

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté Du Génie Electrique Et De L'informatique  
Département D'Electrotechnique

## **Mémoire de Fin d'Etudes De MASTER ACADEMIQUE**

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Electrotechnique

Spécialité : Machines Electriques

*Présenté par*

**BELKACEMI SLIMANE**

**AISSOU MEZIANE**

**Thème**

***Evaluation non destructive par courants de Foucault***

**Membre de jury :**

**Mme F. BOUALI            Promotrice**  
**MAA, UMMTO**

**Mme G .YOUSFI            Présidente**  
**MAA, UMMTO**

**Mr F. Namani            Examineur**  
**MAA, UMMTO**

**Melle z .LARABI            Examinatrice**  
**MAA, UMBB**



Remerciements

On remercie Dieu de nous avoir donné le courage et la patience afin de mener à terme ce travail.

Nous tenons à exprimer vivement notre profonde gratitude à notre promotrice Mme F.Bouali pour l'aide, le suivi et l'intérêt qu'elle n'a cessé de nous apporter jusqu'à l'achèvement de ce travail.

Nous tenons également à remercier l'ensemble des membres du jury qui ont fait l'honneur de juger ce travail.

Enfin, nos chaleureux remerciements vont également aux enseignants du département de génie électrique pour avoir contribué à notre formation.

# Sommaire

**chapitre I: Présentation du contrôle non destructif**

I.1	Introduction :	4
I.1.1	Définition :	4
I.2	Contrôle non destructif : applications et tendances :	4
I.2.1	Champ d'application actuel :	5
I.2.2	Le contrôle en cours de fabrication :	5
I.2.3	Le contrôle à la réception :	5
I.2.4	Le contrôle en service :	5
I.2.5	Tendances et évolution :	6
I.3	Les différentes méthodes de contrôle non destructif (CND) :	6
I.3.1	Examen visuel :	6
I.3.2	Le ressuage :	6
I.3.3	La magnétoscopie :	7
I.3.4	Les ultrasons :	8
I.3.5	La radiographie industrielle :	9
I.4	Le contrôle non destructif par les courants de Foucault :	9
I.4.1	Définition et principe de contrôle par courant de Foucault :	9
I.4.2	Effet de peau - profondeur de pénétration du courant de Foucault :	10
I.5	Types du capteur:	12
I.5.1	Capteur caractérisé par sa position :	12
I.5.1.1	Capteur encerclant :	12
I.5.1.2	Capteur ponctuel ou palpeur :	12
I.5.1.3	Sonde :	13
I.5.2	Capteur caractérisé par sa fonction :	13
I.5.2.1	Capteur à double fonction :	13
I.5.2.2	Capteur à fonction séparée :	14
I.6	Signaux d'excitation :	14
I.7	Mode de fonctionnement des capteurs :	15
I.8	Grandeurs mesurées:	15
I.8.1	L'impédance	15
I.8.2	La tension induite :	16
I.9	Caractérisation non destructive par courants de Foucault :	17
I.9.1	Caractéristiques liés au matériau à contrôler:	17

I.9.2 Caractéristiques liés au montage gouvernant le couplage entre la bobine et le matériau : .....	17
I.10 Les Avantages [2] : .....	17
I.11 Les inconvénients [3] : .....	17
I.12 Conclusion : .....	18

## **chapitre II:Description mathématique des phénomènes électromagnétiques**

II.1 Introduction : .....	20
II.1.1 Historique : .....	20
II.2 Modélisation d'un dispositif en CND-CF.....	20
II.3 Mise en équations : .....	21
II.3.1 Equations de Maxwell : .....	21
II.3.2 Equations de Maxwell générales : .....	21
II.3.3 Lois de comportement des milieux : .....	22
II.3.3.1 Propriétés conductrices (Loi d'Ohm) : .....	22
II.3.3.2 Propriétés magnétiques : .....	22
II.3.3.3 Propriété diélectrique : .....	23
II.3.4 Conditions aux limites : .....	23
II.3.5 Conditions de passage : .....	23
II.4 Equations de Maxwell en régime quasi-stationnaire : .....	24
II.4.1 Hypothèses Simplificatrices des équations : .....	24
II.4.2 Formulations magnétodynamiques : .....	25
II.4.2.1 Formulation en potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique $\mathbf{A} - V$ : .....	25
II.5 Conclusion : .....	27

## **chapitre III:Les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles**

III.1 Introduction.....	29
III.2 Les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles .....	29
a) Méthodes analytiques : .....	29
b) Méthodes numériques.....	30
III.2.1 La méthode des différences finies .....	32
III.2.2 La méthode des intégrales de frontières .....	33
III.2.3 La méthode des volumes finis .....	33
III.2.4 La méthode des éléments finis : .....	33

---

III.2.4.1	Introduction : .....	33
III.2.4.2	Types de formulation des problèmes : .....	34
III.2.4.3	Discrétisation du domaine d'étude .....	36
A)	Éléments de bases : .....	36
B)	Fonction d'interpolation : .....	38
C)	Fonction d'approximation sur le domaine : .....	38
III.2.4.4	Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis : .....	39
III.2.4.5	Formulation éléments finis des équations du modèle magnétodynamique : .....	39
➤	Cas cartésien .....	39
➤	Cas axisymétrique : .....	41
III.3	Conclusion : .....	42

#### **chapitre IV: Applications et Résultats**

IV.1	Introduction : .....	44
IV.2	Les caractéristiques du capteur : .....	44
IV.3	Domaine de résolution et condition aux limites: .....	45
IV.4	Résultats de simulation : .....	46
IV.4.1	Effet de la variation de l'épaisseur de la charge : .....	46
IV.4.2	Effet de la variation de la conductivité de la charge .....	52
IV.4.3	Effet de la variation de l'entrefer (lift-off) sur l'impédance du capteur .....	54
IV.4.3.1	Dispositif sans entrefer .....	54
IV.4.3.2	Dispositif avec entrefer .....	56
IV.5	Interprétation des résultats .....	59
IV.6	Conclusion .....	59

# Liste des figures

Figure I.1 : Examen par ressuage .....	7
Figure I.2 : Principe de la magnétoscopie .....	8
Figure I.3 : Principe du contrôle par ultrason .....	8
Figure I.4 : Contrôle par radiographie .....	9
Figure I.5 : Principe de contrôle par le courant de Foucault .....	10
Figure I.6 : Profondeur de pénétration des courants de foucault .....	11
Figure I.7 : Bobine encerclant .....	12
Figure I.8 : Palpeur bobine simple /bobine plate .....	12
Figure I.9 : Sonde .....	13
Figure I.10 : Capteur à double fonction .....	13
Figure I.11 : Capteur à fonction séparée .....	14
Figure II.1 : Problème magnétodynamique type .....	21
Figure II.2 : Vecteur normal unitaire à la frontière entre milieu 1 et Milieu 2 .....	23
Figure III.1 : Processus d'analyse utilisant un modèle numérique .....	31
Figure III.2 : Maillage type différence finis. ....	32
Figure III.3 : Éléments à une dimension .....	36
Figure III.4 : Éléments à deux dimensions .....	37
Figure III.5 : Éléments carrés .....	37
Figure III.6 : Éléments à trois dimensions .....	38
Figure III.7 : Triangle de Pascal .....	38
Figure IV-1: Domaine d'étude .....	45
Figure IV-2: maillage du domaine d'étude .....	46
Figure IV-3 : Variation de la profondeur de pénétration en fonction de la fréquence .....	46
Figure IV-5 : Topologie des lignes de potentiel vecteur magnétique à vide (500KHz) .....	47
Figure IV-4 : Topologie des lignes de potentiel vecteur magnétique à vide (100Khz) .....	47
Figure IV-6: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique en régime en charge sans entrefer (100KHz) .....	48
Figure IV-7: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique en régime en charge sans entrefer (500KHz) .....	48
Figure IV-8: Variation de la résistance compensée du capteur en fonction de l'épaisseur pour le Chrome .....	49
Figure IV-9: Variation de la réactance compensée du capteur en fonction de l'épaisseur pour le Chrome .....	50
Figure IV-10: Variation de l'impédance compensée en fonction de l'épaisseur pour le Chrome .....	50
Figure IV-11: Variation de la résistance en fonction de la réactance pour une fréquence variable .....	51
Figure IV-12: Variation de la réactance en fonction de la conductivité pour le Chrome .....	52
Figure IV-13: Variation de la résistance en fonction de la conductivité pour le Chrome .....	52
Figure IV-14: Variation de la résistance en fonction de la réactance compensée .....	53
Figure IV-15: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour l'Acier inox (sans entrefer) .....	54
Figure IV-16: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour le Chrome (sans entrefer) .....	55
Figure IV-17: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour l'Aluminium (sans entrefer) .....	55
Figure IV-18: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour l'Acier inox (avec entrefer de 1.1mm) .....	56
Figure IV-19: Variation de l'impédance de capteur en fonction de l'entrefer pour l'Acier inox .....	56
Figure IV-20: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour le Chrome (avec entrefer de 1.1mm) .....	57
Figure IV-21: Variation de l'impédance de capteur en fonction de l'entrefer pour le Chrome .....	57
Figure IV-22: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour l'Aluminium (avec entrefer de 1.1mm) .....	58
Figure IV-23: Variation de l'impédance de capteur en fonction de l'entrefer pour l'Aluminium .....	58
Figure IV-24: Variation de l'impédance de capteur en fonction de l'entrefer pour les trois matériaux .....	59

# **Introduction générale**

Les techniques de contrôle non destructif sont des méthodes utilisées : soit pour évaluer des gradueurs caractéristiques d'un matériau ou pour détecter la présence d'un défaut dans ce dernier, sans l'endommager, dans le premier cas il s'agit de l'évaluation non destructif (END) et dans le second de contrôle non destructif (CND).

Les techniques utilisées en CND sont diverses (ultrasons, courants de Foucault, rayons X, radiographie, ressuage, inspections visuelles...).pour que l'une de ces techniques soit appliquée, il est nécessaire que les propriétés physiques du matériau à contrôler soient compatible avec les phénomènes physiques mise en jeu et que les grandeurs mesurées soient significatives afin d'être correctement interprétées.

Ces méthodes dépendent à la fois de la nature du matériau, de la précision requise et de la géométrie à contrôler. Elles peuvent être classées en deux familles : les techniques de volume et les techniques de surface ou, plus exactement, les techniques de contrôle des couches superficielles.

C'est en surface ou proche de la surface des pièces que sont amorcées la majorité des ruptures ou dégradations constatées en service : fissure, fatigue (flexion, torsion), corrosion, brûlure. C'est pour cette raison que les techniques de surface sont très largement appliquées. Parmi elles, le Contrôle par Courants de Foucault (CF) prend une place privilégiée.

L'END par CF est utilisé pour déterminer les caractéristiques physique et géométrique d'un matériau sans le détruire, à fin d'avoir les informations nécessaires concernant son aptitude à remplir la fonction pour laquelle il est destinée.

A nos jours, l'évaluation et le contrôle non destructif sont devenus indispensables dans les domaines où la sureté des personnes est primordiale, tel que l'aéronautique et le nucléaire, afin d'éviter d'éventuels catastrophes.

Dans ce contexte, après une recherche bibliographique sur le sujet, nous proposons d'étudier un capteur absolu compensé à double fonction, en régime mono-fréquence, pour évaluer l'effet de la variation de l'épaisseur d'une plaque conductrice et celui de la variation du lift-off (entrefer entre le capteur et la pièce) sur la réponse du capteur, en terme d'impédance.

La modélisation d'une configuration réelle d'une END par CF ne peut généralement pas être obtenue analytiquement et fait appel à des méthodes numériques. Parmi celles-ci, la méthode des éléments finis (MEF) qui permet de prendre en compte des géométries complexes de capteurs et de pièces, est l'une des plus utilisée. Elle s'est en effet imposée comme un outil efficace pour résoudre numériquement les problèmes électromagnétiques [1].

Ce mémoire se devise en quatre chapitres.

Le premier chapitre présent des généralités sur le CND et l'END, les différentes méthodes utilisées sont rappelées. Le contrôle basé sur les courants de Foucault est particulièrement détaillé.

Le second chapitre est consacré à la description mathématique des courants de Foucault en utilisant les équations de Maxwell, Le troisième chapitre est consacré à la présentation de certaines méthodes analytiques, semi-analytiques et numériques de résolution des équations électromagnétiques, la méthode que nous avons retenue dans notre travail est la méthode des éléments finis. Elle est présentée en détail dans ce chapitre.

Le quatrième chapitre est dédié à la présentation des solutions de l'équation formulée au chapitre précédent (avec une implantation d'algorithme de calcul sous environnement MATLAB), elle est adaptée à notre dispositif d'étude qui est constitué d'un capteur absolu compensé à double fonction en régime mono-fréquence et d'une plaque conductrice, en vue d'évaluer les paramètres physiques (conductivité) et géométriques (épaisseur et lift-off) de cette charge et cela pour différentes valeurs de la fréquence.

Nous terminerons cette étude avec une conclusion générale et des perspectives concernant ce sujet.

**chapitre I:      Présentation du contrôle non destructif**

## **I.1 Introduction :**

Le contrôle non destructif constitue un champ d'application privilégié des découvertes de la physique. Aussi l'histoire du CND commence-t-elle avec celle de la physique moderne à la fin du XIX siècle : découverte des rayons X, des courants de Foucault, de la piézo-électricité, etc. Ce n'est toutefois qu'à partir de la seconde guerre mondiale que les techniques de CND ont pris leur essor dans l'industrie, en particulier dans la métallurgie : contrôle des aciers, radiographie des soudures. Une importante accélération du progrès et du développement du CND s'est manifestée ensuite vers les années 1960-1970 avec le développement rapide de secteurs très demandeurs tels que les centrales électriques nucléaires ou encore l'aéronautique [2].

Le contrôle des matériaux conducteurs a toujours été le domaine d'utilisation privilégié des courants de Foucault. Depuis quelques années, le matériel de contrôle a évolué au point de devenir très compact. Ce qui permet une grande mobilité aux personnes intervenant dans de multiples configurations.

Le contrôle par les courants de Foucault permet l'examen non destructif des matériaux conducteurs de l'électricité. Leur utilisation ne nécessite pas d'agent de couplage. Cette méthode procure un excellent rapport sensibilité sur la vitesse de contrôle [3].

Ce chapitre est destiné à la présentation non exhaustive, des différentes méthodes de contrôle non destructif et particulièrement celle utilisant les courants de Foucault. Nous présenterons aussi les différents types de capteurs et leur mode de fonctionnement, ainsi que les paramètres à déterminer lors de l'END, il s'agit de l'impédance, de la tension et courants induits. En effet, la connaissance de ces paramètres est primordiale pour une étude d'un système d'END-CF.

### **I.1.1 Définition :**

Le contrôle non destructif (CND) consiste à mettre en œuvre des méthodes d'investigation permettant de juger « sans destruction » l'état de santé de la pièce et d'avoir différentes informations sur son aptitude de remplir la fonction pour laquelle il est destiné.

Ce contrôle peut être utilisé soit au cours de la production, soit au cours d'utilisation, soit dans le cadre de maintenance.

Le CND apparaît comme un élément majeur du contrôle de la qualité des produits. Il se différencie de l'instrumentation de laboratoire et industrielle puisque l'objet est de détecter des hétérogénéités et anomalies plutôt que de mesurer des paramètres physiques tel que le poids d'une pièce [3].

## **I.2 Contrôle non destructif : applications et tendances :**

### **I.2.1 Champ d'application actuel :**

Le CND est essentiel pour la bonne marche des industries qui fabriquent, mettent en œuvre ou utilisent les matériaux, les produits et les structures de toutes natures. A l'heure où la qualité est devenue un impératif difficilement contournable, le champ d'application des CND et END ne cesse de s'étendre au-delà de son domaine d'emploi traditionnel constitué par les industries métallurgiques et les activités où la sécurité est primordiale, telles que le nucléaire et l'aéronautique. Après le contrôle des biens d'équipements, vient celui des biens de consommation. La nature des défauts que l'on cherche à détecter se diversifie du même coup ; on recherche les défauts ponctuels, comme ceux inhérents à la fabrication et à l'utilisation des métaux (fissure de fatigue), mais aussi des défauts d'aspect (taches sur une surface propre) et des corps étrangers nuisibles (éclats de verre dans un emballage alimentaire).

On peut, par ailleurs, considérer que le contrôle non destructif d'un produit ou d'un objet peut être effectué à trois stades différents de sa vie, conduisant à trois types d'applications [3].

### **I.2.2 Le contrôle en cours de fabrication :**

Le contrôle en cours de fabrication. Le système utilisé dans ce cas est souvent automatisé ceci nécessite alors un appareillage installé et fonctionnant en ligne de fabrication. On cherche dans ce cas à satisfaire à la fois les critères de robustesse, avec la rapidité de la réaction et un coût d'exploitation faible. Les défauts recherchés sont généralement bien identifiés, le fonctionnement est automatique, aboutissant à un repérage ou un tri des produits défectueux. Quand le détecteur de défauts ne peut pas être installé en ligne de fabrication, on utilise dans l'industrie des bancs de contrôle correspondant bien souvent à des équipements importants en taille et en coût.

### **I.2.3 Le contrôle à la réception :**

Le contrôle à la réception d'un lot de pièces, d'une installation ou d'un ouvrage, permet de vérifier le respect de conformité avec des spécifications de qualité définies auparavant. A ce stade, il s'agit de détecter des défauts mais aussi bien souvent d'en définir la nature et les dimensions.

### **I.2.4 Le contrôle en service :**

Le contrôle en service s'effectue sur des pièces ou structures lors d'opérations de maintenance ou à la suite de détection d'anomalies de comportement du matériel. Pour ce type de contrôle, il convient de pouvoir estimer le mieux possible la nature et les dimensions des défauts

pour pouvoir en apprécier la gravité; il faut disposer aussi d'une bonne reproductibilité des examens non destructifs, de façon à pouvoir suivre l'évolution du dommage au cours du temps.

### **I.2.5 Tendances et évolution :**

Globalement, en tant qu'outil majeur de la politique qualité d'une entreprise, les techniques de CND continueront à élargir leur champ d'application vers de nouveaux secteurs d'activité économique. Il ne suffit plus aujourd'hui de détecter un défaut, il faut aussi le caractériser et le dimensionner. Il faut aussi imaginer des techniques et procédés non destructifs aptes à mettre en évidence des hétérogénéités physiques complexes ou des irrégularités de propriétés telles que des variations de microstructure dans un métal, des variations de texture ou de rugosité sur une surface et des variations de propriétés électromagnétiques sur un matériau. Ces objectifs sont souvent difficiles à atteindre.

Il n'en va pas de même pour l'automatisation des CND qui bénéficie pleinement des progrès de l'informatique ; il en résulte l'arrivée sur le marché, d'année en année, d'appareillages plus performants, plus fiables et surtout plus faciles à utiliser dans le cadre du respect de procédures de contrôles très strictes [3].

## **I.3 Les différentes méthodes de contrôle non destructif (CND) :**

### **I.3.1 Examen visuel :**

L'examen visuel est le premier des procédés de contrôle, le plus simple et le plus général puisque c'est aussi le point final de la majorité des autres procédés non destructifs, Il reste cependant sujet aux inconvénients liés à l'œil humain.

### **I.3.2 Le ressuage :**

Au moyen âge les armuriers avaient découvert le ressuage en même temps que la trempe des lames d'épées, une fois l'acier trempé à l'eau la lame était soigneusement essuyée et après plusieurs minutes observées en lumière rasante, l'œil collé à une extrémité de la lame orientée vers une fenêtre, l'eau que perlait des criques de surfaces était révélatrice des imperfections du forgeage [4].

Le ressuage est une technique destinée à révéler la présence de fissures en surface de pièces planes ou quasi-planes, elle consiste à appliquer sur la surface à contrôler préalablement nettoyée et séchée, un liquide d'imprégnation coloré ou fluorescent, qui pénètre dans les fissures. Le nettoyage de la cible est nécessaire pour éliminer l'excès du liquide présent à la surface de la pièce [4].

Un révélateur qui peut être liquide ou sous forme de poudre est appliqué, en réagissant avec le pénétrant resté dans les fissures forme des images révélatrices des défauts et interprétables par le contrôleur.

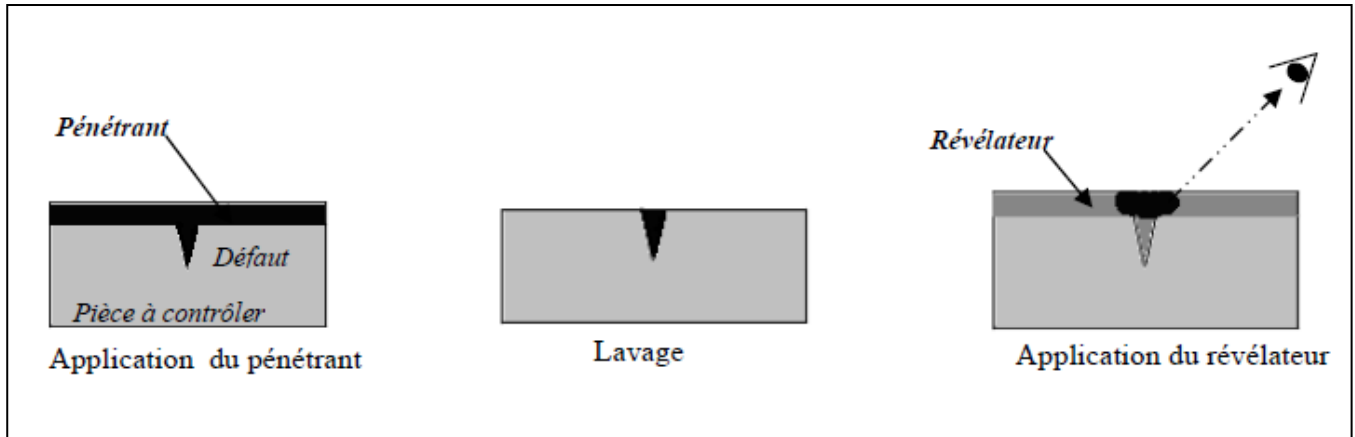


Figure I.1 : Examen par ressuage

### I.3.3 La magnétoscopie :

C'est une technique qui révèle les défauts débouchant ou surfacique. Toutefois, elle ne s'applique qu'aux matériaux et alliages ferromagnétiques (fer, acier, fonte...).

L'examen par magnétoscopie consiste à soumettre la pièce à un champ magnétique de valeur définie en fonction de la pièce. Une poudre magnétique est ensuite projetée à la surface et se répartit de façon homogène si la pièce est saine. Les discontinuités superficielles provoquent à leur endroit des fuites magnétiques. Lorsqu'un défaut est présent dans la pièce au voisinage de la surface, l'orientation du flux de l'induction magnétique est modifiée localement et son intensité augmente en surface. Il apparaît alors une concentration de particules magnétiques qui révèle la présence du défaut comme l'illustre la figure (I-2) [1].

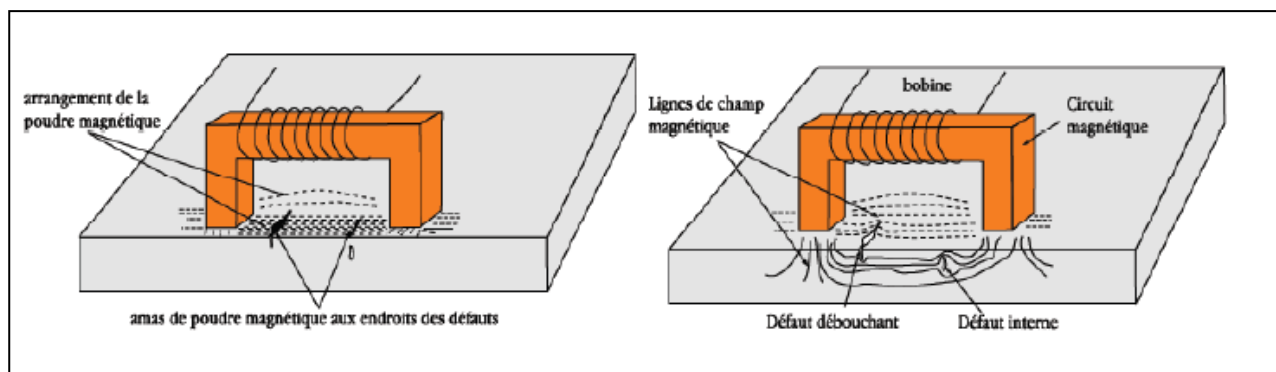


Figure I.2 : Principe de la magnétoscopie

### I.3.4 Les ultrasons :

Le contrôle par ultrasons est basé sur la transmission, la réflexion et l'absorption d'une onde ultrasonore se propageant dans la pièce à contrôler. Le train d'onde émis se réfléchit sur les défauts puis revient vers le transducteur (qui joue souvent le rôle d'émetteur et de récepteur).

L'interprétation des signaux permet de positionner le défaut et de définir ses dimensions relatives. Cette méthode présente une résolution spatiale élevée et la possibilité de trouver des défauts aussi bien dans le volume de la matière qu'en surface. Cette méthode nécessite d'effectuer un balayage mécanique exhaustif de la pièce [5].

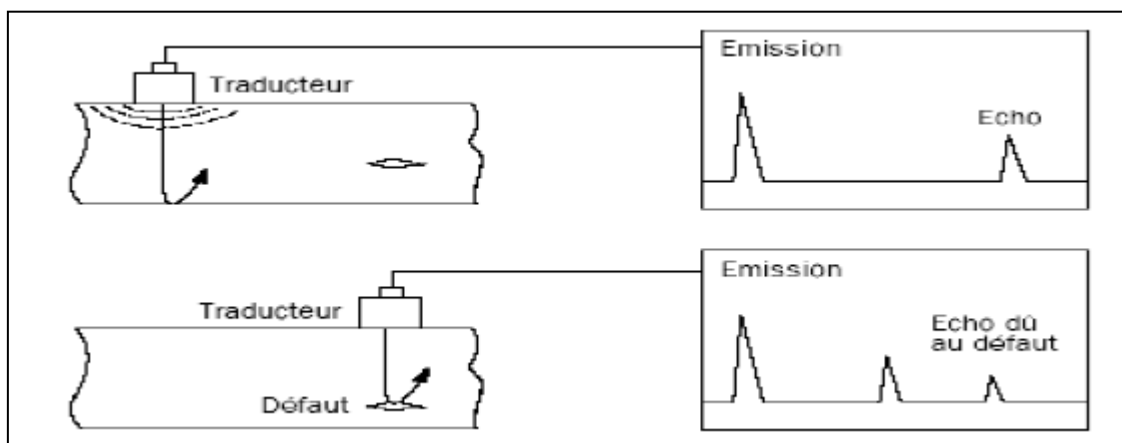


Figure I.3 : Principe du contrôle par ultrason

### I.3.5 La radiographie industrielle :

Comme le contrôle par ultrasons, la radiographie à rayons "x" et "γ" permet de détecter essentiellement des défauts internes. La plupart des matériaux peuvent être examinés en radiographie et pour des épaisseurs de pièces importantes dont 20mm pour le rayon "x" et 50mm pour le rayon "γ". Son principe repose sur l'émission d'un rayonnement ionisant la surface de la pièce à contrôler et produit une image de cette dernière (figure I.4) [6].

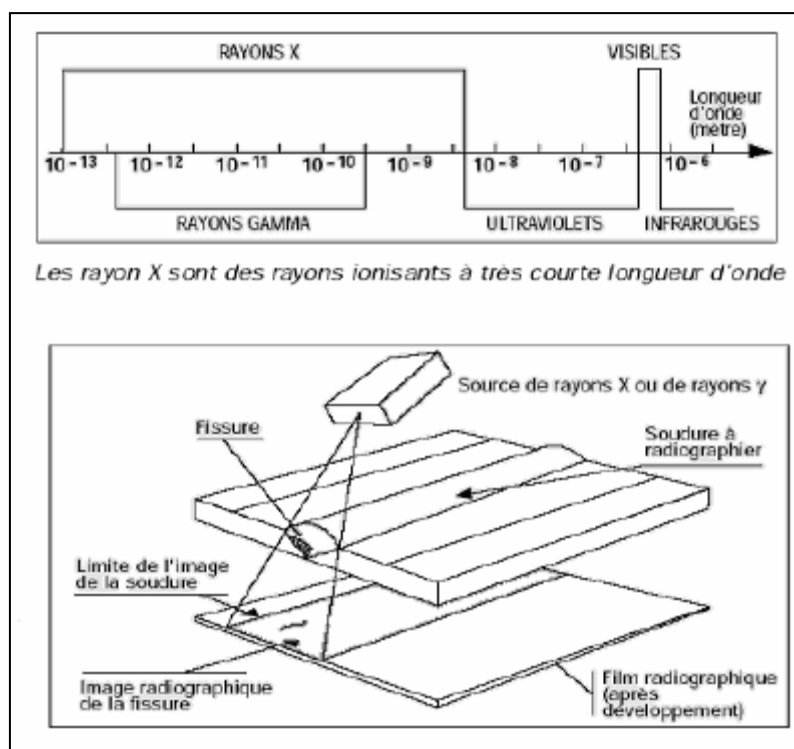


Figure I.4 : Contrôle par radiographie

### I.4 Le contrôle non destructif par les courants de Foucault :

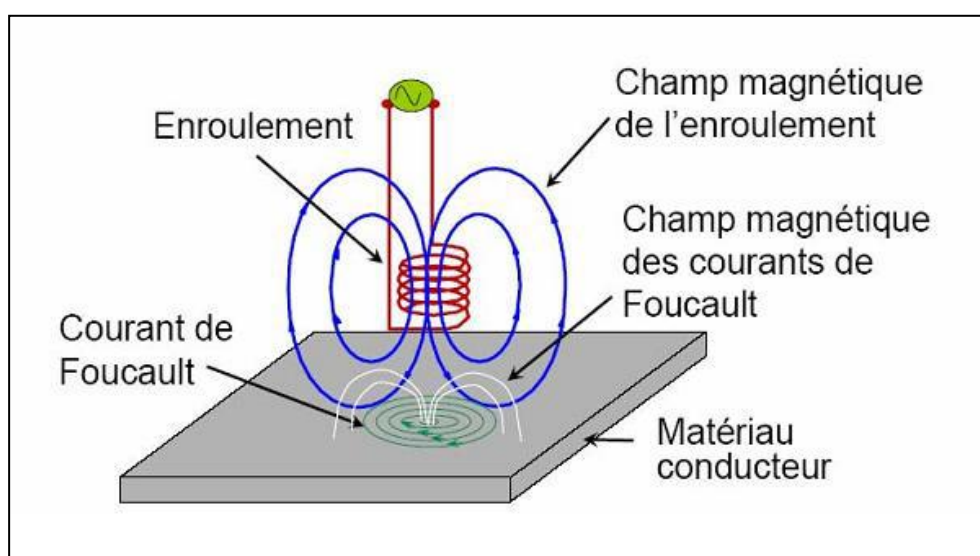
#### I.4.1 Définition et principe de contrôle par courant de Foucault :

Lorsque l'on place un corps conducteur dans un champ magnétique variable, des courants induits se développent en circuit fermé à l'intérieur de celui-ci : ce sont les courants de Foucault (**Léon Foucault, 1819 - 1868**) [3].

Le CND par CF consiste à créer des courants induits dans un matériau conducteur en faisant varier un flux magnétique. Ces courants induits circulent localement dans le matériau et ont une distribution et une répartition qui dépendent du champ magnétique d'excitation, de la géométrie et des caractéristiques physiques de la pièce à examiner (conductivité électrique, perméabilité magnétique).

En présence d'une anomalie dans la pièce à contrôler, leurs déplacements sont perturbés, entraînant ainsi une variation de l'impédance apparente du capteur qui dépend de la nature de l'anomalie et de sa dimension volumique. C'est l'analyse de cette variation d'impédance qui fournit les indications exploitables pour effectuer le contrôle [7].

Les courants de Foucault ne sont pas directement mesurables ; seul le champ magnétique qu'ils génèrent l'est. Cette méthode, nécessite donc une analyse mathématique poussée pour lier/corréler les caractéristiques du défaut à ce champ magnétique de façon à réaliser une imagerie du défaut. [8]



**Figure I.5 : Principe de contrôle par le courant de Foucault**

#### **I.4.2 Effet de peau - profondeur de pénétration du courant de Foucault :**

Les courants de Foucault se développent principalement sur la surface de la pièce à Contrôler. Leur densité décroît rapidement à l'intérieur de cette cible (effet de peau). Ce phénomène d'origine électromagnétique apparaît dans tous matériaux conducteurs parcourus par un courant électrique alternatif ou soumis à un champ électromagnétique variable dans le temps. Les courants induits dans la pièce commencent à décroître d'une manière exponentielle à partir de la surface. La grandeur caractéristique de ce phénomène est la profondeur de pénétration donnée par [8]:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \sigma}} \quad (I.1)$$

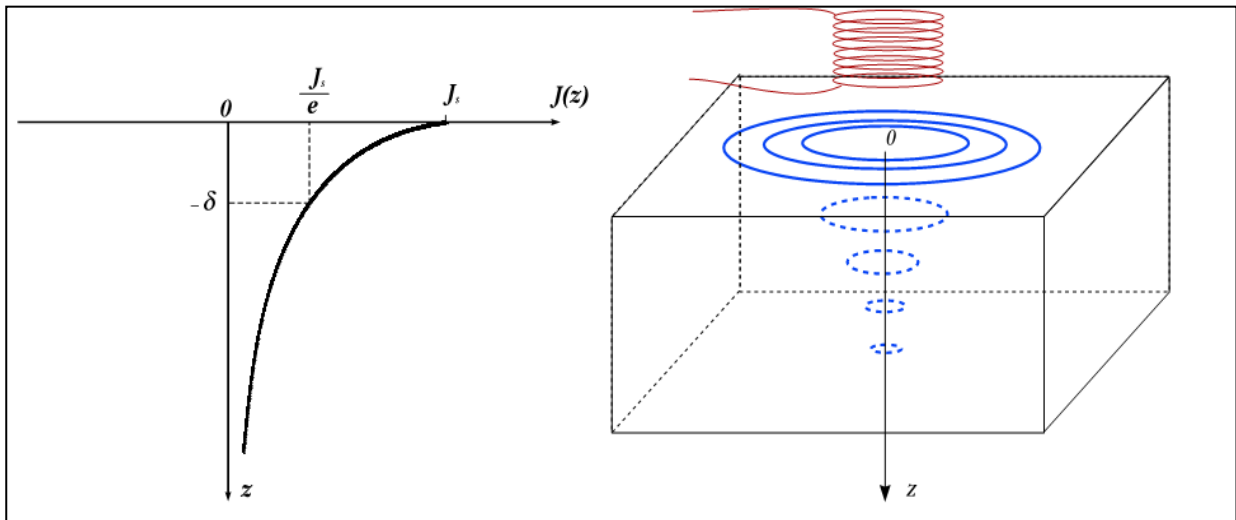
Avec :

$f$  : La fréquence d'alimentation en hertz [Hz].

$\mu r$  : La perméabilité magnétique relative du matériau.

$\mu_0$  : La perméabilité magnétique du vide en [H/m].

$\sigma$  : La conductivité électrique en [S/m].



**Figure I.6 : Profondeur de pénétration des courants de Foucault**

La profondeur de pénétration est donc inversement proportionnelle à la fréquence du champ et aux propriétés physiques du matériau. Si on considère une cible plane semi infinie excitée par un champ magnétique extérieur et parallèle au plan de la cible, le module de la densité de courant est régi par la relation suivante :

$$j(z) = J_0 e^{-z/\delta} \quad (\text{I.2})$$

$z$  : La profondeur considérée à l'intérieur de la cible en mètre [m].

$j(z)$  : Le module de la densité de courant en fonction de la profondeur en [A/m<sup>2</sup>].

$J_0$  : Densité de courant à la surface en [A/m<sup>2</sup>].

$\delta$  : Profondeur de pénétration ou épaisseur de peau en [m].

La fréquence d'excitation est le seul paramètre qui détermine la nature de notre contrôle, soit superficiel ou profond, ce qui veut dire qu'il définit la pénétration des courants de Foucault dans le matériau (effet de peau).

## I.5 Types du capteur:

Le capteur est caractérisé par sa position par rapport au matériau, sa fonction et son mode de contrôle.

### I.5.1 Capteur caractérisé par sa position :

Suivant sa position par rapport au matériau à contrôler, on distingue trois types de capteurs :

#### I.5.1.1 Capteur encerclant :

Ce type de capteur encercle le matériau à contrôler avec ses enroulements de mesure, dans ce cas le volume de la charge doit remplir complètement le volume intérieur de capteur.

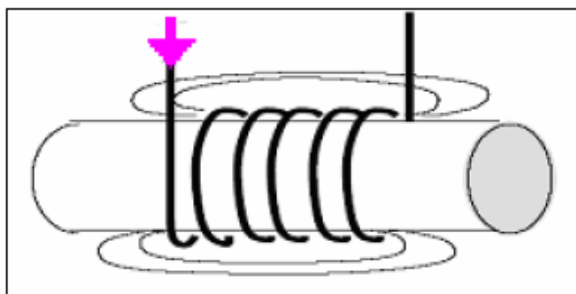


Figure I.7 : Bobine encerclant

#### I.5.1.2 Capteur ponctuel ou palpeur :

Ce type de capteur est conçu pour effectuer un examen local de la pièce à partir de sa surface, il s'agit d'une petite bobine (simple/plate) qui se déplace librement, et qui se met sur ou à proximité de matériau à analyser, l'avantage de ce capteur est l'analyse et le contrôle des régions dont l'accès est difficile.

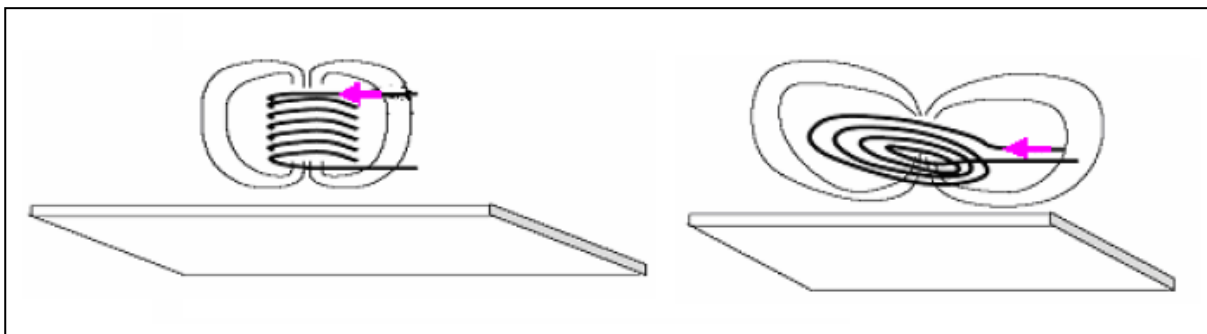


Figure I.8 : Palpeur bobine simple /bobine plate

### I.5.1.3 Sonde :

C'est un capteur qui est conçu pour effectuer une analyse d'un produit par l'intérieur, dont les enroulements d'excitations entourent l'axe de translation. Ils sont utilisés pour contrôler les produits creux (tubes). Ces capteurs opèrent soit avec un noyau ferromagnétique ou sans noyau.

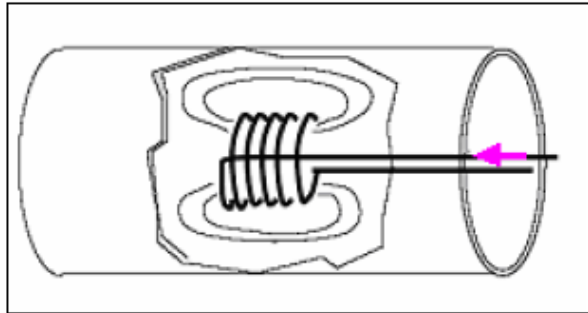


Figure I.9 : Sonde

### I.5.2 Capteur caractérisé par sa fonction :

Le capteur peut être caractérisé par sa fonction. On distingue deux types de capteurs : capteur à double fonction et à fonctions séparées.

#### I.5.2.1 Capteur à double fonction :

Ce capteur assure deux fonctions (excitation/réception) par le même enroulement tel qu'il est présenté dans la (figure I.10).

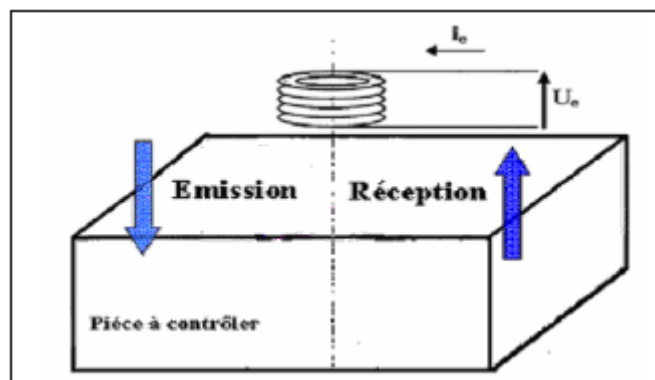


Figure I.10 : Capteur à double fonction

### I.5.2.2 Capteur à fonction séparée :

Capteur dans lequel les fonctions d'excitation et de réception sont assurées par des enroulements distincts. Il est destiné souvent à détecter des défauts de grande taille ou profond. Son principe repose sur le champ magnétique variable traversant le matériau et capté par la bobine de mesure qui ramène l'image du matériau. La bobine émettrice est plus grande que la bobine réceptrice [6].

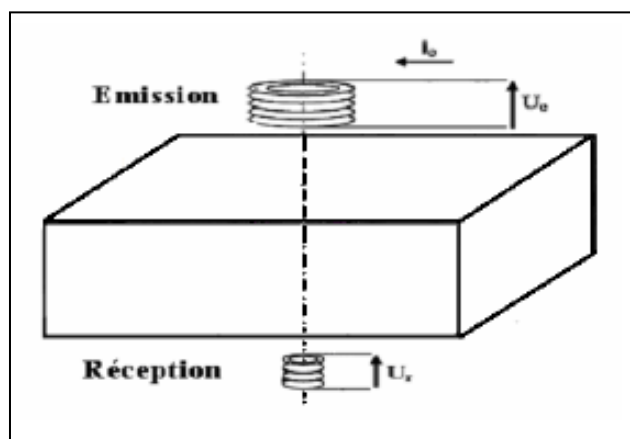


Figure I.11 : Capteur à fonction séparée

### I.6 Signaux d'excitation :

Il existe trois types d'excitation pour les capteurs à courants de Foucault :

- ✓ L'alimentation mono fréquence.
- ✓ L'alimentation multi fréquentielle.
- ✓ L'alimentation par des courants pulsés.

Dans le cas mono fréquentielle capteur est alimenté par un courant ou une tension sinusoïdale à fréquence déterminée (d'une centaine de Hertz à une dizaine de Mhz selon les applications) et le contrôle se fait par une mesure d'impédance de la bobine. Cependant, dans ce contrôle mono fréquentiel, on est limité à deux informations : la résistance et la réactance normalisées. Si ce type de contrôle permet une localisation spatiale d'un défaut et parfois une localisation sur sa taille, il ne permet pas de dissocier plusieurs informations (présence de plusieurs défauts) ou l'information d'une grandeur perturbatrice.

La technique multifréquence permet de discriminer un nombre de paramètres supérieur à deux. Elle constitue une extension de la technique mono fréquence et permet d'exploiter  $k$  fréquences différentes et fournit  $2k$  informations. Le développement des techniques multifréquences

résulte d'un double objectif; positionner et caractériser un défaut à partir d'un signal global résultant de la combinaison du signal utile dû au défaut et de bruits parasites ayant des origines diverses [9].

L'alimentation par des courants pulsés est une dérivée de la méthode de l'alimentation multi fréquentiel mais, à la différence de celle-ci, le champ électromagnétique est généré par une impulsion de courant d'amplitude et du temps variables. Cette technique permet de détecter des défauts dans des profondeurs non accessibles par les méthodes mono et multi fréquence sinusoïdale [9].

### I.7 Mode de fonctionnement des capteurs :

L'élément de mesure peut travailler en mode absolu ou différentiel.

**Mode absolu :** Un capteur absolu est destiné à mesurer la valeur effective des caractéristiques du produit à examiner par rapport à une référence fixe ; c'est la méthode comparative entre la valeur mesurée et la référence. Ce mode permet d'accéder à toutes les grandeurs utiles et également perturbatrices, comme la température qui fait varier la perméabilité magnétique et la conductivité électrique [6].

**Mode différentiel :** il permet d'accéder uniquement aux variations locales des caractéristiques du produit contrôlé par différence permanente de deux mesures simultanées en deux zones voisines. Le mode différentiel est particulièrement adapté à la recherche de défauts ponctuels tels que la corrosion localisée, les variations dimensionnelles brutales, les fissures. Il est quasiment insensible aux variations lentes de dimensions, de structure ou de température [10].

### I.8 Grandeurs mesurées:

#### I.8.1 L'impédance

L'impédance électrique mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoïdale. Elle peut être représentée comme la somme d'une partie réelle (partie résistive) plus une partie imaginaire (partie réactive).

Dans le domaine du contrôle non destructif par courant de Foucault, Les valeurs qu'on obtient par l'appareil de mesure sont souvent représentées dans le plan d'impédance normalisée. au dessous nous présentons les expressions de la résistance normalisée  $R_N$  et la réactance normalisée  $X_N$  sachant que l'impédance normalisée  $Z_N = R_N + jX_N$  [1].

$$R_N = \frac{R_{charge} - R_{vide}}{X_{vide}} \quad (I.3)$$

$$X_N = \frac{X_{charge}}{X_{vide}} \quad (I.4)$$

Avec :

$R_{charge}$  : est la composante résistive qui représente l'ensemble des pertes Joule causées soit par les courants de conduction dû à l'alimentation soit par les courants de Foucault dans la charge.

$X_{charge}$  : est la composante inductive qui représente la réactance du bobinage d'excitation en présence de la pièce à contrôler (charge).

$R_{vide}$  Et  $X_{vide}$  : sont respectivement la résistance et la réactance du capteur sans la présence de pièces (à vide).

Le plan d'impédance normalisé est le tracé de  $X_N$  en fonction de  $R_N$ .

### I.8.2 La tension induite :

Soit une bobine source alimentée par un courant ou une tension sinusoïdale .cette dernière crée un champ magnétique variable. Lorsqu'une autre bobine est mise au voisinage de la source, elle est sujette à un changement de champ magnétique. La loi de Faraday pour l'induction établit que le circuit de cette bobine étant ouvert, la tension induite à ses bornes est donnée par :

Pour une spire :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (I.5)$$

Pour une bobine de N spires :

$$u = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (I.6)$$

Avec :

$e$  : La force électromotrice [V].

$N$  : le nombre de spires de la bobine.

$\Phi$  : le flux magnétique [Wb].

$U$  : la tension induite [V].

**I.9 Caractérisation non destructive par courants de Foucault :****I.9.1 Caractéristiques liés au matériau à contrôler:**

- 1- La nature physique du matériau, et ses dimensions (sa forme géométrique).
- 2- Sa conductivité électrique qui représente l'aptitude à laisser les charges électriques se déplacer librement.
- 3- Sa perméabilité magnétique qui représente la faculté que possède un matériau à modifier un champ d'induction magnétique.

(La température influence sur la conductivité électrique et la perméabilité magnétique).

**I.9.2 Caractéristiques liés au montage gouvernant le couplage entre la bobine et le matériau :**

Pour les bobines encerclant il s'agit du coefficient de remplissage qui désigne le rapport entre la section de la barre (charge) et celle de la bobine ou bien il s'agit du « lift-off », qui est le terme universel indiquant la distance entre le capteur et la surface de la pièce contrôlée. La variation de la position du capteur par rapport à la surface de la pièce engendre une fluctuation dans les mesures.

**I.10 Les Avantages [2] :**

Le CND par CF :

1. Permet la détection des défauts débouchant ou faiblement enfouis (quelques millimètres) dans tout matériau conducteur.
2. Ne nécessite pas l'utilisation de produits couplant. Ceci en facilite par conséquent son utilisation. De même, aucune nuisance ou pollution n'est engendrée ni pour l'utilisateur ni pour l'environnement, contrairement au ressuage, qui nécessite l'application de produits chimiques nocifs.
3. Transportabilité : le CND par CF ne nécessite pas de dispositif encombrant, et peut donc être effectué à des endroits difficilement accessibles moyennant un équipement portable. De même les contrôles à température élevées sont possibles.

**I.11 Les inconvénients [3] :**

1. Méthode limitée aux contrôles de matériaux conducteurs.
2. Faible pénétration dans la matière (quelques mm).
3. Sensible aux phénomènes perturbateurs (écrouissage, dépôts superficiels) : nécessité d'un étalon propre à chaque contrôle.

## **I.12 Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté le contrôle non destructif par les courants de Foucault, ensuite, nous avons rapporté des notions sur la création des courants de Foucault et nous avons aussi défini les éléments essentiels du dispositif de contrôle, et les paramètres électromagnétiques du matériau à contrôler pouvant influencer les mesures.

Dans le domaine du CND par CF la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu, permet d'élaborer un modèle mathématique qui pourra prédire la réponse du capteur en fonction des paramètres de la cible, dans le prochain chapitre nous allons présenter des méthodes mathématiques de modélisation des configurations de CND et END par les courants de Foucault

**chapitre II: Description mathématique des phénomènes  
électromagnétiques**

### II.1 Introduction :

Nous avons présenté dans le chapitre précédent les techniques d'inspection par courants de Foucault. En effet, la procédure d'inspection nécessite un ensemble de connaissances sur les propriétés physiques des matériaux, sur les phénomènes électromagnétiques ainsi que sur les défauts et les pièces inspectées. Il est donc nécessaire de développer une modélisation qui aide à la compréhension du comportement de ces techniques afin d'identifier les caractéristiques des pièces inspectées. Une modélisation, qui consiste à établir une structure mathématique qui décrit les phénomènes physiques.

Tous les phénomènes électromagnétiques peuvent être décrits par des équations de Maxwell et des lois de comportement du milieu étudié. Dans ce chapitre, nous allons rappeler les équations et les formules fondamentales de l'électromagnétisme qui traduisent le comportement de notre système physique en équations mathématiques qui peuvent être résolues par des méthodes numériques.

#### II.1.1 Historique :

Tout au début, les phénomènes électriques et magnétiques ont été étudiés séparément, les interactions entre ces deux phénomènes ont été mises en évidence pour la première fois par : Ampère (1775-1836), qui a prouvé que la source du magnétisme est le courant électrique, Gauss (1777-1855), qui a démontré que la source du champ électrique est la charge électrique statique, et Faraday (1791-1867) qui relie la création de l'un des champs électrique et magnétique par l'autre et vis versa. Le couplage des deux phénomènes qu'on regroupe en un mot «Electromagnétisme », on le doit à James Clerk Maxwell (1831-1879). Ce génie a exploité les découvertes des précédents, pour donner la formulation la plus complète de l'électromagnétisme liant les grandeurs électriques et magnétiques Cette formulation unifiée est sous-tendue à la base par les quatre équations de Maxwell [1] [10].

### II.2 Modélisation d'un dispositif en CND-CF

La modélisation des dispositifs peut être ramenée, dans le cas général, à un problème magnétodynamique type comme indiqué sur la figure 1.

L'ensemble de ce système forme le domaine de calcul  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ .

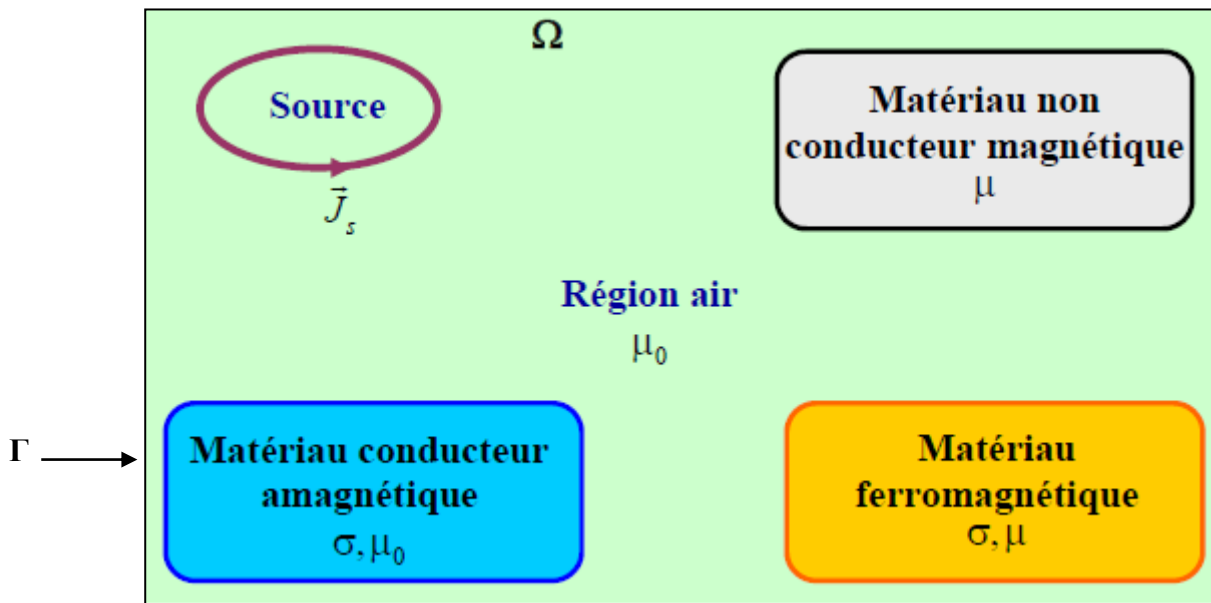


Figure II.1 : Problème magnétodynamique type

### II.3 Mise en équations :

Pour décrire le comportement du champ électromagnétique dans le système modélisé, nous démarrons des quatre équations de Maxwell auxquelles nous associons les lois constitutives du milieu et les conditions de passage aux frontières.

#### II.3.1 Equations de Maxwell :

Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale ou temporelle d'un champ électromagnétique en un point de l'espace entraîne ou est due à l'existence d'un autre champ au même point. Ces équations sont donc locales et sont valables dans n'importe quel système d'axes [4].

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques peut être décrit par cinq grandeurs vectorielles qui dépendent du temps et de l'espace, elles sont : le champ électrique  $\vec{E}$ , le champ magnétique  $\vec{H}$ , l'induction magnétique  $\vec{B}$ , l'induction électrique  $\vec{D}$  et le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$ .

#### II.3.2 Equations de Maxwell générales :

Les équations de Maxwell sous leurs formes générales sont comme suit :

➤ Le théorème d'Ampère généralisé :  $\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (II.1)

➤ La loi de Gauss généralisée :  $\text{div} \vec{D} = \rho$  (II.2)

➤ La loi d'induction de Faraday :  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (II.3)

➤ La conservation de Flux magnétique :  $\text{div } \vec{B} = 0$  (II.4)

$\vec{E}$ : Champ électrique (V/m).

$\vec{B}$ : Densité du flux magnétique ou l'induction magnétique (T).

$\vec{D}$ : Densité du déplacement électrique ou l'induction électrique (C/m<sup>2</sup>).

$\vec{H}$ : Champ magnétique (A/m).

$\vec{A}$ : Potentiel vecteur magnétique.

$\vec{J}$ : Densité de courant électrique (A/m<sup>2</sup>).

$\rho$ : Densité volumique de charge électrique (C/m<sup>3</sup>).

### II.3.3 Lois de comportement des milieux :

La résolution complète des équations de Maxwell passe par la connaissance du milieu où les grandeurs électromagnétiques règnent. La loi d'Ohm, l'équation de conservation de la charge et les équations constitutives des matériaux définissant ce milieu. En effet, certains de ces champs vectoriels sont reliés entre eux par les propriétés de la matière [11].

#### II.3.3.1 Propriétés conductrices (Loi d'Ohm) :

Les milieux conducteurs sont caractérisés par leur conductivité électrique. La densité de courant est reliée au champ électrique par la loi d'Ohm suivante :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.5})$$

$\sigma$ : Conductivité électrique [(Ω.m)<sup>-1</sup>]

#### II.3.3.2 Propriétés magnétiques :

Un milieu magnétique est caractérisé par les relations magnétiques, qui permettent d'exprimer l'induction magnétique en fonction du champ d'excitation. Pour un milieu homogène, isotrope et linéaire, l'équation de constitution s'écrit :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.6})$$

Avec :

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$\mu$ : Perméabilité magnétique. [H/m]

$\mu_0$ : Perméabilité magnétique du vide =  $4\pi \cdot 10^{-7}$  [H/m]

$\mu_r$ : Perméabilité magnétique relative du milieu.

### II.3.3.3 Propriété diélectrique :

C'est une propriété qui caractérise les matériaux diélectriques. L'induction électrique dépend du champ électrique par la relation suivante :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

Avec :  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

$\epsilon$ : Permittivité électrique absolue [F/m]

$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$  : Permittivité électrique du vide [F/m]

$\epsilon_r$ : Permittivité électrique relative du milieu.

$C = 3.10^8 \text{m/s}$  : Vitesse de la lumière.

### II.3.4 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites (spatiales) s'énoncent de façon générale pour un domaine  $\Omega$  de Frontière  $\Gamma$  avec  $\vec{n}$  un vecteur normal (unitaire) à  $\Gamma$  pour la variable  $u$ .

- Condition de Dirichlet homogène  $u \cdot \vec{n} = cst$
- Condition de Neumann homogène  $\frac{\partial u}{\partial n} = cst$

### II.3.5 Conditions de passage :

Pour relier deux milieux de propriétés électromagnétiques différentes, il est nécessaire d'établir les équations sur la surface de séparation. Cette dernière est repérée par sa normale dirigée du milieu 1 vers le milieu 2 telle qu'elle est montrée sur la figure (II.2)

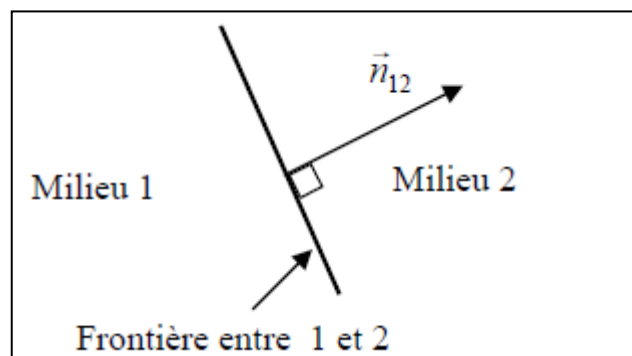


Figure II.2 : Vecteur normal unitaire à la frontière entre milieu 1 et Milieu 2.

- La conservation de la composante tangentielle du champ électrique  $\vec{E}$ :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0 \quad (\text{II.8})$$

- La conservation de la composante normale de l'induction magnétique  $\vec{B}$ :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.9})$$

- La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique  $\vec{H}$  due courant surfaciques ( $k$ ) s'ils existent :

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \vec{n} = 0 = k \quad (\text{II.10})$$

- La discontinuité de la composante normale de l'induction électrique  $\vec{D}$  due aux charges surfacique ( $q_s$ ) si elles existent :

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \vec{q}_s \quad (\text{II.11})$$

## II.4 Equations de Maxwell en régime quasi-stationnaire :

### II.4.1 Hypothèses Simplificatrices des équations :

Afin de décrire le modèle mathématique par la suite, qui régit les phénomènes électromagnétiques relatifs à un problème type de CND-CF, certaines hypothèses simplificatrices sont à considérer:

- La densité volumique de charges est considérée nulle, soit  $\rho=0$ .
- Le terme  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  est généralement négligeable pour des fréquences inférieures aux radiofréquences ( $10^{12}\text{Hz}$ )
- Les sources d'alimentation sont supposées produites par un générateur de courant sinusoïdal parfait.
- L'induction magnétique rémanente est considérée nulle  $\vec{B}_r = 0$  (pas d'aimants).

Avec les hypothèses ainsi formulées, les équations de Maxwell à résoudre sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{a}) \\ \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{b}) \\ \text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{c}) \\ \text{div} \vec{D} = 0 \quad (\text{d}) \end{array} \right. \quad (\text{II.12})$$

Sachant que :

$$\vec{J} = \vec{J}_s + \sigma \vec{E} + \sigma (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{II.13})$$

Avec :

$\vec{v}$  : La vitesse de déplacement

## II.4.2 Formulations magnétodynamiques :

La mise en œuvre d'un outil éléments finis nécessite le choix d'une formulation basée sur une grandeur caractéristique et en association avec les relations constitutives du milieu, les relations de passage, les conditions aux limites et les conditions de jauge [12]. On entend par formulation le choix des variables inconnues et leur mise en équation. On préfère souvent exprimer les champs électrique et magnétique en fonction de potentiels. En effet, Z.Ren [13] a montré que le système obtenu en prenant comme inconnues les champs  $(\vec{E}, \vec{H})$  converge moins bien que si on travaille avec des potentiels.

Différentes formulations électromagnétiques ont été élaborées dans la littérature pour résoudre ces équations.

### II.4.2.1 Formulation en potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique $\vec{A} - V$ :

Cette formulation présente les avantages suivants :

- Le système d'équations a une seule inconnue.
- Une seule composante,  $A_\phi$  dans un cas axisymétrique.
- Les autres grandeurs physiques peuvent être déduites, telle que l'induction magnétique.

Considérons l'équation (II.12.c).

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \exists A / \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{II.14})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.15})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.16})$$

Ceci nous permet de constater que le champ  $(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$  est un champ conservatif, donc, nous pouvons définir un potentiel scalaire électrique  $v$  par la relation :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.17})$$

En prenant les équations (II.6) et (II.14) et les remplaçant dans (II.12a) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{J}_s + \sigma \vec{E} + \sigma (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{II.18})$$

En remplaçant l'équation (II.16) dans (II.17) nous obtenons :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{J}_s - \sigma (\overrightarrow{\text{grad}} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + \sigma (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{II.19})$$

Donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) + \sigma (\overrightarrow{\text{grad}} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - \sigma (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{J}_s \quad (\text{II.20})$$

Afin de résoudre cette équation à deux inconnues ( $\vec{A}$ ,  $V$ ), on doit fixer la divergence du potentiel  $A$  pour assurer l'unicité de la solution. On rajoute alors la condition  $\text{div} \vec{A} = 0$  appelée Jauge de Coulomb. Soit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = (\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}) \quad (\text{II.21})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) + \sigma (\overrightarrow{\text{grad}} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - \sigma (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{J}_s \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.22})$$

$\text{div} \vec{A} = 0$  Cette hypothèse de Jauge est naturellement vérifiée dans la configuration axisymétrique.

Le terme  $\overrightarrow{\text{grad}} V$  en axisymétrique est nul. En régime statique la vitesse  $v=0$  ; Le système (II.21) devient alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{J}_s \quad (\text{II.22})$$

Si les courants sources sont de nature alternative (régime harmonique), le terme  $\frac{\partial}{\partial t}$  sera remplacé alors par  $j\omega$ , ou  $\omega$  est la pulsation des courants sources. Ainsi l'équation (II.22) devient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) + \sigma j\omega \vec{A} = \vec{J}_s \quad (\text{II.23})$$

### Dans l'air :

La région qui entoure le dispositif est caractérisée par l'absence de source ainsi qu'une conductivité électrique nulle, l'équation qui lui sera associée s'écrira :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = 0 \quad (\text{II.24})$$

### Dans l'inducteur :

Les inducteurs sont des fils fins de cuivre, l'équation (II.23) pourra alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = \vec{J}_s \quad (\text{II.25})$$

### Dans la cible :

La pièce à contrôler est obligatoirement conductrice, l'équation électromagnétique dans cette région s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\right) + \sigma J\omega\vec{A} = 0 \quad (\text{II.26})$$

### II.5 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons rappelé les équations et les formules fondamentales de l'électromagnétisme qui décrivent un système physique par des équations mathématiques.

Tous les systèmes physiques peuvent être décrits par les équations aux dérivées partielles, concernant l'électromagnétisme, elles sont données par les équations de Maxwell et les lois du comportement des milieux. Pour analyser ces systèmes physiques, en termes de leurs qualités et états de santé, on doit procéder à la résolution de ces équations décrites par l'une des méthodes de résolution, que nous allons présenter dans le prochain chapitre.

**chapitre III:      Les méthodes de résolution des équations aux dérivées  
partielles**

### III.1 Introduction

La simulation consiste à reproduire par le calcul le fonctionnement d'un système. Elle s'appuie sur une modélisation et fait appel à des méthodes mathématiques et informatiques spécifiques. En chaque point du système considéré, plusieurs grandeurs physiques (vitesse, température, champ électromagnétique. . .) décrivent son état. Ces grandeurs sont liées par des équations, généralement aux dérivées partielles. Ces équations traduisent mathématiquement les lois de la physique qui régissent le comportement du système.

Dans le domaine du CND par CF la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu permettent d'élaborer un modèle mathématique qui pourra prédire la réponse du capteur en fonction des paramètres de la cible, qui doivent être connus [2].

La modélisation du Contrôle Non Destructif par Courant de Foucault est basée sur la résolution des équations de Maxwell [14]. Selon la configuration à simuler, cette résolution peut-être analytique ou numérique. Avec le développement technologique et les systèmes électromagnétiques qui se complexent de plus en plus, font qu'une solution analytique est souvent insatisfaisante ou impossible à obtenir. Une alternative est alors de mettre en œuvre des méthodes numériques qui permettent d'étudier des configurations capteur-pièce plus variées, comprenant des géométries quelconques de pièces, de défauts et de capteurs, et qui consistent en une discrétisation des équations aux dérivées partielles.

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles est faite par plusieurs méthodes, nous citons : méthode des différences finies, méthode des intégrales de Frontières, méthode des Volumes Finis. Et la méthode la plus répandue des approches numériques est celle des éléments Finis (EF), qui sera présentée en détail dans ce chapitre.

### III.2 Les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Nous citons les méthodes analytiques, semi-analytiques et les méthodes numériques.

#### **Méthodes analytiques :**

La résolution analytique des équations de Maxwell permet d'obtenir une solution mathématique exacte du problème, mais elle reste limitée à des configurations simples. Parmi les travaux connus, ceux de Dodd et al qui ont procédé à des résolutions directes des équations

différentielles par la méthode de séparation des variables, nous citons ci- après quelques un de ces travaux réalisés.

- une bobine à air axisymétrique de section rectangulaire située au-dessus de deux couches métalliques parallèles de matériaux différents [1] [14].
- Une bobine de section rectangulaire encerclant deux cylindres métalliques concentriques [1] [14].

D'autres développements sont étaient considérés comme le cas d'une bobine avec noyau magnétique sur une pièce plane ou le cas d'une bobine à air inclinée sur une pièce plane. Cependant, la complexité des configurations de CND par CF fait qu'une solution analytique est souvent soit impossible à obtenir, soit très complexe et très coûteuse en ressources de calcul. Une alternative est alors de mettre en œuvre des méthodes numériques [2].

La méthode analytique la plus puissante et la plus couramment utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles est la méthode de séparation des variable [15].

### **Méthodes numériques**

La résolution analytique semble relativement facile et donne des solutions exactes, d'autre part elle présente l'inconvénient majeur de ne pas prendre en compte la non linéarité et la déformation de la géométrie et pour dépasser cet obstacle, on fait appel aux méthodes numériques. Cette dernière a bénéficié de l'avènement des outils informatiques.

Les méthodes numériques sont basées sur une discrétisation du domaine d'étude (maillage) et l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque élément du maillage. Elles permettent d'étudier des configurations capteur-pièce plus variées. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode des différences finies, la méthode des intégrales de Frontières, la méthode des Volumes Finis et la méthode des éléments finis (MEF).

#### **➤ Processus d'analyse**

De façon générale, les différentes étapes d'analyse d'un problème physique s'organisent suivant le processus schématisé par la figure (III.1). Nous partons d'un problème physique. Le cadre précis de l'étude est défini par les hypothèses simplificatrices qui permettent de déterminer le modèle mathématique approprié. La difficulté pour l'ingénieur est de savoir choisir parmi les lois de la physique, celles dont les équations traduiront avec la précision voulue la réalité du problème physique. [16]

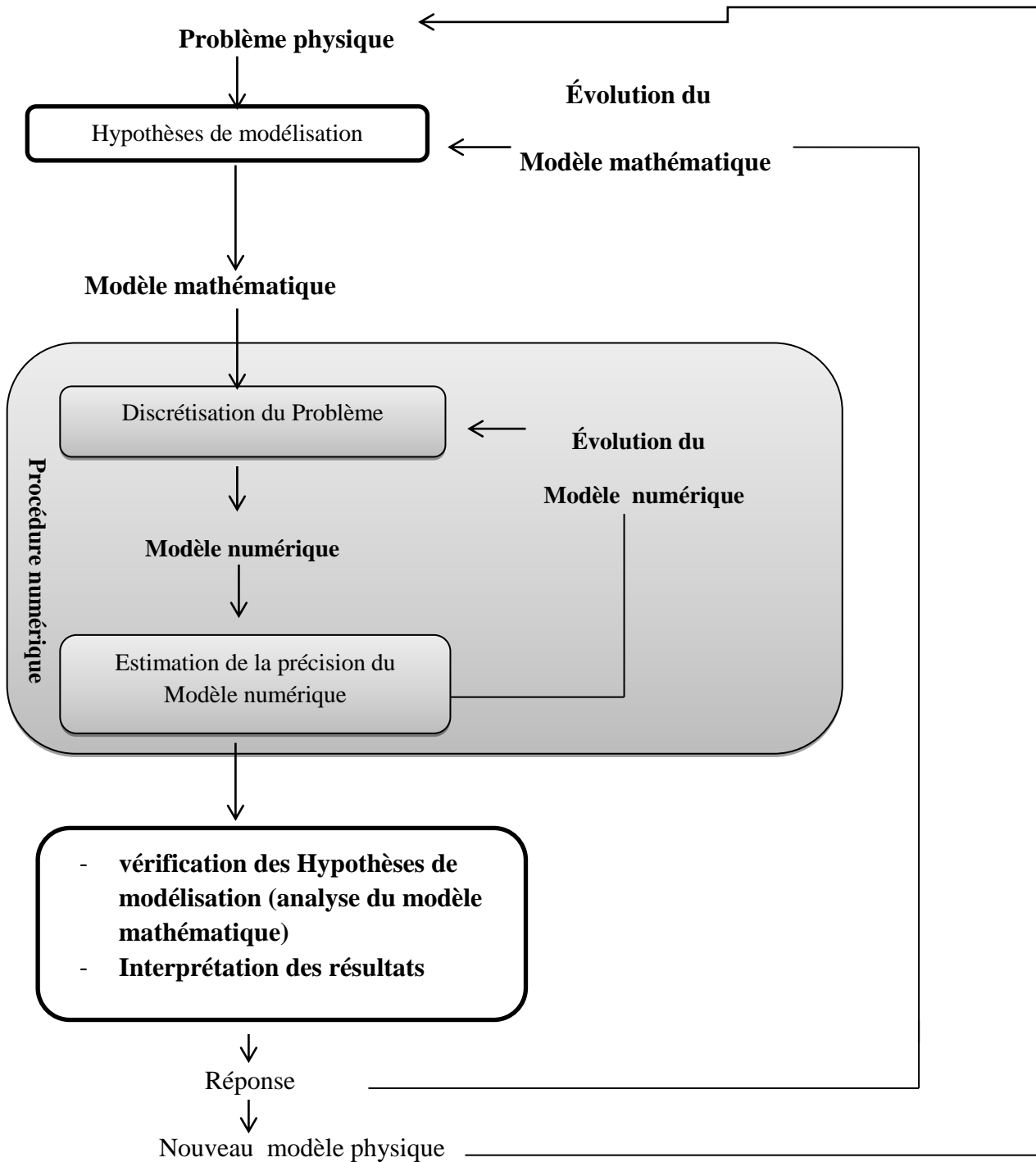
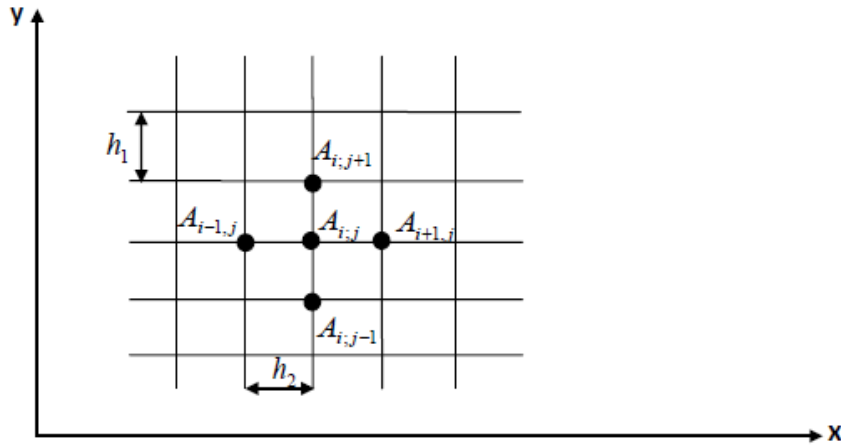


Figure III.1 : Processus d'analyse utilisant un modèle numérique

**III.2.1 La méthode des différences finies**

Historiquement la première, elle consiste à discrétiser le domaine étudié par un réseau de points à mailles rectangulaires et à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs de différences entre les valeurs de l'inconnue en différents points voisins. La méthode est difficilement applicable aux domaines à géométrie complexe, elle est plutôt réservée aux domaines à géométrie simple et aux frontières régulières tels que les rectangles et les carrés.



**Figure III.2 : Maillage type différence finis.**

L'approximation des dérivées aux points (i, j) est :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \tag{III.1}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h} \tag{III.2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} \tag{III.3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \tag{III.4}$$

Avec :  $h_1=h_2=h$

Le Laplacien discrétisé s'écrit :

$$(\Delta A)_{i,j} = \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right]_{i,j} + \left[\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right]_{i,j} \tag{III.5}$$

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{1}{h^2} [A_{i+1,j} + A_{i,j+1} - 4A_{i,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j-1}] \tag{III.6}$$

Cette méthode [17] s'adapte mal aux géométries complexes à cause de la rigidité du maillage, l'espace mémoire le temps de calcul qui sont très importants. D'autre part, la prise en compte des conditions de symétrie, de passage d'un milieu à un autre et des non-linéarités (saturation...) nécessite un traitement spécifique.

### III.2.2 La méthode des intégrales de frontières

Cette méthode est basée sur la subdivision des arêtes distribuées sur les frontières des différentes régions constituant la frontière du dispositif. Dans certain cas, les champs à l'intérieur de domaine de la résolution peuvent être calculés A partir des valeurs sur les frontières.

L'inconvénient de cette méthode est la difficulté de prendre en considération la saturation, la nécessité d'un espace mémoire et d'un temps de calcul important, car les matrices issues de cette méthode ne sont pas symétriques de rang élevé.

La méthode des intégrales de frontières est utilisée généralement en magnétostatique ou bien elle est couplée avec la méthode des éléments finis pour calculer des champs électromagnétiques dans les milieux linéaires et non conducteurs [14].

### III.2.3 La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis, appelée aussi méthode des volumes de contrôles, est une méthode de résidus pondérés où les fonctions de poids sont égales à l'unité dans des volumes finis données. Elle consiste à discrétiser les équations aux dérivées partielles par intégration sur des volumes finis entourant les nœuds du maillage plutôt qu'aux nœuds eux-mêmes. En effet, dans le cas de cette méthode, le domaine d'intégration est subdivisé en volumes de contrôle, chacun entoure un nœud de maillage. Lors de l'assemblage des équations discrétisées, la matrice du système global est construite par arrête contrairement aux matrices globales issues d'une discrétisation par éléments finis, pour laquelle la construction se fait par élément [10].

### III.2.4 La méthode des éléments finis :

#### III.2.4.1 Introduction :

Sans doute ce sont les éléments finis qui occupent une grande place dans la modélisation. Contrairement à la MDF, ils permettent d'améliorer considérablement la précision de calcul par la prise en compte de différents types de fonctions d'interpolations des variables.

La méthode des éléments finis est basée sur la transformation des équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. Elle est bien utilisée lorsque l'excitation s'effectue à basse ou moyenne fréquence [10]. Elle s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la

pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires définis dans un domaine quelconque à une, deux ou trois dimensions, et elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes et aux domaines de formes complexes.

- **Démarche éléments finis :**

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, sont les suivantes [16] :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines.
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires.
- prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations.

### III.2.4.2 Types de formulation des problèmes :

Cette méthode peut être de deux types : Variationnelle Ou Résidus pondérés :

#### a. **Formulation variationnelle :**

La méthode variationnelle nécessite la connaissance a priori de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Cette fonctionnelle est déterminée à partir du principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle type intégrale définie par :

$$F(A) = \int_{\Omega} L. d\Omega$$

Où :

L : est la fonction de Lagrange résultant de la coénergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle.

$\Omega$  : est le domaine d'étude

Avec :

$$L = W_c - W_p$$

$W_c$  : énergie de type cinétique.

$W_p$  : énergie de type potentiel.

La résolution du problème variationnelle ainsi définit, revient à minimiser la fonctionnelle d'énergie  $F(A)$ . La minimisation est effectuée en utilisant le principe de Rayleigh-Ritz qui consiste à écrire [17] :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (\text{III.7})$$

Où :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \quad (\text{III.8})$$

Avec :

$n$  : Nombre de nœuds du domaine d'étude.

$A_i$  : L'inconnu aux nœuds  $i$  du domaine.

### b. Formulation résidus pondérés

La formulation résidus pondérés est aussi appelée « méthode projective » elle permet de résoudre les équations aux dérivées partielles en approximant la solution exacte par une solution approchée.

La formulation résidus pondérés est plus employée que la formulation variationnelle, car elle ne nécessite pas la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système.

Cette méthode est basée sur la détermination du résidu par :

$$R = L(A) - f \quad (\text{III.9})$$

Sachant que :

$L(A)$ : Operateur Laplacien.

$A$  : L'inconnu du problème.

$f$  : fonction définie sur le domaine d'étude  $\Omega$ .

$R$  : est le résidu de l'approximation.

La formulation résidus pondérés consiste à écrire :

$$\int_{\Omega} R_i \phi_i d\Omega = 0 \quad (\text{III.10})$$

$\phi_i$  : Fonction de projection ou de pondération.

Cette méthode consiste à minimiser le résidu  $R$ , en imposant à l'intégrale du résidu de s'annuler en  $n$  points du domaine  $\Omega$ .

Les valeurs de  $A$  qui permettent d'annuler l'intégrale, sont des solutions du système algébrique obtenu.

## b.1 Différentes méthodes des résidus pondérés

Parmi les méthodes qui découlent de la formulation des résidus pondérés on cite [15] :

- 1- **Méthode de collocation par points** : elle utilise les fonctions de Dirac comme fonction de pondération, soit on impose aux résidus de s'annuler dans chaque pont soit on veut approcher la solution.
- 2- **La méthode de Galerkin** : elle consiste à choisir des fonctions de projections identiques aux fonctions d'approximation, qui donne à la fin un système algébrique symétrique facile à résoudre.
- 3- **Méthode des moindres carrés** : est basée sur la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites.

### III.2.4.3 Discrétisation du domaine d'étude

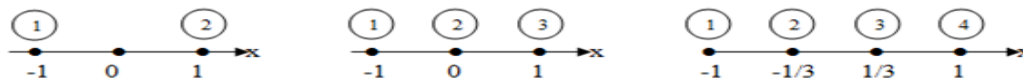
L'approche de base de la méthode des éléments finis est de subdiviser le domaine d'étude en un ensemble fini de sous domaines appelés éléments. Ces éléments peuvent être des segments, des triangles, des quadrilatères, des parallélépipèdes etc..., selon le domaine à discrétiser.

L'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément des fonctions d'interpolation. La fonction d'interpolation est aussi définie en fonction de la géométrie de l'élément qu'on choisit préalablement et coïncide avec les nœuds de cet élément relatifs aux valeurs de l'inconnue. On parle alors d'interpolation nodale [1] [18]

#### A) Éléments de bases :

Appelés aussi éléments de références, Selon le domaine d'étude, soit à une, deux ou trois dimensions, on rencontre le plus souvent des éléments linéaires, quadratiques ou cubiques

- **Éléments à une dimension**



Linéaire (2 nœuds)

Quadratique (3 nœuds)

Cubique (4 nœuds)

**Figure III.3 : Éléments à une dimension**

- **Éléments à deux dimensions**

1) Éléments triangulaires

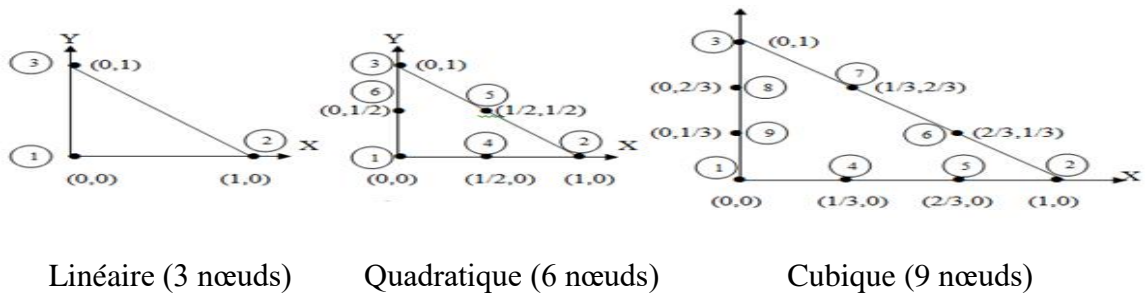


Figure III.4 : Éléments à deux dimensions

2) Éléments carrés

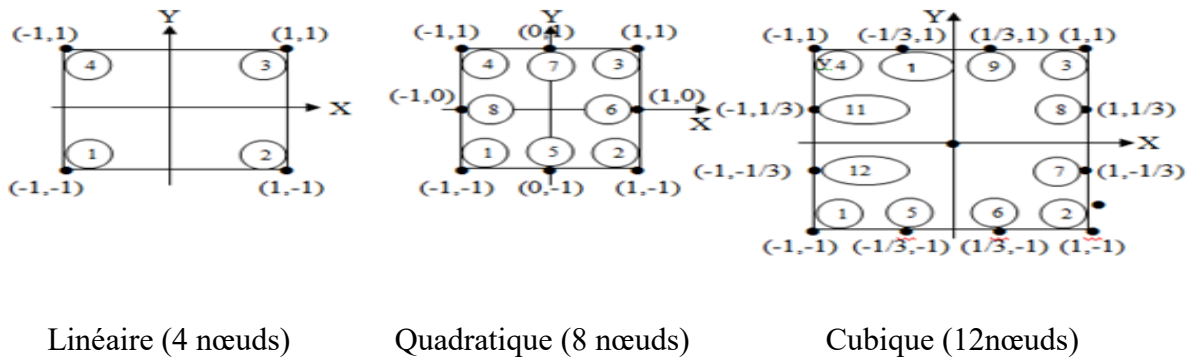


Figure III.5 : Éléments carrés

- Éléments à trois dimensions

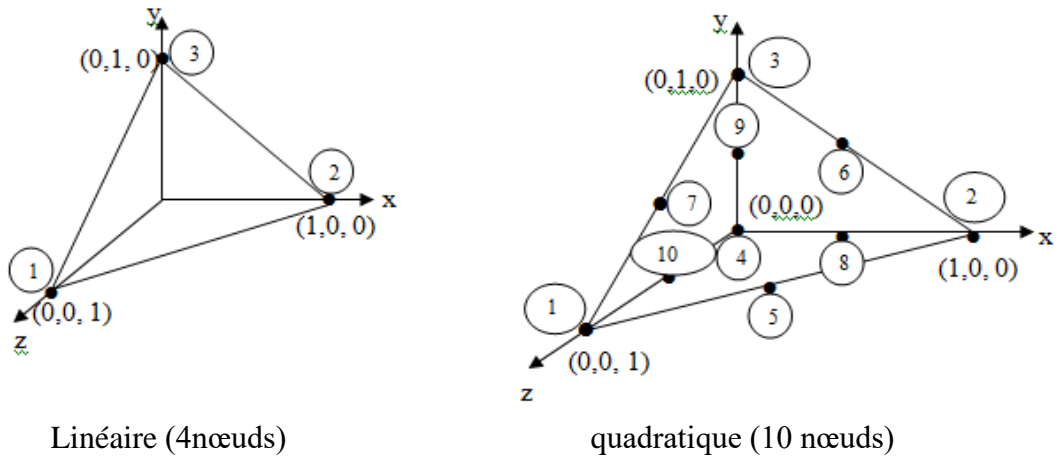


Figure III.6 : Éléments à trois dimensions

**B) Fonction d'interpolation :**

Les fonctions d'interpolation sont obtenues à partir du triangle de Pascal, donné ci-dessous :

1	—	ordre 0
U   V	—	ordre 1
$U^2$ $UV$ $V^2$	—	ordre 2
$U^3$ $U^2V$ $UV^2$ $V^3$	—	ordre 3

Figure III.7 : Triangle de Pascal

Ces fonctions sont construites de telle sorte à obéir à deux principes :

**1) Principe de l'état complet**

- Le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément.
- La fonction doit contenir un terme constant

**2) Principe de comptabilité**

Celui-ci est explicité par la continuité de la fonction. Dans le cas d'un élément triangulaire linéaire, la fonction d'interpolation est donnée par :

$$u(x,y) = a.x + b.y + c \tag{III.11}$$

**C) Fonction d'approximation sur le domaine :**

Dans le domaine global contenant N nœuds, l'inconnu s'exprime alors :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j \quad (\text{III.12})$$

$N$  : Nombre de nœuds

$A_j$  : Valeur de l'inconnue au nœud  $j$

$\alpha_j$  : Fonction d'interpolation au nœud  $j$

### III.2.4.4 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis :

#### ➤ Les avantages :

- Adaptation aux géométries complexes.
- Prise en compte des non linéarités accrues.

#### ➤ Les inconvénients

- Mise en œuvre relativement difficile.
- Prise en considération de domaines infinis.
- Présence de singularités dans le domaine d'étude.
- Temps de calcul relativement important.

### III.2.4.5 Formulation éléments finis des équations du modèle magnétodynamique :

#### ➤ Cas cartésien

L'équation magnétodynamique dans le cas comportant une source est donnée par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{\text{rot}}(A)\right) + \sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = j_z \quad (\text{III.13})$$

En régime harmonique l'équation devient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{\text{rot}}(A)\right) + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \vec{A} = j_z \quad (\text{III.14})$$

L'équation (III.14) peut s'écrire sous la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot A_z = j_{sz} \quad (\text{III.15})$$

La formulation intégrale de l'équation (III.15) peut être donnée par :

$$\iint_{\Omega} a_i \left( -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot A_z - j_z \right) dx dy = 0 \quad (\text{III.16})$$

L'équation (III-16) peut être réécrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} a_i v \left( -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy + jw \iint_{\Omega} a_i \sigma A_z dx dy = \iint_{\Omega} a_i j_z dx dy \quad (\text{III.17})$$

Avec  $v = 1/\mu$

L'application de théorème de Green, nous permet d'écrire :

$$-\iint_{\Omega} a_i v \left( -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy = -\iint_{\Omega} v \left( -\frac{\partial a_i}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial a_i}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy + v \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} a_i \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} a_i \cos(n, y) \right) d\Gamma \quad (\text{III.18})$$

On peut écrire l'équation (III-13) sous une forme plus compacte en introduisant l'opérateur nabra :

$$\iint_{\Omega} a_i v \left( -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) dx dy = \iint_{\Omega} v \vec{\nabla} a_i \vec{\nabla} A_z dx dy + \int_{\Gamma} v a_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{III.19})$$

En remplaçant (III-19) dans l'équation (III-17) on aura :

$$-\iint_{\Omega} v \vec{\nabla} a_i \vec{\nabla} A_z dx dy + \int_{\Gamma} v a_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma + jw \iint_{\Omega} a_i \sigma A_z dx dy = \iint_{\Omega} a_i j_{sz} dx dy \quad (\text{III.20})$$

Avec  $\Gamma$  le contour sur le quel repose la surface  $\Omega$ .

En considérant des conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière s'annule :

$$\int_{\Gamma} v a_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{III.21})$$

L'expression (III-20) devient alors :

$$-\iint_{\Omega} v \vec{\nabla} a_i \vec{\nabla} A_z dx dy + jw \iint_{\Omega} a_i \sigma A_z dx dy = \iint_{\Omega} a_i j_{sz} dx dy \quad (\text{III.22})$$

Sachant que :

$$A_z = \sum_{j=1}^N a_j A_j \quad (\text{III.23})$$

En remplaçant (III-23) dans (III-22) nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^N \left( -\iint_{\Omega} v \vec{\nabla} a_i \vec{\nabla} A_z dx dy \right) A_j + jw \sum_{j=1}^N \left( \iint_{\Omega} a_i \sigma A_z dx dy \right) A_j = \iint_{\Omega} a_i j_{sz} dx dy \quad (\text{III.24})$$

L'équation (III-24) peut être écrite pour tous les nœuds du domaine sous la forme algébrique, on obtient alors l'expression suivante :

$$[M] + [A] + j\omega[L][A] = [K] \quad (\text{III.24})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \vec{\nabla} a_i \vec{\nabla} a_j \, dx \, dy$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma a_i a_j \, dx \, dy$$

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} a_i j_{sz} \, dx \, dy$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

Où  $A_r$  est la partie réelle et  $A_i$  est la partie imaginaire.

**Cas axisymétrique :**

En considérant le régime harmonique et en faisant le même raisonnement que le cas des coordonnées cartésiennes on aura :

$$- \iint_{\Omega} a_i \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} \right) \right) dr \, dz + j\omega \iint_{\Omega} a_i \sigma A_{\varphi} \frac{dr \, dz}{r} = \iint_{\Omega} a_i j_{\varphi} \, dr \, dz \quad (\text{III.25})$$

L'application du théorème de green, nous permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \left( \frac{\partial a_i}{\partial r} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial a_i}{\partial z} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} \right) dr \, dz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} a_i \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial n} d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} a_i \sigma A_{\varphi} \frac{dr \, dz}{r} = \iint_{\Omega} a_i j_{\varphi} \, dr \, dz \quad (\text{III.26})$$

En considérant les conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière s'annule.

En remplaçant  $A$  par sa forme discrétisée :

$$A_{\varphi} = \sum_{j=1}^N a_j A_j$$

$$\sum_{j=1}^N \left( - \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \vec{\nabla} a_i \vec{\nabla} a_j \, dr \, dz \right) A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left( \iint_{\Omega} a_i a_j \sigma \frac{dr \, dz}{r} \right) A_j = \iint_{\Omega} a_i j_{s\varphi} \, dr \, dz \quad (\text{III.27})$$

L'équation (III-27) s'écrit sur tous les nœuds du domaine sous la forme matricielle suivante :

$$[M][A] + j\omega[L][A] = [K] \quad (\text{III.28})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \vec{\nabla} a_i \vec{\nabla} a_j \, dr \, dz$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma a_i a_j \frac{dr \, dz}{r}$$

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} a_i j_{s\varphi} \frac{dr \, dz}{r}$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

Où  $A_r$  est la partie réelle et  $A_i$  et la partie imaginaire.

### III.3 Conclusion :

Dans ce chapitre plusieurs méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles ont été présentées, chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients, la méthode de résolution choisie doit être convenable avec le système à étudier pour y avoir le bon résultat.

Dans notre cas nous avons opté pour la méthode des éléments finis, qui répond bien aux géométries complexes ainsi que pour sa fiabilité et sa précision incontestable devant les autres méthodes.

## **chapitre IV: Applications et Résultats**

### IV.1 Introduction :

Après avoir formulé les équations régissant notre modèle d'étude dans le chapitre précédent, on va dans ce qui suit présenter les résultats de simulations effectuées sous environnement MATLAB. Pour un capteur à courant de Foucault type palpeur monté en mode absolu compensé.

Il est à noter que la géométrie à étudier présente une symétrie de révolution, c'est ce qui va permettre de limiter l'étude sur la moitié du domaine, avec des conditions aux limites de Dirichlet sur sa frontière.

Ce dernier chapitre sera dédié essentiellement à la présentation des résultats obtenus lors de la simulation, en terme de variation de la résistance, réactance et impédance du capteur en fonction de l'épaisseur de la pièce, de sa conductivité, de la fréquence et du lift-off.

### IV.2 Les caractéristiques du capteur :

La géométrie et les caractéristiques du capteur sont représentées dans le tableau IV.1.

**Tableau IV.2 : Caractéristiques de capteur [19]**

Rayon interne ( $r_i$ )	2.5mm
Rayon externe ( $r_e$ )	3.6mm
Hauteur ( $h$ )	1.1mm
Nombre de spires ( $N_s$ )	25
Diamètre de fil	0.2mm
Conductivité	$5.6805 \times 10^7$ S/m
Épaisseur de l'isolant	0.0125mm
La densité de courant injecté	$1.6 \times 10^6$ A/m

Vu que l'isolant est d'épaisseur trop faible pour pouvoir le mailler, nous avons subdivisé le capteur en six parties égales, séparées par un isolant fictif d'épaisseur égale à 0.1mm [19].

➤ **Calcul de l'impédance :**

L'impédance du capteur est calculée en utilisant les formules suivantes [17]:

$$\text{Re}(z) = \frac{N^2}{J_s^2} \omega \cdot \iint_S 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \text{Im}(A) \cdot ds \quad (\text{IV.1})$$

$$\text{Im}(z) = \frac{N^2}{J_s^2} \omega \cdot \iint_S 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \text{Re}(A) \cdot ds \quad (\text{IV.1})$$

Avec :

r: rayon moyen de la bobine

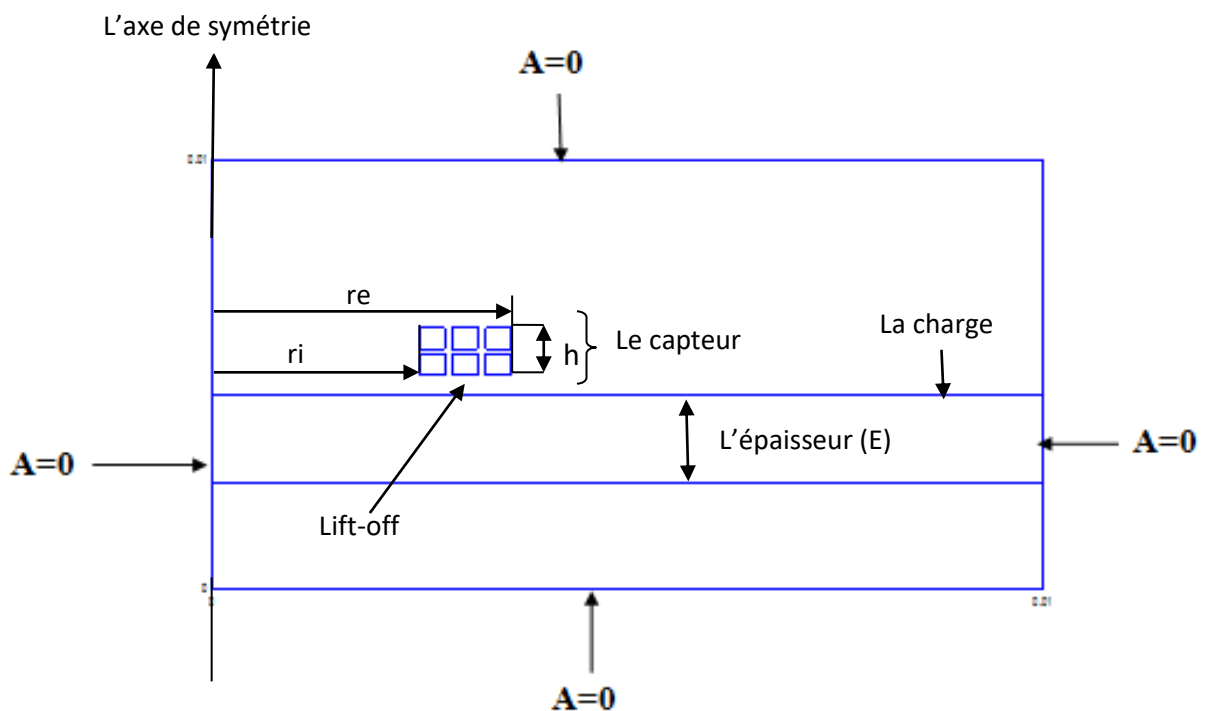
S : section du conducteur

J : densité de courant

N : nombre de spires de la bobine

**IV.3 Domaine de résolution et condition aux limites:**

La figure IV-1 donne un aperçu sur la géométrie du dispositif à étudier et les conditions aux limites qui lui sont associées (condition de Dirichlet).



*Figure IV-1: Domaine d'étude*

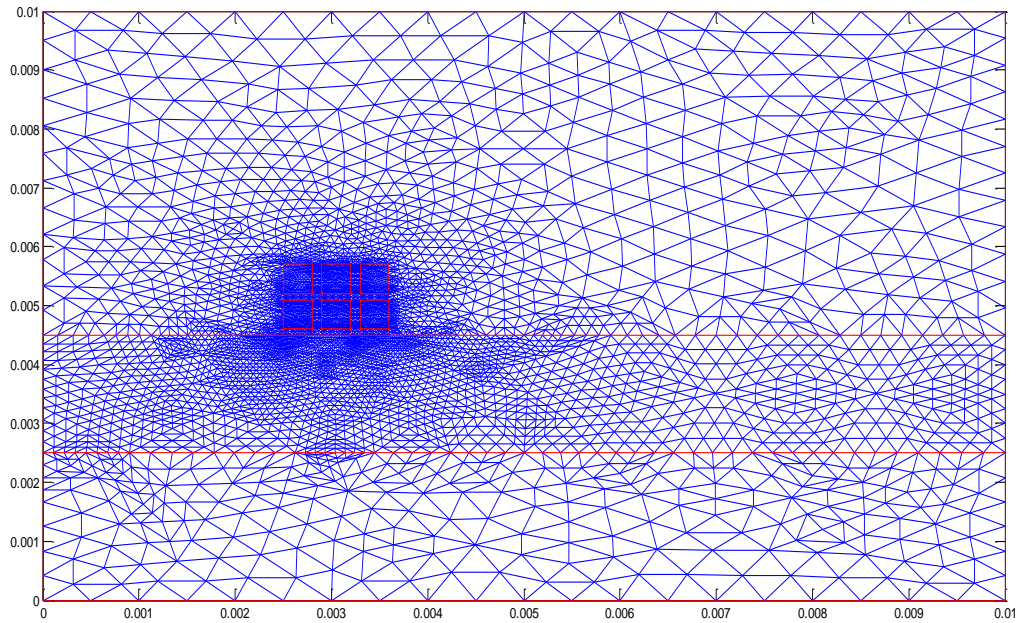


Figure IV-2: maillage du domaine d'étude

## IV.4 Résultats de simulation :

### IV.4.1 Effet de la variation de l'épaisseur de la charge :

La figure suivante représente la variation de profondeur de pénétration des courants de Foucault en fonction de la fréquence, pour une charge en Acier inox, puis en Chrome et enfin en Aluminium.

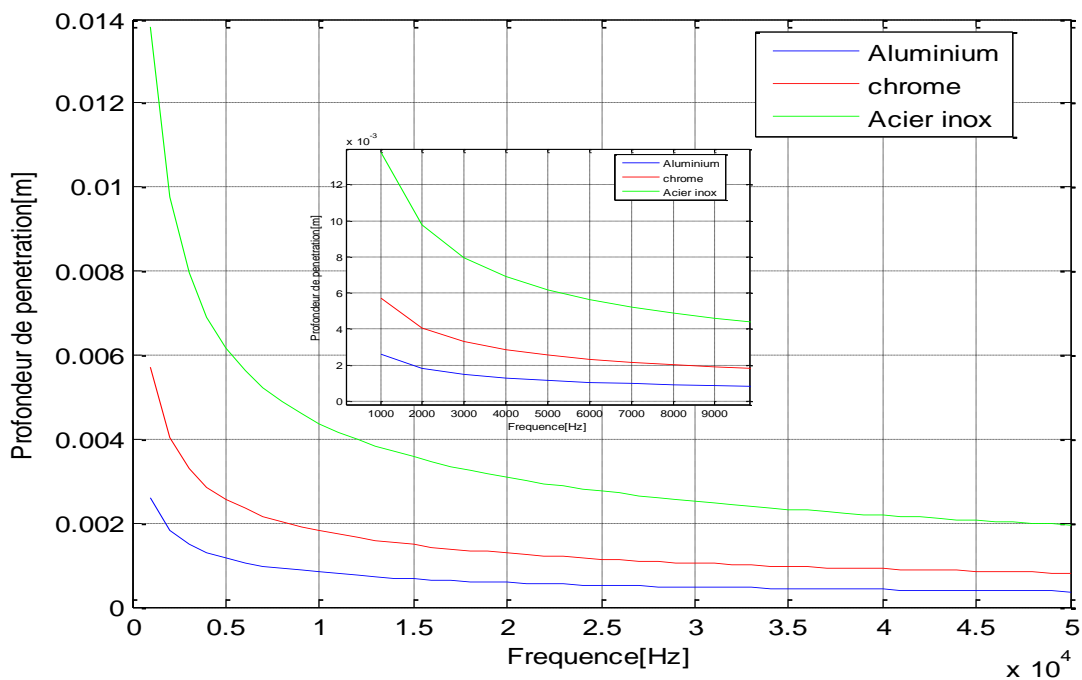
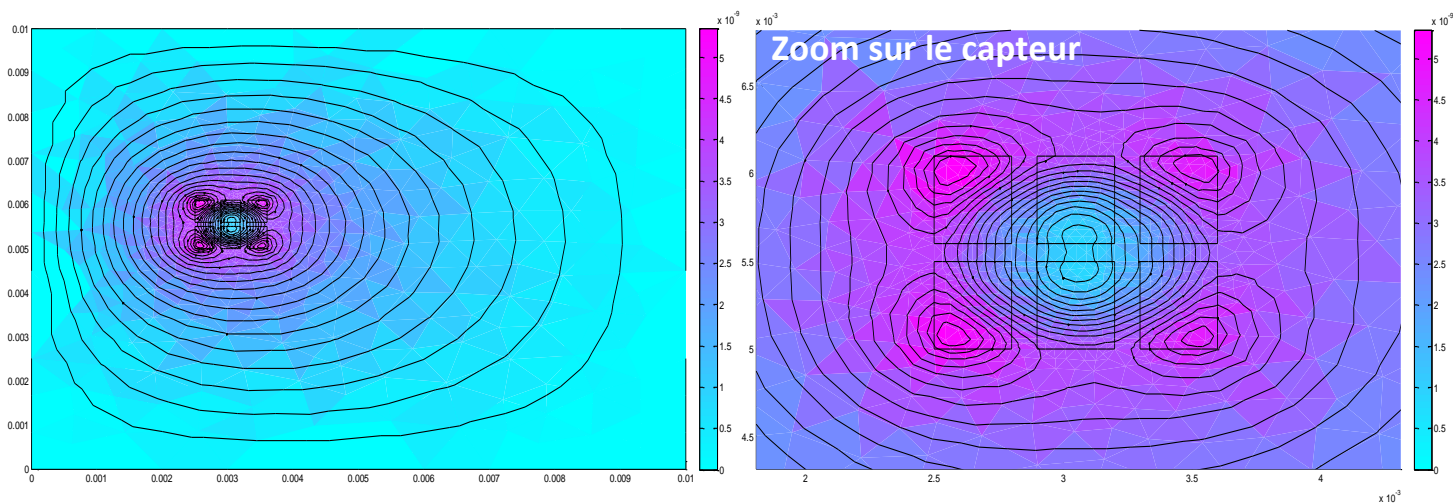


Figure IV-3 : Variation de la profondeur de pénétration en fonction de la fréquence

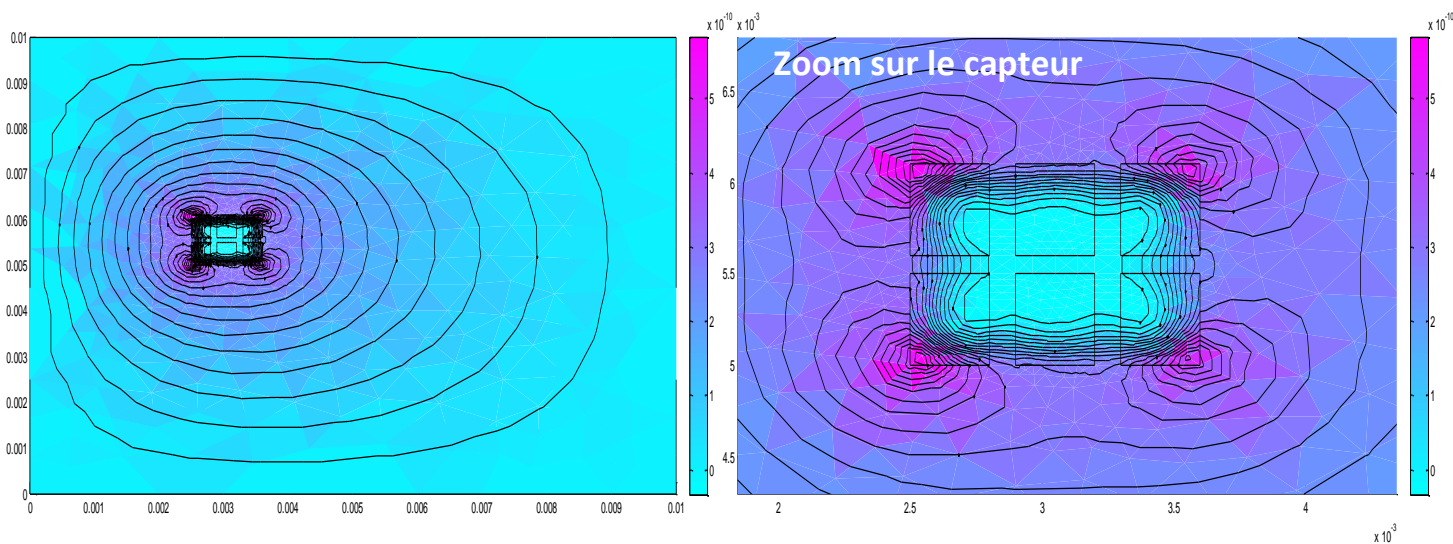
Les figures suivantes (IV.04 et IV.05 ) illustrent la topologie des lignes de potentiel vecteur magnétique en régime à vide pour une fréquence de 100kHz et de 500 kHz

a) 100KHz



*Figure IV-4 : Topologie des lignes de potentiel vecteur magnétique à vide (100Khz)*

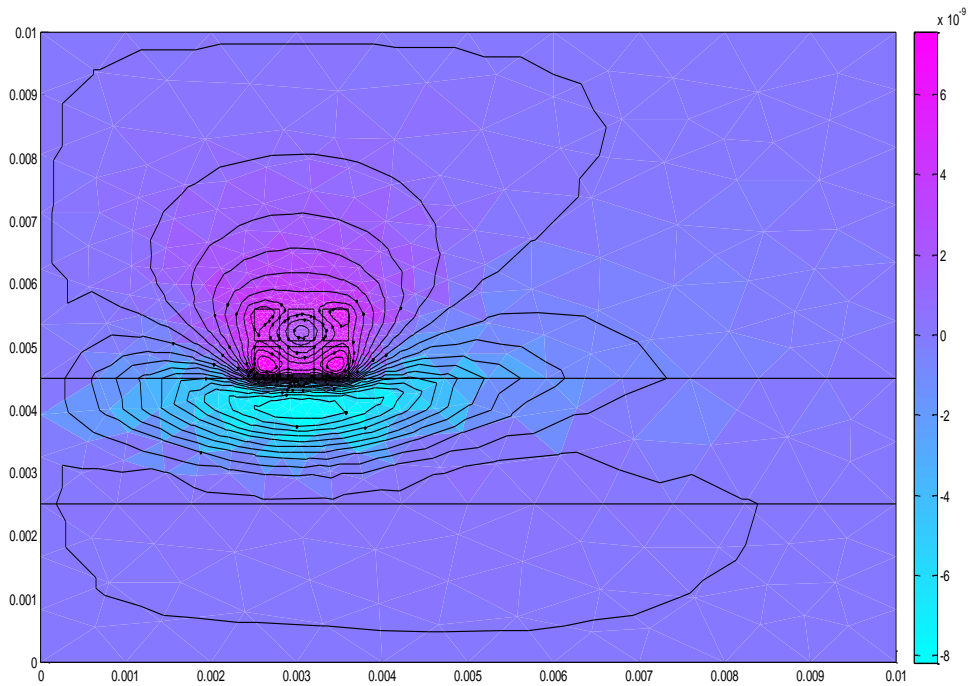
b) 500KHz



*Figure IV-5 : Topologie des lignes de potentiel vecteur magnétique à vide (500KHz)*

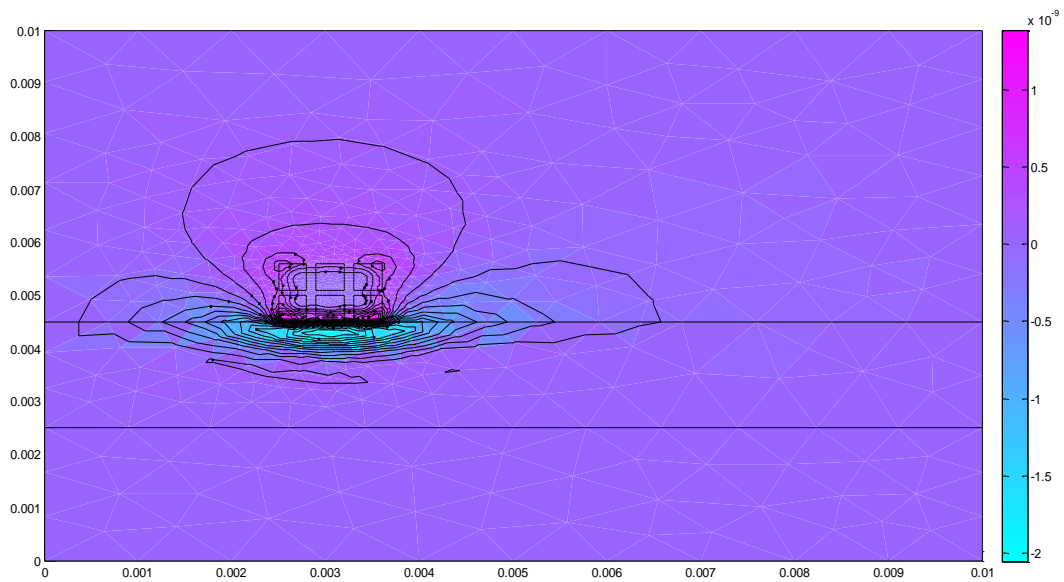
Les figures suivantes (IV.06 et IV.07) illustrent la topologie des lignes de potentiel vecteur magnétique en régime en charge sans entrefer pour une fréquence de 100kHz et de 500 kHz.

c) 100kHz



*Figure IV-6: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique en régime en charge sans entrefer (100KHz)*

d) 500kHz



*Figure IV-7: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique en régime en charge sans entrefer (500KHz)*

## Chapitre IV : Applications et Résultats

Les figures (IV.8), (IV.9) et (IV.10), Représentent respectivement la variation de la résistance R, de la réactance X et de l'impédance Z en fonction de l'épaisseur de la pièce (le chrome) pour trois fréquences différentes.

Ces paramètres électriques (R, X et Z) sont comparés à une référence qui représente le capteur en régime à vide :

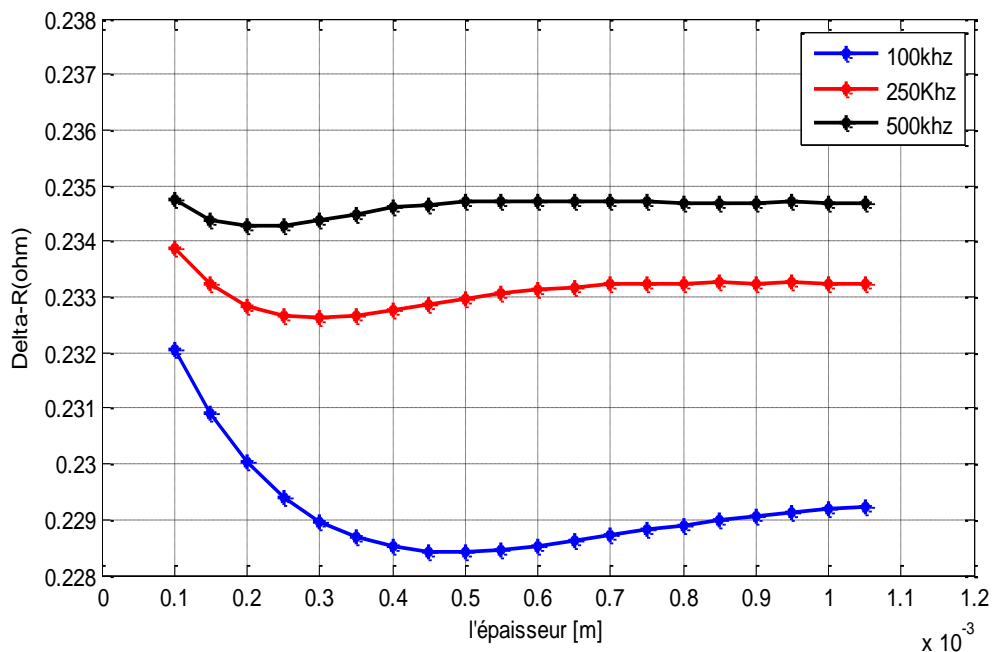
$$\text{Delta\_R} = R_{\text{charge}} - R_0;$$

$$\text{Delta\_X} = X_{\text{charge}} - X_0;$$

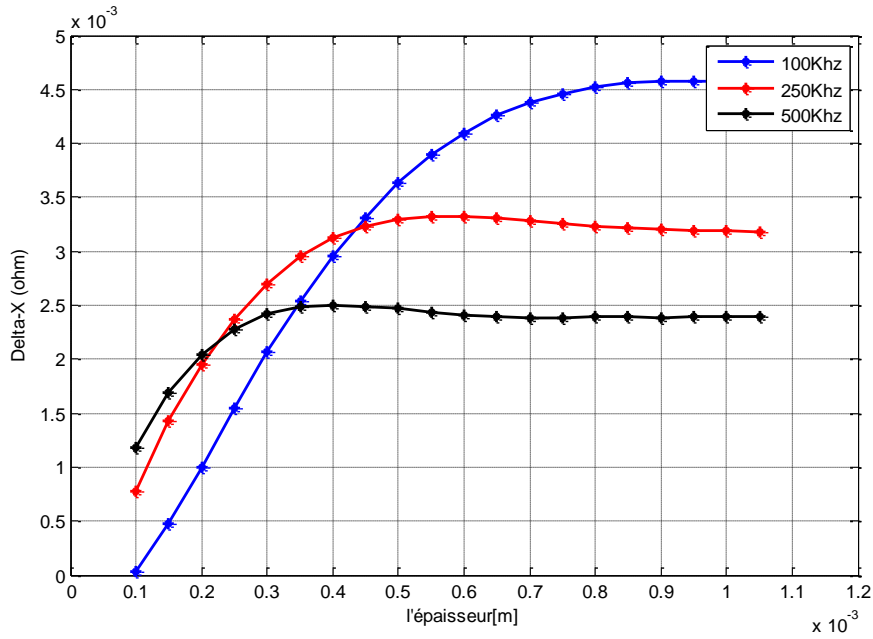
$$\text{Delta\_Z} = Z_{\text{charge}} - Z_0;$$

$R_0$ ,  $X_0$  et  $Z_0$  : respectivement résistance, réactance et impédance du capteur en à vide.

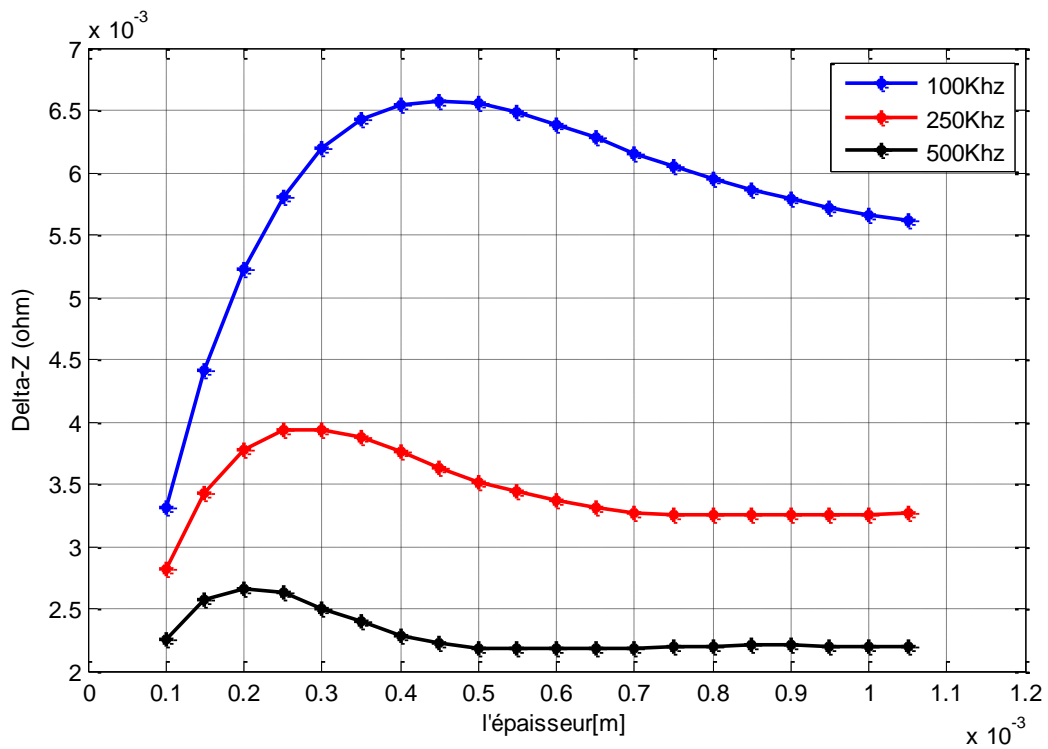
$R_{\text{charge}}$ ,  $X_{\text{charge}}$  Et  $Z_{\text{charge}}$  : respectivement résistance, réactance et impédance du capteur en charge sans entrefer.



**Figure IV-8: Variation de la résistance compensée du capteur en fonction de l'épaisseur pour le Chrome**

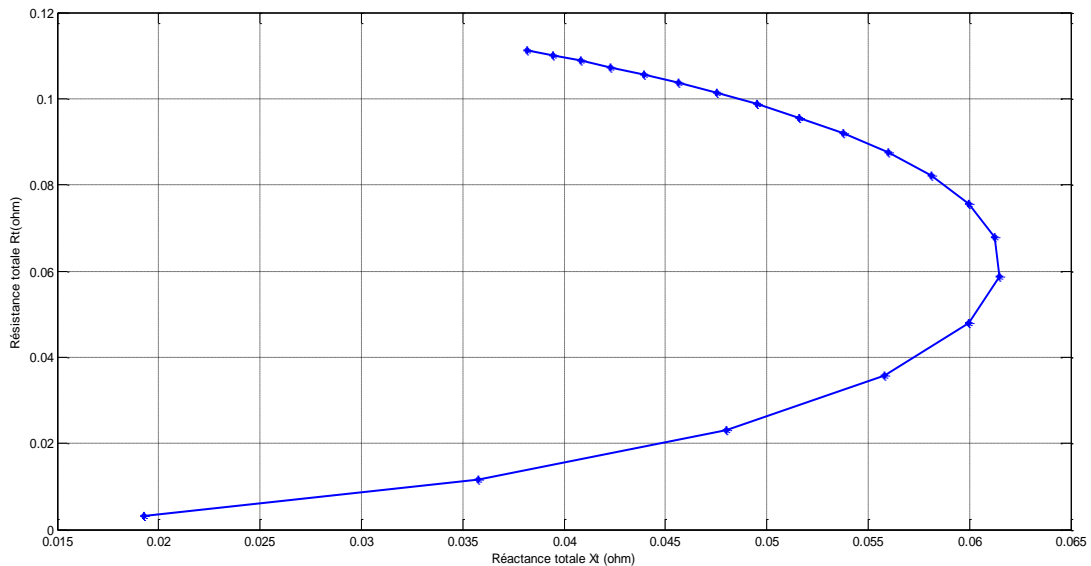


**Figure IV-9: Variation de la réactance compensée du capteur en fonction de l'épaisseur pour le Chrome**



**Figure IV-10: Variation de l'impédance compensée en fonction de l'épaisseur pour le Chrome**

La figure (IV.11) illustre la variation de la résistance en fonction de la réactance (plan d'impédance) pour une fréquence variable, dans le cas d'une charge en chrome présentant une épaisseur de 2 mm.



*Figure IV-11: Variation de la résistance en fonction de la réactance pour une fréquence variable*

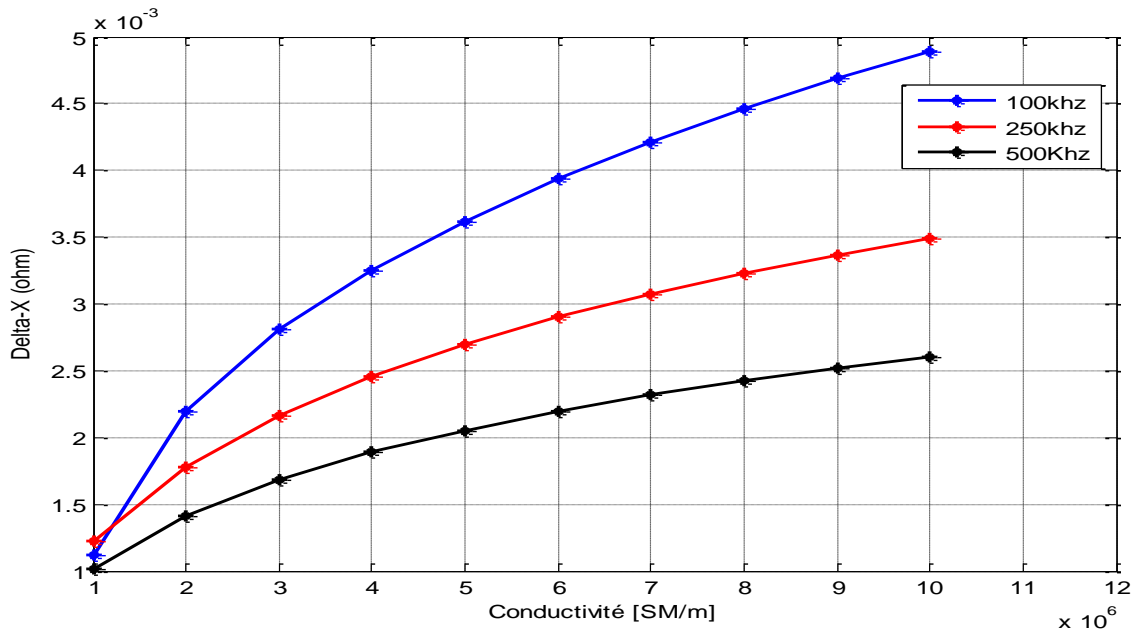
- **Interprétation des résultats**

À partir des figures ci-dessus, on remarque que la réactance de la bobine augmente avec l'augmentation de l'épaisseur de la pièce jusqu'à la profondeur de pénétration des courants de Foucault où la réactance commence à diminuer. Ceci est justifié par le décroissement de ces courants au-delà de la profondeur de pénétration. Par contre la résistance diminue jusqu'à la profondeur de pénétration, puis elle augmente progressivement pour se stabiliser à une valeur fixe.

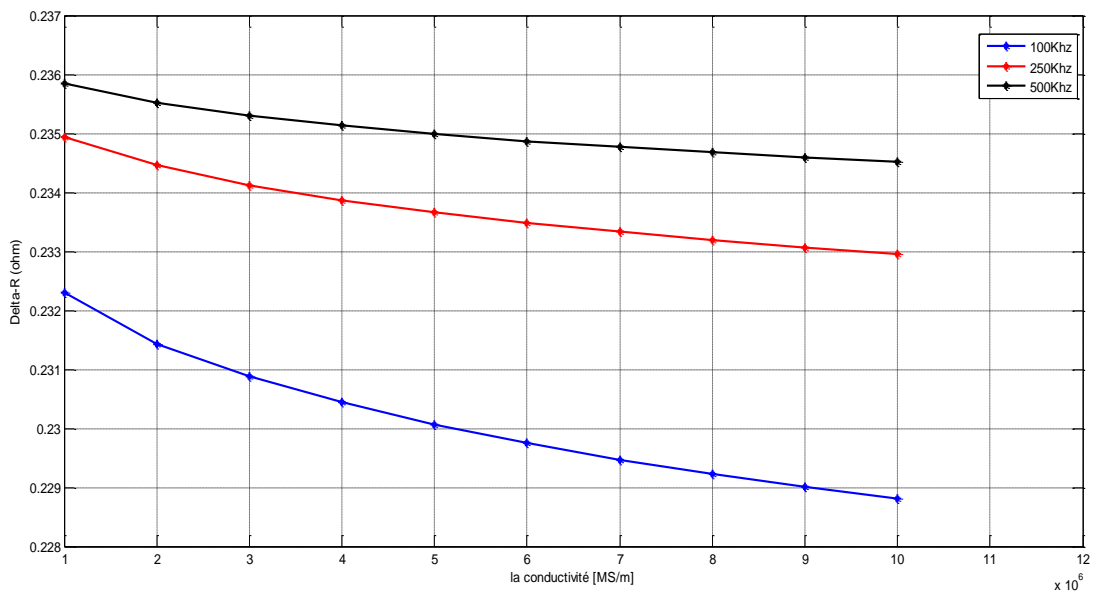
Concernant l'impédance du capteur elle augmente avec l'augmentation de l'épaisseur jusqu'à la profondeur de pénétration, puis elle diminue pour atteindre une valeur constante.

## IV.4.2 Effet de la variation de la conductivité de la charge

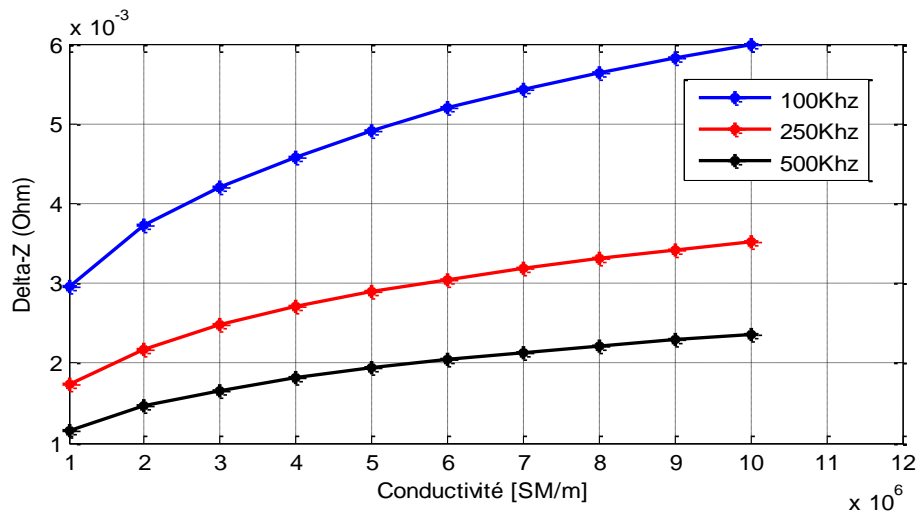
Les figures (IV.12), IV.13) et (IV.14) représentent respectivement la variation de la réactance, résistance et l'impédance en fonction de la conductivité de la charge pour trois fréquences différente.



*Figure IV-12: Variation de la réactance en fonction de la conductivité pour le Chrome*

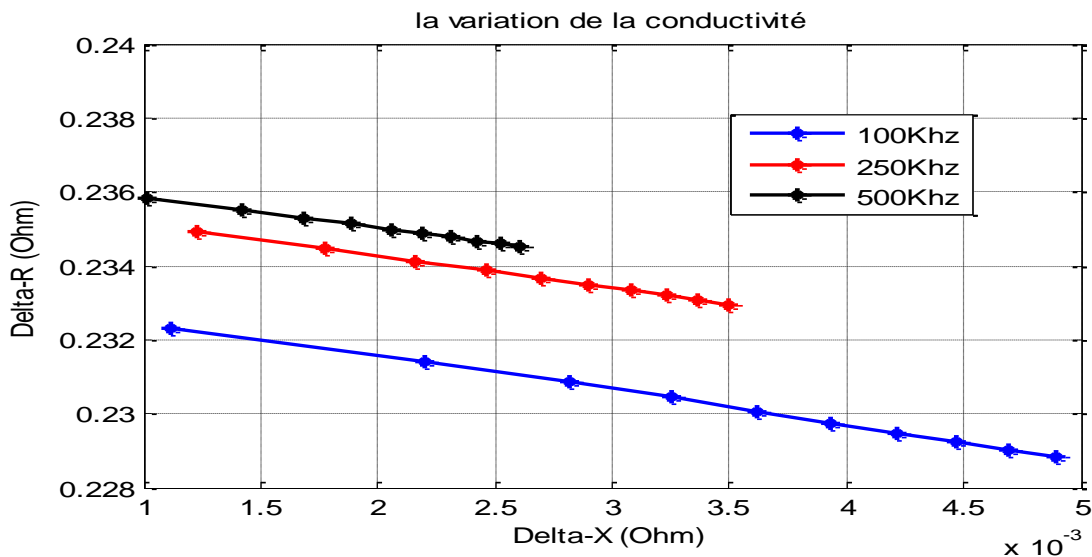


*Figure IV-13: Variation de la résistance en fonction de la conductivité pour le Chrome*



**Figure IV.12 : Variation de l'impédance en fonction de la conductivité pour le Chrome**

La figure ci-dessous représente la résistance du capteur en fonction de sa réactance pour différentes valeurs de la fréquence, pour une conductivité variable.



**Figure IV-14: Variation de la résistance en fonction de la réactance compensée**

- **Interprétations de résultats :**

À partir des figures ci-dessus, on remarque que la réactance de la bobine ainsi que son impédance augmentent avec l'augmentation de la conductivité contrairement à la résistance qui diminue avec cette augmentation. On remarque aussi l'influence quantitative de la fréquence d'alimentation sur l'impédance du capteur, y compris la résistance et la réactance.

### IV.4.3 Effet de la variation de l'entrefer (lift-off) sur l'impédance du capteur

Pour ne garder uniquement que la variation de l'impédance due à la présence de l'entrefer nous avons comparé les résultats obtenus à la référence correspondante à l'essai en charge sans entrefer

$$\Delta Z = Z - Z'_0;$$

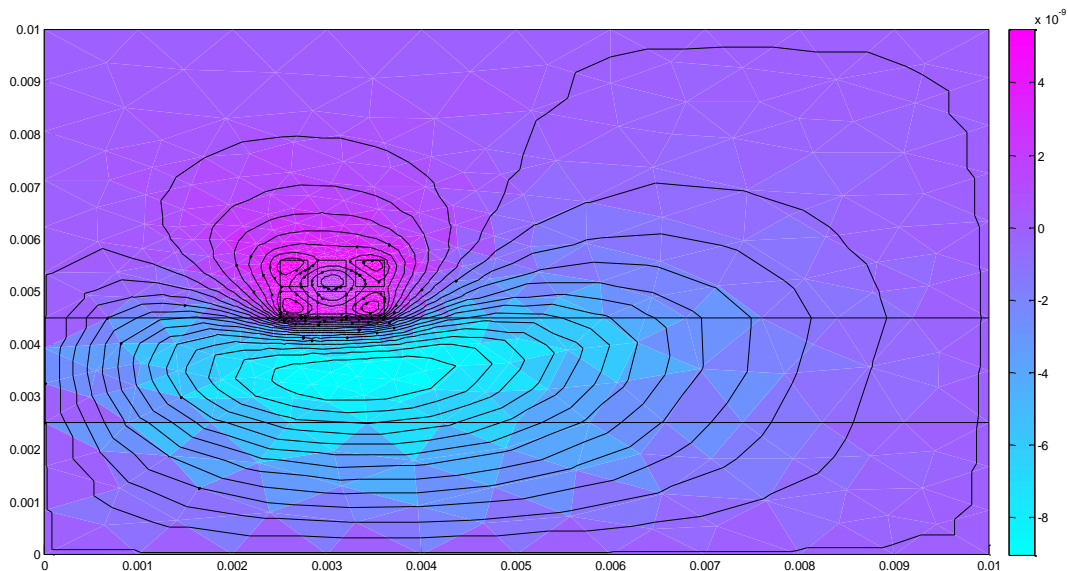
$Z$  : impédance en charge

$Z'_0$  : impédance sans entrefer

#### IV.4.3.1 Dispositif sans entrefer

La simulation se fait avec une fréquence de 100KHz

- Pour acier inox ( $\sigma = 1.33 \text{ MS/m}$ ) :



*Figure IV-15: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour l'Acier inox (sans entrefer)*

L'impédance sans entrefer = 0.114738319373214 [Ohm]

• Pour le chrome ( $\sigma = 7.74 \text{ MS/m}$ ) :

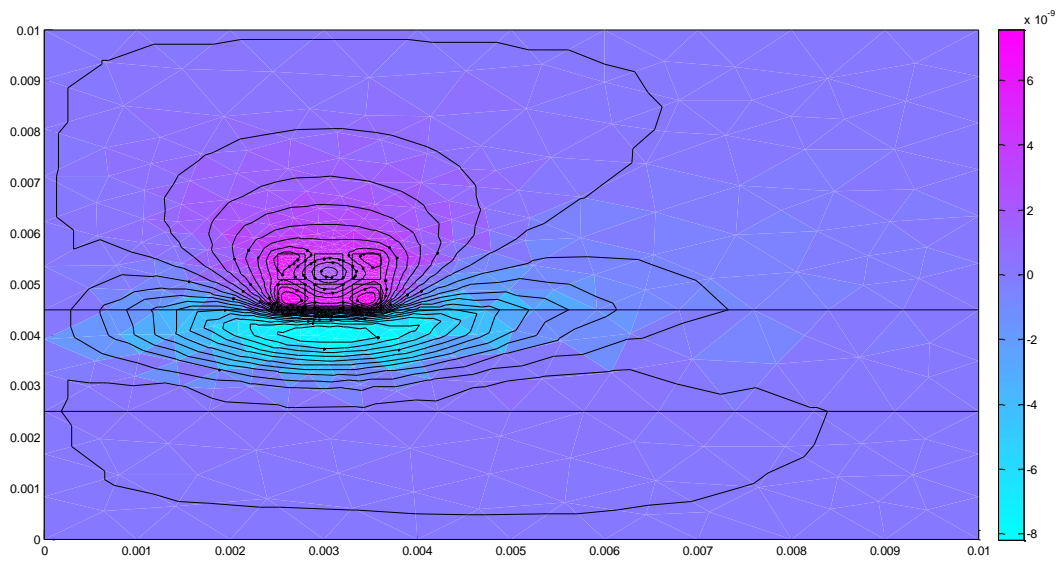


Figure IV-16: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour le Chrome (sans entrefer)

L'impédance sans entrefer = 0.112447984856490 [Ohm]

• Pour l'Aluminium ( $\sigma = 37.7 \text{ MS/m}$ ) :

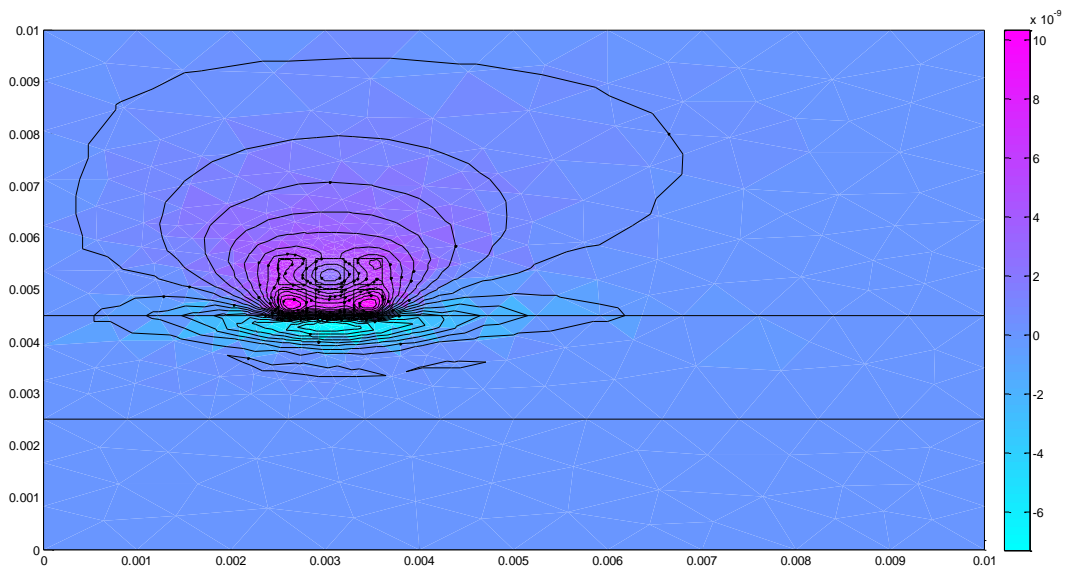


Figure IV-17: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour l'Aluminium (sans entrefer)

L'impédance sans entrefer = 0.109922487448688 [Ohm]

## IV.4.3.2 Dispositif avec entrefer

Pour une fréquence de 100 KHz on a varié l'entrefer de 0.1mm jusqu'à 1.1 mm

- Pour acier inox :

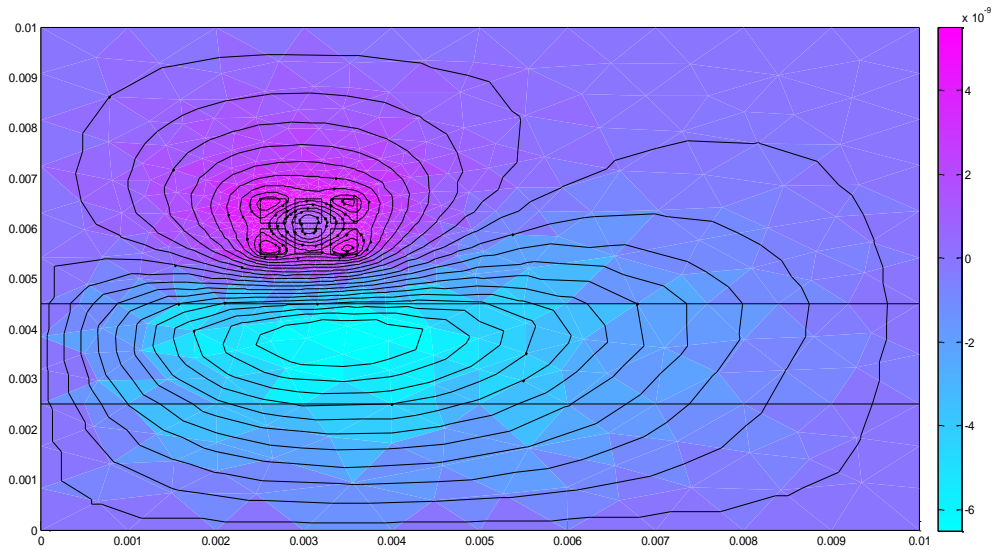


Figure IV-18: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour l'Acier inox (avec entrefer de 1.1mm)

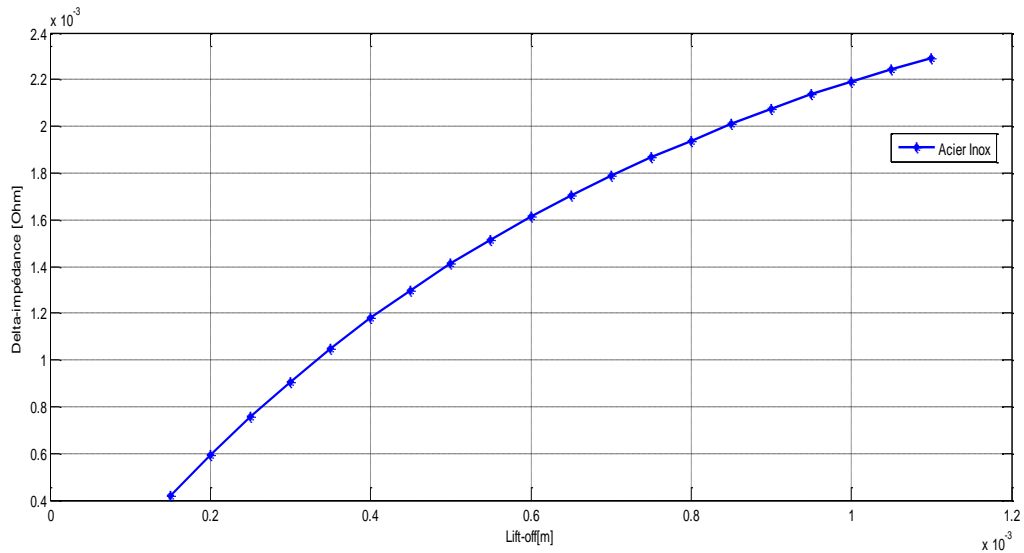


Figure IV-19: Variation de l'impédance de capteur en fonction de l'entrefer pour l'Acier inox

- Pour chrome

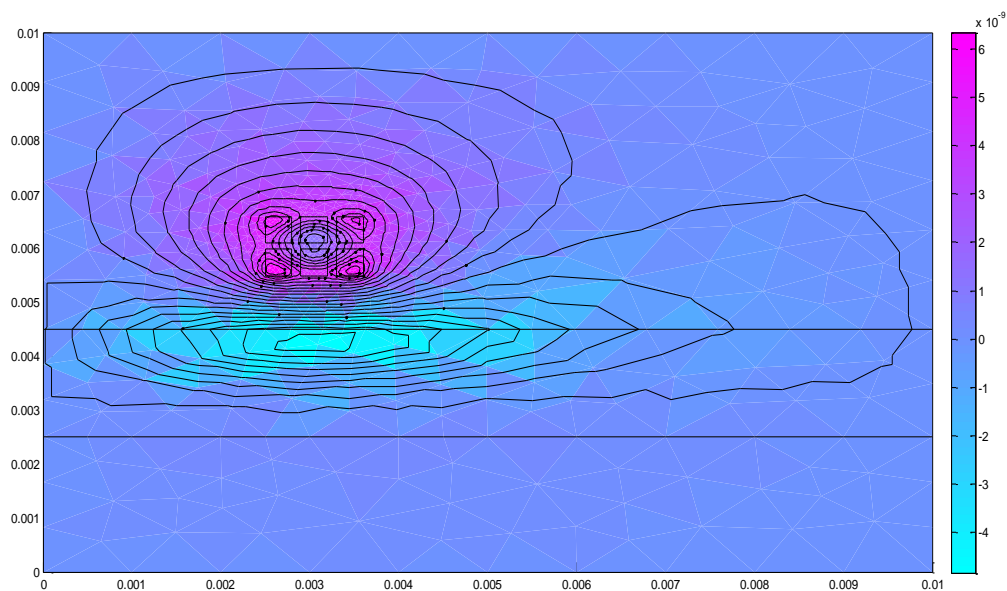


Figure IV-20: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour le Chrome (avec entrefer de 1.1mm)

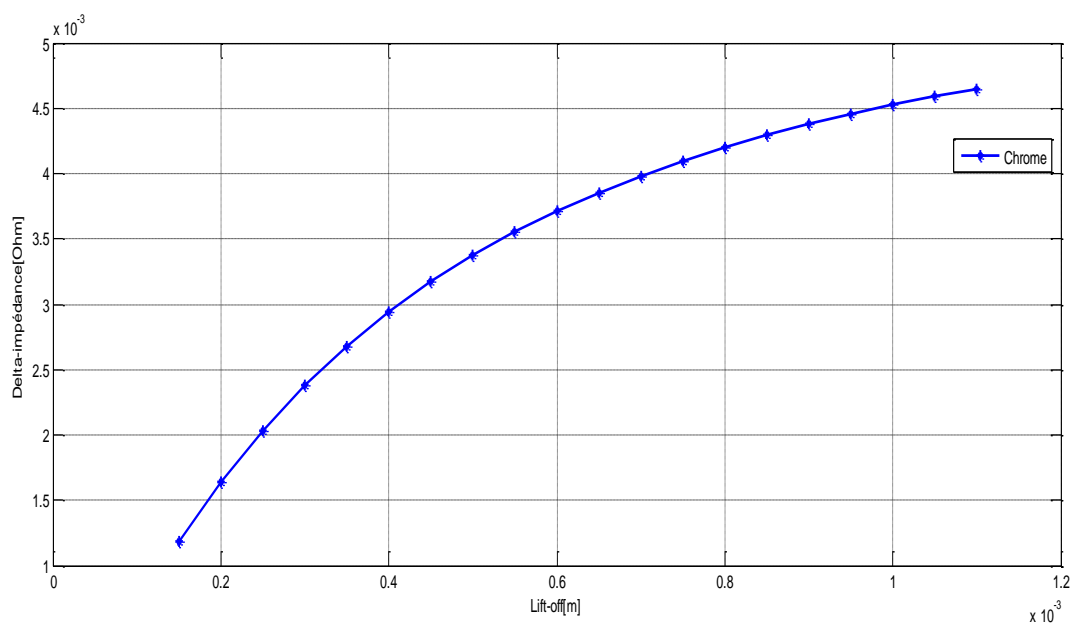


Figure IV-21: Variation de l'impédance de capteur en fonction de l'entrefer pour le Chrome

• Pour aluminium :

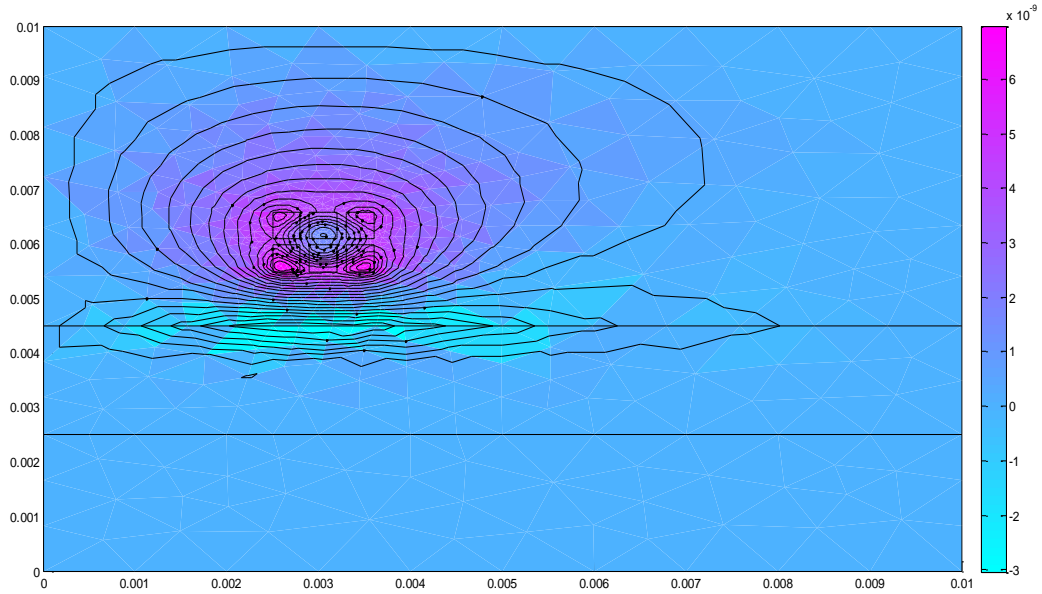


Figure IV-22: Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique pour l'Aluminium (avec entrefer de 1.1mm)

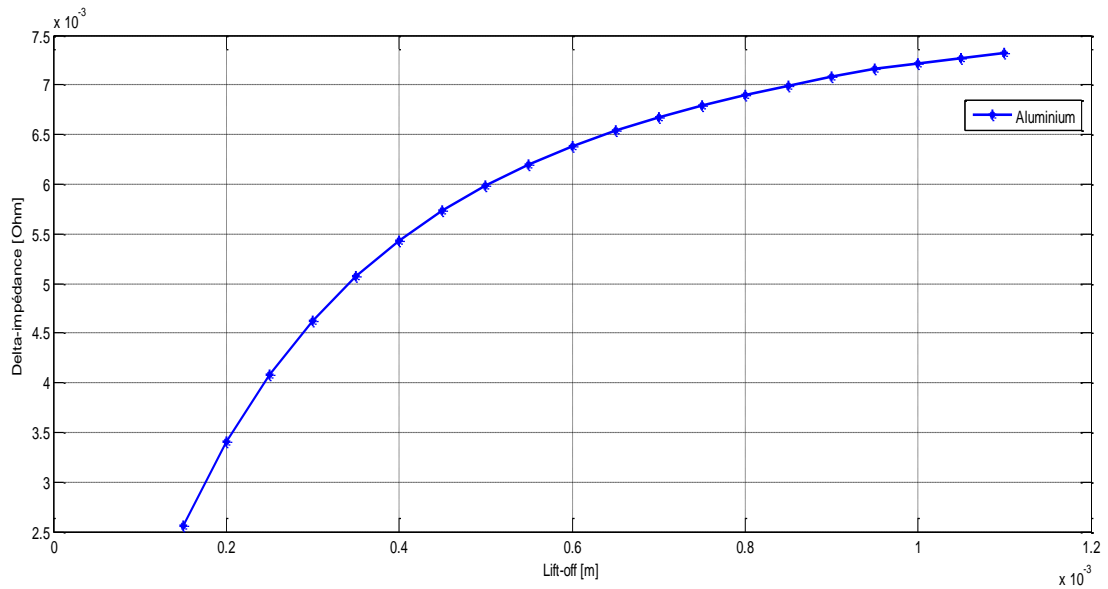
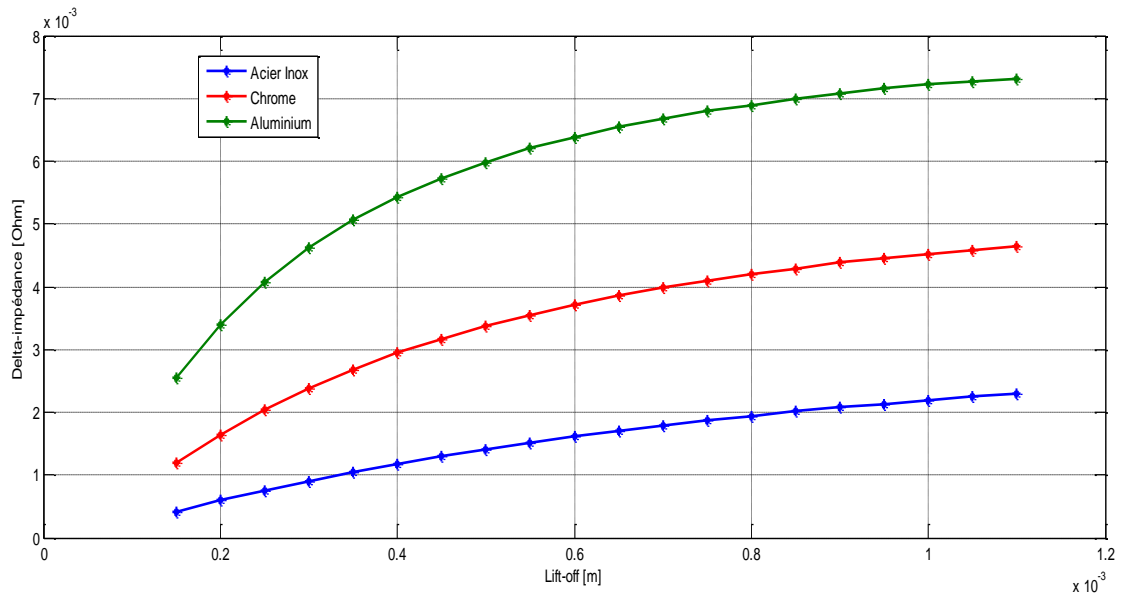


Figure IV-23: Variation de l'impédance de capteur en fonction de l'entrefer pour l'Aluminium



**Figure IV-24:** Variation de l'impédance de capteur en fonction de l'entrefer pour les trois matériaux

### IV.5 Interprétation des résultats

On remarque que pour les trois matériaux (chrome, acier inox, aluminium), l'impédance du capteur augmente d'une façon proportionnelle en fonction de l'entrefer, Cette augmentation est due au décroissement des courants induits dans ces matériaux en s'éloignant du capteur (les courants induits sont diminués car la quantité de lignes de champ magnétique qui atteint la charge est très petite).

En comparant les trois résultats (**figureIV.24**) on remarque que les impédances suivent la même allure, mais elles se différencient en valeur ; ça revient à leurs conductivités, on remarque bien que la valeur de l'impédance de capteur dans le cas de l'Aluminium est plus grande par rapport à celles de Chrome et de l'Acier inox.

### IV.6 Conclusion

D'après les résultats que nous avons obtenus, l'évaluation non destructive par courant de Foucault nous a permis de caractériser les paramètres physique et géométrique d'une charge conductrice en exploitant la variation la résistance, l'inductance et l'impédance de capteur. Toute variation au niveau de la charge est traduite par une modification de la réponse du capteur.

# **Conclusion générale**

Le travail présenté dans ce mémoire est partagé en quatre chapitres:

Dans le premier chapitre nous avons présenté des généralités sur le CND et l'END, les différentes méthodes utilisées, où le contrôle par les courants de Foucault est particulièrement détaillé.

Le deuxième chapitre a été consacré à la description mathématique des courants de Foucault,

Le troisième chapitre nous l'avons consacré à la présentation de certaines méthodes analytiques, numériques de résolution des équations électromagnétiques (équations aux dérivées partielles).

Le quatrième chapitre présente la partie application et résultats, on a étudié l'influence des paramètres physiques et géométriques sur la réponse du capteur, les grandeurs exploitées sont la résistance, la réactance et l'impédance du capteur. Le capteur considéré est un capteur absolu.

L'équation qui régit le fonctionnement de notre dispositif a été formulée à partir des équations de Maxwell pour aboutir à une équation différentielle aux dérivées partielles, qu'on a résolu numériquement par la méthode des éléments finis, pour avoir comme solution une répartition du potentiel vecteur magnétique et les différentes grandeurs qui peuvent être dérivées directement de celui-ci sur l'ensemble de notre domaine d'étude (capteur, air et cible). Un code de calcul sous environnement MATLAB ou la méthode des éléments finis a été développée.

On a remarqué que la réactance de la bobine augmente avec l'augmentation de l'épaisseur de la pièce jusqu'à la profondeur de pénétration des courants de Foucault où la réactance commence à diminuer. Ceci est justifié par le décroissement de ces courants au-delà de la profondeur de pénétration. Par contre la résistance diminue jusqu'à la profondeur de pénétration, puis elle augmente progressivement pour se stabiliser à une valeur fixe.

Concernant l'impédance du capteur elle augmente avec l'augmentation de l'épaisseur jusqu'à la profondeur de pénétration, puis elle diminue pour atteindre une valeur constante.

On remarque aussi que la réactance de la bobine ainsi que son impédance augmentent avec l'augmentation de la conductivité contrairement à la résistance qui diminue avec cette augmentation.

On remarque aussi l'influence quantitative de la fréquence d'alimentation sur l'impédance du capteur, y compris la résistance et la réactance.

Pour les trois matériaux (chrome, acier inox, aluminium), l'impédance du capteur augmente d'une façon proportionnelle en fonction de l'entrefer, Cette augmentation est due au décroissement des courants induits dans ces matériaux en s'éloignant du capteur (les courants induits sont diminués car la quantité de lignes de champ magnétique qui atteint la charge est très petite).

Comme perspectives a ce travail, on propose une étude en régime pulsé par laquelle nous aurons plus d'informations et de précision sur les caractéristiques de la pièce contrôlée, et aussi une modélisation en 3D plus fine pourrait être envisagée.

# **Bibliographie**

- [1] Hamel Meziane « Etude et réalisation d'un dispositif de détection de défauts par méthodes électromagnétiques » Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 18/10/2012
- [2] Yahya Choua « Application de la méthode des éléments finis pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courants de Foucault. Modélisation et simulation » Université Paris Sud - Paris XI, 2009.
- [3] RABAH MOULDI « support de cours contrôle non destructif CND » mention génie mécanique 2016/2017.
- [4] BOUALI Ferroudja « Utilisation d'une méthode semi-analytique pour l'étude du contrôle non destructif en régime pulsé » Mémoire de Magister, université Mouloud Mammeri – TIZI-OUZOU, 27.01.2010
- [5] TALEB M'HAMMED Mustapha et GHEDAMSI Elhachmi « Modélisation semi-analytique d'un système de CND-CF pour la caractérisation d'un défaut dans la structure d'un matériau conducteur » Mémoire de Master, UNIVERSITÉ KASDI MERBAH – OUARGLA, 26/06/2013
- [6] Mouhoub SALHI « Modélisation Electromagnétique des Capteurs à Fonctions Séparées dans les Dispositifs Axisymétriques de Contrôle Non Destructif par Courant de Foucault (CND-CF) » Mémoire De Magistère Université de Bejaia ,juin 2008.
- [7] Eric KUHN « CONTRÔLE NON DESTRUCTIF D'UN MATÉRIAU EXCITÉ PAR UNE ONDE ACOUSTIQUE OU THERMIQUE. OBSERVATION PAR THERMOGRAPHIE» THESE DE DOCTORAT UNIVERSITE PARIS OUEST NANTERRE LA DEFENSE, 06 décembre2013.
- [8] TITOUAH Lounis et ZIANE Abdeslam «Caractérisation Non Destructive par Courants de Foucault Pulsés d'une rainure par inversion associé à méthode des circuits électriques couplés » mémoire de master, UNIVERSITE A. MIRA-BEJAIA ,2013/1014
- [9] El Ghouli Islam Nacereddine «Réalisation D'un Banc D'essais Pour L'inversion Des Signaux En Contrôle Non Destructif Par Courants De Foucault »thèse de doctorat, Université Mohamed Khider – Biskra.

- [10] Bachir HELIFA «CONTRIBUTION A LA SIMULATION DU CND PAR COURANTS DE FOUCAULT EN VUE DE LA CARACTERISATION DES FISSURES DEBOUCHANTES» Thèse de Doctorat ,Université de Nantes, 1juin 2012.
- [11] André Genon, Willy Legros, « Machines électriques », Paris, Hermès science Publications, 2000.
- [12] Tomasz Chady, Masato Enokizono, Ryszard Sikora « *Neural Network Models of Eddy Current Multi-Frequency System for Nondestructive Testing*» IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 36, No. 4, July 2000, pp. 1724-1727
- [13] Z. Ren, Solving 3-D eddy current problem containing thin cracks using dual formulations and shell elements, IEE Proc.-Si. Mms. Technol., Vol. 146. No. 1, January 1999, pp. 9-14.
- [14] Zemouri Nassima « Etude et Réalisation d'un Système Multicapteurs Destiné au Diagnostic des Matériaux Conducteurs »Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 21/07 /2016
- [15] Kana Ouzna « conception d'un inducteur destine à l'entraînement électrique d'un ascenseur » » Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 03/7/2013
- [16] Hervé Oudin. « Méthode des éléments finis ». Engineering school. Ecole Centrale de Nantes, 2008, pp.63.
- [17] Medani Fares Akroun Brahim « étude du contrôle non destructif par courant de Foucault en utilisant la méthode des éléments finis » Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou,12/07 /2017
- [18] Ait Hamou Assia « Mise en œuvre d'un modèle couplé analytique-numérique pour la détection de défauts à vitesse élevée » Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 12/03/2015
- [19] Menana Hocine. «Contribution à l'étude d'un capteur à courant de Foucault en régime pulsé, Application à l'évaluation des paramètres d'une pièce conductrice, ».Ecole polytechnique de l'université de Nantes, 2005/2006.

