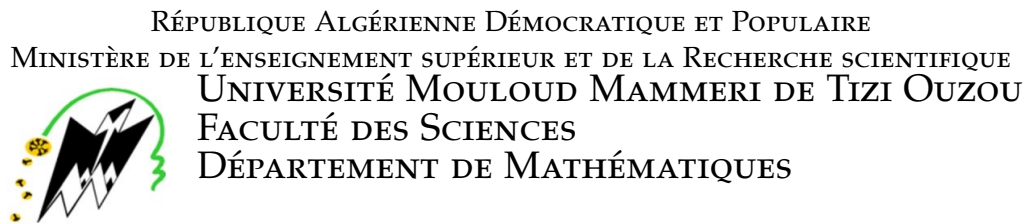


N° d'ordre:



MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

AMEL NEMMAR
TORKIA OULD KACI

PROBLÈMES DE TRANSPORT FRACTIONNAIRES LINÉAIRES

Soutenu le 04 Octobre 2022 devant le jury :

Mr.	GOUBI MOULOUD	UMMTO	Président du jury
Mme.	SLIMI FARIDA	UMMTO	Examinatrice
Mme.	LESLOUS FADILA	UMMTO	Promotrice

Année Universitaire : 2021/2022

Nous dédions ce modeste travail

A nos chers parents

A nos familles

A tous ceux qui nous sont chers

A tous nos amis (es)

*A toutes les personnes qui nous ont encouragé et ayant contribué chacune à sa
manière au bon accomplissement de notre projet*

...

REMERCIEMENTS

Nous remercions dieu tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme.

Nous tenons à adresser nos plus vifs remerciements à notre promotrice Madame LESLOUS Fadila qui a su nous guider et nous orienter. Nous lui exprimons notre plus grande gratitude pour l'attention et le temps qu'elle nous a consacré ainsi que les précieux conseils qu'elle nous a prodigués.

Nos remerciements vont également aux membres du jury pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'examiner notre travail.

Nos sincères remerciements sont encore adressés à tous ceux qui, sans avoir été impliqués directement dans ce travail, ont toujours été d'un grand support : nos enseignants, nos familles, nos amis (es) chacun son nom.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES FIGURES	vi
LISTE DES TABLEAUX	vi
INTRODUCTION	1
1 PRÉSENTATION DU MODÈLE DE TRANSPORT	3
1.1 DÉFINITION DU PROBLÈME DE TRANSPORT	3
1.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DU PROBLÈME DE TRANSPORT	3
1.3 REPRÉSENTATION TABULAIRE DU PROBLÈME DE TRANSPORT	4
1.4 MODÉLISATION DU PROBLÈME DE TRANSPORT SOUS FORME D'UN PRO- GRAMME LINÉAIRE	5
1.4.1 Formulation primale	5
1.4.2 Formulation duale	6
1.5 CAS PARTICULIERS DU PROBLÈME DE TRANSPORT	7
1.5.1 Problème de transbordement	7
1.5.2 Problème de transport avec des itinéraires interdits	8
1.5.3 Problème de transport avec des itinéraires imposés	9
1.5.4 Problème de transport avec des centres liés	10
1.5.5 Problème de dégénérescence	10
2 MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE TRANSPORT (AMÉLIO- RATION DE LA SOLUTION DE BASE)	11
2.1 ORGANIGRAMME DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE TRANSPORT	12
2.2 MÉTHODES DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE TRANSPORT	12
2.2.1 Algorithme de la méthode du Coin Nord-Ouest	13
2.2.2 Algorithme de la méthode du Coût Minimum	13
2.2.3 Algorithme de la méthode de Vogel	13
2.3 AMÉLIORATION DE LA SOLUTION DE BASE	14
2.3.1 Méthode de Stepping Stone	14
2.3.2 Méthode de Distribution Modifiée	15
2.3.3 Méthode heuristique	16

2.4	EXEMPLE D'APPLICATION	17
3	PROBLÈME FRACTIONNAIRE LINÉAIRE	25
3.1	DESCRIPTION DU PROBLÈME FRACTIONNAIRE LINÉAIRE	25
3.1.1	Définitions de base	26
3.1.2	La relation entre la programmation fractionnaire linéaire et la programmation linéaire	26
3.1.3	Les différentes formes du problème LFP	28
3.2	MÉTHODES DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE PROGRAMMATION FRACTIONNAIRE LINÉAIRE	30
3.2.1	La méthode graphique	30
3.2.2	Algorithme itératif de résolution d'un problème de programmation fractionnaire linéaire	34
3.3	MODÈLES LFP	36
3.3.1	Interprétation économique	36
3.3.2	Le problème de transport maritime	37
3.3.3	Planification des produits	37
3.3.4	Le problème financier	39
3.3.5	Le problème de transport	40
3.3.6	Le problème du mélange	42
3.3.7	Le problème de la localisation	43
4	MÉTHODE ITÉRATIVE POUR RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE TRANSPORT FRACTIONNAIRE LINÉAIRE	46
4.1	POSITION DU PROBLÈME	46
4.2	LA MÉTHODOLOGIE	47
4.2.1	Détermination d'une solution initiale	49
4.2.2	Détermination du critère d'arrêt	49
4.2.3	Exécution de l'algorithme	49
4.3	LES ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES	52
4.3.1	Exemples	52
	CONCLUSION GÉNÉRALE	56
	BIBLIOGRAPHIE	57
	NOTATIONS	59

LISTE DES FIGURES

1.1	Représentation graphique du modèle de transport [1].	4
2.1	Organigramme de résolution du problème de transport [2].	12
3.1	Problème LFP à deux variables-Sommet optimal unique.	31
3.2	Problème LFP à deux variables-Multiples solutions optimales.	33
3.3	Exemple graphique - Ensemble réalisable borné.	34
3.4	Schéma du déroulement de l'algorithme [3].	35
4.1	Organigramme de l'algorithme du LFTP ayant un objectif de minimisation.	51

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Représentation tabulaire du modèle de transport.	5
1.2	Représentation tabulaire du problème de transbordement.	8
2.1	Première affectation CNO.	17
2.2	Deuxième affectation CNO.	17
2.3	Troisième affectation CNO.	17
2.4	Quatrième affectation CNO.	18
2.5	Cinquième affectation CNO.	18
2.6	Sixième affectation CNO.	18
2.7	Solution de base réalisable CNO.	18
2.8	Tableau des coûts réduits pour la 1 ^{ère} itération.	19
2.9	Nouvelle solution pour la 1 ^{ère} itération (Stepping-Stone).	20
2.10	Tableau des coûts réduits pour la 2 ^{ème} itération.	20
2.11	Nouvelle solution pour la 2 ^{ème} itération (Stepping-Stone).	20
2.12	Tableau des coûts réduits pour la 3 ^{ème} itération.	20

2.13	Solution optimale (Stepping-Stone).	21
2.14	Nouvelle solution pour la 1 ^{ère} itération (MODI).	22
2.15	Nouvelle solution pour la 2 ^{ème} itération (MODI).	23
2.16	La solution optimale (MODI).	23
3.1	Problème de transport - Coûts d'expédition.	40
3.2	Problème de transport - Bénéfice de l'entreprise.	40
4.1	Comparaison entre la méthode de Gupta al. et la nouvelle méthode. . .	55

INTRODUCTION GÉNÉRALE

LA recherche opérationnelle, dite science du management, ou science de la décision est une discipline dont l'objet est d'aider le décideur à prendre des décisions en vue d'une gestion efficace, rationnelle et logique. Elle consiste en l'application des méthodes scientifiques pour résoudre les problèmes complexes rencontrés dans plusieurs domaines nécessitant une organisation. Par conséquent, sa pratique fait appel à l'informatique, aux mathématiques, à l'organisation et l'économie de l'entreprise. C'est pourquoi, plusieurs entreprises s'intéressent à la recherche opérationnelle afin d'optimiser leurs productions et leurs services.

Parmi les problèmes les plus fréquents, nous citons le problème de transport [4] qui est le sujet de notre projet de fin d'étude. C'est un modèle important de la programmation linéaire qui se pose dans plusieurs contextes et a mérité une attention particulière dans la recherche opérationnelle. Il est probablement le problème de programmation linéaire spécial le plus important en termes de fréquence relative avec laquelle il apparaît dans les applications et aussi dans la simplicité de la procédure développée pour sa solution.

Cependant, les problèmes de la vie réelle sont complexes, ils ne peuvent pas être décrits adéquatement dans le cadre de modèles linéaires. Une branche de la programmation non linéaire qui est la programmation fractionnaire linéaire [5] a été introduite au début des années 60, depuis les premières publications consacrées à cette nouvelle discipline, le nombre de chercheurs ne cesse de se multiplier, car il existe un large champ de problèmes du monde réel pour lesquels l'utilisation de programmes fractionnaires est plus appropriée. Dans ce document, nous citons plusieurs problèmes qui peuvent être formulés sous forme de problèmes LFP. Mais nous considérons de plus près le problème de transport fractionnaire linéaire [6].

Ce mémoire est décomposé en quatre chapitres, et est organisé de la manière suivante :

Chapitre 1 : Nous traitons le problème de transport en donnant une présentation détaillée et quelques cas particuliers du modèle de transport [7, 1, 4, 8, 9, 10].

Chapitre 2 : Nous nous intéressons aux méthodes de résolution et d'amélioration des solutions de base d'un problème de transport avec un exemple d'application à la fin [2, 11, 12].

Chapitre 3 : Il est consacré aux concepts de base de la théorie de la programmation fractionnaire ainsi qu'aux approches de résolution des LFP avec des exemples illustratifs [5, 3, 13].

Chapitre 4 : Il constitue la partie essentielle de ce mémoire. Nous présentons une méthode itérative de résolution des problèmes de transport fractionnaires linéaires illustrée avec des exemples numériques [6, 5, 14].

Nous clôturons avec une conclusion générale et la liste des références utilisées.

PRÉSENTATION DU MODÈLE DE TRANSPORT

1

Dans ce chapitre, nous allons présenter et modéliser le problème de transport par ses différentes formulations.

1.1 DÉFINITION DU PROBLÈME DE TRANSPORT

Le problème de transport est un type particulier de problèmes de programmation linéaire dont l'objectif consiste à minimiser le coût de transport d'une marchandise donnée depuis un certain nombre de sources ou d'origines (par exemple, une usine, une installation de fabrication) vers un certain nombre de destinations (par exemple, un entrepôt, un magasin). Chaque source a une offre limitée (c'est-à-dire le nombre maximum de produits qui peuvent être envoyés) tandis que chaque destination a une demande à satisfaire (c'est-à-dire le nombre minimum de produits qui doivent lui être expédiés). Le coût de l'expédition d'une source vers une destination est proportionnel au nombre d'unités expédiées.

1.2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DU PROBLÈME DE TRANSPORT

Le modèle de transport peut être représenté graphiquement en considérant une source S et une destination D .

Dans la figure 1.1, il y a m sources et n destinations. Le coût de transport d'une source S_i ($i = 1, \dots, m$) vers une destination D_j ($j = 1, \dots, n$) est représenté par C_{ij} .

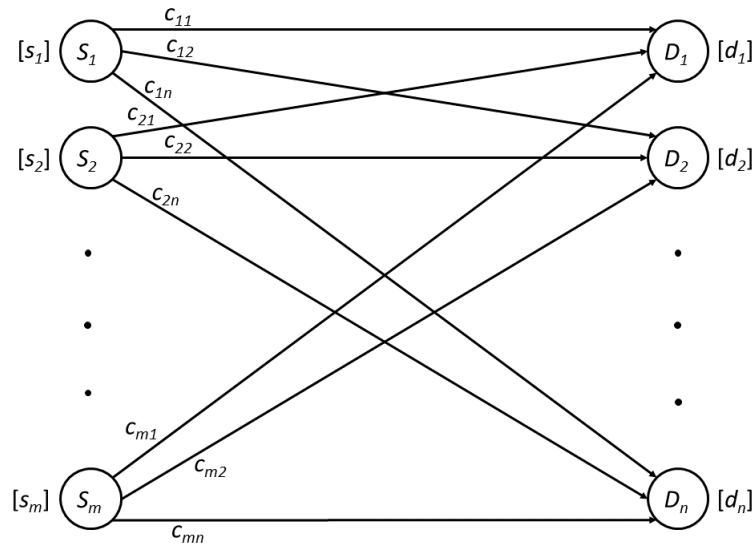


FIGURE 1.1 – Représentation graphique du modèle de transport [1].

On précise encore que si l'on utilise généralement le terme "coût", il ne s'agit pas toujours de coût monétaire. Dans le transport, il peut s'agir de temps. En effet, lors d'une catastrophe naturelle tel que le séisme de Boumerdes du 21 mai 2003, il ne s'agissait pas à ce moment de minimiser les coûts de transport des ambulances, mais de minimiser le temps de parcours de ces ambulances pour évacuer le maximum de blessés des lieux du sinistre vers les établissements hospitaliers [4].

1.3 REPRÉSENTATION TABULAIRE DU PROBLÈME DE TRANSPORT

Le modèle d'un problème de transport peut être représenté sous forme de tableau ayant tous les paramètres pertinents.

Le tableau de transport (un problème de transport typique est représenté sous forme de matrice standard), où la disponibilité d'approvisionnement (a_i) à chaque source est affichée dans la colonne droite du tableau, et les demandes de destination (b_j) sont affichées dans la ligne inférieure. Chaque cellule représente une voie, le coût de transport unitaire (C_{ij}) est indiqué sur le coin supérieur droit de la cellule, la quantité de matériel transportée est affichée au centre de la cellule, le tableau de transport exprime implicitement les contraintes de l'offre et de la demande et le coût de transport entre chaque source et destination [7].

Source \ Destination	D_1	D_2	\dots, D_j, \dots	D_n	Disponibilités
S_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}		C_{1n} x_{1n}	a_1
S_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}		C_{2n} x_{2n}	a_2
\dots, S_i, \dots			C_{ij} x_{ij}		a_i
S_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}		C_{mn} x_{mn}	a_m
Demandes	b_1	b_2	\dots, b_j, \dots	b_n	$\sum a_i$ $\sum b_j$

TABLE 1.1 – Représentation tabulaire du modèle de transport.

1.4 MODÉLISATION DU PROBLÈME DE TRANSPORT SOUS FORME D'UN PROGRAMME LINÉAIRE

Dans la mesure où le modèle de transport est un cas particulier de la programmation linéaire, on peut alors le formuler sous forme de programme linéaire, avec deux manières différentes, où il s'agit de trouver les quantités optimales à transférer tout en minimisant les coûts de transport.

On introduit les notations suivantes :

- x_{ij} : quantité transportée de S_i vers D_j ;
- C_{ij} : coût unitaire du transport de S_i vers D_j ;
- a_i : disponibilité au niveau de la source S_i ;
- b_j : demande de la destination D_j ;
- m : nombre de sources ;
- n : nombre de destinations.

1.4.1 Formulation primale

Dans un problème de transport, on est amené à minimiser une application linéaire, appelée fonction objectif.

Le problème de transport est défini comme suit [8] :

$$(1) \begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

(1) est réalisable si et seulement si : Offre totale = Demande totale.

$$i.e. \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Cette condition est dite condition d'équilibre et le problème est dit dans ce cas "problème de transport équilibré".

Le problème de transport avec contraintes d'inégalité s'écrit [8] :

$$(2) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, & j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

(2) est réalisable si et seulement si : Offre totale \geq Demande totale.

$$i.e. \quad \sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j.$$

Ce problème de transport est dit "non équilibré". Le problème (2) peut être transformé en (1) en ajoutant une destination fictive $j = n + 1$ caractérisée par le niveau de la demande [8] :

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j.$$

1.4.2 Formulation duale

Soit Z une fonction objectif :

$$\min Z = \sum_{i,j} C_{ij} x_{ij} = C^t x$$

Soumise aux contraintes

$$\forall i = 1, 2, \dots, m \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \Leftrightarrow A_1 x = a$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, n \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \Leftrightarrow A_2 x = b$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq 0$$

Sous forme compact, ceci s'écrit

$$\begin{aligned} \min Z &= C^t x \\ \begin{bmatrix} A_1 \\ -A_1 \\ A_2 \\ -A_2 \end{bmatrix} x &\geq \begin{bmatrix} a \\ -a \\ b \\ -b \end{bmatrix} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Où A représente la matrice des coefficients des variables x_{ij} des contraintes.
Le dual est :

$$\begin{aligned} \max Z &= a^t u_+ - a^t u_- + b^t v_+ - b^t v_- \\ [A_1^t \quad -A_1^t \quad A_2^t \quad -A_2^t] \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \\ v_+ \\ v_- \end{bmatrix} &\leq C \\ u_+, u_-, v_+, v_- &\geq 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire avec $u = u_+ - u_-$ et $v = v_+ - v_-$, on obtient

$$\begin{aligned} \max Z &= a^t u + b^t v \\ A_1^t u + A_2^t v &\leq C \\ u, v &\text{ libres} \end{aligned}$$

Or

$$A_1^t u + A_2^t v \leq C \Leftrightarrow u_i + v_j \leq C_{ij}$$

Supposons que x soit la solution optimale du problème. Selon les conditions KKT, on a

$$x^t (C - A_1^t u - A_2^t v) = 0$$

On a les relations

$$u_i + v_j = C_{ij} \quad \forall x_{ij} > 0$$

Si x est solution de base non dégénérée, on a bien la décomposition $u_i + v_j = C_{ij}$ pour les indices des variables de base [10].

1.5 CAS PARTICULIERS DU PROBLÈME DE TRANSPORT

1.5.1 Problème de transbordement

Au problème classique de transport, on peut envisager une extension en ajoutant aux deux niveaux considérés (origine et destination), un troisième niveau intermédiaire composé de regroupées et d'éclatements intermédiaires. Il s'agit du problème de transbordement.

En considérant m origines, p destinations intermédiaires et n destinations finales, le problème de transport peut s'écrire sous forme de programme linéaire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p C_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n C_{kj} x_{kj} \\ \sum_{k=1}^p x_{ik} = a_i, \quad \forall i \\ \sum_{k=1}^p x_{ik} = b_j, \quad \forall j \\ \sum_{i=1}^m x_{ik} = \sum_{j=1}^n x_{kj}, \quad \forall j \\ x_{ik} \text{ et } x_{kj} \geq 0, \quad \forall i \text{ et } j. \end{array} \right.$$

On peut résoudre ce type de problème en considérant les destinations intermédiaires à la fois comme origines et comme destinations.
Le tableau de transport correspondant à ce cas particulier est composé de $(m + p)$ lignes et $(p + n)$ colonnes.

	I_1	...	I_k	...	I_p
S_1	C_{11} x_{11}	...	C_{1k} x_{1k}	...	C_{1p} x_{1p}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_i	C_{i1} x_{i1}	...	C_{ik} x_{ik}	...	C_{ip} x_{ip}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_m	C_{m1} x_{m1}	...	C_{mk} x_{mk}	...	C_{mp} x_{mp}

D_1	...	D_i	...	D_n	Disp
		a_{S_1}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
		a_{S_i}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
		a_{S_m}

I_1		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
I_k		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
I_p		
Dem	b_{I_1}	...	b_{I_k}	...	b_{I_p}

C_{11} x_{11}	...	C_{1i} x_{1i}	...	C_{1n} x_{1n}	a_{I_1}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
C_{k1} x_{k1}	...	C_{ki} x_{ki}	...	C_{kn} x_{kn}	a_{I_k}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
C_{p1} x_{p1}	...	C_{pi} x_{pi}	...	C_{pn} x_{pn}	a_{I_p}
b_{D_1}	...	b_{D_i}	...	b_{D_n}	

TABLE 1.2 – Représentation tabulaire du problème de transbordement.

Les cases colorées en gris ne sont pas utilisées puisqu'elles ne représentent pas l'intersection de deux variables [4].

1.5.2 Problème de transport avec des itinéraires interdits

Il arrive souvent dans les problèmes de transport que certaines "routes" ou "itinéraires" ne soient pas praticables. Il s'agit de transport avec itinéraires interdits. Le programme linéaire associé à ce problème est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_i \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \text{ et } j. \end{array} \right.$$

Il existe au moins un couple (i, j) tel que $(1 < i < m)$ et $(1 < j < n)$, pour lequel la liaison est interdite. La résolution de ce problème est simple. Il suffit de trouver une

solution de base au problème sans restriction, remplacer dans cette solution les C_{ij} par 0 lorsque la "route" est permise et par 1 lorsque la "route" est interdite. Résoudre alors le problème avec ces nouvelles données par la méthode de Stepping Stone, ou une autre méthode.

A préciser que lorsqu'une quantité $x_{ij} \neq 0$ est affectée à une case (i, j) où le $C_{ij} = 1$, le problème n'a pas de solution [4].

1.5.3 Problème de transport avec des itinéraires imposés

Lorsque dans un modèle de transport, la marchandise transportée doit obligatoirement suivre un chemin prédéterminé, il s'agit d'un problème de transport avec "itinéraire imposé".

L'écriture générale du programme linéaire associé à ce problème est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_i \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \text{ et } j. \end{array} \right.$$

Il existe au moins un couple (i, j) tel que $(1 < i < m)$ et $(1 < j < n)$, pour lequel la liaison est imposée.

Dans un problème de transport, où l'itinéraire est imposé, trois cas peuvent se présenter.

- On impose à ce chemin une quantité minimale à transporter.
- On impose à ce chemin une quantité exacte à transporter.
- On impose à ce chemin une quantité maximale à transporter.

Nous présentons dans ce qui suit l'étude des deux premiers cas seulement.

1- *Quantité minimale à transporter .*

Dans ce premier cas, dans lequel une quantité minimale T_{mi} à transporter est imposée dans un itinéraire, il faut ramener le problème à un cas où il n'y a pas de restriction, d'où la nécessité de :

- Soustraire de la disponibilité a_i , la quantité minimale T_{mi} .
- Soustraire de la demande b_j , la quantité minimale T_{mi} .

La soustraction est nécessaire pour les demandes et les disponibilités simultanément afin d'équilibrer le problème.

Après ces transformations et à partir du nouveau tableau obtenu, résoudre le problème.

Lorsque la solution optimale est obtenue, ajouter la quantité T_{mi} dans la case (i, j) de la solution optimale.

2- *Quantité exacte à transporter .*

Le deuxième cas du modèle de transport à itinéraires imposés concerne le transfert d'une quantité exacte X_e à transporter d'une origine i_0 vers une destination j_0 . Comme

pour le premier cas, on commence par ramener le problème à un cas où il n'y a pas de restriction, on effectue donc les opérations suivantes :

- Soustraire de la disponibilité a_{i_0} , la quantité X_e .
- Soustraire de la demande b_{j_0} , la quantité X_e .

Après l'obtention de cette nouvelle affectation, on considère le trajet (i_0, j_0) comme un itinéraire interdit et on résout le problème. Lorsqu'on obtient la solution optimale, on ajoute la quantité X_e dans la case (i_0, j_0) , et on calcule le coût correspondant [4].

1.5.4 Problème de transport avec des centres liés

Le problème de transport où plusieurs sources ont un même dépôt est appelé modèle de transport avec "centre lié". Cela peut aussi être le cas de deux ou plusieurs dépôts qui s'unissent pour établir une commande commune.

La résolution d'un tel problème se fait en plusieurs phases.

- Choix des coûts minimaux correspondants aux lignes ou colonnes ayant une demande ou une disponibilité commune.
- Réunir en une seule ligne (ou colonne) avec les coûts choisis dans la phase précédente.
- Procéder ainsi pour toutes les demandes et les disponibilités qui représentent des centres liés.
- Résoudre le problème de transport avec le tableau obtenu.
- Remettre les lignes (ou colonnes) supprimées initialement et calculer le coût de transport [4].

1.5.5 Problème de dégénérescence

Nous avons une solution dégénérée lorsqu'une ou plusieurs variables de base sont nulles, c'est-à-dire lorsque toutes les contraintes sont satisfaites et qu'il y a moins de $(m + n - 1)$ cellules positives ($x_{ij} > 0$) dans la solution considérée. La dégénérescence peut apparaître soit dans la première solution de base, soit au cours du processus des itérations menant à la solution optimale.

Pour résoudre le problème de dégénérescence, nous mettons autant de zéro dans les cases vides du tableau de la solution dégénérée que nous assimilons à des cases saturées de telle sorte à ce que le nombre de celle-ci soit égal à $(m + n - 1)$ [9].

MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE TRANSPORT (AMÉLIORATION DE LA SOLUTION DE BASE)

2

Un problème de transport linéaire peut se résoudre en appliquant les différentes techniques de la programmation linéaire mais étant donné la structure très particulière de ces problèmes, on a souvent recours à utiliser des techniques plus spécifiques et plus adéquates.

2.1 ORGANIGRAMME DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE TRANSPORT

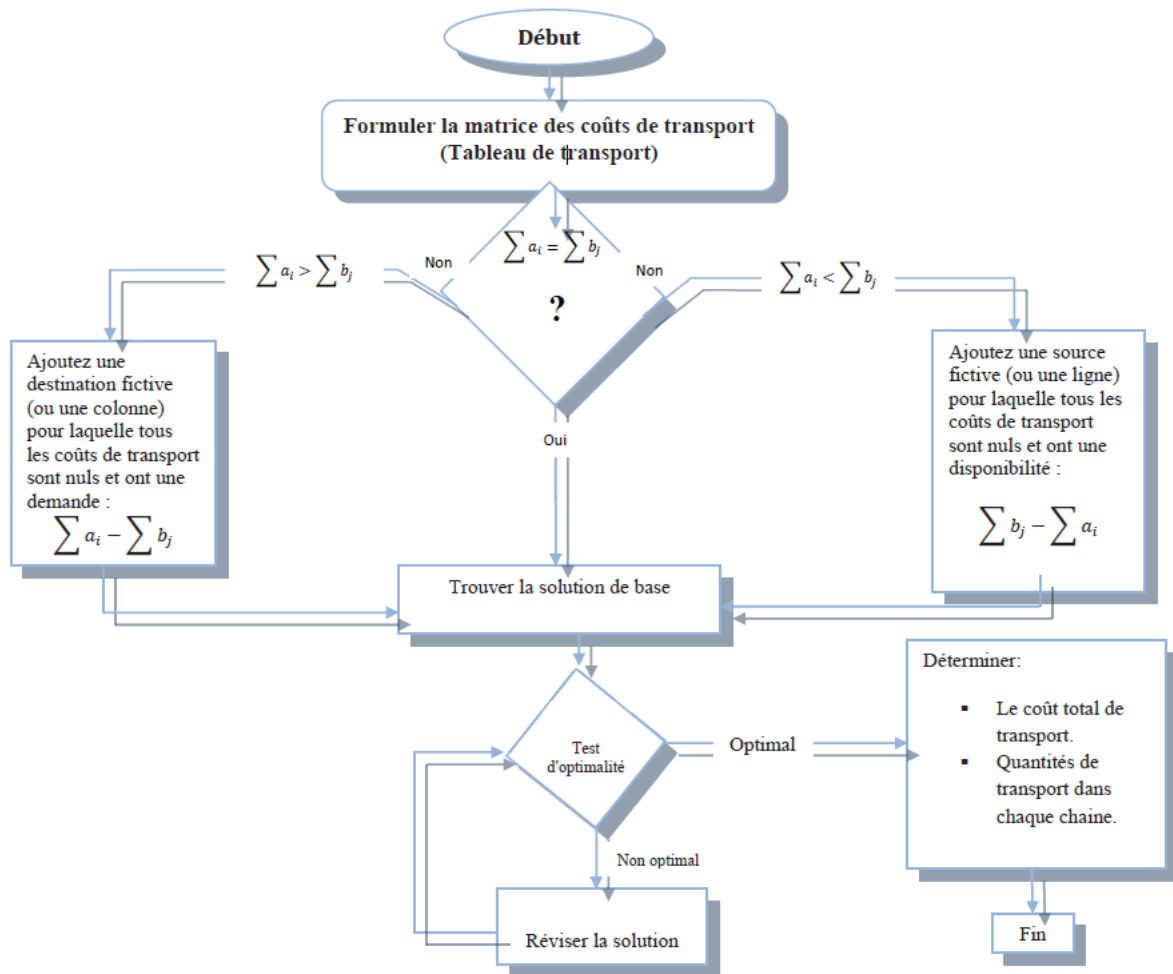


FIGURE 2.1 – Organigramme de résolution du problème de transport [2].

2.2 MÉTHODES DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE TRANSPORT

Pour résoudre un problème de transport :

Étape 1 : Formuler et configurer le problème donné sous forme matricielle. Vérifier si le problème est un problème de transport équilibré ou déséquilibré. S'il est déséquilibré, ajouter une source fictive (ligne) ou une destination fictive (colonne) selon les besoins.

Étape 2 : Obtenir la solution initiale de base réalisable en utilisant l'une des trois méthodes suivantes :

1. Méthode du Coin Nord-Ouest.
2. Méthode du Coût Minimum.
3. Méthode de Vogel.

Le coût de transport de la solution initiale de base réalisable par la méthode d'approximation de Vogel sera le plus faible par rapport aux deux autres méthodes, ce qui donne une valeur plus proche de la solution optimale ou la solution optimale elle-même. Les algorithmes des trois méthodes pour trouver la solution initiale de base réalisable sont donnés comme suit.

2.2.1 Algorithme de la méthode du Coin Nord-Ouest

1. Sélectionner la cellule du Coin Nord-Ouest (c'est-à-dire en haut à gauche) du tableau et répartir le maximum d'unités possibles entre les besoins de l'offre et de la demande. Lors de la répartition, le coût du transport est complètement écarté (non pris en compte).
2. Supprimer la ligne ou la colonne qui n'a aucune valeur (entièrement épuisée) pour l'offre ou la demande.
3. Maintenant, avec le nouveau tableau réduit, sélectionner à nouveau la cellule du Coin Nord-Ouest et attribuer les valeurs disponibles.
4. Répéter les étapes (2.) et (3.) jusqu'à ce que toutes les valeurs de l'offre et de la demande soient nulles.
5. Obtenir la solution initiale de base réalisable.

2.2.2 Algorithme de la méthode du Coût Minimum

1. Choisir parmi les cases disponibles celle dont le coût unitaire est minimal et accepte le plus grand nombre d'unités puis y attribuer le maximum en respectant l'offre et la demande.
2. Mettre à jour les offres et les demandes.
3. Retourner à (1.) tant qu'il y a des cases disponibles.
4. Obtenir la solution initiale de base réalisable.

2.2.3 Algorithme de la méthode de Vogel

1. Construire la matrice des coûts en incluant les disponibilités et les demandes. Ajouter une destination et une origine pour que $\sum a_i = \sum b_j$.
2. Évaluer la différence entre les deux coûts les plus petits pour chaque ligne et chaque colonne.

3. Choisir la ligne ou la colonne ayant le maximum des différences, faire un choix arbitraire si le maximum des différence n'est pas unique.
4. Allouer la plus grande quantité possible (tout en respectant les contraintes) à la cellule possédant le coût le plus faible de la ligne ou de la colonne obtenue en (3.).
5. Obtenir la solution initiale de base réalisable.

Remarque 2.1 *La solution initiale obtenue par l'une des trois méthodes doit satisfaire les conditions suivantes :*

- *La solution doit être réalisable, c'est-à-dire que les contraintes de l'offre et de la demande doivent être satisfaites.*
- *Le nombre d'allocations positives N , doit être égal à $m + n - 1$, où m est le nombre de lignes et n le nombre de colonnes [11].*

2.3 AMÉLIORATION DE LA SOLUTION DE BASE

Une fois la solution réalisable obtenue, l'étape suivante consiste à vérifier si elle est optimale ou non. Trois méthodes sont utilisées pour tester l'optimalité :

2.3.1 Méthode de Stepping Stone

Le principe de cette méthode est de partir d'une solution de base et de progresser par itération pour trouver une solution qui minimise les coûts de transport (solution optimale).

Algorithme de Stepping Stone

Etape 1 : Trouver une solution initiale de base réalisable en utilisant l'une des trois méthodes : méthode du Coin Nord-Ouest, méthode du Coût Minimum ou la méthode de Vogel.

Etape 2 :

1. Tracer un chemin fermé (ou une boucle) à partir d'une case vide. Le parcours à angle droit n'est autorisé que dans les cases saturées et dans la case vide de départ. Marquer alternativement les signes (+) et (-) à chaque coin, en partant de la case vide de départ.
2. Additionner les coûts de transport de chaque case tracée dans le chemin fermé. C'est ce qu'on appelle le changement du coût réduit.
3. Répéter cette opération pour toutes les autres cases vides.

Etape 3 :

1. Si tous les changements du coût réduit sont ≥ 0 , une solution optimale a été atteinte. Arrêter maintenant cette procédure.

2. Si ce n'est pas le cas, alors sélectionner la case vide ayant le changement de coût réduit négatif le plus élevé et dessiner un chemin fermé.

Etape 4 :

1. Sélectionner la valeur minimale allouée parmi toutes les positions négatives ($-$) sur le chemin fermé.
2. Affecter cette valeur à la case vide sélectionnée (la case vide devient donc une case saturée).
3. Ajouter cette valeur aux autres cases saturées marquées du signe ($+$).
4. Soustraire cette valeur aux autres cases saturées marquées du signe ($-$).

Etape 5 : Répéter les étapes 2 à 4 jusqu'à ce que la solution optimale soit obtenue. Cette procédure s'arrête lorsque tous les coûts réduits deviennent ≥ 0 pour les cases vides.

2.3.2 Méthode de Distribution Modifiée

Définition 2.1 *La méthode de distribution modifiée, également connue sous le nom de méthode MODI ou méthode $(u - v)$, fournit une solution à coût minimal au problème de transport. La méthode MODI est une amélioration de la méthode de Stepping Stone.*

Étapes de la méthode de Distribution Modifiée (MODI)

Les étapes pour évaluer les cases non saturées sont les suivantes :

Etape 1 : Trouver une solution initiale de base réalisable en utilisant l'une des trois méthodes citées ci-dessus.

Etape 2 :

1. Pour une solution initiale de base réalisable avec $m + n - 1$ cases saturées, calculer u_i et v_j pour les lignes et les colonnes.
2. Pour commencer, la valeur zéro est attribuée à n'importe quel u_i ou v_j . Il est préférable d'attribuer la valeur zéro à un u_i ou v_j particulier lorsqu'il y a un nombre maximum d'allocations dans une ligne ou une colonne respectivement, car cela réduira considérablement le nombre d'opérations.
3. Calculer les autres u_i et v_j en utilisant $C_{ij} = u_i + v_j$, pour toutes les cases saturées.

Etape 3 : Pour toutes les cases saturées, calculer $d_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$.

Etape 4 : Vérifier le signe de d_{ij}

1. Si $d_{ij} > 0$, alors la solution réalisable de base actuelle est optimale, arrêter la procédure.
2. Si $d_{ij} = 0$, alors une solution alternative existe.

3. Si $d_{ij} < 0$, alors la solution donnée n'est pas une solution optimale et une amélioration de la solution est possible.

Etape 5 : Sélectionner la case non saturée avec la plus grande valeur négative de d_{ij} , et l'inclure dans la solution suivante.

Etape 6 : Dessiner un chemin fermé (ou une boucle) à partir de la case non saturée (sélectionnée à l'étape précédente). Le virage à angle droit dans ce chemin n'est autorisé que dans les cases saturées et dans la case non saturée de départ. Marquer alternativement les signes (+) et (-) à chaque coin, en partant de la case non saturée de départ.

Etape 7 :

1. Sélectionner la valeur minimale dans les cases marquées du signe (-) du chemin fermé.
2. Attribuer cette valeur à la case non saturée sélectionnée (la case non saturée devient donc une case saturée).
3. Ajouter cette valeur aux autres cases saturées marquées du signe (+).
4. Soustraire cette valeur des autres cases saturées marquées du signe (-).

Etape 8 : Répéter l'étape 2 à l'étape 7 jusqu'à ce que la solution optimale soit obtenue. Cette procédure s'arrête lorsque tous les $d_{ij} \geq 0$ pour les cases non saturées [12].

2.3.3 Méthode heuristique

La méthode de Stepping Stone et la méthode de Distribution Modifiée permettent de déterminer la solution optimale du problème. Cela peut parfois être long et fastidieux. Il existe des méthodes permettant de traiter les données disponibles pour obtenir une solution qui n'est pas toujours optimale, mais qui se rapproche de l'optimum avec une probabilité élevée. Il s'agit des méthodes heuristiques. L'une de ces méthodes est la méthode développée en apportant une petite modification à la méthode de Vogel. L'algorithme qui décrit cette méthode est :

1. Déterminer le coût de pénalité, c'est-à-dire la différence entre le plus grand coût et le plus petit de la ligne/colonne sélectionnée.
2. Identifier la ligne/colonne ayant le coût de pénalité le plus élevé. Allouer la plus grande quantité possible à la case ayant le plus petit coût de la ligne/colonne identifiée.
3. Barrer la ligne ou la colonne qui est satisfaite et ajuster les variables et les quantités requises.
4. Calculer les coûts de pénalité et répéter la procédure jusqu'à ce que toutes les lignes et colonnes soient satisfaites [12].

2.4 EXEMPLE D'APPLICATION

Soit le problème de transport suivant :

Source \ Destination	D	E	F	G	Offres
A	19	30	50	10	7
B	70	30	40	60	9
C	40	8	70	20	18
Demandes	5	8	7	14	34

1. Trouver la solution de base en utilisant la méthode du Coin Nord-Ouest :

a. Commencer par la case à gauche en haut AD, attribuer la valeur $\min\{7,5\} = 5$

Source \ Destination	D	E	F	G	Offres
A	19 (5)	30	50	10	$7 - 5 = 2$
B	70	30	40	60	9
C	40	8	70	20	18
Demandes	$5 - 5 = 0$	8	7	14	$34 - 5 = 29$

TABLE 2.1 – Première affectation CNO.

b. Supprimer la première colonne et continuer en suivant les mêmes étapes jusqu'à l'obtention de la solution de base.

Source \ Destination	E	F	G	Offres
A	30 (2)	50	10	$2 - 2 = 0$
B	30	40	60	9
C	8	70	20	18
Demandes	$8 - 2 = 6$	7	14	$29 - 2 = 27$

TABLE 2.2 – Deuxième affectation CNO.

Source \ Destination	E	F	G	Offres
B	30 (6)	40	60	$9 - 6 = 3$
C	8	70	20	18
Demandes	$6 - 6 = 0$	7	14	$27 - 6 = 21$

TABLE 2.3 – Troisième affectation CNO.

Source \ Destination	F	G	Offres
B	40 (3)	60	3 - 3 = 0
C	70	20	18
Demandes	7 - 3 = 4	14	21 - 3 = 18

TABLE 2.4 – Quatrième affectation CNO.

Source \ Destination	F	G	Offres
C	70 (4)	20	18 - 4 = 14
Demandes	4 - 4 = 0	14	18 - 4 = 14

TABLE 2.5 – Cinquième affectation CNO.

Source \ Destination	G	Offres
C	20 (14)	14 - 14 = 0
Demandes	14 - 14 = 0	14 - 14 = 0

TABLE 2.6 – Sixième affectation CNO.

Donc la solution de base réalisable est la suivante :

Source \ Destination	D	E	F	G	Offres
A	19 (5)	30 (2)	50	10	7
B	70	30 (6)	40 (3)	60	9
C	40	8	70 (4)	20 (14)	18
Demandes	5	8	7	14	34

TABLE 2.7 – Solution de base réalisable CNO.

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Le coût de transport optimal est :

$$Z = 19.5 + 30.2 + 30.6 + 40.3 + 70.4 + 20.14 = 1015.$$

2. Optimisation de la solution de base obtenue suivant la méthode de Stepping Stone :

À partir de la solution de base qu'on a trouvé par la méthode du CNO, on continue en suivant ces étapes :

Première itération :

a. Créer une boucle fermée à partir de chaque case vide (c'est-à-dire hors base), et calculer les coûts réduits δ_{ij} :

Case vide	Boucle fermée	Coûts réduits
AF	$AF \rightarrow BF \rightarrow BE \rightarrow AE$	$\delta_{AF} = 50 - 40 + 30 - 30 = 10$
AG	$AG \rightarrow CG \rightarrow CF \rightarrow BF \rightarrow BE \rightarrow AE$	$\delta_{AG} = 10 - 20 + 70 - 40 + 30 - 30 = 20$
BD	$BD \rightarrow BE \rightarrow AE \rightarrow AD$	$\delta_{BD} = 70 - 30 + 30 - 19 = 51$
BG	$BG \rightarrow CG \rightarrow CF \rightarrow BF$	$\delta_{BG} = 60 - 20 + 70 - 40 = 70$
CD	$CD \rightarrow CF \rightarrow BF \rightarrow BE \rightarrow AE \rightarrow AD$	$\delta_{CD} = 40 - 70 + 40 - 30 + 30 - 19 = -9$
CE	$CE \rightarrow CF \rightarrow BF \rightarrow BE$	$\delta_{CE} = 8 - 70 + 40 - 30 = -52$

TABLE 2.8 – Tableau des coûts réduits pour la 1^{ère} itération.

b. On a $\delta_{CD} < 0$ et $\delta_{CE} < 0$ et $\min \delta_{CE}, \delta_{CD} = \delta_{CE} = -52$. Alors tracer un chemin fermé à partir de la case CE :

Source \ Destination	D	E	F	G	Offres
	A	19 (5)	30 (2)	50	10
B	70	30 (6) -	40 (3) +	60	9
C	40	8 +	70 (4) -	20 (14)	18
Demandes	5	8	7	14	34

c. La quantité maximale à affecter pour la case CE est la valeur minimale parmi toutes les positions négatives (-) sur le chemin fermé = 4. Soustraire 4 de toutes les positions négatives (-) et l'ajouter à toutes les positions positives (+).

Source \ Destination	D	E	F	G	offres
A	19 (5)	30 (2)	50	10	7
B	70	30 (2)	40 (7)	60	9
C	40	8 (4)	70	20 (14)	18
Demandes	5	8	7	14	34

TABLE 2.9 – Nouvelle solution pour la 1^{ère} itération (Stepping-Stone).

d. On répète les étapes de a. à c. jusqu'à l'obtention de la solution optimale.

Deuxième itération

Case vide	Boucle fermée	Coûts réduits
AF	$AF \rightarrow AE \rightarrow BE \rightarrow BF$	$\delta_{AF} = 50 - 30 + 30 - 40 = 10$
AG	$AG \rightarrow AE \rightarrow CE \rightarrow CG$	$\delta_{AG} = 10 - 30 + 8 - 20 = -32$
BD	$BD \rightarrow BE \rightarrow AE \rightarrow AD$	$\delta_{BD} = 70 - 30 + 30 - 19 = 51$
BG	$BG \rightarrow BE \rightarrow CE \rightarrow CG$	$\delta_{BG} = 60 - 30 + 8 - 20 = 18$
CD	$CD \rightarrow CE \rightarrow AE \rightarrow AD$	$\delta_{CD} = 40 - 8 + 30 - 19 = 43$
CF	$CF \rightarrow CE \rightarrow BE \rightarrow BF$	$\delta_{CF} = 70 - 8 + 30 - 40 = 52$

TABLE 2.10 – Tableau des coûts réduits pour la 2^{ème} itération.

On a $\delta_{AG} = -32$. Alors la nouvelle solution est :

Source \ Destination	D	E	F	G	Offres
A	19 (5)	30	50	10 (2)	7
B	70	30 (2)	40 (7)	60	9
C	40	8 (6)	70	20 (12)	18
Demandes	5	8	7	14	34

TABLE 2.11 – Nouvelle solution pour la 2^{ème} itération (Stepping-Stone).

Troisième itération

Case vide	Boucle fermée	Coûts réduits
AE	$AE \rightarrow AG \rightarrow CG \rightarrow CE$	$\delta_{AE} = 30 - 10 + 20 - 8 = 32$
AF	$AF \rightarrow AG \rightarrow CG \rightarrow CE \rightarrow BE \rightarrow BF$	$\delta_{AF} = 50 - 10 + 20 - 8 + 30 - 40 = 42$
BD	$BD \rightarrow BE \rightarrow CE \rightarrow CG \rightarrow AG \rightarrow AD$	$\delta_{BD} = 70 - 30 + 8 - 20 + 10 - 19 = 19$
BG	$BG \rightarrow BE \rightarrow CE \rightarrow CG$	$\delta_{BG} = 60 - 30 + 8 - 20 = 18$
CD	$CD \rightarrow CG \rightarrow AG \rightarrow AD$	$\delta_{CD} = 40 - 20 + 10 - 19 = 11$
CF	$CF \rightarrow CE \rightarrow BE \rightarrow BF$	$\delta_{CF} = 70 - 8 + 30 - 40 = 52$

TABLE 2.12 – Tableau des coûts réduits pour la 3^{ème} itération.

Puisque tous les coûts réduits $\delta_{ij} > 0$ alors la solution optimale est :

Source \ Destination	D	E	F	G	Offres
A	19 (5)	30	50	10 (2)	7
B	70	30 (2)	40 (7)	60	9
C	40	8 (6)	70	20 (12)	18
Demandes	5	8	7	14	34

TABLE 2.13 – Solution optimale (Stepping-Stone).

$$x^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Le coût optimal est :

$$Z = 19.5 + 10.2 + 30.2 + 40.7 + 8.6 + 20.12 = 743.$$

3. Optimisation de la solution de base obtenue par la méthode de CNO suivant la méthode de Distribution Modifiée :

Source \ Destination	D	E	F	G	Offres
A	19 (5)	30 (2)	50	10	7
B	70	30 (6)	40 (3)	60	9
C	40	8	70 (4)	20 (14)	18
Demandes	5	8	7	14	34

Première itération

a. Trouver u_i et v_j pour toutes les cases saturées (i, j) , où $C_{ij} = u_i + v_j$.

Posons $v_2 = 0$, on aura :

- $C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow u_1 = C_{12} - v_2 = 30$
- $C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow v_1 = C_{11} - u_1 = 319 - 30 = -11$
- $C_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow u_2 = C_{22} - v_2 = 30$
- $C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow v_3 = C_{23} - u_2 = 40 - 30 = 10$

- $C_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow u_3 = C_{33} - v_3 = 70 - 10 = 60$
 - $C_{34} = u_3 + v_4 \Rightarrow v_4 = C_{34} - u_3 = 20 - 60 = -40$
- b. Trouver d_{ij} pour toutes les cases hors base (i, j) , où $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.
- $d_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) = 50 - (30 + 10) = 10$
 - $d_{14} = C_{14} - (u_1 + v_4) = 10 - (30 - 40) = 20$
 - $d_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) = 70 - (30 - 11) = 51$
 - $d_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) = 60 - (30 - 40) = 70$
 - $d_{31} = C_{31} - (u_3 + v_1) = 40 - (60 - 11) = -9$
 - $d_{32} = C_{32} - (u_3 + v_2) = 8 - 60 = -52$
- c. Choisir la valeur négative minimale parmi tous les d_{ij} (coût d'opportunité) = $d_{32} = -52$. Dessiner une boucle à partir de la case non saturée $(3, 2)$. Affecter à cette case la valeur minimale parmi toutes les positions négatives $(-)$ sur le chemin fermé = 4. Soustraire 4 de toutes les cases ayant le signe $(-)$ et l'ajouter à toutes les cases ayant le signe $(+)$. On aura le tableau suivant :

Source \ Destination	Destination				Offres
	D	E	F	G	
A	19 (5)	30 (2)	50	10	7
B	70	30 (2)	40 (7)	60	9
C	40	8 (4)	70	20 (14)	18
Demandes	5	8	7	14	34

TABLE 2.14 – Nouvelle solution pour la 1^{ère} itération (MODI).

- d. Répéter les étapes de a. à c. jusqu'à l'obtention de la solution optimale.

Deuxième itération

- a. Posons $v_2 = 0$, on aura :

- $C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow u_1 = C_{12} - v_2 = 30$
 - $C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow v_1 = C_{11} - u_1 = 19 - 30 = -11$
 - $C_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow u_2 = C_{22} - v_2 = 30$
 - $C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow v_3 = C_{23} - u_2 = 40 - 30 = 10$
 - $C_{32} = u_3 + v_2 \Rightarrow u_3 = C_{32} - v_2 = 8$
 - $C_{34} = u_3 + v_4 \Rightarrow v_4 = C_{34} - u_3 = 20 - 8 = 12$
- b.
- $d_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) = 50 - (30 + 10) = 10$
 - $d_{14} = C_{14} - (u_1 + v_4) = 10 - (30 + 12) = -32$
 - $d_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) = 70 - (30 - 11) = 51$
 - $d_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) = 60 - (30 + 12) = 18$
 - $d_{31} = C_{31} - (u_3 + v_1) = 40 - (8 - 11) = 43$
 - $d_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) = 70 - (8 + 10) = 52$
- c. $\min d_{ij} = d_{14} = -32$ donc :

Source \ Destination	D	E	F	G	Offres
A	19 (5)	30	50	10 (2)	7
B	70	30 (2)	40 (7)	60	9
C	40	8 (6)	70	20 (12)	18
Demandes	5	8	7	14	34

TABLE 2.15 – Nouvelle solution pour la 2^{ème} itération (MODI).

Troisième itération

a. Posons $v_2 = 0$, on aura :

- $C_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow u_2 = C_{22} - v_2 = 30$
- $C_{32} = u_3 + v_2 \Rightarrow u_3 = C_{32} - v_2 = 8$
- $C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow v_3 = C_{23} - u_2 = 40 - 30 = 10$
- $C_{34} = u_3 + v_4 \Rightarrow v_4 = C_{34} - u_3 = 20 - 8 = 12$
- $C_{14} = u_1 + v_4 \Rightarrow u_1 = C_{14} - v_4 = 10 - 12 = -2$
- $C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow v_1 = C_{11} - u_1 = 19 + 2 = 21$

b.

- $d_{12} = C_{12} - (u_1 + v_2) = 28$
- $d_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) = 42$
- $d_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) = 19$
- $d_{24} = C_{24} - (u_2 + v_4) = 18$
- $d_{31} = C_{31} - (u_3 + v_1) = 11$
- $d_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) = 52$

c. $d_{ij} > 0 \quad \forall i = \{1, 2, 3\}$ et $j = \{1, 2, 3, 4\}$ alors la solution optimale :

Source \ Destination	D	E	F	G	Offres
A	19 (5)	30	50	10 (2)	7
B	70	30 (2)	40 (7)	60	9
C	40	8 (6)	70	20 (12)	18
Demandes	5	8	7	14	34

TABLE 2.16 – La solution optimale (MODI).

$$x^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Le coût optimal est :

$$Z = 19.5 + 10.2 + 30.2 + 40.7 + 8.6 + 20.12 = 743.$$

PROBLÈME FRACTIONNAIRE LINÉAIRE

3

Les programmes fractionnaires consistent à optimiser un objectif donné sous forme d'un quotient de deux fonctions soumis à un ensemble de contraintes. Différentes versions de ce modèle existent. En ce qui concerne les objectifs, ils peuvent être linéaires ou non linéaires. Les variables peuvent être entières, binaires, continues ou mixtes. Les programmes fractionnaires apparaissent dans plusieurs domaines tels que les bases de données, l'optimisation combinatoire, la programmation stochastique et l'économie.

3.1 DESCRIPTION DU PROBLÈME FRACTIONNAIRE LINÉAIRE

Le problème fractionnaire linéaire peut être formulé comme suit :
Etant donné la fonction objectif

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n q_j x_j + q_0} \quad (3.1)$$

qui doit être maximisée (ou minimisée) en respectant les conditions suivantes

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i & i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i & i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 \quad (3.3)$$

Où $m_1 \leq m_2 \leq m$, $n_1 \leq n$.

Nous supposons que $Q(x) \neq 0, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ où S désigne un ensemble réalisable ou un ensemble de solutions réalisables définies par les contraintes (3.2)-(3.3).

Parce que le dénominateur $Q(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$Q(x) > 0, \quad \forall x \in S \quad (3.4)$$

Dans le cas où $Q(x) < 0$, nous pouvons multiplier le numérateur $P(x)$ et le dénominateur $Q(x)$ de la fonction objectif $Z(x)$ par (-1) .

Ici et dans ce qui suit tout au long du chapitre, nous traitons justement de tels problèmes de programmation fractionnaire linéaire qui satisfont à la condition (3.4). De plus, nous supposons que toutes les contraintes du système (3.2) sont linéairement indépendantes et donc le rang de la matrice $A = \| a_{ij} \|_{m \times n}$ est égal à m .

Ainsi, dans un problème LFP, notre objectif est de trouver un tel vecteur x de variables de décision $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, qui

1. maximise (ou minimise) la fonction $Z(x)$, appelée fonction objectif, et en même temps;
2. satisfait un ensemble de contraintes principales (3.2) et de restrictions de signe (3.3) [5].

3.1.1 Définitions de base

Nous présentons dans cette partie les principales conceptions qui seront utilisées tout au long du chapitre.

Définition 3.1 Si un vecteur donné $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ satisfait les contraintes (3.2) et (3.3), on dira que le vecteur x est **une solution réalisable** du problème LFP (3.1)-(3.3) [5].

Définition 3.2 Si un vecteur donné $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une solution réalisable de maximisation (minimisation) du problème LFP (3.1)-(3.3), et fournit une valeur maximale (minimale) pour la fonction objectif $Z(x)$ sur l'ensemble réalisable S , on dira que le vecteur x est **une solution optimale** de la maximisation (minimisation) du problème de programmation fractionnaire linéaire (3.1)-(3.3) [5].

Définition 3.3 On dit qu'un problème de programmation fractionnaire linéaire de maximisation (minimisation) est **résoluble**, si son ensemble réalisable n'est pas vide, c'est-à-dire $S \neq \emptyset$, et la fonction objectif $Z(x)$ a une limite supérieure (inférieure) finie sur S [5].

Définition 3.4 Si l'ensemble réalisable est vide, c'est-à-dire $S = \emptyset$, on dira que le problème LFP n'a pas de solution [5].

Définition 3.5 Si la fonction objectif $Z(x)$ d'un problème de maximisation (minimisation) LFP n'a pas de limite supérieure (inférieure) finie, on dira que le problème est non borné [5].

3.1.2 La relation entre la programmation fractionnaire linéaire et la programmation linéaire

Il est évident que si tous les $q_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$, et $q_0 = 1$, alors le problème LFP (3.1)-(3.3) devient un problème LP. C'est la raison pour laquelle on dit qu'un problème

LFP (3.1)-(3.3) est une généralisation d'un problème LP :
Etant donné la fonction objectif

$$P(x) = \sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0 \quad (3.5)$$

qui doit être maximisée (ou minimisée) en respectant les conditions suivantes

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i & i = 1, 2, \dots, m_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i & i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i & i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 \quad (3.7)$$

Il existe également quelques cas particuliers où le problème LFP initial peut être remplacé par un problème LP approprié :

1. Si $q_j = 0, j= 1, 2, \dots, n$, et $q_0 \neq 0$, alors la fonction objectif $Z(x)$ devient linéaire

$$Z(x) = \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{q_0} x_j + \frac{p_0}{q_0} = \frac{P(x)}{q_0}$$

Dans ce cas, la maximisation (minimisation) de la fonction objectif initiale $Z(x)$ peut être remplacée par la maximisation (minimisation) de la fonction linéaire $P(x)/q_0$ de manière correspondante sur le même ensemble réalisable S .

2. Si $p_j = 0, j=1, 2, \dots, n$, alors la fonction objectif

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0}{\sum_{j=1}^n q_j x_j + q_0}$$

peut être remplacée par la fonction $Q(x)$. Dans ce cas, la maximisation (minimisation) de la fonction objectif initiale $Z(x)$ doit être remplacée par une minimisation (maximisation) d'une nouvelle fonction objectif $Z(x)$ sur le même ensemble réalisable S .

3. Si les vecteurs $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ sont linéairement dépendants, c'est-à-dire qu'il existe $\mu \neq 0$, tel que $p = \mu q$, alors la fonction objectif

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n \mu q_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n q_j x_j + q_0} = \dots = \mu + \frac{p_0 - \mu q_0}{\sum_{j=1}^n q_j x_j + q_0} \quad (3.8)$$

peut être remplacée par la fonction $Q(x)$. Évidemment, dans ce cas, la maximisation (minimisation) de la fonction objectif initiale $Z(x)$ doit être remplacée par

- minimisation (maximisation) de $Q(x)$, si $p_0 - \mu q_0 > 0$,
- la maximisation (minimisation) de $Q(x)$, si $p_0 - \mu q_0 < 0$.

On doit remarquer que dans le cas où $p_0 - \mu q_0 = 0$ comme il découle de la formule (3.8), on a $Z(x) = \mu$, ce qui signifie que $Z(x) = \text{const}$, $\forall x \in S$. On n'examinera pas de tels problèmes en raison de leur inutilité.

On exclut de notre considération tout au long du chapitre les trois cas triviaux suivants :

1. $P(x)=\text{const}$, $\forall x \in S$;
2. $Q(x)=\text{const}$, $\forall x \in S$;
3. $Z(x)=\text{const}$, $\forall x \in S$.

Car dans ces cas, le problème LFP peut être réduit à un problème de LP (deux premiers cas), ou devient absolument sans but (cas 3) [5].

3.1.3 Les différentes formes du problème LFP

Dans cette partie, nous allons définir certains concepts utiles et introduire quelques formes spéciales du problème fractionnaire linéaire.

Définition 3.6 On dit d'un problème LFP qu'il est sous forme standard si toutes les contraintes sont des équations et toutes les variables inconnues ne sont pas négatives, c'est-à-dire [5]

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n q_j x_j + q_0} \longrightarrow \max(\min)$$

soumise à

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Où

$$Q(x) > 0, \forall x \in S$$

Il est évident que les formes standards et générales des problèmes LFP sont des cas particuliers d'un problème LFP formulé sous la forme (3.1)-(3.3). En effet, si dans le problème commun LFP (3.1)-(3.3), nous mettons $m_1 = m_2 = 0$ et $n_1 = n$, alors nous obtenons un problème LFP standard. Mais si $m_1 = m$ et $n_1 = n$, alors nous avons un problème LFP général.

Pour convertir une forme en une autre, nous devons utiliser les procédures de conversion suivantes :

1. " \geq " ("supérieur à") \rightarrow " \leq " ("inférieur à"). Les deux côtés de la contrainte " \geq " doivent être multipliés par (-1) .

2. " \leq " ("inférieur à") \rightarrow "="("égal"). Définir pour la contrainte " \leq " une variable d'écart non négative s_i ($s_i \geq 0$ variable d'écart pour la $i^{\text{ème}}$ contrainte) et on place cette variable dans le côté gauche de la contrainte, où elle jouera le rôle de la différence entre les côtés gauche et droit de la $i^{\text{ème}}$ contrainte d'origine. On ajoute également les restrictions de signe $s_i \geq 0$ à l'ensemble des contraintes. Ainsi,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i, \\ s_i \geq 0. \end{cases}$$

3. variable x_j non restreinte en signe \rightarrow variable(s) non négative(s) restreinte(s) en signe.

Pour chaque variable x_j , nous commençons par définir deux nouvelles variables non négatives x'_j et x''_j . Ensuite, on substitue $x'_j - x''_j$ à x_j dans chaque contrainte et dans la fonction objectif. On ajoute également les restrictions de signe $x'_j \geq 0$ et $x''_j \geq 0$ à l'ensemble des contraintes.

Parce que les trois formes d'un problème LFP (la forme la plus courante (3.1)-(3.3), standard et générale) peuvent être facilement converties l'une en l'autre, au lieu d'un problème LFP sous la forme (3.1)-(3.3) nous considérerons parfois son équivalent problème LFP sous forme standard ou générale. Bien évidemment, une telle substitution n'entraîne aucune perte de généralité, mais nous permet de simplifier notre étude.

Introduisons les notations suivantes :

$$A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, m)^T, \quad A = (A_1, A_2, \dots, A_n);$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T, \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T.$$

En utilisant cette notation, nous pouvons reformuler un problème LFP sous forme de matrice :

Forme standard

$$\begin{cases} Z(x) = \frac{p^T x + p_0}{q^T x + q_0} \rightarrow \max, \\ \text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Où $Q(x) = q^T x + q_0 > 0, \forall x \in S$,

Forme générale

$$\begin{cases} Z(x) = \frac{p^T x + p_0}{q^T x + q_0} \rightarrow \max, \\ \text{s.c.} \quad Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Où $Q(x) = q^T x + q_0 > 0, \forall x \in S$. Et p_0, q_0 sont des scalaires réels, P et Q sont des vecteurs de \mathbb{R}^n , A est une matrice d'ordre $(m \times n)$, b est un vecteur de \mathbb{R}^m .

Comme nous allons le constater, si une solution optimale pour un programme fractionnaire linéaire existe alors un point extrême optimal existe, en outre tout minimum local est un minimum global et tout maximum local est un maximum global, d'où une procédure qui se déplace d'un point extrême à un adjacent est une approche réalisable pour résoudre un tel problème.

Il convient de noter que, conformément à la théorie de la programmation mathématique

$$\min_{x \in S} F(x) = \max_{x \in S} (-F(x)) \quad (3.9)$$

ce qui signifie que pour convertir un problème de minimisation LFP en un problème de maximisation, nous devons multiplier sa fonction objectif par (-1) . Il n'y a donc aucune raison de considérer les deux cas (c'est-à-dire la maximisation et la minimisation) séparément. C'est pourquoi, dans la suite de nos discussions, nous nous concentrerons uniquement sur les problèmes LFP de maximisation [5].

3.2 MÉTHODES DE RÉOLUTION DU PROBLÈME DE PROGRAMMATION FRACTIONNAIRE LINÉAIRE

La forme particulière des programmes fractionnaires a fait que de nombreux auteurs ont élaboré des méthodes de résolution spécifiques qui se sont avérées plus efficaces que l'application directe des méthodes générales de la programmation non linéaire.

3.2.1 La méthode graphique

Nous allons maintenant discuter de la façon dont tout problème LFP avec seulement deux variables peut être résolu graphiquement.

Considérons le problème LFP suivant avec deux variables inconnues [5] :

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_0}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_0} \rightarrow \max(\min) \quad (3.10)$$

Sous contraintes

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.11)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (3.12)$$

Sommet optimal unique

Supposons que les contraintes (3.11) et (3.12) définissent l'ensemble réalisable S illustré par la partie colorée de la figure 3.1.

Soit $Z(x) = K$, où K est une constante arbitraire.

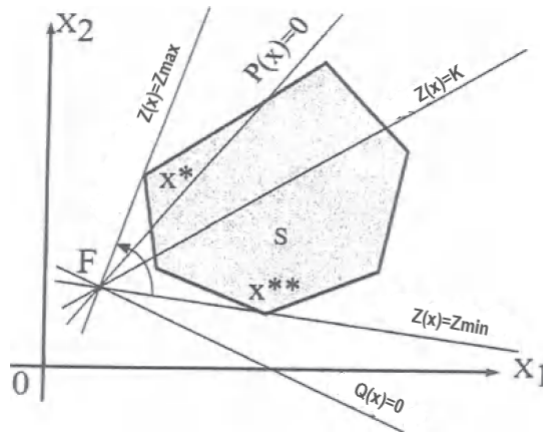


FIGURE 3.1 – Problème LFP à deux variables-Sommet optimal unique.

Pour toute valeur réelle K , l'équation

$$Z(x) = K,$$

ou

$$(p_1 - Kq_1)x_1 + (p_2 - Kq_2)x_2 + (p_0 - Kq_0) = 0$$

représente tous les points d'une ligne droite dans le plan x_1Ox_2 . Si cette ligne dite de niveau (ou isoligne) intersecte l'ensemble des solutions réalisables S , les points d'intersection sont les solutions réalisables qui donnent la valeur K à la fonction objectif $Z(x)$. Le changement de la valeur de K transforme la droite entière à une autre droite qui intersecte le point d'inflexion de la droite précédente (le point F sur la figure 3.1) dont les coordonnées sont définies comme solution du système

$$\left. \begin{array}{l} p_1x_1 + p_2x_2 = -p_0, \\ q_1x_1 + q_2x_2 = -q_0. \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

En d'autres termes, au point F , des lignes droites dont les équations $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$ se croisent.

Si les droites $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$ ne sont pas parallèles l'une à l'autre, alors le déterminant du système (3.13) n'est pas égal à zéro et le système a une solution unique (coordonnées du point F). Dans l'autre cas, si les droites $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$ sont parallèles entre elles, le déterminant du système (3.13) est égal à zéro et le système n'a pas de solution. Cela signifie qu'il n'y a pas de point d'intersection entre les droites et que toutes les lignes de niveau sont également parallèles les unes aux autres. Conformément au cas 3 (voir page 30), le problème LFP donné (3.10)-(3.12) dégénère en un problème LP. Par conséquent, pour maximiser la fonction objectif

$Z(x)$, nous devons minimiser ou maximiser son dénominateur $Q(x)$ en fonction du signe de l'expression $p_0 - \mu q_0$ (voir la formule (3.8)).

Revenons au cas où les lignes de niveau ne sont pas parallèles entre elles. Choisissons une valeur arbitraire de K et traçons la droite $Z(x) = K$ (voir figure 3.1). Réécrivons l'égalité $Z(x) = K$ comme suit :

$$x_2 = -\frac{p_1 - Kq_1}{p_2 - Kq_2}x_1 - \frac{p_0 - Kq_0}{p_2 - Kq_2}$$

Dans ce cas, la pente

$$k = -\frac{p_1 - Kq_1}{p_2 - Kq_2}$$

de la ligne de niveau $Z(x) = K$ dépend de la valeur K de la fonction objectif $Z(x)$, et est une fonction monotone sur K car

$$\frac{dk}{dK} = \frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{(p_2 - Kq_2)^2}.$$

De plus, le signe de $\frac{dk}{dK}$ ne dépend pas de la valeur de K , nous pouvons donc écrire

$$\text{signe}\left\{\frac{dk}{dK}\right\} = \text{signe}\{q_1 p_2 - q_2 p_1\} = \text{const.}$$

Cela signifie qu'en faisant tourner la ligne de niveau autour du point F dans le sens positif (c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre), la valeur de la fonction objectif $Z(x)$ augmente ou diminue selon le signe de l'expression $(q_1 p_2 - q_2 p_1)$.

De toute évidence, la figure 3.1 représente le cas où la rotation de la ligne de niveau dans le sens positif entraîne une croissance de la valeur $Z(x)$. En faisant tourner la ligne de niveau autour de son point central F, la ligne $Z(x) = K$ coupe l'ensemble réalisable S en deux sommets (points extrêmes) x^* et x^{**} . Au point x^* , la fonction objectif $Z(x)$ prend sa valeur maximale sur l'ensemble S et au point x^{**} , elle prend sa valeur minimale [5].

Multiples solutions optimales

Il peut arriver que, lors de la rotation de la ligne de niveau sur son point central F, la ligne de niveau $Z(x) = K$ passe par le bord de l'ensemble S (voir le bord de la figure 3.2).

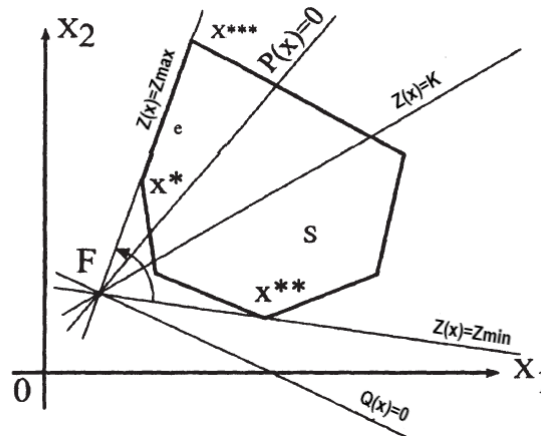


FIGURE 3.2 – Problème LFP à deux variables-Multiples solutions optimales.

Dans ce cas, le problème a un nombre infini de solutions optimales [15] (tous les points x du segment e) qui peuvent être représentés comme une combinaison linéaire de deux points (les sommets x^* et x^{**}) [5] :

$$x = \lambda x^* + (1 - \lambda)x^{**}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Exemple numérique

Pour illustrer cette méthode, nous considérons l'exemple numérique suivant avec un ensemble réalisable borné

$$Z(x) = \frac{6x_1 + 3x_2 + 6}{5x_1 + 2x_2 + 5} \rightarrow \max(\min)$$

Sous contraintes

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &\leq 20, \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 25, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous devons construire un ensemble réalisable. L'ensemble convexe S de toutes les solutions réalisables pour ce problème est représenté par la région colorée de la figure 3.3. Ensuite, pour déterminer les coordonnées du point F , nous résolvons le système

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 &= -6, \\ 5x_1 + 2x_2 &= -5. \end{aligned} \right\}$$

ce qui nous donne $F = (-1, 0)$. Les lignes de niveau étant tournées autour du point F donnent les points extrêmes suivants :

$$A = (0, 5), \quad B = (5, 0) \quad \text{et} \quad C = (0, 0),$$

avec les valeurs objectifs

$$Z(A) = 21/15, \quad Z(B) = 18/15 \quad \text{et} \quad Z(C) = 18/15,$$

respectivement. Ainsi, la fonction objectif $Z(x)$ atteint sa valeur maximale au point $A = (0,5)$, tandis que le problème de minimisation a plusieurs solutions : deux points extrêmes $B = (5,0)$ et $C = (0,0)$, et tous les points x qui peuvent être représentés comme une combinaison linéaire de B et C [5].

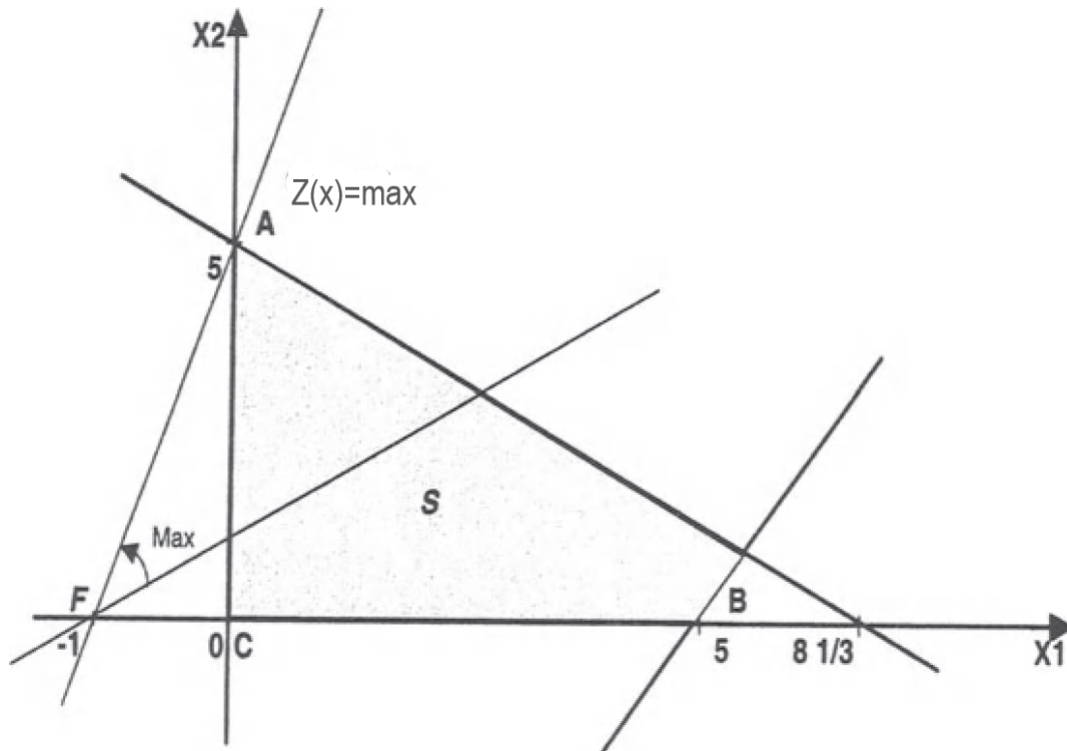


FIGURE 3.3 – Exemple graphique - Ensemble réalisable borné.

3.2.2 Algorithme itératif de résolution d'un problème de programmation fractionnaire linéaire

Le schéma du déroulement de l'algorithme basé sur la définition (ϵ, δ) de la continuité est présenté ci-dessous pour la résolution des problèmes de programmation fractionnaire linéaire.

Comme la fonction objectif est continue en tout point de la région réalisable S , une contrainte itérative est construite en combinant la condition de convergence et la fonction objectif du problème LFP. Grâce à cette contrainte itérative, un nouveau problème de programmation linéaire itératif est obtenu pour avoir la solution optimale

du problème LFP. Ce problème LP itératif est capable de résoudre tous les problèmes LFP qui ont une région réalisable bornée. Afin de générer la solution non bornée et la solution asymptotique, le problème LP itératif sera développé en ajoutant une nouvelle contrainte qui vérifie si la somme des variables de décision tend vers l'infini [3].

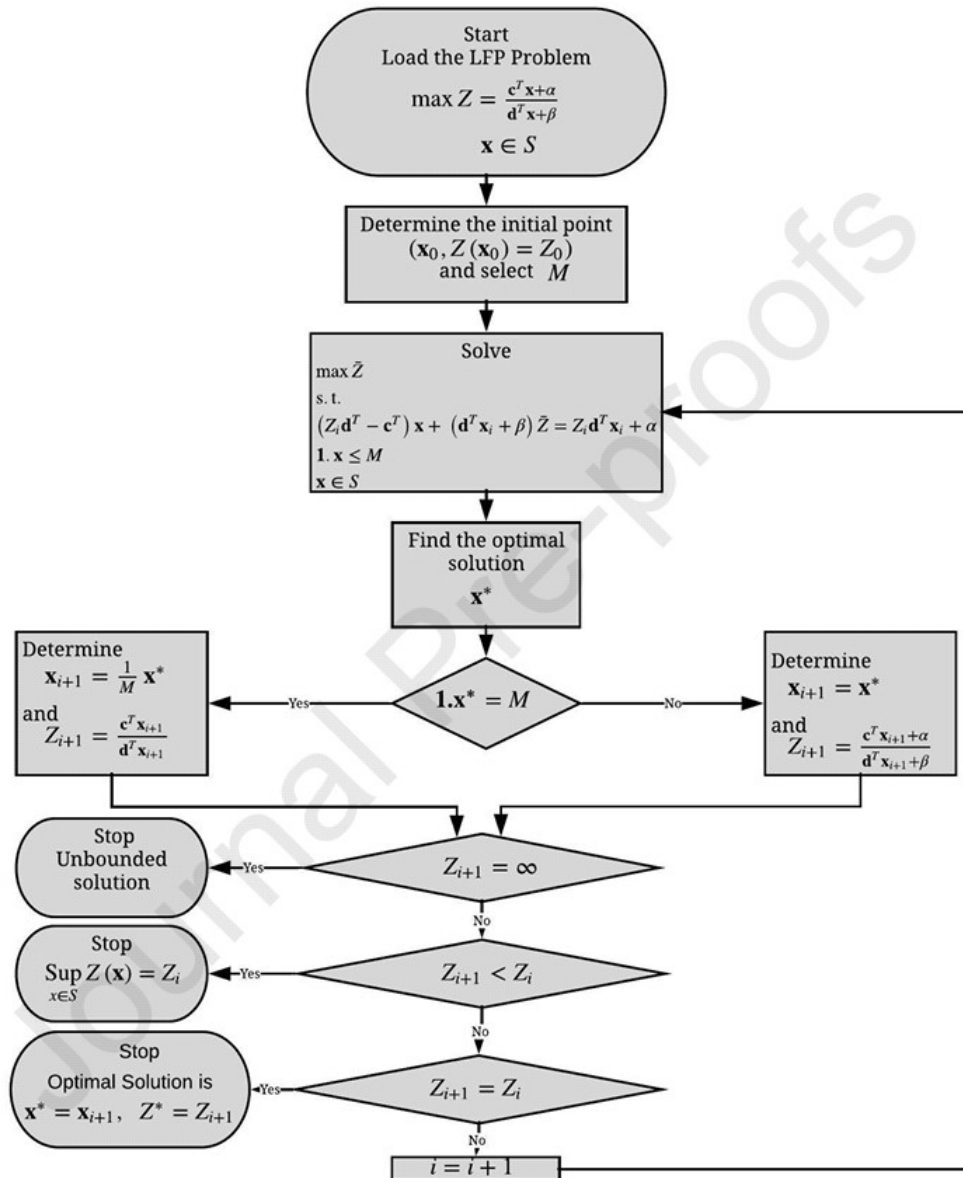


FIGURE 3.4 – Schéma du déroulement de l’algorithme [3].

3.3 MODÈLES LFP

Les applications de la programmation linéaire à diverses branches de l'activité humaine, et en particulier à l'économie, sont bien connues. Les applications de la programmation fractionnaire linéaire sont moins connues, et, jusqu'à présent, moins nombreuses. Bien sûr, la linéarité d'un problème le rend plus facile à traiter, et donc conduit à sa plus grande popularité.

Cependant, tous les problèmes de la vie réelle ne peuvent pas être décrits de manière adéquate dans le cadre de modèles linéaires. La programmation fractionnaire linéaire est une branche de la programmation non linéaire qui n'a été introduite qu'au début des années 60 mais depuis les premières publications consacrées aux problèmes LFP, cette branche a attiré l'attention d'un nombre croissant de chercheurs et de spécialistes, car il existe un large champ de problèmes du monde réel pour lesquels l'utilisation de la programmation fractionnaire linéaire est plus appropriée. Dans cette section, nous considérons plusieurs problèmes qui peuvent être formulés sous forme de problèmes LFP [5].

3.3.1 Interprétation économique

Soit une certaine entreprise qui fabrique n produits différents. En outre, que p_j soit le profit réalisé par l'entreprise à partir d'une unité du $j^{\text{ème}}$ produit, p_0 étant un certain profit constant réalisé dont le taux est indépendant du volume de production. La fabrication d'une unité du produit j coûte q_j et il existe une certaine dépense constante q_0 dont la valeur ne dépend pas de l'activité de production de l'entreprise et qui doit être payée dans tous les cas, même si l'entreprise ne fabrique rien.

Soit b_i le volume d'une certaine ressource rare i dont dispose l'entreprise et a_{ij} le pourcentage de dépense de la ressource i pour la fabrication du produit de type j . L'entreprise doit décider combien d'unités de chaque produit j doit être produit si le rendement calculé comme le rapport (bénéfice total)/(coût total) doit être maximisé.

Ce problème nous amène à définir des variables de décision x_j le volume de production inconnu d'un $j^{\text{ème}}$ produit, $j = 1, 2, \dots, n$. Le bénéfice total de l'entreprise (y compris le bénéfice constant p_0) peut être exprimé comme suit

$$P(x) = \sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0$$

tandis que le coût total de l'activité de production (y compris les dépenses constantes q_0) est

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n q_j x_j + q_0$$

La fonction objectif de l'entreprise peut donc s'écrire comme suit

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^n q_j x_j + q_0} \rightarrow \max$$

Les principales contraintes de l'entreprise sont les suivantes :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Puisque les variables inconnues expriment la quantité de production à produire, bien sûr nous avons également besoin

$$x_j, \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Ce problème est formulé sous forme générale comme un problème LFP avec n variables inconnues non négatives et m contraintes principales [5].

3.3.2 Le problème de transport maritime

Supposons qu'au port A, nous devons charger un navire de capacité limitée C avec n types de marchandises et les transporter au port B. Notre objectif est de déterminer la quantité de chaque type de marchandise à charger pour que le profit réalisé par unité de coût de transport soit maximal. Soit U_i la quantité maximale disponible de la $j^{\text{ème}}$ marchandise, p_j et q_j sont le profit réalisé par unité de cette marchandise et le coût de son transport respectivement, $j = 1, 2, \dots, n$. Si w_j représente le poids de l'unité du $j^{\text{ème}}$ bien, et x_j est une variable inconnue, qui exprime la quantité de la $j^{\text{ème}}$ marchandise à charger, le modèle mathématique d'un tel problème peut être formulé comme suit :

$$\frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j}{\sum_{j=1}^n q_j x_j} \rightarrow \max$$

Sous contraintes

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq C$$

$$0 \leq x_j \leq U_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Le problème formulé de cette manière est un problème LFP avec une contrainte principale et n variables inconnues non négatives bornées [5].

3.3.3 Planification des produits

Supposons qu'un fabricant de réfrigérateurs soit en mesure de produire cinq types de réfrigérateurs : Lehel 220, Lehel 120, Star 200, Star 160 et Star 250. Le fabricant a reçu une commande de distributeurs pour produire 150, 70 et 290 unités de Star 200,

Star 160 et Star 250 respectivement et 240 unités sans indication de type (c'est-à-dire qu'ils peuvent être de n'importe quel type). Le fabricant souhaite formuler un plan de production qui maximise le bénéfice réalisé par unité de coût. Toutes les ressources nécessaires, à l'exception du fréon 12 et de la TL 16, ne sont pas rares. Les quantités maximales disponibles de fréon 12 et de TL 16 sont respectivement de 125 et 80 litres. La fabrication a les exigences et les données connues suivantes :

	L 200	L 120	S 200	S 160	S 250
TL 16(litre/unité)	0.2	0.13	-	-	-
F 12(litre/unité)	-	-	0.22	0.21	0.26
Pix/unité	420.0	365.0	395.0	355.0	450.0
Coût/unié	320.0	290.0	300.0	280.0	340.0

Le fabricant souhaite satisfaire les commandes données et obtenir un profit maximum réalisé par unité de coût total de production.

Soit $x_j, j = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, désigne les quantités inconnues de Lehel 200, Lehel 120, Star 200, Star 160 et Star 250 à produire respectivement. Le bénéfice total réalisé par le fabricant peut être exprimé sous la forme suivante :

$$P(x) = (420 - 320)x_1 + (365 - 290)x_2 + (395 - 300)x_3 + (355 - 280)x_4 + (450 - 340)x_5.$$

Évidemment, le coût total est

$$Q(x) = 320x_1 + 290x_2 + 300x_3 + 280x_4 + 340x_5.$$

Dans ce cas, la fonction objectif sera la suivante :

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{420x_1 + 365x_2 + 395x_3 + 355x_4 + 450x_5}{320x_1 + 290x_2 + 300x_3 + 280x_4 + 340x_5} \rightarrow \max$$

Les contraintes du problème seront :

$$\begin{array}{rcccccc}
 \text{Freon 12 :} & & & +0.22x_3 & +0.21x_4 & +0.26x_5 & \leq & 125 \\
 \text{TL 16 :} & 0.20x_1 & +0.13x_2 & & & & \leq & 80 \\
 \text{Star 200 :} & & & +1.00x_3 & & & \geq & 150 \\
 \text{Star 160 :} & & & & +1.00x_4 & & \geq & 70 \\
 \text{Star 250 :} & & & & & +1.00x_5 & \geq & 290 \\
 \text{Total :} & 1.00x_1 & +1.00x_2 & +1.00x_3 & +1.00x_4 & +1.00x_5 & = & 750
 \end{array}$$

Évidemment, toutes les variables inconnues doivent être non négatives :

$$x_j \geq 0, \quad j = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Dans ce problème LFP, nous avons la fonction objectif à maximiser, 6 contraintes principales et 5 variables inconnues. Notez qu'il serait plus pratique de restreindre

les variables x_j à des valeurs entières. En effet, si nous résolvons ce problème, nous obtenons la solution optimale suivante :

$$x_1^* = 232.69, \quad x_2^* = 0.00, \quad x_3^* = 150.00, \quad x_4^* = 70.00, \quad x_5^* = 297.31$$

ce qui signifie que, par exemple, la quantité de réfrigérateurs Lehel 220 et Star 250 à produire est respectivement de 232.69 et 297.31 unités. Évidemment, une telle solution optimale ne peut être appliquée dans la vie réelle [5].

3.3.4 Le problème financier

Supposons que le conseiller financier du fonds de dotation d'une université doive investir jusqu'à 100.000 unités dans deux types de titres : l'obligation 7 Stars, qui verse un dividende de 7%, et l'action MaxMay, versant un dividende de 9%. Le conseiller a été conseillé de ne pas investir plus de 30.000 unités dans l'action MaxMay, tandis que le montant investi dans l'obligation 7 Stars doit être au moins le double du montant investi dans l'action MaxMay. Indépendamment du montant à investir, le service de la société de courtage qui sert le conseiller coûte 100 unités.

Combien faut-il investir dans chaque titre pour maximiser l'efficacité de l'investissement ?

Soient x et y les montants investis dans l'obligation 7 Stars et l'action MaxMay, respectivement [5]. Nous devons alors avoir

$$x + y \leq 100000;$$

$$x \geq 2y;$$

$$y \leq 30000.$$

Bien sûr, nous exigeons aussi

$$x \geq 0, \quad \text{et} \quad y \geq 0.$$

Le rendement de l'université est

$$R(x, y) = 0.07x + 0.09y$$

tandis que le montant total de l'investissement sera

$$Q(x, y) = x + y + 100.$$

Ainsi, notre modèle mathématique est le suivant

$$Z(x, y) = \frac{R(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{0.07x + 0.09y}{x + y + 100} \rightarrow \max$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} x + y &\leq 100000; \\ x - 2y &\geq 0; \\ y &\leq 30000. \\ x &\geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

3.3.5 Le problème de transport

Nous formulons un problème spécial de la programmation fractionnaire linéaire qui représente une classe spéciale très importante de LFP que nous allons approfondir au chapitre 4.

Une entreprise possède trois centrales électriques qui répondent aux besoins en électricité de quatre villes. Chaque centrale électrique peut fournir les nombres de kilowatt-heures (kwh) d'électricité suivants :

	Usine 1	Usine 2	Usine 3
Offre (millions de kwh)	35	50	40

Les pics de demande d'électricité dans ces villes sont les suivants (en kwh) :

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4
Demande(Millions de kwh)	45	20	30	30

Les coûts d'envoi de 1 million de kwh d'électricité de la centrale à la ville dépendent de la distance sur laquelle l'électricité doit être transportée (voir le tableau 3.1) et le bénéfice de l'entreprise réalisé par 1 million de kwh d'électricité fourni est présenté dans le tableau 3.2.

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4
Usine 1	8	6	10	9
Usine 2	9	12	13	7
Usine 3	14	9	16	5

TABLE 3.1 – Problème de transport - Coûts d'expédition.

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4
Usine 1	5	4	4	3
Usine 2	6	2	3	4
Usine 3	10	5	6	2

TABLE 3.2 – Problème de transport - Bénéfice de l'entreprise.

Nous formulons maintenant un problème LFP visant à maximiser le profit réalisé par l'entreprise pour une unité de frais d'expédition.

Définissons une variable pour chaque chemin possible de l'électricité : x_{ij} -quantité inconnue de kwh d'électricité envoyée de la $i^{\text{ème}}$ centrale à la $j^{\text{ème}}$ ville, $i = \{1, 2, 3\}$; $j = \{1, 2, 3, 4\}$. En fonction de ces variables, le bénéfice total et le coût total de l'entreprise respectivement peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 5x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} + \\
 &\quad 6x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + \\
 &\quad 10x_{31} + 5x_{32} + 6x_{33} + 2x_{34}, \\
 Q(x) &= 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + \\
 &\quad 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + \\
 &\quad 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc formuler la fonction objectif comme suit :

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow \max$$

Le plan de l'entreprise doit satisfaire deux types de contraintes. Premièrement, la puissance totale fournie par chaque centrale ne peut pas dépasser la capacité de la centrale. On a donc les contraintes d'approvisionnement suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 35, \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 50, \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 40.
 \end{aligned}$$

Deuxièmement, chaque ville doit recevoir suffisamment d'énergie pour répondre à sa demande. Une contrainte qui garantit qu'une ville reçoit sa demande est une contrainte de demande. Le plan de l'entreprise doit satisfaire les contraintes de demande suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 45, \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 20, \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 30, \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 30.
 \end{aligned}$$

Comme toutes les variables inconnues x_{ij} doivent être non négatives, nous ajoutons les restrictions de signe

$$x_{ij} \geq 0, \quad \{i = 1, 2, 3\}; \quad \{j = 1, 2, 3, 4\}.$$

En combinant la fonction objectif, les contraintes d'offre, les contraintes de demande et les restrictions de signe, on obtient le problème LFP avec 12 variables non négatives et 7 contraintes principales [5].

3.3.6 Le problème du mélange

Un transformateur de métaux souhaite produire au moins 15 kilogrammes d'un nouvel alliage NA de plomb et d'étain, contenant au moins 60% de plomb et au moins 35% d'étain. Ce nouveau produit peut être vendu à 200 unités par kilogramme. Il existe quatre alliages différents A₁, A₂, A₃ et A₄, disponibles en quantités de 12, 15, 16 et 10 kilogrammes, respectivement. Ces alliages ont les compositions en pourcentage et les prix par kilogramme indiqués dans le tableau ci-dessous.

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
Plomb	40%	60%	80%	70%
Étain	60%	40%	20%	30%
Coûts	240	180	160	210

Comment le transformateur doit-il mélanger les alliages A₁, A₂, A₃ et A₄ pour optimiser le rendement de l'entreprise? En d'autres termes, le transformateur aimerait savoir quelle quantité de chaque alliage doit être mélangée pour que le rapport revenu/coût soit maximal?

Tout d'abord, nous définissons les variables x_1, x_2, x_3 et x_4 qui expriment la quantité de chaque alliage à mélanger. Il est évident que le coût total du mélange est de

$$Q(x) = 240x_1 + 180x_2 + 160x_3 + 210x_4$$

tandis que le revenu total attendu du mélange produit et vendu est de

$$P(x) = 200(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 200x_1 + 200x_2 + 200x_3 + 200x_4.$$

Les conditions explicites du problème peuvent être exprimées par le système d'inégalités suivant

$$\text{Pour le plomb : } \frac{0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.8x_3 + 0.7x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \geq 0.60,$$

$$\text{Pour l'étain : } \frac{0.6x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \geq 0.35;$$

ce qui nous donne le système d'inégalités linéaires suivant

$$-0.20x_1 + 0.00x_2 + 0.20x_3 + 0.10x_4 \geq 0,$$

$$0.25x_1 + 0.05x_2 - 0.15x_3 - 0.05x_4 \geq 0.$$

Comme la valeur disponible de chaque alliage est limitée, nous avons les restrictions suivantes

$$x_1 \leq 12, \quad x_2 \leq 15, \quad x_3 \leq 16, \quad x_4 \leq 10.$$

Enfin, nous devons ajouter au système la condition suivante

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 15$$

puisque le transformateur souhaite produire au moins 15 kilogrammes de nouvel alliage. Bien sûr, nous avons également besoin

$$x_j \geq 0, \quad j = \{1, 2, 3, 4\}.$$

La combinaison de la fonction objectif $Z(x) = P(x)/Q(x)$ avec des restrictions conduit au problème LFP suivant avec quatre variables bornées [5]

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{200x_1 + 200x_2 + 200x_3 + 200x_4}{240x_1 + 180x_2 + 160x_3 + 210x_4} \rightarrow \max$$

Sous contraintes

$$\begin{aligned} -0.20x_1 + \quad \quad \quad +0.20x_3 + 0.10x_4 &\geq 0, \\ 0.25x_1 + 0.05x_2 - 0.15x_3 - 0.05x_4 &\geq 0, \\ x_1 &\leq 12, \\ \quad \quad \quad x_2 &\leq 15, \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_3 &\leq 16, \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_4 &\leq 10, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

3.3.7 Le problème de la localisation

Un exemple de l'intérêt récent pour les modèles de localisation fractionnaire linéaire est donné par la situation pratique de la localisation et du dimensionnement des plateformes pétrolières offshore. Initialement, le problème a été modélisé comme un problème de localisation d'une installation à capacités multiples où les coûts d'investissement doivent être minimisés. Plus tard, il a été suggéré que pour cette situation pratique, il serait préférable de minimiser le rapport coût/production et le problème a été reformulé avec une fonction objectif fractionnaire.

L'un des modèles de localisation discrets les plus connus et les plus utilisés est le problème de localisation des installations sans capacité. Ce problème peut être décrit comme suit : il existe un ensemble discret de localisations possibles pour des installations données, et un ensemble de consommateurs dont la demande de production est connue. L'objectif de l'optimisation est de trouver un emplacement pour les équipements qui satisfait toutes les contraintes données pour la demande, et maximise le bénéfice ou l'efficacité calculée comme le ratio bénéfice/coût (parfois dans la littérature spécialisée l'indice de la rentabilité). Les installations sont supposées avoir une capacité illimitée (installation sans capacité), c'est-à-dire que toute installation peut satisfaire la demande de tous les consommateurs. Dans le cas où chaque installation ne peut satisfaire la demande jusqu'à une limite donnée, le problème s'appelle le problème de localisation d'installations avec capacité.

Dans sa forme la plus générale, le problème de localisation d'installations sans capacité sous forme de LFP peut être formulé comme suit [13] :

Soit $I = \{1, 2, \dots, m\}$ l'ensemble des consommateurs et $J = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des sites où les installations données peuvent être situées.

Soit également f_j le coût fixe d'ouverture d'une installation dans le site j et C_{ij} le bénéfice associé à la satisfaction de la demande des consommateurs de l'installation j . Habituellement, C_{ij} est une fonction des coûts de production du site j , de la demande et de l'offre et le prix de vente du consommateur i , ainsi que les coûts de transport entre le consommateur i et le site j . Évidemment, sans perte de généralité, on peut supposer que les coûts fixes f_j sont non négatifs. En introduisant les variables

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si l'établissement } j \text{ est ouvert,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

et

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \{1, 2, \dots, m\}, \quad j = \{1, 2, \dots, n\},$$

Où x_{ij} est une fraction inconnue de la demande du consommateur i couverte par l'installation j , nous pouvons formuler les problèmes de localisation d'installations sans capacité sous la forme suivante :

$$Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}}{\sum_{j=1}^n f_j y_j} \rightarrow \max,$$

Sous contraintes

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^n f_j y_j \geq P_{\min} \quad (3.14)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \{1, 2, \dots, m\},$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i = \{1, 2, \dots, m\}, \quad j = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \{1, 2, \dots, m\}, \quad j = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$y_j = 0 \text{ ou } 1, \quad j = \{1, 2, \dots, n\},$$

Où l'on suppose que $f_j \geq 0$, $j = \{1, 2, \dots, n\}$, et $P_{\min} > 0$. La contrainte supplémentaire (3.14) garantit ici un profit minimum P_{\min} . Notons que le problème LFP donné contient des variables inconnues discrètes y_j , et par conséquent, appartient à la classe des problèmes LFP entiers.

Une telle énumération des applications du monde réel de la programmation fractionnaire peut être aussi importante que dans le cas de la programmation linéaire. Nous nous contentons ici de noter que les problèmes LFP sont particulièrement utiles

dans la résolution des problèmes économiques, où diverses activités utilisent certaines ressources rares dans des proportions différentes, tandis que l'objectif est de trouver un plan qui optimise un rapport bénéfice/coût généralement soumis aux contraintes imposées aux ressources limitées [5].

MÉTHODE ITÉRATIVE POUR RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE TRANSPORT FRACTIONNAIRE LINÉAIRE

4

Le problème de transport fractionnaire linéaire (LFTP) est largement rencontré comme un type particulier de problème de transport (TP) dans la vie réelle. Dans ce chapitre, un algorithme basé sur la définition traditionnelle de la continuité, est présenté pour résoudre le LFTP. Une contrainte itérative est construite en combinant la fonction objectif du LFTP et la condition de l'offre et de la demande, puisque la fonction objectif est continue en tout point de la région réalisable. Grâce à cette contrainte obtenue, le LFTP est converti en un problème de programmation linéaire (LP) itératif pour atteindre la solution optimale. Les exemples numériques sont réalisés pour les cas linéaires et asymptotiques afin d'illustrer la méthode [6].

4.1 POSITION DU PROBLÈME

Le LFTP est un problème optimisant le taux de rentabilité exprimé en coût/profit, temps/profit ou le coût/quantité de matériaux à transporter sous des contraintes d'offre et de demande. Le modèle mathématique d'un LFTP général peut être énoncé comme suit :

$$\min Z(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} + p_0}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij} + q_0} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq, =, \geq a_i, & i = \{1, \dots, m\} & (1b) \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq, =, \geq b_j, & j = \{1, \dots, n\} & (1c) \\ x_{ij} \geq 0, & \forall i, j & (1d) \end{cases}$$

Où $P = [p_{ij}]_{m \times n}$ et $Q = [q_{ij}]_{m \times n}$ sont des matrices associées aux fonctions linéaires du numérateur et du dénominateur, respectivement, p_0 et q_0 sont constants, a_i ($a_i > 0, \forall i$) est la quantité d'approvisionnement de la $i^{\text{ème}}$ source, b_j ($b_j > 0, \forall j$) est la quantité de demande de la $j^{\text{ème}}$ région, et $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})$ est la variable de

décision qui se réfère à la quantité de produit transportée de la $i^{\text{ème}}$ source d'approvisionnement à la $j^{\text{ème}}$ région de demande. Nous supposons que $P(x) > 0$ (puisque'il s'agit d'un objectif pour le TP, il sera toujours positif), $Q(x) > 0, \forall x = x_{ij} \in S$, où la région réalisable S est un ensemble convexe et non vide défini par les contraintes (1b), (1d) et

$$Z : S \subset \mathbb{R}^{mn} \longrightarrow R(S) \subset \mathbb{R}$$

De plus nous supposons que :

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j \quad (2)$$

qui est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution réalisable au problème (1a), (1d). Car l'offre totale n'est pas inférieure à la demande totale.

Théorème 4.1 *LFTP est résoluble si et seulement si l'inégalité (2) ci-dessus est vérifiée.*

Remarque 4.1 *Avec l'hypothèse $Q(x) > 0$, la fonction objectif est continue sur \mathbb{R} , et sur son domaine S . Ce qui signifie que $Z(x)$ est continue $\forall x^k \in S$. Notons que $Z(x^k) = Z^k$. La continuité peut-être énoncée en termes de voisinages traditionnels comme suit : $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$, s'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in B(x^k, \delta)$ et $Z \in (Z^k, \epsilon)$ où $Z(x^k) = Z^k$, alors $Z(x)$ est continue en $x^k \in \mathbb{R}^{mn}$ donné.*

4.2 LA MÉTHODOLOGIE

Compte tenu de l'algorithme de 3.4, la convergence est assurée pour chaque $(Z, x) \in B(Z^k, \epsilon) \times B(x^k, \delta)$ et la condition de convergence pour LFTP (1)

$$Zx = Z^k x + x^k Z - Z^k x^k \quad (3)$$

est obtenue à partir de la fonction objectif fractionnaire (1a) de LFTP, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} Z x_{ij} + Z q_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} + p_0 \quad (4)$$

En combinant la condition de convergence (3) et l'autre expression de la fonction objectif fractionnaire (4), nous avons :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} (Z^k x_{ij} + Z x_{ij}^k - Z^k x_{ij}^k) + Z q_0 - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} - p_0 = 0$$

En suivant les équations algébriques,

$$Z^k \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij} + q_0 \right] - Z^k \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij}^k + q_0 \right] + Z \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} x_{ij}^k + q_0 \right]$$

$$-\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij}x_{ij} - p_0 = 0$$

En notant que

$$Z^k = Z(x^k) = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij}x_{ij}^k + p_0}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}x_{ij}^k + q_0}$$

$$Z^k \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}x_{ij} + q_0 \right] - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij}x_{ij}^k - p_0 + Z \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}x_{ij}^k + q_0 \right]$$

$$-\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij}x_{ij} - p_0 = 0$$

Ou

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Z^k q_{ij} - p_{ij})x + \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}x^k + q_0 \right] Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij}x^k + p_0 - Z^k q_0 + p_0$$

Ou

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Z^k q_{ij} - p_{ij})x + \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}x^k + q_0 \right] Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Z^k q_{ij}x^k + p_0 \quad (5)$$

est obtenu. Z et \bar{Z} sont utilisés pour expliquer la fonction objectif du problème LFTP et LP, respectivement. Le problème itératif LP suivant, dénommé $LFTP - LP_k$ est construit pour résoudre le LFTP (1) :

$$\min \bar{Z} \quad (6.1)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Z^k q_{ij} - p_{ij})x + \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}x^k + q_0 \right] \bar{Z} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Z^k q_{ij}x^k + p_0 \quad (6.2)$$

$$x \in S \quad (6.3)$$

L'exposant $k \in \{0, 1, 2\}$ indique le compteur d'itérations et (6.2) représente la contrainte itérative. L'algorithme commence par un point initial (x^0, Z^0) , c'est-à-dire $k = 0$. En utilisant la solution initiale, une deuxième solution réalisable (x^1, Z^1) est obtenue à l'aide du sous-problème (6). Ensuite, une autre solution réalisable (x^2, Z^2) est déterminée en utilisant la solution réalisable précédente (x^1, Z^1) , et ainsi de suite. En règle générale, si (x^k, Z^k) est une solution réalisable obtenue à l'itération k , alors la procédure de résolution se poursuit avec une nouvelle solution réalisable (x^{k+1}, Z^{k+1}) à l'itération $k + 1$.

Proposition 4.1 *Soit $x^0 \in S$ est un point initial, et $x^1, x^2, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots$ sont les solutions optimales successives de (6) $\forall k \in \mathbb{N}$ (le compteur d'itération). Puis, les valeurs de la fonction objectif fractionnaire se présentent sous la forme d'une séquence décroissante pour $x^1, x^2, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots$ c'est-à-dire $Z^0 \geq Z^1 \geq \dots \geq Z^k \geq Z^{k+1}, \dots$ jusqu'à atteindre la solution optimale de (1).*

Proposition 4.2 Les vecteurs gradient de la fonction objectif fractionnaire Z et de la fonction objectif linéaire \bar{Z} sont égaux en tout point $x^k \in S$.

Résultat 4.1 Supposons que \bar{x}^* se réfère à la solution optimale du problème. La direction du gradient spécifie la direction de la décroissance d'une fonction. Par conséquent, une décroissance de la fonction objectif linéaire $\bar{Z}(x^k) \geq \bar{Z}(\bar{x}^*)$ implique une décroissance de la fonction objectif fractionnaire $Z(x^k) \geq Z(\bar{x}^*)$.

4.2.1 Détermination d'une solution initiale

Tout d'abord, il faut déterminer le point initial pour lancer l'algorithme. En choisissant une solution initiale (x^0, Z^0) , la seule condition à considérer est que la fonction objectif fractionnaire ne doit pas être indéfinie à ce point. Dans cette étude, le point initial réalisable est choisi en résolvant le problème LP suivant :

$$\min_{x \in S} 0 \quad (7)$$

Puisque nous résolvons le LFTP, il est possible d'obtenir la première solution réalisable en utilisant la méthode du coin nord-ouest (ou coin supérieur gauche), la méthode du profit maximum (ou coût minimum) et la méthode de Vogel qui sont adaptées à LFTP par [5].

4.2.2 Détermination du critère d'arrêt

1. En considérant la Proposition 1, une séquence décroissante est constituée de l'objectif fractionnaire grâce aux solutions optimales du problème (6). Si le LFTP (1) a une solution optimale x^* résultant en une valeur finie Z^* , alors la séquence correspondante sera bornée ci-dessous. La nouvelle solution obtenue à chaque itération se rapproche de Z^* . De cette manière, si les fonctions objectif sont atteintes de la même valeur dans deux itérations successives, alors $Z^{k+1} = Z^k$ peut être identifié comme le critère d'arrêt.
2. Lorsque la plus petite variable de décision x_{ij} s'approche de l'infini sous des contraintes de l'offre et de la demande, si la fonction objectif de LFTP converge vers une valeur limite finie, alors cette situation est appelée le cas asymptotique. Dans ce cas, la valeur minimale de la fonction objectif fractionnaire sera obtenue à la position du vecteur ligne de la région réalisable [3]. C'est-à-dire, $\inf_{x \in S} Z(x) = Z^k$.
3. Lorsque x tend vers l'infini, si la fonction objectif fractionnaire s'approche de l'infini, alors LFTP est non bornée.

4.2.3 Exécution de l'algorithme

Etape 1 : Choisir la solution initiale (x^0, Z^0) pour le LFTP (1) et M qui est un très grand nombre, fixer $k = 0$.

Etape 2 : Obtenir la solution optimale \bar{x}^* de $LFTP - LP_k$.

Etape 3 : Trouver la valeur du produit de $1.\bar{x}^*$.

Etape 3_i : Si $1.\bar{x}^* = M$, alors on prend $x^{k+1} = \frac{1}{M}\bar{x}^*$ et $Z^{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij}x^{k+1}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij}x^{k+1}}$.

Etape 3_{ii} : Si $1.\bar{x}^* \neq M$, alors on prend $x^{k+1} = \bar{x}^*$ et $Z^{k+1} = \frac{P(x^{k+1})}{Q(x^{k+1})}$.

Etape 4 : Prendre en considération Z^{k+1} .

Etape 4_i : Si $Z^{k+1} \rightarrow \infty$, alors la LFTP (1) est non bornée. STOP.

Etape 4_{ii} : Si $Z^{k+1} > Z^k$, alors la solution asymptotique se produit comme le plus grand minorant de toutes les solutions alternatives : $\inf_{x \in S} Z(x) = Z^k$. STOP.

Etape 4_{iii} : Si $Z^{k+1} = Z^k$, alors $x^* = x^{k+1}$ est la solution optimale et $Z^* = Z^{k+1}$ est la valeur optimale de LFTP. STOP.

Etape 4_{iv} : Si $Z^{k+1} \neq Z^k$, alors on pose $k = k + 1$, et on retourne à l'étape 2.

L'organigramme de la méthode présentée est illustré à la figure 4.1. L'algorithme est présenté avec la direction de l'objectif minimum. D'autre part, nous notifions que la procédure peut être mise à jour dans le sens de l'objectif maximum par rapport à la structure du LFTP grâce à la flexibilité de l'algorithme.

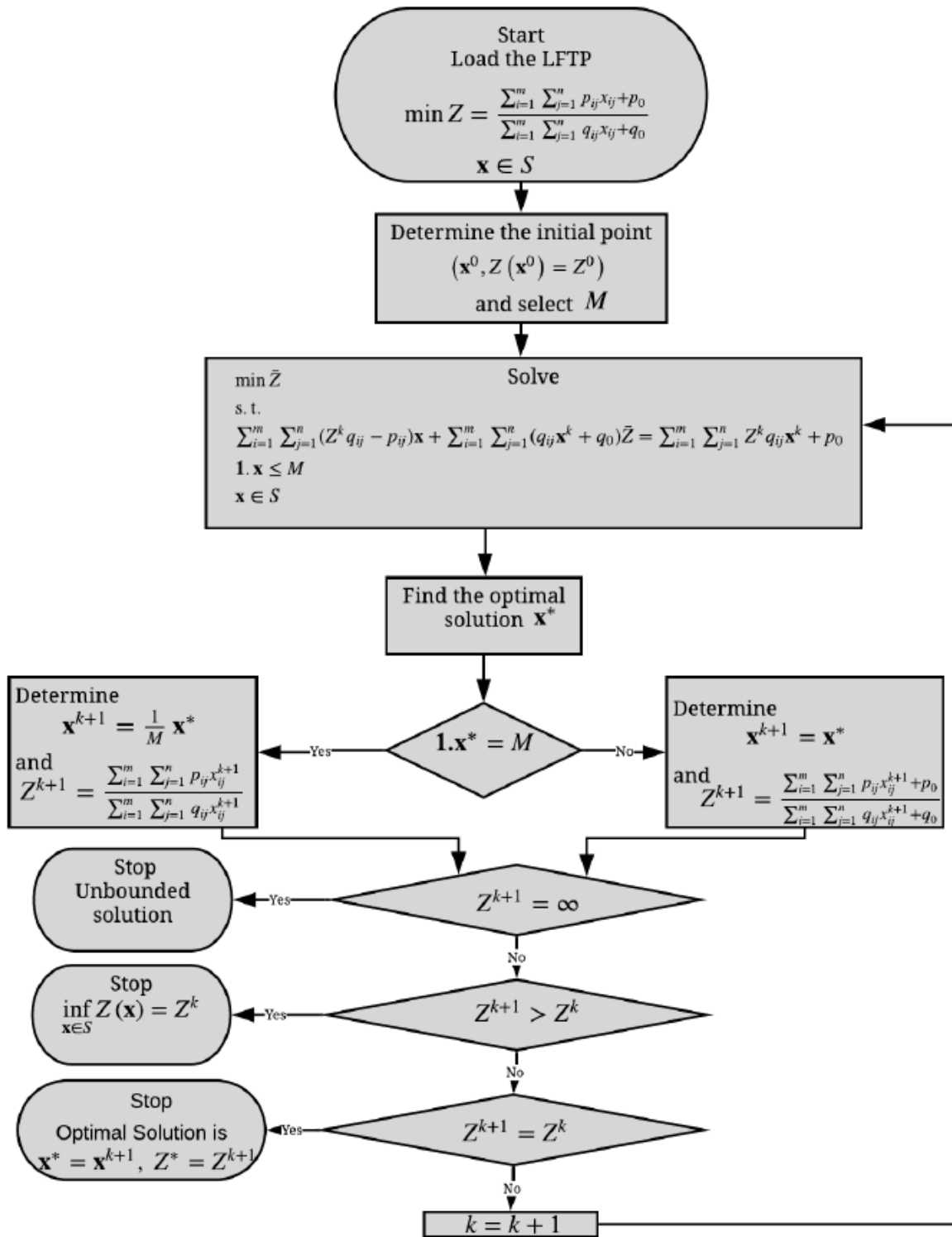


FIGURE 4.1 – Organigramme de l’algorithme du LFTP ayant un objectif de minimisation.

4.3 LES ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES

Dans cette section, la nouvelle méthode de résolution introduite est rendue plus facile à comprendre par des exemples de la littérature pour différents cas et un problème réel. Des problèmes LFTP générés aléatoirement sont également réalisés pour démontrer la performance de l'algorithme présenté.

4.3.1 Exemples

Exemple 4.1 (*Cas de solution optimale*) : On considère le LFTP suivant [5]

$$\begin{aligned} \max Z(x) &= \frac{10x_{11}+14x_{12}+8x_{13}+12x_{14}+8x_{21}+12x_{22}+14x_{23}+8x_{24}+9x_{31}+6x_{32}+15x_{33}+9x_{34}+100}{15x_{11}+12x_{12}+16x_{13}+8x_{14}+10x_{21}+6x_{22}+13x_{23}+12x_{24}+13x_{31}+15x_{32}+12x_{33}+10x_{34}+120} \\ \text{S.C.} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 150, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 250, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 50, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 150, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

Soit S la région réalisable.

Etape 1 : La solution initiale $x^0 = (0, 0, 0, 150, 0, 200, 50, 0, 150, 50, 0, 0)$ est obtenue et l'objectif fractionnaire initial $Z^0 = \frac{6650}{5870} \cong 1.1329$ est atteint. Nous choisissons également $M = 10^{10}$.

Etape 2 : En utilisant x^0 et Z^0 , le problème LFTP – $LP_{(0)}$ est constitué comme suit :

$$\begin{aligned} \max \bar{Z} \\ \text{S.C.} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_{ij} &\leq 10^{10}, \\ 7.087x_{11} - 0.3304x_{12} + 10.2261x_{13} - 2.887x_{14} + 3.3913x_{21} - 5.1652x_{22} + 0.8087x_{23} + \\ 5.6696x_{24} + 5.8087x_{31} + 11.087x_{32} - 1.3304x_{33} + 2.3913x_{34} + 5870\bar{Z} &= 6650 \quad (8) \\ x &\in S \end{aligned}$$

La solution optimale de (8) est $(\bar{x}^*) = (0, 0, 0, 150, 0, 250, 0, 0, 150, 0, 50, 0)$.

Etape 3 : Puisque $1.\bar{x}^* \neq 10^{10}$, alors $x^1 = \bar{x}^*$, le numérateur et le dénominateur de l'objectif fractionnaire sont calculés comme suit

$$Z^1 = \frac{7000}{5370} \cong 1.3035$$

Etape 4_{iv} : Puisque $Z^0 \neq Z^1$, alors poser $k = 1$, et retourner à l'étape 2.

Etape 2 : Le LFTP – $LP_{(1)}$ est constitué comme suit :

$$\begin{aligned} \max \bar{Z} \\ \text{S.C.} \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_{ij} &\leq 10^{10}, \\ 9.7143x_{11} + 1.7714x_{12} + 13.0286x_{13} - 1.4857x_{14} + 5.1429x_{21} - 4.1143x_{22} + 3.0857x_{23} + \end{aligned}$$

$$7.7714x_{24} + 8.0857x_{31} + 13.7143x_{32} + 0.7714x_{33} + 4.1429x_{34} + 5370\bar{z} = 7000 \quad (9)$$

$x \in S$

La solution optimale de (9) est $\bar{x}^* = (0, 0, 0, 150, 0, 250, 0, 0, 150, 0, 50, 0)$.

Etape 3_{ii} : Puisque $1.\bar{x}^* \neq 10^{10}$, alors $x^2 = \bar{x}^*$ et $Z^2 = \frac{7000}{5370} \cong 1.3035$ est calculé.

Etape 4_{iii} : Puisque $Z^2 = Z^1$, alors l'algorithme se termine avec la solution optimale $x^* = x^{2*} = (0, 0, 0, 150, 0, 250, 0, 0, 150, 0, 50, 0)$ et la valeur de la fonction objectif est :

$$Z^* = \frac{7000}{5370} \cong 1.3035.$$

On affirme que cet algorithme trouve la même solution optimale que la méthode du simplexe de transport [5]. Cependant, l'algorithme génère la solution optimale en appliquant deux itérations contenant un problème de programmation linéaire au lieu de nombreux calculs.

Exemple 4.2 (Cas asymptotique) : On considère le LFTP suivant [14] :

$$\min Z(x) = \frac{5x_{11}+4x_{12}+2x_{13}+6x_{21}+5x_{22}+3x_{23}+8x_{31}+9x_{32}+4x_{33}}{6x_{11}+3x_{12}+4x_{13}+7x_{21}+4x_{22}+2x_{23}+6x_{31}+5x_{32}+2x_{33}}$$

S.C.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\geq 5, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\geq 10, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 9, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 8, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 15, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\leq 6, \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

soit S la région réalisable.

Etape 1 : La solution initiale $x^0 = (0, 15, 0, 10, 0, 0, 0, 0, 0)$ est déterminée, et l'objectif fractionnaire initiale $Z^0 = \frac{120}{115} \cong 1.043448$ est atteint. Nous choisissons également $M = 10^{10}$.

Etape 2 : En utilisant x^0 et Z^0 , le problème LFTP – $LP_{(0)}$ est constitué comme suit :

$$\min \bar{Z}$$

S.C.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 10^{10}$$

$$1.2609x_{11} - 0.8695x_{12} + 2.1739x_{13} + 1.3043x_{21} - 0.8261x_{22} - 0.913x_{23} - 1.7391x_{31} - 3.7826x_{32} + 1.913x_{33} + 115\bar{Z} = 120 \quad (10)$$

$x \in S$

La solution optimale de (10) est $\bar{x}^* = (0, 0, 5, 8, 11, 9895, 0, 0, 3.0105, 0)$.

Etape 3_i : Puisque $1.\bar{x}^* \neq 10^{10}$, alors $x^1 = \bar{x}^*$, et l'objectif fractionnaire est calculé comme suit : $Z^1 = \frac{145.042}{139.0105} \cong 1.04338$.

Etape 4_{iv} : Puisque $Z^0 \neq Z^1$, alors poser $k = 1$, retourner à l'étape 2.

Etape 2 : Le LFTP – LP_1 est constitué comme suit :

$$\min \bar{Z}$$

S.C.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 10^{10}$$

$$1.2603x_{11} - 0.8698x_{12} + 2.1736x_{13} + 1.3037x_{21} - 0.8264x_{22} - 0.9132x_{23} - 1.7397x_{31} - 3.7831x_{32} - 1.9132x_{33} + 139.01\bar{Z} = 145.042 \quad (11)$$

$x \in S$

La solution optimale de (11) est $\bar{x}^* = (0, 0, 6, 10, 6302, 15, 0, 0, 0, 0)$.

Etape 3 : Puisque $1.\bar{x}^* \neq 10^{10}$, alors $x^2 = \bar{x}^*$, et $Z^2 = \frac{150.7812}{158.4114} \cong 0.9518$ est calculé.

Etape 4_{iv} : Puisque $Z^2 \neq Z^1$, alors poser $k = 2$, et retourner à l'étape 2.

Etape 2 : En utilisant x^2 et Z^2 , le problème LFTP – LP₍₂₎ est constitué comme suit :

min \bar{Z}

S.C.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 10^{10},$$

$$0.711x_{11} - 1.1445x_{12} + 1.8073x_{13} + 0.6628x_{21} - 1.1927x_{22} - 1.0963x_{23} - 2.289x_{31} - 4.2408x_{32} - 2.0963x_{33} + 158.4114\bar{Z} = 150.7812 \quad (12)$$

$x \in S$.

La solution optimale de (12) est $x^* = (0, 15, 6, 237, 0321, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Etape 3_i : Puisque $1.\bar{x}^* \neq 10^{10}$, alors $x^3 = \bar{x}^*$, et l'objectif fractionnaire est calculé comme suit :

$$Z^3 = \frac{1494.1926}{1728.2247} \cong 0.8646.$$

Etape 4_{iv} : Puisque $Z^3 \neq Z^2$, alors poser $k = 3$, et retourner à l'étape 2.

Etape 2 : En utilisant x^3 et Z^3 , le problème LFTP – LP₍₃₎ est constitué comme suit :

min \bar{Z}

S.C.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 10^{10},$$

$$0.1875x_{11} - 1.4062x_{12} + 1.4583x_{13} + 0.0521x_{21} - 1.5417x_{22} - 1.2708x_{23} - 2.8125x_{31} - 4.6771x_{32} - 2.2708x_{33} + 1728.2247\bar{Z} = 1494.1926 \quad (13)$$

$x \in S$

La solution optimale de (13) est $\bar{x}^* = (8032, 0790, 15, 6, 10, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Etape 3_i : Puisque $1.\bar{x}^* \neq 10^{10}$, alors $x^4 = \bar{x}^*$, et l'objectif fractionnaire est calculé comme suit :

$$Z^4 = \frac{40292.395}{48331.474} \cong 0.83367.$$

Etape 4_{iv} : Puisque $Z^4 \neq Z^3$, alors poser $k = 4$, et retourner à l'étape 2.

Etape 2 : Le LETP – LP₍₄₎ est constitué comme suit :

min \bar{Z}

S.C.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 10^{10},$$

$$0.002x_{11} - 1.499x_{12} + 1.3347x_{13} - 0.1643x_{21} - 1.6653x_{22} - 1.3326x_{23} - 2.998x_{31} - 4.8317x_{32} - 2.3327x_{33} + 48331.474\bar{Z} = 40292.395 \quad (14)$$

$x \in S$

la solution optimale de (14) est $\bar{x}^* = (0, 15, 6, 10, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Etape 3 : Puisque $1.\bar{x}^* \neq 10^{10}$, alors $x^5 = \bar{x}^*$ et $Z^5 = \frac{132}{139} \cong 0.9496$ est calculé.

Etape 4_{ii} : $Z^5 > Z^4$, donc la valeur limite de la fonction objectif à la solution asymptotique du LFTP est $\frac{40292.395}{48331.474} \cong 0.83367$. À savoir, $\inf_{x \in S} Z(x) = Z^4$.

Ainsi, la solution générée par l'algorithme donne une meilleure valeur de la fonction objectif que la solution optimale de la méthode de Gupta et al. Une comparaison des solutions est présentée dans le tableau ci-dessous.

Chapitre 4. Méthode itérative pour résoudre un problème de transport fractionnaire linéaire

	Méthode de Gupta et al	La nouvelle méthode
x^*	(5, 9, 6, 4, 6, 0, 0, 0, 0)	(8032.0790, 15, 6, 10, 0, 0, 0, 0, 0)
Z^*	$\frac{127}{133} = 0.9549$	0.83367

TABLE 4.1 – Comparaison entre la méthode de Gupta al. et la nouvelle méthode.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Toute entreprise peu importe sa taille, son domaine d'activité est amenée à faire face à des problèmes de gestion au quotidien. Parmi ces problèmes, on cite le problème de transport qui nécessite la mise en oeuvre d'un procédé de prise de décision rationnel à cause de son niveau de complexité particulièrement élevé et à cause des coûts supplémentaires qu'il génère s'il est mal géré. Ce qui souligne l'importance qu'occupe ce type de problème dans la gestion quotidienne de l'entreprise.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés d'avantage à la modélisation, la résolution et l'amélioration d'une solution de base d'un problème de transport par différentes méthodes. Ensuite, nous avons étudié d'une façon générale la programmation fractionnaire linéaire et nous avons exposé quelques méthodes de résolution des problèmes LFP. Puis à la fin nous avons présenté une méthode itérative pour la résolution du problème de transport fractionnaire linéaire. Cette méthode joue un rôle important dans la résolution du LFTP dans des situations réelles en raison de son efficacité et de sa facilité de calcul. Cet algorithme surmonte avec succès le défaut en termes de calcul en raison de l'augmentation du processus au fur et à mesure que la taille du problème augmente puisqu'il s'agit d'une procédure itérative basée sur la programmation linéaire contrairement aux méthodes existantes. L'algorithme peut être facilement appliqué même aux LFTP à grande échelle puisqu'il résout le LFTP par une série de problèmes de LP. Un autre avantage de l'algorithme est qu'il a la capacité de résoudre le LFTP avec des contraintes mixtes puisque la méthode ne dépend pas des contraintes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gaani Kherkhache Salsabil. *Problème de transport*. Mémoire de master mathématiques, Université Mohamed Khider (Biskra), 2019.
- [2] Ben-Iken Mohamed. *Problème de transport : Modélisation et résolution*. Mémoire de licence mathématiques et applications, UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH, 2017.
- [3] Beyza Ahlatcioglu Ozkok. An iterative algorithm to solve a linear fractional programming problem. *Computers & Industrial Engineering*, 140 :106234, 2020.
- [4] R. Tahi & F. Bouarab-Dahmani. *Algorithmes du transport*. Editions Al-Djazair (Alger), 2018.
- [5] Erik B. Bajalinov. *Linear-fractional programming theory, methods, applications and software*, volume 84 of "Applied Optimization". Springer Science Business Media, 2003.
- [6] Beyza Ahlatcioglu Ozkok & Sema Akin Bas & Gonce Kocken Hale. A novel iterative method to solve a linear fractional transportation problem. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 18 :151–166, 2022.
- [7] Alfred Asase. *The transportation problem*. Thesis submitted to the department of mathematics faculty of physical science and technology, Kumasi, Octobre 2011.
- [8] Sifaoui Thiziri. *Solving multi-objective transport problems in an uncertain environment*. Thesis submitted to the department of mathematics faculty of science, UMMTO, 2020/2021.
- [9] Boualem Benmazouz. *Recherche Opérationnelle de gestion*. ATLAS Edition (Alger), Mars 1995.
- [10] Guénette Robert. Problème de transport. <https://www2.mat.ulaval.ca/fileadmin/Cours/MAT-2920/Chapitre6.pdf>.
- [11] Procedure to solve transportation problem. <https://www.wisdomjobs.com/e-university/quantitative-techniques-for-management-tutorial-297/procedure-to-solve-transportation-problem-9889.html>.

- [12] Transportation problem. <https://cbom.atozmath.com/example/CBOM/Transportation.aspx?q=modi&q1=E1>.
- [13] Ana Isabel Barros. *Discrete and fractional programming techniques for location models*, volume 3. Springer Science & Business Media, 1998.
- [14] A.Gupta & S.Khanna & M.C.Puri. A paradox in linear fractional transportation problems with mixed constraints. pages 375–387, 1993.
- [15] Leslous Fadila & Goubi Mouloud & Ouanes Mohand. A new approach for non convex optimization problems applied to hump and benchmark functions. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 2022.

NOTATIONS

LFTP	Linear Fractional Transportation Problem
LFP	Linear Fractional Problem
LP	Linear Programming
TP	Transportation Problem
CNO	Coin Nord-Ouest
MODI	Méthode de Distribution Modifiée

Résumé

Toute entreprise est amenée à faire face à des problèmes de gestion au quotidien afin d'optimiser sa production et ses services. C'est pour cela que plusieurs entreprises s'intéressent à la recherche opérationnelle qui est une discipline moderne qui utilise des modèles mathématiques, statistiques et des algorithmes pour modéliser et résoudre des problèmes complexes, en déterminant la solution optimale et en améliorant la prise de décisions. Parmi ces problèmes, nous citons le problème de transport. C'est un modèle important de la programmation linéaire qui a mérité une attention particulière dans la recherche opérationnelle et cela revient à la simplicité de la procédure développée pour sa solution.

Dans ce mémoire, nous présentons un algorithme qui décrit une méthode de résolution des problèmes de transport fractionnaires linéaires. Pour mieux comprendre cet algorithme nous nous sommes intéressés à la modélisation, la résolution et l'amélioration de la solution de base d'un problème de transport ainsi qu'à la théorie de la programmation fractionnaire linéaire.

Abstract

Every company has to face management problems on a daily basis in order to optimize its production and services. This is why many companies are interested in operational research which is a modern discipline which uses mathematical and statistical models and algorithms to model and solve complex problems, by determining the optimal solution and improving decision making. Among these problems, we mention the transportation problem. It is an important model of linear programming that has deserved a special attention in operational research and this is due to the simplicity of the procedure developed for its solution.

In this document, we present an algorithm that describes a method for solving linear fractional transportation problems. For a better understanding of this algorithm we are interested in modeling, solving and improving the basic solution of a transportation problem as well as in the theory of linear fractional programming.