

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou



Faculté des Sciences

Département de Mathématique

Mémoire de Master

En vue de l'obtention du Diplôme de Master

En Recherche Opérationnelle

THEME

Ensembles astéroïdaux dans les graphes

Présenté par : M^{elle} MERBOUTI Saïda

Encadré par : Mr SADI

Membre du jury :

Président : Mr B. OUKACHA

Promoteur : Mr B. SADI

Examineur : Mr K. KASDI

Examineur : Mr M.AOUANE

Maitre de Conférences 'A'

Maitre de Conférences 'A'

Maitre Assistant 'A'

Maitre Assistant 'A'

Table des matières

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre1

Introduction.....	3
-------------------	---

1. Eléments de la théorie des graphes	3
1.1 Définitions et concepts de base	3
1.1.1 Graphe non orienté et graphe orienté.....	3
1.1.2 Adjacence et Incidence	3
1.1.3 Voisinage	4
1.1.4 Chaîne et cycle	4
1.1.5 Connexité	4
1.1.6 Graphe complémentaire	5
1.1.7 Graphe complet, clique	5
1.1.8 Graphe biparti.....	5
1.1.9 Stable	6
1.1.10 Complétion minimale	7
1.2 Quelques classes de graphes.....	7
1.2.1 Graphe d'intervalles	7
1.2.2 Graphe de permutation	7
1.2.3 Graphe triangulé	8
1.2.4 Graphe planaire	9
1.2.5 Graphe distance héréditaire	10
1.3 Complexité	10

Chapitre2

Introduction.....	11
-------------------	----

2. Ensembles astéroïdal dans les graphes et graphes astéroïdaux	11
2.1 Ensembles astéroïdal dans les graphes.....	11
2.1.1 Triplet astéroïdal	11
2.1.2 Graphe sans triplet astéroïdal	12
2.1.3 Ensemble dominant.....	12
2.1.4 Ensemble astéroïdal.....	14
2.1.5 Nombre astéroïdal.....	14
2.1.6 Séparateur minimal.....	15
2.2 Graphes astéroïdaux.....	16
2.3 NP-complétude.....	17
3. Nombre astéroïdal pour quelques classes de graphes	18
3.1 Le nombre astéroïdal du graphe arc-circulaire.....	18
3.1.1 graphe arc circulaire.....	18

3.1.2	graphe de comparabilité.....	19
3.2	Le nombre astéroïde des graphes sans fourche.....	21
3.2.1	graphe sans fourche.....	21
3.2.2	sommet extrémal et ensemble extrémal.....	21
3.2.3	ensemble astéroïdal extrémal.....	21
3.3	Le nombre astéroïdal du graphe sans HHD.....	23
3.3.1	graphe sans HHD	23
4.	Application	27
	Histoire de six maisons.....	27
	Conclusion.....	31
	Conclusion générale	32
	Bibliographie	33

Remerciements

Je remercie dieu tout puissant d'avoir guidé mes pas vers les portes du savoir tout en illuminant mon chemin, et m'avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener mon travail à terme.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour leur protection filiale, leur engagement incessant à me prendre en charge durant toutes les étapes de ma vie, surtout les plus difficiles ; et leur apport affectif et matériel inestimable. (Que Dieu les protège et veille sur eux).

Ma reconnaissance va à monsieur SADI, mon promoteur pour ses conseils précieux, et ses sincères contributions dans la réalisation de mon travail.

Mes remerciements vont également au membre de jury pour avoir accepté de prendre part au jury de soutenance.

Un remerciement particulier à mon fiancé Djamel qui m'a accompagnée pas à pas tout au long de mon travail. Merci à tous ceux et toutes celles qui ont, de près ou de loin, contribué à la réalisation de ce modeste travail.

A tous, merci.

A bouquet of pink roses and white snowdrops is positioned on the left side of the page, partially overlapping the text. The roses are in various stages of bloom, and the snowdrops are small and delicate.

Dédicaces

Je dédie mon modeste travail :

- *Aux personnes les plus chères à mon Cœur mes parents, source d'amour, de courage et d'encouragement (que dieu les*
- *A mes frères, Mohamed et Zidan ;*
- *A mes sœurs, Malika, Akila, Farida, Saliha,*
- *Rezika, Fariza, Sabrina et ma belle sœur Malika ainsi*

que toute sa famille ;

- *A mon fiancé Djamel ;*
- *A mes oncles maternels et paternels ;*
- *A mes oncles maternels et paternels ;*
- *A mes amies...Lynda, ghania, Naoual, Ouardia et*

Souhila, que je tiens à remercier ;

- *A toute la promotion Master2 en Recherche Opérationnelle 2010/ 2011 ;*
- *A tous ceux qui m'aiment ;*

Saïd

La théorie des graphes et la recherche opérationnelle consistent à analyser, modéliser des problèmes concrets en vue de trouver des méthodes de résolution spécifiques souvent basées sur des techniques informatiques et mathématiques. Les résultats doivent permettre d'aider un décideur à mieux piloter son système.

On considère souvent que la théorie des graphes a commencé avec Euler au XVIII^e siècle. Parmi les résultats les plus connus, celui de la coloration des cartes de géographie, à savoir quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour que deux pays frontaliers aient deux couleurs différentes; ce problème a été résolu grâce au théorème des quatre couleurs conjecturé par Francis Guthrie, en 1852.

Pour des graphes quelconques, la résolution de problèmes est difficile, mais par contre elle est facile pour des graphes particuliers. Il est donc important de connaître la classe de graphes sur laquelle on travaille pour utiliser la théorie qui lui correspond.

Broersma et col. [1] introduisent le nombre astéroïdal et les ensembles astéroïdaux pour étendre les graphes sans triplets astéroïdaux définis par Lekkerkerker et Boland [11].

Les classes de graphe définies par modèle d'intersection ont un grand intérêt pratique, depuis que Cook introduit la NP-complétude.

Beaucoup d'efforts ont été tournés pour résoudre des problèmes NP-complets sur des classes de graphes restreintes. Cela s'explique par le fait que les instances sur lesquelles on veut résoudre ces problèmes n'ont pas toujours la complexité des graphes en général.

Les classes d'intersection géométriques interviennent naturellement dans la modélisation de certains problèmes pratiques : Les graphes d'intervalles sont à la base de problèmes de reconstruction de génome et d'emploi du temps, les graphes de permutation jouent un rôle dans l'analyse phylogénétique.

Ce mémoire aborde le problème de la reconnaissance des graphes sans triplet astéroïdal, définis comme des graphes n'ayant pas un triplet de sommets tels qu'il existe une trajectoire entre deux d'entre eux en évitant le voisinage du troisième.

Notre travail est organisé en deux chapitres :

Chapitre1 :

Nous présentons pour les notions de base utilisées dans ce mémoire.

Chapitre2 :

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressées à la classe des graphes AT-free, et à leur relation avec d'autres classes telles que les graphes arc-circulaires, d'intervalles, de comparabilité, sans-fourche et HHD-free. Nous terminons ce chapitre avec une petite application.

Et nous terminons notre travail par une conclusion générale.



Chapitre I



Chapitre II

Introduction

Nous présentons ici quelques définitions et notions que l'on considère comme étant de base pour comprendre la suite du travail. Dans ce mémoire, nous définissons précisément les classes de graphe qui interviennent dans ce mémoire. Certaines d'entre elles n'apparaîtront que brièvement, d'autres seront omniprésentes.

Preliminaire

Par définition, les graphes définis dans ce mémoire sont sans boucle, non-orientés, simples et finis. Le nombre de sommets est noté n et le nombre d'arêtes est noté m .

1. Eléments de la théorie des graphes

1.1 Définitions et concepts de base

1.1.1 Graphe non orienté et graphe orienté

Un graphe **non orienté** est un couple (V, E) où V est l'ensemble des sommets, et E est l'ensemble d'arêtes de G . Chaque arête est une paire de sommets, on notera xy l'arête $\{x, y\}$.

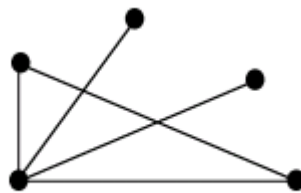


Fig.1.1 : Graphe non orienté

Un graphe **orienté** est un couple (V, U) où V est l'ensemble des sommets, et U est l'ensemble des arcs de G . Chaque arc est un couple de sommets, on notera (x, y) , l'arc (x, y) .

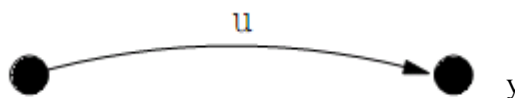


Fig. Arc $u = (x, y)$

1.1.2 Adjacence et incidence

Deux sommets x et y de $G = (V, E)$ sont **adjacents** si $xy \in E$.

Deux arêtes sont **incidentes** si elles partagent une même extrémité.

L'arête xy est incidente aux sommets x et y .

1.1.3 Voisinage

Le voisinage d'un sommet x est $\Gamma(x) = \{y \in V / xy \in E\}$. On note $d(x)$ le degré de x qui est le nombre de voisins de x .

1.1.4 Chaîne et cycle

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On appelle chaîne de G une suite de sommets $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_p]$ telle que $x_i x_{i+1} \in E, \forall i, 1 \leq i \leq p-1$. Un cycle est une chaîne dont le premier sommet et le dernier se confondent. Dans les graphes orientés, une chaîne (resp. cycle) qui respecte l'orientation des arcs est appelée chemin (resp. circuit)

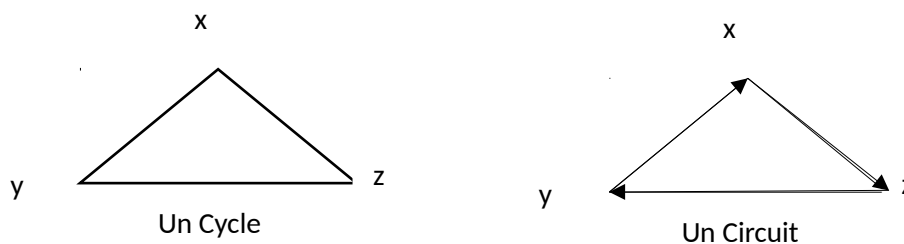


Fig.1.3 : Un Cycle et un Circuit

Une **corde** est une arête entre deux sommets non consécutifs d'un cycle. Un graphe est **sans boucle** si tout sommet de ce graphe ne peut être son propre voisin. Un graphe est **fini** s'il possède un ensemble fini de sommets.

1.1.5 Connexité

Un graphe $G = (V, U)$ est connexe si $\forall x \in V$ et $\forall y \in V$, il existe une chaîne entre x et y . On appelle composante connexe le sous-ensemble de sommets tels qu'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques.

Un graphe est connexe s'il comporte une composante connexe et une seule.

Chaque composante connexe est un graphe connexe.

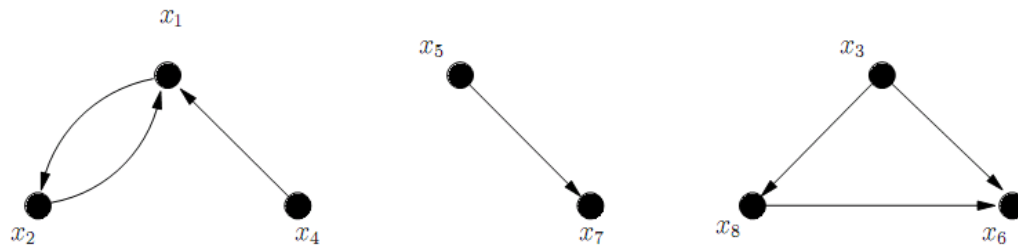


Fig.1.4: Graphe ayant trois composantes connexes

1.1.6 Graphe complémentaire

$G = (V, U)$ et $\hat{G} = (V, \hat{U})$. $(x_i, x_j) \in U \Leftrightarrow (x_i, x_j) \notin \hat{U}$. $\hat{G}$ est le graphe complémentaire de G .

1.1.7 Graphe complet, clique

Un graphe complet ou clique est un ensemble de sommets deux-à-deux adjacents. La taille d'une clique est le nombre de sommets qui le compose.

Une clique C est maximale (par inclusion) si aucune autre clique du graphe ne contient C comme sous-ensemble. La clique C est maximum si aucune autre clique du graphe n'est de taille strictement supérieure à celle de C .

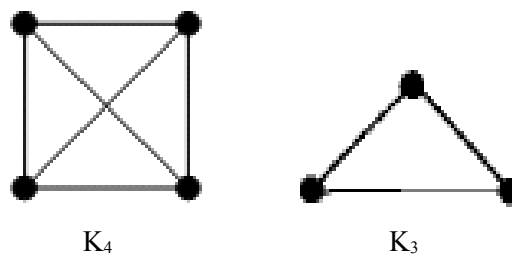


Fig.1.5 : Un K_4 et un K_3

1.1.8 Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux classes, de sorte que deux sommets adjacents appartiennent à des classes différentes.

$V = X_1 \cup X_2$ avec $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ et $e = (x, y) \in E$ alors $x \in X_1$ et $y \in X_2$, les sommets de X_i sont deux à deux non adjacents.

Un graphe biparti complet est noté $K_{r,s}$ avec $r = |X_1|$ et $s = |X_2|$

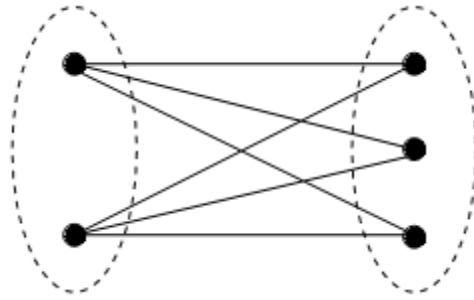


Fig.1.7 : Graphe biparti complet $K_{2,3}$

1.1.9 Stable

Un stable d'un graphe G est un ensemble S de sommets deux-à-deux non adjacents : $\forall x, y \in S, xy \notin E$. Le nombre de stabilité de G est la taille du stable de cardinalité maximum de G .

$$\alpha(G) = \max |S| ; \quad \forall S \text{ stable de } G$$

Stable maximal

Un stable S de G est dit maximal (par inclusion) s'il n'existe pas de stable S' de G tel que S soit strictement contenu dans S' .

Définition

La coloration des sommets d'un graphe consiste en une affectation de couleurs à tous les sommets du graphe de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur.

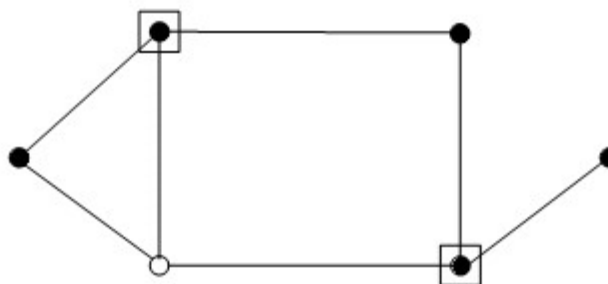


Fig.1.6 : Coloration en trois couleurs

Dans ce graphe le nombre de stabilité $\alpha(G) = \max |S| = 3$

S stable de G

Complétion minimale

Une complétion d'intervalles d'un graphe quelconque $G = (V, E)$ est un graphe d'intervalles $H = (V, F)$, avec $E \subseteq F$.

Si de plus aucun sous-graphe strict de H n'est une complétion d'intervalles de G , nous dirons que H est une complétion minimale du graphe G .

1.2 Quelques classes de graphes [3] [18] [19]

1.2.1 Graphe d'intervalles

Un graphe d'intervalles est le graphe d'intersection d'intervalles sur la droite réelle. Donc, étant donné un ensemble $I = \{I_1, \dots, I_n\}$ d'intervalles sur la droite réelle, on lui associe le graphe d'intervalles $G = (V, E)$ où $V = \{1, \dots, n\}$ et deux sommets x et y sont reliés par une arête si et seulement si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ où I_x et I_y sont les intervalles associés à x et y .

Autrement dit : G est d'intervalles si on arrive à placer tous les intervalles en respectant :

$x \longrightarrow I_x \in \text{à la droite réelle}$

$y \longrightarrow I_y \in \text{à la droite réelle}$

$xy \in E \Leftrightarrow I_x \cap I_y \neq \emptyset$

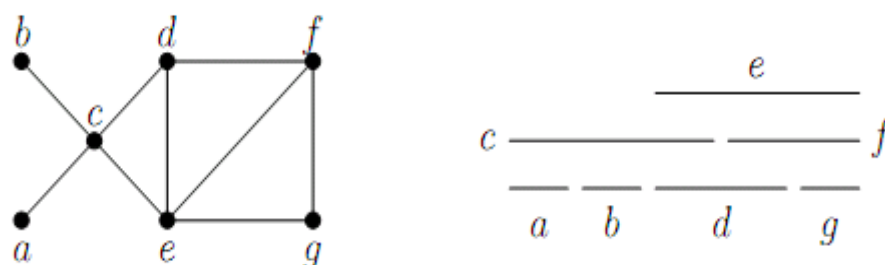


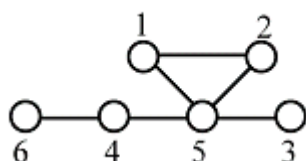
Fig.1.8 : Un graphe d'intervalles

1.2.2 Graphe de permutation

Un graphe G est de permutation s'il existe une permutation π des sommets telle que x est adjacent à y dans G si et seulement si $x < y$ et $\pi(y) < \pi(x)$ ou $y < x$ et $\pi(x) < \pi(y)$.

Considérons par exemple π tel que $\pi(1)=3$, $\pi(2)=2$, $\pi(3)=4$, $\pi(4)=6$, $\pi(5)=1$ et $\pi(6)=5$

Le graphe de permutation associé à π est :



Et la figure géométrique dont G est le graphe d'intersection des segments est :

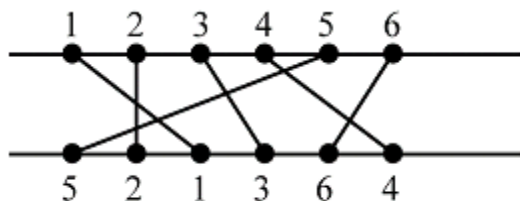


Fig.1.9 : Un graphe de permutation et son diagramme

1.2.3 Graphe triangulé :

Ce n'est pas facile de savoir à quelle époque remonte la définition des graphes triangulés, ils apparaissent en 1958 dans les travaux de Hajós.

Les graphes triangulés sont apparus sous différents noms au début des années 60. On trouve généralement l'appellation « chordal graphs » dans la littérature anglo-saxonne, car dans tout cycle de longueur ≥ 4 , il existe une corde.

Un graphe est dit triangulé si tout cycle ayant plus de trois sommets possède une corde.

Cette classe de graphes est héréditaire c.à.d. que tout sous-graphe d'un graphe triangulé est également triangulé.

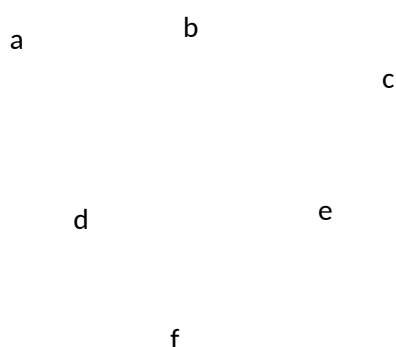


Fig.1.10 : Graphe triangulé

Sommet simplicial:

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sommet x est dit simplicial s'il appartient à une seule clique maximale.

Dans la figure (Fig.1.10), les sommets a , c , et f sont des sommets simpliciaux, par contre les sommets b , d et e ne sont pas des sommets simpliciaux car ils n'appartiennent pas à une seule clique maximale.

Problème de triangulation :

Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque. On dit que $H = (W, F)$ est une triangulation de G si $V = W$, $E \subseteq F$ et H est un graphe triangulé. En d'autre terme, H est un sur-graphe triangulé de G .

Le graphe H est une triangulation minimale de G si H est une triangulation de G et pour tout F' tel que $E \subseteq F' \subset F$, le graphe $H' = (V, F')$ n'est pas une triangulation de G .

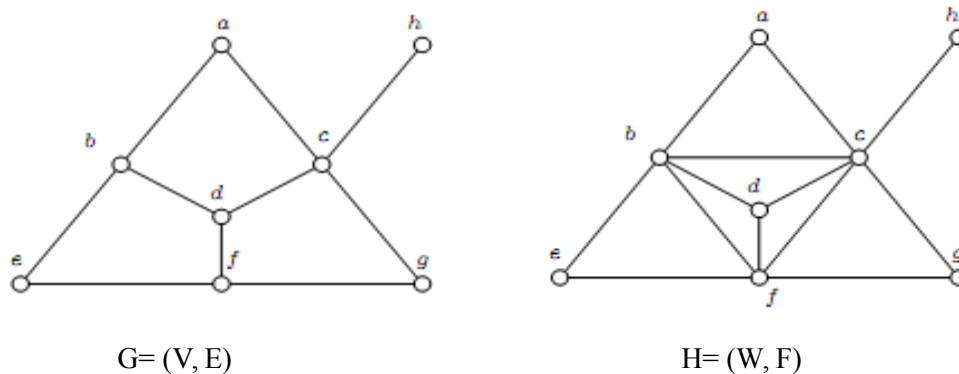


Fig.1.11 : Triangulation d'un graphe

1.2.4 Graphe planaire

C'est un graphe qui peut être représenté sur un plan (ou une sphère) tel que deux arcs (ou arêtes) ne se coupent pas. Tous les graphes moins de 5 sommets sont planaires, ainsi que tous les graphes bipartis de moins de 6 sommets.

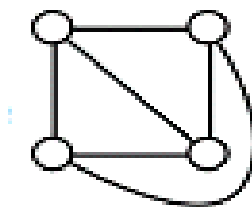


Fig.1.12 : graphe planaire

1.2.5 Graphe distance héréditaire

Les graphes distance héréditaire sont ceux pour lesquels la distance entre toute paire de sommets dans un sous-graphe induit connexe est la même que dans le graphe entier.

1.3 Complexité [12]

Combien de temps et de place mémoire sont nécessaires pour résoudre tel problème avec tel ordinateur au moyen de tel algorithme ? Telles sont les questions essentielles que se pose le praticien, et auxquelles doivent répondre les spécialistes d'algorithmique.

Etant donné une classe C de problèmes P , l'étude de la complexité de l'algorithme A consiste à évaluer aussi précisément que possible, le nombre d'opérations élémentaires et la quantité de place mémoire nécessaires pour résoudre P au moyen de A .

On considère comme de forte complexité les problèmes pour lesquels on ne connaît pas jusqu'à présent d'algorithme de complexité polynomiale. La majeure partie des problèmes que nous traitons appartient à une classe appelée NP (non déterministe polynomiale), cela conduit à partager l'ensemble de ces problèmes en :

- La classe P des problèmes qui sont de complexité polynomiale
- La classe $Q=NP-P$ des autres problèmes

La plupart des théoriciens de la complexité conjecture que Q n'est pas vide. Sous cette hypothèse, la classe Q contient une classe propre, celle des problèmes NP-complets.

On établit une équivalence entre certains problèmes : On dit que deux problèmes sont équivalents si chacun d'eux peut être ramené à l'autre par une transformation de complexité polynomiale. Il s'ensuit que la complexité de résoudre chacun d'eux est égale à celle de l'autre à un terme polynomial près. Les problèmes NP-complets constituent une classe d'équivalence au sens de cette relation : Si l'on trouvait un algorithme polynomial pour l'un d'eux, on en aurait automatiquement un pour chaque problème NP-complets.

Enfin, il existe dans la classe Q des problèmes qui ne sont pas NP-complets. A ce jour, aucun de ces problèmes n'a pu être exhibé, mais celui de la détermination des critères pour vérifier qu'un nombre est premier semble être un bon candidat.

Introduction

Ce mémoire s'intéresse particulièrement au problème de la représentation et reconnaissance dynamique d'une classe de graphes. Après chaque modification du graphe, on veut savoir si le graphe modifié est toujours dans la classe et en entretenir une certaine représentation si c'est le cas.

Preliminaires

On note le nombre de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ par n et le nombre d'arêtes par m . Soit A un ensemble. On écrit $(A+a)$ au lieu de $A \cup \{a\}$. Si $a \in A$ alors on écrit $A-a$ au lieu de $A \setminus \{a\}$. Pour $W \subseteq V$ on écrit $G[W]$ pour le sous-graphe de $G = (V, E)$ induit par les sommets de W . Pour un sommet a , nous écrivons $G-a$ au lieu de $G[V-a]$, et pour $X \subseteq V$ nous écrivons $G-X$ au lieu de $G[V \setminus X]$. On considère les composantes connexes d'un graphe comme sous-graphes connexes maximaux et comme sous-ensembles de sommets. Pour un sommet $x \in V$, $N(x)$ est le voisinage de x et $N[x] = \{x\} \cup N(x)$ est le voisinage fermé de x .

2. Ensembles astéroïdaux dans les graphes et graphes astéroïdaux [10]

2.1 Ensembles astéroïdaux dans les graphes

2.1.1 Triplet astéroïdal

Un triplet astéroïdal d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets, tel qu'il existe une trajectoire entre deux d'entre eux en évitant le voisinage du troisième. Les triplets astéroïdaux ont été introduits dans [11] pour caractériser des graphes d'intervalles.

La figure suivante comporte divers exemples de triplet astéroïdal $\{x, y, z\}$

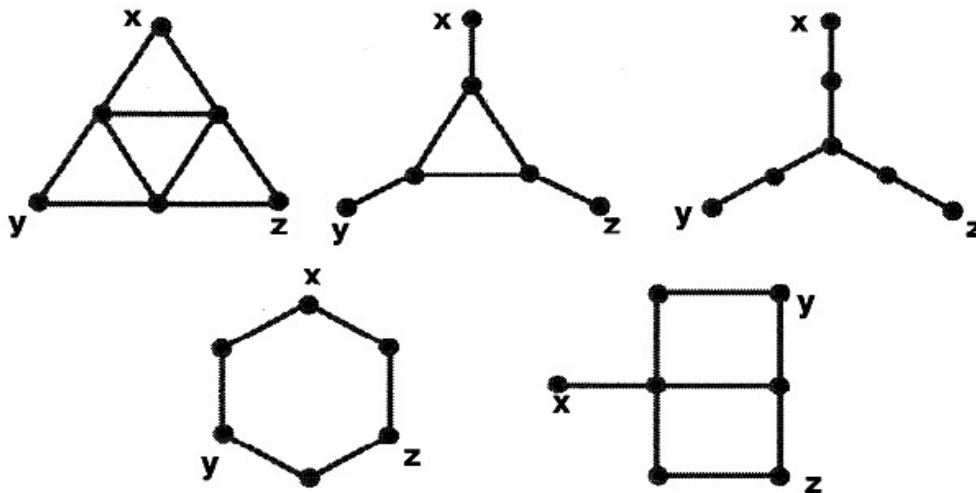


Fig.2.1 : Exemples de triplets astéroïdaux

2.1.2 Graphes sans triplet astéroïdal

Les graphes n'ayant pas de triplet astéroïdal sont appelés les graphes sans triplet astéroïdal (graphes AT-free).

2.1.3 Ensemble dominant [13]

Un ensemble dominant d'un graphe G est un ensemble de sommets de G tels que tout sommet de G a au moins un voisin dans celui-ci.

Môhring a montré que chaque triangulation minimale d'un graphe AT-free est un graphe d'intervalles.

En fait, il a été montré que chaque triangulation minimale d'un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement si le graphe est AT-free [5-6], en outre une collection de propriétés structurelles et algorithmiques intéressantes du graphe AT-free a été obtenue par Corneil. Olariu et Stewart ont énoncé un théorème d'existence pour la paire dominante dans les graphes AT-free connexes et un algorithme en temps linéaire pour calculer une paire dominante pour les graphes AT-free connexes.

Voici un exemple pour voir d'une façon plus claire :

Prenons un graphe AT-free, qui n'est pas d'intervalles, si on essaye de placer tout les intervalles en respectant :

$x \longrightarrow I_x \in \text{à une droite réelle}$

$y \longrightarrow I_y \in \text{à une droite réelle}$

$xy \in E \Leftrightarrow I_x \cap I_y \neq \emptyset$

On trouve que c'est impossible, on n'arrive pas à placer I_4 , voire la figure (Fig.2.2).

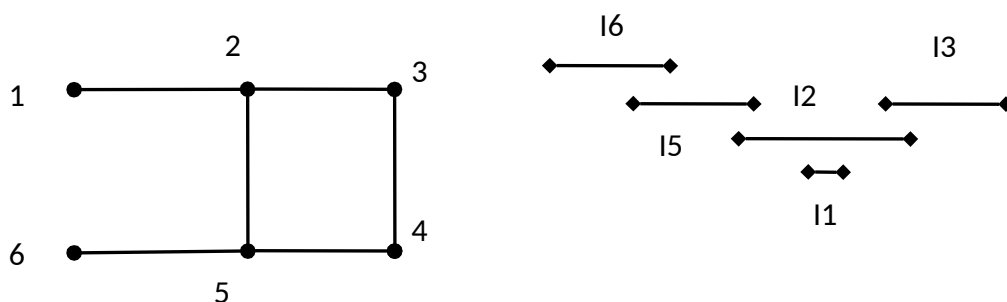


Fig.2.2 : Graphe AT-free non triangulé

Après la triangulation minimale de ce graphe, on aura un graphe d'intervalles, voire la figure (Fig.2.3)



Fig.2.3 : Graphe AT-free triangulé et d'intervalles

Walter a généralisé le concept de triplet astéroïdal aux ensembles astéroïdaux. Lui et Later Prisner ont utilisé l'ensemble astéroïdal pour caractériser certaines sous-classes de graphes à cordes [14, 23].

2.1.4 Ensemble astéroïdal

Un ensemble de sommets $A \subseteq V$ du graphe $G = (V, E)$ est un ensemble astéroïdal si pour chaque $a \in A$, l'ensemble $A - a$ est contenu dans une composante de $G - N(a)$.

Par conséquent, chaque ensemble astéroïdal est un ensemble indépendant. Un ensemble astéroïdal avec trois éléments est un triplet astéroïdal, cela est défini habituellement comme un triplet de sommets tels que entre deux de ces sommets, il y a une trajectoire qui évite le voisinage du troisième. On note l'ensemble de tous les triplets astéroïdaux d'un graphe G par $AT(G)$.

2.1.5 Nombre astéroïdal

Le nombre astéroïdal d'un graphe G noté par $an(G)$ est la cardinalité maximale d'un ensemble astéroïdal dans G . En particulier un graphe est dit sans triplet astéroïdal ou bien « AT-free » si son nombre astéroïdal est au plus deux.

Le nombre astéroïdal d'un graphe peut être grand, par exemple, $an(C_{2n}) = n$, pour chaque $n \geq 2$.

Le nombre astéroïdal est majoré par le nombre d'indépendance pour chaque graphe, puisque chaque ensemble astéroïdal est un ensemble indépendant.

Le théorème mentionné en [5,6] généralise qu'un graphe G a un nombre astéroïdal au plus k si et seulement si $an(H) \leq k$ pour chaque triangulation minimale H de G [9].

L'ensemble indépendant maximal, l'ensemble dominant indépendant minimum et l'ensemble dominant indépendant parfait minimum peuvent être calculés par un algorithme en temps polynomial dans les graphes de nombre astéroïdal borné [22].

La classe des graphes AT-free contient des classes de graphes célèbres tels que d'intervalle, de permutation et graphes de comparabilité.

Dans ce travail, on montre que le nombre astéroïdal peut être calculé par des algorithmes efficaces dans les graphes AT-free, graphes HHD-free (sans HHD) et les graphes d'intersection comme les graphes arc-circulaires et graphes de permutation circulaire.

En premier, nous considérons quelques propriétés élémentaires du nombre astéroïdal.

Lemme 1 [10]

Soit $G = (V, E)$ un graphe non connexe et soient $G_1, G_2, \dots, G_r$ les composantes connexes de G . alors $an(G) = \max(2, \max_{i=1,2,\dots,r} an(G_i))$.

Preuve

Si G est l'union disjointe d'au moins deux cliques, alors le nombre astéroïdal est 2. Si $an(G) > 2$ alors tout ensemble astéroïdal doit être contenu dans une composante G_i de G .

Lemme 2[10]

Soit W un sous-ensemble de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ et soit $H = G[W]$. Alors $an(H) \leq an(G)$ et chaque ensemble astéroïdal dans H est aussi un ensemble astéroïdal dans G .

Preuve

Soit A un ensemble astéroïdal dans H , soit a un sommet tel que $a \in A$. Soit C une composante de $H - N_H[a]$ qui contient $A - a$. Alors C induit le sous graphe connexe dans G sans aucun voisin de a . D'où C est contenu dans une composante de $G - N_G[a]$. Cela prouve le lemme.

2.1.6 Séparateur minimal

Un ensemble de sommets S est un séparateur de G si $G - S$ est non connexe. Un séparateur S est minimal s'il y a au moins deux composantes dans $G - S$ telles que chaque sommet de S a un voisin dans toutes les deux.

Lemme 3 [10]

Soit A un ensemble astéroïdal et soit $a \in A$. Soit S un séparateur et supposons qu'il y a deux composantes C_1 et C_2 dans $G - S$ telles que a est dans C_1 et $A - a$ est contenu dans C_2 . Soit y un autre sommet de C_1 . Alors $A - a + y$ est aussi un ensemble astéroïdal.

Preuve

Puisque $N[y]$ est contenu dans $C_1 \cup S$, il s'ensuit que C_2 est un sous graphe connexe dans $G - N[y]$ contenant $A - a$. Soit $z \in A - a$. Puisque A est un ensemble astéroïdal, $A - z$ est contenu

dans une composante de $G-N[z]$. Puisque $N[z] \subseteq C_2 \cup S$, il s'ensuit que C_1 est un sous-graphe connexe dans $G-N[z]$. D'où x et y sont dans la même composante de $G-N[z]$.

Tout ensemble comportant un sommet est un astéroïdal. Un ensemble de deux sommets est un astéroïdal si et seulement si ces sommets sont non adjacents.

Lemme 4[10]

Un ensemble A avec $|A| \geq 3$ est un ensemble astéroïdal si et seulement si chaque triplet de A est un AT (triplet astéroïdal).

Définition 1

Deux sommets adjacents x et y sont vrais jumeaux si $N[x]=N[y]$.

Les sommets non adjacents x et y sont faux jumeaux si $N(x)=N(y)$.

Lemme 5 [10]

Soit p et q (vrai ou faux) jumeaux. Si A est un ensemble astéroïdal avec $p \in A$, alors $A - p + q$ est aussi un ensemble astéroïdal. A est un ensemble astéroïdal qui ne contient pas p si et seulement si A est un ensemble astéroïdal dans $G - p$.

2.2 Graphe astéroïdal

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit a un sommet de G . Le graphe astéroïdal $A(G, a)$ est défini comme suit : Le graphe $A(G, a)$ a l'ensemble de sommets $V - N[a]$ et deux sommets p et q sont adjacents dans $A(G, a)$ si $\{p, q, a\} \in AT(G)$.

Théorème 1[10]

Soit $G = (V, E)$ un graphe, $A \subseteq V$ et $a \in V \setminus A$. alors $A + a$ est un ensemble astéroïdal dans G si et seulement si A est une clique dans $A(G, a)$.

Preuve

- $|A| \leq 1$ facile
- Supposons que $|A| \geq 2$

Premièrement, on suppose que $(A+a)$ est un ensemble astéroïdal dans G et que $p, q \in A$. Alors p et q sont des sommets de $A(G, a)$ puisqu'ils sont non adjacents à a . Par le lemme 4, $\{p, q, a\} \in AT(G)$. Par conséquent, p et q sont adjacents dans $A(G, a)$.

Maintenant, nous supposons que A est une clique dans $A(G, a)$, $p, q \in A$ et $p \neq q$. Nous montrons que chaque triplet dans $A+a$ est un AT. L'ensemble $\{p, q, a\}$ est un AT de G puisque $\{p, q\}$ est une arête dans $A(G, a)$. Considérons un troisième sommet $r \in A \setminus \{p, q\}$. D'après ce qui précède, $\{p, q, a\} \in AT(G)$ et par conséquent, il existe p, a -chemin en évitant $N[q]$. De la même façon, il existe r, a -chemin en évitant $N[q]$ puisque $\{q, r, a\} \in AT(G)$. Concaténant ces deux chemins, on obtient un p, r -chemin sans un sommet dans $N[q]$. Par symétrie, cela montre que $\{p, q, r\} \in AT(G)$. D'après le lemme 4, cela montre que $(A+a)$ est un ensemble astéroïdal.

Lemme 6[10]

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout sommet a , $G-N[a]$ est connexe.
2. Chaque ensemble indépendant est un ensemble astéroïdal
3. Chaque triplet de sommets non adjacents deux à deux est un AT
4. Pour tout sommet a , $A(G, a) = G - N[a]$

Preuve

L'équivalence des trois premiers énoncés découle de la définition d'un ensemble astéroïdal et du lemme 4.

L'équivalence avec 4 peut être comme suit : Supposons que $A(G, a) = G - N[a]$ pour tout a . Considérons un triplet $\{p, q, r\}$ par paire de sommets non adjacents dans G . alors q et r sont adjacents dans $A(G, p)$. Il s'ensuit par définition que $\{p, q, r\} \in AT(G)$. Maintenant supposons que chaque triplet indépendant est un astéroïdal, et considérons un sommet p . Deux sommets q et r de $G-N[p]$ sont non adjacents si et seulement si $\{p, q, r\} \in AT(G)$. D'où $A(G, p) = G - N[p]$

2.3 NP-complétude

Un graphe est **3-connexe** s'il cesse d'être connexe uniquement quand on supprime trois sommets. Un graphe est **3-régulier** si le degré de chaque sommet de ce graphe est égal à trois.

Théorème 2[10]

Le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Donné } e : G \text{ un graphe et } k \in \mathbb{N} \\ \text{Question : } G \text{ contient-il un ensemble} \\ \text{astéroïdal de cardinalité } k ? \end{array} \right.$$

est NP-complet. Ceci reste vrai même si on se restreint aux graphes sans triangle, 3-connexes et 3-réguliers et planaires.

Preuve

Il est facile de voir que le problème est dans NP. Pour prouver la NP-complétude des graphes sans triangle, 3-connexes, 3-réguliers et planaires, on montre l'équivalence avec le problème d'ENSEMBLE INDEPENDANT restreint à cette classe connu pour être NP-complet [20]

Chaque ensemble astéroïdal du graphe G est aussi un ensemble indépendant de G donc il reste à montrer que pour tout graphe $G(V, E)$ qui est sans triangle, 3-connexes, 3-réguliers et planaire, chaque ensemble indépendant ACV est aussi un ensemble astéroïdal dans G . Supposons, par contradiction, qu'il existe un sommet $a \in A$ sachant que $C_1, C_2 \subset V$ sont deux composantes de $G - N[a]$. Puisque G est 3-connexe et 3-régulier, $N(a)$ est un séparateur minimal dans $G - a$, i.e. chaque sommet dans $N(a)$ a un voisin dans C_1 et un voisin dans C_2 . En contractant C_1 et C_2 pour choisir les sommets c_1 et c_2 , respectivement, on obtient un $K_{3,3}$ dans l'ensemble de sommets $N(a) \cup \{a, c_1, c_2\}$ comme un mineur de G . C'est une contradiction du fait que le graphe non planaire à un $K_{3,3}$ comme mineur [21], par conséquent $G - N[a]$ est connexe, pour chaque sommet $a \in A$. Ainsi A est un ensemble astéroïdal de G .

3. Nombre astéroïdal dans quelques classes de graphes**3.1 le nombre astéroïdal du graphe arc-circulaire (intervalle-circulaire) [17]**

Dans cette section, on montre que le nombre astéroïdal du graphe arc-circulaire peut être calculé en $O(n^3)$.

3.1.1 Graphe arc-circulaire

Un graphe arc-circulaire est un graphe pour lequel on peut associer à chaque sommet un arc sur un cercle sachant que deux sommets sont adjacents si et seulement si les arcs correspondants ont une intersection non vide.

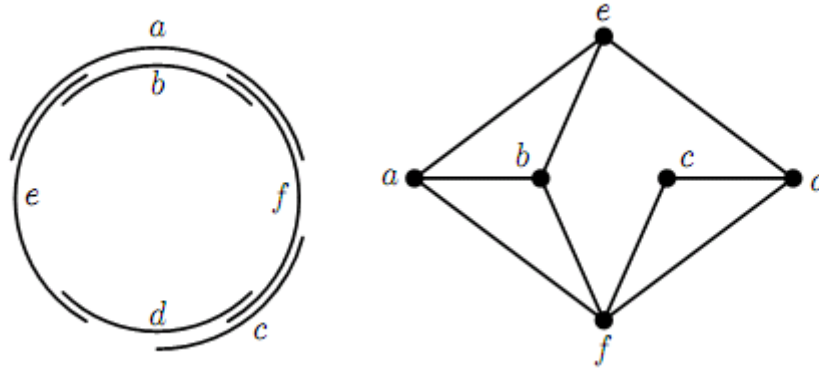


Fig.2.4 : Un graphe et son modèle arc-circulaire

Il y a un algorithme d'identification de complexité $O(n^2)$ pour les graphes arc-circulaire.

L'algorithme est basé sur le théorème 1. Il calcule pour chaque sommet a la cardinalité maximum d'un ensemble astéroïdal du graphe G qui contient a en calculant une clique de cardinalité maximale du graphe $A(G, a)$.

3.1.2 Graphe de comparabilité

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un graphe de comparabilité s'il existe une orientation transitive F de G obtenue en affectant à chaque arête $\{u, v\} \in E$ exactement une des orientations (u, v) ou (v, u) dans F . De ce fait l'orientation F est transitive si $(x, y) \in F$ et $(y, z) \in F$ implique $(x, z) \in F$ pour tout $x, y, z \in V$.

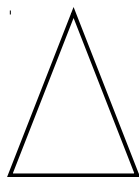


Fig.2.5 : Exemple d'un Graphe de non comparabilité

Fig.2.6 : Exemple d'un graphe de comparabilité

Lemme 7[10]

Soit G un graphe arc-circulaire et soit a un sommet de G . Alors le graphe astéroïdal $A(G, a)$ est un graphe de comparabilité.

Preuve

Soit $D(G)$ un modèle arc-circulaire pour G . on définit une orientation dans $A(G, a)$. Considérons deux sommets adjacents p et q de $A(G, a)$. Dirigeons l'arête de p vers q si l'arc correspondant à p apparaît avant l'arc correspondant à q , en parcourant le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, commençant à l'arc a .

On montre que cette orientation est transitive. Soit (p, q) et (q, r) une orientation d'arêtes. Il est clair que l'arc correspondant à p apparaît avant l'arc correspondant à r , en parcourant le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, commençant en a . Il reste à montrer que p et r sont adjacents dans $A(G, a)$. Ce qui implique que $\{p, r, a\} \in AT(G)$.

Nous avons un p, r -chemin en évitant $N[a]$ puisqu'il y a un p, q -chemin en évitant $N[a]$ et un q, r -chemin en évitant $N[a]$. Notons que les arcs correspondants à a, p, q, r apparaissent dans le sens des aiguilles d'une montre dans $D(G)$, par conséquent, chaque q, a -chemin doit avoir un sommet interne de $N[p]$ ou $N[r]$. Il existe un q, a -chemin en évitant $N[r]$. Par conséquent, ce chemin contient un sommet de $N[p]$. Cela montre l'existence d'un p, a -chemin en évitant $N[r]$. Par symétrie, ceci montre que $\{p, r, a\} \in AT(G)$.

Théorème 3[10]

Il existe un algorithme de complexité $O(n^3)$ pour calculer le nombre astéroïdal d'un graphe arc-circulaire.

Preuve

Tout triplet astéroïdal d'un graphe donné peut être calculé en $O(n^3)$, en calculant les composantes du graphe $G-N[a]$ pour chaque sommet a [6].

$A(G, a)$ et l'orientation transitive de $A(G, a)$ peuvent être calculés en $O(n^2)$ pour chaque sommet a . Finalement, il y a un algorithme en temps linéaire pour calculer une clique de cardinalité maximale dans le graphe de comparabilité si l'orientation transitive est donnée [8].

Cette méthode s'applique également pour les graphes de permutation et donne un algorithme de complexité $O(n^3)$ pour calculer le nombre astéroïdal du graphe de permutation circulaire.

3.2 Le nombre astéroïdal des graphes sans fourche**3.2.1 Graphe sans fourche**

Un graphe sans fourche est un graphe sans $K_{1,3}$ (i.e., une fourche) comme un sous graphe induit.

$K_{1,3}$

Fig.2.7 : Une fourche ou étoile

Dans cette section, on présente un algorithme de complexité $O(n^3)$ pour calculer le nombre astéroïdal dans un graphe sans fourche.

La classe des graphes sans fourche contient la classe des line-graphs comme sous-classe appropriée

Il existe un algorithme qui calcule le nombre astéroïdal pour les graphes sans fourche.

Premièrement, on peut limiter la recherche de l'ensemble astéroïdal pour quelques sous ensembles de sommets, à savoir ces sommets x pour lequel $G-N[x]$ est connexe.

3.2.2 Sommet extrémal et ensemble extrémal

Un sommet x est extrémal si $G-N[x]$ est connexe. Un ensemble de sommets A de G est extrémal si chaque sommet dans cet ensemble est extrémal.

3.2.3 Ensemble astéroïdal extrémal

Théorème [10]

Soit G un graphe sans fourche connexe. Il existe un ensemble astéroïdal extrémal A avec $|A| = \alpha_n(G)$.

Preuve

Soit A un ensemble astéroïdal dans G . soit $a \in A$ et soit C une composante de $G-N[a]$ contenant $A-a$.

Supposons que a n'est pas extrémal

Puisque a n'est pas extrémal, il existe une composante C' de $G-N[a]$ différente de C . Soit y un sommet quelconque de C' . Puisque G est connexe, il existe un sommet $p \in N(a)$ qui a un voisin dans C' . Notons que p ne peut pas avoir un voisin dans C , autrement il y aurait une fourche.

On montre premièrement que $A' = A - a + y$ est un ensemble astéroïdal. Il est clair que les sommets de C sont contenus dans quelques composantes de $G-N[y]$. Puisque y n'a pas de voisin dans C . soit $z \in A - a$, alors $A - z$ est dans une composante de $G-N[z]$. Puisque $p \in N(a) \cap N[z]$, aussi p et par conséquent, tous les sommets de C sont dans cette composante.

Il existe un sommet $q \in N(a)$ qui a un voisin dans C . Puisque G est connexe, il est clair que $a \notin N[y]$ puisque le graphe est sans fourche. Maintenant on note que la composante de $G-N[y]$ contenant $A - a$ est plus grande que C , puisqu'il contient a et q en plus de C . Par

induction, ceci montre qu'il existe un sommet y tel que A est un ensemble astéroïdal et y est extrémal. Par conséquent, il existe un ensemble astéroïdal extrémal.

Corollaire 1[10]

Soit $G = (V, E)$ un graphe sans fourche connexe et X l'ensemble de sommets extrémaux de G . Alors n'importe quel ensemble indépendant maximum de $G[X]$ est également un ensemble astéroïdal maximum de G , par conséquent, $\alpha(G) = \alpha(G[X])$.

Preuve

Pour chaque $a \in A$, $A - a$ est contenu dans une composante de $G - N[a]$, puisque a est extrémal et A est indépendant.

Corollaire 2[10]

Il existe un algorithme en $O(n^3)$ pour calculer le nombre astéroïdal dans un graphe sans fourche.

Preuve

D'après le lemme 1, il est suffisant de calculer le nombre astéroïdal pour chaque composante du graphe sans fourche donné. Pour un graphe connexe, notre algorithme calcule un ensemble indépendant maximal dans $G[X]$, en $O(n^3)$ donné dans [15], où X est l'ensemble des sommets extrémaux de G . D'après le corollaire 1, il ya un ensemble astéroïdal maximal de G .

3.3 Le nombre astéroïdal du graphe sans HHD (House, Hole, Domino)

Une maison est le complément du chemin de cinq sommets. Un trou est un cycle sans corde ayant au moins 5 sommets. Un domino est un graphe biparti obtenu à partir des cycles sans corde d'une longueur six, en ajoutant exactement une corde. La figure 6 comporte la représentation graphique d'un trou, une maison et un domino.

3.3.1 Graphe sans HHD

Un graphe est sans HHD s'il ne contient pas un Trou, une Maison ou un Domino comme sous graphe induit.

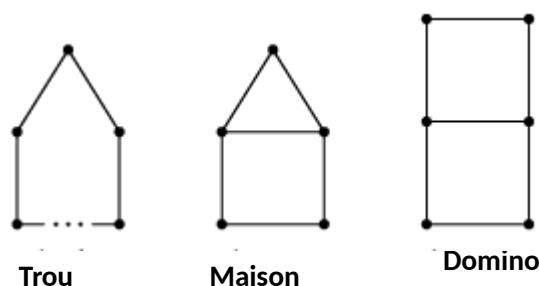


Fig 2.8 : Trou, Maison et Domino

La classe des graphes sans HHD contient celle des graphes triangulés et les graphes distance héréditaire.

Soit $G = (V, E)$ un graphe, $a \in V$ et $x \in V - N[a]$. Un séparateur minimal de G est fermé pour x s'il contient seulement les voisins de x . Soit C une composante de $G - N[x]$ contenant a , et soit $S_x \subseteq N(x)$ un ensemble des voisins de x avec un voisin dans C .

Lemme 8[10]

Pour chaque $x \in V - N[a]$, S_x est un séparateur minimal fermé pour x .

Preuve

Soit $x \in V - N[a]$. Alors x et a sont dans des composantes différentes de $G - S_x$.

Chaque sommet de S_x est adjacent à x et a un voisin dans la composante de $G - S_x$ contenant a .

Pour un sommet $x \in V - N[a]$, soit C_x une composante de $G - S_x$ contenant x .

Lemme 9[10]

Soit A un ensemble astéroïdal de G contenant x et a . Soit y un sommet quelconque de $C_x - x$. Alors $A - x + y$ est aussi un ensemble astéroïdal de G .

Preuve

Soit C une composante de $G - N[x]$ contenant $A - x$. Notons que, par définition de S_x , C est aussi une composante de $G - S_x$. Ce lemme est une conséquence du lemme 3.

Dans la **première phase**, l'algorithme réduit le nombre de candidats (sommets rouges) pour un ensemble astéroïdal A contenant a . Tout sommet dans $N(a)$ est coloré en blanc et tout autre sommet de G est coloré en rouge, tant qu'il existe un sommet rouge $x \in V - N[a]$ avec un autre sommet rouge y dans C_x , le sommet x est recoloré en blanc. Comme un invariant par le lemme 9, il y a toujours un ensemble astéroïdal de cardinalité maximum contenant seulement des sommets rouges, parmi tout les ensembles astéroïdaux contenant a . Soit R un ensemble de sommets rouges après ce premier pas (cette première démarche).

Théorème 4[10]

Si G est sans HHD, alors R est un ensemble indépendant dans G .

Preuve

Il est clair que a n'a pas de voisin rouge.

Supposons que R n'est pas un ensemble indépendant dans G . Soient x et y deux sommets adjacents de $R-a$. Puisque y est un voisin rouge de x , il existe un y, a -chemin sachant que y est le seul voisin de x dans ce chemin (autrement x aurait été coloré en blanc, durant la première phase de l'algorithme).

Soit β le voisin de y dans ce chemin, alors $\beta \neq a$ (autrement y aurait été coloré en blanc) et x n'est pas adjacent à β . De la même façon, il existe un x, a -chemin sachant que x est le seul voisin de y dans ce chemin. Soit α le voisin de x dans ce chemin, par conséquent, $\alpha \neq a$ et y n'est pas adjacent à α . Mais cela implique l'existence d'une maison, d'un trou ou d'un domino induit.

On définit maintenant une relation $\rightarrow$ dans R .

Notation

Soit p et q deux sommets de $R-a$. on écrit $p \rightarrow q$ si $N[p]$ sépare q et a dans G . i.e. si q et a sont dans différentes composantes de $G-N[p]$.

Lemme 10[10]

Supposons $p, q \in R-a$, $p \rightarrow q$ et $q \rightarrow p$. Un ensemble astéroïdal A contenant a , contient au plus l'un de p et q . En outre, si A contient p alors $A-p+q$ est aussi un ensemble astéroïdal.

Preuve

Supposons que l'ensemble A est un ensemble astéroïdal contenant a et p , alors $q \notin A$, puisque $N[p]$ sépare q et a .

Supposons que a est dans une composante C_1 de $G-N[p]$ et q est dans une composante C_2 . Alors $N[q] \subseteq N(p) \cup C_2$, par conséquent, C_1 est un sous graphe connexe de $G-N[q]$. Soit $z \in A-p$. si $|A| = 2$, alors $\{z, q\}$ est un ensemble astéroïdal, puisque z et q sont non adjacents. Si

$|A| \geq 3$, alors posant le sommet $z' \in A-z-p$. Il existe un z' , p -chemin sans corde en évitant $N[z]$. Ce chemin doit contenir un sommet $\delta \in N(p)$. Puisque $p \rightarrow q$, δ est adjacent à q , ainsi $A-p+q$ est un ensemble astéroïdal.

La **deuxième phase** de l'algorithme réduit l'ensemble des sommets rouges comme suit :

Tant qu'il existe une paire de sommets rouges p et q dans $R-a$ avec $p \rightarrow q$ et $q \rightarrow p$, alors on colorie l'un de p ou q en blanc.

Soit R^* un nouvel ensemble de sommets rouges, après cette seconde phase. D'après le lemme 10, il existe un ensemble astéroïdal maximum A de G avec $A \subseteq R^*$.

Théorème 5[10]

Soit $p, q, r \in R^*-a$, $p \rightarrow q$ et $q \rightarrow r$, alors $p \rightarrow r$.

Preuve

Soit C_1 une composante de $G-N[p]$ contenant a et soit C_2 une composante de $G-N[p]$ contenant q .

Puisque p et q sont tous les deux rouges, $q \not\rightarrow p$, par conséquent, $r \neq p$. Si $r \notin C_1 \cup N(p)$, alors il est clair que $p \rightarrow r$. Supposons, par contre que $r \in C_1 \cup N(p)$, il est clair que $r \notin C_1$ puisque $q \rightarrow r$ et $N[q] \subseteq C_2 \cup N(p)$. Puisque $q \rightarrow r$, r et q ne sont pas adjacents. Par conséquent, $r \in N(p) \setminus N[q]$.

Il ne peut pas exister un sommet $\delta \in N(p) \setminus N[q]$ avec un voisin dans C_1 , autrement, il y aurait un r , a -chemin par l'intermédiaire de p et δ en évitant $N[q]$, contradiction avec $q \rightarrow r$. Ce qui implique que $q \rightarrow p$, qui est une contradiction.

Soit H un graphe contenant les sommets de l'ensemble R^* pour lequel, deux sommets p et q de R^*-a sont adjacents si $p \rightarrow q$ ou $q \rightarrow p$, alors le théorème 5 montre que H est un graphe de comparabilité.

Théorème 6[10]

Soit A un ensemble de sommets de R^* contenant a . Alors A est un ensemble indépendant dans H si et seulement si A est un ensemble astéroïdal dans G .

Preuve

Soit A un ensemble indépendant dans H contenant a , puisque $A \subseteq R^* \subseteq R$, alors A est un ensemble indépendant dans G par le théorème 4. $p, q \in A-a$ et $p \not\rightarrow q$ cela implique que q et a sont dans la même composante de $G-N[p]$, cela montre que pour chaque paire $p, q \in A-a$, $\{p, q, a\} \in AT(G)$ (voire le théorème 1).

Maintenant, soit A un ensemble astéroïdal dans G avec $a \in A$ et $A \subseteq R^*$. Soit $p, q \in A-a$, alors q et a sont dans la même composante de $G-N[p]$, car $p, q, a \in AT(G)$. Par conséquent, $p \not\rightarrow q$ et par symétrie aussi $q \not\rightarrow p$. Par conséquent, p et q ne sont pas adjacents dans H . Par

définition, a est un sommet isolé dans H , par conséquent, $A+a$ est un ensemble indépendant dans H .

Dans la **troisième phase**, l'algorithme calcule un ensemble indépendant maximum dans H .

Par conséquent, chaque ensemble indépendant maximal dans H contient a , application de l'algorithme de complexité $O(\sqrt{nm})$ pour calculer un ensemble indépendant maximum pour H dans un graphe de comparabilité (voire [1]). L'algorithme trouve un ensemble astéroïdal maximum A de G contenant le sommet fixe a .

Théorème 7[10]

Il y a un algorithme de complexité $O(n^3/m^2)$ pour calculer le nombre astéroïdal d'un graphe sans HHD.

4. Application

Histoire de six maisons

Prenons une histoire de six maisons :

Cette histoire parle sur six personnes qui ont achetées ensemble un morceau de terre (terrain), chaque un entre eux a prit sa part de terrain pour construire sa maison. Les six maisons sont positionnées comme montre la figure suivante:

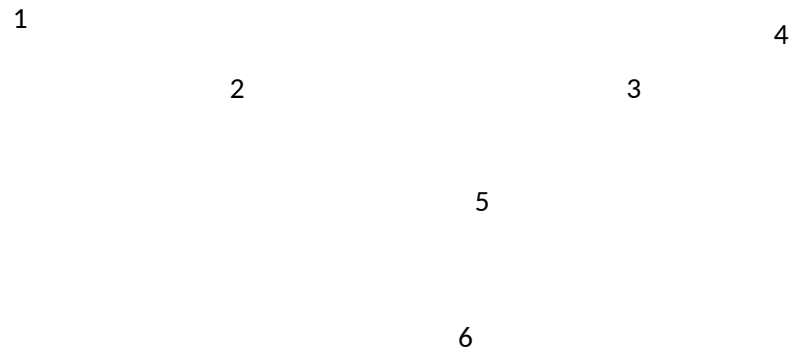


Fig.2.9

Chaque sommet représente une maison.

Les six personnes veulent se mettre d'accord pour le plan du cartier qu'ils veulent construire, i.e., la schématisation des chemins dans ce cartier, et pour cela il faut respecter les conditions suivantes, posées par les six personnes :

La 4^{ème} refuse d'avoir un chemin direct avec la 1^{ère}, la 5^{ème}, la 6^{ème} et la 2^{ème}.

La 6^{ème} refuse d'avoir un chemin direct avec la 1^{ère}, la 3^{ème}, la 4^{ème} et la 2^{ème}.

La 1^{ère} refuse d'avoir un chemin direct avec la 3^{ème}, la 5^{ème}, la 6^{ème} et la 4^{ème}.

La 3^{ème} interdit le passage par elle sauf si on désire aller à la 4^{ème} personne, d'où il faut qu'il y ait une trajectoire entre la 1^{ère} et la 6^{ème} en évitant la 3^{ème} qu'est le voisinage de la 4^{ème}, voire la figure (fig.2.10)

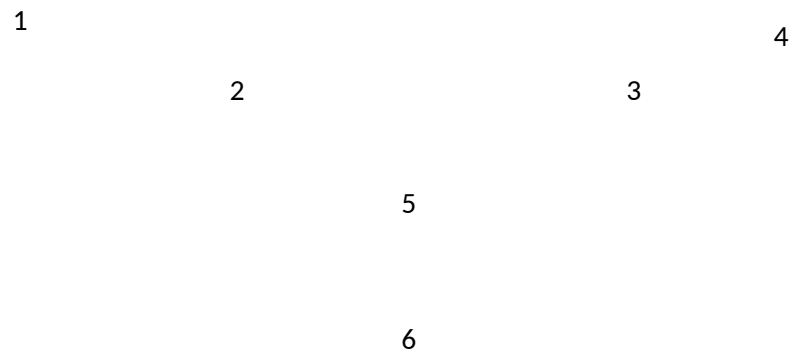


Fig.2.10

La 2^{ème} interdit le passage par elle sauf si on désire aller à la 1^{ère} personne, d'où il faut qu'il y ait une trajectoire entre la 4^{ème} et la 6^{ème} en évitant la 2^{ème} qu'est le voisinage de la 1^{ère}, voire la figure (Fig.2.11)

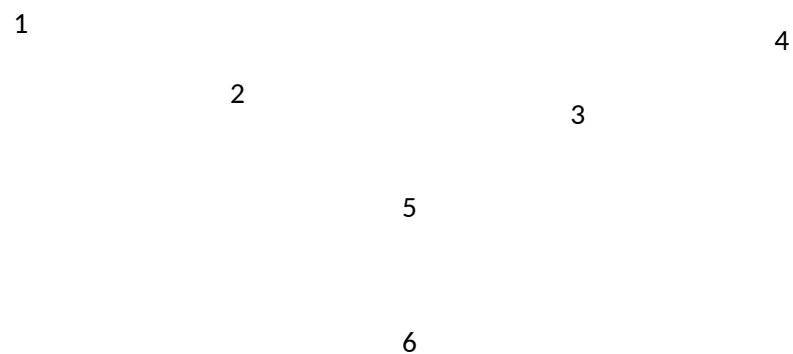


Fig.2.11

La 5^{ème} interdit le passage par elle sauf si on désire aller à la 6^{ème} personne, d'où il faut qu'il y ait une trajectoire entre la 1^{ère} et le 4^{ème} en évitant le 5^{ème} qu'est le voisinage du 6^{ème}, voire la figure (Fig.2.12)

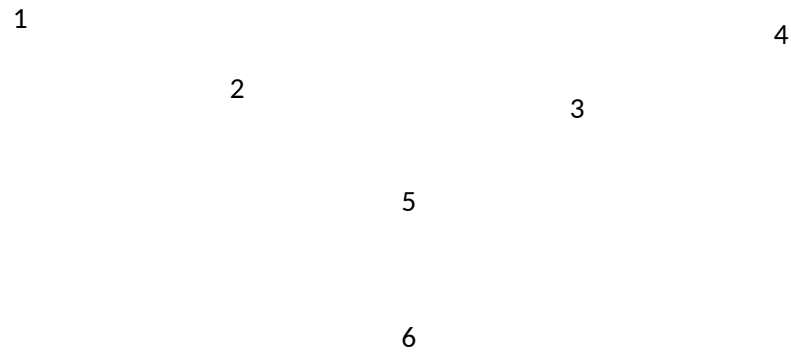


Fig.2.12

A la fin, on obtient ce graphe qui contient un ensemble astéroïdal (triplet astéroïdal). Ce graphe n'est pas de comparabilité et par conséquent, son complémentaire n'est pas d'intervalles. Le nombre astéroïdal de ce graphe est égal à 3.

Pour satisfaire les conditions posées par les personnes représentées par les sommets 2, 3 et 5, il faut créer des chemins, par contre, pour satisfaire celles des personnes représentées par les sommets 1, 4 et 6, on a rien à créer, c'est ce qui donne une particularité au triplet $\{1, 4, 6\}$.

Le triplet $\{1, 4, 6\}$ qui forme le triplet astéroïdal ou l'ensemble astéroïdal, représente des personnes sociables, ces personnes ont posé des conditions moins compliquées par rapport aux personnes représentées par les sommets 2, 3 et 5

La 6^{ème} décide de quitter le quartier, dans ce cas le nombre de maisons devient 5, et la 6^{ème} personne n'existe plus. La 5^{ème} personne change ses conditions, elle refuse de passer par elle si on désire aller de la 1^{ère} et la 4^{ème}. Les autres personnes gardent leurs conditions avec l'élimination de la 6^{ème} personne. Dans ce cas, on obtient le graphe suivant:



Fig.2.13

On voit très bien que ce graphe est sans triplet astéroïdal (AT-free). Le seul triplet à tester s'il est astéroïdal dans ce graphe est le triplet $\{1, 4, 5\}$, on trouve qu'il n'est pas astéroïdal car on ne peut pas aller de la 1^{ère} à la 4^{ème} sans toucher le voisinage de la 5^{ème}. Nous avons ici un ensemble astéroïdal de taille deux qui est $\{1, 4\}$, d'où Le nombre astéroïdal dans ce graphe est égal à 2.

Conclusion

Le nombre astéroïdal est calculable en temps polynomial pour les graphes sans fourche et les graphes d'intervalle circulaire, mais le problème de décision correspondant demeure NP-complet pour les graphes planaires.

La complexité des algorithmiques des problèmes NOMBRE ASTEROIDAL et l'ENSEMBLE INDEPENDANT coïncide dans toutes les classes de graphes pour les quelles on le connaît jusqu'ici. A cet égard, il serait intéressant de savoir s'il y a un algorithme efficace pour calculer le nombre astéroïdal des graphes bipartis, puisque pour ces graphes, le nombre d'indépendance est calculable en $O(n^{5/2})$ en utilisant un algorithme assorti maximal.

Bibliographie

- [1] Broersma, H., T. Kloks, D. Kratsh et H. Müller, A generalization of AT-free graphs and a genetic algorithm for solving triangulation problems , *Algorithmica*, vol 33, N° 4, 2002, p. 461-493.
- [2] Broersma, H., T. Kloks, D. Kratsh et H. Müller, Independent sets in asteroidal triple-free graphs, *Mémorandum No. 1359*, Université de Twente, Enschede, la Hollande, 1996.
- [3] Crespelle, C., Représentation dynamique de graphes, thèse de Doctorat, LIRMM, 2007.
- [4] Corneil⁺, D., S. Olariu⁺⁺ et L. Stewart[§], Astéroïdal triplet-free graphs, *SIAM J*, Vol. 10, No 3, pp. 399-430, 1997.
- [5] Corneil, D.G, S. Olariu et L. Stewart, the linear algorithm to compute dominating pairs in asteroidal triple-free graphs, produit de ICALP'95, Springer-Verlag, LNCS 944, 1995, pp. 292-302.
- [6] Corneil, D.G, S. Olariu et L. Stewart, the linear structure of graphs : Asteroidal triple-free graphs. Produit de WG'93, Springer-Verlag, LNCS 790, 1994, pp. 211-224 ; version complète de journal SIAM dans mathématiques discrètes.
- [7] Gardi, G., Ordonnancement avec exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles ou d'une classe apparentée : complexité et algorithmes, thèse de Doctorat, Université de Luminy, Marseille, 2005.
- [8] Golumbic, M.C., *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, Edition Académique, New York, 1980.
- [9] Kloks, T., D. Kratsh et H. Müller, A generalization of AT-free graphs and some algorithmic result, manuscript, 1996.
- [10] Kloks, T., D. Kratsh et H. Müller, Asteroidal sets in graphs, Université de Twente, l'Allemagne.
- [10] Lekkerkerker, C.G, et J.Ch. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fundamenta Mathematicae* 51(1962), pp. 45-64.

Bibliographie

- [11] Levy, G., Algorithmique combinatoire. Méthodes constructives, Edition DUNOD, Paris 1994
- [12] Maffera¹, F., G. Morel², Algorithms linéaires pour les P_5 3-colorables, Preprint, Grenoble.
- [13] Prisner, E., Representing triangulated graphs, Networks 12 (1982), pp. 429-437.
- [14] Sbihi, N., Algorithme de recherche d'un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile, Mathématiques Discrètes, 29 (1980), pp. 53-76.
- [15] Simon, K., Effiziente Algorithmen für perfekte graphen, Teubner, Stuttgart, 1992.
- [16] Taflis, M., Quelques sous-classes des graphes B_1 -orientable, mémoire de Magistère, 2011.
- [17] Tonica, I., Aspects algorithmiques des triangulations minimales des graphes, thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Lyon, 1999.
- [18] Tonica, I., Décompositions arborescentes de graphes : Calcul, approximations heuristique, HDR, Université d'Orléans, 2006.
- [19] Trotignon, N., Graphes parfaits : Structure et algorithmes, thèse de Doctorat, Université Grenoble I, 2004.
- [20] Uehara, R., NP-complete problems on 3-connected cubic planar graph and their applications, Technical Report TWCU-M0004, Tokyo Woman's Christian univ., 1996.
- [21] Wagner, K., Über eine Eigenschaft der ebenen Complexe, anales mathématique 14 (1937), pp. 570-590.
- [22] Waltr, J.R., Representation of chordal graphs as subtrees of a tree, Journal de théorie des graphes 2(1978), pp. 265-267.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, je me suis intéressée à la notion des graphes sans triplets astéroïdaux, tel que j'ai exposé quelques définitions fondamentaux à propos de ce concept.

A travers ce travail, nous avons appris ce que sont les graphes d'intervalles, de comparabilité et de permutation. Nous avons compris ce que sont les graphes AT-free (graphes sans triplet astéroïdal), les graphes arc-circulaire, les graphes sans fourche et les graphes HHD-free.

En effet, la classe des graphes étudiée dans ce mémoire qu'est la classe des graphes AT-free, permet de faciliter le calcul de plusieurs invariants, comme le nombre de stabilité ou le nombre d'indépendance.

Le théorème de Walter mentionné au deuxième chapitre, nous autorise un passage d'un graphe AT-free à un graphe d'intervalles grâce à la triangulation minimale du graphe AT-free, sachant que le graphe complémentaire du graphe d'intervalles est de comparabilité et que les classes des graphes d'intervalles et de comparabilité sont très importantes dans la théorie des graphes.

Une suite possible pour ce travail serait d'implémenter des algorithmes de reconnaissance de ces différentes classes de graphes