

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI OUZOU
FACULTE DU GENIE MECANIQUE
DEPARTEMENT DU GENIE MECANIQUE



MEMOIRE

**En vue de l'obtention du diplôme de Master en Génie
Mécanique**
Option : Construction Mécanique

Thème

Etude d'un Stratifié Sous différentes Sollicitations

Réalisé par : M^r Gandour Yassine
Sous la direction du : Pr. Djebbar Arezki

Date de soutenance 15/12/2018

Remerciements

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon directeur de mémoire A.Djebbar, professeur à l'Université Mouloud Mammeri, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué autant à concrétiser cet humble travail, qu'à alimenter ma réflexion.

Je tiens, tout d'abords et Avant tout, adresser mes sincères et éternel remerciements à Dahdah Slimane qui, tout au long de ces décennies de complicité, chargées d'aventures mais surtout de mésaventures, s'est monté à mes côtés tel un confident, un ami, une famille, un frère.

Aussi, je ne pourrai clôturer cette page sans remercier, Toufik Hamedi, le dit « Piccolo », pour ces nombreuses fois où il s'est montré à la hauteur.

Dédicace

N'ayant pas d'attache particulière, qui n'ont pas été cités précédemment, Ce qui me tient à cœur, c'est de dédier ces efforts, ces résultats, ce travail, à une personne qui, j'en suis convaincu, saura se reconnaître, à cette personne qui a brillé par son incompréhension, par sa distance, et par son Impardonnable absence,...

Table des matières

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux composites	16
1.1. Matrice.....	17
• Résines thermodurcissables	
• Résines thermoplastiques	
• Matrice Minérale	
1.2 Renforts.....	20
• Fibres de verre	
• Fibres de carbone	
• Fibres aramides	
• Fibres céramiques	
• Caractéristiques mécaniques des fibres	
1.3 Charges et Additifs	22
1.4. Procédés de fabrication des matériaux composites.....	22
• Moulages sans pression	
• Moulage sous vide	
• Moulage par compression	
• Moulage en continu	
• Moulage par enroulement filamentaire	
1.5. Structures composites stratifiées.....	31
• Introduction	
• Désignation des structures stratifiées	
• Structure générale d'un stratifié	
• Méthodes d'étude du comportement mécanique des Stratifiés	
1.6 Conclusion.....	40
Chapitre 2 : Analyse mécanique d'un matériau stratifié unidirectionnel.....	41

2.1	Notion d'homogénéisation.....	41
2.2	Approche mécanique des proportions et des constituants.....	41
	• Module d'Young longitudinal	
	• Module d'Young transverse	
	• Coefficient de Poisson longitudinal	
	• Module de cisaillement longitudinal	
2.3	Matrice de rigidité et souplesse d'un matériau composite unidirectionnel.....	50
	• Introduction	
	• Matrice de rigidité	
	• Matrice de flexibilité ou souplesse	
	• Matériau unidirectionnel	
2.4	Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux.....	53
2.5	Analyse Mécanique d'un matériau stratifié Hors-Axes	56
	• Introduction	
	• Etat de contraintes planes	
	• Relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et dans les axes principaux	
2.6	Approche micromécanique de la résistance d'un matériau composite unidirectionnel.....	65
	• Calcul de σ_{1u+} : la matrice se rompt avant les fibres: $e_{1fu} > e_{1mu}$	
	• Calcul de σ_{1u+} : les fibres se rompent avant la matrice: $\epsilon_{1fu} < \epsilon_{1mu}$	
2.7	Mécanismes de Rupture et Endommagement des Matériaux Composite....	69
2.8	Conclusions.....	73
Chapitre 3	Généralités sur la Théorie des Stratifiés.....	75
3.1	Introduction.....	75
3.2	Notations et objectif.....	76
3.3	Expression du champ des déformations.....	76
3.4	Champs des Contraintes.....	78
	• Simplification dans le cadre de la théorie des plaques	
	• Forme du champ des contraintes	
	• Expression des contraintes	

3.5 Résultantes et moments.....	83
• Résultantes en membrane	
• Résultantes en cisaillement	
• Moments de flexion et de torsion	
• Expression des Résultantes et moments	
3.6 Conclusion.....	88
Chapitre 4 : Equation du comportement mécanique d'un stratifié.....	89
4.1 Équation constitutive.....	89
4.2 Matrice de rigidité.....	90
4.3 Détermination des déformations et des contraintes.....	90
• Déformations en membrane et courbures	
4.4 Critère de résistance des matériaux composites.....	91
• Critères de la contrainte maximale	
• Critères en déformations maximales	
• Critères interactifs	
Chapitre 5 : Influence de l'Empilement des Couches.....	98
5.1 Stratifiés symétriques.....	98
• Stratifiés symétriques dont les axes des matériaux de toutes les couches coïncident avec les axes du stratifié	
5.2 Stratifiés antisymétriques.....	100
5.3 Stratifiés croisés.....	104
• Cas particuliers pratiques	
5.4 Stratifiés croisés symétriques.....	107

5.5 Stratifiés croisés antisymétriques.....	108
5.6 Stratifiés équilibrés et stratifiés alternés.....	110
• Stratifiés particuliers	
• Stratifié équilibré symétrique	
• Stratifié alterné antisymétrique	
• Stratifié alterné symétrique	
5. 7 Stratifié quelconque.....	113
Conclusion General.....	115
Annexe 1	119
Annexe 2	123
Annexe 3	124

Listes des figures

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux composites

Figure 1.1 : Type de matrice.....	18
Figure 1.2 : Exemples d'applications des composites à matrice métallique.....	19
Figure 1.3 : Types de renfort.....	20
Figure 1.4 : Principe du moulage au contact.....	23
Figure 1.5 : Principe du moulage par projection simultanée.....	24
Figure 1.6 : Moulage sous vide.....	25
Figure 1.7 : Moulage par injection de résine.....	25
Figure 1.8 : Principe du moulage par compression.....	26
Figure 1.9 : Moulage par injection.....	27
Figure 1.10 : Moulage en continu de plaques.....	28
Figure 1.11 : Moulage en continu de panneaux ondulés.....	28
Figure 1.12 : Moulage par pultrusion.....	29
Figure 1.13 : Moulage par centrifugation.....	30
Figure 1.14 : Principe de l'enroulement circonférentiel.....	30
Figure 1.15 : Constitution d'un stratifié.....	31
Figure 1.16 : Stratifié constitué de couches parfaitement liées.....	32
Figure 1.17 : Désignations du stratifié.....	32
Figure 1.18 : Autres exemple de désignation d'un stratifié.....	33
Figure 1.19 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés.....	34
Figure 1.20 : Schématisations d'étude du comportement mécanique d'un stratifié.....	39
Figure 1.21 : Schéma d'étude du comportement mécanique d'un Stratifié.....	40

Chapitre 2 : Analyse mécanique d'un matériau stratifié unidirectionnel

Figure 2.1 : Composite unidirectionnel.....	42
Figure 2.2 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale.	42
Figure 2.3 : Loi des mélanges pour le module d'Young longitudinal.....	44
Figure 2.4 : Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.....	44
Figure 2.5 : Schéma par couches d'une traction longitudinale.....	45
Figure 2.6 : Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal.....	48
Figure 2.7 : Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.....	49
Figure 2.8 : Matériau composite unidirectionnel.....	52
Figure 2.9 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axes de référence (1', 2', 3) = (x, y, z) du stratifié.....	56
Figure 2.10 : Schématisation des contraintes a la rupture.....	65
Figure 2.11 : Traction Longitudinale.....	65

Figure 2.12 : Graphique de $\sigma(\epsilon_1)$	66
Figure 2.13 : Graphique de $\sigma(\epsilon_1)$ pour un taux de fibre faible.....	67
Figure 2.14 : Graphique récapitulatif des deux cas précédant.....	67
Figure 2.15 : Graphique pour des fibres se rompent avant la matrice: $\epsilon_{1fu} < \epsilon_{1mu}$	68
Figure 2.16 : Graphique pour des taux de fibres faible.....	68
Figure 2.17 : Graphique récapitulatif des deux cas précédant.....	69
Figure 2.18 : Rupture de fibre.....	70
Figure 2.19 : Différents modes de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.....	71
Figure 2.20 : Rupture transverse de la matrice.....	71
Figure 5.6 : Rupture longitudinale de la matrice.....	72
Figure 5.7 : Décohésion fibre-matrice.....	72

Chapitre 3 : Généralités sur la Théorie des Stratifiés

Figure 3.1 : Élément de plaque.....	75
Figure 3.2 : Cotation du Stratifié.....	76
Figure 3.3 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.....	76
Figure 3.4 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement.....	83
Figure 3.5 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.....	84

Chapitre 4 : Equation du Comportement mécanique d'un Stratifié

Figure 4.1 : Comportements fragile et "ductile" d'un matériau.....	92
Figure 4.2 : Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche.....	93
Figure 4.2 : Couche rapportée à des axes de référence quelconques.....	94

Chapitre 5 : Influence de l'Empilement des Couches

Figure 5.1 : Plaque soumise à une traction suivant la direction x : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.....	102
Figure 5.2 : Couplage traction-torsion dans le cas d'un stratifié antisymétrique : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.....	103
Figure 5.3 : Stratifié croisé.....	104

Figure 5.4 : Stratifiés croisés symétrique et antisymétrique.....	106
Figure 5.5 : Couplage traction-flexion dans le cas d'un stratifié croisé antisymétrique : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.....	110
Figure 5.6 : Divers types de stratifiés équilibrés.....	111
Figure 5.7 : Stratifié alterné symétrique.....	111
Figure 5.8 : Couplage général dans le cas d'un stratifié quelconque : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.....	114

Listes des Tableaux

Tableau 1.1 : Exemples de matériaux composites, pris au sens large.....	16
Tableau 1.2 – Caractéristiques des résines thermodurcissables.....	18
Tableau 1.3 – Caractéristiques des résines thermoplastiques.....	18
Tableau 1.4 – Tableau de synthèse « Composites à matrice métallique ».....	19
Tableau 1.5 – Caractéristiques mécaniques des fibres.....	21
Tableau 2.1. Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel ou orthotrope, en dehors de ses axes principaux (figure 11.1).....	62
Tableau 5.1 : Expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé.....	105-106
Tableau 5.2 : Expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches).....	108
Tableau 5.3. Coefficients de rigidité d'un stratifié croisé antisymétrique (nombre pair de couches).....	109

Liste des Symboles et des Abréviations

MPa = Méga Pascal

GPa = Giga Pascal

T_f° = Température de Fusion

ρ = Densité Volumique

$\epsilon_t^R(\%)$ = Déformation à la rupture sous traction

σ_t^R = Contrainte limite de rupture de traction

σ_c^R = Contrainte limite de rupture de Compression

E = Module de Young

ϵ_1 = Déformation suivant la direction 1

l = Longueur de la cellule considéré

Δl = Allongement de la cellule considéré

ϵ_f = Déformation au niveau des fibres

ϵ_m = Déformation au niveau de la matrice

σ_f = Contrainte appliquée sur les fibres

σ_m = Contrainte appliquée sur la matrice

E_f = Module de Young des fibres

E_m = Module de Young de la matrice

F_1 = Charge total appliqué sur le stratifié

V_f = Taux de fibre

h_f = épaisseur des fibres

h_m = épaisseur de la matrice

H_f = épaisseur du plis

σ_m = Contrainte appliquée sur la matrice

E_L = Module de Young longitudinal

E_T = Module de Young transversal

G_{LT} = module de cisaillement longitudinal

ν_{LT} = coefficient de Poisson longitudinal

C_{ij} = Matrice de rigidité

S_{ij} = Matrice de souplesse ou de flexibilité

Q_{ij} = Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

σ_{1u+} = résistance en traction longitudinale

σ_{1u-} = résistance en compression longitudinale

σ_{2u+} = résistance en traction transversale

σ_{2u-} = résistance en compression transversale

Q'_{ij} = Matrice de rigidité réduite Hors-axes

$\mathcal{E}(M)$ = Champs de déformations en un point M

$\mathcal{E}_m(m)$ = Déformation en membrane

$\mathcal{E}_f(m)$ = Déformation en flexion / torsion

\mathcal{K} = Déformation de courbure

N_x = Champs des résultantes en membrane

Q_x = Champs des résultantes en cisaillement

$M_f(x,y)$ = Champs des moments de flexion / torsion

X_t, X_c = Contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression

Y_t, Y_c = Contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et en compression

S = contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche

X_{et} / X_{ec} = Déformation à la rupture respectivement en traction et en compression suivant l'axe longitudinal,

$Y_{et} / Y_{\epsilon c}$ = Déformation à la rupture respectivement en traction et en compression
suivant l'axe transversal

S_{ϵ} = déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

R_{ϵ} = Rapport entre l'épaisseur totale des couche orienté à X° et l'épaisseur totale des
couches orientées à Y°

Introduction générale

Les matériaux composites suscitent un intérêt croissant de la part de nombreux secteurs industriels, et leur emploi tend à se généraliser ; et pour ne cité que cela pour exemple, le transport aérien en fournit certainement l'illustration la plus frappante : longtemps, les matériaux composites ont été utilisés en faibles quantités dans les avions de ligne (de l'ordre de 10% de la masse structurelle), et toujours sur des pièces non vitales.

Cependant l'A380 d'Airbus en contient 25%, le Dreamliner (787) de Boeing en contient 50%, et l'A350-XWB devrait à son tour dépasser ce chiffre (figure 1). En outre, tous ces appareils utilisent dorénavant les composites sur des structures vitales.

Les matériaux composites permettent d'atteindre des niveaux de performances inégalés. En effet, ils possèdent une structure géométrique spécialement conçue pour leur conférer des propriétés que leurs constituants élémentaires ne possèdent pas individuellement, et leur permettent de remplir de nombreuses fonctions techniques.

Cet engouement s'explique principalement par la faible masse volumique des composites qui, par ailleurs, possèdent des propriétés physico-chimiques intéressantes (mécaniques, mais également thermiques, chimiques...) ; cela permet un allègement considérable des structures qui entraîne, dans le cas du transport aérien, une réduction de la consommation de carburant et des émissions de polluants.

Le secteur aéronautique n'est d'ailleurs pas le seul à s'intéresser de près à ces matériaux : l'industrie nautique, ferroviaire, spatiale, le bâtiment, les sports et loisirs fourmillent eux aussi de nouvelles applications.

Cependant, pour le concepteur, l'arrivée de ces nouveaux matériaux représente un changement important, qui impacte profondément la conception et la réalisation des produits industriels.

Pour bien prendre la mesure de ce changement, il est essentiel de comprendre ce que sont exactement les composites, et comment sont obtenues leurs propriétés.

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux composites

Dans un sens large, le mot “composite” signifie “constitué de deux ou plusieurs parties différentes”. En fait, l'appellation *matériau composite* ou *composite* est utilisée dans un sens beaucoup plus restrictif.

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

Des exemples de matériaux composites pris au sens large sont donnés au tableau 1.1.

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue.

Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride.

La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la matrice.

La phase discontinue est appelée le renfort ou matériau renforçant.

Tableau 1.1 : Exemples de matériaux composites, pris au sens large.

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
<p>1. <i>Composites à matrice Organique</i></p> <p>Papier, carton_____</p> <p>Panneaux de particules_____</p> <p>Panneaux de fibres_____</p> <p>Toiles enduites_____</p> <p>Matériaux d'étanchéité_____</p> <p>Pneumatiques_____</p> <p>Stratifiés_____</p>	<p>Résine/charges/fibres cellulosiques_____</p> <p>Résine/copeaux de bois_____</p> <p>Résine/fibres de bois_____</p> <p>Résines souples/tissus_____</p> <p>Elastomères/bitume/textiles_____</p> <p>Caoutchouc/toile/acier_____</p> <p>Résine/charges/fibres de verre,_____</p> <p>de carbone, etc.</p> <p>Résines/microsphères</p>	<p>Imprimerie, emballage, etc.</p> <p>Menuiserie</p> <p>Bâtiment</p> <p>Sports, bâtiment</p> <p>Toiture, terrasse, etc.</p> <p>Automobile</p> <p>Domaines multiples</p>
<p>2. <i>Composites à matrice Minérale</i></p> <p>Béton_____</p> <p>Composite carbone/carbone_____</p> <p>Composite céramique_____</p>	<p>Ciment/sable/granulats_____</p> <p>Carbone/fibres de carbone_____</p> <p>Céramique/fibres céramiques_____</p>	<p>Génie civil</p> <p>Aviation, espace, sports,</p> <p>bio-médecine, etc.</p> <p>Pièces thermo-mécaniques</p>
<p>3. <i>Composites à matrice métallique</i></p>	<p>Aluminium/fibres de bore</p> <p>Aluminium/fibres de carbone</p>	<p>Espace</p>

La géométrie du renfort sera caractérisée par : sa forme, sa taille, la concentration du renfort, sa disposition (son orientation), etc. Si l'ensemble de ces paramètres concourt à déterminer les propriétés du composite, les modélisations descriptives ne tiendront compte que de certains paramètres, du fait de la complexité des phénomènes mis en jeu. Par exemple, la forme du renfort sera schématiquement approchée soit par des sphères, soit par des cylindres.

La concentration du renfort est habituellement mesurée par la fraction volumique (fraction en volume) ou par la fraction massique (fraction en masse).

La concentration du renfort est un paramètre déterminant des propriétés du matériau composite.

Pour une concentration donnée, la distribution du renfort dans le volume du composite est également un paramètre important. Une distribution uniforme assurera une "homogénéité" du matériau : les propriétés du composite seront indépendantes du point de mesure.

Dans le cas d'une distribution non uniforme du renfort, la rupture du matériau sera initiée dans les zones pauvres en renfort, diminuant ainsi la résistance du composite.

Dans le cas de matériaux composites dont le renfort est constitué de fibres, l'orientation des fibres détermine l'anisotropie du matériau composite.

Cet aspect constitue une des caractéristiques fondamentales des composites : la possibilité de contrôler l'anisotropie du produit fini par une conception et une fabrication adaptées aux propriétés souhaitées, d'où leurs autres dénominations : les matériaux à la carte

Ainsi, pour accéder à la description d'un matériau composite, il sera nécessaire de spécifier :

- la nature des constituants et leurs propriétés ;
- la géométrie du renfort, sa distribution ;
- la nature de l'interface matrice-renfort (Charges et additifs).

1. Matrices

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère.

Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation.

Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés.

Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2 200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure 1.1.

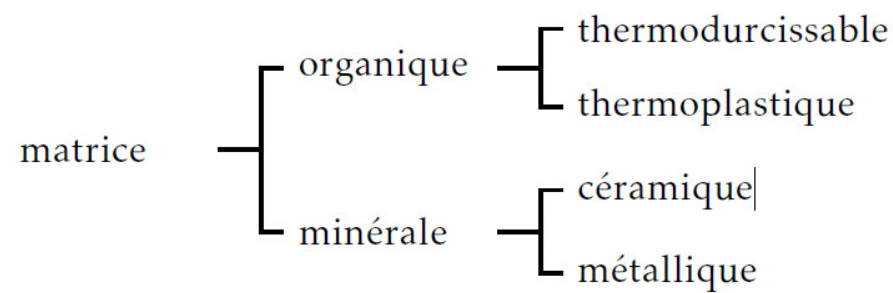


Figure 1.1 – Types de matrice

1.1 Résines thermodurcissables

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère. Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, amioplastes, furaniques) et les résines époxydes sont des résines thermodurcissables.

Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau 1.2 [1].

Tableau 1.2 – Caractéristiques des résines thermodurcissables

résines	T_f (°C)	ρ (Kg/m ³)	ϵ_t^R (%)	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyesters	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
phénoliques	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5
epoxydes	290	1 100 à 1 500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

1.2 Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques

De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau 1.3 [1].

Tableau 1.3 – Caractéristiques des résines thermoplastiques

résines	T_f (°C)	ρ (kg/m ³)	ϵ_t^R (%)	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyamide	65 à 100	1 140		60 à 85		1,2 à 2,5
polypropylène	900	1 200		20 à 35		1,1 à 1,4

Par définition, un composite à matrice métallique est constitué d'une matrice métallique et d'un renfort métallique ou céramique.

Développé à partir des années 1960-1965, ce type de composite était destiné à des applications exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace car le coût des fibres était très élevé.

Dans les années 80, l'apparition des fibres céramiques a permis d'élargir leur champ d'application à l'automobile.

Ces matériaux restent encore en pleine évolution et de nombreuses recherches restent à faire pour déterminer l'ensemble de leurs propriétés.

La matrice métallique peut être :

- monophasée (métal pur ou solution solide : magnésium, titane...)
- multiphasée (alliage durci par précipitation : aluminium et ses alliages, acier ...).

Les renforts utilisés peuvent être de deux types :

- soit des particules ou des fibres courtes (carbure de silicium, nitrure de silicium, titanate de potassium...) qui apportent des propriétés mécaniques légèrement supérieures à celles du métal formant la matrice, et pouvant être utilisées dans les procédés de mise en forme des métaux.
- soit des fibres longues céramiques ou métalliques (carbone, bore, aluminium, céramique, tungstène...) générant des propriétés bien supérieures à celles de la matrice, mais avec des procédés de mise en forme plus coûteux (Infiltration de métal fondu autour d'un renfort fibré) [2].

Figure 1.2 : d'applications des composites à matrice métallique.



**SECTEUR
AUTOMOBILE**

Tableau 1.4 : Tableau de synthèse « composites à matrice métallique »

Propriétés recherchées	Applications	Technologies
Résistance à l'usure	Chemises et pistons Éléments de freinage Insert de culasse	Moulage-forgeage
PM à faible densité Allègement	Bielles Axes de piston	Moulage-forgeage

2. Renforts

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée.

Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tridirectionnel ou plus).

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure 1.2 ci dessous.

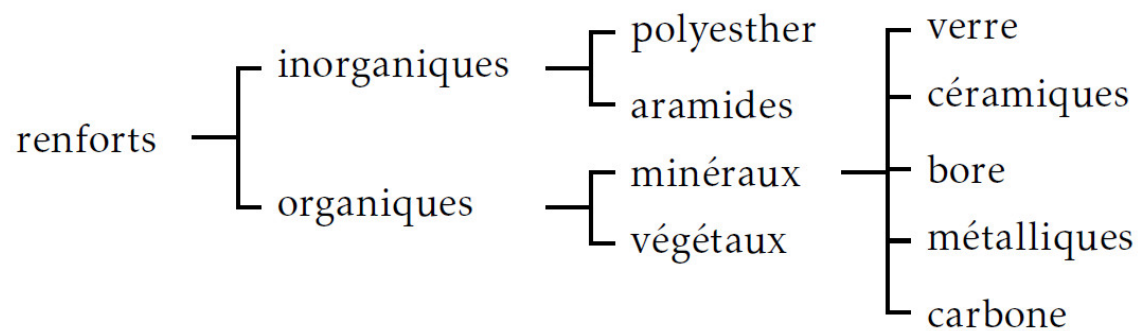


Figure 1.3 – Types de renfort

2.1 Fibres de verre

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance-prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction de structures composites.

2.2 Fibres de carbone

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur.

Actuellement, les fibres *précurseurs* utilisées sont des *fibres acryliques* élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). La qualité des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur.

Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation.

Le brai qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille est également utilisé pour produire des fibres de carbone.

Quelques exemples de fibres de carbone classiquement rencontrées : T300, T800, MR40, TR50, IM6, IM7, GY, M55J. [3]

2.3 Fibres aramides

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbonés mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite.

Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisés. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides.

Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis).

Quelques exemples de fibres aramides : KEVLAR (Dupont de Nemours, USA), TWARON (Akzo, Allemagne-Hollande), TECHNORA (Teijin, Japon). [3]

2.4 Fibres céramiques

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique.

Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2 000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions.

Quelques exemples de fibres céramiques :

- fibres de Carbone de Silicium
- fibres de Bore
- fibres de Bore carbure de silicium

2.5 Caractéristiques mécaniques des fibres

Il existe différents types de fibres. Elles peuvent être scindées en deux groupes, les fibres à haut module et les fibres à haute résistance. Les fibres à haut module ont une résistance faible et celles à forte résistance ont un module faible [1].

Quelques caractéristiques mécaniques des fibres sont présentées dans le Tableau 1.5.

Tableau 1.5 – Caractéristiques mécaniques des fibres

renforts	ρ (Kg/m ³)	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
AS4	1 800		3 599	235
T300	1700	1,2	3 654	231
IM6		0,88	1 460	
IM8	1 800		5 171	310
kevlar 49	1 440	2,5	3 620	124
verre E	2 580	3,5	3 450	69

3. Charges et Additifs

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût.

La quantité des produits ajoutés peut varier de :

- quelques dizaines de % dans le cas de *charges*,
- à quelques % et moins dans le cas d'*additifs*.

Les Additifs sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés.

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- lubrifiants et agents de démoulage ;
- pigments et colorants ;
- agents anti-retraits ;
- agents anti-ultraviolets ;
- accélérateur ;
- catalyseur.

Quant aux charges, leurs ajouts est dans le but d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, ou diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines, en générales ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre).

Les principales charges utilisées sont :

- microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc. ...) ;
- des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc. ...) ;
- des particules de carbone (noir de carbone).

4. Procédés de fabrication des matériaux composites

L'objectif de ce chapitre n'est pas de faire une étude approfondie de la technologie de mise en œuvre des matériaux composites, bien au contraire c'est pour simplement de dégager les principes de différents processus de mise en œuvre, et de constituer une introduction à l'étude du comportement mécanique des matériaux composites [4].

La plupart des méthodes de mise en œuvre consistent à élaborer les pièces en matériaux composites par couches successives comportant matrice et renfort.

Cette technique générale appelée stratification, conduisant à l'élaboration de stratifiés, nous amènera ensuite à nous intéresser à l'architecture des matériaux composites.

4.1 Moulages sans pression

Les méthodes de moulage à froid et sans intervention d'une presse sont les méthodes les plus simples à mettre en œuvre.

Elles nécessitent un minimum d'équipement et par conséquent d'amortissement. Cette facilité a été à l'origine du succès des matériaux composites à fibres de verre, dans l'industrie et l'artisanat

Ces méthodes permettent la réalisation de pièces en petites et moyennes séries, sans restriction de formes et dimensions.

Moulage au contact

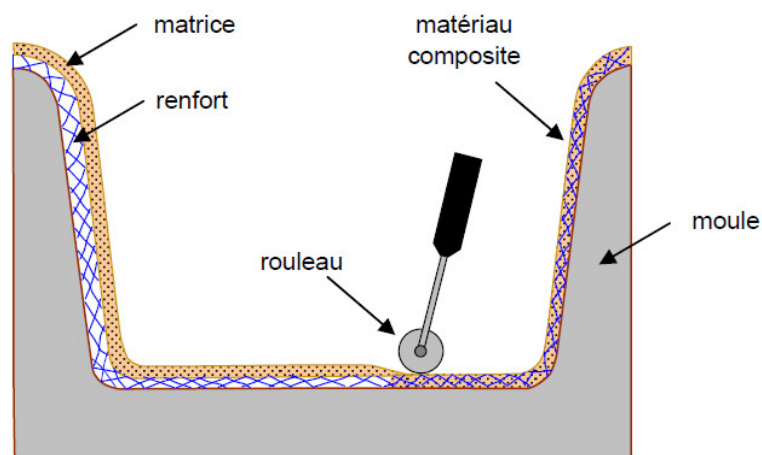


Figure 1.4 : Principe du moulage au contact

Avant moulage, le moule est revêtu d'un agent de démoulage, puis généralement d'une fine couche de résine de surface, souvent colorée, dénommée "gel coat" (figure (1.4)).

Moulage par projection simultanée

Le moulage est effectué par projection simultanée de fibres coupées et résine catalysée sur un moule (figure 1.5).

L'équipement à projeter est constitué d'une machine à couper le stratifil et d'un pistolet projetant la résine et les fibres coupées, l'ensemble fonctionnant par air comprimé.

La couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée et débarrassée des bulles au rouleau cannelé.

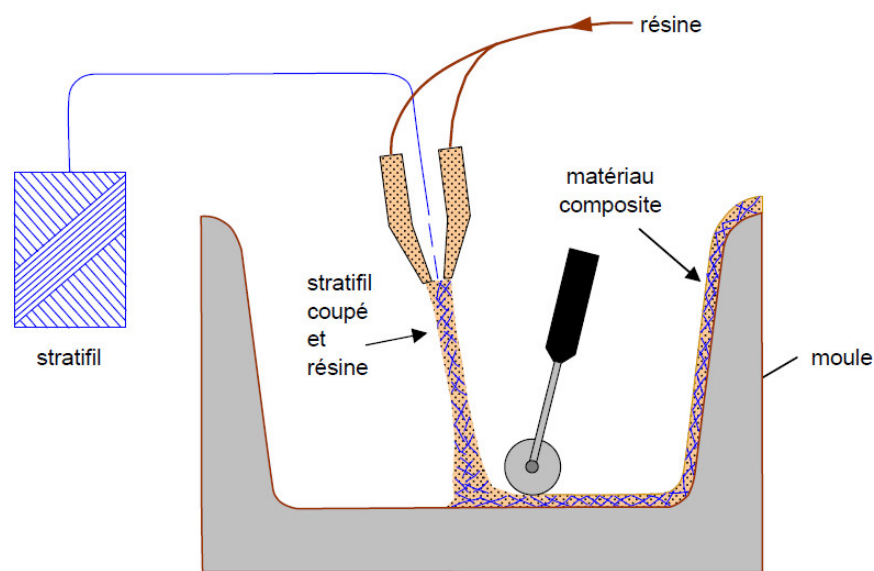


Figure 1.5 : Principe du moulage par projection simultanée.

4.2 Moulage sous vide

Le moulage sous vide consiste à utiliser simultanément le vide et la pression atmosphérique (figure 1.6).

On dispose le renfort sur un moule rigide, puis on coule la matrice. Le contre-moule, recouvert d'une membrane assurant l'étanchéité (feuille de caoutchouc, nylon, etc.), est ensuite emboîté.

Une pompe à vide crée une dépression à travers le moule et le contre-moule poreux, qui étale et débulle la résine. Le contre-moule peut éventuellement être limité à la seule membrane d'étanchéité.

Ce procédé de moulage convient pour la fabrication de pièces en petites et moyennes séries.

Il permet d'obtenir de bonnes qualités mécaniques, grâce à une proportion de résine uniforme et à une diminution des inclusions d'air.

Dans le cas de l'utilisation d'un contre-moule rigide, un bel aspect de surface est obtenu sur les deux faces. Les cadences de production sont toutefois assez lentes.

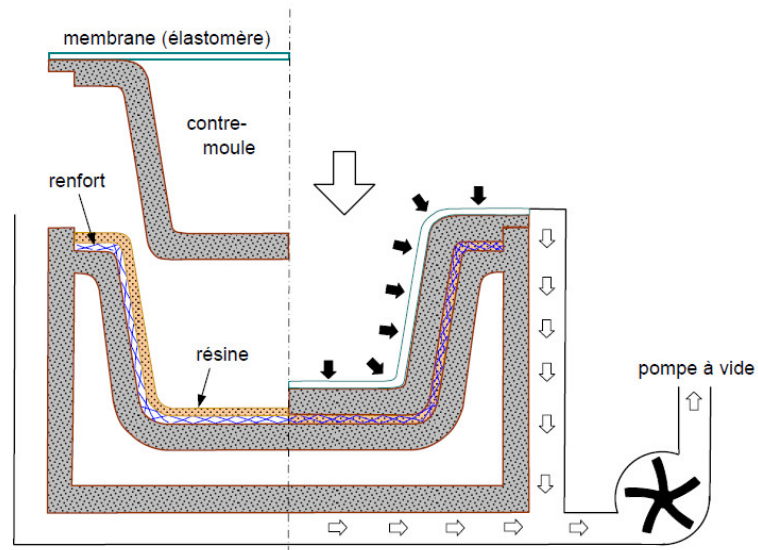


Figure 1.6 : Moulage sous vide.

4.3 Moulage par compression

Moulage par injection de résine

Le moulage consiste (figure 1.7), par injection de résine sous pression, à imprégner un renfort placé à l'intérieur d'un ensemble moule et contre-moule très rigide et fermé. (L'alimentation automatique des résines élimine leur manipulation)

La proportion de renfort peut être élevée, d'où l'obtention de pièces à caractéristiques mécaniques élevées.

Ce procédé de moulage convient à la réalisation de pièces profondes et de formes compliquées.

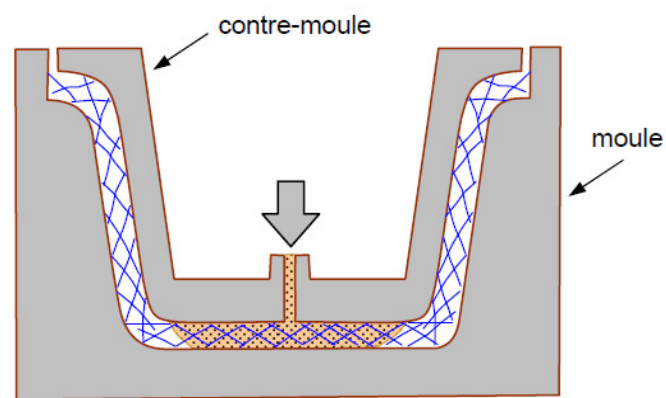


Figure 1.7 : Moulage par injection de résine

Moulage par compression à froid

Le moulage est effectué à basse pression (< 5 bars) sans chauffage du moule, en utilisant l'exothermie de polymérisation de la résine (figure (1.8)).

L'énergie calorifique accumulée par le moulage des pièces est alors suffisante pour maintenir le moule à des températures de 50 à 70 °C, en fonctionnement permanent.

Puis le renfort et la matrice sont déposés sur le moule. L'ensemble moule/contre-moule est fermé, puis pressé.

Ce procédé de moulage est adapté à la fabrication de pièces de moyennes séries (4 à 12 pièces par heure).

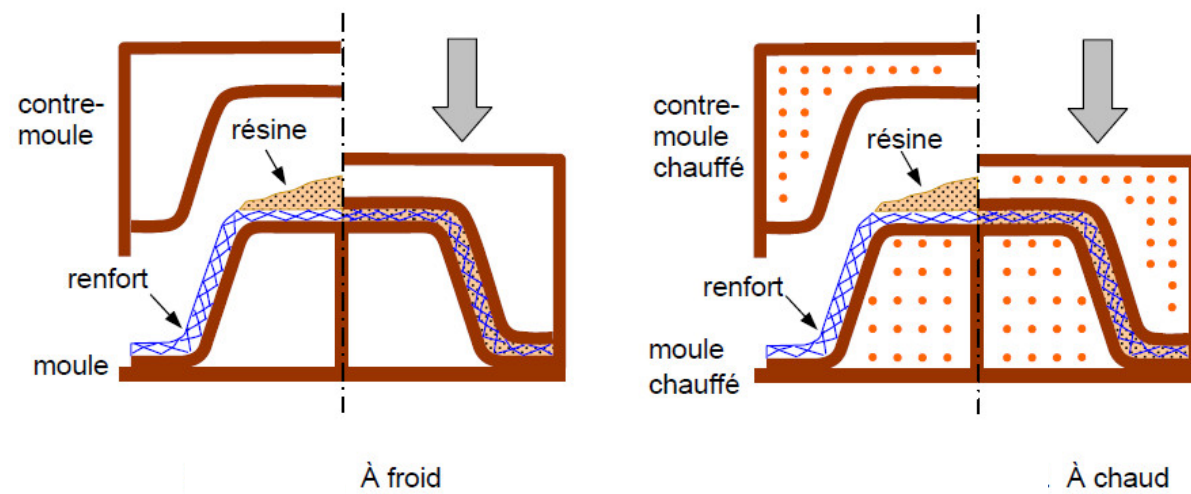


Figure 1.8 : Principe du moulage par compression

Moulage par compression à chaud

Cette technique permet d'obtenir des pièces en grandes séries au moyen de presses hydrauliques et de moules métalliques chauffants.

Le renfort, est déposé sur le moule chauffant, enduit au préalable d'un agent de démoulage. Puis la résine catalysée est coulée en vrac sur le renfort.

Le moule est fermé suivant un cycle déterminé par descente et pressage du contre-moule.

Ce procédé de moulage permet d'obtenir des proportions importantes de renfort, et par conséquent des pièces de bonnes caractéristiques mécaniques.

Les dimensions des pièces sont fonction de l'importance de la presse.

La pression de moulage est de l'ordre de 10 à 50 bars, la température des moules de l'ordre de 80 à 150 °C.

Les cadences de fabrication peuvent atteindre 15 à 30 pièces par heure.

Elles nécessitent un investissement important en matériel, presse et moule.

Moulage par injection

La méthode de moulage par injection (figure 1.9) est la méthode la plus répandue des méthodes de mise en œuvre des thermoplastiques armés (les autres méthodes étant l'extrusion, l'extrusion soufflage, le thermoformage, etc.).

Le moulage par injection est réalisé sur les presses conventionnelles utilisées pour l'injection des résines thermoplastiques.

Des granulés comportant la résine et le renfort (fibres courtes, billes, etc.) ou des mats pré-imprégnés sont extrudés par une vis d'Archimède.

La matrice est fluidifiée par chauffage

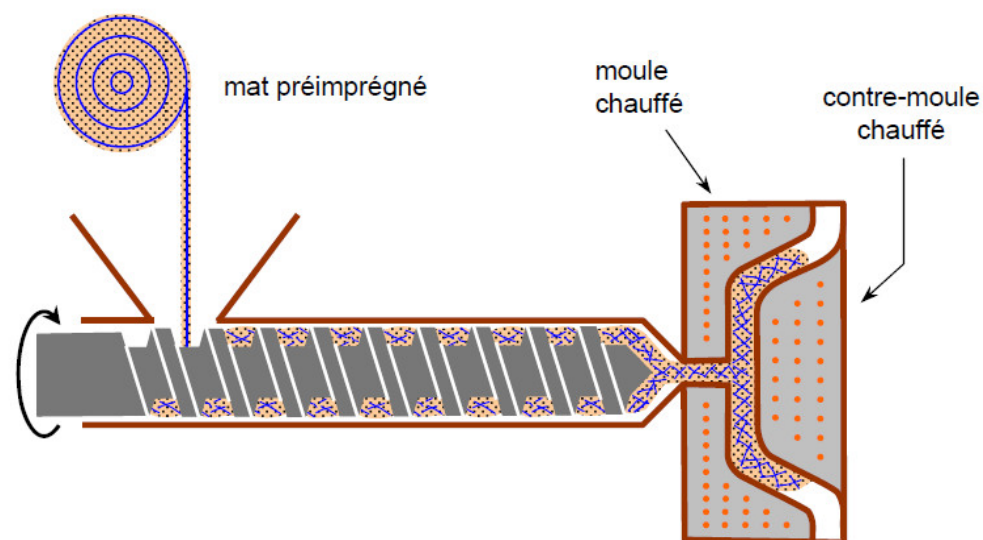


Figure 1.9 : Moulage par injection

4.4 Moulage en continu

Le moulage en continu permet la fabrication de plaques planes, panneaux, sandwiches (figure 1.10), de panneaux ondulés pour toitures (figure 1.11), plaques nervurées, etc.

Dans le cas de la fabrication de plaques planes (figure 10.10), la mise en forme est simplement réalisée par une mise à l'épaisseur de la plaque, par pressage entre des rouleaux de calandrage.

Dans le cas de panneaux ondulés, la mise en forme intervient au cours de la polymérisation (figure 1.10), par l'intermédiaire de rouleaux mobiles. Le procédé de moulage en continu peut être entièrement automatisé, et permet alors d'élaborer des plaques ou panneaux en continu. Il nécessite toutefois un investissement très important en matériel.

Le procédé de moulage en continu peut être entièrement automatisé, et permet alors d'élaborer des plaques ou panneaux en continu.

Il nécessite toutefois un investissement très important en matériel.

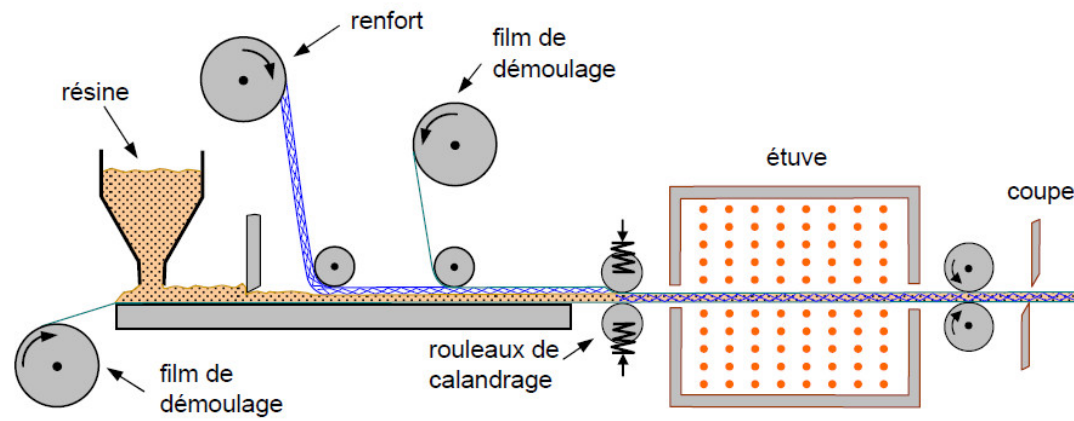


Figure 1.10 : Moulage en continu de plaques

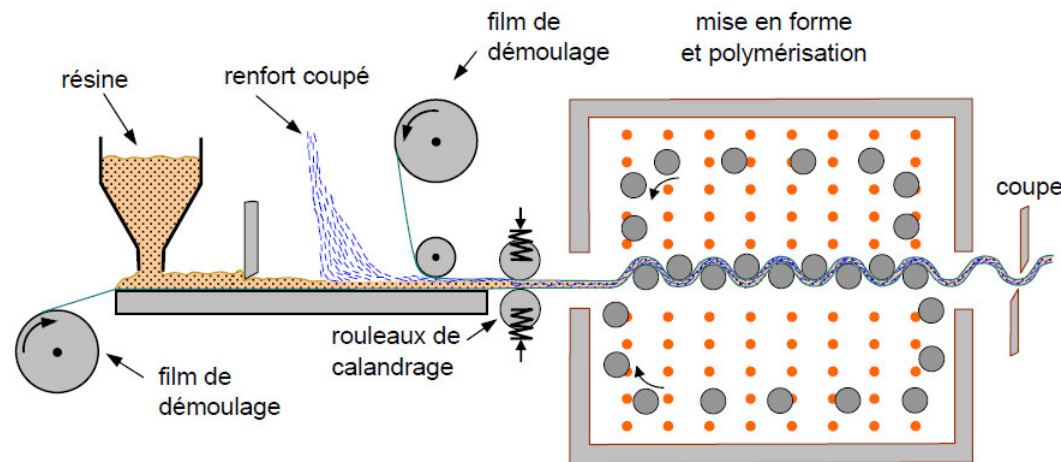


Figure 1.11 : Moulage en continu de panneaux ondulés.

Moulage par pultrusion

Le procédé de moulage par pultrusion sert pour la fabrication de profilés, rectilignes ou courbes, à section constante, hautement renforcés dans la direction principale.

Dans cette technique (figure 1.12), les renforts : fils, stratifils, rubans, etc., passent dans un bain de résine catalysée où ils sont imprégnés.

Ils traversent ensuite une filière chauffée dans laquelle ont lieu simultanément mise en forme du profilé et polymérisation de la résine.

Ce procédé est applicable aux résines thermoplastiques et thermodurcissables. Les profilés obtenus ont des caractéristiques mécaniques élevées, compte tenu de la possibilité d'obtenir des proportions de renfort élevées jusqu'à 80 % en volume. Le procédé est adapté aux productions d'assez grandes séries (vitesse de défilement jusqu'à 20 m/h). Il nécessite un investissement important de matériel.

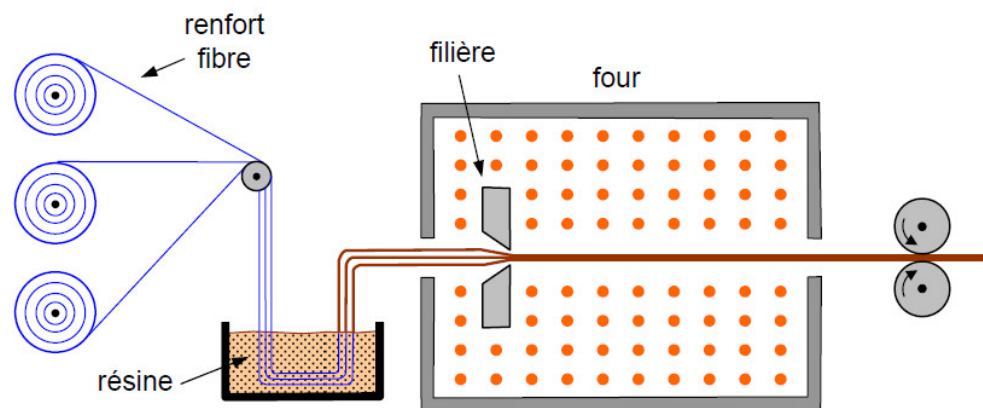


Figure (1.12) : Moulage par pultrusion

Moulage par centrifugation

Cette technique est réservée au moulage de pièces de révolution, en particulier tubes, tuyaux, cuves, etc. (figure 1.13)

L'imprégnation du renfort par la résine est réalisée sous l'effet de la centrifugation.

La stratification s'effectue par passages successifs de la buse d'alimentation en résine et renfort.

Cette technique permet d'obtenir un bel aspect de surface à l'extérieur, avec un diamètre et une épaisseur des pièces bien calibrés.

Ce processus d'élaboration nécessite un matériel de grande précision et un très bon équilibrage du moule.

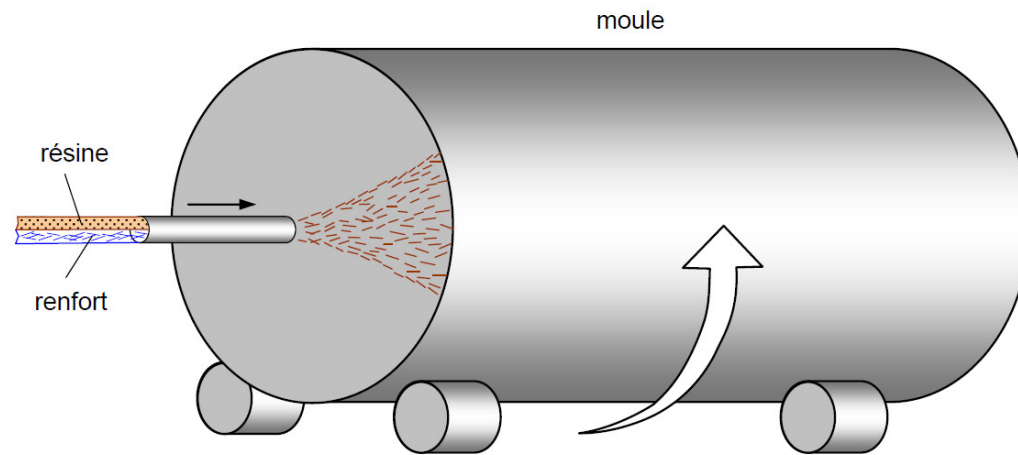


Figure 1.13 : Moulage par centrifugation.

4.5 Moulage par enroulement filamentaire

Ce type de moulage est bien adapté aux surfaces cylindriques et sphériques, et permet une conception avancée des pièces. Les stratifiés obtenus peuvent comporter des proportions élevées de renfort (jusqu'à 80 % en volume), permettant donc d'obtenir de hautes caractéristiques mécaniques.

L'investissement en matériel est très important.

Enroulement circonférentiel

Le bobinage est effectué à 90° par rapport à l'axe du mandrin et confère une résistance tangentielle élevée. (figure 1.14)

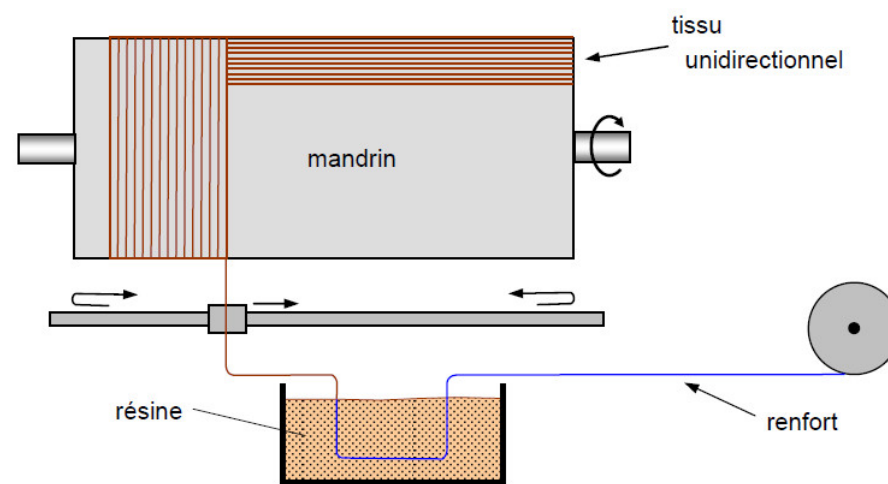


Figure 1.14 : Principe de l'enroulement circonférentiel

5. Structures composites stratifiées

5.1 Introduction

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines. Les couches sont également nommées plis (figure 1.15).

Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de plis unidirectionnels ou multidirectionnels, formées de renforts en fibres longues liées par de la résine.

Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques.

Les pièces structurales sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir [5].

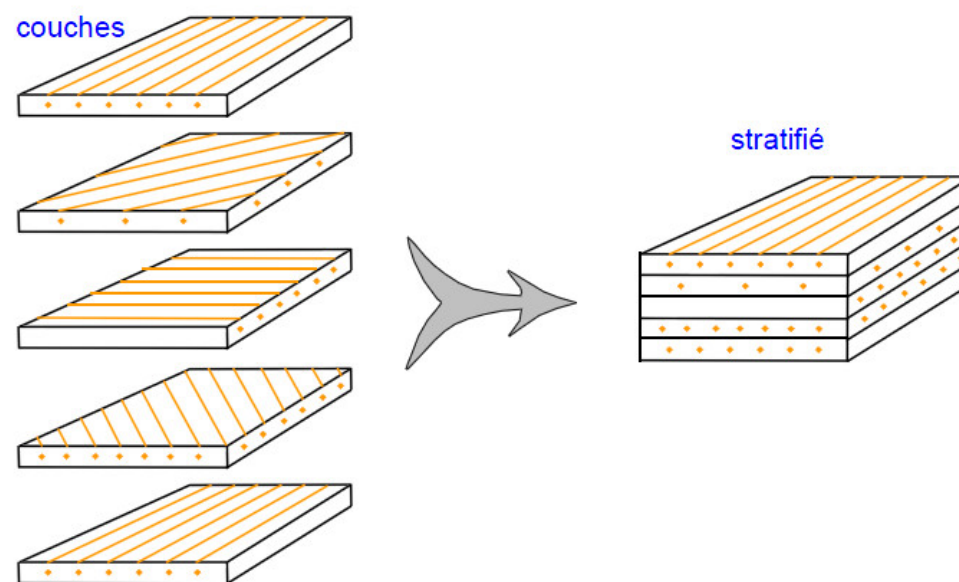


Figure 1.15 : Constitution d'un stratifié

Les matériaux composites sont modélisés à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique associée aux constituants de base du composite (le renfort et la matrice) et l'échelle macroscopique liée à la structure.

À cette échelle, appelée méso-échelle, une structure stratifiée est schématisée par un empilement de monocouches homogènes dans l'épaisseur et d'interfaces inter-laminaires.

La couche et l'interface sont les deux entités appelées méso-constituants, comme illustré sur la figure 1.16, qui forment les bases des modèles dédiés à l'étude des structures stratifiées.

L'interface inter laminaire est une entité surfacique assurant le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre.

En élasticité, les couches sont parfaitement liées et l'interface ne joue aucun rôle particulier.

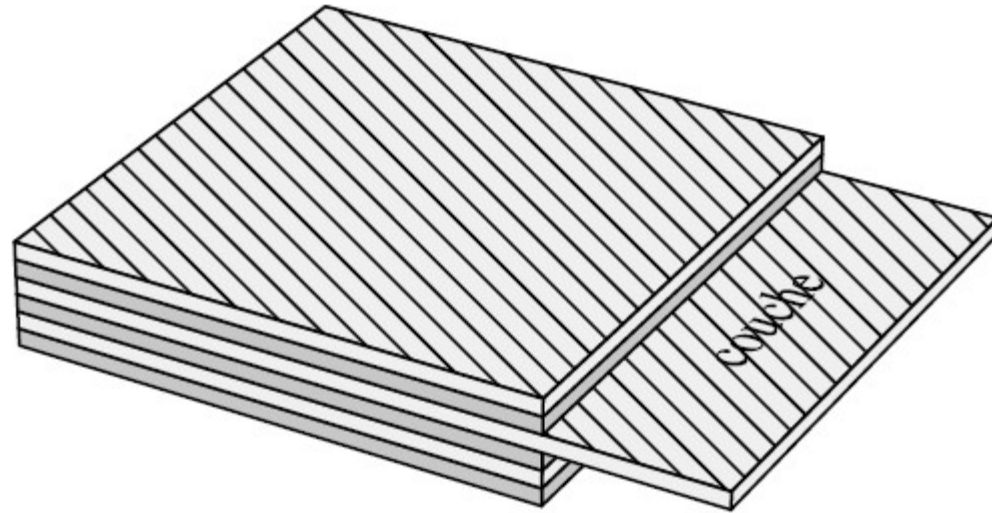
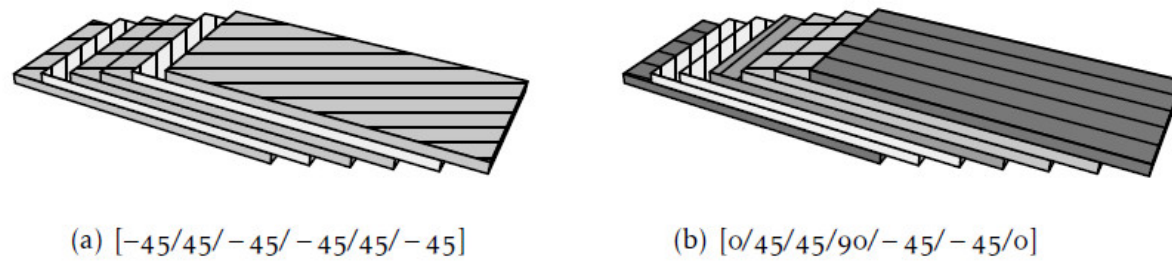


Figure 1.16 : Stratifié constitué de couches parfaitement liées

5.2. Désignation des structures stratifiées



(a) [-45/45/-45/-45/45/-45]

(b) [0/45/45/90/-45/-45/0]

Figure 1.17 : Désignations du stratifié

Sur les figures 1.17(a) et 1.17(b), les couches sont représentées décalées les unes par rapport aux autres.

La structure stratifiée est décrite de bas en haut.

La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence. Un stratifié est codifié de la façon suivante :

1) chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x .

2) les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / » comme l'exemple de la figure 1.6(a) : $[-45/45/-45/-45/45/-45]$;

3) les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique, comme sur la figure 1.6(b) : $[0/45_2/90/-45_2/0]$;

4) en cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche ;

5) en cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole « s » indique la symétrie : $[-45/45/-45/-45/45/-45]$ devient $[-45/45/-45]_s$, et $[0/45/45/90/-45/-45/0]$ devient $[0/45_2/90/-45_2/0]$.

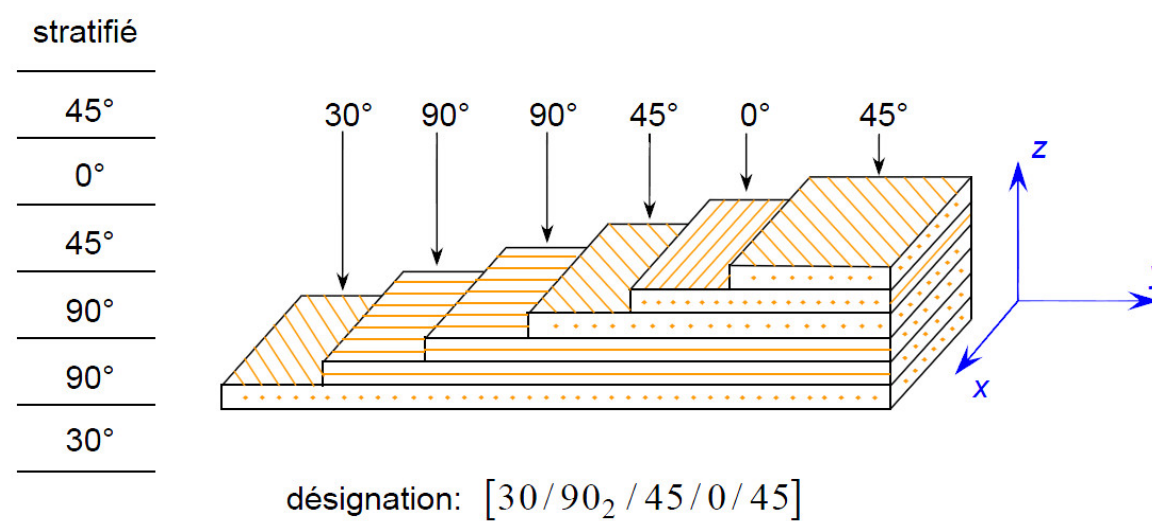


Figure 1.18 : Autres exemple de désignation d'un stratifié.

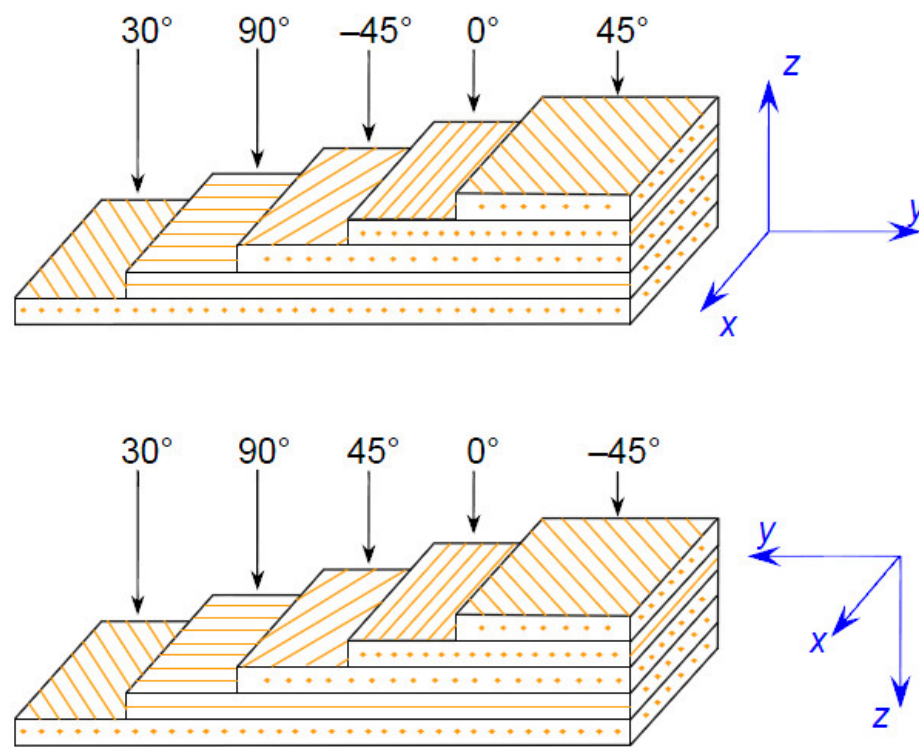


Figure 1.19 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés

Angles positifs et négatifs

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes + ou – sont utilisés.

La convention pour les angles positifs ou négatifs dépend du système d'axes choisi : une inversion peut apparaître suivant le choix effectué (figure 1.18).

Stratifié

0 °
30 °
-30 °
-45 °
45 °

Désignation

[±45 / ∓30 / 0]

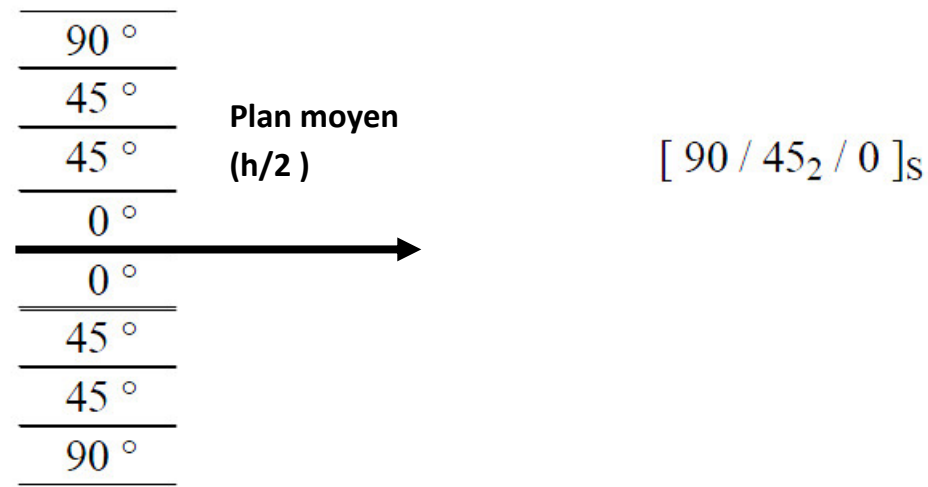
Stratifié**Désignation**

$\overline{\overline{30^\circ}}$ $\overline{\overline{-60^\circ}}$ $\overline{\overline{-60^\circ}}$ $\overline{\overline{0^\circ}}$ $\overline{\overline{45^\circ}}$	[45 / 0 / -60 ₂ / 30]
$\overline{\overline{0^\circ}}$ $\overline{\overline{-45^\circ}}$ $\overline{\overline{-45^\circ}}$ $\overline{\overline{45^\circ}}$ $\overline{\overline{45^\circ}}$	[45 ₂ / -45 ₂ / 0]
$\overline{\overline{0^\circ}}$ $\overline{\overline{-45^\circ}}$ $\overline{\overline{45^\circ}}$ $\overline{\overline{45^\circ}}$ $\overline{\overline{-45^\circ}}$ $\overline{\overline{-45^\circ}}$ $\overline{\overline{45^\circ}}$	[± ∓ ±45 / 0] ou [45 / -45 ₂ / 45 ₂ / -45 / 0]

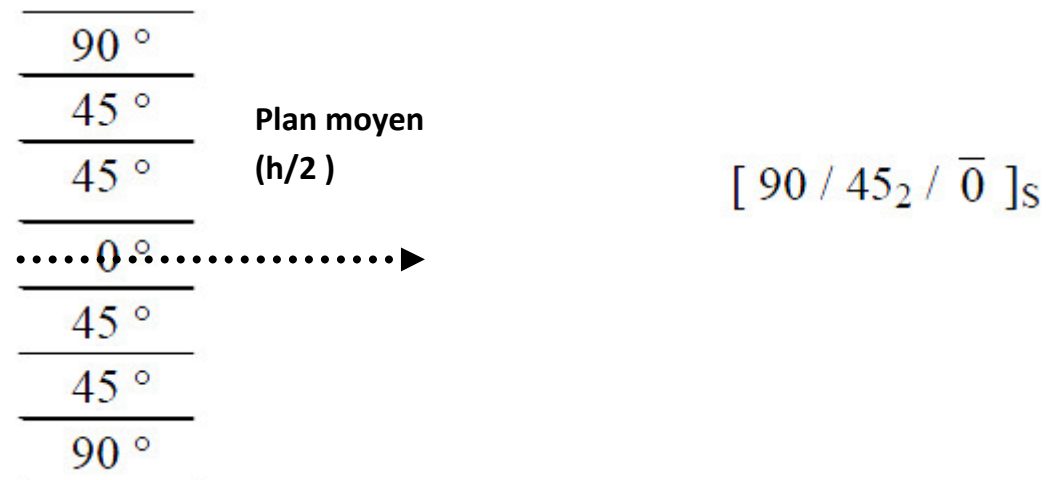
Stratifiés symétriques

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique. Par exemple :

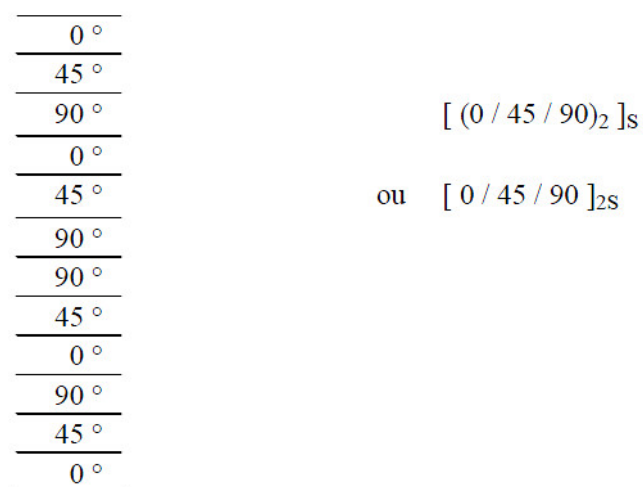


Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée. Par exemple :

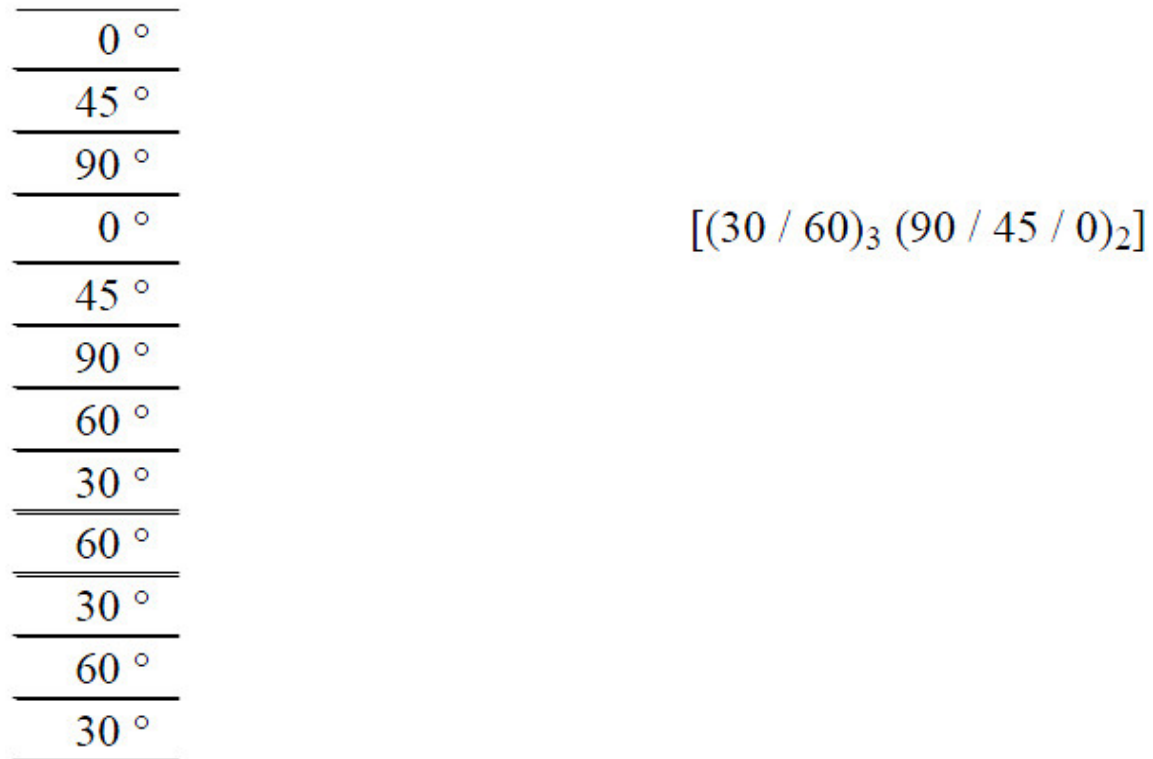


Séquences

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée. Par exemple:



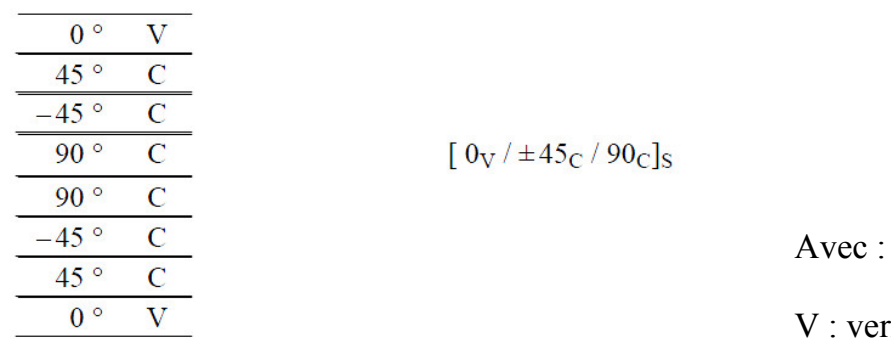
L'alternance $[0 / 90]_n$ est souvent désignée par *stratifié croisé*.



Stratifiés hybrides

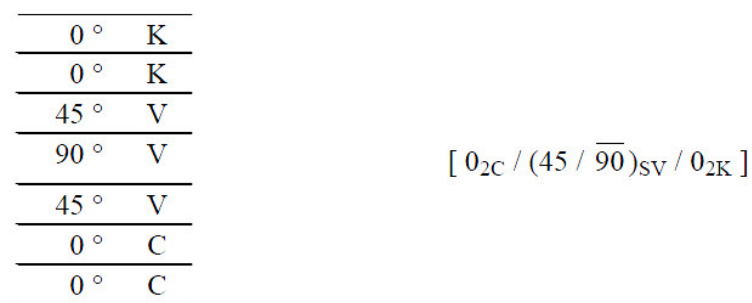
Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes.

Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation. Par exemple, pour des stratifiés avec la même résine :



Avec :

- V : verre,
- C : carbone,
- K : Kevlar



5.3 Structure générale d'un stratifié

Dans le cas général, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifils, mats, tissus, fibres de verre, fibres de carbone, etc.

Chaque couche doit alors être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé :

- les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques dans la direction des fibres;
- les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones comprimées : par exemple les couches unidirectionnelles dans la zone de traction, mat dans la zone de compression d'une poutre sollicitée en flexion;
- une stratification croisée sera sensible au délaminage interlaminaire;
- une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

Enfin, il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage.

Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides permettent d'être plus performants en utilisant au mieux les propriétés des diverses fibres disponibles. Parmi les différents hybrides, on peut distinguer :

- des *hybrides intercouches*, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente;
- des *hybrides intracouches*, constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents;
- des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches.

5.4 Méthodes d'étude du comportement mécanique des Stratifiés

L'étude de la mise en œuvre des matériaux composites a montré l'importance des stratifiés et des matériaux sandwichs.

L'architecture de ces matériaux permet maintenant de dégager les grandes lignes de l'étude de leur comportement mécanique.

Cette étude comportera deux phases :

1. Le comportement mécanique de chaque couche, parfois appelé comportement micromécanique ou microscopique du matériau composite. Cette étude est assez souvent désignée par microanalyse du matériau composite.
2. L'étude du comportement global du matériau constitué de plusieurs couches, et désigné généralement par comportement macroscopique du matériau composite ou comportement du stratifié.

Ces deux études étant effectuées, le comportement mécanique global d'une structure en composite sera ensuite analysé en adaptant les outils classiques du calcul des structures au comportement macroscopique des matériaux composites.

L'analyse des structures simples (poutres et plaques) peut généralement être abordée par une méthode analytique, alors que l'étude de structures complexes nécessite l'utilisation de la méthode des éléments finis.

L'analyse du comportement mécanique d'une structure en matériau composite est schématisée sur la figure 1.20 ci-dessous :

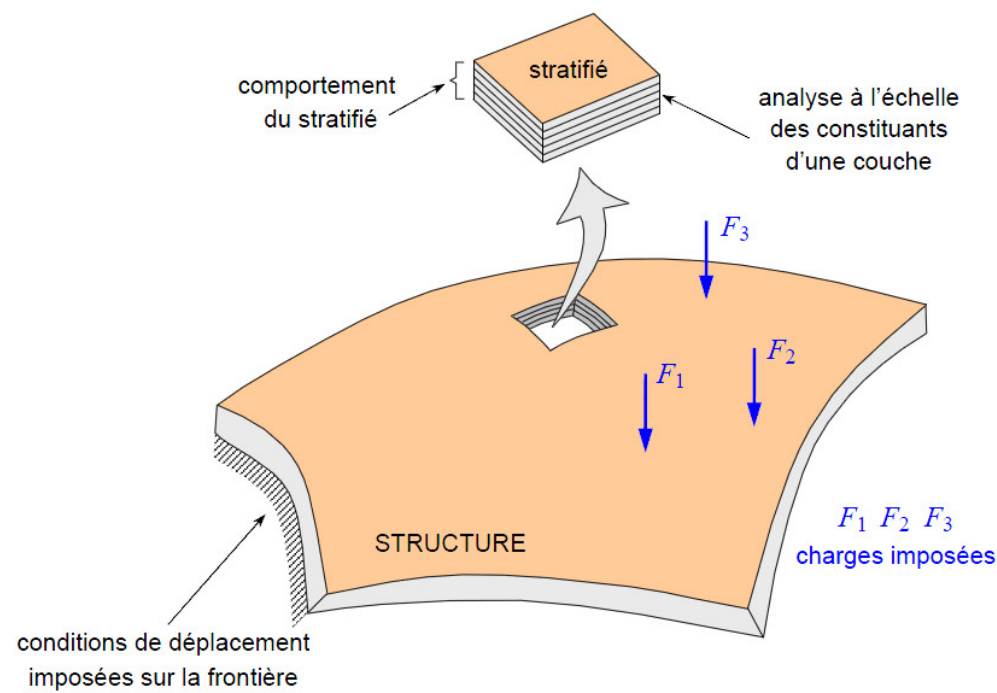


Figure 1.20 : Schématisations d'étude du comportement mécanique d'un stratifié

Pour caractériser le comportement mécanique de la structure composite
il est nécessaire de connaître le champ des contraintes et celui des déplacements
en tout point de la structure

Processus d'étude



Analyse à l'échelle des constituants

Analyse des propriétés élastiques et du comportement à la rupture
d'une couche en fonction des constituants

Comportement du stratifié

Étude des propriétés élastiques et du comportement à la rupture
du matériau stratifié en fonction des couches

Figure 1.21 : Schéma d'étude du comportement mécanique d'un Stratifié

5.5. Conclusion

Compte tenu des généralités avancées précédemment, nous pouvons conclure que les facteurs influant sur les caractéristiques mécaniques des matériaux composites peuvent se résumer en :

- La nature de la matrice utilisée
- La nature des renforts utilisés
- La nature des charges et des aditifs
- Le procédé de fabrication utilisé
- L'orientation des fibres dans les différents plis du composites
- L'empilement des plis ou des couches (Type de stratifié)

Ces points sont essentiels à la compréhension du comportement mécanique des stratifiés, et c'est ce qui va être détaillé dans les chapitres qui suivront.

Chapitre 2 : Analyse mécanique d'un matériau stratifié unidirectionnel

2.1 Notion d'homogénéisation

À une échelle suffisamment fine, tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux dits homogènes.

Pour s'en convaincre, il suffit de partir de l'échelle des atomes et des molécules. Si les matériaux usuels de l'ingénieur devaient être caractérisés à cette échelle d'observation, la tâche serait insurmontable.

Pour contourner cette difficulté, l'ingénieur introduit l'hypothèse de continuité de la matière.

Cette hypothèse implique un concept de moyenne statistique, dans lequel la constitution réelle du matériau est idéalisée en considérant le matériau comme étant continu.

Une fois le modèle de continuité admis, le concept d'homogénéité s'en déduit. Un milieu homogène est alors caractérisé par des propriétés identiques en chaque point.

Au niveau de l'ingénieur, le caractère d'hétérogénéité intervient chaque fois que les propriétés physiques ou mécaniques du matériau sont des fonctions du point.

Les variations des propriétés peuvent être de deux types : soient continues, soient discontinues comme dans le cas des matériaux composites.

Dans ce cas, les propriétés ponctuelles du matériau varient d'une manière discontinue aux interfaces de passage entre les diverses phases. Chaque phase est supposée être homogène et isotrope.

2.2 Approche mécanique des proportions et des constituants

Un composite unidirectionnel est constitué de fibres parallèles disposées dans une matrice (figure 2.1a).

Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'où l'importance de son étude.

La cellule élémentaire d'un tel matériau peut être considérée, en première approximation, comme constituée (figure 2.1b) d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice, à base circulaire

Cette cellule possède un axe de révolution, que nous noterons l'axe 1.

Cette direction parallèle aux fibres est appelée direction longitudinale, et pour cette raison l'axe 1 est également noté l'axe L.

Toute direction normale aux fibres est appelée direction transversale, et le composite est considéré comme étant isotrope transverse : il est isotrope dans le plan normal à la direction 1.

Le plan transverse sera repéré par les directions 2 et 3, notées également T et T', ces directions étant équivalentes [6].

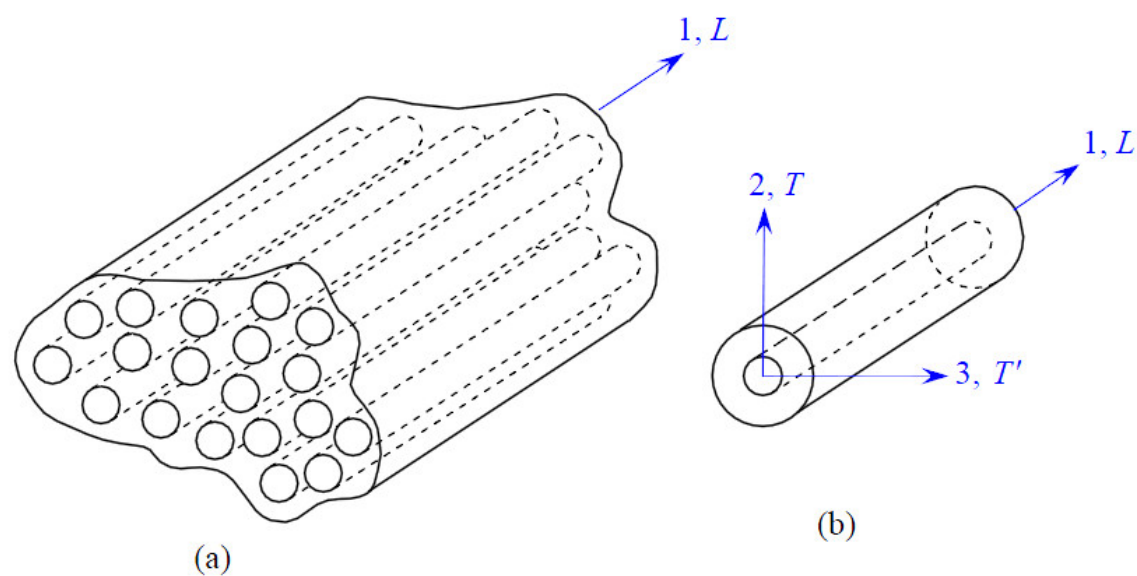


Figure 2.1 : Composite unidirectionnel

Module d'Young longitudinal

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale (figure 2.2).

L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice.

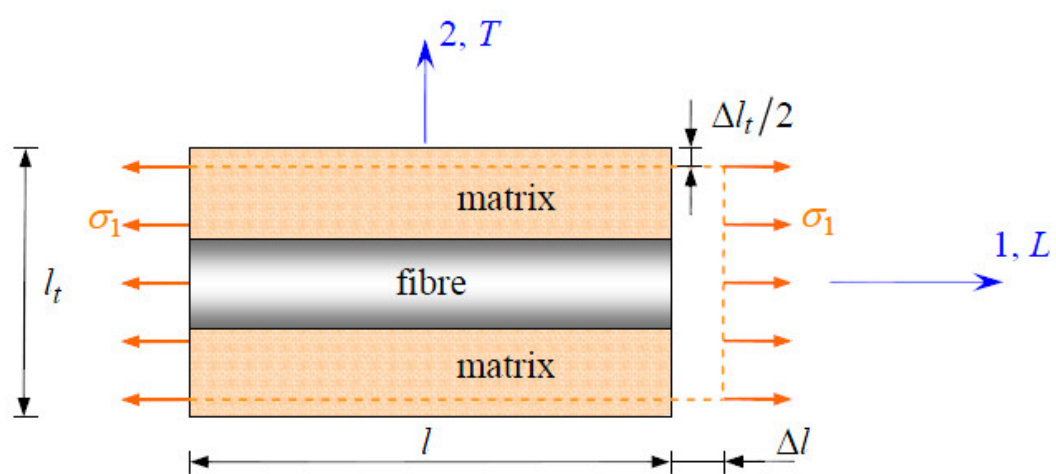


Figure 2.2 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale.

Si Δl est l'allongement de la cellule (identique à celui de la fibre et de la matrice), la déformation longitudinale imposée à la cellule est :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.1)$$

où l est la longueur de cellule considérée.

L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1 \quad (2.2)$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_f &= E_f \varepsilon_1 \\ \sigma_m &= E_m \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

La charge totale appliquée est :

$$F_1 = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m \quad (2.5)$$

où S_f et S_m sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice.

Si S est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne $\delta_1 = F_1/S$ s'écrit :

$$\sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (2.5)$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal :

$$\sigma_1 = E_L \varepsilon_1 \quad (2.6)$$

La combinaison des relations (2.3) à (2.6) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (2.7)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi des mélanges* pour le module d'Young dans la direction des fibres.

Cette loi des mélanges est schématisée sur la figure 2.3.

La variation du module est linéaire entre les valeurs E_m module de la matrice et E_f module des fibres, lorsque la fraction volumique V_f de fibres varie de 0 à 1.

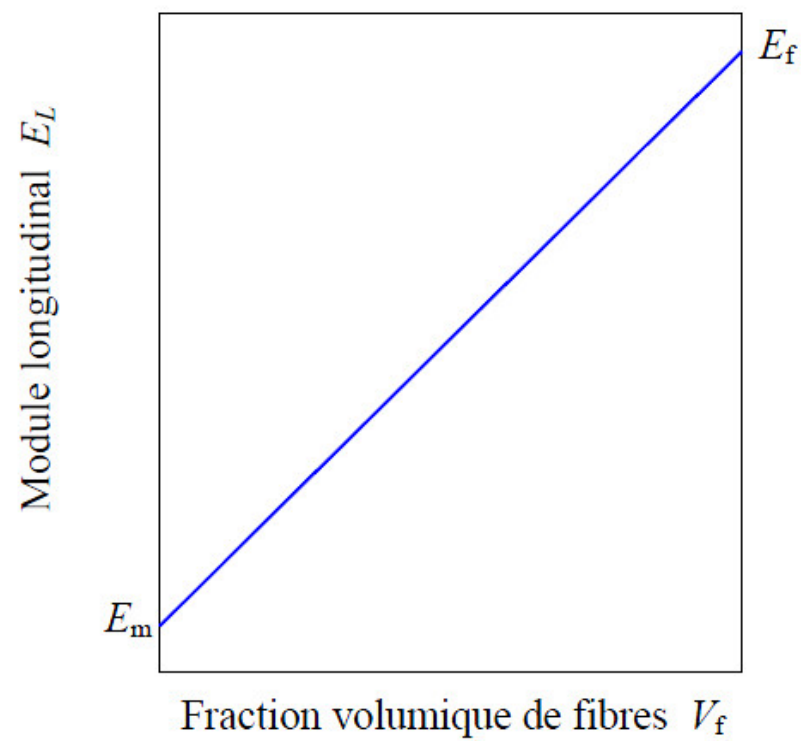


Figure 2.3 : Loi des mélanges pour le module d'Young longitudinal.

Module d'Young transverse

Le module d'Young transverse est déterminé dans un essai de traction transverse où le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres.

Une expression simplifiée de ce module peut être obtenue dans un schéma simpliste à deux dimensions. Dans un tel schéma, une tranche de matériau composite, d'épaisseur donnée, est considérée comme étant constituée (figure 2.4) de couches successives, possédant alternativement les propriétés des fibres et de la matrice.

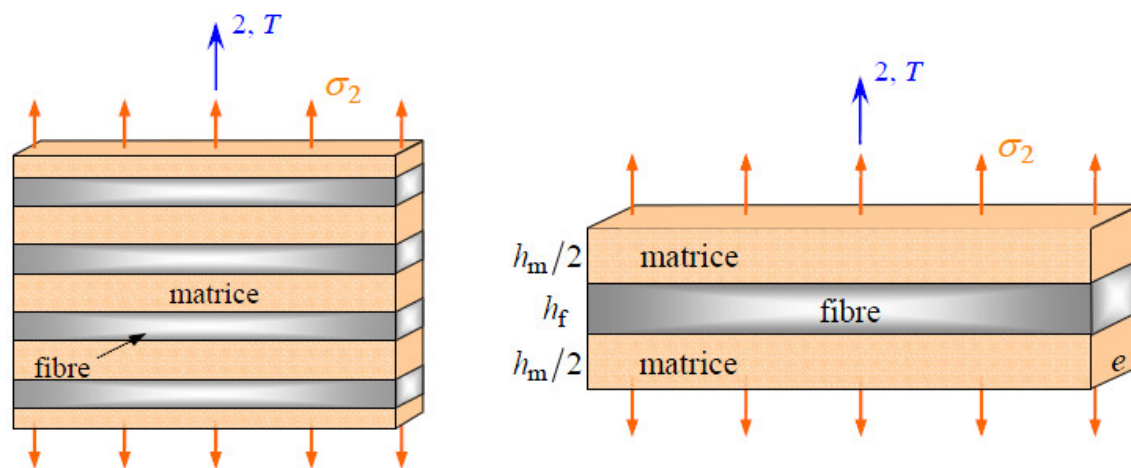


Figure 2.4 : Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.

La hauteur des couches doit simplement vérifier :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{et} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad (2.8)$$

La charge F_2 imposée suivant la direction transverse est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2 \quad (2.9)$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad (2.10)$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad (2.11)$$

Soit :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad (2.12)$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transverse :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2 \quad (2.13)$$

La combinaison des expressions (2.10) à (2.13) conduit à l'expression du module d'Young transverse :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1-V_f}{E_m} \quad (2.14)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi inverse des mélanges*

Coefficient de Poisson longitudinal

Pour déterminer le coefficient de Poisson longitudinal ν_{LT} , on reprendra le schéma précédent dans lequel le composite unidirectionnel est schématisé par couches successives.

Le coefficient ν_{LT} est déterminé dans un essai de traction longitudinale, schématisé sur la figure 2.5.

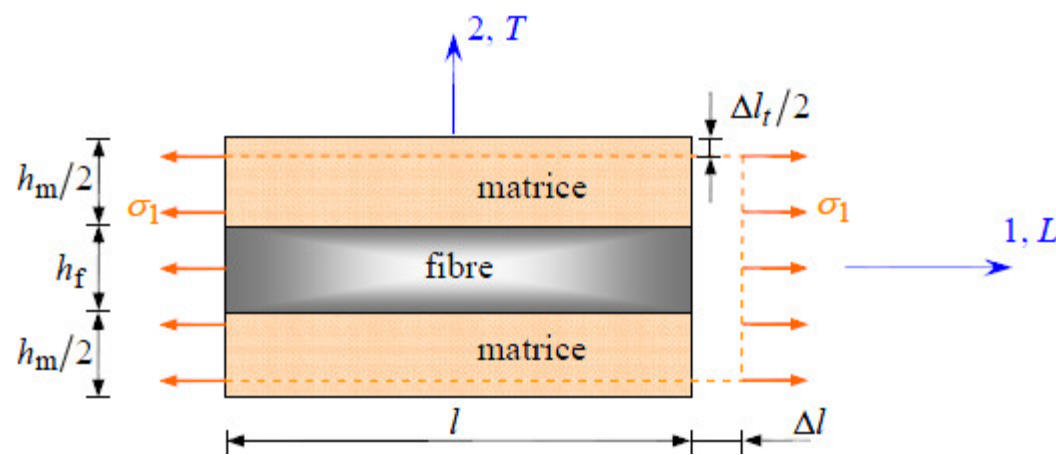


Figure 2.5 : Schéma par couches d'une traction longitudinale

Fibre et matrice subissent des déformations identiques (2.9). Il en résulte que les déformations transverses dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2m} &= -\nu_m \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{2f} &= -\nu_f \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -\nu_m \varepsilon_1 h_m - \nu_f \varepsilon_1 h_f \quad (2.16)$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_f + h_m} = -\left[\nu_m (1 - V_f) + \nu_f V_f \right] \varepsilon_1 \quad (2.17)$$

D'où l'expression du coefficient de Poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad (2.18)$$

Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal.

La variation de ν_{LT} en fonction de la fraction volumique de fibres est linéaire entre ν_m et ν_f .

Dans la pratique, les valeurs de ν_m et ν_f sont assez proches (voisines de 0,3), donc le coefficient de Poisson ν_{LT} restera donc également proche de cette valeur.

Module de cisaillement longitudinal

Le module de cisaillement longitudinal G_{LT} est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la figure 2.6, en utilisant à nouveau la modélisation par couches du composite unidirectionnel.

Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes τ imposées sur la cellule.

Les déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{et} \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad (2.19)$$

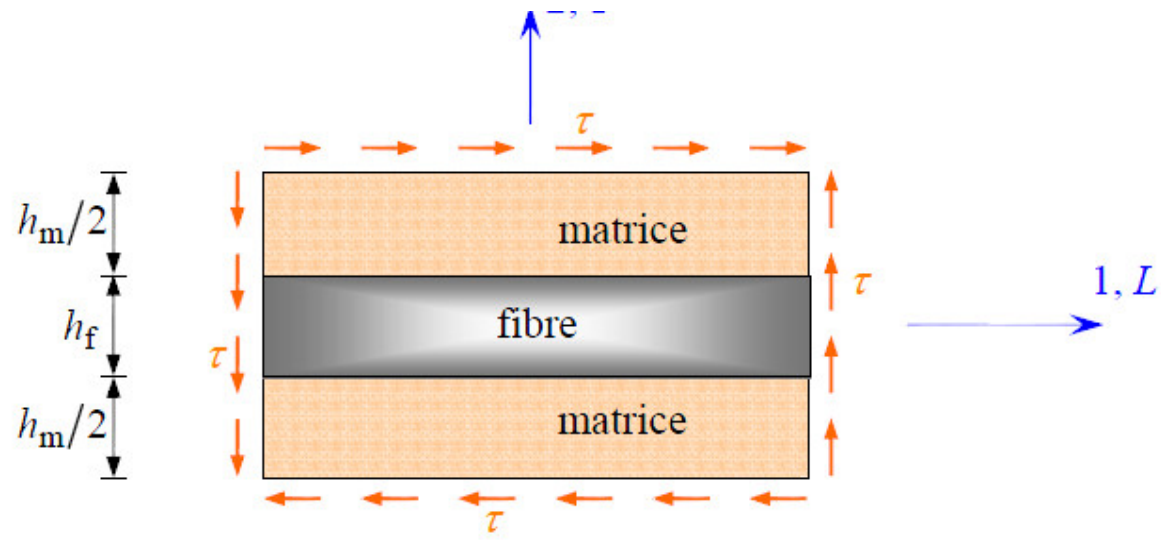


Figure 2.6 : Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice (figure 2.7) sont :

$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \text{et} \quad \delta_m = h_m \gamma_m \quad (2.20)$$

La déformation totale de la cellule (figure 2.7) est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m \quad (2.21)$$

La déformation totale de la cellule (figure 2.7) est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m \quad (2.22)$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) \quad (2.23)$$

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal G_{LT} suivant la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}} \quad (2.24)$$

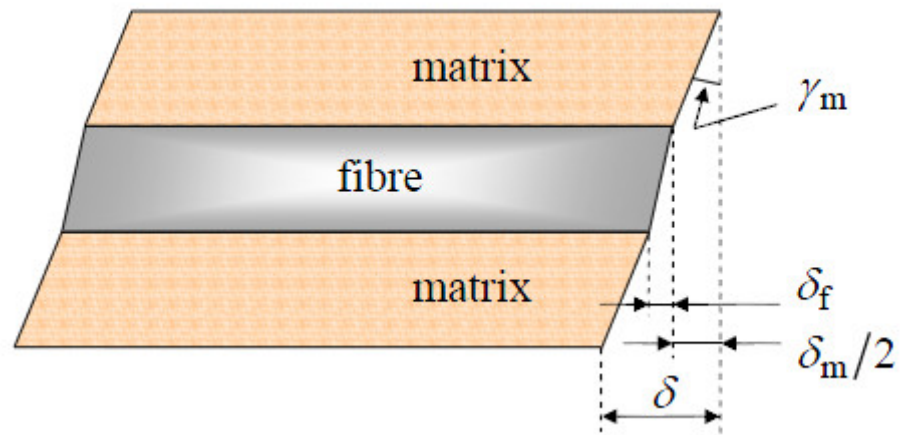


Figure 2.7 : Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.

En combinant les expressions (2.19) à (2.22), nous obtenons :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m} \quad (2.25)$$

Conclusion

Ayant définie grâce aux résultats précédant, l'expression théorique des modules d'un composites unidirectionnel :

- *module d'Young longitudinal* E_L : loi des mélanges (2.7) ;
- *module d'Young transverse* E_T , exprimé à partir des modules précédents à l'aide de l'expression (2.14).
- *coefficient de Poisson longitudinal* ν_{LT} : loi des mélanges (2.18) ;
- *module de cisaillement longitudinal* G_{LT} : relation (2.23) ;

Nous pouvons à présent, aborder l'étude des contrainte et des déformations d'un stratifiée unidirectionnel, ce qui permettra a terme d'étendre l'analyse à un stratifié quelconque.

2.3 Matrice de rigidité et de Souplesse d'un matériaux composite unidirectionnel

- **Introduction**

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées *lois de comportement*, caractérisant le comportement mécanique du milieu

L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont, pour une température donnée, un comportement élastique linéaire.

Matrice de rigidité

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ou sous forme condensée :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.27)$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la *matrice de rigidité* \mathbf{C} , symétrique.

Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 *constantes de rigidité* C_{ij} , au vue le la symétrie de la matrice.

Matrice de flexibilité ou souplesse

La relation d'élasticité (2.24) peut être écrite sous la forme inverse, suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.28)$$

En introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. La matrice \mathbf{S} est appelée *matrice de flexibilité* ou *matrice de souplesse*, et s'écrit dans le cas général :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Avec

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.30)$$

Les coefficients S_{ij} sont appelés *constantes de flexibilité* ou *constantes de souplesse*.

- **Matériau unidirectionnel**

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

La cellule élémentaire d'un matériau composite unidirectionnel peut être considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (figure 2.8). Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution.

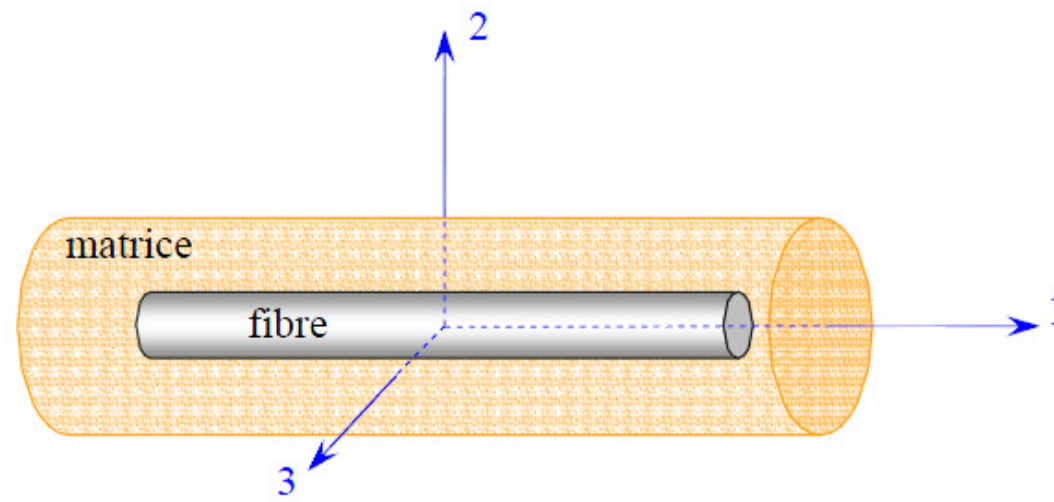


Figure 2.8 : Matériau composite unidirectionnel.

Le matériau est alors appelé matériau *orthotrope de révolution* ou *isotrope transverse*. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou de souplesse). L'exploitation de cette propriété conduit à :

$$\left. \begin{aligned} C_{13} = C_{12}, \quad C_{33} = C_{22}, \\ C_{55} = C_{66}, \quad C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{13} = S_{12}, \quad S_{33} = S_{22}, \\ S_{55} = S_{66}, \quad S_{44} = 2(S_{22} - S_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Les propriétés du matériau unidirectionnel sont déterminées par 4 constantes d'élasticité indépendantes :

$$\begin{array}{ccccc} C_{11}, & C_{12}, & C_{22}, & C_{23}, & C_{66} \\ S_{11}, & S_{12}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{66} \end{array}$$

2.4 Matrice de rigidité réduite dans les axes principaux

Dans les axes principaux d'un composite orthotrope, les constantes de rigidité sont telles que :

$$\begin{array}{ccc} C'_{11} = C_{11}, & C'_{12} = C_{12}, & C'_{13} = C_{13}, \\ C'_{22} = C_{22}, & C'_{23} = C_{23}, & C'_{33} = C_{33}, \\ C'_{66} = C_{66}, & C'_{16} = C'_{26} = C'_{36} = 0. & \end{array} \quad (2.35)$$

Les relations précédant permettent de trouver les constantes de rigidité réduites exprimées dans les axes principaux, soit :

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, & Q_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, & Q_{16} &= 0, \\
Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, & Q_{26} &= 0, & Q_{66} &= C_{66},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Avec en outre pour un composite unidirectionnel :

$$C_{13} = C_{12}, \quad C_{33} = C_{22} \tag{2.37}$$

La matrice de rigidité réduite, exprimée dans les axes principaux, s'écrit donc :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Rapporté aux axes principaux, un état de contraintes planes est caractérisé par :

$$\begin{cases} \sigma_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 6 \\ \sigma_i = 0 & \text{si } i = 3, 4, 5, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 3, 6 \\ \varepsilon_i = 0 & \text{si } i = 4, 5. \end{cases} \tag{2.39}$$

Les relations d'élasticité s'écrivent sous l'une des deux formes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Ou :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Les matrices $[S_{ij}]$ et $[Q_{ij}]$ sont inverses l'une de l'autre.

Les matrices $[S_{ij}]$ et $[Q_{ij}]$ étant inverses, nous en déduisons les relations :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Avec

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_L}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_T} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_T}, \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Et donc :

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22}, \\ Q_{66} &= G_{LT}. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

2.5 Analyse Mécanique d'un matériau stratifié Hors-Axes

Introduction

Ayant étudié le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel, exprimé dans les directions principales : un axe suivant la direction des fibres, il faut se rappeler que les stratifiés étaient élaborés par couches successives, dont la direction des fibres est décalée d'une couche à l'autre.

Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est alors nécessaire de prendre un système d'axes de référence pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Nous considérons donc (figure 2.9) une couche de matériau unidirectionnel de directions principales (1, 2, 3), le plan (1, 2) étant confondu avec le plan de la couche, et la direction 1 confondue avec la direction des fibres.

L'objectif est de caractériser les propriétés élastiques de la couche, en les exprimant dans le système d'axes de référence (1', 2', 3) du stratifié, la direction des fibres faisant un angle θ avec la direction 1'.

Ce système d'axes est usuellement référencé comme système (x, y, z). Par la suite, nous utiliserons indifféremment les deux notations : (1', 2', 3) = (x, y, z).

La première est mieux adaptée à la notation matricielle et plus pratique pour effectuer les changements de base.

La seconde notation différencie le système d'axes propres (1, 2, 3) = (L, T, T') du matériau unidirectionnel ou tissu du système usuel (x, y, z) de coordonnées cartésiennes du mécanicien.

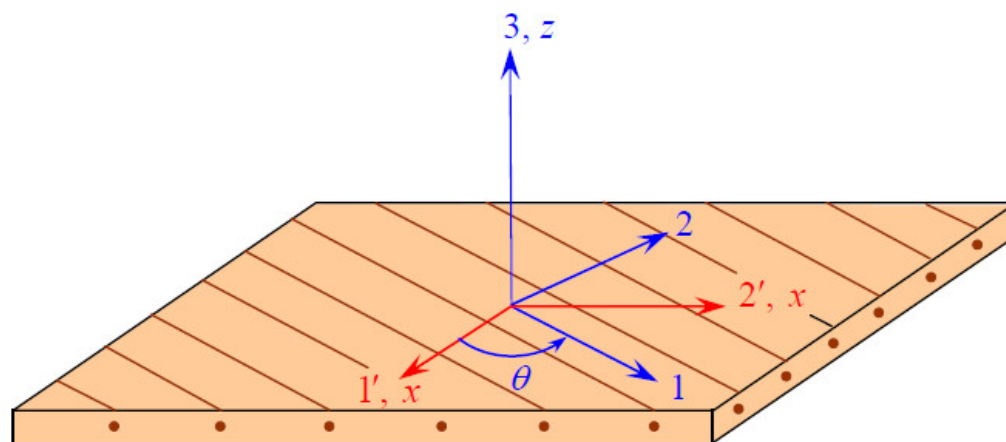


Figure 2.9 : Axes principaux (1, 2, 3) d'une couche de stratifié et axes de référence (1', 2', 3) = (x, y, z) du stratifié.

ÉTAT DE CONTRAINTES PLANES

Un état de contraintes à deux dimensions est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}'(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

En chaque point M du matériau. La direction z est la direction principale avec une valeur propre nulle. Usuellement, un tel état de contraintes est dit état de *contraintes planes*.

- **Équations d'élasticité pour un état de contraintes planes**

Les contraintes en un point M s'écrivent donc (3.1) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma'_i \neq 0 \quad \text{si} \quad i = 1, 2, 6, \\ \sigma'_i = 0 \quad \text{si} \quad i = 3, 4, 5. \end{array} \right\} \quad (2.52)$$

Les déformations sont données par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_1 &= S'_{11}\sigma'_1 + S'_{12}\sigma'_2 + S'_{16}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_2 &= S'_{12}\sigma'_1 + S'_{22}\sigma'_2 + S'_{26}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_3 &= S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6, \\ \varepsilon'_4 &= 0, \\ \varepsilon'_5 &= 0, \\ \varepsilon'_6 &= S'_{16}\sigma'_1 + S'_{26}\sigma'_2 + S'_{66}\sigma'_6. \end{aligned} \right\} (2.53)$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \varepsilon'_i &\neq 0 & \text{si } i &= 1, 2, 3, 6 \\ \varepsilon'_i &= 0 & \text{si } i &= 4, 5. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Il existe donc une déformation suivant la direction z , donnée par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} = \varepsilon'_3 &= S'_{13}\sigma'_1 + S'_{23}\sigma'_2 + S'_{36}\sigma'_6 \\ &= S'_{13}\sigma_{xx} + S'_{23}\sigma_{yy} + S'_{36}\sigma_{xy}\end{aligned}\quad (2.55)$$

Les deux premiers termes sont des termes de couplage par effet Poisson, et le troisième est dû à un couplage par cisaillement.

Les relations entre contraintes et déformations exprimées à l'aide des coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\text{Soit : } \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}\quad (2.56)$$

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{16}\varepsilon'_6, \\ \sigma'_2 &= C'_{12}\varepsilon'_1 + C'_{22}\varepsilon'_2 + C'_{23}\varepsilon'_3 + C'_{26}\varepsilon'_6, \\ 0 &= C'_{13}\varepsilon'_1 + C'_{23}\varepsilon'_2 + C'_{33}\varepsilon'_3 + C'_{36}\varepsilon'_6, \\ \sigma'_6 &= C'_{16}\varepsilon'_1 + C'_{26}\varepsilon'_2 + C'_{36}\varepsilon'_3 + C'_{66}\varepsilon'_6.\end{aligned}\quad (2.57)$$

Ces trois relations en $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$ peuvent alors s'exprimer sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}\quad (2.58)$$

Les coefficients Q'_{ij} sont appelés les *constantes de rigidité réduites* dans un état de contraintes planes.

La matrice :

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

est la *matrice de rigidité réduite*.

En conclusion, dans le cas d'un état de contraintes planes, nous avons :

$$\begin{cases} \sigma'_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 6 \\ \sigma'_i = 0 & \text{si } i = 3, 4, 5, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon'_i \neq 0 & \text{si } i = 1, 2, 3, 6 \\ \varepsilon'_i = 0 & \text{si } i = 4, 5. \end{cases}$$

Les relations d'élasticité s'écrivent sous l'une des deux formes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{26} \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Les matrices $[S_{ij}]$ et $[Q_{ij}]$ sont inverses l'une de l'autre.

Relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et dans les axes principaux

Les relations entre les constantes de rigidité réduites hors axes et celles exprimées dans les axes principaux ne font intervenir que les composantes 1, 2 et 6 des contraintes et déformations [8].

La structure des relations générales pour un composite unidirectionnel et un composite orthotrope, des relations d'élasticité dans un état de contraintes à deux dimensions, des expressions de changements de base établies dans le cas général montre que les relations de changement de base exprimant les constantes de rigidité réduites Q_{ij} en fonction des constantes Q_{ij} sont identiques à celles obtenues dans le cas des constantes de rigidité C_{ij} , en se limitant à $i, j = 1, 2, 6$.

Enfin, ces éléments associés, montrent que ces relations sont également identiques pour un composite unidirectionnel ou un composite orthotrope.

De la même manière que dans le cas général, il est possible de réécrire les expressions de changement de base en introduisant les angles multiples de l'angle θ .

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_\varepsilon \quad (2.62)$$

$$\mathbf{S}' = \mathbf{T}_\varepsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}_\sigma$$

avec :

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Avec : $T_{\sigma} = (T_{\varepsilon})^{-1}$

Tableau 2.1. Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel ou orthotrope, en dehors de ses axes principaux (figure 11.1).

$$\begin{aligned}
 Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
 Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\
 Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\
 Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
 Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\
 Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).
 \end{aligned}$$

Illustration des termes de couplage

Il s'agit de l'effet de Poisson (couplage entre les directions 1 et 2) et du couplage entre traction (ou compression) et cisaillement.

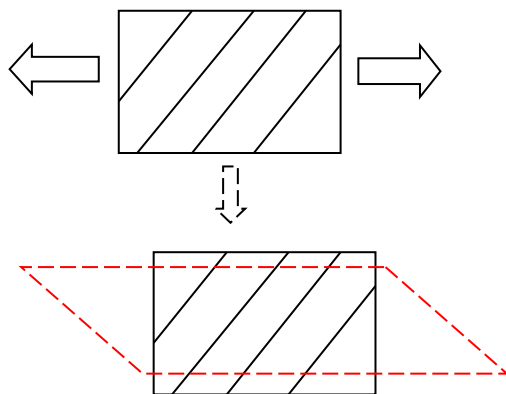
Essai de Traction / Compression avec $\theta > 0^\circ$ / $\theta < 0^\circ$

$$\sigma_1 > 0 \ (\sigma_1 < 0)$$

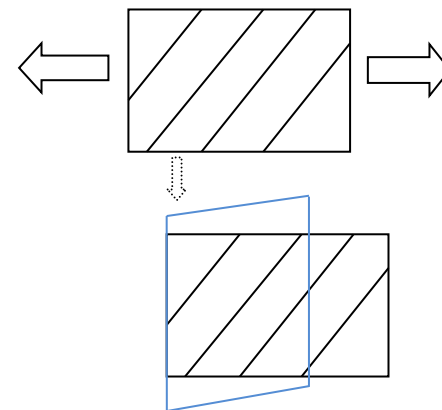
$$\sigma_2 = 0$$

$$\tau_{12} = 0$$

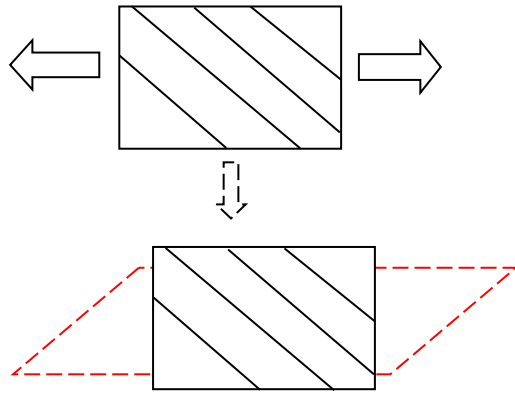
Essai de traction ($\theta > 0^\circ$)



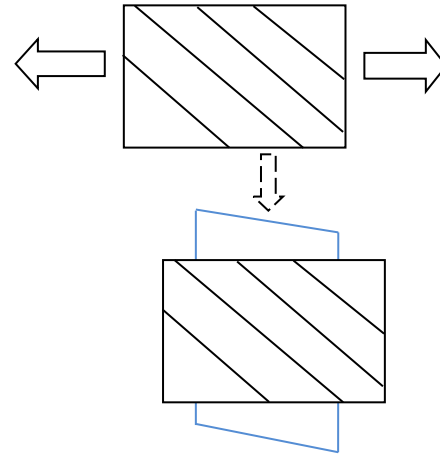
Essai de compression ($\theta > 0^\circ$)



Essai de traction ($\Theta < 0^\circ$)



Essai de compression ($\Theta < 0^\circ$)



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 > 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tau_{12} = 0 \end{array} \right\} S_{16} < 0 ; \nu_{61} < 0 : \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 > 0 \\ \varepsilon_2 < 0 \\ \varepsilon_6 < 0 \end{array} \right\}$$

En compression nous obtenons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 < 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tau_{12} = 0 \end{array} \right\} S_{16} < 0 ; \nu_{61} < 0 : \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 < 0 \\ \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_6 > 0 \end{array} \right\}$$

Nous remarquons, contrairement au cas des matériaux isotropes, qu'avec une sollicitation de traction/compression, nous obtenons des déformations de cisaillement dû aux termes de couplages.

Il est à noter aussi, que nous obtenons des résultats semblables dans le cas où $\Theta < 0^\circ$, avec comme différences l'inversion des signes pour ε_6 .

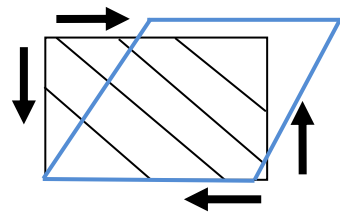
Essai de cisaillement avec $\Theta > 0^\circ / \Theta < 0^\circ$

Pour $\tau_{12} > 0$:

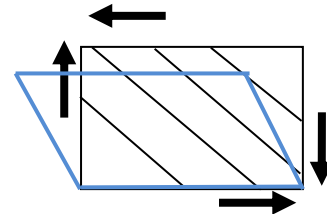
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tau_{12} > 0 \end{array} \right\} S_{16} < 0 ; \nu_{61} < 0 : \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 < 0 \\ \varepsilon_2 < 0 \\ \varepsilon_6 > 0 \end{array} \right\}$$

Pour $\tau_{12} < 0$:

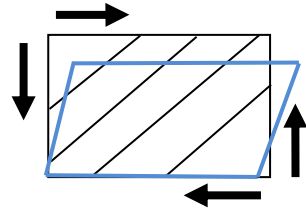
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tau_{12} < 0 \end{array} \right\} S_{26} < 0 ; \nu_{61} < 0 : \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 > 0 \\ \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_6 < 0 \end{array} \right\}$$



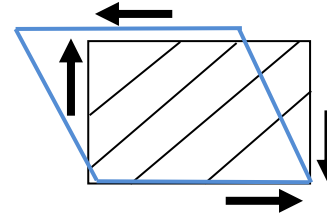
Essai de cisaillement avec $(\Theta < 0^\circ)$



Essai de cisaillement $(\Theta < 0^\circ)$



Essai de cisaillement $(\Theta > 0^\circ)$

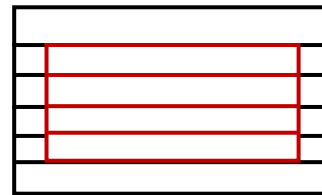
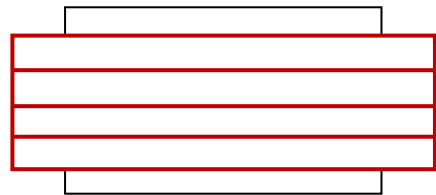


Essai de cisaillement $(\Theta > 0^\circ)$

Ici aussi, nous remarquons, des déformations suivant la direction 1 et 2, et ceci est dû aux termes de couplages.

Il est à noter aussi, que nous obtenons des résultats semblables dans le cas où $\Theta < 0^\circ$, avec comme différences l'inversion des signes pour ϵ_6 .

Essai de Traction/Compression et de cisaillement avec $\Theta = 0^\circ$



<p>Pour $\sigma_1 > 0$:</p> $\left. \begin{matrix} \sigma_1 > 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tau_{12} = 0 \end{matrix} \right\} S_{16} = 0 ; v_{61} = 0 : \left. \begin{matrix} \epsilon_1 > 0 \\ \epsilon_2 < 0 \\ \epsilon_6 < 0 \end{matrix} \right\}$	<p style="border-left: 1px dashed black; border-right: 1px dashed black; height: 100px; width: 1px;"></p>	<p>Pour $\sigma_1 < 0$:</p> $\left. \begin{matrix} \sigma_1 < 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tau_{12} = 0 \end{matrix} \right\} S_{16} = 0 ; v_{61} = 0 : \left. \begin{matrix} \epsilon_1 < 0 \\ \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_6 > 0 \end{matrix} \right\}$
---	---	---

2.6 Approche micromécanique de la résistance d'un matériau composite unidirectionnel

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de définir ce qu'est la rupture d'un pli unidirectionnel : La défaillance d'un pli unidirectionnel est sa rupture et non sa fissuration [7].

Il est nécessaire de connaître les contraintes à la rupture suivante:

- σ_{1u+} : résistance en traction longitudinale
- σ_{1u-} : résistance en compression longitudinale
- σ_{2u+} : résistance en traction transversale
- σ_{2u-} : résistance en compression transversale

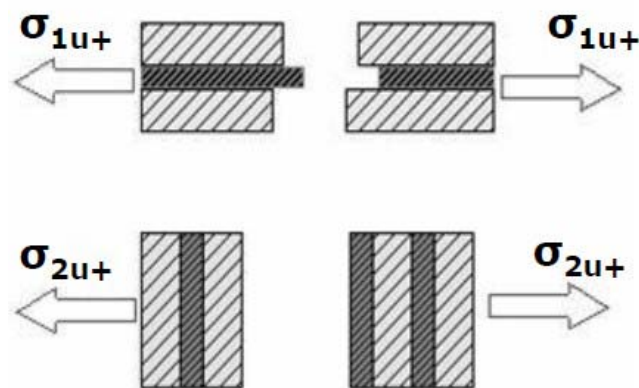


Figure 2.10 : Schématisation des contraintes a la rupture

Dans le cas de la résistance à la rupture en traction longitudinale d'un pli unidirectionnel (σ_{1c}), la contrainte longitudinale, est de la forme:

$$\sigma_{1c} = \sigma_{1f}V_f + \sigma_{1m}(1 - V_f) \quad (2.62)$$

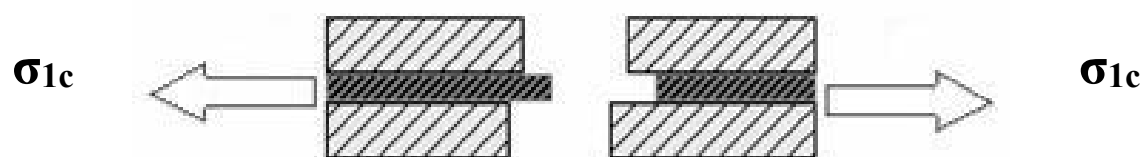


Figure 2.11 : Traction Longitudinale

σ_{1u+} : (résistance à la traction longitudinale) est la valeur maximale de σ_{1C}

Deux cas sont à considérer, selon les valeurs relatives des allongements à rupture en traction longitudinale ϵ_{fu} et ϵ_{mu}

Calcul de σ_{1u+} : la matrice se rompt avant les fibres: $e_{1fu} > e_{1mu}$

La rupture se produit à ϵ_{1fu} pour :

$$\sigma_{1u+} = \sigma_{1fu} V_f \quad (2.63)$$

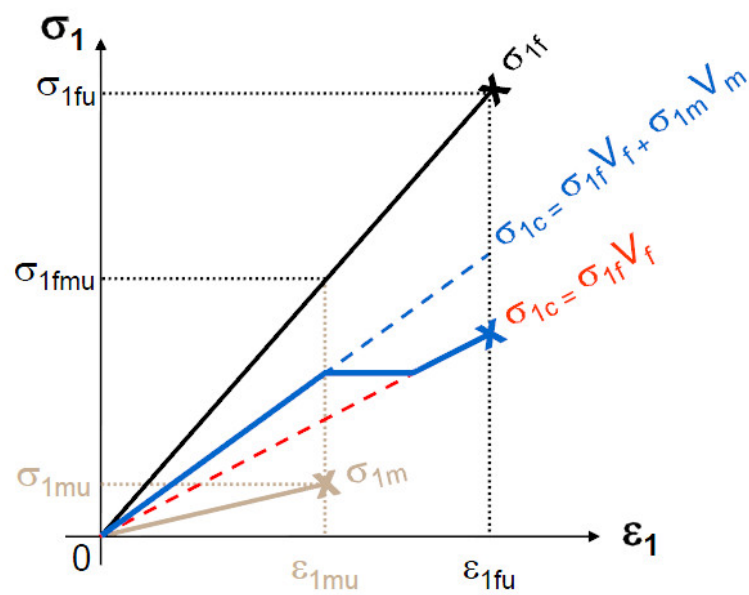


Figure 2.12 : Graphique de $\sigma(\epsilon_1)$

Si la quantité de fibres est trop faible (V_f trop petit), il y a rupture à ϵ_{1mu} pour :

$$\sigma_{1u+} = \sigma_{1fu} V_f + \sigma_{1mu} (1 - V_f) \quad (2.64)$$

Avec : $\epsilon_{1c} = \epsilon_{1f} = \epsilon_{1m}$

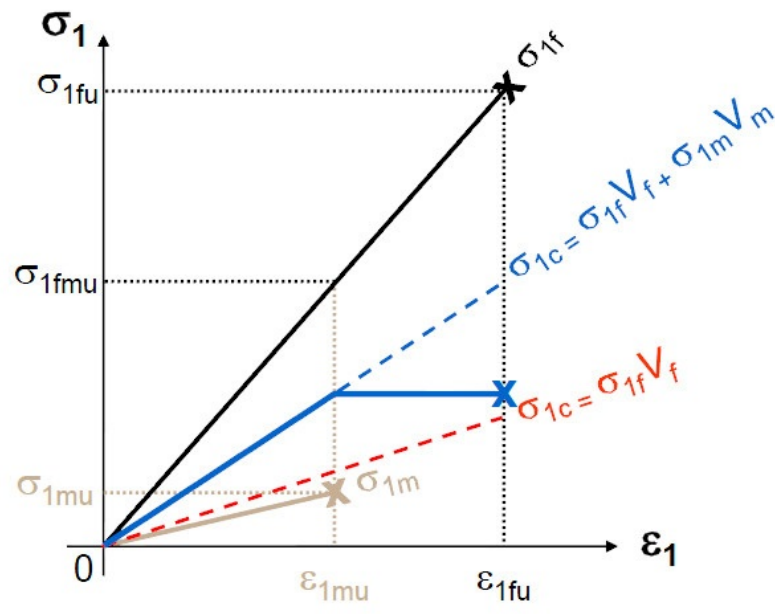


Figure 2.13 : Graphique de $\sigma(\epsilon_1)$ pour un taux de fibre faible

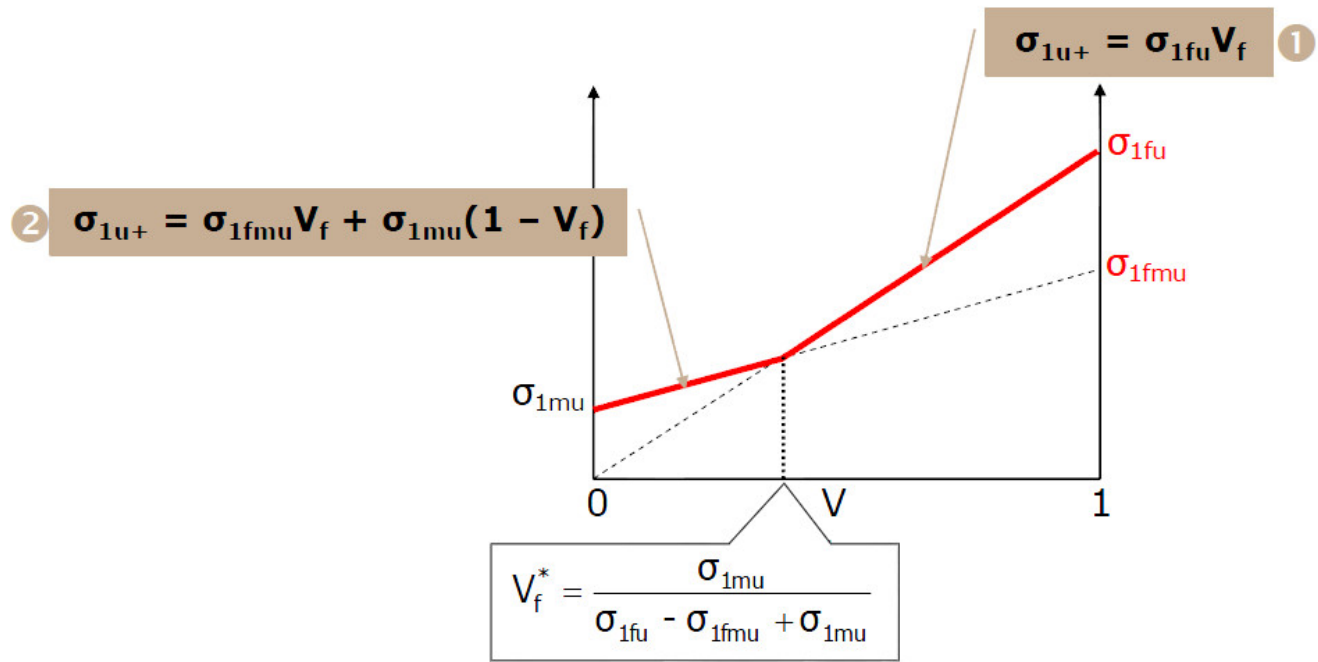


Figure 2.14 : Graphique récapitulatif des deux cas précédents

Calcul de σ_{1u+} : les fibres se rompent avant la matrice: $\epsilon_{1fu} < \epsilon_{1mu}$

Il y a rupture à ϵ_{1fu} pour :

$$\sigma_{1u+} = \sigma_{1fu} V_f + \sigma_{1mu}(1 - V_f) \quad 2.65$$

Avec : $\epsilon_{1c} = \epsilon_{1f} = \epsilon_{1m}$

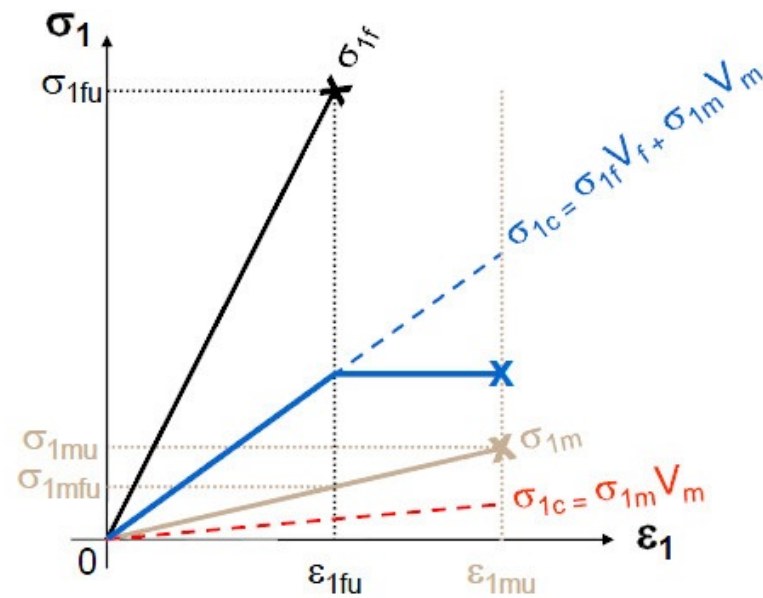


Figure 2.15 : Graphique pour des fibres se rompant avant la matrice: $\epsilon_{1fu} < \epsilon_{1mu}$

Si la quantité de fibres est trop faible (V_f trop petit), il y a rupture à ϵ_{1mu} pour :

$$\sigma_{1u+} = \sigma_{1mu}(1 - V_f) \quad 2.66$$

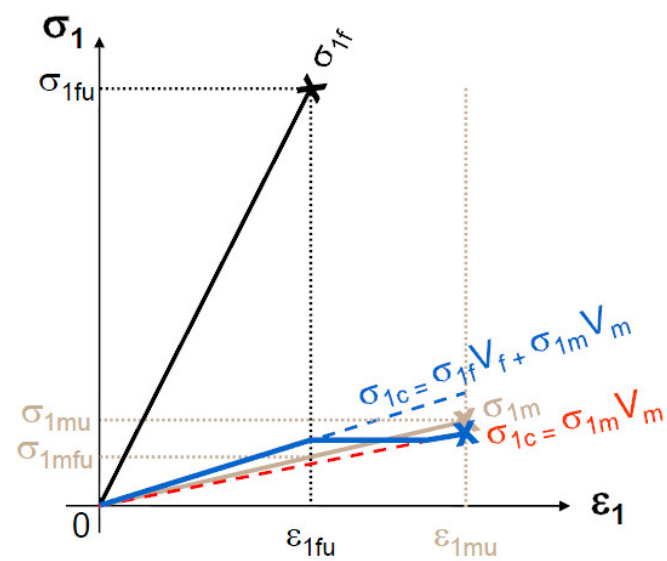


Figure 2.16 : Graphique pour des taux de fibres faible

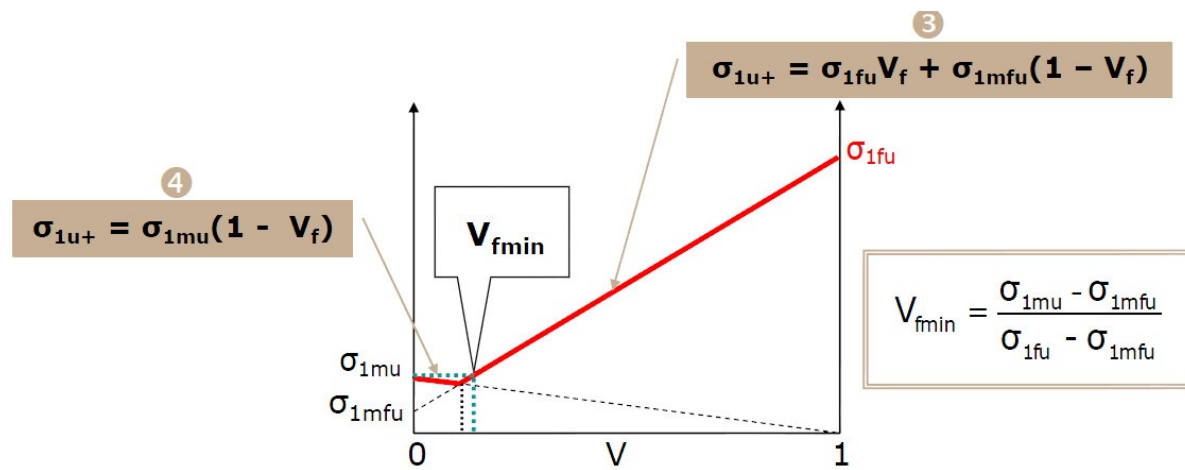


Figure 2.17 : Graphique récapitulatif des deux cas précédant

2.7 Mécanismes de Rupture et Endommagement des Matériaux

Composites

Par mécanisme de rupture, il faut comprendre tout processus mécanique produisant au sein d'un matériau une "discontinuité" locale de matière appelée fissure.

Il est usuel de parler d'initiation de la rupture et de propagation de la rupture. L'initiation de la rupture peut être considérée comme la création de microfissures à l'échelle microscopique (celle des constituants) à partir d'un défaut.

On parlera de microfissuration. La propagation de la rupture est le résultat de la création de nouvelles surfaces de rupture à l'échelle macroscopique (plusieurs fois celle des constituants), à partir des microfissures existantes.

On parlera également de macro-fissuration.

Les divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel

Dans le cas des matériaux composites, l'initiation de la rupture se produit généralement bien avant l'observation d'un changement du comportement macroscopique.

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires :

- la rupture des fibres,
- la rupture transverse de la matrice,
- la rupture longitudinale de la matrice,
- la rupture de l'interface fibre-matrice.

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

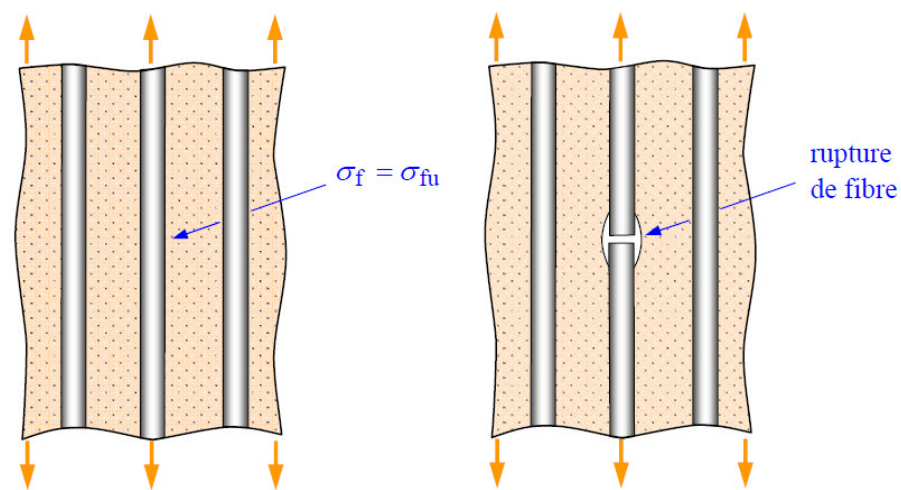


Figure 2.18 : Rupture de fibre

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction σ_f dans une fibre atteint la contrainte à la rupture σ_{fu} de la fibre (figure 5.3).

La rupture de la fibre produit une concentration de contraintes au voisinage de la rupture.

La redistribution de ces contraintes, et par conséquent le processus de rupture résultant, dépend principalement : de la contrainte à la rupture des fibres, de la capacité de la matrice à absorber l'énergie libérée, des propriétés de l'interface fibre-matrice, etc.

Les figures 2.18 montrent les différents processus de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.

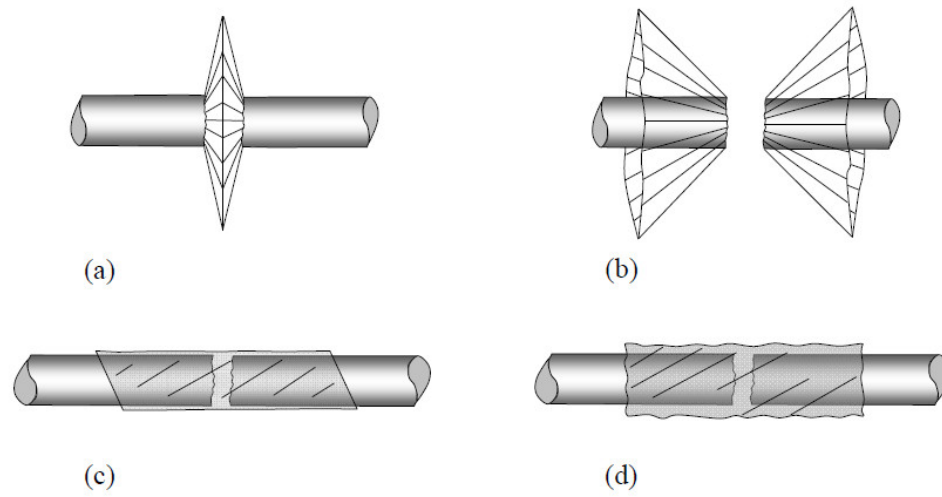


Figure 2.18 : Différents modes de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre.

(a) Rupture transverse de la matrice ; (b) Rupture en cisaillement de la matrice ; (c) Décohésion de l'interface fibre-matrice ; (d) Rupture longitudinale de la matrice.

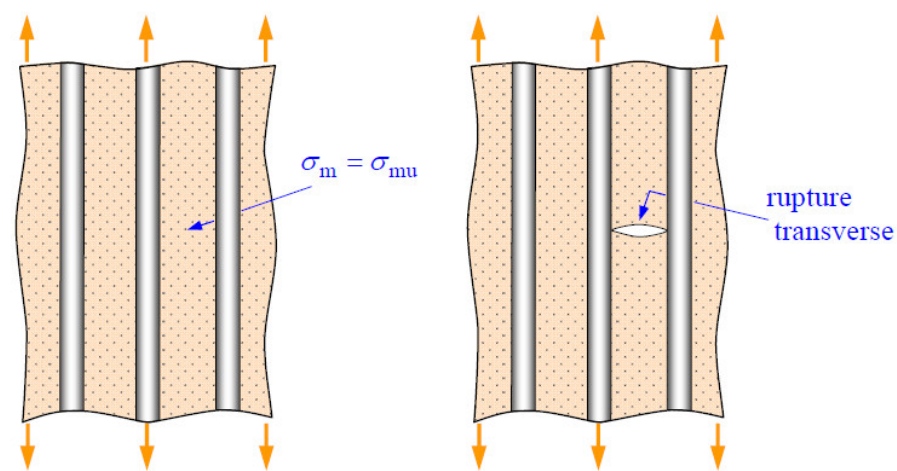


Figure 2.20 : Rupture transverse de la matrice

La fissuration de la matrice peut se produire, soit par fissuration transverse (figure 2.20) lorsque la contrainte en traction σ_m dans la matrice atteint la contrainte à la rupture σ_{mu} de la matrice, soit par fissuration longitudinale (figure 2.21) lorsque la contrainte de cisaillement τ_m dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture τ_{mu} , généralement au voisinage d'une fibre.

Ce dernier mode de rupture, appelé “splitting” par les anglo-saxons, se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieure à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice : $\tau_d > \tau_{mu}$.

Dans le cas contraire où $\tau_d < \tau_{mu}$, il se produit une rupture par décohésion de l'interface fibre-matrice (figure 2.22).

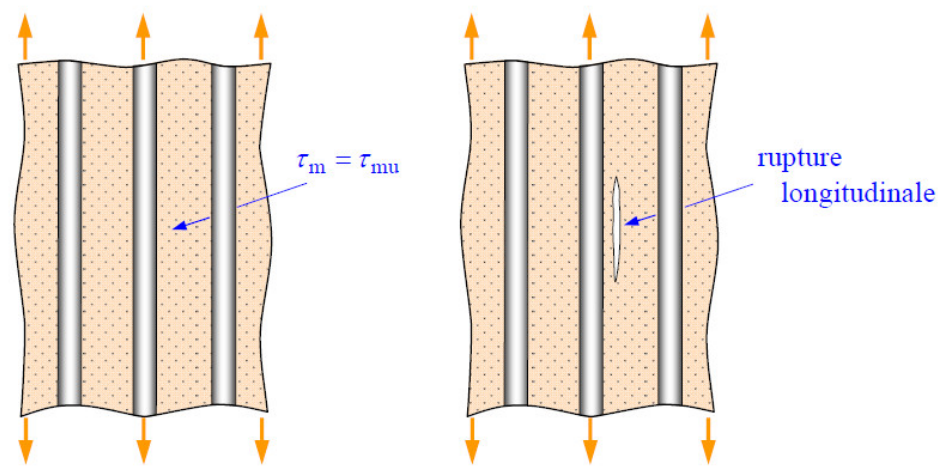


Figure 2.21 : Rupture longitudinale de la matrice

La rupture finale d'un matériau composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de ces divers mécanismes élémentaires. L'initiation, puis la propagation de la rupture dépendent des propriétés des fibres et de la matrice, de l'interface fibre-matrice, de la fraction volumique des fibres, de l'état et des conditions de sollicitations mécaniques imposées.

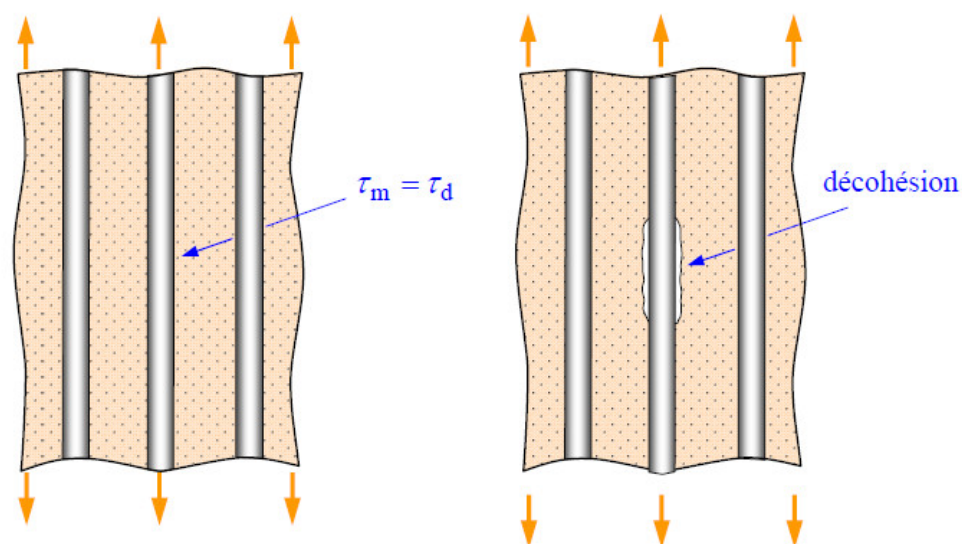


Figure 2.22 : Décohésion fibre-matrice

2.8 Conclusions

Le matériau composite unidirectionnel est la base des calculs des matériaux composite stratifiés, et ce, à travers la détermination de la matrice de rigidité et de la matrice de souplesse réduite (2.46 et 2.47), qui a leurs tour repose sur les modules de l'ingénieur qui sont :

- E_L et ν_{LT} , le module d'Young et le coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction longitudinale ;
- E_T , ν_{TL} , ν_{TT} , le module d'Young et le coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction transverse ;
- G_{LT} et G_{TT} , les modules de cisaillement mesurés respectivement dans des essais de cisaillement longitudinal et transverse.

Tout état de contraintes planes (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy}) d'une couche d'un stratifié est caractérisé par les constantes de rigidité réduites Q_{ij} , rapportées aux axes de référence (x, y, z) du stratifié.

Ces constantes s'expriment en fonction des constantes de rigidité réduites Q_{ij} , rapportées aux axes principaux de la couche considérée.

Ces expressions sont identiques pour une couche unidirectionnelle ou une couche orthotrope.

Les paramètres Q_{ij} (Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{66}) s'expriment eux-mêmes en fonction des modules de l'ingénieur E_L , E_T , ν_{LT} , G_{LT} (ou E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12}), mesurés dans les axes principaux (1, 2, 3) = (L, T, T') de la couche : pour une couche unidirectionnelle, L est la direction des fibres.

Les critères de résistance d'un pli unidirectionnel sont en fonction des proportions utiliser dans le matériau composite à savoir : le taux de fibre, le taux de matrice (V_f et V_m), et peuvent se résumer à la détermination de :

- σ_{1u+} : résistance en traction longitudinale
- σ_{1u-} : résistance en compression longitudinale
- σ_{2u+} : résistance en traction transversale
- σ_{2u-} : résistance en compression transversale

Chapitre 3 : Généralités sur la Théorie des Stratifiés

3.1 Introduction

Au chapitre 1, nous avons mis en évidence l'architecture des stratifiés qui résulte de la conception des pièces en matériaux composites :

- suivant des plaques ou coques,
- par stratification de couches successives.

Ce mode de conception justifie l'importance des plaques dans l'analyse des structures en composites.

D'une manière générale, une plaque est un solide limité par deux plans parallèles (figure 3.1), dont la dimension transverse suivant z est petite en comparaison des deux autres dimensions.

Il est alors possible de définir un plan de référence entre les deux plans extrêmes qui est pris comme plan O_{xy} [9].

L'axe \overline{Oz} correspond à la direction suivant l'épaisseur.

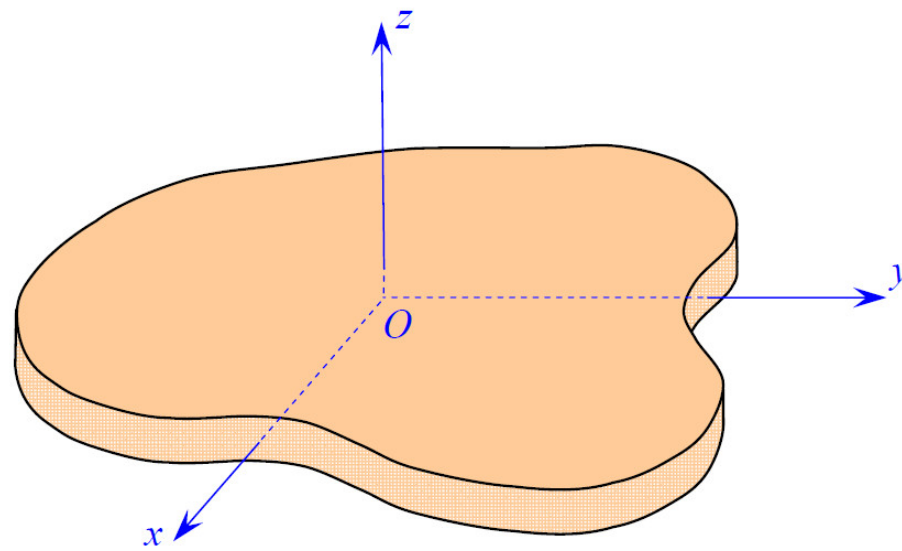


Figure 3.1 : Élément de plaque.

3.2 Notations et objectif

Les notations utilisées sont reportées sur la figure 3.2.

Le stratifié est constitué de n couches, numérotées de la face inférieure à la face supérieure.

La surface moyenne est choisie comme plan de référence (Oxy) et l'axe \vec{Oz} est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches.

Chaque couche k est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) et de sa face supérieure (h_k).

Au chapitre 1, nous avons dégagé le processus d'étude du comportement mécanique d'une structure en matériau composite.

Ce processus comporte trois étapes : l'analyse du comportement micromécanique d'une couche, la modélisation du comportement mécanique local du stratifié (analyse du comportement "macromécanique" du stratifié), puis l'analyse de la structure en composite.

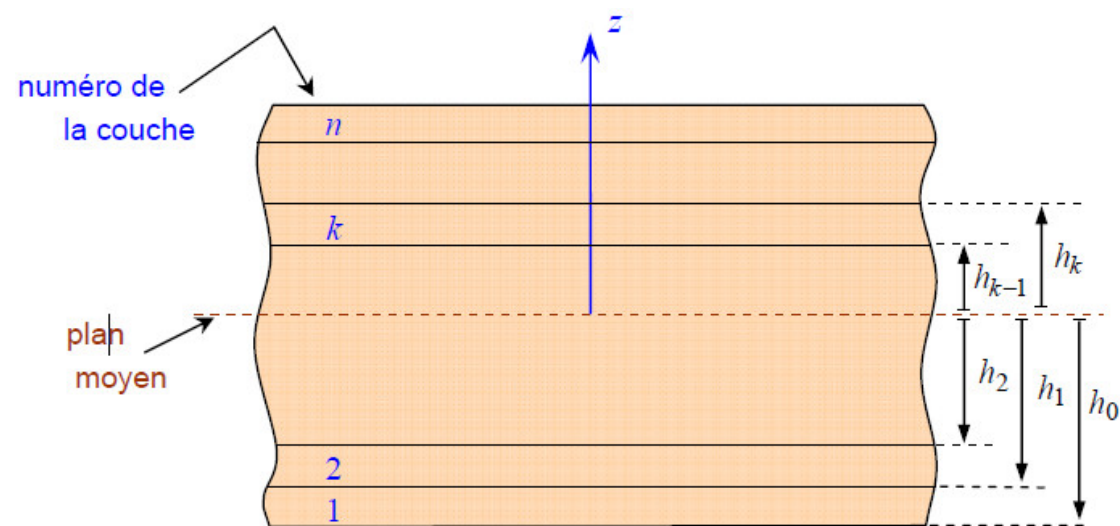


Figure 3.2 : Cotation du Stratifié

3.3 Expression du champ des déformations

Le champ des déformations en un point M est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Et la matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Le champ des déformations est la superposition :

— des déformations en membrane : s'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan ;

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

— des déformations en flexion et torsion :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M , illustré par la figure ci-dessous.

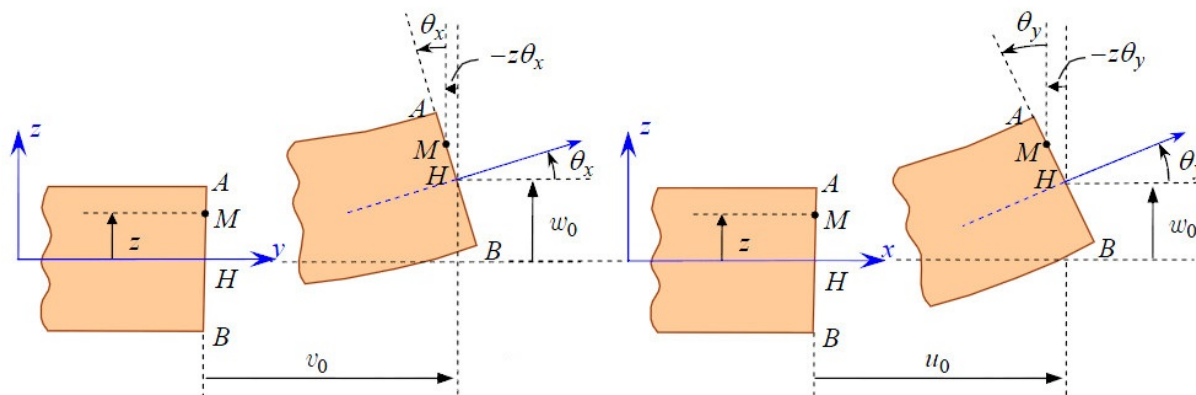


Figure 3.3 : Schéma de déformation du premier degré

Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(M) = z \boldsymbol{\kappa}(x, y) \quad (3.5)$$

en posant :

$$\boldsymbol{\kappa}(x, y) = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

La matrice $\boldsymbol{\kappa}(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion. Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(M) + \boldsymbol{\varepsilon}_f(M) \quad (3.7)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \boldsymbol{\kappa}(x, y) \quad (3.9)$$

Les déformations en membrane $\boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y)$ et courbures $\boldsymbol{\kappa}(x, y)$ ne dépendent que des coordonnées (x, y) du point H du plan moyen du stratifié.

3.4 CHAMP DES CONTRAINTES

La forme de la matrice de rigidité d'une couche de composite unidirectionnel ou tissu, rapportée aux axes (Oxyz) du stratifié, a été étudiée au chapitre 2 (2.46).

L'état des contraintes en un point M du stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations par la relation (3.6).

Si le point M appartient à la couche k du stratifié, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

où C'_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche k.

La théorie des plaques a pour objet de simplifier le problème de l'analyse du comportement mécanique d'une plaque en trois dimensions (x, y, z) en un problème à deux dimensions (x, y).

La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur de la plaque.

Cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments, exercés sur la plaque, qui seront définis au paragraphe ci-après.

- **Simplification dans le cadre de la théorie des plaques**

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux autres composantes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} .

Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés,

soit :

$$\sigma_{zz} = 0. \quad (3.10)$$

Cette hypothèse est généralement vérifiée dans la pratique.

Si ce n'est pas le cas, la théorie élémentaire des plaques ne peut plus être utilisée.

Avec l'hypothèse précédente, la relation (2.61) contrainte-déformation s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Cette relation peut être réécrite en séparant les contraintes et déformations de cisaillement transverse suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{16} & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & C'_{26} & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & C'_{36} & 0 & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & C'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

L'état des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et des déformations ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{xy} correspond à l'état de contraintes planes.

En appliquant les résultats obtenus dans ce paragraphe, les contraintes dans la couche k s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité Q_{ij} suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Les coefficients Q_{ij} de la matrice de rigidité réduite de la couche k ont été introduits en (2.50).

Par la suite, ils seront notés suivant l'une des notations ou Q'_{ij} Q^k_{ij} .

La discontinuité de la matrice de rigidité d'une couche à l'autre implique la discontinuité des contraintes au passage d'une couche à l'autre.

- **Forme du champ des contraintes**

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation (3.13).

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche k :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q'_{11}\varepsilon_{xx} + Q'_{12}\varepsilon_{yy} + Q'_{16}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= Q'_{12}\varepsilon_{xx} + Q'_{22}\varepsilon_{yy} + Q'_{26}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{xy} &= Q'_{16}\varepsilon_{xx} + Q'_{26}\varepsilon_{yy} + Q'_{66}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yz} &= 0, \\ \sigma_{xz} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Le tenseur des contraintes en M est donc de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane : σ_{xx} , σ_{yy}
et σ_{xy} .

- **Expression des contraintes**

Les relations (4.6) montrent que les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \mathbf{Q}'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Avec :

$$\mathbf{Q}'_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \quad (3.17)$$

Où Q'_k est la matrice de rigidité réduite de la couche k introduite en (3.11) et dont les termes sont exprimés en fonction des modules par les relations (3.16).

En tenant compte de (4.8), les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma}_k(M) = \boldsymbol{\sigma}_k(x, y, z) = \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y) \quad (3.19)$$

La matrice $\sigma_k(M)$ représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$.
 La matrice de rigidité réduite Q_k varie d'une couche à l'autre.

Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

3.5 RÉSULTANTES ET MOMENTS

- **Résultantes en membrane**

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad (3.20)$$

où $\sigma_k(M)$ est la matrice des contraintes en membrane σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} dans la couche

k . Soit :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (4.21)$$

Les composantes N_x , N_y , N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement, dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées symboliquement sur la figure 4.2

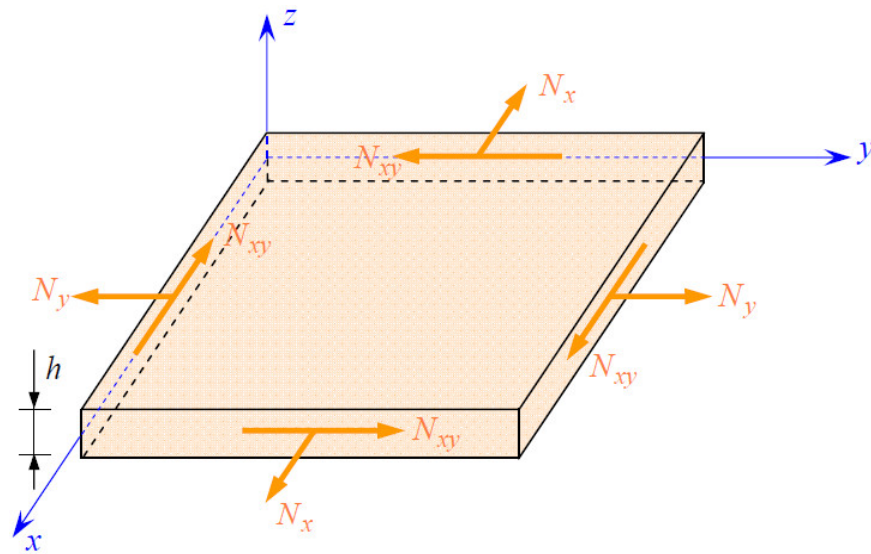


Figure 3.3 : Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (3.21) sous la forme :

- **Résultantes en cisaillement**

Les résultantes en cisaillement sont définies de la même manière par :

$$\mathbf{Q}(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (3.22)$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié.

Elles sont schématisées sur la figure 4.3

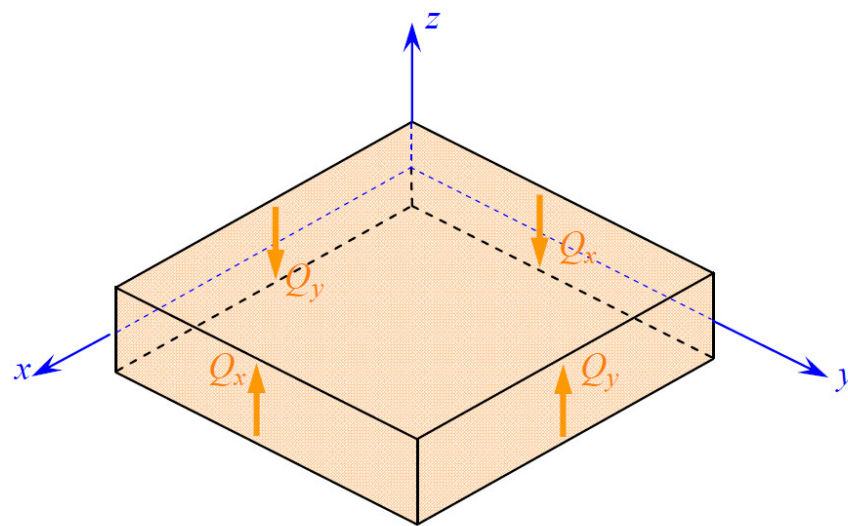


Figure 3.4 : Représentation schématique des résultantes de cisaillement

- **Moments de flexion et de torsion**

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes exercées sur un élément du stratifié.

Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (3.23)$$

Les composantes M_x et M_y sont les moments de flexion suivant les directions x et y , respectivement, et la composante M_{xy} est le moment de torsion.

Ces composantes sont schématisées sur la figure 13.9.

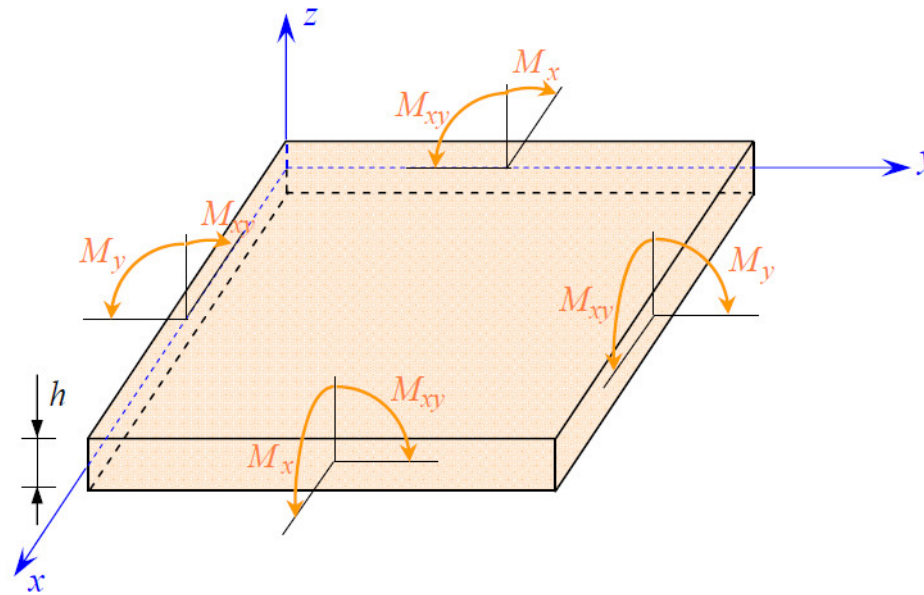


Figure 3.5 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.

- **Expression des Résultantes et moments**

Résultantes en membrane

L'expression (4.23) associée à la relation (4.18) ou (4.19) conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés.

Nous obtenons

$$\mathbf{N}(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y)] dz \quad (3.24)$$

Soit :

$$\mathbf{N}(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[\mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \quad (3.25)$$

ou en intégrant dans l'épaisseur :

$$\mathbf{N}(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\kappa}(x, y) \quad (3.26)$$

L'expression précédente de la matrice des résultantes peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}(x, y) \quad (3.27)$$

en introduisant les matrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \mathbf{Q}'_k, \\ \mathbf{A} &= [A_{ij}] \quad \text{avec} \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k \end{aligned} \quad (3.28)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k, \\ \mathbf{B} &= [B_{ij}] \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k \end{aligned} \quad (3.29)$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Ces équations montrent que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane $\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$ (comme dans le cas de plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$).

Moments de flexion et de torsion

Le champ des moments s'explique en introduisant l'expression (3.25) des contraintes dans l'expression (3.23). Soit :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z^2 \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y) \right] dz \quad (3.31)$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\kappa}(x, y) \quad (3.32)$$

La matrice des moments de flexion s'écrit donc suivant :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}(x, y) \quad (3.33)$$

en introduisant la nouvelle matrice :

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \mathbf{Q}'_k, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{D} = [D_{ij}] \quad \text{avec} \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Les moments de flexion et torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonctions des déformations en membrane.

3.6 Conclusion

Le comportement mécanique d'un matériau stratifié dépend des matrices A_{ij} B_{ij} et D_{ij} (3.28, 3.29, 3.34, 3.35), qui dépendent à leurs tours des matrices de rigidité réduites des différents plis.

Ainsi, une force normale, par exemple, n'engendre pas seulement des déformations normales, mais aussi un Cisaillement (γ_{xy}), une flexion (κ_{xx} et κ_{yy}) et une torsion (κ_{xy}) :

$$[N_{xx} = A_{11} \varepsilon_{xx}^0 + A_{22} \varepsilon_{yy}^0 + A_{16} \gamma_{xy}^0 + B_{11} \kappa_{xx} + B_{12} \kappa_{yy} + B_{16} \kappa_{xy}]$$

Pour pouvoir éliminer les effets secondaires (parasites) d'une force, il faut annuler leurs coefficients (A_{11} , A_{22} , A_{16} , B_{11} , B_{12} , B_{16}).

Il est important à ce stade d'étude de noter, que la cotation du stratifié est importante car les facteurs h_k et h_{k-1} qui en découle, intervienne dans les calculs de ces dites matrices.

Chapitre 4 : ÉQUATION DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE D'UN STRATIFIÉ

4.1 Équation constitutive

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures.

Elle s'obtient en regroupant les expressions (3.30) et (3.35) suivant une seule écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Cette équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée suivant:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Les termes des matrices introduites A, B et D sont donnés par les expressions (3.28) et (3.33).

Ils peuvent être également exprimés, en introduisant l'épaisseur e_k et la cote z_k du centre de la couche k, sous la forme :

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] \quad \text{avec} \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B} = [B_{ij}] \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k \quad (4.4)$$

$$\mathbf{D} = [D_{ij}] \quad \text{avec} \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \quad (4.5)$$

Les coefficients A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} de l'équation constitutive (4.1) d'un stratifié s'expriment donc à partir des constantes de rigidité réduites des couches, obtenues, pour chaque couche, en fonction des modules de l'ingénieur.

4.2 Matrice de rigidité

La matrice intervenant dans l'expression (4.1) est la matrice de rigidité global du stratifié, décrivant le comportement élastique macroscopique du stratifié au point

$$M_0(x, y) = M(x, y, 0).$$

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion et B la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes.

Le couplage est nul ($B = 0$), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique équilibré.

La symétrie implique une symétrie des propriétés des couches, de leurs cotes et de leurs orientations (le nombre de couche à $+\Theta$ = le nombre le couche à $-\Theta$).

Divers couplages peuvent être observés et mis en évidence.

Le couplage traction-cisaillement provient des termes A_{16} et A_{26} .

Le couplage membrane-flexion résulte des termes B_{11} , B_{12} et B_{22} , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes B_{16} et B_{26} . Enfin, le couplage flexion-torsion résulte des coefficients D_{16} et D_{26} .

4.3 Détermination des déformations et des contraintes

L'équation constitutive (4.1) exprime les résultantes en membrane N_x , N_y , N_{xy} et les moments de flexion-torsion M_x , M_y , M_{xy} en fonction des déformations en membrane ε_{xx}^0 , ε_{yy}^0 , γ_{xy}^0 et des courbures κ_x , κ_y , κ_{xy} .

Les problèmes de conception des structures en matériaux composites nécessite de résoudre le problème inverse : connaissant les résultantes en membrane et les moments, trouver les déformations en membrane et les courbures, puis les contraintes.

Déformations en membrane et courbures

L'expression (4.2) peut être écrite en séparant la matrice \mathbf{N} des résultantes en membrane et la matrice \mathbf{M}_f des moments :

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}. \quad (4.7)$$

De la première relation, nous pouvons extraire les déformations en membrane, soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}, \quad (4.8)$$

et en reportant dans (4.7), la matrice des moments s'écrit :

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + (\mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \boldsymbol{\kappa}. \quad (4.9)$$

Les expressions (4.8) et (4.9) peuvent être réécrites sous une forme semi-inversée :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}^* \mathbf{N} + \mathbf{B}^* \boldsymbol{\kappa}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{C}^* \mathbf{N} + \mathbf{D}^* \boldsymbol{\kappa}. \quad (4.11)$$

4.4 Critère de résistance des matériaux composites

Les critères de rupture ont pour objectifs de permettre au concepteur d'avoir une évaluation de la résistance mécanique des stratifiés.

D'une manière générale, la résistance mécanique d'un matériau correspond à une dégradation irréversible :

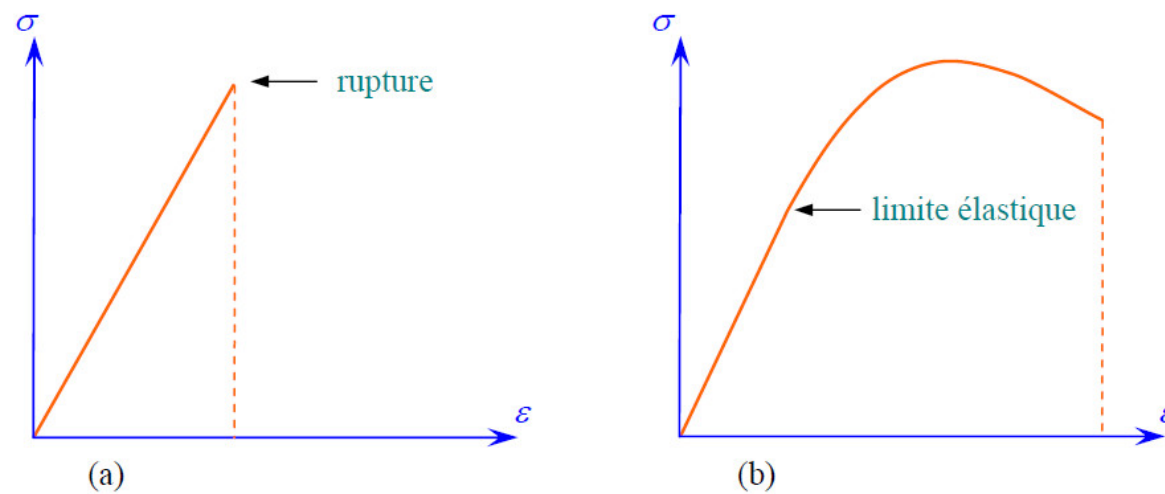
- Soit à la rupture réelle du matériau (figure 4.1a),
- soit à la limite du domaine élastique (figure 4.1b).

Dans le cas des matériaux composites, la limite du domaine élastique est généralement liée à l'apparition de la microfissuration : micro-ruptures dans la matrice, ruptures de fibres, décohésion fibres-matrice, etc.

Une fois initiées, ces microfissures restent généralement localisées, ne modifiant que très progressivement la rigidité du matériau.

Les critères de rupture sont établis dans le cas d'une couche d'un stratifié et peuvent être classés suivant :

- des critères en contraintes maximales,
- des critères en déformations maximales,
- des critères interactifs, souvent appelés critères énergétiques.



Critères de la contrainte maximale

Critères dans les axes principaux

Les critères en contraintes maximales font intervenir :

- X_t, X_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal respectivement en traction et en compression,
- Y_t, Y_c : les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal respectivement en traction et en compression,
- S : la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

L'axe longitudinal et l'axe transversal sont pris suivant les axes des matériaux de la couche (figure 5.2).

Les grandeurs à la rupture sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction, compression ou cisaillement.

Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes (σ_L , σ_T , σ_{LT}) dans les axes des matériaux, les critères en contraintes maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante.

Les critères de rupture s'écrivent ainsi sous la forme :

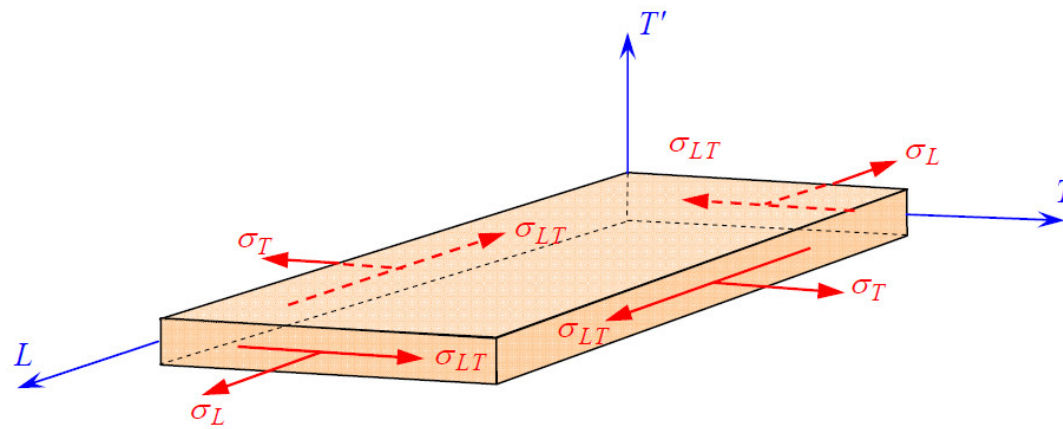


Figure 4.2 : Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche

$$\left. \begin{aligned} -X_c < \sigma_L < X_t, \\ -Y_c < \sigma_T < Y_t, \\ -S < \sigma_{LT} < S. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Si les six inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint : la rupture de la couche ne se produit pas.

Si l'une quelconque des inéquations n'est plus vérifiée, l'état limite est atteint : la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.

Critères de rupture en-dehors des axes des matériaux

Dans le cas où l'état des contraintes est exprimé dans des axes de référence (x , y , z) (figure 4.3), il est nécessaire de se ramener aux axes des matériaux par une rotation d'angle θ .

Les contraintes exprimées dans les axes des matériaux s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_{LT} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

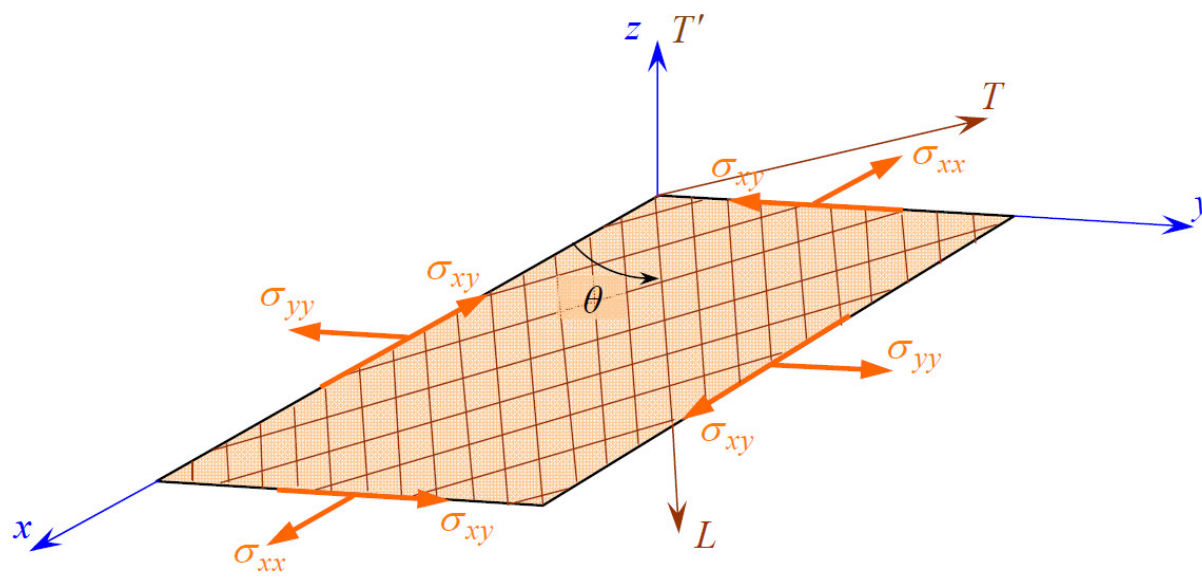


Figure 4.3 : Couche rapportée à des axes de référence quelconques

Et les critères (4.1) en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\left. \begin{aligned}
 -X_c < \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < X_t, \\
 -Y_c < \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < Y_t, \\
 -S < (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) < S.
 \end{aligned} \right\} (4.13)$$

Critères en déformations maximales

Critère dans les axes des matériaux

Les critères en déformations maximales sont transposés des critères en contraintes maximales, les déformations étant bornées, au lieu des contraintes.

Les critères en déformations font intervenir :

- X_{et} (X_{ec}) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe longitudinal,
- Y_{et} (Y_{ec}) : la déformation à la rupture en traction (ou compression) suivant l'axe transversal,
- S_{ϵ} : la déformation à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

La résistance mécanique est alors considérée comme étant atteinte, lorsque l'une des déformations principales atteint la déformation à la rupture correspondante.

Les critères en déformations maximales s'écrivent donc sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} -X_{\varepsilon c} < \varepsilon_L < X_{\varepsilon t}, \\ -Y_{\varepsilon c} < \varepsilon_T < Y_{\varepsilon t}, \\ -S_{\varepsilon} < \gamma_{LT} < S_{\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Critères interactifs

Les critères en contraintes maximales et en déformations maximales ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des résultats expérimentaux.

D'autre part, ces critères excluent l'existence d'interactions entre les contraintes ou déformations dans les axes des matériaux : les mécanismes de rupture longitudinale, transversale ou en cisaillement sont supposés se produire indépendamment.

Des critères interactifs ont alors été recherchés en étendant aux matériaux orthotropes le critère de Von Mises, utilisé pour les matériaux isotropes.

Le critère de Von Mises est relié à l'énergie de déformation emmagasinée par unité de volume du matériau déformé.

C'est la raison pour laquelle ces critères interactifs sont parfois appelés critères énergétiques. Toutefois, dans le cas de matériaux orthotropes, ces critères ne sont plus reliés exclusivement à l'énergie de déformation.

Critère de Hill

Un des premiers critères interactifs de rupture appliqués aux matériaux anisotropes a été introduit par R. Hill.

Ce critère peut être formulé en disant que l'état limite de contraintes d'un matériau anisotrope n'est pas atteint tant que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} F(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + G(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 \\ + 2L\sigma_{TT'}^2 + 2M\sigma_{LT'}^2 + 2N\sigma_{LT}^2 < 1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

La rupture du matériau se produit donc lorsque l'égalité est vérifiée, soit :

$$\begin{aligned} F(\sigma_T - \sigma_{T'})^2 + G(\sigma_{T'} - \sigma_L)^2 + H(\sigma_L - \sigma_T)^2 \\ + 2L\sigma_{TT'}^2 + 2M\sigma_{LT'}^2 + 2N\sigma_{LT}^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cette égalité constitue le critère de Hill, rapporté aux axes principaux (L, T, T') du matériau

Les paramètres F, G, H, L, M et N sont des paramètres caractéristiques du matériau considéré, qui sont reliés aux contraintes à la rupture X, Y et S du matériau.

Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan (L, T) de la couche de matériau composite : $\delta_{T'} = \delta_{LT'} = \delta_{TT'} = 0$, le critère de Hill se simplifie suivant :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_L\sigma_T + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 = 1 \quad (4.17)$$

Critère de Tsai-Hill

Le critère de rupture donné par la formule (5.17) en contraintes planes a été simplifié par V.D. Azzi et S.W. Tsai [**] dans le cas de matériaux composites unidirectionnels.

En effet, dans ce cas : $Z = Y$, et le critère (6.7) s'écrit (5.18) :

$$\left(\frac{\sigma_L}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_L\sigma_T}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{LT}}{S_{LT}}\right)^2 = 1 \quad (4.18)$$

Ce critère est généralement connu sous le nom de critère de Tsai-Hill.

Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes des matériaux, le critère de Tsai-Hill s'écrit (4.19):

$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left(\frac{1}{S_{LT}^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2} \quad (4.19)$$

Critère de Tsai-Wu

Les critères précédents suffisent généralement pour décrire les divers résultats expérimentaux observés.

Toutefois, une des façons d'améliorer la corrélation entre résultats expérimentaux et théoriques est d'accroître le nombre de paramètres des équations théoriques.

Ce fait, associé à la possibilité de représenter les critères de rupture sous forme tensorielle, a conduit S.W. Tsai et E.M. Wu [20] à admettre que la rupture d'un matériau anisotrope est atteinte lorsque l'égalité suivante est vérifiée :

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.20)$$

Ou des déformations :

$$G_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j + G_i \varepsilon_i = 1 \quad (4.21)$$

Dans le cas des contraintes planes, le critère s'écrit sous forme développée :

$$F_{11}(\sigma_1)^2 + F_{22}(\sigma_2)^2 + F_{66}(\sigma_6)^2 + 2F_{12}(\sigma_1\sigma_2) + 2F_{16}(\sigma_1\sigma_6) + 2F_{26}(\sigma_2\sigma_6) + F_1(\sigma_1) + F_2(\sigma_2) + F_6(\sigma_6) = 1$$

Les paramètres F_i et F_{ij} peuvent être exprimés à l'aide des contraintes à la rupture, mesurées dans divers essais, donc nous exposons les résultats (4.22) :

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, & F_2 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, & F_6 &= \frac{1}{S_{LT}^+} - \frac{1}{S_{LT}^-}, \\ F_{11} &= \frac{1}{X_t X_c}, & F_{22} &= \frac{1}{Y_t Y_c}, & F_{66} &= \frac{1}{S_{LT}^+ S_{LT}^-}. \end{aligned} \right\} (4.22)$$

$$2F_{xy} = -\sqrt{F_{xx} F_{yy}} = \frac{-1}{\sqrt{XX'YY''}}$$

Chapitre 5 : Influence de l'Empilement des Couches

5.1 Stratifiés symétriques

Un stratifié est symétrique si le plan moyen est plan de symétrie.

Deux couches symétriques ont :

- la même matrice de rigidité réduite $[Q_{ij}]^k$,
- la même épaisseur e_k ,
- des cotes opposées z_k et $-z_k$.

Il en résulte que les coefficients B_{ij} de la matrice de rigidité du stratifié sont nuls [11].

L'équation constitutive est de la forme générale :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion dans le cas des stratifiés symétriques.

Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane/flexion-torsion.

En outre, les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement due aux déformations (contractions) induites lors du refroidissement consécutif au processus de mise en oeuvre des matériaux.

Les stratifiés symétriques sont donc largement utilisés, à moins que des conditions spécifiques nécessitent un stratifié non symétrique.

Par exemple, un stratifié utilisé comme bouclier thermique, et exposé à une source thermique sur une seule de ses faces, sera conçu suivant une structure non symétrique.

Stratifiés symétriques dont les axes des matériaux de toutes les couches coïncident avec les axes du stratifié

La matrice de rigidité réduite de chaque couche est dans ce cas de la forme :

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix}$$

où les coefficients de rigidité réduite s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur de chaque couche suivant les relations :

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \frac{E_L^k}{1 - \nu_{LT}^k \frac{E_T^k}{E_L^k}}, & Q_{22}^k &= \frac{E_T^k}{1 - \nu_{LT}^k \frac{E_T^k}{E_L^k}} = \frac{E_T^k}{E_L^k} Q_{11}^k, \\ Q_{12}^k &= \frac{\nu_{LT}^k E_T^k}{1 - \nu_{LT}^k \frac{E_T^k}{E_L^k}} = \nu_{LT}^k Q_{22}^k, & Q_{66}^k &= G_{LT}^k. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Les coefficients de rigidité du stratifié s'expriment donc suivant :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{k=1}^n Q_{11}^k e_k, & D_{11} &= \sum_{k=1}^n Q_{11}^k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\ A_{12} &= \sum_{k=1}^n Q_{12}^k e_k, & D_{12} &= \sum_{k=1}^n Q_{12}^k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\ A_{22} &= \sum_{k=1}^n Q_{22}^k e_k, & B_{ij} &= 0, & D_{22} &= \sum_{k=1}^n Q_{22}^k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right), \\ A_{16} &= A_{26} = 0, & D_{16} &= D_{26} = 0, \\ A_{66} &= \sum_{k=1}^n Q_{66}^k e_k, & D_{66} &= \sum_{k=1}^n Q_{66}^k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

D'où l'équation constitutive du stratifié :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Nous notons outre l'absence de couplage membrane-flexion/torsion, il y a également absences de couplages en traction-cisaillement et en torsion-flexion.

5.2 Stratifiés antisymétriques

Les stratifiés symétriques sont utilisés afin d'éliminer le couplage entre membrane et flexion.

Par contre, certaines applications nécessitent l'utilisation de stratifiés non symétriques. Par exemple, le couplage membrane-flexion est nécessaire dans la conception de turbine à ailettes ayant un profil gauche.

Également, dans le cas où une meilleure rigidité en cisaillement est recherchée, il est nécessaire d'avoir des couches possédant différentes orientations.

Un stratifié antisymétrique est constitué de couches en nombre pair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique, et celle des orientations des axes des matériaux est antisymétrique par rapport au plan moyen [11].

Deux couches de cotes symétriques ont donc :

- des cotes opposées z_k et $-z_k$,
- la même épaisseur e_k ,
- des orientations Θ et $-\Theta$ par rapport aux axes de référence du stratifié.

La matrice de rigidité réduite de la couche d'orientation Θ est :

$$\mathbf{Q}'_{+\theta} = \begin{bmatrix} Q'_{11+\theta} & Q'_{12+\theta} & Q'_{16+\theta} \\ Q'_{12+\theta} & Q'_{22+\theta} & Q'_{26+\theta} \\ Q'_{16+\theta} & Q'_{26+\theta} & Q'_{66+\theta} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Celle de la couche d'orientation $-\theta$:

$$\mathbf{Q}'_{-\theta} = \begin{bmatrix} Q'_{11-\theta} & Q'_{12-\theta} & Q'_{16-\theta} \\ Q'_{12-\theta} & Q'_{22-\theta} & Q'_{26-\theta} \\ Q'_{16-\theta} & Q'_{26-\theta} & Q'_{66-\theta} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Avec :

$$\begin{aligned} Q'_{16-\theta} &= -Q'_{16+\theta}, & Q'_{26-\theta} &= -Q'_{26+\theta} \\ Q'_{ij-\theta} &= Q'_{ij+\theta} & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66. \end{aligned} \quad (5.7)$$

D'où les coefficients de rigidité d'un stratifié antisymétrique constitué de $n = 2p$ couches :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^p Q'_{ij}{}^k e_k & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\ A_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 16, 26, \\ B_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\ B_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^p Q'_{ij}{}^k e_k z_k & \text{si } ij &= 16, 26, \\ D_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^p Q'_{ij}{}^k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) & \text{si } ij &= 11, 12, 22, 66, \\ D_{ij} &= 0 & \text{si } ij &= 16, 26. \end{aligned} \quad (5.8)$$

L'équation constitutive d'un stratifié antisymétrique s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

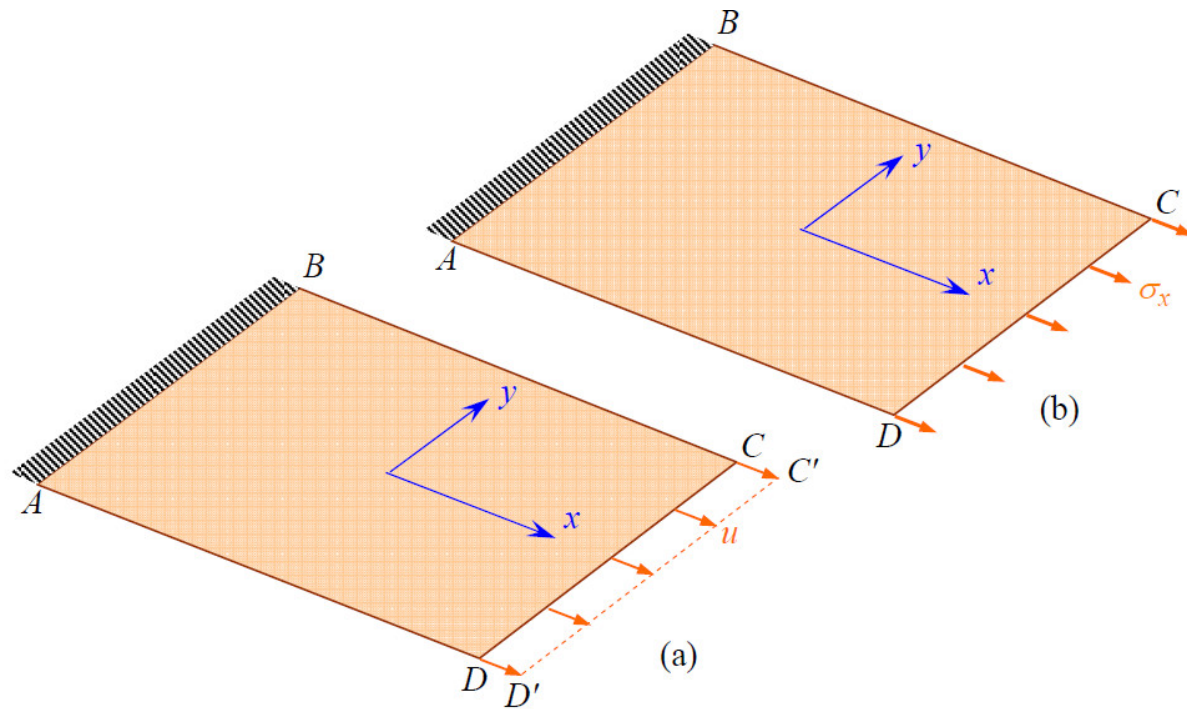


Figure 5.1 : Plaque soumise à une traction suivant la direction x : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées

L'équation constitutive (5.9) montre l'existence d'un couplage membrane-torsion, résultant des termes B16 et B26.

L'effet de ce couplage peut être illustré en imposant à une plaque constituée d'un stratifié antisymétrique et encastree sur le côté AB, d'une part un déplacement $(u, 0, 0)$

du côté CD (figure 5.1a) et d'autre part une contrainte $(\sigma_x, 0, 0)$ sur la face CD (figure 5.1b).

Les figures 5.2a /b) montrent les déformées obtenues dans les deux modes de sollicitations.

Les déformations sont amplifiées de manière à montrer les effets du couplage.

Ces figures mettent en évidence la déformation en torsion qui se superpose à la déformation en traction de la plaque.

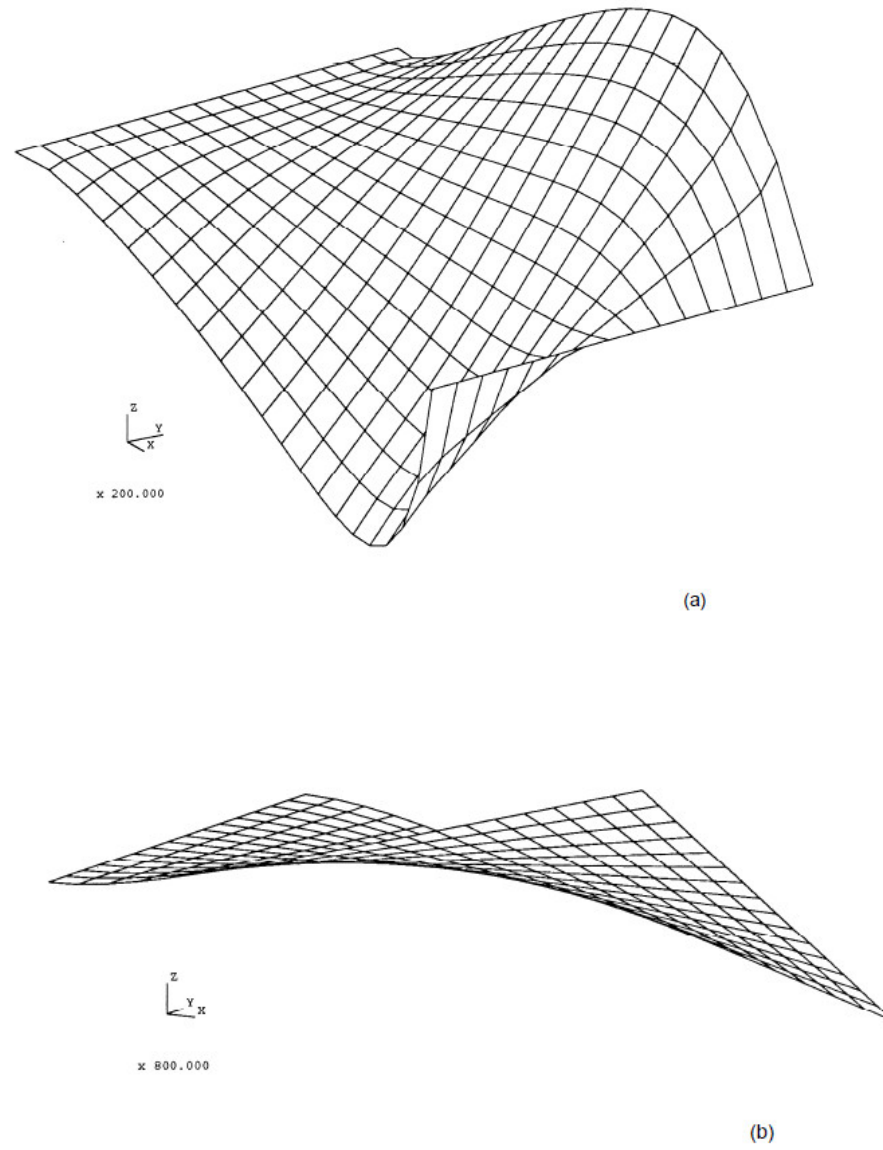


Figure 5.2 : Couplage traction-torsion dans le cas d'un stratifié antisymétrique : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

5.3 Stratifiés croisés

Un stratifié croisé est constitué de couches dont les directions principales sont orientées alternativement à 0° et 90° par rapport aux directions de référence du stratifié [11] La matrice de rigidité réduite des couches à 0° est :

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

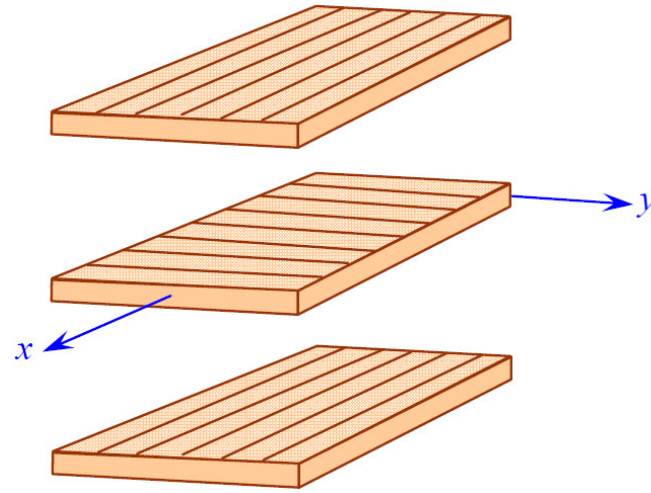


Figure 5.3 : Stratifié croisé

Les coefficients de rigidité des couches à 90° sont :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{22}, & Q'_{12} &= Q_{12}, & Q'_{16} &= 0, \\ Q'_{22} &= Q_{11}, & Q'_{26} &= 0, & Q'_{66} &= Q_{66} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Et la matrice de rigidité des couches à 90° s'exprime suivant :

$$\mathbf{Q}_{90} = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Compte tenu de ces résultats, l'équation constitutive d'un stratifié croisé est donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Cas particuliers pratiques

Un cas particulier mais de grande importance pratique est le cas où les couches à 0° ont même épaisseur, les couches à 90° ayant également la même épaisseur, mais pas nécessairement une épaisseur identique à celle des couches à 0° .

Tableau 5.1 : Expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé.

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}e_0 + Q_{22}e_{90}, & A_{12} &= Q_{12}e, & A_{16} &= 0, \\ A_{22} &= Q_{22}e_0 + Q_{11}e_{90}, & A_{26} &= 0, & A_{66} &= Q_{66}e, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} e_0 &= \text{épaisseur totale des couches à } 0^\circ, \\ e_{90} &= \text{épaisseur totale des couches à } 90^\circ, \\ e &= \text{épaisseur du stratifié} \quad e = e_0 + e_{90}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= Q_{11}b_0 + Q_{22}b_{90}, & B_{12} &= Q_{12}b, & B_{16} &= 0, \\ B_{22} &= Q_{22}b_0 + Q_{11}b_{90}, & B_{26} &= 0, & B_{66} &= Q_{66}b, \end{aligned}$$

avec

$$b_0 = \sum_{\text{couches à } 0^\circ} e_p z_p, \quad b_{90} = \sum_{\text{couches à } 90^\circ} e_q z_q,$$

$$b = \sum_{k=1}^n e_k z_k = b_0 + b_{90}.$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= Q_{11}d_0 + Q_{22}d_{90}, & D_{12} &= Q_{12}d, & D_{16} &= 0, \\ D_{22} &= Q_{22}d_0 + Q_{11}d_{90}, & D_{26} &= 0, & D_{66} &= Q_{66}d, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d_0 &= \sum_{\text{couches à } 0^\circ} \left(\frac{e_p^3}{12} + e_p z_p^2 \right), \\ d_{90} &= \sum_{\text{couches à } 90^\circ} \left(\frac{e_q^3}{12} + e_q z_q^2 \right), \\ d &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{e_k^3}{12} + e_k z_k^2 \right) = d_0 + d_{90}. \end{aligned}$$

Il est toujours possible de choisir l'axe x de référence de la plaque de manière qu'il coïncide avec la direction 0° de la couche inférieure du stratifié.

Il en résulte que les couches orientées à 0° coïncident avec les couches impaires et les couches orientées à 90° avec les couches paires. Si le nombre total de couches est impair (figure 5.4a), le stratifié est symétrique.

Si le nombre total de couches est pair (figure 7.4b), le stratifié est dit antisymétrique.

Un stratifié croisé est caractérisé par le nombre total n de couches à 0° et à 90° , ainsi que par le rapport entre l'épaisseur totale des couches orientées à 0° et l'épaisseur totale des couches orientées à 90° ;

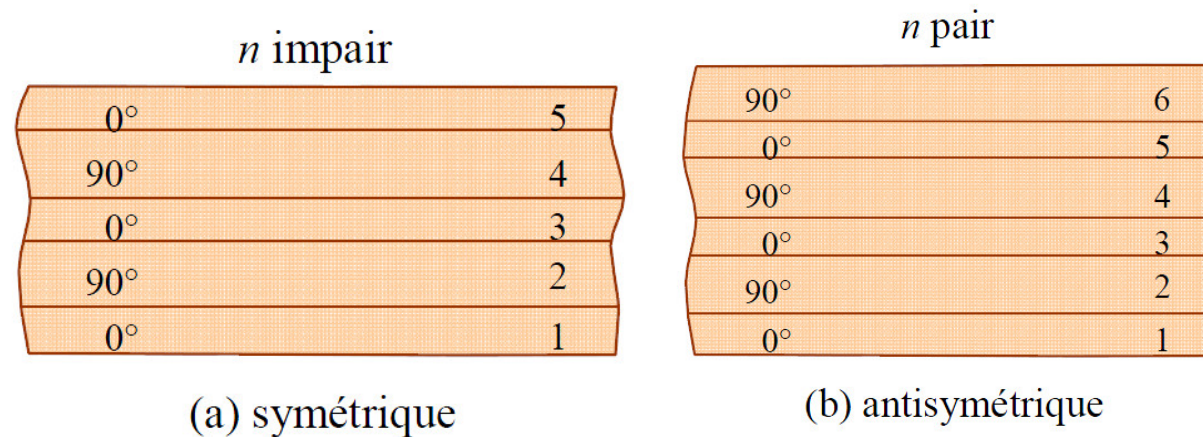


Figure 5.4 : Stratifiés croisés symétrique et antisymétrique

, ainsi que par le rapport entre l'épaisseur totale des couches orientées à 0° et l'épaisseur totale des couches orientées à 90° :

$$R_e = \frac{e_0}{e_{90}}$$

Dans le cas où les épaisseurs des couches sont identiques : $R_e = 1$, les coefficients de rigidité peuvent alors être exprimés en fonction de n , R_e et du rapport entre les modules :

$$R_Q = \frac{Q_{22}}{Q_{11}} = \frac{E_T}{E_L}$$

5.4 Stratifiés croisés symétriques

Dans le cas d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches), les termes B_{ij} sont nuls conformément aux propriétés des stratifiés symétriques [11].

L'équation constitutive des stratifiés croisés symétriques combine les relations (5.1) et (5.13). Soit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

À l'absence de couplage membrane-flexion/torsion des stratifiés symétriques s'ajoute l'absence des couplages traction-cisaillement et flexion-torsion.

Tableau 5.2 : Expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches).

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{1}{1+R_e} (R_e + R_Q) Q_{11} e, & A_{12} &= Q_{12} e, & A_{16} &= 0, \\
 A_{22} &= \frac{1}{1+R_e} (1 + R_e R_Q) Q_{11} e = \frac{1 + R_e R_Q}{R_e + R_Q} A_{11}, \\
 A_{26} &= 0, & A_{66} &= Q_{66} e. \\
 B_{ij} &= 0, & i, j &= 1, 2, 6. \\
 D_{11} &= [(R_Q - 1)\alpha + 1] \frac{Q_{11} e^3}{12} = [(R_Q - 1)\alpha + 1] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
 D_{12} &= \frac{Q_{12} e^3}{12}, & D_{16} &= 0, \\
 D_{22} &= [(1 - R_Q)\alpha + R_Q] \frac{Q_{11} e^3}{12} = [(1 - R_Q)\alpha + R_Q] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
 D_{26} &= 0, & D_{66} &= \frac{Q_{66} e^3}{12},
 \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{(1 + R_e)^3} + \frac{R_e (n - 3) [R_e (n - 1) + 2(n + 1)]}{(n^2 - 1)(1 + R_e)^3}.$$

Dans le cas où les couches à 0° et 90° ont même épaisseur, nous avons :

$$A_{22} = A_{11}, D_{22} = D_{11}.$$

5.4 Stratifiés croisés antisymétriques

Dans le cas d'un stratifié croisé antisymétrique (nombre pair de couches) [11], les coefficients de rigidité exprimés en fonction de n, de R_e et R_Q sont reportés dans le tableau 5.3 .

Les résultats de ce tableau montrent que l'équation constitutive est alors de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

L'équation constitutive (5.15) d'un stratifié croisé antisymétrique montre qu'il existe uniquement un couplage traction-flexion.

L'effet de ce couplage peut être illustré en imposant à une plaque constituée d'un stratifié croisé antisymétrique les deux types de conditions déjà considérées (figure 5.5).

Les figures 5.1 montrent les déformées obtenues dans les deux cas. À la déformation en traction de la plaque se superpose une déformation en flexion.

Il est également important de noter que le coefficient de couplage B_{11} est (tableau 5.3) inversement proportionnel au nombre total de couches.

Il en résulte que le couplage membrane-flexion décroît rapidement lorsque le nombre de couches croît.

Tableau 5.3. Coefficients de rigidité d'un stratifié croisé antisymétrique (nombre pair de couches).

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{1}{1+R_e} (R_e + R_Q) Q_{11} e, & A_{12} &= Q_{12} e, & A_{16} &= 0, \\
 A_{22} &= \frac{1}{1+R_e} (1 + R_e R_Q) Q_{11} e = \frac{1 + R_e R_Q}{R_e + R_Q} A_{11}, \\
 A_{26} &= 0, & A_{66} &= Q_{66} e. \\
 B_{11} &= \frac{R_e (R_Q - 1)}{n(1+R_e)^2} Q_{11} e^2 = \frac{R_e (R_Q - 1)}{n(1+R_e)(R_e + R_Q)} A_{11} e, & B_{12} &= B_{16} = 0, \\
 B_{22} &= -B_{11}, & B_{26} &= B_{66} = 0. \\
 D_{11} &= \left[(R_Q - 1) \beta + 1 \right] \frac{Q_{11} e^3}{12} = \left[(R_Q - 1) \beta + 1 \right] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
 D_{12} &= \frac{Q_{12} e^3}{12}, & D_{16} &= 0, \\
 D_{22} &= \left[(1 - R_Q) \beta + R_Q \right] \frac{Q_{11} e^3}{12} = \left[(1 - R_Q) \beta + R_Q \right] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}, \\
 D_{26} &= 0, & D_{66} &= \frac{Q_{66} e^3}{12},
 \end{aligned}$$

avec

$$\beta = \frac{1}{1+R_e} + \frac{8R_e(R_e-1)}{n^2(1+R_e)^3}.$$

Dans le cas où toutes les couches ont même épaisseur :

$$R_e = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

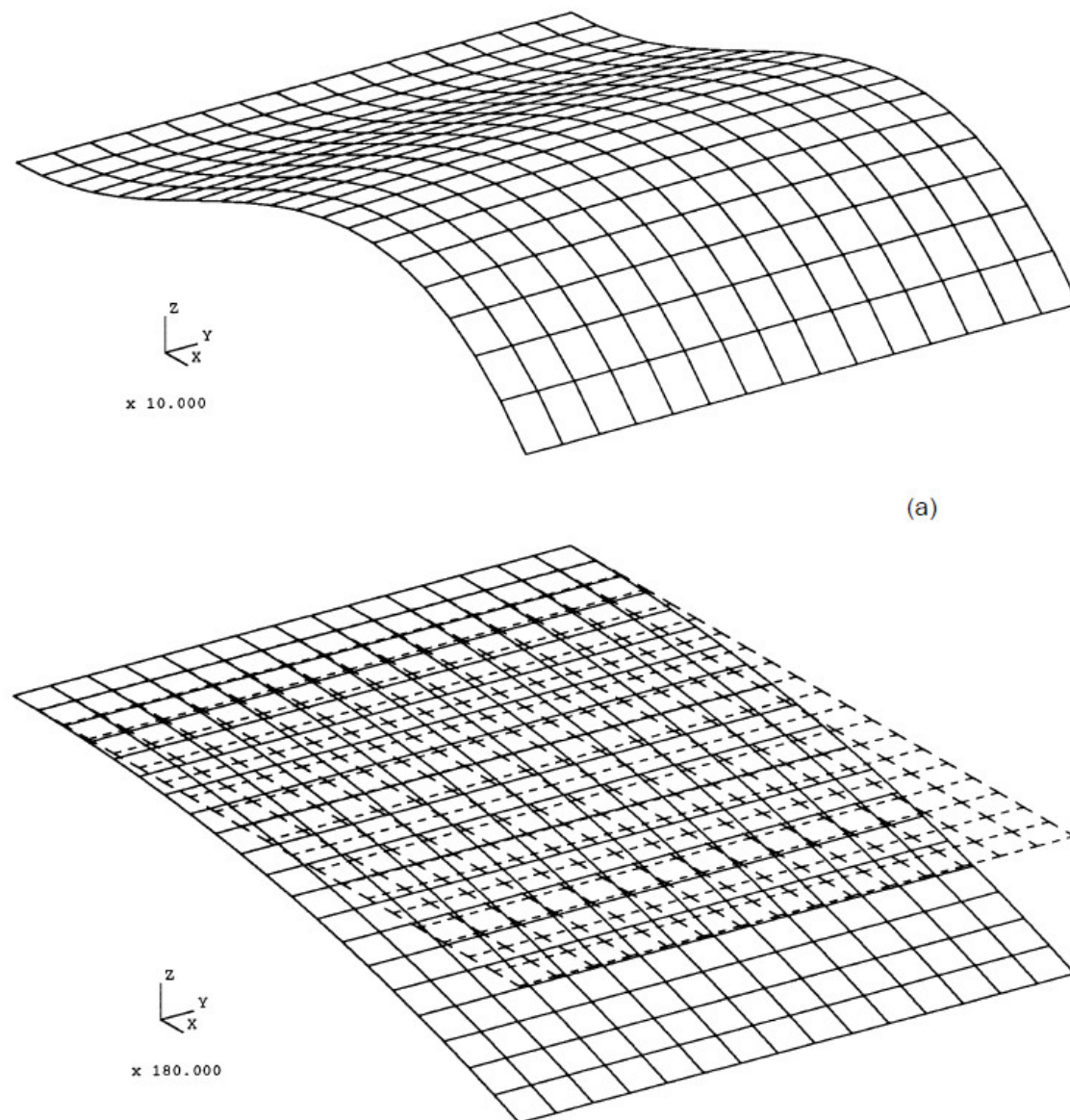


Figure 5.5 : Couplage traction-flexion dans le cas d'un stratifié croisé antisymétrique :
 (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées

5.5 Stratifiés équilibrés et stratifiés alternés

Un stratifié est équilibré s'il comporte autant de couches orientées suivant un angle Θ que de couches orientées suivant un angle $-\Theta$.

Un stratifié équilibré peut être quelconque, symétrique ou antisymétrique (figure 5.6).

Un stratifié alterné est constitué de couches orientées alternativement suivant les directions Θ et $-\Theta$, relativement aux axes de référence du stratifié.

Le stratifié équilibré antisymétrique de la figure 7.6 est un stratifié alterné.

La figure 5.7 donne un exemple de stratifié alterné symétrique.

Les équations constitutives de ces stratifiés se déduisent des équations générales (4.1), (5.14) et (5.15).

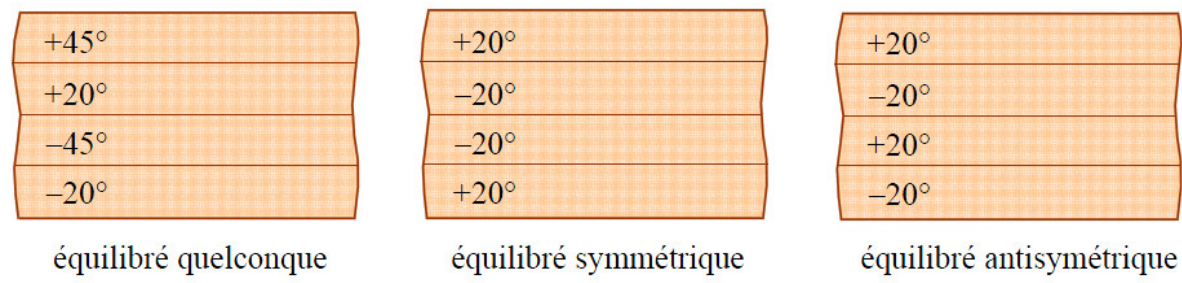


Figure 5.6 : Divers types de stratifiés équilibrés

Stratifiés particuliers

Dans le cas pratique où les couches ont la même épaisseur, les coefficients de rigidité du stratifié s'expriment en fonction des coefficients Q_{ij} de chaque couche, du nombre de couches n et de l'épaisseur e du stratifié.

Dans le cas de couches constituées du même matériau, les coefficients de rigidité des couches sont liés par les expressions :

$$\begin{aligned} Q'_{11-\theta} &= Q'_{11+\theta}, & Q'_{12-\theta} &= Q'_{12+\theta}, & Q'_{16-\theta} &= -Q'_{16+\theta}, \\ Q'_{22-\theta} &= Q'_{22+\theta}, & Q'_{26-\theta} &= -Q'_{26+\theta}, & Q'_{66-\theta} &= Q'_{66+\theta}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

Les coefficients $Q'_{ij+\theta}$ se rapportent aux couches impaires, et les coefficients Q_{ij} aux couches paires.

Pour le stratifié équilibré symétrique de la figure 5.6 et le stratifié alterné symétrique de la figure 5.7, $+\theta$ est égal à 20° et $Q'_{ij+\theta} = Q_{ij+20}$;

alors que dans le cas du stratifié équilibré antisymétrique de la figure 5.6, $+\theta = -20^\circ$ et $Q'_{ij} = Q_{ij-20}$.



Figure 5.7 : Stratifié alterné symétrique

Stratifié équilibré symétrique

Dans le cas d'un stratifié équilibré symétrique, le nombre de couches est pair.

Les coefficients de rigidité sont déduits des relations (4.3), (4.4) et (4.5), associées aux relations (5.6).

Ils s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= eQ'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ A_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \\ B_{ij} &= 0 && i, j = 1, 2, 6. \\ D_{ij} &= \frac{e^3}{12} Q'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ D_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Stratifié alterné antisymétrique

Pour un stratifié alterné antisymétrique, le nombre de couches est pair et les relations (5.8) et (5.6) conduisent à :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= eQ'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ A_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \\ B_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ B_{ij} &= -\frac{e^2}{2n} Q'_{ij} && \text{si } ij = 16, 26. \\ D_{ij} &= \frac{e^3}{12} Q'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ D_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Stratifié alterné symétrique

Enfin, dans le cas d'un stratifié alterné symétrique, le nombre de couches est impair. Les coefficients de rigidité s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= eQ'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ A_{ij} &= 0 && \text{si } ij = 16, 26. \\ B_{ij} &= 0 && i, j = 1, 2, 6. \\ D_{ij} &= \frac{e^3}{12} Q'_{ij} && \text{si } ij = 11, 12, 22, 66, \\ D_{ij} &= \frac{e^3}{12} \frac{3n^2 - 2}{n^3} Q'_{ij} && \text{si } ij = 16, 26. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Nous observons que les coefficients A_{ij} sont indépendants du nombre de couches et du type de stratifié.

Les coefficients A_{16} et A_{26} sont nuls.

Les coefficients de rigidité en flexion et en torsion D_{11} , D_{12} et D_{66} sont également indépendants du nombre de couches et du type de stratifié.

Les coefficients de couplage flexion-torsion D_{16} et D_{26} , nuls dans le cas de stratifiés équilibrés symétriques et de stratifiés alternés antisymétriques, décroissent avec le nombre de couches dans les autres cas.

Dans le cas de stratifiés symétriques, il n'existe pas de couplage membrane flexion-torsion ($B_{ij} = 0$).

Par contre, les stratifiés équilibrés antisymétriques présentent un couplage membrane-torsion qui décroît lorsque le nombre de couches augmente.

5. 6 Stratifié quelconque

Les divers stratifiés étudiés dans les paragraphes précédents montrent l'influence de l'empilement des couches les unes par rapport aux autres et par rapport aux axes de référence du stratifié.

Les cas particuliers étudiés correspondent à des applications importantes. Les divers stratifiés étudiés ont mis en évidence les divers couplages entre traction, cisaillement, flexion et torsion.

Dans le cas d'un empilement quelconque, l'équation constitutive du stratifié s'écrit sous la forme générale (5.19).

Dans ce cas, les divers couplages existent simultanément.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

L'effet de ces couplages peut être mis en évidence en imposant à une plaque constituée d'un stratifié quelconque une traction (figure 5.1) en déplacements imposés et en contraintes imposées.

Les figures 5.8 montrent les résultats obtenus.

À la déformation de traction se superposent des déformations en cisaillement, flexion et torsion. Nous avons déjà noté l'influence néfaste de ces divers couplages.

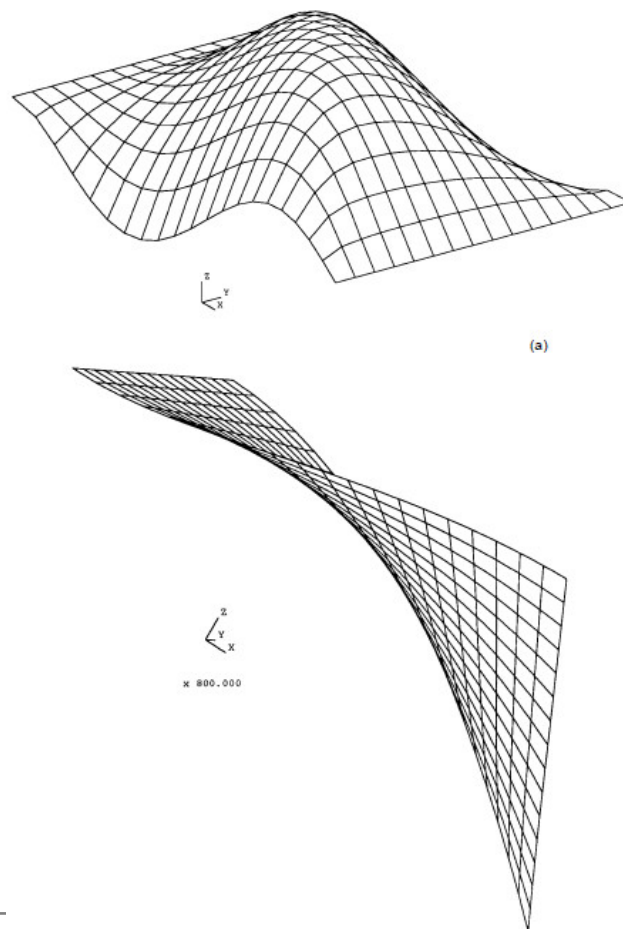


Figure 5.8 : Couplage général dans le cas d'un stratifié quelconque : (a) déplacements imposés et (b) contraintes imposées.

Conclusion General

Pour une pièce composite, l'ingénieur crée le matériau en fonction des besoins : il choisit le renfort, la matrice, et le procédé de fabrication qui conviens le mieux.

Viens ensuite, la définition de l'architecture de la pièce : les agencements des plis, et le redimensionnement et ses critères de résistance.

Le calcul des stratifié est à la base de la procédure de conception :

- les données d'entrée sont :
 - les propriétés du pli unidirectionnel
 - l'architecture du stratifiée (proportions et orientation des plis)
 - les sollicitations appliquées
- On calcule ensuite les rigidités du stratifié
- On évalue ensuite les résistances du stratifié a l'aide des critères appropriés

En sortie, l'analyse ne donne pas la nature du système composite, c'est-à-dire le type de fibres et de résine (matrice).

Ce pendant, dans certains cas, des spécifications particulières, comme le cout ou la rigidité, vont orienter le choix du composite.

Enfin, en règle général, il est d'usage de respecter quelque règles pratique telle que :

- Règle des 10% : Il est de bonne pratique d'inclure dans l'architecture du stratifié au moins 10% d'orientation à la fois) 90° et à $\pm 45^\circ$;
- Disperser les orientations : Dans les stratifiés épais, l'idéal est de disperser le plus finement possible les plis de même orientation que d'empiler des blocs de même orientations ;
- Simultanéité des ruptures : dans une architecture optimale, les plis de différentes orientations doivent se rompre en même temps, ce qui signifierait qu'il n y a pas de matière inutile.

Références bibliographiques

- [1] <https://www.techniques-ingenieur.fr>, Réf : BM5080 v1
- [2] www.anfa-auto.fr , Matériaux composites »
- [3] <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-cachan>
<https://www.aerospace-technology.com/projects/ariane5>
- [4] Peng WANG
Thèse pour l'obtention du grade de Docteur.
Étude numérique et expérimentale de procédé d'élaboration des matériaux composites par infusion de résine – 2010.
École Nationale supérieure des Mines de Saint-Étienne.
<http://bibliotech.inp-toulouse.fr/fr/index.html>
- [5] Christian GARNIER.
Etude du comportement dynamique des structures composites – 2011.
Thèse pour l'obtention du grade de Docteur.
Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse).
- [6] Juliette PAYAN (née Gillet)
Etude du Comportement de composites stratifiés sous chargement statique et de fatigue – 2004.
THESE pour l'obtention du grade de Docteur de l'université Aix-Marseille
- [7] Saber BENFERDI
Caractérisation du Comportement Micromécanique d'un matériaux composites par Différentes Approches mathématique – 2011.
Thèse pour l'obtention du grade Magister
Université MENTOURI Constantine

- [8] Kaouche Naima
Prise en Compte de vieillissement et de l'endommagement dans le dimensionnement des structures en matériaux composites – 2017
Thèse pour l'obtention du Grade de Magister
- [9] Jean Marie Bertholet
Matériaux composites
ISMANS (Institut Supérieur des Matériaux et Mécanique Avancés)
- [10] Vincent Carmona
Etude de l'endommagement de matériaux composites par tomographie X et émission acoustique – 2009.
Thèse pour l'obtention du grade de Docteur
Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
- [11] F. Gay
Matériaux composites
Edition Hermès

Autres références bibliographiques consultées

- Boumedine Rabah / Djera Lyza
études du comportement mécanique d'un stratifié verre/polyester – 2015
Thèse pour l'obtention du diplôme de Master
Université Mouloud Mammeri
- Touat Tarik
Etude du comportement mécanique d'un matériaux composites thermoplastique (PP)verre : effet de différents milieu – 2012
Thèse pour l'obtention du diplôme de Magister
- Zaidi Ali
Etude du comportement mécanique d'un matériau composite à matrice polymère en fatigue (Effet du vieillissement) – 2014
Thèse pour l'obtention du diplôme de Magister

Annexe 1

Considérons un composite multicouche $[+30^\circ/0^\circ/-30^\circ]$ constitué de trois plis identiques à base de fibre de carbone, dans un repère d'isotropie :

$$E_{11} = 138 \text{ GPa (Module de Rigidité selon } T_1)$$

$$E_{22} = 8.98 \text{ GPa (Module de rigidité selon } T_2)$$

$$G_{12} = 7.1 \text{ GPa (module de cisaillement)}$$

$$\nu_{12} = 0.3 \text{ (Coefficient de poisson)}$$

Les plis à $\pm 30^\circ$ ont comme épaisseur $t = 3\text{mm}$, le pli central à 0° a une épaisseur de 6mm .

La plaque est soumise suivant son axe principal à une sollicitations de 1000 N/mm

1) Matrice de Rigidité des couches dans leur repère propre

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}},$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22},$$

$$Q_{66} = G_{LT}.$$

D'après les calculs :

$$[Q_{ij}] = \begin{pmatrix} 138.81 & 2.70 & 0 \\ 2.70 & 9.01 & 0 \\ 0 & 0 & 7.10 \end{pmatrix}$$

Symétrie de la matrice de rigidité réduite :

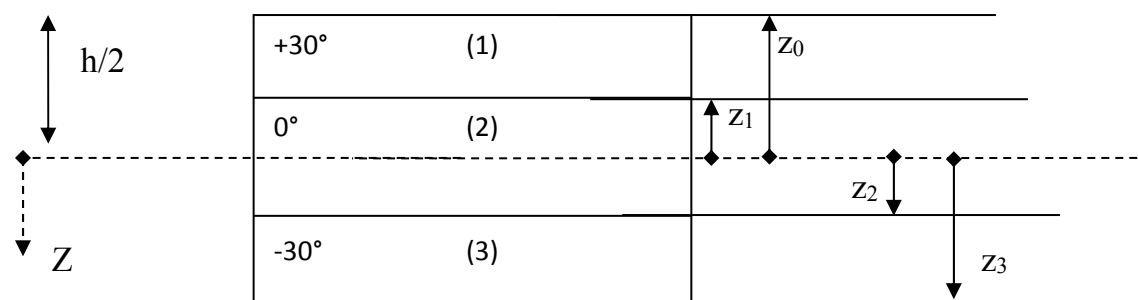
$$v_{12} / E_{11} = v_{21} / E_{22} \quad \left. \vphantom{v_{12} / E_{11}} \right\} v_{21} = (E_{11} / E_{22}) * v_{12}$$

$$v_{21} = (8.96/138)*0.3 = 0,019$$

	$\Theta = 30^\circ$	$\Theta = 0^\circ$	$\Theta = -30^\circ$
Q_{11}	89.49	138.81	89.49
Q_{22}	20.08	9.01	20.08
Q_{12}	24.08	2.70	24.08
Q_{66}	24.26	7.1	24.29
Q_{16}	40.45	0	-40.45
Q_{26}	15.76	0	-15.76

$[Q_{ij}] = \text{MPa}$

2) Cotation du stratifié



	$\Theta = 30^\circ$ k=1	$\Theta = 0^\circ$ k=2	$\Theta = -30^\circ$ k=3
(mm) z_k	-3	+3	+6
(mm) z_{k-1}	-6	-3	+3
z_k	-3	+3	+6
Z_{k-1}	0	-3	+3

3) Matrice de rigidité du stratifié

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] \quad \text{avec} \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$

$$\mathbf{B} = [B_{ij}] \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k$$

$$\mathbf{D} = [D_{ij}] \quad \text{avec} \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 1369.8 & 160.68 & 0 \\ 160.68 & 174.54 & 0 \\ 0 & 0 & 188.84 \end{pmatrix} \text{ GPa.mm}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1092.16 \\ 0 & 0 & -425.52 \\ -909.16 & -425.52 & 0 \end{pmatrix} \text{ GPa.mm}^2 \text{ (Extension / courbure)}$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} 13774 & 3063 & 0 \\ 3063 & 2692 & 0 \\ 0 & 0 & 3188 \end{pmatrix} \text{ GPa.mm}^3 \text{ (Flexion / Torsion)}$$

4) Calcule des déformations et des contraintes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}$$

\mathbf{N} = Les efforts normaux et tranchants

\mathbf{M} = Les moment appliquée (M_x , M_y , M_{xy})

$\boldsymbol{\varepsilon}^0$ = Les déformations relatives et cisaillement

$\boldsymbol{\kappa}$ = Courbures

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.1 & -1.32 & 0 & 0 & 0 & 3.27 \\ -1.32 & 85.4 & 0 & 0 & 0 & 10.83 \\ 0 & 0 & 116.4 & 6.88 & 10.94 & 0 \\ 0 & 0 & 6.88 & 1.38 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & -10.85 & -0.48 & 5.93 & 0 \\ 3.27 & 10.93 & 0 & 0 & 0 & 5.71 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inversion de la matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= 10^{-3} & \kappa_x &= 0 \\ \epsilon_y^0 &= -1.32 \cdot 10^{-4} & \kappa_y &= 0 \\ \gamma_{xy} &= 0 & \kappa_{xy} &= 3.27 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

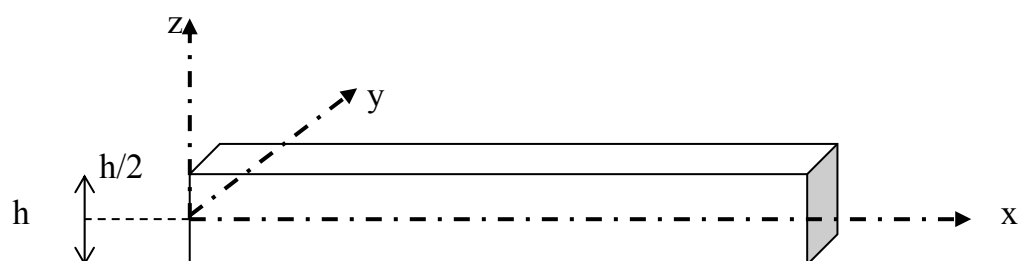
- Le plan moyen du composite subit trois déformations :
 ϵ_x (direction de la charge), ϵ_y (perpendiculaire a la charge) et κ_{xy} (Torsion)

Annexe 2

Flexion des poutres

1) Expression générales (Stratifié symétriques)

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$



Elément de poutre

$$\kappa_x = -\delta^2 w_0 / \delta x^2$$

$$\kappa_y = -\delta^2 w_0 / \delta y^2$$

$$\kappa_{xy} = -2 \delta^2 w_0 / \delta y^2 \delta x^2$$

L'expression (1) peut être inversée :

$$\begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{21}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{61}^* & D_{62}^* & D_{66}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^* &= 1/\Delta (D_{22} D_{66} - D_{26}^2) & D_{12}^* &= 1/\Delta (D_{16} D_{26} - D_{12} D_{66}) \\ D_{16}^* &= 1/\Delta (D_{12} D_{26} - D_{16} D_{22}) & D_{22}^* &= 1/\Delta (D_{11} D_{66} - D_{16}^2) \\ D_{26}^* &= 1/\Delta (D_{12} D_{16} - D_{26} D_{11}) & D_{66}^* &= 1/\Delta (D_{11} D_{22} - D_{12}^2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

« Δ » Etant le déterminant de la matrice D_{ij}

$$\Delta = D_{11} D_{12} D_{66} + 2 D_{12} D_{16} D_{26} - D_{11} D_{26}^2 - D_{66} D_{12}^2$$

La thèse des poutres fait l'hypothèse, dans le cas d'une flexion suivant l'axe x, les moments M_y et $M_{xy} = 0$

$$\kappa_x = - \delta^2 w_0 / \delta x^2 = D^*_{12} M_x \quad (4)$$

La flexion n'est en fonction que de « x »

$$w_0 = w_0(x) \quad (5)$$

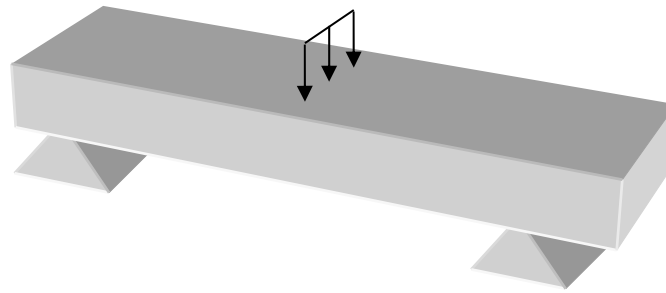
$$\left. \begin{aligned} \kappa_y &= - \delta^2 w_0 / \delta y^2 = D^*_{12} M_x \\ \kappa_{xy} &= -2 \delta^2 w_0 / \delta y^2 \delta x^2 = D^*_{16} M_x \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

La relation montrent que la flèche w_0 dépend a priori de la variable « y ».

Cet effet est particulièrement important dans le cas d'éprouvette de flexion de laboratoire.

Il en résulte que la flexion et la torsion induites par les termes D^*_{12} et D^*_{16} tendent à produire un décollement axiale de la poutre sur ses supports.

Cet effet est négligeable dans le cas ou le rapport L/h (Largeur/ Hauteur) est suffisamment élevé.



$$- \delta^2 w_0 / \delta x^2 = - D^*_{11} M_x \quad (7)$$

$$- \delta^2 w_0 / \delta x^2 = - M / E_x I_{zz} \quad (8)$$

En introduisant E_x de flexion de la poutre :

$$E_x = 12/h^3 D^*_{12} \quad (9)$$

Le moment quadratique I de la section de la poutre par rapport au plan(x,y) :

$$I = I_{yy} = bh^3 / 12 \quad (10)$$

Le moment de flexion M :

$$M = b \cdot M_x \quad (11)$$

Compte tenue des hypothèses de flexion des plaques :

$$(d^2M_x/dx^2) + g = 0 \quad (12)$$

$$(d^4w_0/dx^4) = D^*_{11}.g \quad (13)$$

$$(d^4w_0/dx^4) = p/E_x. I \quad (14)$$

$$\text{Avec } p = b.g \quad (15)$$

$$(dM_x/dx) = Q_x \quad (16)$$

$$\text{ou : } (dM/dx) = Q \quad (17)$$

$$\text{On pose } Q = b.Q_x \quad (18)$$

Les contraintes dans la couche k s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{21}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (19)$$

en notant Q_{ij}^k les coefficients de rigidité dite Q_{ij} , la couche k rapportés aux axes de la plaque :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= z(Q_{12}^k.D^*_{11} + Q_{12}^k.D^*_{12} + Q_{16}^k.D^*_{16}).M_x \\ \sigma_{yy}^k &= z(Q_{12}^k.D^*_{11} + Q_{22}^k.D^*_{12} + Q_{16}^k.D^*_{16}).M_x \\ \sigma_{xy}^k &= z(Q_{16}^k.D^*_{11} + Q_{26}^k.D^*_{12} + Q_{66}^k.D^*_{16}).M_x \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

On introduisant M et I, les expressions de ces contraintes deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= z.a_{xx}^k.(M/I) \\ \sigma_{yy}^k &= z.a_{yy}^k.(M/I) \\ \sigma_{xy}^k &= z.a_{xy}^k.(M/I) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Avec

$$\left. \begin{aligned} a_{xx}^k &= (Q_{11}^k.D_{11}^* + Q_{12}^k.D_{12}^* + Q_{16}^k.D_{16}^*)h^3/12 \\ a_{yy}^k &= (Q_{12}^k.D_{11}^* + Q_{22}^k.D_{12}^* + Q_{26}^k.D_{16}^*)h^3/12 \\ a_{xy}^k &= (Q_{16}^k.D_{11}^* + Q_{26}^k.D_{12}^* + Q_{66}^k.D_{16}^*)h^3/12 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Les contraintes de cisaillement dans les couches se déduisent de l'équation d'équilibre

$$d\sigma_{xx}^k/dx = -d\sigma_{xx}^k/dx = -za_{xx}^k \cdot (1/I) \cdot (dm/dx) \quad (23)$$

$$\sigma_{xz}^k = -(Q/2I) a_{xx}^k (Z^2 + C_k) \quad (24)$$

Les constantes a_x dans chaque couche sont déterminées en annulant σ_{xz} sur les faces supérieures et inférieures, et on assure la continuité de σ_{xz} entre chaque couche (le cas d'un matériau homogène (Annexe 1))

$\sigma_{xx} = 0$ pour $z = I \cdot (h/2)$ implique :

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= Q \cdot h^2 / 8I [1 - 4(z/h)^2] = 3/2 Q / bh [1 - 4(z/h)^2] \\ & \quad (I = bh^3/12) \end{aligned}$$

Pour $z=0$, la contrainte de cisaillement est :

$$\sigma_{xz}(z=0) = \tau_0 = 3/2 \cdot (Q/bh)$$

La relation (24) peut être écrite sous forme :

$$\sigma_{xx}^k = a_{xx}^k \cdot \tau_0 [4 \cdot (z/h) + d_k]$$

Où d_k sont la nouvelle constante à déterminer pour assurer

Annexe 3

Programme, édité avec le logiciel Matlabs R2017a, qui permet de calculer directement soit : les résultantes/moments ou les déformations/courbures, à partir des modules de l'ingénieur :

```
%Module de l'ingénieur
E11= 138      ;      % Module de Young selon la direction (11)
E22= 8.96     ;      % Module de Young selon la direction (22)
G12= 7.1      ;      %
u12= 0.3      ;      % Coefficient de poisson selon la direction 12
u21=u12*(E22/E11) ;      % Coefficient de poisson selon la direction 21

%Matrice de rigidité réduite [Q]
Q11 = E11/1-(u12*u21)
Q22 = E22/1-(u12*u21)
Q66 = G12
Q12 = (u12*E22)/1-(u21*u12)
Q21 = Q12
Q16 = 0
Q26 = 0
Q62 = 0
Q61 = 0

Q = [ Q11 Q12 Q16 ;Q21 Q22 Q26; Q61 Q62 Q66 ]

% Matrice de rigidité Hors Axe [q]
t1= 30        % angle de rotation
t2= -30
t3= 0
```

$$V1 = (1/8) * ((3*Q11) + (3*Q22) + (2*Q12) + (4*Q66));$$

$$V2 = (1/2) * (Q11 - Q22);$$

$$V3 = (1/8) * (Q11 + Q22 - (2*Q12) - (4*Q66));$$

$$V4 = (1/8) * (Q11 + Q22 + (6*Q12) - (4*Q66));$$

$$V5 = (1/8) * (Q11 + Q22 - (2*Q12) + (4*Q66)) = (1/2) * (V1 - V4);$$

$$q11 = V1 + V2 * (\cos(2*t1)) + V3 * (\cos(4*t1))$$

$$q12 = V4 - V3 * (\cos(4*t1))$$

$$q16 = (1/2) * V2 * (\sin(2*t1)) + V3 * (\sin(4*t1))$$

$$q22 = V1 - V2 * (\cos(2*t1)) + V3 * (\cos(4*t1))$$

$$q26 = (1/2) * V2 * (\sin(2*t1)) - V3 * (\sin(4*t1))$$

$$q66 = V5 - V3 * (\cos(4*t1))$$

$$q62 = q26$$

$$q61 = q16$$

$$q21 = q12$$

$$q = [q11 \ q12 \ q16; \ q21 \ q22 \ q26; \ q61 \ q62 \ q66]$$

% Calcule de Aij, Bij, et Dij

$$e0 = 6 \quad \% \text{ épaisseur de la couche a } x^{\circ}$$

$$e30 = 3$$

$$e(-30) = 3$$

$$Aij = [q * e0]$$

$$Bij = [(1/2) * q * (e0)^2]$$

$$Dij = [(1/3) * q * (e0)^3]$$

$$E = [Aij, Bij$$

$$Bij, Dij]$$

% Calcule des Contraintes et Déformations au niveau d'un stratifié

Nx= 1000

Ny=0

Nxy=0

Mx=0

My=0

Mxy=0

Cont=[Nx;Ny;Nxy;Mx;My;Mxy]

Def=[Dxx;Dyy;Dxy;kx;ky;kxy]

Cont=E*Def

Def=inv(E)*Cont