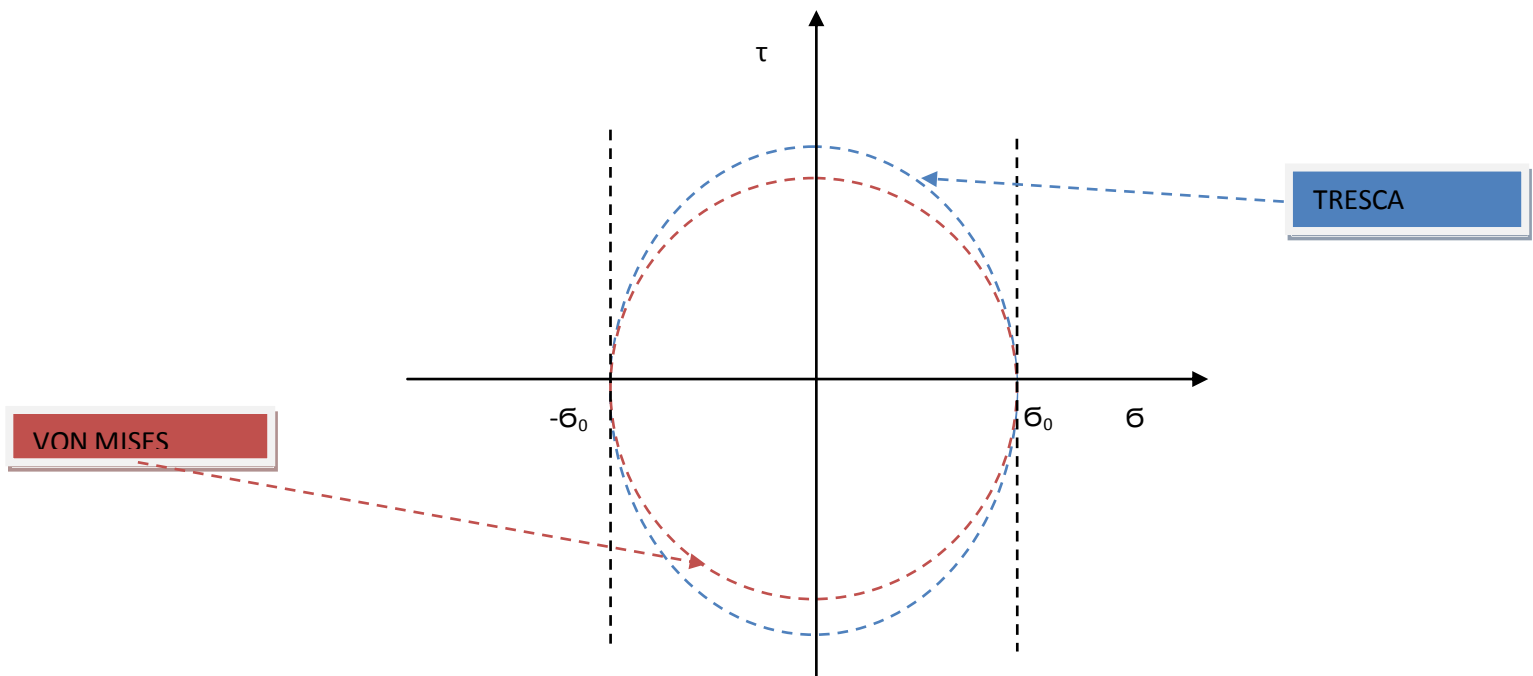


Figure 30 : Représentation des critères (TRESCA et VON MISES)

II.4. *Conclusion :*

- Le critère de TRESCA est utilisé lorsqu'il s'agit de cas de sollicitations multiaxiales ;
- Le critère de VON MISES ne nécessite pas un passage vers l'état de contraintes principales ;
- On obtient un meilleur accord [modèle/expérience] avec le critère de VON MISES pour certain matériaux.

CHAPITRE III

Application à la mise en forme

III.1. *Introduction :*

Lorsqu'on passe à la réalisation des pièces, beaucoup de problèmes seront posés; Parmi les questions soulevées on trouve la difficulté de donner une forme précise à l'objet réalisable parce qu'on est souvent conditionné par la puissance de la machine qu'on ne veut pas dépasser. En réalité on cherche à éviter de faire subir à la machine des efforts insupportables.

Donc le problème revient à trouver la bonne combinaison effort-puissance qui permettra la réalisation.

Pour le faire on pense d'abord à passer par la modélisation numérique fine de type éléments finis. En fait les méthodes approximatives de calcul permettent non seulement de trouver une solution mais on peut aussi l'encadrer.

On va présenter dans le cadre de cette étude deux méthodes qui sont la méthode des tranches et la méthode des lignes de glissement.

III.2. *Méthode des tranches :*

En prenant en compte le phénomène de frottement au niveau du contact pièce – outil, Cette méthode va nous permettre de calculer une valeur approximative des efforts moteurs, [10].

III.2.1. Présentation générale de la méthode:

On découpe tout d'abord le matériau en tranche par la pensée tout en respectant la symétrie du problème considéré, donc on doit imaginer un tracé à suivre lors de la découpe.

Les tranches doivent être infiniment minces selon une direction précise (par exemple \vec{X}_1).

La prochaine étape consiste à formuler l'hypothèse que la direction \vec{X}_1 est une direction principale, et du moment que les deux autres directions \vec{X}_2 et \vec{X}_3 lui sont perpendiculaires; On tire comme conclusion que les contraintes principales sont constantes dans une tranche d'épaisseur dx_1 .

Les forces appliquées sur cette tranche résultent des contraintes d'une part et du frottement de l'outil à sa surface d'une autre part. Toutefois la présence de ces forces de frottement ne perturbe pas la répartition des contraintes. On peut choisir un modèle frottement particulier.

La suite de la méthode consiste à écrire les équations d'équilibre de la tranche. On établit deux relations principales comme suite :

- la première relation est obtenue en appliquant un critère de plasticité ;
- la seconde est obtenue à partir de l'application de la loi d'écoulement.

Une fois que les conditions aux limites sont posées, on intègre l'équation différentielle obtenue pour avoir la contrainte principale. Les efforts résultants de la répartition des contraintes sont obtenus à l'aide d'un petit calcul numérique.

Exemple d'application :

“ Forgeage d’une barre ”

On considère une barre parallélépipédique de hauteur h , de largeur $2a$ et de longueur L illustrée dans la figure 31. Placée entre les deux plateaux d'une presse imposant un effort pour écraser la barre comme le montre la figure 32, [10 ;11].



Figure 31 : Barre parallélépipédique

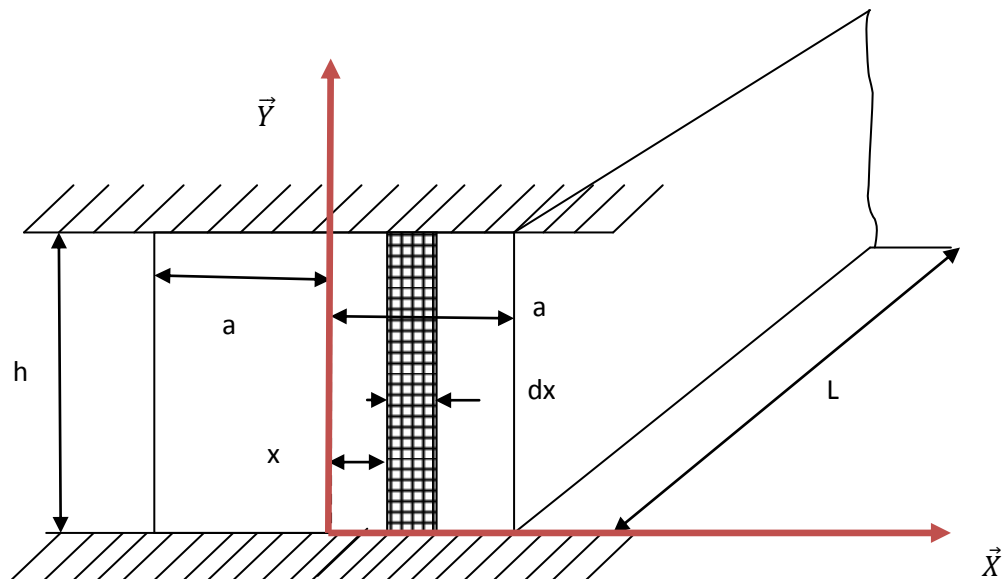


Figure 32 : Forgeage de la barre

À fin de déterminer cette effort on formule les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la longueur de la barre étant suffisamment plus grande devant les deux autres unités ; On peut considérer que l'état de déformation est plan ;
- Les deux plateaux de la presse sont rigides (indéformables) ;
- Le comportement du matériau de la barre est un comportement rigide plastique ;
- En s'intéressant au début de la mise en forme et comme le problème est symétrique, on suppose que les axes **X, Y, Z** sont des axes principaux de contraintes ;
- L'état de contrainte dépend uniquement de la variable de position **x** ;
- Le frottement de l'outil sur la surface de la pièce est représenté par une contrainte tangentielle τ .

Pour caractériser le frottement, on est obligé de passer par un modèle parmi les suivant :

III.2.1.1. *Modèle de COULOMB :*

Dans ce modèle la contrainte tangentielle τ est proportionnelle à la contrainte normale de la surface de contact σ_{yy} , mais elle reste limitée à la valeur de glissement τ_g . En pratique cette valeur limite est prise égale à $\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ (critère de VAN MISES) ; Où σ_0 représente la contrainte d'écoulement du matériau.

III.2.1.2. *Modèle de la couche limite :*

Ici la contrainte tangentielle τ est proportionnelle à la limite d'écoulement du matériau. On écrit :

$$\tau = \frac{m}{\sqrt{3}} \sigma_0 \quad \text{.....(98)}$$

Où **m** est le coefficient de proportionnalité fonction de la nature du contact :

$$\begin{cases} m = 0 & \text{Si le contact est parfaitement lubrifié} \\ m = 1 & \text{Si le contact est parfaitement collant} \end{cases} \quad \text{.....(99)}$$

Dans notre problème considéré le contact pièce outil se passe comme si y a une couche mince parfaitement adhérente à la pièce et à l'outil à la fois (figure 33). Le matériau de cette couche a pour contrainte d'écoulement ($m \sigma_0$), [10 ; 11].

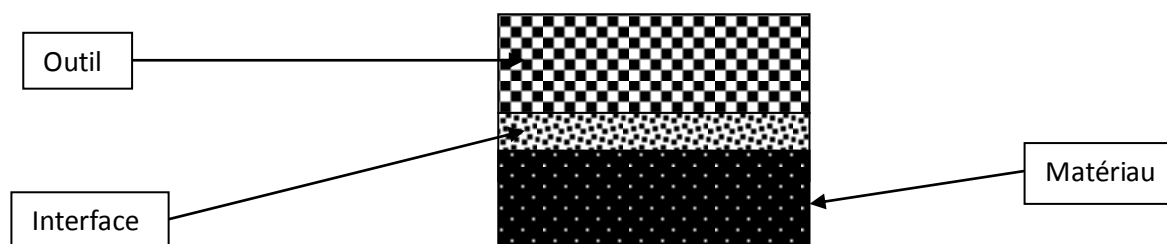


Figure 33 : Les différentes couches observées sous l'effet du forgeage

Souvent on observe un contact de type collant pour les opérations à chaud (donc $m=1$).

Il est toujours possible de déterminer expérimentalement une valeur du coefficient m .

Pour la suite on va tenir compte du modèle de la couche limite puisque il convient mieux à l'étude (mise en forme à chaud).

L'équation d'équilibre d'une tranche d'épaisseur dx (figure 34) prise sur le côté x positif nous donne:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = \frac{2\tau}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{h} \sigma_0 \quad \dots\dots(100)$$

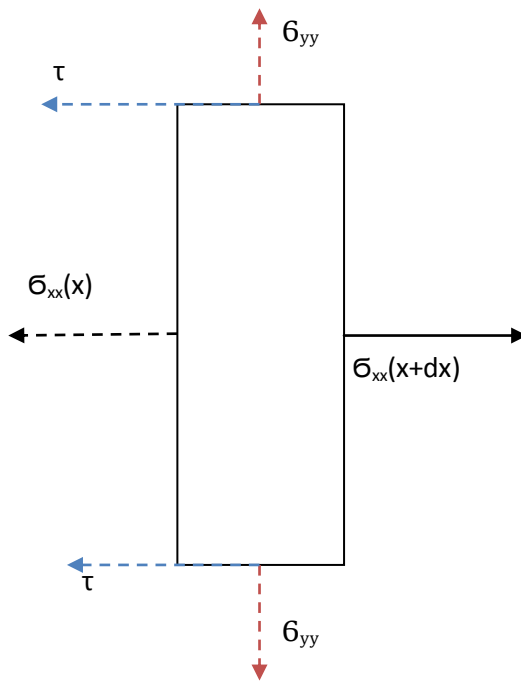


Figure 34 : Tranche d'épaisseur dx en équilibre

Pour avoir la contrainte σ_{xx} on intègre cette équation d'après [10 ; 11] comme suite :

$$\int d\sigma_{xx} = \int \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{h} \sigma_0 dx \quad \text{.....(101)}$$

On pose la condition suivante $\sigma_{xx}(x=a)=0$ alors :

$$\sigma_{xx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{h} (x - a) \sigma_0 \leq 0 \quad (\text{compression}) \quad \text{.....(102)}$$

Pour calculer l'effort nécessaire de forgeage, il faut passer par la détermination de la contrainte σ_{yy} . Alors on utilise la loi de normalité comme suite :

$$\delta \epsilon_{ij}^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \lambda \quad \text{.....(103)}$$

Puisque le matériau à un comportement rigide parfaitement plastique, la déformation élastique sera négligée et la loi de normalité devient d'après [11] :

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{\delta f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \lambda \quad \text{.....(104)}$$

On utilisant le critère de VAN MISES la fonction de charge est donnée par :

$$f(\sigma_{ij}, \xi) = J_2 - 2\sigma_0^2 = J_2 - \xi^2 \quad \text{.....(105)}$$

D'où :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial D_{ij}} = D_{ij} \quad \text{.....(106)}$$

Maintenant on peut calculer la déformation axiale actuelle :

$$\delta \varepsilon_{zz} = D_{zz} \delta \lambda = \left(\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \right) \delta \lambda \quad \text{.....(107)}$$

Et puisqu'on est en déformation plane :

$$\delta \varepsilon_{zz} = 0 \quad \text{.....(108)}$$

On obtient donc :

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \text{.....(109)}$$

Mais aussi, le critère de VON MISES permet d'écrire :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 = 2\sigma_0^2 \quad \dots\dots(110)$$

Compte tenu de la loi de comportement rigide plastique, comme la contrainte d'écoulement est constante et est égale à la limite élastique du matériau, la fonction d'écrouissage est :

$$\sigma_0 = \sigma_e \quad \dots\dots(111)$$

On a ainsi :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 = \frac{4}{3}\sigma_e^2 \quad \dots\dots(112)$$

Ce qui nous donne :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_e \quad \dots\dots(113)$$

On peut donc en déduire la contrainte normale axiale $\sigma_{yy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_e \left[\frac{m}{h}(x - a) + 1 \right]$ (114)

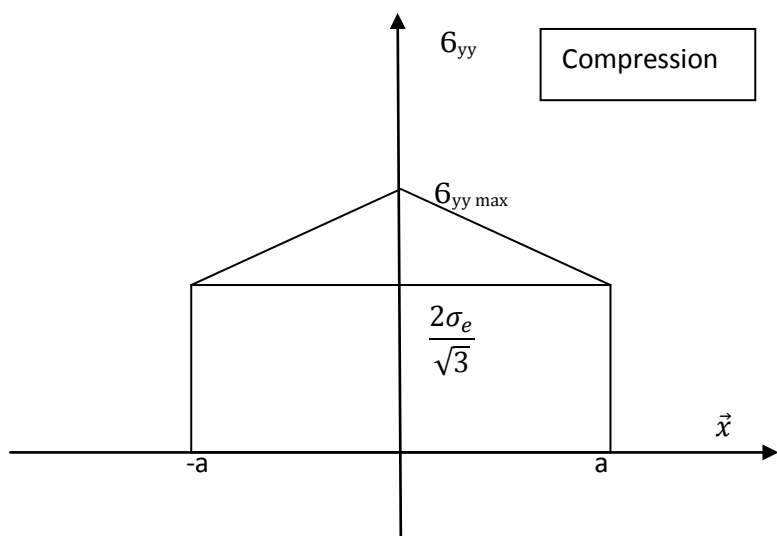


Figure 35 : Représentation de la répartition linéaire décroissante de la contrainte σ_{yy} le long de l'axe x

La représentation fait apparaître une répartition linéaire décroissante (figure 35). C'est la colline de frottement. Il est alors possible de calculer l'effort de compression :

$$F = -2L \int_{x=0}^{x=a} \sigma_{yy} dx \quad \dots\dots(115)$$

D'où :

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}} L a \sigma_e \left(\frac{m a}{h} + 2 \right) \quad \dots\dots(116)$$

Remarque : on peut généraliser cette méthode à la déformation d'un corps à symétrie cylindrique. Les tranches sont alors des anneaux d'épaisseur dr .

III.2.2. les méthodes d'encadrement :

III.2.2.1. Méthode de la borne supérieure:

Théorème cinématique ou de la borne supérieure :

Enoncé :

Soit $\overline{\delta\epsilon}^*$ un champ de déformation actuel licite, soit $\overline{\delta U}^*$ son champ de déplacement, et soit $\overline{\sigma}^*$ le tenseur des contraintes lié par la loi d'écoulement à cette configuration.

Il existe une fonctionnelle définie comme suite :

$$G(\overline{\delta U}^*) = \iiint \sigma_{ij}^* (\delta\epsilon)_{ij}^* dv + \iiint \rho \gamma_i \delta U_i^* dv - \iiint \rho f_i \delta U_i^* dv - \iint \overline{\phi}_i \delta U_i^* ds \quad \dots(117)$$

Cette fonctionnelle est minimale pour le champ de déplacement $\overline{\delta U}^*$ solution du problème.

Démonstration :

Pour un champ de déformations actuelles licite, le théorème des travaux virtuels nous donne d'après [10 ;11 ;12]:

$$\iint \bar{\phi}_i \delta U_i^* ds + \iint \bar{\phi}_i \delta U_i ds + \iiint \rho f_i \delta U_i^* dv = \iiint \sigma_{ij}^* (\delta \epsilon)_{ij}^* dv + \iiint \rho \gamma_i \delta U_i^* dv \quad \dots(118)$$

En particulier, dans le cas du champ de déformations réelles :

$$\iint \bar{\phi}_i \delta U_i ds + \iint \bar{\phi}_i \delta U_i ds + \iiint \rho f_i \delta U_i dv = \iiint \sigma_{ij}^* (\delta \epsilon)_{ij} dv + \iiint \rho \gamma_i \delta U_i dv \quad \dots\dots(119)$$

La première équation peut encore s'écrire :

$$\iint \bar{\phi}_i \delta U_i ds = \iiint \sigma_{ij}^* (\delta \epsilon)_{ij} dv + \iiint \rho \gamma_i \delta U_i dv - \iint \bar{\phi}_i \delta U_i ds - \iiint \rho f_i \delta U_i dv \quad \dots\dots(120)$$

Compte-tenu du principe du travail plastique maximal, nous pouvons écrire :

$$\iiint \sigma_{ij}^* (\delta \epsilon)_{ij}^* dv \geq \iiint \sigma_{ij} (\delta \epsilon)_{ij}^* dv \quad \dots\dots(121)$$

Ce qui nous donne :

$$\iint \bar{\phi}_i \delta U_i ds \leq \iiint \sigma_{ij}^* (\delta \epsilon)_{ij}^* dv + \iiint \rho \gamma_i \delta U_i^* dv - \iint \bar{\phi}_i \delta U_i^* ds - \iiint \rho f_i \delta U_i^* dv \quad \dots(122)$$

En utilisant la relation donnée dans le cas du champ de déformations réelle, on obtient :

$$\iiint \sigma_{ij}(\delta\varepsilon)_{ij} dv + \iiint \rho\gamma_i \delta U_i dv - \iiint \rho f_i \delta U_i dv - \iint \bar{\varphi}_i \delta U_i ds \leq \iiint \sigma^*_{ij}(\delta\varepsilon)^*_{ij} dv + \iiint \rho\gamma_i \delta U^*_i dv - \iiint \rho f_i \delta U^*_i dv - \iint \bar{\varphi}_i \delta U^*_i ds \quad \text{.....(123)}$$

Ce qui nous prouve bien que la fonctionnelle

$$G(\overrightarrow{\delta U^*}) = \iiint \sigma^*_{ij}(\delta\varepsilon)^*_{ij} dv + \iiint \rho\gamma_i \delta U^*_i dv - \iiint \rho f_i \delta U^*_i dv - \iint \bar{\varphi}_i \delta U^*_i ds \quad \text{.....(124)}$$

Est minimale pour le champ de déplacement $\overrightarrow{\delta U}$ solution du problème.

Application du théorème :

En faisant quelques expériences nécessaires, on obtient des bons résultats avec cette méthode qui donne rapidement une valeur majorante de l'effort recherché. De plus on aura une bonne approximation du champ de déplacement de la matière.

Pour exposer cette méthode nous allons prendre l'exemple de poinçonnement décrit en figure36, [10 ; 11 ; 12].

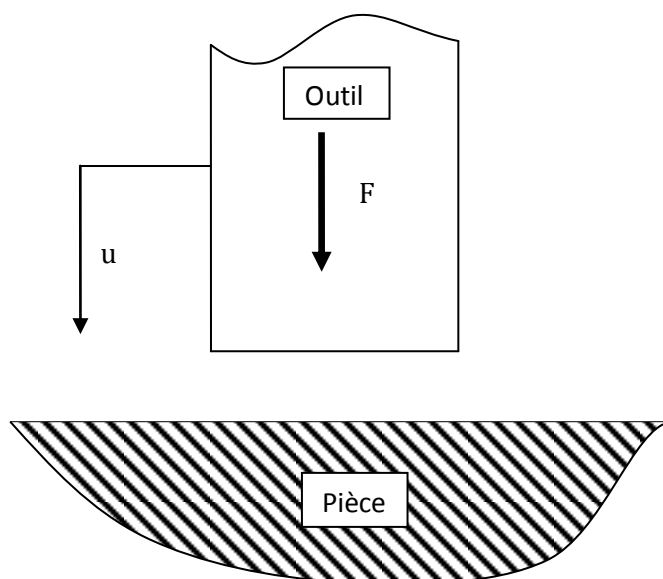


Figure 36 : Sens de l'application de l'effort de forgeage sur la pièce

L'application du théorème de la borne supérieure nécessite le choix d'un champ de déformations actuelles licites. Parmi cet ensemble de champ, le champ de déformation réel est celui qui minimise la fonctionnelle G définie auparavant dans le théorème.

La démonstration du théorème nous avait conduits à la relation :

$$\iint \bar{\phi}_i \delta U_i^* ds \leq \iiint \sigma_{ij}^* (\delta \epsilon)_{ij}^* dv + \iiint \rho \gamma_i \delta U_i^* dv - \iiint \rho f_i \delta U_i^* dv - \iint \bar{\phi}_i \delta U_i^* ds \quad \dots\dots(125)$$

Dans cette inégalité, le premier membre représente le travail réel des forces inconnues sur les déplacements imposés (travail des réactions d'appuis). Ce terme est souvent nul (appuis fixes) et dans tous les cas positif.

Nous allons admettre que les forces de volume par unité de volume sont négligeables et que le problème est quasi statique. La fonctionnelle devient alors :

$$G(\delta U^*) = \iiint \sigma_{ij}^* (\delta \epsilon)_{ij}^* dv - \iint \bar{\phi}_i \delta U_i^* ds \quad \dots\dots(126)$$

Le théorème devient donc :

$$\iiint \sigma_{ij}^* (\delta \epsilon)_{ij}^* dv \geq \iint \bar{\phi}_i \delta U_i^* ds \quad \dots\dots(127)$$

Quel que soit le champ de déformation licite choisi, l'énergie dissipée par déformation plastique et par le frottement est supérieure à l'énergie motrice.

Ainsi, pour faire un calcul majorant de l'effort de poinçonnement, il faut définir un champ de déformation licite, c'est à dire un champ de déformation qui respecte les conditions aux limites sur les déplacements, les équations de compatibilité et la loi de comportement plastique.

Choix des déplacements :

Afin d'éviter les problèmes de compatibilité, on va directement choisir un champ de déplacement. Ce dernier va être déterminé à partir de l'idée que l'on peut se faire de l'écoulement réel.

Le contact pièce - outil étant un contact avec frottement, on constate donc que le métal directement en contact avec l'outil n'a qu'un déplacement dans le sens de la pénétration. D'autre part, on imagine aisément la formation d'un bourrelet de matière au voisinage de l'outil ce que présente la figure 37, [10 ; 11 ; 12].

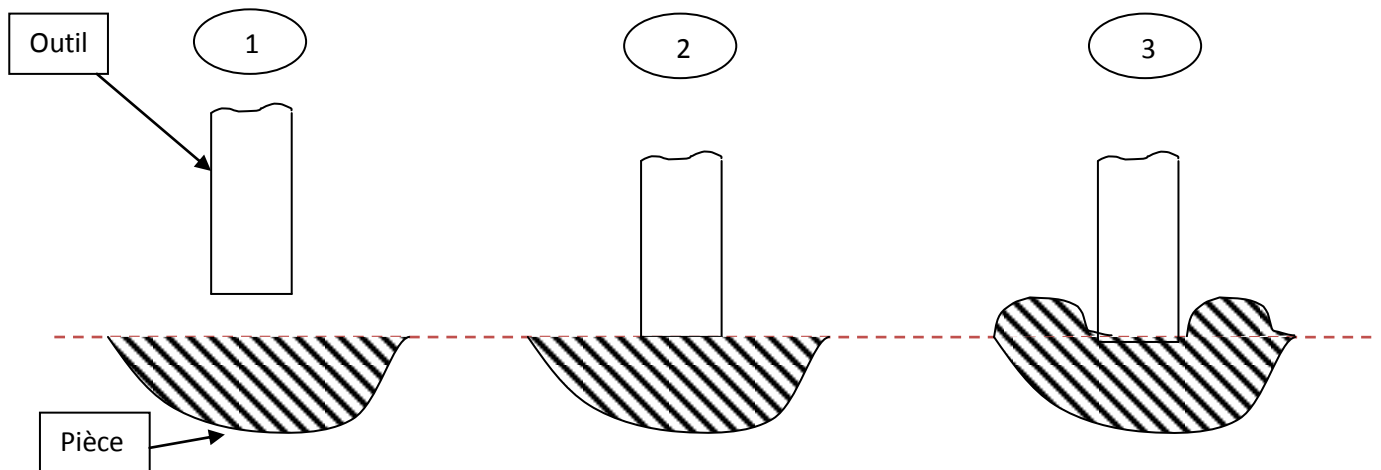


Figure 37 : Les trois étapes de contact pièce / outil

- ① Juste avant le contact
- ② Durant le contact
- ③ Après pénétration

On peut se faire l'idée suivante sur l'écoulement :

Un coin de matière (1) est enfoncé par l'outil dans la pièce. Ce coin supposé rigide déplace horizontalement de la matière. Pour pouvoir se déplacer, les deux blocs (2) et (2') font remonter de la matière sous forme de blocs rigides (3) et (3') (figure 38). L'ensemble de ces déplacements est limité dans l'espace, l'action de poinçonnement n'ayant des effets qu'au voisinage du poinçon.

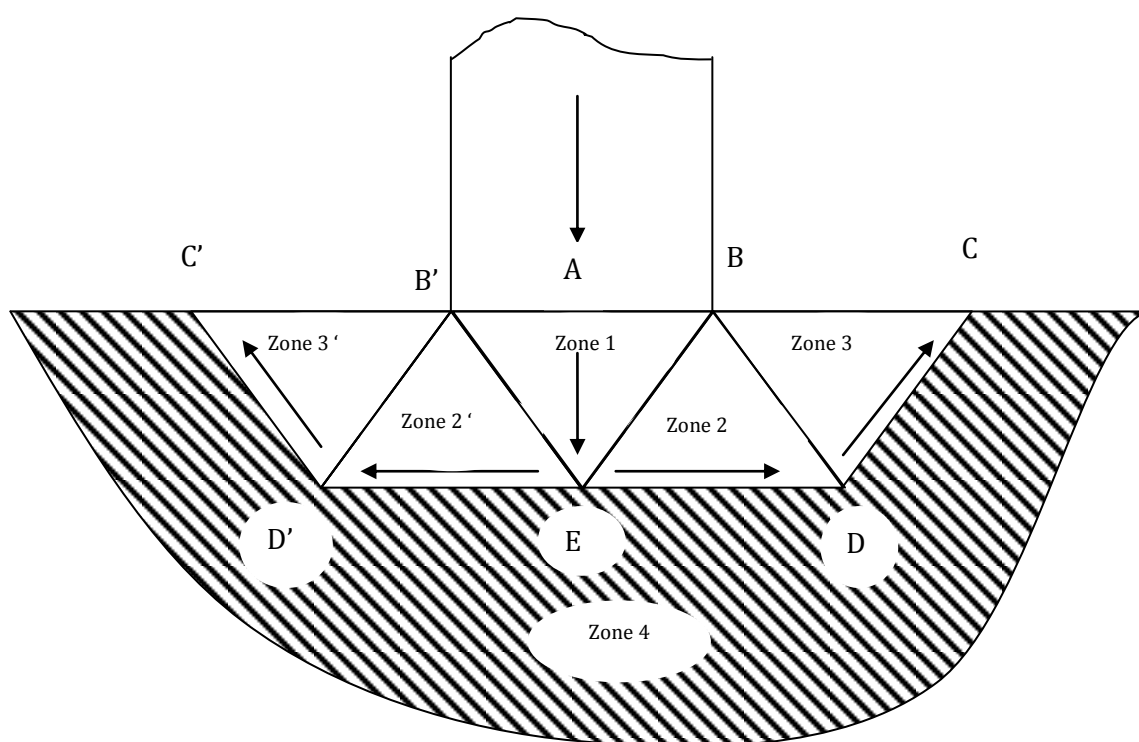


Figure 38 : Les différentes zones de glissement

On peut considérer les zones suivantes :

- * zone (1) formant le coin sous le poinçon
- * deux zones latérales (2) et (2') s'écoulant latéralement
- * deux zones (3) et (3') définissant le métal remontant (formation du bourrelet)
- * une zone (4) de métal ne participant pas à l'écoulement

Les hypothèses formulées sont les suivantes :

- Les zones ont un comportement de solides rigides ;
- Le déplacement étant uniforme dans chaque zone, le travail de déformation va être traduit par le travail des efforts de cisaillement au contact des différentes zones ;
- L'énergie est donc essentiellement dissipée aux frontières.

Pour aider à la compréhension, on utilise un diagramme des déplacements. Chaque zone est représentée par un point dans ce diagramme. Pour la construction de ce diagramme, on utilise la relation d'incompressibilité de la matière. En effet grâce à cette relation, on peut dire que pour le champ de déplacement la composante normale à une ligne de séparation de zone doit être continue à la traversée de la ligne de séparation. On traduit ainsi la continuité du débit de matière à la traversée de la ligne de séparation.

En d'autres termes, le déplacement relatif d'une zone par rapport à une autre zone adjacente ne peut qu'être parallèle à la ligne de séparation de cette zone.

Dans notre exemple la construction de ce diagramme des déplacements se fait de la façon suivante :

- La zone (4) ayant un déplacement absolu nul, le point représentatif est confondu avec l'origine (O) ;
- La zone (1) ayant un déplacement vertical, son point représentatif est sur l'axe vertical . De plus, comme la valeur du déplacement est connu ($\overline{\delta\mathbf{U}} = \mathbf{a}$), on peut définir la position exacte du point représentatif (P).

Pour obtenir le point représentatif de la zone (2) , on trace une droite parallèle à la ligne de glissement **AB** passant par le point représentatif de la zone (4) en suite on trace une droite parallèle à la ligne de glissement **BE** passant par le point représentatif de la zone (1) . L'intersection de ces deux droites donne le point représentatif (Q) de la zone (2)

Et pour le point représentatif de la zone (3) ; On trace une droite parallèle à la ligne de glissement **BD** passant par le point représentatif de la zone (2) et une autre droite parallèle à la ligne de glissement **DC** passant par le point représentatif de la zone(4) ; l'intersection de ces deux droites est le point représentatif (**R**) de la zone (3) .

On constate que le diagramme obtenu appelé hodographe de déplacement illustré en figure 39 est fonction d'un paramètre, par exemple la profondeur de la couche déformée (**a**).

A fin de simplifier le calcul on prend arbitrairement une profondeur égale à la demi largeur de l'outil. On obtient ainsi des triangles rectangles isocèles montés en figure40.

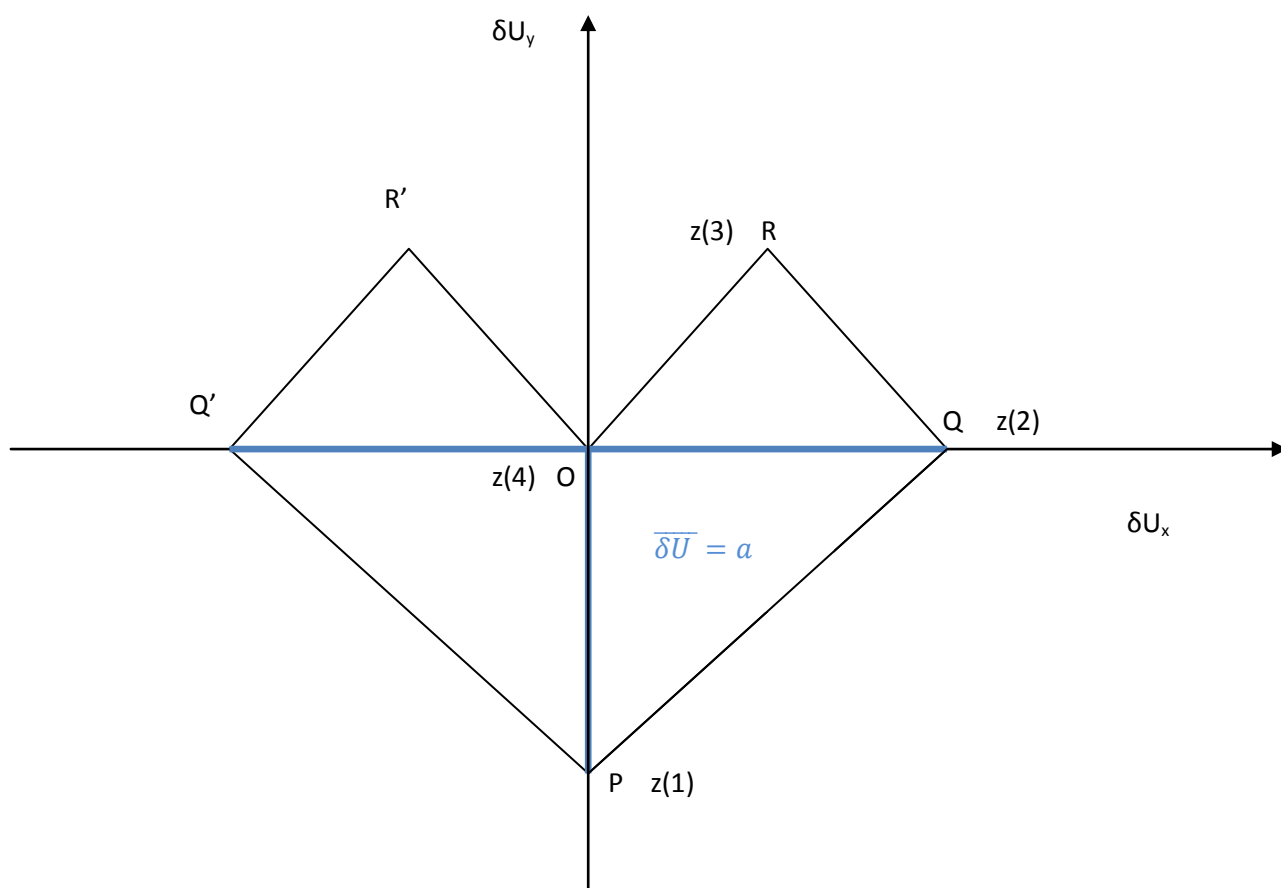


Figure 39 : L'hodographe des déplacements

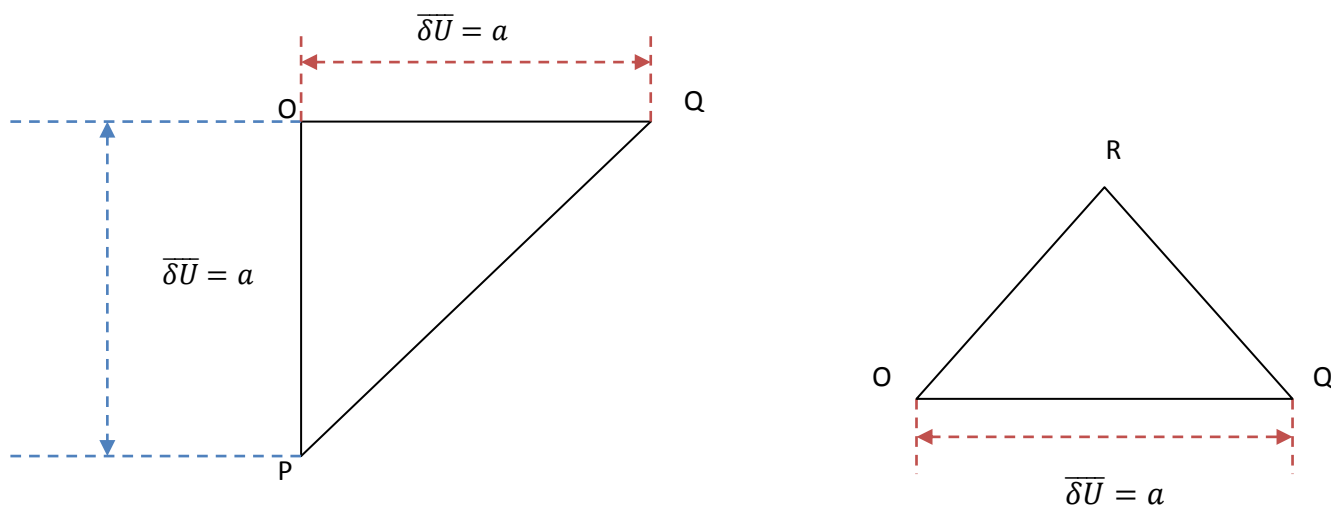


Figure 40 : Déplacement des zones

Donc la valeur du contact entre la zone (1) et la zone (2) est donnée par la droite PQ qui vaut $a\sqrt{2}$.

La valeur du contact entre la zone (2) et la zone (3) est donnée par la droite QR qui vaut $\frac{a}{\sqrt{2}}$

La valeur du contact entre la zone (3) et la zone (4) est donnée par la droite RO qui vaut elle aussi $\frac{a}{\sqrt{2}}$

La valeur du contact entre la zone(4) et la zone (2) est donnée par la droite OQ qui vaut **a**.

- **Calcul de l'énergie dissipée :**

En considérant le contact entre les deux couches du matériau (indéformable) [① et ③] et une couche intermédiaire [②] entre les deux qui est une couche

déformable d'épaisseur e . On peut alors calculer l'énergie dissipée dans cette couche déformable lors du glissement relatif des deux solides, [10].

En considérant que la couche ② est très mince et qu'elle est parfaitement adhérente aux deux solides, on peut faire l'hypothèse que la discontinuité de glissement entre les deux solides est répartie linéairement dans la couche ②. Ainsi dans le référentiel choisi de tel sorte que l'axe \vec{Y} soit l'axe normal à la surface de contact et que l'axe \vec{X} représente l'axe de la discontinuité de déplacement, on peut préciser les déplacements dans la figure 41.

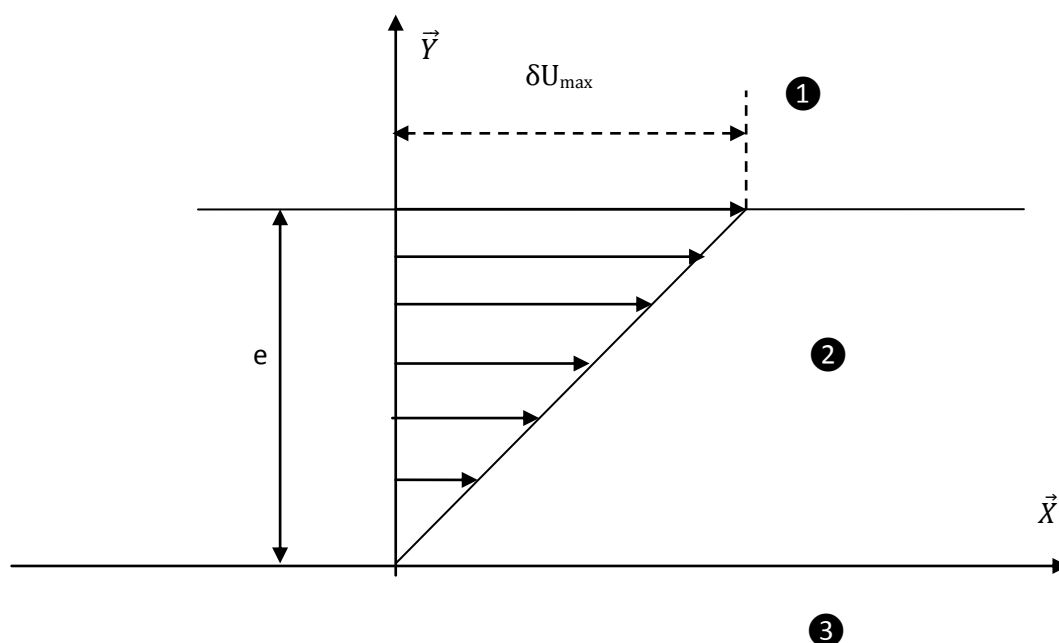


Figure 41 : Déplacement maximal

➤ Sur l'axe \vec{Y} : $\delta U_y = 0$ (128)

➤ Sur l'axe \vec{X} :
$$\begin{cases} \text{Si } y < 0 : \delta U_x = 0 \\ \text{Si } 0 \leq y \leq e : \delta U_x = \frac{y}{e} \delta U_{max} \\ \text{Si } y = e : \delta U_x = \delta U_{max} \end{cases}$$
(129)

➤ Sur l'axe \vec{Z} : $\delta U_z = 0$ (130)

Dans la couche ② (la seule qui soit déformée), le tenseur des déformations actuelles est:

Avec :

$$\overline{\overline{\delta \varepsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\text{grad} \vec{U}}} + \overline{\overline{\text{grad} \vec{U}^T}}) \quad \text{.....(131)}$$

$$\vec{U} = \begin{cases} U_x = \delta U_{max} \frac{y}{e} \\ U_y = 0 \\ U_z = 0 \end{cases} \quad \text{.....(132)}$$

$$\overline{\overline{\text{grad} \vec{U}}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\delta U_{max}}{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{.... (133)}$$

$$\text{Et } \overline{\overline{\text{grad} \vec{U}^T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\delta U_{max}}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{....(134)}$$

$$\overline{\overline{\delta \varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\delta U_{max}}{2e} & 0 \\ \frac{\delta U_{max}}{2e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(X,Y,Z)} \quad \text{.....(135)}$$

On suppose que le critère de VON MISES est applicable, donc le calcul de la déformation actuelle équivalente se fait comme suite :

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{\acute{e}qui} &= \delta \varepsilon_{\acute{e}qui}^P \\ &= \sqrt{\frac{2}{9} [(\delta \varepsilon_{11} - \delta \varepsilon_{22})^2 + (\delta \varepsilon_{22} - \delta \varepsilon_{33})^2 + (\delta \varepsilon_{33} - \delta \varepsilon_{11})^2 + 6(\delta \varepsilon_{12}^2 + \delta \varepsilon_{13}^2 + \delta \varepsilon_{23}^2)]} \\ &= \sqrt{\frac{2}{9} [0 + 0 + 0 + 6 \left(\frac{\delta U_{max}^2}{4e^2} + 0 + 0 \right)]} \quad \text{.....(136)} \end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{\text{équi}} = \delta\varepsilon_{\text{équi}}^P = \frac{\delta U_{\text{max}}}{e\sqrt{3}} \quad \text{.....(137)}$$

D'autre part pour un matériau rigide plastique, la contrainte équivalente est égale à la contrainte d'écoulement σ_e .

Ainsi l'énergie dissipée par unité de volume de matériau déformé est :

$$\delta W = \sigma_e * (\delta\varepsilon)_{\text{équi}} = \frac{\sigma_e \delta U_{\text{max}}}{e\sqrt{3}} \quad \text{.....(138)}$$

On peut alors définir l'énergie dissipée par unité de surface de contact :

$$\delta W_S = \frac{\sigma_e \delta U_{\text{max}}}{\sqrt{3}} \quad \text{.....(139)}$$

Cette énergie est indépendante de l'épaisseur du matériau déformable ② la relation reste valable même en l'absence du matériau (épaisseur nulle). On peut donc utiliser le résultat précédent pour calculer la dissipation totale d'énergie sur toutes les surfaces de contacts.

Les expressions suivantes sont calculées en considérant que l'on travaille avec une tranche d'outil d'épaisseur unité : (Tableau A)

Lignes	Surfaces (longueurs)	$\Delta\delta U$ (discontinuité)	δW
Entre P et Q	$2a\sqrt{2}$	$\delta U\sqrt{2}$	$\frac{4a\delta U\sigma_e}{\sqrt{3}}$
Entre Q et R	$2a\sqrt{2}$	$\frac{\delta U}{\sqrt{2}}$	$\frac{2a\delta U\sigma_e}{\sqrt{3}}$
Entre R et O	$2a\sqrt{2}$	$\frac{\delta U}{\sqrt{2}}$	$\frac{2a\delta U\sigma_e}{\sqrt{3}}$
Entre O et Q	$4a$	δU	$\frac{4a\delta U\sigma_e}{\sqrt{3}}$
Donc l'énergie totale dissipée est :			
$\frac{12a\delta U\sigma_e}{\sqrt{3}}$			

Tableau A : valeurs des énergies dissipées.

Calcul de la force motrice :

L'énergie motrice réelle est :

$$\delta E = F \delta U \quad \text{.....(140)}$$

Avec F la force pour l'unité de longueur de l'outil.

Le théorème de la borne supérieure nous donne donc :

L'énergie plastique dissipée est supérieur à l'énergie motrice, alors :

$$\delta W \geq \delta E \quad \text{.....(141)}$$

D'où :

$$F \leq 12a \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad \text{.....(142)}$$

On peut alors calculer un majorant de la pression moyenne :

$$P_{moy} = \frac{F}{2a} \leq \frac{6}{\sqrt{3}} \sigma_e = 3,46 \sigma_e \quad \text{.....(143)}$$

Remarque :

Avec la cinématique choisie, le phénomène de frottement au contact outil - pièce n'apparaît pas. Pour tenir compte de ce phénomène, il faut envisager un déplacement relatif des points de la surface de contact. Dans ce cas l'énergie surfacique dissipée par frottement se calcule avec la formule :

$$\delta W = \frac{m\sigma_e}{\sqrt{3}} |\Delta(\delta U)| \quad \text{.....(144)}$$

On peut être surpris du fait que la zone rigide (1) vienne s'enfoncer (forme de coin) dans la zone rigide (4) sans la déformée. En fait, il faut considérer la cinématique juste au début de l'enfoncement. La meilleure solution serait de travailler avec le théorème des puissances virtuelles plutôt qu'avec le théorème des travaux virtuels.

Il est possible d'optimiser la méthode en introduisant des paramètres dans la description cinématique. L'énergie dissipée devient alors une fonction de ces paramètres qu'il convient de minimiser. On se retrouve alors en face d'un problème classique de recherche d'extrémum.

Ainsi dans notre exemple nous avons fixé arbitrairement la valeur de la profondeur de la couche déformée à la demi valeur de la largeur d'outil (**a**).

$$\delta W = \frac{16}{\sqrt{2}} a \frac{\delta U \sigma_e}{\sqrt{3}} \quad \text{.....(145)}$$

La valeur de la profondeur de la couche déformée optimale est $a\sqrt{2}$

III.2.2.2. Méthode de la borne inférieure :

Théorème statique ou de la borne inférieure :

Enoncé :

Soit $\bar{\sigma}^*$ un champ de contrainte actuel licite, soit $\bar{\phi}^*$ les vecteurs contraintes qui s'en déduisent sur la surface.

Il existe une fonctionnelle définie comme suite :

$$H(\bar{\sigma}^*) = \phi_i^* \bar{\delta U}_i ds \quad \text{.....(146)}$$

Cette fonctionnelle est maximale pour le champ de contrainte $\bar{\sigma}$ solution du problème, [10].

Démonstration :

Pour un champ de contrainte licite quelconque $\overline{\sigma}^*$, le théorème des travaux virtuels nous donne :

$$\iint \overline{\phi}_i \delta U_i ds + \iint \phi_i^* \overline{\delta U}_i ds + \iiint \rho f_i \delta U_i dv = \iiint \sigma_{ij}^* \delta \varepsilon_{ij} dv + \iiint \rho \gamma_i \delta U_i dv \quad \dots\dots(147)$$

En particulier pour $\overline{\sigma}$ le champ de contrainte solution nous avons :

$$\iint \overline{\phi}_i \delta U_i ds + \iint \phi_i \overline{\delta U}_i ds + \iiint \rho f_i \delta U_i dv = \iiint \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv + \iiint \rho \gamma_i \delta U_i dv \quad \dots\dots(148)$$

Par soustraction, on peut écrire :

$$\iint (\phi_i - \phi_i^*) \overline{\delta U}_i ds = \iiint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \delta \varepsilon_{ij} dv \quad \dots\dots(149)$$

D'après le principe du travail plastique maximal, cette expression est toujours positive. On en déduit que la fonctionnelle : $H(\overline{\sigma}^*) = \phi_i^* \overline{\delta U}_i ds$ est maximale pour le champ de contrainte $\overline{\sigma}$ solution du problème.

Application du théorème :

Pour appliquer le théorème de la borne inférieure, il faut se donner un champ de contrainte licite. Le théorème traduisant le fait que la fonctionnelle $H(\overline{\sigma}^*) = \phi_i^* \overline{\delta U}_i ds$ est maximale pour le champ de contrainte solution du problème, on peut dire que

l'énergie motrice calculée à partir d'un champ de contrainte licite quelconque est inférieure à l'énergie motrice réelle, [10].

Dans la suite on va reprendre l'exemple précédent du poinçonnement en définissant cette fois-ci un champ de contrainte licite illustré en figure 42, c'est à dire un champ de contrainte vérifiant les équations d'équilibre, permettant de vérifier les conditions aux limites sur les efforts et respectant le critère de plasticité en tous points de l'espace, [11].

On suppose que le trièdre $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est principal pour tous les points de la matière.

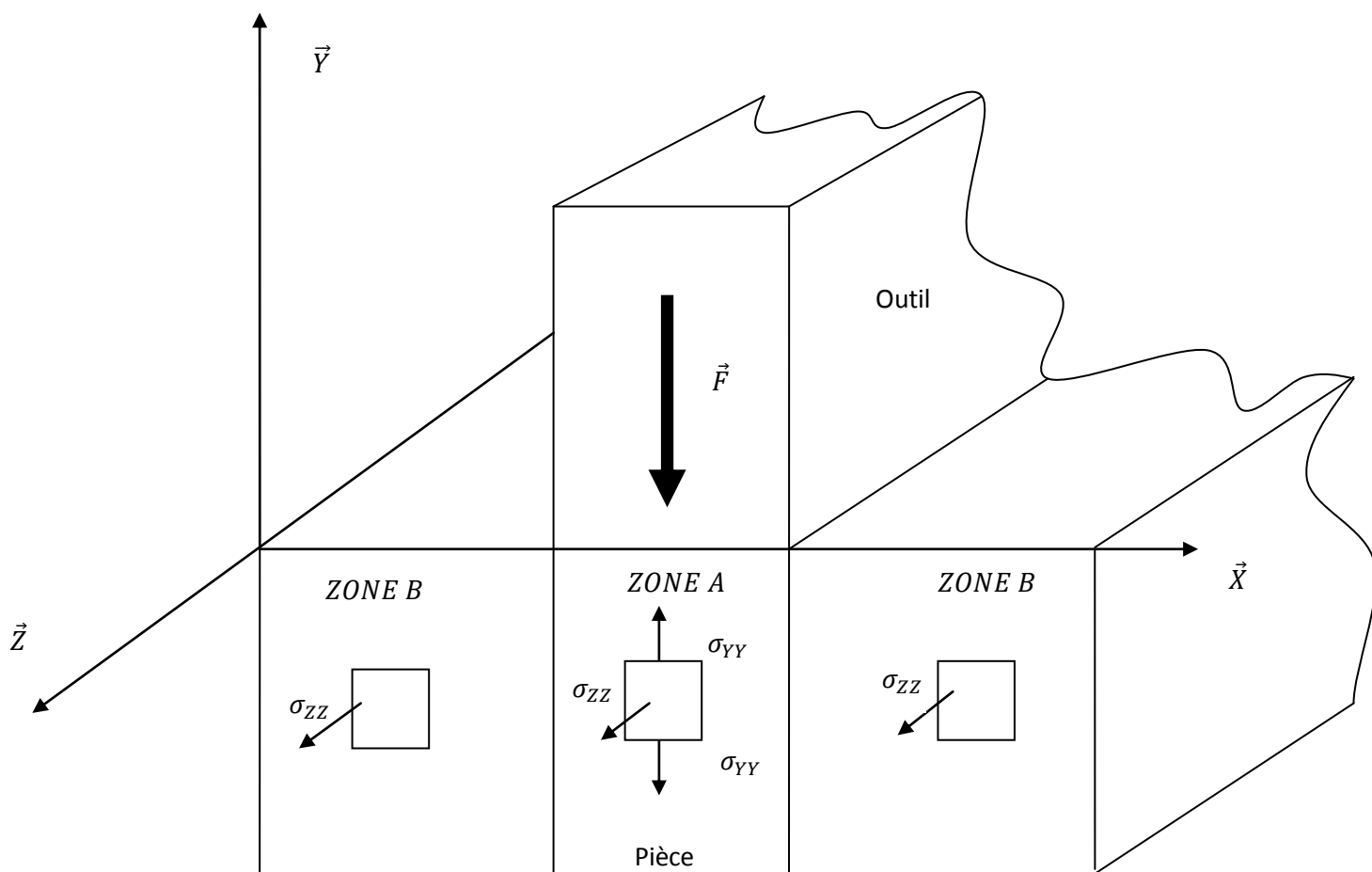


Figure 42 : Représentation des contraintes sur la pièce

On découpe la pièce en deux zones. La zone **A** est située juste en dessous de l'outil. La zone **B** est la partie complémentaire.

On imagine les champs de contrainte suivants :

ZONE A :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad \text{.....(150)}$$

ZONE B :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad \text{.....(151)}$$

Vu la grande longueur de l'outil, on peut considérer que l'on a un état plan de déformation :

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \quad \text{.... (152)} \quad \text{et} \quad \delta \varepsilon_{zz} = 0 \quad \text{.....(153)}$$

Le critère de Von Misés nous permet d'écrire :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_e \quad \text{.....(154)}$$

Pour la première zone puisque la contrainte σ_{xx} est nulle nous aurons :

$$\sigma_{yy} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_e \text{ (Compression)} \quad \text{.....(155)}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F}{s} \quad \text{avec} \quad s = 2a \cdot e \quad \text{.....(156)}$$

L'épaisseur de l'outil étant l'unité, il devient donc :

$$F = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_e a \quad \text{.....(157)}$$

On peut donc donner une valeur minorante de la pression de contact :

$$P_{moy} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_e \approx 1,155 \sigma_e \quad \text{.....(158)}$$

Remarque :

Il est possible d'optimiser la méthode en prenant un champ de contrainte plus proche de la réalité. Par exemple on peut prendre :

ZONE A :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad \text{.....(159)}$$

ZONE B :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad \text{.....(160)}$$

Le résultat est alors :

$$P_{moy} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_e \approx 2,31 \sigma_e \quad \text{.....(161)}$$

III.3. Méthode des lignes de glissement :

III.3.1. Les lignes de glissement et leurs propriétés :

Les lignes de glissement :

La ligne de glissement est une ligne qui, en chacun de ses points, est tangente à l'élément de surface de la contrainte tangentielle maximale.

Il existe deux familles orthogonales des lignes de glissement d'après [13] qui sont caractérisées par les équations :

$$x = x(\alpha, \beta) \quad \dots (162) \quad \text{et} \quad y = y(\alpha, \beta) \quad \dots (163)$$

Où α et β sont des paramètres quelconques.

Les propriétés des lignes de glissement :

Les lignes de glissement présentent beaucoup de propriétés étudiées essentiellement par Mr. HENCKY ; on peut citer :

- le long d'une ligne de glissement la variation de la contrainte σ est proportionnelle à l'angle θ (formé par la même ligne et l'axe des x) ;
- Si on connaît la valeur de σ en un point quelconque du réseau de glissement donné, cette même valeur peut être calculée partout dans le champ ;
- Si un segment quelconque d'une ligne de glissement de la famille β ou α est une droite, tous les segments correspondants des lignes β ou α découpés par les lignes de famille α ou β seront des droites ;

- les segments de droite découpés par les lignes de glissement d'une autre famille ont une même longueur. Le rayon de courbure des lignes de glissement β diminue lorsque l'on se déplace vers leur concavité ;
- Si il y a une discontinuité des dérivées des composantes de la contrainte lors du passage par la ligne de glissement β par exemple, alors ; la courbure des lignes de glissement de la deuxième famille α est discontinue le long de la ligne β .

Soit un état de contrainte en un point P donné d'après [13] comme suite (Figure 43):

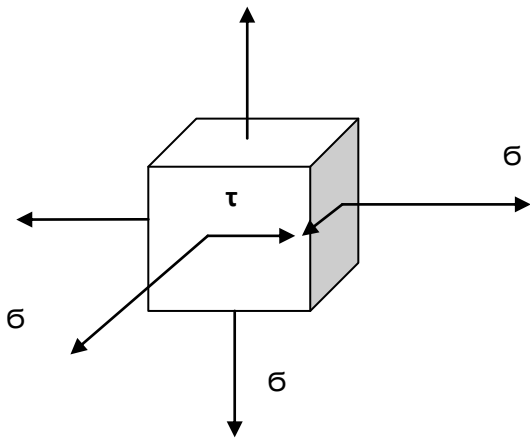


Figure 43 : Etat de contrainte en un point P

La figure 44 montre la construction des lignes de glissement :

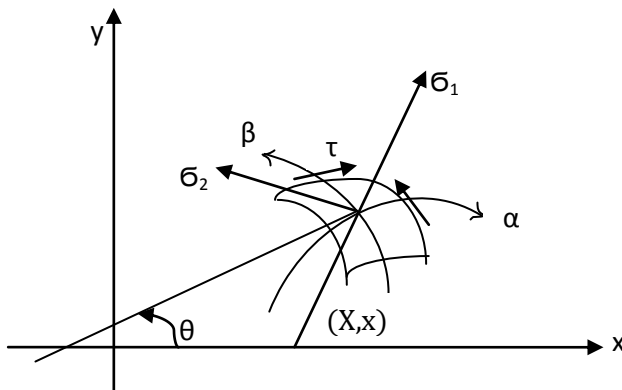


Figure 44 : Tracé des lignes de glissement en un point P

III.3.2. Application de la méthode des lignes de glissement :

Avant l'application de la méthode on pose les hypothèses suivantes :

Le comportement du matériau sera considéré rigide parfaitement plastique.

La déformation est plane, avec **Z** axe perpendiculaire au plan d'écoulement on écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{zz} = \mathbf{0} \quad \text{.....(164)}$$

$$\begin{cases} \delta U = \delta U(x, y) \\ \delta V = \delta V(x, y) \\ \delta W = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{.....(165)}$$

Le tenseur des déformations actuelles est :

$$[(\delta \boldsymbol{\varepsilon})]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) & \frac{\partial \delta v}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{.....(166)}$$

La loi de normalité nous permet d'écrire :

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ik} = \mathbf{S}_{ik} \delta \lambda \quad \text{.....(167)}$$

Avec :

$$\delta\lambda > 0 \quad \text{paramètre de plasticité} \quad \dots\dots(168)$$

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{xz} = \mathbf{0} & \Rightarrow & \sigma_{xz} = 0 \\ \mathbf{s}_{yz} = \mathbf{0} & \Rightarrow & \sigma_{yz} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots(169)$$

Et puisque la déformation est supposée plane on a aussi :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(170)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \quad \dots\dots(171)$$

D'après [13] on écrit le critère de VON MISES :

$$\sigma_{\text{éq V.M}}^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + 0 + 0)] = \sigma_e^2 \quad \dots\dots(172)$$

$$\frac{3}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 3(\sigma_{xy})^2 = \sigma_e^2 \quad \dots\dots(173)$$

$$\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xy})^2 = \frac{\sigma_e^2}{3} = K^2 \quad \dots\dots(174)$$

$$K = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = \tau_e \quad \dots\dots(175)$$

Les équations d'équilibre indéfinies pour un état de contraintes (Figure 45) sont : (A), (B), (C)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{.....(A)}$$

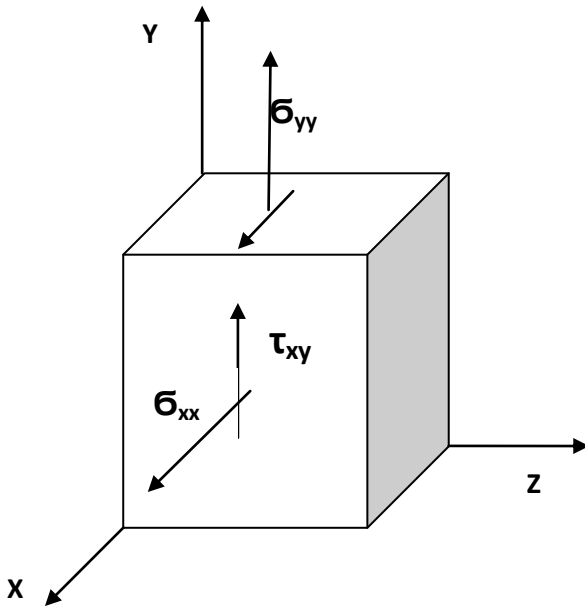


Figure 45 : Etat plan de contraintes

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \quad \text{.....(B)}$$

$$\frac{1}{4} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xy})^2 = \frac{\sigma_e^2}{3} = K^2 \quad \text{.....(C)}$$

Etude du champ des contraintes :

Relation de HENCKY :

On construit d'après [13] le cercle de MOHR suivant (Figure46) :

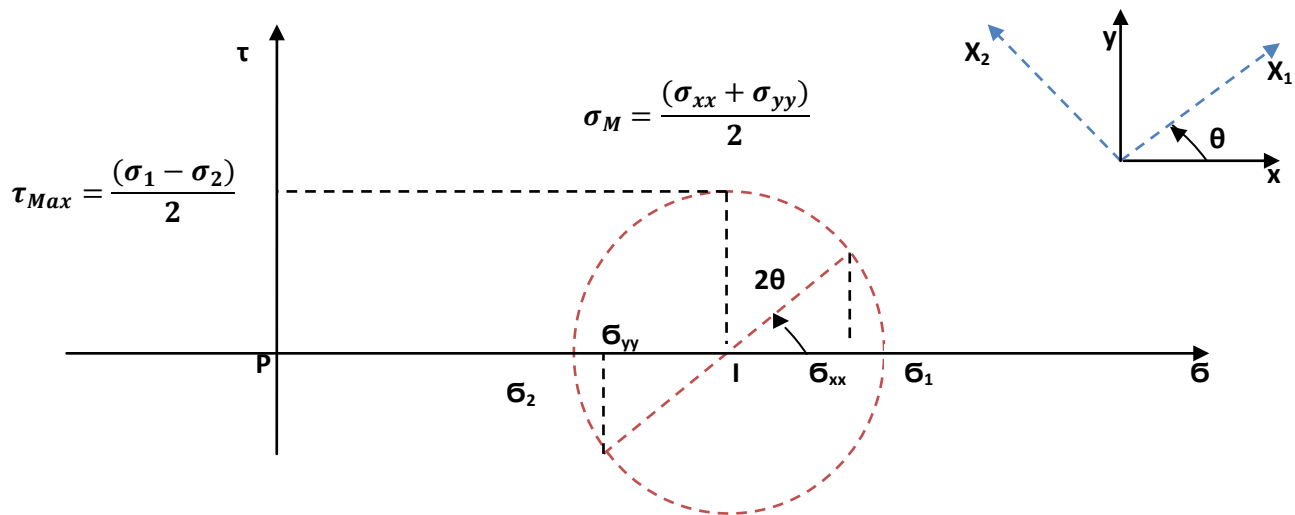


Figure 46 : Cercle de MOHR

Changement de variables :

On utilise d'après [13] le centre moyen comme le montre la figure 47 :

$$\Psi = -PI = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{.....(176)}$$

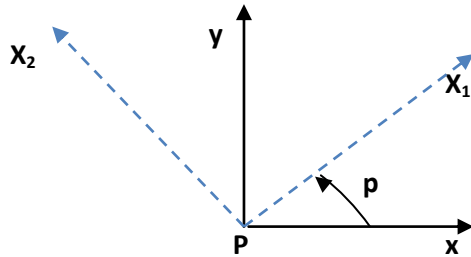


Figure 47 : Rotation des axes

$$\theta = (P_x, P_{x_1}) \quad \text{.....(177)}$$

Et pour le critère de VON MISES :

$$R^2 = K^2 \Rightarrow K = R \quad \text{.....(178)}$$

De (C) :

$$R = K = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad \text{.....(179)}$$

Il devient donc des relations de HENCKY (181) après remplacement dans (A) :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\Psi + K \cos 2\theta \\ \sigma_{yy} = -\Psi - K \cos 2\theta \\ \sigma_{xy} = K \sin 2\theta \end{cases} \quad \text{.....(180)}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Psi}{\partial x} - 2K \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2K \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \\ +2K \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} + 2K \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{.....(181)}$$

Par souci de simplification d'après [13] les axes x et y seront particularisés (Figure 48) :

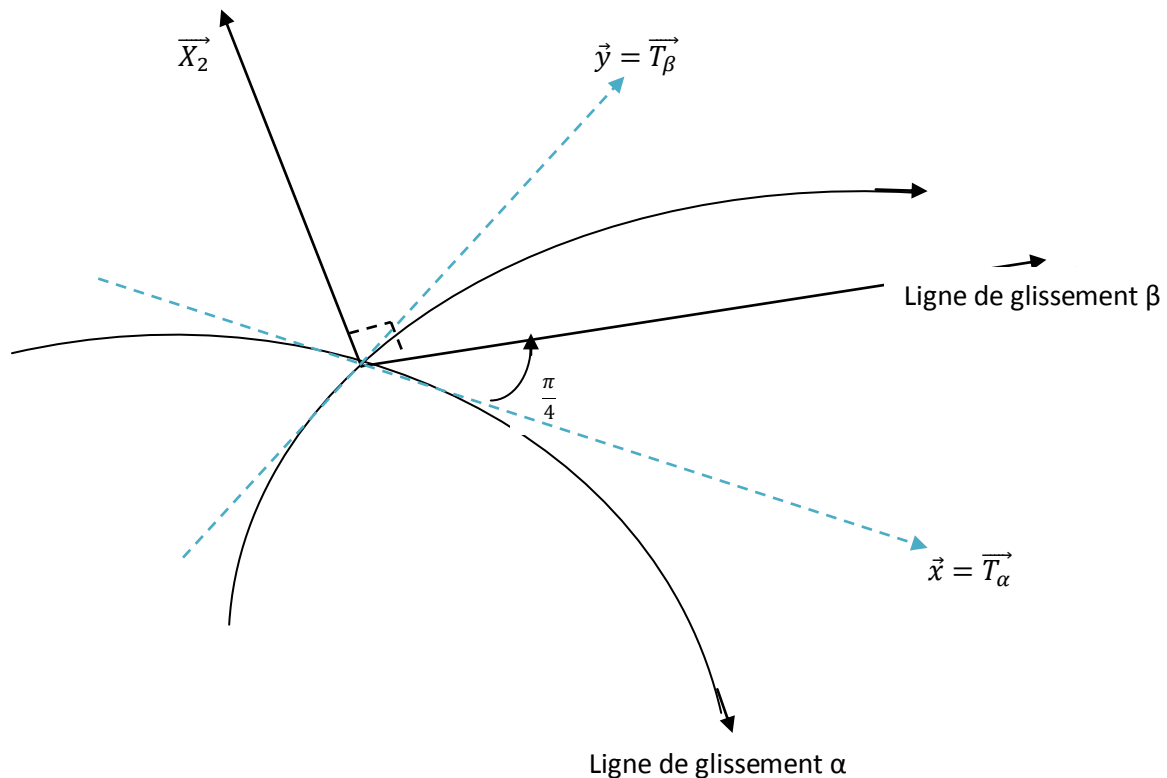


Figure 48 : Les lignes de glissement avec divers axes

$$\begin{cases} \vec{x} \text{ est confondu } \vec{T}_\alpha \\ \vec{y} \text{ est confondu } \vec{T}_\beta \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \dots\dots(182)$$

$$\begin{cases} \frac{-\partial\Psi}{\partial s_\alpha} - 2K \frac{\partial\theta}{\partial s_\alpha} = 0 \\ \frac{-\partial\Psi}{\partial s_\beta} - 2K \frac{\partial\theta}{\partial s_\beta} = 0 \end{cases} \dots\dots(183)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s_\alpha} [\Psi + 2K\theta] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial s_\beta} [\Psi - 2K\theta] = 0 \end{cases} \dots\dots(184)$$

T_α et T_β étant deux directions caractéristiques en P , alors on a pour les relations de HENCKY :

$$\Psi + 2K\theta = \text{Cte} \quad \text{Le long d'une ligne de glissement } \alpha \left(-\frac{\pi}{4}\right) \dots\dots(185)$$

$$\Psi - 2K\theta = \text{Cte} \quad \text{Le long d'une ligne de glissement } \beta \left(+\frac{\pi}{4}\right) \dots\dots(186)$$

Utilisation des relations de HENCKY :

La connaissance des lignes de glissement implique la connaissance de l'angle θ partout dans la structure.

$$\theta = (\vec{x}, \vec{X}_1) = (\vec{x}, \vec{\alpha}) + \frac{\pi}{4} \dots\dots(187)$$

Alors il suffit de connaître ρ en un point pour déterminer la valeur de la contrainte n'importe où suivant la ligne de glissement.

En reprenant le même exemple du forgeage (figure 49), l'application de la méthode des lignes de glissement d'après [13] se déroule comme suite :

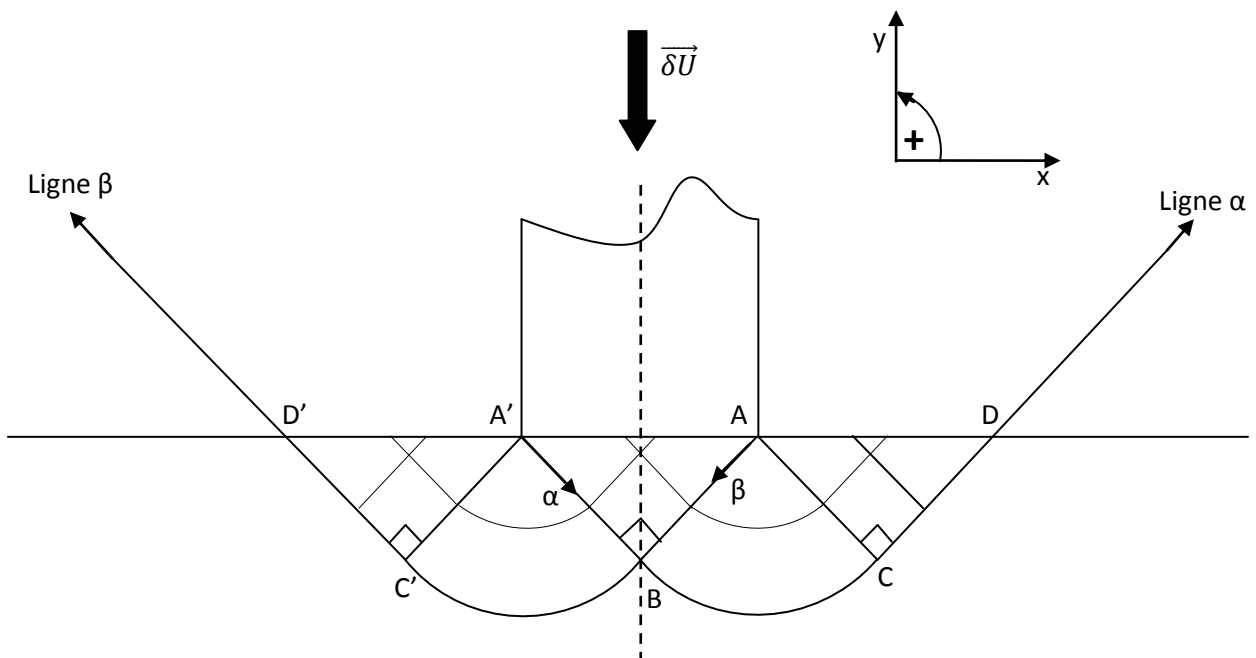


Figure 49 : Construction des lignes de glissement d'une barre en forgeage

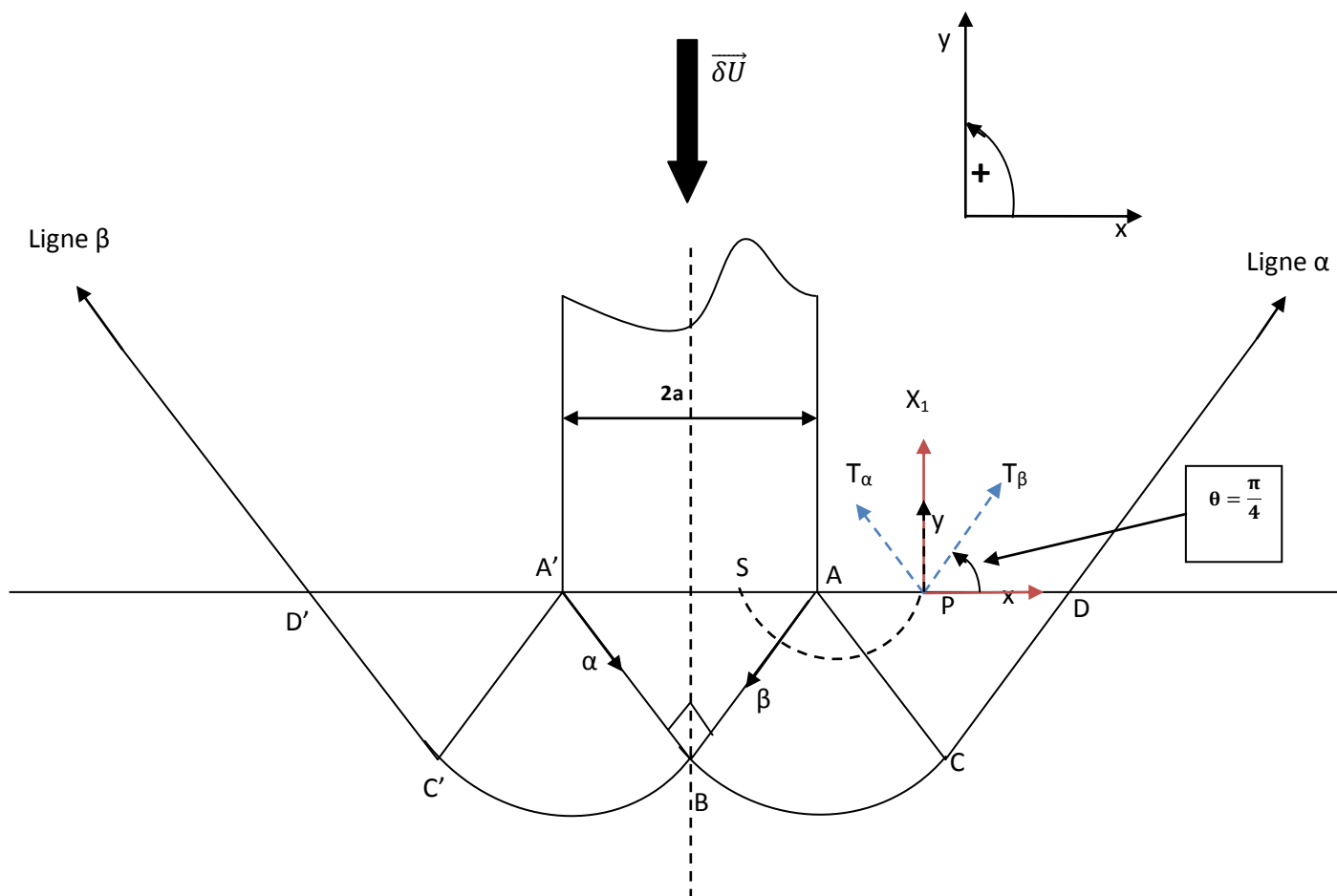


Figure 50 : Utilisation des lignes de glissement en 2 points distincts (S) et (P)

En suivant la ligne de glissement qui va de (P) en (S) comme c'est montré en figure 50, On peut déterminer la contrainte en (S) à partir de celle en (P), [13].

Si l'on isole ces deux points [(figure 51-A) / (figure 51-B)], on peut formuler d'après [13] les expressions suivantes :

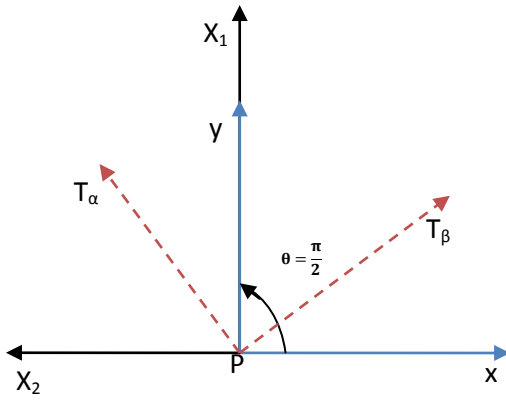


Figure 51-A : Définition des axes en P

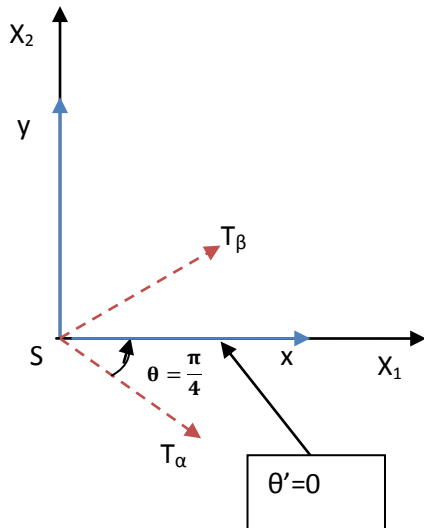


Figure 51-B : Définition des axes en S

En (P) :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{.....(188)}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_1 = 0 \quad \text{.....(189)}$$

Puisque :

$$\sigma_{yy} = -\Psi + \left[-K \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad \text{.....(190)}$$

$$\sigma_{yy} = -\Psi - K = 0 \quad \text{.....(191)}$$

D'où :

$$\Psi = K \quad \text{.....(192)}$$

On a donc en (P) :

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \Psi = K \end{cases} \quad \text{.....(193)}$$

Pour déterminer la contrainte (ρ') en (S), on utilise la relation de HENCKY suivante :

$$\Psi + 2K\theta = \Psi' + 2K\theta' \quad \text{.....(194)}$$

Et du moment que :

$$\theta' = 0 \quad \text{.....(195)}$$

$$\Psi' = \Psi + K\pi \quad \text{.....(196)}$$

$$\Psi' = K + K\pi = K(1 + \pi) \quad \text{.....(197)}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\sigma_{xx} = -\Psi' + K \cos 2\theta' \quad \text{avec} \quad \theta' = 0 \quad \text{.....(198)}$$

D'où :

$$\sigma_{xx} = -K\pi \quad \text{.....(199)}$$

Et :

$$\sigma_{yy} = -\Psi' - K \cos 2\theta' \quad \text{.....(200)}$$

$$\sigma_{yy} = -K(1 + \pi) - K = -K(2 + \pi) = -\frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}(2 + \pi) < 0 \quad [\text{compression}] \quad \text{.....(201)}$$

Alors :

$$P_{\text{moy}} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}(2 + \pi) \approx 2,97 \sigma_e \quad \text{.....(202)}$$

Pour avoir l'effort normal F_y il suffit de multiplier σ_{yy} par la surface d'où :

$$F_{yy} = \sigma_{yy} \cdot S = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}(2 + \pi) \cdot 2a \cdot e \approx 5,94 \sigma_e \cdot a \cdot e \quad \text{.....(203)}$$

III.4. Conclusion :

Les méthodes précédentes permettent d'encadrer la solution du problème :

$$3,27\sigma_e \geq P_{moy} \geq 2,31\sigma_e \quad \text{.....(204)}$$

En pratique, la méthode de la borne inférieure est moins souvent utilisée que la méthode de la borne supérieure, pour deux raisons :

- Il est plus difficile d'imaginer un champ virtuel de contraintes qu'un champ virtuel de déplacement.
- Il est plus intéressant d'avoir un majorant des grandeurs technologiques plutôt qu'un minorant.

La solution exacte est donnée par la méthode des lignes de glissement :

$$P_{moy} = \frac{2+\pi}{\sqrt{3}} \sigma_e = 2,97 \sigma_e \quad \text{.....(205)}$$

Conclusion générale :

On a pu voir que lors de la mise en forme certaines pièces perdent la propriété d'isotropie mais par souci de simplification elles seront considérées isotropes.

Le travail présenté dans ce mémoire prouve également que la détermination de la force nécessaire au forgeage d'une barre est possible grâce aux méthodes de calcul et cela sans avoir à faire l'opération ce qui permet de prévoir la détérioration de la machine.

Certaines méthodes sont plus adaptées que d'autres, la méthode des tranches par exemple donne une solution qui peut être encadrée par la suite en appliquant les deux théorèmes de la borne supérieure et de la borne inférieure qui se basent respectivement sur le champ de déformations et le champ de contraintes.

Néanmoins il est plus facile d'imaginer un champ de déformations plutôt que d'imaginer un champ de contraintes, en cette raison la méthode de la borne supérieure est plus adaptée que la méthode de la borne inférieure.

La méthode des lignes de glissement donne une solution exacte au problème.

Références bibliographiques :

[1] D. FRANÇOIS A. PINEAU A. ZAOUÏ
Comportement mécanique des matériaux
HERMES 1991

[2] C. PHILIPPE
Mécanique du comportement des matériaux
C.E.R.E.N.S.A.M. PARIS 1991-1992

[3] J. MANDEL
Propriétés mécaniques des matériaux : rhéologie, plasticité.
EYROLLES Paris, 1977.

[4] J. LEMAITRE J.L. CHABOCHE
Mécanique des matériaux solides
BORDAS 1985

[5] www.wikipédia.com

L'écroutissage

[6] M. BOIVIN

Cours de plasticité

I.N.S.A. LYON 1983-1984

[7] M. MAYA
Plasticité
Centre de CLUNY 2008

[8] FRANÇOIS SIDOROFF

Mécanique des milieux continus

Ecole CENTRALELYON 28 Oct. 2010

[9] W. PRAGER

Problèmes de plasticité théorique.

DUNORD Paris, 1958.

[10] P. BAQUE E. FELDER J. HYAFIL Y. D'ESCATHA
Mise en forme des métaux
BORDAS 1973

[11] M. BELLET P. MONTMITONNET E. MASSONI J.L. CHENOT
Séminaire de plasticité et mise en forme des métaux
C.E.M.E.F. Sept. 1990

[12] P. BOISSE
Calculs des structures élastiques et plastiques par la méthode des éléments finis
ENSM BESANCON 1989

[13] L.KATCHANOV
Éléments de la théorie de la plasticité
Edition Mir MOSCOU, 1975.